T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER OLMAYAN KESİRLİ MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ABDULSAMET BEKTAŞ

DENİZLİ, AĞUSTOS- 2022

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER OLMAYAN KESİRLİ MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ABDULSAMET BEKTAŞ

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2022

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

Abdulsamet BEKTAŞ

İMZA

ÖZET

LİNEER OLMAYAN KESİRLİ MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ABDULSAMET BEKTAŞ
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. ALİ KURT)

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2022

Dört bölümden oluşan tezin birinci bölümü olan giriş bölümünde, kesirli türevin gelişimi, çeşitli kesirli türev tanımları ve bazı özelliklerinin yanı sıra kesirli türev ile ilgili literatürde yer alan bazı çalışmalara yer verildi.

İkinci bölümde, conformable türünden kesirli türev içeren kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak için kullandığımız yöntemler olan alt denklem yöntemi ve $\exp(-\phi(\xi))$ yöntemi ifade edilmiştir.

Tezin orijinal kısmı olan üçüncü bölümde, her biri kesirli mertebeden olan Yu-Toda-Sasa-Fukuyama, geliştirilmiş değiştirilmiş KDV, Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa, Caudrey-Dodd-Gibbon, negatif mertebeli KDV-Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff, genelleştirilmiş Benjamin denklemlerinin tam çözümleri MATHEMATICA programı aracılığıyla alt denklem yöntemi ve $\exp(-\phi(\xi))$ yöntemi kullanarak elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen çözümlerin üç boyutlu grafiklerine de bu bölümde yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Conformable kesirli türev, Alt denklem yöntemi, Tam çözüm, $\exp(-\phi(\xi))$ yöntemi.

ABSTRACT

ANALYTICAL SOLUTIONS OF NONLİNEAR FRACTIONAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
MSC THESIS
ABDULSAMET BEKTAŞ
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. ALİ KURT)

DENİZLİ, AUGUST 2022

In the introduction, which is the first part of the four part thesis, the development of fractional derivative, various fractional derivative definitions and some of its properties, as well as some studies in the literature on fractional derivatives were included.

In the second part, the $\exp(-\phi(\xi))$ -method and sub-equation method are expressed, which are the methods we use to find the exact solutions of partial differential equations containing fractional derivatives of the conformable type.

In the third part, which is the original part of the thesis, the exact solutions of fractional Yu-Toda-Sasa-Fukuyama equation, improved modified KDV equation, Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa equation, Caudrey-Dodd-Gibbon equation, negative order KDV-Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff equation and generalized Benjamin equation are obtained using the sub-equation method and $\exp(-\phi(\xi))$ method with the help of MATHEMATICA program. In addition, 3D graphics of the obtained solutions are also included in this section.

In the fourth part, conclusions and suggestions were included.

KEYWORDS: Conformable fractional derivative, Sub-equation method, $\exp(-\phi(\xi))$ method, Exact solution.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET ..... **i**
ABSTRACT ..... **ii**
İÇİNDEKİLER ..... **iii**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **iv**
SEMBOL LİSTESİ ..... **v**
ÖNSÖZ ..... **vi**
1. GİRİŞ **1**
1.1 Kesirli Türev Tanımları 3
2. MATERYAL VE YÖNTEM **12**
2.1 Homojen Denge Prensibi 12
2.2 Alt Denklem Yöntemi 12
2.3 $\exp(-\phi(\xi))$ Yöntemi 14
3. BULGULAR **16**
3.1 Kesirli Mertebeden Yu-Toda-Sasa-Fukuyama Denkleminin Analitik Çözümleri 16
3.2 Kesirli Mertebeden Geliştirilmiş Değiştirilmiş KdV Denkleminin Analitik Çözümleri 19
3.3 Kesirli Mertebeden Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa Denkleminin Analitik Çözümleri 22
3.4 Kesirli Mertebeden Caudrey-Dodd-Gibbon Denkleminin Analitik Çözümleri 25
3.5 Kesirli Mertebeden Negatif Mertebeli KDV-Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff Denklemi 33
3.6 Kesirli Mertebeden Genelleştirilmiş Benjamin Denkleminin Analitik Çözümleri 35
4. SONUÇ VE ÖNERİLER **39**
5. KAYNAKLAR **40**
6. ÖZGEÇMİŞ **44**

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1: $u_1(x,y,z,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 17
Şekil 2: $u_2(x,y,z,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 17
Şekil 3: $u_3(x,y,z,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 18
Şekil 4: $u_4(x,y,z,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 18
Şekil 5: $u_5(x,y,z,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 19
Şekil 6: $u_1(x,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 20
Şekil 7: $u_2(x,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 21
Şekil 8: $u_3(x,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 21
Şekil 9: $u_4(x,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 21
Şekil 10: $u_1(x,y,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 23
Şekil 11: $u_2(x,y,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 24
Şekil 12: $u_3(x,y,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 24
Şekil 13: $u_4(x,y,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 25
Şekil 14: $u_1(x,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 27
Şekil 15: $u_2(x,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 28
Şekil 16: $u_3(x,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 28
Şekil 17: $u_4(x,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 29
Şekil 18: $u_5(x,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 30
Şekil 19: $u_6(x,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 30
Şekil 20: $u_7(x,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 31
Şekil 21: $u_8(x,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 32
Şekil 22: $u_9(x,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 32
Şekil 23: $u_1(x,y,z,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 34
Şekil 24: $u_2(x,y,z,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 34
Şekil 25: $u_3(x,y,z,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 35
Şekil 26: $u_1(x,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 37
Şekil 27: $u_2(x,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 37
Şekil 28: $u_3(x,t)$ fonksiyonunun 3 boyutlu grafiği 38

SEMBOL LİSTESİ

$f^{(n)}(t)$: $n-$inci Mertebeden Türevlenebilir Fonksiyon

$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$: $f(t)$ fonksiyonunun $n-$inci Mertebeden Türevi

$\Gamma(n)$: Gama Fonksiyonu

$\beta(x, y)$: Beta Fonksiyonu

$E_a(z)$: Mittag-Leffer Fonksiyonu

${}_aD_t^{\beta} f(t)$: $f(t)$ fonksiyonunun $[a,t]$ kapalı aralığında $\beta-$inci mertebeden Riemann-Liouville Kesirli Türevi

${}_aD_t^{-\beta} f(t)$: $f(t)$ fonksiyonunun $[a,t]$ kapalı aralığında $\beta-$inci mertebeden Riemann-Liouville Kesirli İntegrali

${}_a^C D_t^{\beta} f(t)$: $f(t)$ fonksiyonunun $[a,t]$ kapalı aralığında $\beta-$inci mertebeden Caputo Kesirli Türevi

$D^{\alpha} f(x)$: $f(x)$ fonksiyonunun $[a,\infty)$ kapalı aralığındaki $\alpha-$inci mertebeden Weyly Kesirli Türevi

$D^{\alpha}_{0,\sigma,\eta+\sigma}(f(x))$: $f(x)$ fonksiyonunun $\alpha-$inci mertebeden Erdelyi-Kober Kesirli Türevi

$D^{\alpha} f(x)$: $f(x)$ fonksiyonunun $[a,x]$ kapalı aralığında $\alpha-$inci mertebeden Hadamard Kesirli Türevi

$D_x^{\alpha}(f(x))$: $f(x)$ fonksiyonunun $(-\infty,\infty)$ aralığında $\alpha-$inci mertebeden Riesz Kesirli Türevi

ÖNSÖZ

Öğrenim hayatım boyunca sevgiyle, güvenle ve sabırla yanımda olan ve ideallerimi gerçekleştirmemi sağlayan çok değerli aileme ve biricik eşim Neval BEKTAŞ'a yürekten teşekkür ederim.

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında ve yürütülmesinde değerli görüşlerinden faydalandığım, tecrübesiyle çalışmalarımda etkin katkısı bulunan beni yönlendiren saygıdeğer danışmanım Doç. Dr. Ali KURT'a teşekkürlerimi sunarım.

1. GİRİŞ

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin hikayesi, 30 Eylül 1695 tarihinde matematik dünyasında isminden sıklıkla söz ettiren L'Hospital'ın, diferansiyel ve türev analizinin temellerini atan Leibnitz'e yazdığı mektupta $1/2$. mertebeden türevin alınıp alınamayacağını sorgulamasıyla başlamıştır. Leibnitz bu soruya "Bu durum şu anda bir paradoks gibi gözükse de bir gün çok kullanışlı sonuçları ortaya çıkaracak." şeklinde cevap vermiştir. Günümüze kadar yapılan başarılı çalışmalarda da mertebenin tamsayılarla kısıtlı olamayacağı görülmüştür. Dolayısıyla L'Hospital'dan bu yana mertebesi rasyonel sayılarla temsil edilen alan kesirli analiz olarak adlandırılmaktadır.

Fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik gibi alanlarda karşımıza çıkan problemlerin çözümlerini araştırmak ve bu çözümlerin davranışlarını açıklayabilmek için matematiksel modellemeye ihtiyaç duyulmaktadır. Günümüze kadar oluşturulan birçok matematiksel modelde tam mertebeden türev ve integral kullanılmıştır. Yapılan çalışmalar neticesinde oluşturulan bu modellerde tam mertebeden türev veya integral yerine, kesirli mertebeden türev ve integralin kullanılmasının daha avantajlı olduğu anlaşılmıştır. Bu avantajlardan bazıları aşağıdaki gibi açıklanabilir;

Kesirli analiz, sistem analizinin gelişiminin önceki işlemlere olan bağımlılığını kapsamlı şekilde dikkate alarak kolayca ifade edebilir. Ancak tamsayı hesabı, yerellik karakteristiği sebebiyle sistemin geçmiş yapısını ifade etmekte yetersiz kalmaktadır. Kesirli analizle ifade edilen teorik modeller, tam sayılı mertebeyle ifade edilen modellere nazaran deneysel verilerle daha uyumludur. Karmaşık fiziksel mekanik problemleri tanımlarken, kesirli analizle ifade edilen modelin daha net bir fiziksel anlamı ve daha basit bir ifadesi olduğu ortaya koyulmuştur (Kurt 2020).

Günümüzde fen, mühendislik ve diğer birçok alanda kesirli mertebeden diferansiyel kullanılarak elde edilen modeller oldukça ilgi görmekte olup bu konuda yapılan araştırmalar ve çalışmalar da giderek artmaktadır. Bu çalışmalar çok farklı alanlarda yapılmaktadır. Bunlardan bazıları elektrokimya alanında Chai ve Chan

(1992)- Oldham (2010); elektromanyetik alanında Engheta (1996); viskoelastisite alanında Adolfsson ve Olsson (2005)- Alotta ve diğ. (2017); biyomühendislik alanında Magin (2012); devre analizi alanında Gomez-Aguilar ve diğ. (2017); tıp alanında Shiri ve Baleanu (2019) şeklindedir.

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, tam mertebeden diferansiyel denklemlere nazaran biraz daha karmaşıktır. Bunları iyi anlayabilmek için bazı temel kavramları (Gama fonksiyonu, Beta fonksiyonu, Riemann-Liouville integtürev operatörleri, Caputo türev operatörü, Mittag-Leffler fonksiyonları, Grünwald-Letnikov türevleri gibi) iyi anlamak, iyi bilmek ve doğru uygulamak gerekir.

Riemann-Liouville tanımındaki matematiksel modellemeler, kesirli mertebeden türev ve kesirli mertebeden integral ile bahsi geçen konumuzun uygulamalarına yönelik çözüme dair çok önemli katkılar sağlamıştır. Matematik alanında zaman içerisinde yaşanan değişim ile bazı fiziksel olayları modellemede kullanılan, kesirli mertebeden diferansiyel tanımlarının başlangıç koşullarını belirleyen, fiziksel olayların karşılığını en uygun biçimde verebilen ve en avantajlı kullanıma sahip tanım Caputo kesirli mertebeden türev tanımıdır. Michele Caputo' nun tanımlamış olduğu kesirli mertebeden türev Caputo türevi olarak da bilinir, bu tanım Riemann-Liouville kesirli mertebeden türev tanımının üzerinde bazı değişikliklerle elde edilmiştir.

Öte yandan Caputo türevinin daha kullanışlı olmasının bir başka sebebi de başlangıç koşullarının, tam mertebeden diferansiyel denklemlerin (özellikle başlangıç değer problemlerinde) aynı başlangıç koşullarına sahip olmasındandır.

Ne yazık ki, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinin analitik yolla tam olarak bulunabileceği genel bir yöntem bulunmamaktadır. Bu nedenle problemlerin çözümü için sayısal yöntemler ve yaklaşık çözüm yöntemlerinin geliştirilmesi için matematik dünyasında bu konu üzerine çalışmalar halen devam etmektedir.

Aşağıda ilk olarak kesirli mertebeden adi diferansiyel denklem, daha sonra kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklem ve literatürde sıkça karşılaşılan bazı kesirli türev tanımlarına yer verilmektedir. Bu kesirli türev tanımlarından en popüler

olanları şüphesiz Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev tanımlarıdır. Literatürde bahsi geçen bu kesirli türev tanımlarını kullanarak yapılmış birçok çalışma bulunmaktadır (Abdeljawad 2017).

Tanım 1.1 (Kesirli Mertebeden Adi Diferansiyel Denklem): Bir veya birden fazla bağımlı değişkenin, bir bağımsız değişkene göre kesirli mertebeden türevlerini içeren denklemlere "kesirli mertebeden adi diferansiyel denklem" denir. (Benghorbal 2004). Kesirli mertebeden sabit katsayılı adi diferansiyel denklemin en genel hali aşağıdaki şekilde ifade edilebilir

$$a_n D^{\beta_n} y(t) + a_{n-1} D^{\beta_{n-1}} y(t) + \ldots + a_1 D^{\beta_1} y(t) + a_0 D^{\beta_0} y(t) = f(t) \ .$$

Örnek 1.1: Kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denklem

$$D^{\frac{3}{2}} y(t) + D^{\frac{1}{2}} y(t) - 2y(t) = 0$$

şeklinde ifade edilebilir (Podlubny 1999).

Tanım 1.2 (Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklem): Bir veya birden fazla bağımlı değişkenin, birden fazla bağımsız değişkene göre kesirli mertebeden türevlerini içeren denklemlere "kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklem" denir (Podlubny 1999).

Örnek 1.2: Kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem örneği

$$D_t^{\alpha} u(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \ , \ 0 < t \ , -\infty < x < \infty \ , 0 < \alpha < 1$$

şeklindedir (Podlubny 1999).

1.1 Kesirli Türev Tanımları

Tanım 1.1.1: $h(t)$ fonksiyonu her sonlu (a,x) aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $n \in \mathbb{N}$, $n-1 \le \alpha < n$ ve $a > 0$ olmak üzere $x > a$ için bir h fonksiyonunun $\alpha.$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$ {}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}h(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_{a}^{t}\frac{h(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, $$

şeklinde tanımlanır (Podlubuy 1998). Burada $\Gamma(n-\alpha)$ fonksiyonu

$$ \Gamma\left(n\right)=\int_{0}^{\infty}x^{n-1}e^{-x}dx $$

ifadesi ile tanımlanan Gama fonksiyonudur.

Tanım 1.1.2: Riemann-Liouville kesirli türevi tanımının kullanımında ortaya çıkan başlangıç değerlerinin hesaplanması veya deneysel yolla ölçülmesi problemini ortadan kaldırmak amacıyla 1967'de M. Caputo tarafından ifade edilen Caputo kesirli türev tanımı

$$ {}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha}h(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{t}\frac{h^{(n)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}},\ (n-1\le\alpha<n) $$

şeklindedir (Podlubny 1998).

Tanım 1.1.3: $h^{(k)}(t)$, $(k=1,2,...,m+1)$ türevleri, $\left[a,t\right]$ aralığında sürekli ve m sayısı, $m>p-1$ eşitsizliğini sağlayan bir tamsayı olmak üzere Grünwald-Letnikov kesirli türev tanımı $(m<p<m+1)$ olmak üzere

$$ {}_{a}^{GL}D_{t}^{p}f(t)=\sum_{k=0}^{m}\frac{h^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{m-p}h^{(m+1)}(\tau)d\tau, $$

şeklindedir (Podlubny 1998).

Tanım 1.1.4: $h(x)$ sonlu (a,b) aralığında tanımlı, sürekli ve n kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, ayrıca $\alpha,\sigma,\mu\in\mathbb{R}$ ve $\alpha,\sigma>0$ olmak koşuluyla $\alpha.$ mertebeden Erdelyi-Kober kesirli türev tanımı

$$ I_{0,\sigma,\eta+\sigma}^{\alpha}h(x)=\frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x}\frac{t^{\sigma\eta+\sigma-1}h(t)dt}{(x^{\sigma}-t^{\sigma})^{1-\alpha}},(0\le a<x\le\infty) $$

olmak üzere

$$D^{\alpha}_{0,\sigma,\eta}h(x) = x^{-\sigma n}\left(\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}}D\right)^{n} x^{\sigma(n+\eta)} I_{0,\sigma,\sigma+\eta}\left(h(x)\right)$$

şeklindedir (Atangana 2015).

Tanım 1.1.5: $h(x)$ sonlu (a,b) aralığında tanımlı, sürekli ve n kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $h(x)$ fonksiyonunun Hadamard kesirli türevi

$$D^{\alpha}_{0}\left(h(x)\right) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{0}^{x}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}\frac{h(t)}{t}dt, (a<x<b)$$

olarak ifade edilmiştir (Atangana 2015).

Yukarıda ifade edilen kesirli türev tanımları yalnızca lineer olma özelliğini ortak olarak sağlar (Khalil ve diğ. 2014). Ancak bu tanımların dezavantajları sadece bununla sınırlı değildir. Pratikte ortaya çıkan aksaklıkların bazıları Khalil ve diğ. (2014) tarafından aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

i. Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımında sabitin türevi sıfır değildir. Yani, c sabit olmak üzere

$$D^{\alpha}_{a}\left(c\right) = 0$$

eşitliği sağlanmaz.

ii. Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev yaklaşımları iki fonksiyonun çarpımının türevi olarak bilinen

$$D^{\alpha}_{a}\left(f(t)g(t)\right) = f(t)D^{\alpha}_{a}\left(g(t)\right) + g(t)D^{\alpha}_{a}\left(f(t)\right)$$

formülünü sağlamazlar.

iii. Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev yaklaşımları iki fonksiyonun bölümünün türevi olarak bilinen

$$D^{\alpha}_{a}\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{f(t)D^{\alpha}_{a}(g(t)) - g(t)D^{\alpha}_{a}(f(t))}{[g(t)]^{2}}$$

formülünü sağlamazlar.

iv. Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev yaklaşımları

$$D_a^{\alpha}\left((fog)(t)\right) = f^{\alpha}\left(g(t)\right)g^{\alpha}(t)$$

şeklindeki zincir kuralını sağlamazlar.

v. Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev yaklaşımları

$$D^{\alpha}D^{\beta}f(t) = D^{\alpha+\beta}f(t)$$

eşitliğini sağlamazlar.

vi. Caputo kesirli türev yaklaşımı ele alınan bir f fonksiyonunun diferansiyellenebilir olduğunu kabul eder.

Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev yaklaşımlarının temel matematikte yer alan türevin sağladığı genel özellikleri sağlamadığından dolayı dezavantajları mevcuttur. Bu dezavantajları ortadan kaldıran ve belirtilen özellikleri sağlayan, conformable türev yaklaşımı olarak adlandırılan türev yaklaşımını, aşağıda yapılan tanımlarla açıklayalım (Khalil ve diğ. 2014).

Tanım 1.1.6: $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $t>0$ ve $\alpha\in(0,1)$ olmak üzere α - mertebeden bir f fonksiyonunun conformable kesirli türev yaklaşımı

$$T_{\alpha}\left(f(t)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\right)-f(t)}{\varepsilon}$$

şeklindedir. Eğer $f(t)$ fonksiyonu $\alpha<0$ olmak üzere $(0,a)$ açık aralığında α - mertebeden diferansiyellenebilir ve

$$\lim_{t\to 0^{+}} f^{(\alpha)}(t)$$

limiti mevcut ise, o zaman

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t\to 0^{+}} f^{(\alpha)}(t)$$

eşitliği yazılır (Khalil ve diğ. 2014).

Teorem 1.1.7: Eğer $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $t_0>0$ ve $\alpha\in(0,1]$ olmak üzere bir f fonksiyonu α diferansiyellenebilir ise, o zaman f fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir (Khalil ve diğ. 2014).

Tanım 1.1.8: $\alpha\in(n,n+1]$ ve f fonksiyonu $t>0$ da $n-$ diferansiyellenebilir olsun. f fonksiyonunun α. mertebeden comformable kesirli türevi aşağıdaki gibi tanımlanır. (Khalil ve diğ. 2014)

$$T_\alpha\left(f(t)\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f^{\lceil\alpha\rceil-1}\left(t+\varepsilon t^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}\right)-f^{\lceil\alpha\rceil-1}(t)}{\varepsilon}$$

Burada $\lceil\alpha\rceil$ sembolüyle gösterilen ifade, α'ya eşit ya da α'dan büyük, en küçük tam sayı şeklinde tanımlıdır.

Teorem 1.1.9: $\alpha\in(0,1]$ olmak üzere f ve g fonksiyonları $t>0$ noktasında diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda;

1) Her $a,b\in\mathbb{R}$ için,

$T_\alpha\left(a\,f(t)+b\,g(t)\right)=aT_\alpha\left(f(t)\right)+bT_\alpha\left(g(t)\right)$.

2) Her $p\in\mathbb{R}$ için,

$T_\alpha(t^p)=pt^{p-a}$.

3) Her $f(t)=c$ sabit fonksiyonu için,

$T_\alpha(c)=0$.

4) $T_\alpha\left(f(t)g(t)\right)=f(t)T_\alpha\left(g(t)\right)+g(t)T_\alpha\left(f(t)\right)$.

5) $T_\alpha\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)=\frac{g(t)T_\alpha\left(f(t)\right)-f(t)T_\alpha\left(g(t)\right)}{\left[g(t)\right]^2}$.

6) $T_\alpha\left(f(t)\right)=t^{1-\alpha}\frac{df(t)}{dt}$

özellikleri sağlanır (Khalil ve diğ. 2014).

Bazı temel fonksiyonların conformable kesirli mertebeden türevi;

1) Her $p \in \mathbb{R}$ için,

$T_\alpha(t^p) = pt^{(p-\alpha)}$.

2) $T_\alpha(1) = 0$.

3) Her $c \in \mathbb{R}$ için,

$T_\alpha\left(e^{ct}\right) = ct^{1-\alpha}e^{ct}$.

4) Her $b \in \mathbb{R}$ için,

$T_\alpha\left(\sin(bt)\right) = bt^{1-\alpha}\cos(bt)$.

5) Her $b \in \mathbb{R}$ için,

$T_\alpha\left(\cos(bt)\right) = -bt^{1-\alpha}\sin(bt)$.

6) $T_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = 1$

şeklindedir (Khalil ve diğ. 2014).

Teorem 1.1.10: f ve g diferansiyellenebilir iki fonksiyon olsun. f herhangi bir $g(t)$ noktasında ve g 'de herhangi bir t noktasında diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere conformable kesirli türevi aşağıda verilen zincir kuralını sağlar.

$$T_\alpha((fog)(x)) = x^{1-\alpha}g(x)^{n-\alpha}g'(x)T_\alpha(f(t))\big|_{t=g(x)}$$

Tanım 1.1.11: f fonksiyonu m değişkenli bir fonksiyon olmak üzere $0 < \alpha \leq 1$ için conformable kısmi türev aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x_i^\alpha} f(x_1, x_2, ..., x_m) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + \varepsilon x_i^{1-\alpha}, ..., x_m) - f(x_1, ..., x_m)}{\varepsilon}.$$

Teorem 1.1.12: $f(x, y)$ fonksiyonu için $\partial_x^\alpha[\partial_y^\beta(f(x, y))]$ ve $\partial_y^\beta[\partial_x^\alpha(f(x, y))]$ türevleri var ve $D \subset \mathbb{R}^2$ de sürekli olsun. Bu durumda;

$$\partial_x^\alpha[\partial_y^\beta(f(x, y))] = \partial_y^\beta[\partial_x^\alpha(f(x, y))].$$

Teorem 1.1.13: Kabul edelim ki $f,g:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $\alpha\in(0,1]$ olmak üzere sol α - diferansiyellenebilir olsun ve $h(t)=f\left(g(t)\right)$ alalım. Bu takdirde $h(t)$ sol α -diferansiyellenebilirdir ve her t için,

$$t\neq a \text{ ve } g(t)\neq 0 \text{ ise } \left(T_a^{\alpha}h\right)(t)=(T_a^{\alpha}f)\left(g(t)\right).(T_a^{\alpha}g)(t)g(t)^{\alpha-1}$$

$$t=a \text{ ise } \left(T_a^{\alpha}h\right)(t)=\lim_{t\to a^+}(T_a^{\alpha}f)\left(g(t)\right).(T_a^{\alpha}g)(t)g(t)^{\alpha-1}$$

dir (Abdeljawad 2015).

Tanım 1.1.14: $0<\alpha<1$ ve $n\in\{1,2,3\ldots\}$ olmak üzere α – mertebeden n - kez sol ardışık conformable kesirli türevi

$$^{(n)}T_a^{\alpha}f(t)=\underbrace{T_a^{\alpha}T_a^{\alpha}\ldots T_a^{\alpha}}_{n-kez}f(t)$$

dir (Abdeljawad 2015).

α - mertebeden n - kez sağ ardışık conformable kesirli türevi

$$^{b}T_{\alpha}^{(n)}f(t)=\underbrace{{}^{b}T_{\alpha}\,{}^{b}T_{\alpha}\ldots{}^{b}T_{\alpha}}_{n-kez}f(t)$$

ile tanımlıdır (Abdeljawad 2015).

Lemma1.1.15: $f:[a,\infty)\to\infty$ fonksiyonu (a,∞) açık aralığında iki kez diferansiyellenebilir ve $0<\alpha$, $\beta\leq 1$, $1<\alpha+\beta\leq 2$ olsun. O halde;

$$\left(T_{\alpha}^{a}T_{\beta}^{a}f\right)(t)=(T_{\alpha+\beta}^{a}f)(t)+\left((1-\beta)(t-\alpha)^{-\beta}(T_{\alpha}^{a}f)\right)(t)$$

dir (Abdeljawad 2015).

Yukarıdaki teoremlerden de görüleceği üzere conformable kesirli türev tanımı, temel analizde kullanılan tam mertebe türevin sağladığı birçok özelliği sağlamaktadır. Conformable kesirli türevin bu avantajı türevin oldukça ilgi çekmesine ve birçok bilimsel çalışmada kullanılmasına sebep olmuştur. Abdeljawad (2015) yayınladığı çalışmasında conformable kesirli türevin yeni özelliklerini ifade

etmenin yanı sıra zincir kuralı, üstel fonksiyon, kısmi integrasyon, Taylor seri açılımı, Laplace açılımı gibi temel kavramların conformable kesirli versiyonlarını ifade etmiştir. Yine 2015 yılında yayınlanan bir diğer çalışmada Atangana ve arkadaşları conformable kısmi türev kavramını, conformable diverjens teoremini, conformable Green teoremini ifade edip, conformable kesirli türeve dair bazı yeni özellikleri vermişlerdir. Zhao ve Luo (2017) yılında genelleştirilmiş conformable kesirli türev kavramını tanımlayıp, bu tanımın fiziksel açıklamasını yapmışlardır. Eslami ve Rezazadeh (2016) yaptıkları çalışmada ilk integral yöntemini kullanarak conformable kesirli Wu-Zhang sisteminin analitik çözümüne ulaşmışlardır. Çenesiz ve diğ. (2017) yılında yaptıkları çalışmada conformable kesirli mertebeden Burgers tipindeki denklemlerin tam çözümlerini elde etmişlerdir. Arqub ve diğ. (2020) kesirli rezidü kuvvet serisi yöntemi ile conformable kesirli türevli Ito, Sawada-Kotera, Lax's Korteweg-de Vries, Caudrey-Dodd-Gibbon, ve Kaup-Kupershmidt denklemlerinin yarı analitik çözümlerine ulaşmışlardır. Karayer ve diğ. (2016) çalışmalarında conformable kesirli Nikiforov-Uvarov yöntemini sunmuşlardır. Thabet ve Kendre 2018 yılında yaptıkları çalışmalarında conformable diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanarak Navier–Stokes ve gaz dinamiği denklemlerinin çözümlerini üretmişlerdir. Çenesiz ve Kurt (2017) conformable Fourier dönüşümünün tanımını verdikleri yayınlarında, aynı zamanda conformable Fourier sinüs ve kosinüs dönüşümü tanımlarını da vererek bu dönüşümler yardımı ile conformable kesirli mertebeden ısı denkleminin çözümünü vermişlerdir. Chen ve Jiang (2018) basit denklem yöntemini kullanarak zaman kesirli genelleştirilmiş Burger, genelleştirilmiş KdV, genelleştirilmiş Sharma–Tasso–Olver, beşinci mertebe KdV ve (3+1) boyutlu KdV–Zakharov–Kuznetsov (KdV–ZK) denklemlerinin tam çözümlerini elde etmişlerdir. Tasbozan ve diğ. (2016) ise kesirli mertebeden Boussinesq ve birleştirilmiş KdV-mKdV denklemlerinin analitik çözümlerini verdikleri çalışmalarında Jacobi eliptik fonksiyonları açılım yöntemini kullanmışlardır. Birçok alanda çok fazla ilgiye mazhar olan conformable kesirli türevle kullanılarak yapılan bir başka çalışmada Abdeljawad ve diğ. (2017) $\alpha \in (1,2]$ olmak üzere conformable başlangıç değer problemi için genelleştirilmiş Lyapunov tipi eşitsizlikleri ispatlamışlardır. Akbulut ve Kaplan ise yardımcı denklem yöntemini kullandıkları çalışmalarında $(2+1)-$boyutlu Zoomeron denklemi ve üçüncü mertebeden modifiye edilmiş KDV denklemimin tam çözümlerini elde etmişlerdir.

Batarfi ve diğ. (2015) kesirli diferansiyel denklemi, başlangıç ve üç noktalı sınır koşullarına sahip yeni bir kesirli türev kavramını kullanarak incelemişler, lineer problem için Green fonksiyonunu elde etmişler lineer olmayan denklem üzerine de çalışmalar yapmışlardır. Arqub ve Al-Smadi (2022) ise yeni bulanık kesirli türev tanımı olan conformable bulanık kesirli türev ve integral kavramlarını literatüre kazandırmışlar, varlık ve teklik gibi kavramları ele almışlar ve bu kavramlara açıklık getirmişlerdir. Khalil ve diğ. (2019) çalışmalarında conformable kesirli türevin geometrik yorumunu yapmışlardır. Diğer kesirli türev tanımlarının geometrik yorumu henüz literatürde var olmadığından dolayı, bir kesirli türevin geometrik yorumunun yapılması açısından bir ilk olma özelliğini taşımaktadır.

Bu tez çalışmasında conformable kesirli mertebeden kısmi türevli denklemlerden bazıları ele alınmış ve bu denklemlerin tam çözümleri alt denklem yöntemi ve $\exp(-\phi(\xi))$ yöntemi kullanarak elde edilmiştir. Conformable kesirli türev kullanılarak elde edilen bu çözümlere literatürde rastlanmadığından bir ilk olma özelliğini taşımakta olup, orijinal sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların üç boyutlu grafikleri de okuyucuya sunulmuştur.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, ilk olarak yöntemlerin işleyişi içinde kullanacağımız homojen denge prensibinin prosedürünü ifade ettikten sonra sırasıyla alt denklem yönteminin ve $\exp(-\phi(\xi))$ yönteminin uygulama aşamaları ifade edilecektir.

2.1 Homojen Denge Prensibi

Homojen denge sayısı, toplam şeklinde verilen tam çözümün üst sınırını ifade eder. Lineer olmayan bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim arasında sabit bir sayı elde edilir. Bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer terim $\frac{d^q u}{d\varepsilon^q}$ ve en yüksek dereceden lineer olmayan terim $u^p\left(\frac{d^r u}{d\varepsilon^r}\right)^s$ şeklinde verilsin. $u=\tau^n$ dönüşümü yapılırsa p,q,r,s pozitif tam sayı ve n homojen denge sayısı olmak üzere homojen denge bağıntısı $n+q=np+s(n+r)$ şeklinde elde edilir. Bu denklemden n pozitif homojen denge sayısına ulaşılır (Tasbozan ve diğ. 2016).

2.2 Alt Denklem Yöntemi

Bu bölümde alt denklem yöntemini kısaca özetleyelim (Durur ve diğ. 2020). Kesirli mertebeden lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem;

$$P(u, D_t^{\alpha}u, D_x u, D_t^{2\alpha}u, D_x^2 u, \ldots)=0 \tag{2.1}$$

şeklinde verilsin. Bu denklemde kesirli türevler conformable türev cinsinden olup, $u(x,t)$ aranan fonksiyon ve $D_t^{n\,\alpha}$ ise $u(x,t)$ fonksiyonunun n kez ardışık olarak $\alpha.$mertebeden conformable türevini ifade etmektedir. Şimdi alt denklem yöntemini adım adım açıklayalım.

***Adım 1*:** k dalga genliği ve w dalga hızı olmak üzere $\xi = kx + \frac{wt^{\alpha}}{\alpha}$ dalga dönüşümü ve conformable kesirli türev için zincir kuralı kullanılarak (2.1) denklemi

$$G(u, u', u'', ...) = 0 \tag{2.2}$$

şeklinde lineer olmayan adi diferansiyel denkleme indirgenir. Burada u fonksiyonu ξ ye bağlı bir fonksiyon olup u' , u'' türevleri ise yeni bağımsız değişkenimiz ξ ye bağlı tam mertebeli türevlerdir.

***Adım 2*:** Kabul edelim ki (2.2) denkleminin çözümü

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^{N} a_i \varphi^i(\xi) \ , \ a_N \neq 0 \tag{2.3}$$

formunda olsun. Bu ifadede a_i $(0 \leq i \leq N)$ terimleri sabitler olup daha sonra hesaplanacaktır. N ise (2.2) denkleminde homojen denge yöntemi uygulanarak belirlenecek sabittir. $\varphi(\xi)$ fonksiyonu ise σ bir sabit olmak üzere

$$\varphi'(\xi) = \sigma + (\varphi(\xi))^2 \tag{2.4}$$

diferansiyel denklemini sağlayan bir fonksiyondur. (2.4) diferansiyel denkleminin σ'nın durumlarına özgü çözümleri aşağıda verilmiştir.

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} -\sqrt{-\sigma}\tanh(\sqrt{-\sigma}\xi), & \sigma < 0 \\ -\sqrt{-\sigma}\coth(\sqrt{-\sigma}\xi), & \sigma < 0 \\ \sqrt{\sigma}\tan(\sqrt{\sigma}\xi), & \sigma > 0 \\ -\sqrt{\sigma}\cot(\sqrt{\sigma}\xi), & \sigma > 0 \\ -\dfrac{1}{\xi + \omega}, \omega = sabit, & \sigma = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

***Adım 3*: (**2.3) ve (2.4) denklemleri (2.2) eşitliğinde yerine yazılır ve $\varphi^i(\xi)$ teriminin katsayıları sıfıra eşitlenir. Bu yöntem a_i, k, w değişkenlerine bağlı cebirsel bir denklem sistemi üretir.

***Adım 4*:** Elde edilen denklem sistemi çözülerek bilinmeyen sabitler bulunur. Bulunan bu sabitler ile (2.5) çözümleri (2.3) denkleminde yerine yazılır ve dalga dönüşümü tekrar kullanılırsa (2.1) denkleminin tam çözümüne ulaşılır.

2.3 $\exp(-\phi(\xi))$ Yöntemi

Şimdi $\exp(-\phi(\xi))$ yöntemini kısaca açıklayalım (Akbulut ve diğ. 2017). Kabul edelim ki $u=u(x,t)$ olmak üzere lineer olmayan conformable kesirli türevli kısmi diferansiyel denklem

$$P(u, D_t^a u, D_x u, D_x D_t^a u, D_t^{(2a)} u, D_{xx} u, \ldots) = 0 \tag{2.6}$$

şeklinde verilmiş olsun. Burada $D_t^{(2a)}$ operatörü conformable kesirli türevin u fonksiyonuna ardışık olarak α. mertebeden iki kez uygulanması anlamına gelmektedir. Yöntem adım adım aşağıdaki gibi verilebilir.

***Adım 1*:** c dalga genliği, k dalga hızı olmak üzere

$$u(x,t) = u(\xi) \quad , \quad \xi = cx - kt \tag{2.7}$$

dalga dönüşümü uygulanırsa (2.6) kesirli diferansiyel denklemi

$$Q(u, u', u'', \ldots) = 0 \tag{2.8}$$

şeklindeki lineer olmayan tam mertebeli adi diferansiyel denkleme dönüşür. Buradaki u' ve daha yüksek mertebeli ifadeler dalga dönüşümü sonrası yeni bağımsız değişkenimiz olan ξ ' ye göre türev anlamına gelmektedir.

***Adım 2*:** $\exp(-\phi(\xi))$ metoduna göre (2.8) denkleminin çözümü $\exp(-\phi(\xi))$ 'nın polinomu olan

$$u(\xi) = \sum_{n=0}^{m} a_n (\exp(-\phi(\xi))^n \tag{2.9}$$

İfadesiyle verilebilir. Burada a_n $(a_m \neq 0)$ sabitler olmak üzere bu sabitler daha sonra elde edilecektir. $\phi(\xi)$ ise

$$\phi'(\xi) = \exp(-\phi(\xi)) + \mu \exp(\phi(\xi)) + \lambda \tag{2.10}$$

diferansiyel denklemini sağlayan fonksiyonlardır. Ayrıca burada tanımı yapılan (2.10) diferansiyel denkleminin çözüm ailesi aşağıda verilmiştir:

- **Set 1:** $\lambda^2 - 4\mu > 0$ ve $\mu \neq 0$ olmak üzere

$$\phi_1(\xi) = \ln\left(\frac{-\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}(\xi+c)\right)-\lambda}{2\mu}\right)$$

- **Set 2:** $\lambda^2 - 4\mu < 0$ ve $\mu \neq 0$ olmak üzere

$$\phi_2(\xi) = \ln\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\tan\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}(\xi+c)\right)-\lambda}{2\mu}\right)$$

- **Set 3:** $\lambda^2 - 4\mu > 0$, $\mu = 0$ ve $\lambda \neq 0$ olmak üzere

$$\phi_3(\xi) = -\ln\left(\frac{\lambda}{\cosh(\lambda(\xi+c))+\sinh(\lambda(\xi+c))-1}\right)$$

- **Set 4:** $\lambda^2 - 4\mu = 0$, $\mu \neq 0$ ve $\lambda \neq 0$ olmak üzere

$$\phi_4(\xi) = \ln\left(-\frac{2(\lambda(\xi+c)+2)}{\lambda^2(\xi+c)}\right)$$

- **Set 5:** $\lambda^2 - 4\mu = 0$, $\mu = 0$ ve $\lambda = 0$ olmak üzere

$$\phi_5(\xi) = \ln(\xi+c)$$

Burada c keyfi integrasyon sabitidir. Bunun yanı sıra (2.9) denklemindeki m sayısı, (2.8) denklemindeki en yüksek dereceli lineer olmayan terim ile en yüksek mertebeli lineer terim arasında homojen denge prensibi kullanılarak bulunur.

***Adım 3*:** (2.9) denklemi, (2.8) denkleminde yerine yazılır ve aynı kuvvetli $\exp(-\phi(\xi))^n$ $(n = 0,1,2,...)$ terimleri bir arada yazılırsa, $\exp(-\phi(\xi))$ terimine bağlı bir polinom elde edilir. Elde edilen bu polinomdaki katsayılara sıfıra eşitlenirse a_n $(n = 0,1,2,...)$, λ, k, c, μ değişkenlerine bağlı cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu elde edilen denklemler çözülürse (2.6) denkleminin farklı analitik çözümlerine ulaşılır.

3. BULGULAR

3.1 Kesirli Mertebeden Yu-Toda-Sasa-Fukuyama Denkleminin Analitik Çözümleri

Kesirli mertebeden lineer olmayan Yu-Toda-Sasa-Fukuyama denklemini

$$-4D_t^{\alpha}D_x u + D_x^3 D_z u + 4D_x u D_x D_z u + 2D_x^2 u D_z u + 3D_y^2 u = 0 \tag{3.1}$$

şeklindedir.

(3.1) Denkleminde $\xi = ax + by + cz + \frac{dt^{\alpha}}{\alpha}$ dalga dönüşümü yapılır ve zincir kuralı uygulanıp, elde edilen denklem bir kez integre edilirse;

$$a^3 c u''' + 3a^2 c (u')^2 + \left(3b^2 - 4ad\right)u' = 0 \tag{3.2}$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklemi bulunur.

(3.2) denkleminde homojen denge yöntemi kullanırsa

$$m + 3 = 2(m + 1) \tag{3.3}$$

olmak üzere iki denklem eşitlenirse $m = 1$ bulunur. (2.3) denklemi yardımıyla (3.2) denkleminin çözümünün

$$u(\xi) = k_0 + k_1 \varphi(\xi) \tag{3.4}$$

şeklinde olduğu kabul edilecek olup, k_0 ve k_1 daha sonra hesaplanacaktır. (3.4) ve (2.4) denklemleri (3.2) denkleminde yerine yazılıp elde edilen denklem $\varphi(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetlerine göre düzenlenir ve her bir katsayı sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklem sistemine ulaşılır.

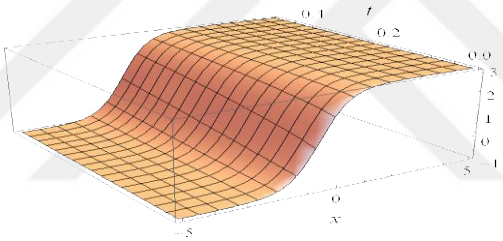
$$
\begin{aligned}
&2a^3ck_1\sigma^2+3a^2ck_1{}^2\sigma^2+k_1\sigma\left(3b^2-4ad\right)=0\\
&8a^3ck_1\sigma+6a^2ck_1{}^2\sigma+k_1\left(3b^2-4ad\right)=0\\
&6a^3ck_1+3a^2ck_1{}^2=0
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

(3.5) denklem sistemi MATHEMATICA programı yardımıyla çözülürse

$$
b=-\frac{2\sqrt{a^3c\sigma+ad}}{\sqrt{3}},k_1=-2a \tag{3.6}
$$

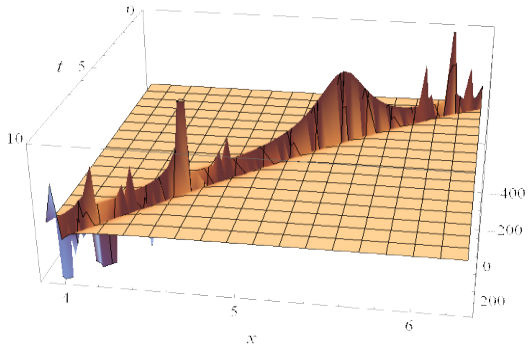
çözüm kümesi elde edilir. (3.4), (3.6), (2.5) ve $\xi=ax+by+cz+\dfrac{dt^\alpha}{\alpha}$ dönüşümü kullanılarak, (3.1) denkleminin analitik çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

$$
u_1(x,y,z,t)=k_0+2a\sqrt{-\sigma}\tanh\left(\sqrt{-\sigma}\left(ax-\frac{2\sqrt{a^3c\sigma+ad}}{\sqrt{3}}y+cz+\frac{dt^\alpha}{\alpha}\right)\right)
$$



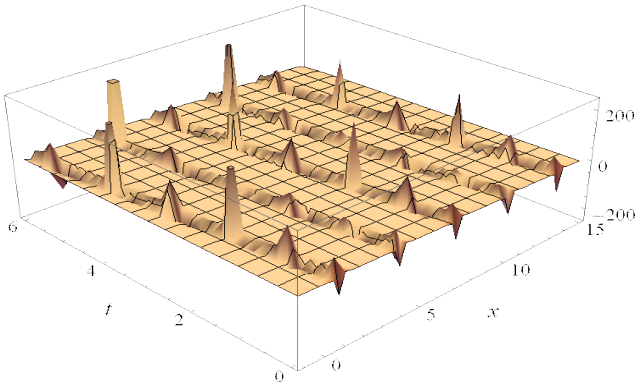
Şekil 1 : $u_1(x,y,z,t)$ fonksiyonunun $\alpha=0.8$, $y=0.5$, $z=0.5$, $k_0=1$, $a=1$, $c=1$, $d=1$, $\sigma=-1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

$$
u_2(x,y,z,t)=2a\sqrt{-\sigma}\coth\left(\sqrt{-\sigma}\left(-\frac{2y\sqrt{a^3c\sigma+ad}}{\sqrt{3}}+ax+cz+\frac{dt^\alpha}{\alpha}\right)\right)+k_0
$$



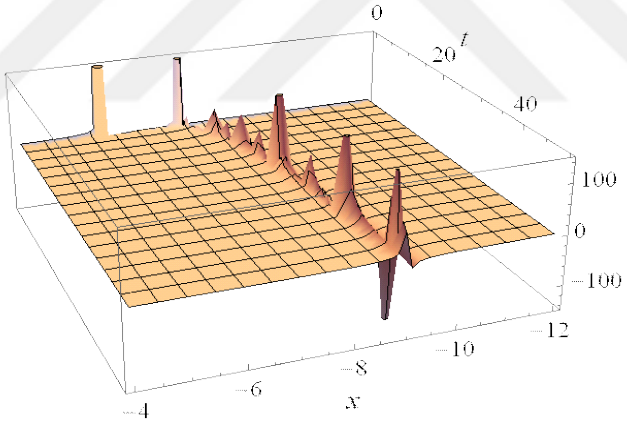
Şekil 2 : $u_2(x,y,z,t)$ fonksiyonunun $\alpha=0.8$, $y=1$, $z=5$, $k_0=-1$, $a=1$, $c=-1$, $d=0.3$, $\sigma=-1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

$$u_3(x,y,z,t)=k_0-2a\sqrt{\sigma}\tan\left(\sqrt{\sigma}\left(-\frac{2y\sqrt{a^3c\sigma+ad}}{\sqrt{3}}+ax+cz+\frac{dt^\alpha}{\alpha}\right)\right)$$



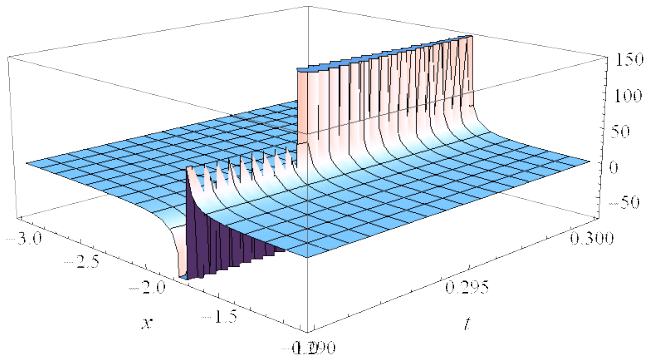
Şekil 3 : $u_3(x,y,z,t)$ fonksiyonunun $\alpha=0.8$, $y=1$, $z=5$, $k_0=-1$, $a=1$, $c=1$, $d=0.3$, $\sigma=1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

$$u_4(x,y,z,t)=\frac{2a}{-\frac{2y\sqrt{ad}}{\sqrt{3}}+ax+cz+\frac{dt^\alpha}{\alpha}+g}+k_0$$



Şekil 4 : $u_4(x,y,z,t)$ fonksiyonunun $\alpha=\frac{1}{7}$, $y=1$, $z=5$, $k_0=-1$, $a=1$, $c=1$, $d=0.3$, $g=1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

$$u_5(x,y,z,t)=2a\sqrt{\sigma}\cot\left(\sqrt{\sigma}\left(\frac{2y\sqrt{a^3c\sigma+ad}}{\sqrt{3}}+ax+cz+\frac{dt^\alpha}{\alpha}\right)\right)+k_0$$



Şekil 5: $u_5(x,y,z,t)$ fonksiyonunun $\alpha=0.8$, $y=0.5$, $z=0.5$, $k_0=1$, $a=1$, $c=1$, $d=1$, $\sigma=1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

3.2 Kesirli Mertebeden Geliştirilmiş Değiştirilmiş KdV Denkleminin Analitik Çözümleri

Kesirli mertebeden lineer olmayan geliştirilmiş değiştirilmiş KdV denklemini

$$-D_x^2 D_t^\alpha u + D_x^3 u + D_t^\alpha u + u^2 D_x u = 0 \tag{3.7}$$

şeklindedir.

(3.7) denkleminde $\xi = mx + \dfrac{nt^\alpha}{\alpha}$ dalga dönüşümü, zincir kuralı uygulanıp, elde edilen denklem bir kez integre edilirse;

$$\left(3m^3 - 3m^2 n\right)u'' + mu^3 + 3nu = 0 \tag{3.8}$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklemi bulunur. (3.8) denkleminde homojen denge yöntemi kullanırsa

$$m+2 = 3m \tag{3.9}$$

$m=1$ bulunur. (2.3) denklemi yardımıyla (3.8) denkleminin çözümü

$$u(\xi) = k_0 + k_1\varphi(\xi) \tag{3.10}$$

şeklinde olup, k_0 ve k_1 daha sonra hesaplanacaktır. (3.10) denklemi ve (2.4) denklemleri (3.8) denkleminde yerine yazıldıktan sonra elde edilen denklem $\varphi(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetlerine göre düzenlenir ve her bir katsayı sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklem sistemine ulaşılır.

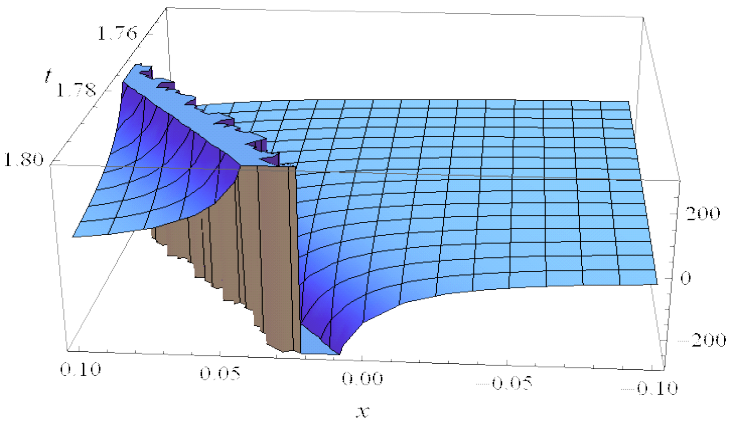
$$\begin{aligned} &{k_0}^3 m + 3k_0 n = 0 \\ &3{k_0}^2 k_1 m + 2k_1\sigma\left(3m^3 - 3m^2 n\right) + 3k_1 n = 0 \\ &3k_0 {k_1}^2 m = 0 \\ &{k_1}^3 m + 2k_1\left(3m^3 - 3m^2 n\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

(3.11) denklem sistemi MATHEMATICA programı yardımıyla çözülürse

$$k_1 = -\sqrt{6}\sqrt{\frac{2m^4\sigma}{2m^2\sigma - 1} - m^2} \quad , \quad k_0 = 0 \quad , \quad n = \frac{2m^3\sigma}{2m^2\sigma - 1} \tag{3.12}$$

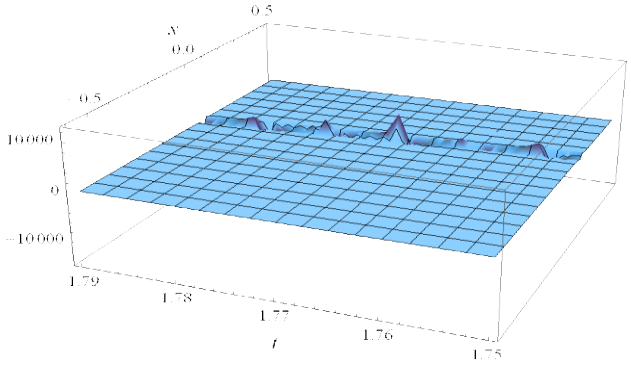
çözüm ailesi elde edilir. (3.10), (3.12), (2.5) ve $\xi = mx + \dfrac{nt^\alpha}{\alpha}$ dönüşümü yardımıyla, (3.7) denkleminin analitik çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

$$u_1(x,t) = \sqrt{\frac{-6\sigma m^2}{2m^2\sigma - 1}}\tanh\left(\sqrt{-\sigma}\left(\frac{2m^3\sigma t^\alpha}{\alpha\left(2m^2\sigma - 1\right)} + mx\right)\right)$$



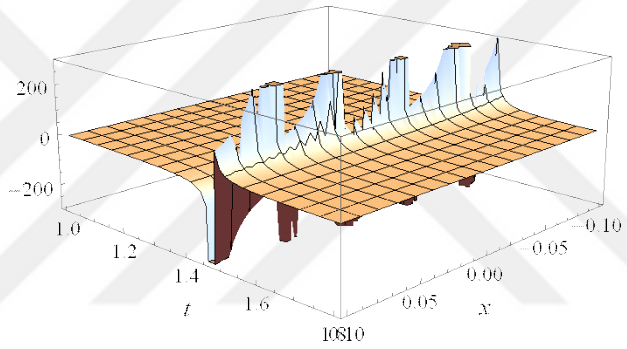
Şekil 6 : $u_1(x,t)$ fonksiyonunun $\alpha = 0.03$, $m = 0.8$, $\sigma = 1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

$$u_2(x,t) = \sqrt{\frac{-6\sigma m^2}{2m^2\sigma - 1}}\coth\left(\sqrt{-\sigma}\left(\frac{2m^3\sigma t^\alpha}{\alpha\left(2m^2\sigma - 1\right)} + mx\right)\right)$$



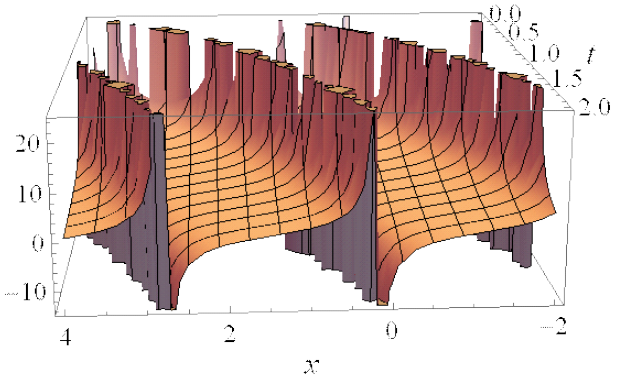
Şekil 7 : $u_2(x,t)$ fonksiyonunun $\alpha = 0.03$, $m = 0.8$, $\sigma = 1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

$$u_3(x,t) = -\sqrt{6}\sqrt{\sigma}\sqrt{\frac{2m^4\sigma}{2m^2\sigma - 1} - m^2}\,\tan\left(\sqrt{\sigma}\left(\frac{2m^3\sigma t^{\alpha}}{\alpha\left(2m^2\sigma - 1\right)} + mx\right)\right)$$



Şekil 8 : $u_3(x,t)$ fonksiyonunun $\alpha = 0.003$, $m = 0.8$, $\sigma = 1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

$$u_4(x,t) = \sqrt{6\sigma}\sqrt{\frac{2m^4\sigma}{2m^2\sigma - 1} - m^2}\,\cot\left(\sqrt{\sigma}\left(\frac{2m^3\sigma t^{\alpha}}{\alpha\left(2m^2\sigma - 1\right)} + mx\right)\right)$$



Şekil 9 : $u_4(x,t)$ fonksiyonunun $\alpha = 0.4$, $m = 1.2$, $\sigma = 1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

3.3 Kesirli Mertebeden Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa Denkleminin Analitik Çözümleri

$$-2\beta D_t^{\alpha} D_x^2 u + D_x^4 D_y u + 2D_y u D_x^3 u + 4D_x u D_x^2 D_y u + 6D_x^2 u D_x D_y u - \theta D_y^3 u = 0 \quad (3.13)$$

şeklindedir.

(3.13) denkleminde $\xi = ax + by + \frac{ct^{\alpha}}{\alpha}$ dalga dönüşümü ve zincir kuralı uygulanıp, elde edilen denklem iki kez integre edilirse;

$$\left(a^4 b\right)u''' + 3a^3 b\left(u'\right)^2 - 2a^2 \beta c u' - \theta b^3 u' = 0 \quad (3.14)$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklemi bulunur.

(3.14) denkleminde homojen denge yöntemi kullanırsa

$$m + 3 = 2(m+1) \quad (3.15)$$

olmak üzere iki denklem eşitlenirse $m = 1$ bulunur. (2.3) denklemi yardımıyla (3.14) denkleminin çözümü

$$u(\xi) = k_0 + k_1 \varphi(\xi) \quad (3.16)$$

Şeklinde olduğu kabul edilecek olup, k_0 ve k_1 daha sonra hesaplanacaktır. (3.16) ve (2.4) denklemleri (3.14) denkleminde yerine yazıldıktan sonra elde edilen denklem $\varphi(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetlerine göre düzenlenir ve her bir katsayı sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklem sistemine ulaşılır.

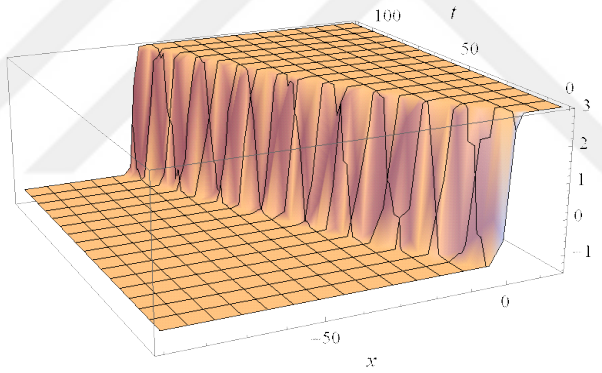
$$\begin{aligned} &16a^4 b k_1 \sigma^2 + 12a^3 b k_1^{\,2} \sigma^2 - 4a^2 \beta c k_1 \sigma - 2b^3 \theta k_1 \sigma = 0 \\ &40a^4 b k_1 \sigma + 24a^3 b k_1^{\,2} \sigma - 4a^2 \beta c k_1 - 2b^3 \theta k_1 = 0 \\ &24a^4 b k_1 + 12a^3 b k_1^{\,2} = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

(3.17) denklem sistemi MATHEMATICA programı yardımıyla çözülürse

$$b=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{192a^{12}\theta^3\sigma^3+81a^4\beta^2c^2\theta^4}-9a^2\beta c\theta^2}}{3^{2/3}\theta}-\frac{4a^4\sigma}{\sqrt[3]{\sqrt{1728a^{12}\theta^3\sigma^3+729a^4\beta^2c^2\theta^4}-27a^2\beta c\theta^2}} \qquad (3.18)$$
$$k_1=-2a$$

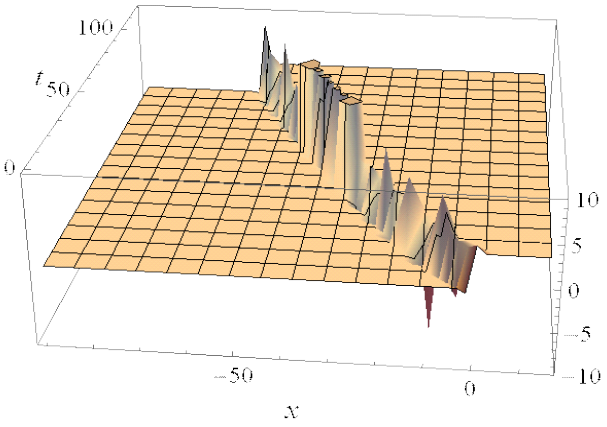
Çözüm seti elde edilir. (3.16), (3.18), (2.5) ve $\xi=ax+by+\frac{ct^\alpha}{\alpha}$ dönüşümü yardımıyla, (3.13) denkleminin analitik çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

$$u_1(x,y,t)=k_0+2a\sqrt{-\sigma}\tanh\left(y\sqrt{-\sigma}\,\frac{\sqrt[3]{\sqrt{192a^{12}\theta^3\sigma^3+81a^4\beta^2c^2\theta^4}-9a^2\beta c\theta^2}}{3^{2/3}\theta}-y\sqrt{-\sigma}\,\frac{4a^4\sigma}{\sqrt[3]{\sqrt{1728a^{12}\theta^3\sigma^3+729a^4\beta^2c^2\theta^4}-27a^2\beta c\theta^2}}\right)+\sqrt{-\sigma}\left(ax+\frac{ct^\alpha}{\alpha}\right)$$



Şekil 10 : $u_1(x,y,t)$ fonksiyonunun $\alpha=0.8$, $y=-0.5$, $k_0=1,\theta=1,\beta=1$, $a=1,c=1,\sigma=-1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

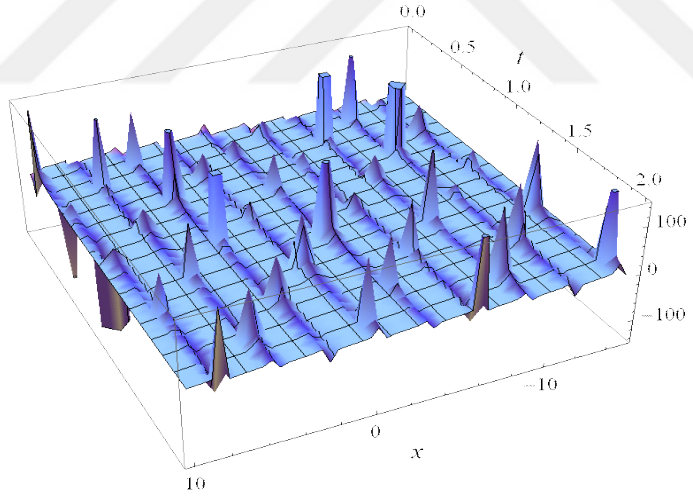
$$u_2(x,y,t)=k_0+2a\sqrt{-\sigma}\coth\left(y\sqrt{-\sigma}\,\frac{\sqrt[3]{\sqrt{192a^{12}\theta^3\sigma^3+81a^4\beta^2c^2\theta^4}-9a^2\beta c\theta^2}}{3^{2/3}\theta}-y\sqrt{-\sigma}\,\frac{4a^4\sigma}{\sqrt[3]{\sqrt{1728a^{12}\theta^3\sigma^3+729a^4\beta^2c^2\theta^4}-27a^2\beta c\theta^2}}\right)+\sqrt{-\sigma}\left(ax+\frac{ct^\alpha}{\alpha}\right)$$



Şekil 11 : $u_2(x,y,t)$ fonksiyonunun $\alpha=0.8$, $y=0.5$, $k_0=1, \theta=1, \beta=1$, $a=1, c=1, \sigma=-1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

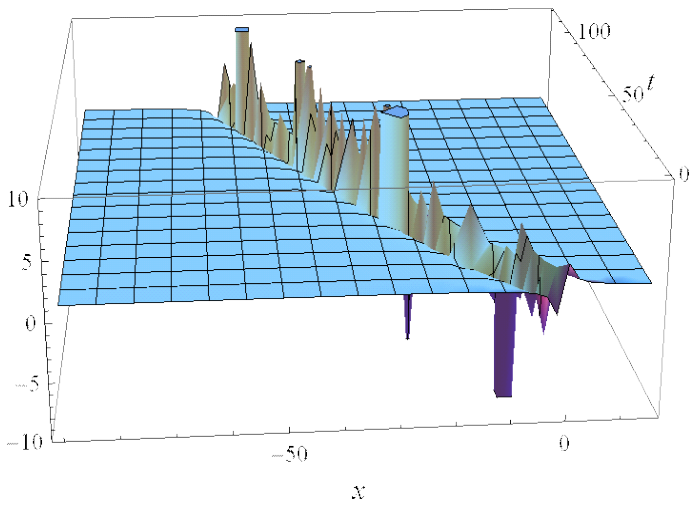
$$u_3(x,y,t)=k_0-2a\sqrt{\sigma}\tan\left(y\sqrt{\sigma}\,\frac{\sqrt[3]{\sqrt{192a^{12}\theta^3\sigma^3+81a^4\beta^2c^2\theta^4}-9a^2\beta c\theta^2}}{3^{2/3}\theta}-\right.$$

$$\left.y\sqrt{\sigma}\,\frac{4a^4\sigma}{\sqrt[3]{\sqrt{1728a^{12}\theta^3\sigma^3+729a^4\beta^2c^2\theta^4}-27a^2\beta c\theta^2}}\right)+\sqrt{\sigma}\left(ax+\frac{ct^{\alpha}}{\alpha}\right)$$



Şekil 12 : $u_3(x,y,t)$ fonksiyonunun $\alpha=0.8$, $y=0.5$, $k_0=1, \theta=1, \beta=1$, $a=1.1, c=1, \sigma=1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

$$u_4(x,y,t)=k_0+\frac{2a}{\left(y\,\frac{\sqrt[3]{\sqrt{192a^{12}\theta^3\sigma^3+81a^4\beta^2c^2\theta^4}-9a^2\beta c\theta^2}}{3^{2/3}\theta}-y\,\frac{4a^4\sigma}{\sqrt[3]{\sqrt{1728a^{12}\theta^3\sigma^3+729a^4\beta^2c^2\theta^4}-27a^2\beta c\theta^2}}\right)}+ax+\frac{ct^{\alpha}}{\alpha}+g$$



Şekil 13 : $u_4(x,y,t)$ fonksiyonunun $\alpha=0.8$, $y=0.5$, $k_0=1, \theta=1, \beta=1$, $a=1, c=1, \sigma=-1, g=1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

3.4 Kesirli Mertebeden Caudrey-Dodd-Gibbon Denkleminin Analitik Çözümleri

Kesirli mertebeden lineer olmayan Caudrey-Dodd-Gibbon denklemini ele alalım.

$$D_x^5 u + 30uD_x^3 u + 30D_x uD_x^2 u + D_t^\alpha u + 180u^2 D_x u = 0 \tag{3.19}$$

(3.19) denklemine $\xi = mx + \dfrac{nt^\alpha}{\alpha}$ dalga dönüşümü ve zincir kuralı uygulanıp, elde edilen denklem bir kez integre edilirse;

$$m^5 u'''' + 30m^3 uu'' + 60mu^3 + nu = 0 \tag{3.20}$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklemi bulunur.

(3.20) denkleminde homojen denge yöntemi kullanırsa

$$m+4 = m+m+2 \tag{3.21}$$

olmak üzere iki denklem eşitlenirse $m=2$ bulunur. (2.9) dan (3.20) denkleminin çözümünün

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \exp(-\phi(\xi)) + a_2 \exp(-\phi(\xi))^2 \tag{3.22}$$

şeklinde olduğunu kabul edilsin. (3.22) denklemi ve (2.10) denklemleri (3.20) denkleminde yerine yazılır ve elde edilen denklem $\exp(-\phi(\xi))$ fonksiyonunun kuvvetlerine göre düzenlenir ve her bir katsayı sıfıra eşitlenirse

$$
\begin{aligned}
&60a_0^3m+30a_0a_1\lambda\mu m^3+60a_0a_2\mu^2m^3+a_0n+a_1\lambda^3\mu m^5+\\
&8a_1\lambda\mu^2m^5+14a_2\lambda^2\mu^2m^5+16a_2\mu^3m^5=0\\
\\
&180a_0a_2^2m+180a_0a_2m^3+180a_1^2a_2m+60a_1^2m^3+\\
&390a_1a_2\lambda m^3+60a_1\lambda m^5+120a_2^2\lambda^2m^3+240a_2^2\mu m^3+\\
&330a_2\lambda^2m^5+240a_2\mu m^5=0\\
\\
&360a_0a_1a_2m+60a_0a_1m^3+300a_0a_2\lambda m^3+60a_1^3m+\\
&90a_1^2\lambda m^3+150a_1a_2\lambda^2m^3+300a_1a_2\mu m^3+50a_1\lambda^2m^5+\\
&40a_1\mu m^5+180a_2^2\lambda\mu m^3+130a_2\lambda^3m^5+440a_2\lambda\mu m^5=0\\
\\
&180a_0^2a_2m+180a_0a_1^2m+90a_0a_1\lambda m^3+120a_0a_2\lambda^2m^3+\\
&240a_0a_2\mu m^3+30a_1^2\lambda^2m^3+60a_1^2\mu m^3+210a_1a_2\lambda\mu m^3+\\
&15a_1\lambda^3m^5+60a_1\lambda\mu m^5+60a_2^2\mu^2m^3+16a_2\lambda^4m^5+\\
&232a_2\lambda^2\mu m^5+136a_2\mu^2m^5+a_2n=0\\
\\
&180a_0^2a_1m+30a_0a_1\lambda^2m^3+60a_0a_1\mu m^3+180a_0a_2\lambda\mu m^3+\\
&30a_1^2\lambda\mu m^3+60a_1a_2\mu^2m^3+a_1\lambda^4m^5+22a_1\lambda^2\mu m^5+\\
&16a_1\mu^2m^5+a_1n+30a_2\lambda^3\mu m^5+120a_2\lambda\mu^2m^5=0\\
\\
&60a_2^3m+180a_2^2m^3+120a_2m^5=0\\
\\
&180a_1a_2^2m+240a_1a_2m^3+24a_1m^5+300a_2^2\lambda m^3+336a_2\lambda m^5=0
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

denklem sistemine ulaşılır. (3.23) denklem sistemi MATHEMATICA programı yardımıyla çözülürse aşağıdaki çözüm kümeleri elde edilir:

Çözüm Kümesi 1:

$$a_1=\lambda\left(-m^2\right),a_2=-m^2,a_0=\mu\left(-m^2\right),n=-m^5\left(\lambda^2-4\mu\right)^2$$

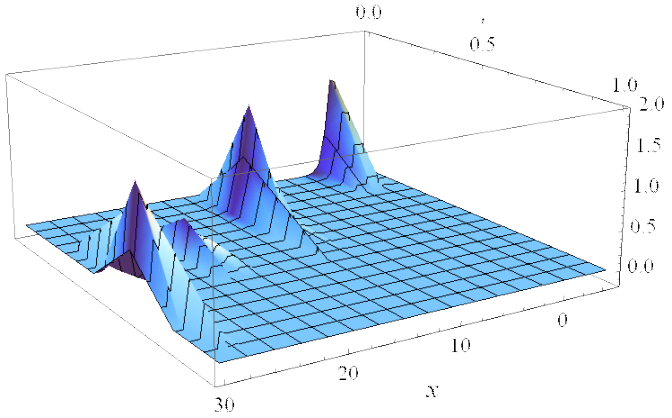
Çözüm Kümesi 2 ve 3:

$$a_1=\lambda\left(-m^2\right)\ ,\ a_2=-m^2,\ a_0=\mp\frac{1}{8}\sqrt{\frac{7}{15}}\sqrt{m^4\left(\lambda^2-4\mu\right)^2}-\frac{1}{8}m^2\left(\lambda^2+4\mu\right)$$
$$n=-\frac{1}{8}m^3\left(\lambda^2-4\mu\right)\left(\pm\sqrt{105}\sqrt{m^4\left(\lambda^2-4\mu\right)^2}+11m^2\left(\lambda^2-4\mu\right)\right) \quad (3.24)$$

çözüm ailesi elde edilir. (3.22), (3.24), (2.10) ve $\xi=mx+\frac{nt^\alpha}{\alpha}$ dönüşümü yardımıyla, (3.19) denkleminin analitik çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilmiştir. Çözüm kümesi 1 için aşağıdaki çözüm setleri elde edilir:

- $\lambda^2-4\mu>0$ ve $\mu\neq 0$ için çözüm;

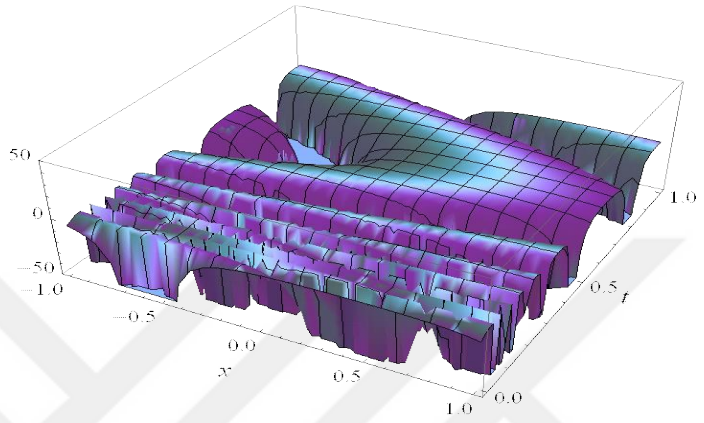
$$u_1(x,t)=-\frac{4\mu^2m^2}{\left(-\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\left(C-\frac{m^5\left(\lambda^2-4\mu\right)^2t^\alpha}{\alpha}+mx\right)\right)-\lambda\right)^2}-$$
$$\frac{2\lambda\mu m^2}{-\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\left(C-\frac{m^5\left(\lambda^2-4\mu\right)^2t^\alpha}{\alpha}+mx\right)\right)-\lambda}-\mu m^2$$



Şekil 14 : $u_1(x,t)$ fonksiyonunun $\alpha=0.8$, $m=1.2$, $\lambda=3,\mu=1.2,C=1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

- $\lambda^2-4\mu<0$ ve $\mu\neq 0$ için çözüm;

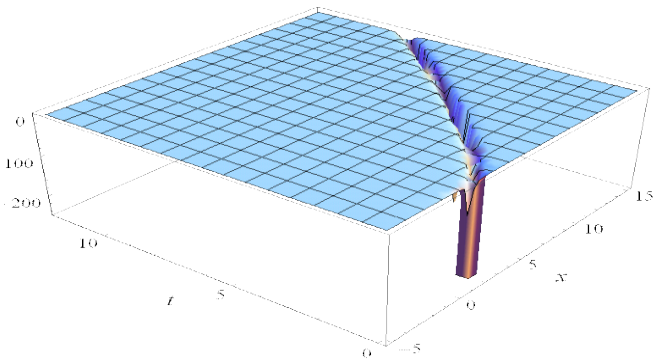
$$u_2(x,t)=-\frac{4\mu^2m^2}{\left(\sqrt{4\mu-\lambda^2}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}\left(C-\frac{m^5\left(\lambda^2-4\mu\right)^2t^\alpha}{\alpha}+mx\right)\right)-\lambda\right)^2}-$$
$$\frac{2\lambda\mu m^2}{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}\left(C-\frac{m^5\left(\lambda^2-4\mu\right)^2t^\alpha}{\alpha}+mx\right)\right)-\lambda}-\mu m^2$$



Şekil 15 : $u_2(x,t)$ fonksiyonunun $\alpha=0.8$, $m=1.2$, $\lambda=1,\mu=2,C=1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

- $\lambda^2-4\mu>0$, $\lambda\neq0$ ve $\mu=0$ için çözüm;

$$u_3(x,t)=-\frac{\lambda^2m^2}{\sinh\left(\lambda\left(C-\frac{\lambda^4m^5t^\alpha}{\alpha}+mx\right)\right)+\cosh\left(\lambda\left(C-\frac{\lambda^4m^5t^\alpha}{\alpha}+mx\right)\right)-1}-$$
$$\frac{\lambda^2m^2}{\left(\sinh\left(\lambda\left(C-\frac{\lambda^4m^5t^\alpha}{\alpha}+mx\right)\right)+\cosh\left(\lambda\left(C-\frac{\lambda^4m^5t^\alpha}{\alpha}+mx\right)\right)-1\right)^2}$$



Şekil 16 : $u_3(x,t)$ fonksiyonunun $\alpha=0.8$, $m=-1.2$, $\lambda=1,\mu=0,C=1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

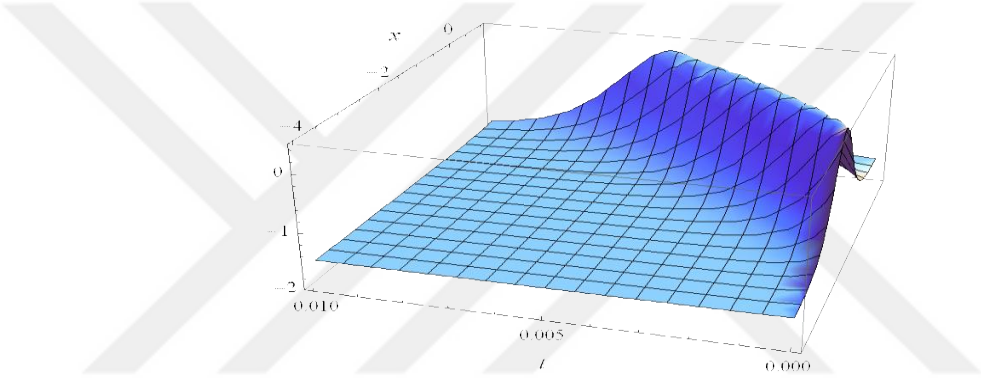
Çözüm kümesi 2 için aşağıdaki çözüm setleri elde edilir.

- $\lambda^2-4\mu>0$ ve $\mu\neq 0$ için çözüm;

$$u_4(x,t)=-\frac{4\mu^2m^2}{\left(-\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\left(C+mx-\frac{m^3\left(\lambda^2-4\mu\right)t^\alpha\left(\sqrt{105}\sqrt{m^4\left(\lambda^2-4\mu\right)^2}+11m^2\left(\lambda^2-4\mu\right)\right)}{8\alpha}\right)\right)-\lambda\right)^2}$$

$$-\frac{2\lambda\mu m^2}{-\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\left(C-\frac{m^3\left(\lambda^2-4\mu\right)t^\alpha\left(\sqrt{105}\sqrt{m^4\left(\lambda^2-4\mu\right)^2}+11m^2\left(\lambda^2-4\mu\right)\right)}{8\alpha}+mx\right)\right)-\lambda}-$$

$$\frac{1}{8}\sqrt{\frac{7}{15}}\sqrt{m^4\left(\lambda^2-4\mu\right)^2}-\frac{1}{8}m^2\left(\lambda^2+4\mu\right)$$



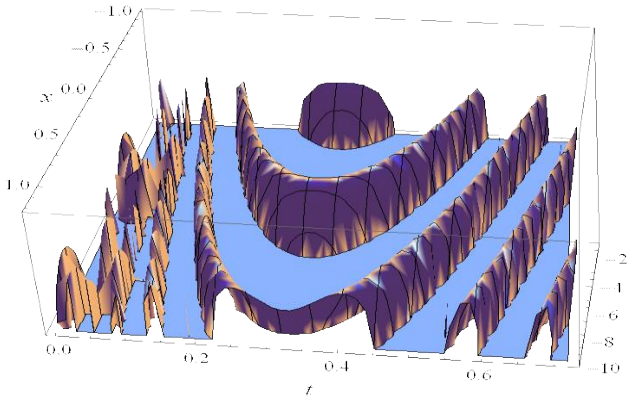
Şekil 17 : $u_4(x,t)$ fonksiyonunun $\alpha=0.8$, $m=1.2$, $\lambda=3,\mu=1,C=1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

- $\lambda^2-4\mu<0$ ve $\mu\neq 0$ için çözüm;

$$u_5(x,t)=-\frac{4\mu^2m^2}{\left(\sqrt{4\mu-\lambda^2}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}\left(C-\frac{m^3\left(\lambda^2-4\mu\right)t^\alpha\left(\sqrt{105}\sqrt{m^4\left(\lambda^2-4\mu\right)^2}+11m^2\left(\lambda^2-4\mu\right)\right)}{8\alpha}+mx\right)\right)-\lambda\right)^2}-$$

$$\frac{2\lambda\mu m^2}{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}\left(C-\frac{m^3\left(\lambda^2-4\mu\right)t^\alpha\left(\sqrt{105}\sqrt{m^4\left(\lambda^2-4\mu\right)^2}+11m^2\left(\lambda^2-4\mu\right)\right)}{8\alpha}+mx\right)\right)-\lambda}-$$

$$\frac{1}{8}\sqrt{\frac{7}{15}}\sqrt{m^4\left(\lambda^2-4\mu\right)^2}-\frac{1}{8}m^2\left(\lambda^2+4\mu\right)$$



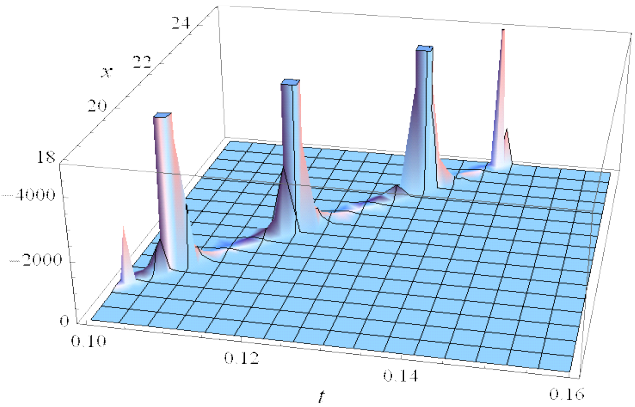
Şekil 18: $u_5(x,t)$ fonksiyonunun $\alpha = 0.8$, $m = -2$, $\lambda = 1, \mu = 2, C = 1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

- $\lambda^2 - 4\mu > 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\mu = 0$ için çözüm;

$$u_6(x,t) = -\frac{\lambda^2 m^2}{\sinh\left(\lambda\left(C - \frac{\lambda^2 m^3\left(\sqrt{105}\sqrt{\lambda^4 m^4} + 11\lambda^2 m^2\right)t^\alpha}{8\alpha} + mx\right)\right) + \cosh\left(\lambda\left(C - \frac{\lambda^2 m^3\left(\sqrt{105}\sqrt{\lambda^4 m^4} + 11\lambda^2 m^2\right)t^\alpha}{8\alpha} + mx\right)\right) - 1} -$$

$$\frac{\lambda^2 m^2}{\left(\sinh\left(\lambda\left(C - \frac{\lambda^2 m^3\left(\sqrt{105}\sqrt{\lambda^4 m^4} + 11\lambda^2 m^2\right)t^\alpha}{8\alpha} + mx\right)\right) + \cosh\left(\lambda\left(C - \frac{\lambda^2 m^3\left(\sqrt{105}\sqrt{\lambda^4 m^4} + 11\lambda^2 m^2\right)t^\alpha}{8\alpha} + mx\right)\right) - 1\right)^2} -$$

$$\frac{1}{8}\sqrt{\frac{7}{15}}\sqrt{\lambda^4 m^4} - \frac{1}{8}\lambda^2 m^2$$



Şekil 19: $u_6(x,t)$ fonksiyonunun $\alpha = 0.8$, $m = -1.2$, $\lambda = 2, \mu = 0, C = 2$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

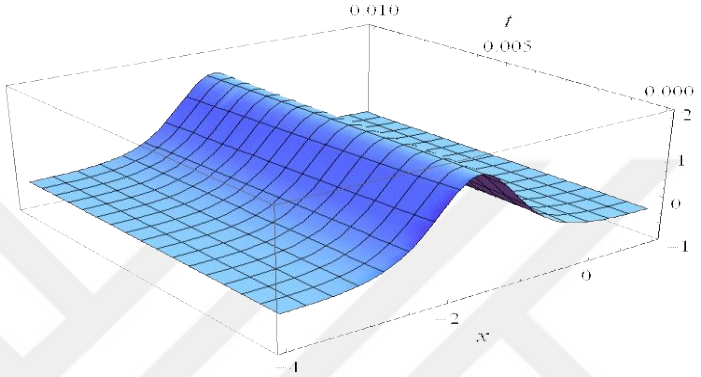
Çözüm kümesi 3 için aşağıdaki çözüm setleri elde edilir:

- $\lambda^2 - 4\mu > 0$ ve $\mu \neq 0$ için çözüm;

$$u_7(x,t)=-\frac{4\mu^2m^2}{\left(-\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\left(C+mx+\frac{m^3\left(\lambda^2-4\mu\right)t^\alpha\left(\sqrt{105}\sqrt{m^4\left(\lambda^2-4\mu\right)^2}-11m^2\left(\lambda^2-4\mu\right)\right)}{8\alpha}\right)\right)-\lambda\right)^2}$$

$$-\frac{2\lambda\mu m^2}{-\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\left(C+\frac{m^3\left(\lambda^2-4\mu\right)t^\alpha\left(\sqrt{105}\sqrt{m^4\left(\lambda^2-4\mu\right)^2}-11m^2\left(\lambda^2-4\mu\right)\right)}{8\alpha}+mx\right)\right)-\lambda}$$

$$+\frac{1}{8}\sqrt{\frac{7}{15}}\sqrt{m^4\left(\lambda^2-4\mu\right)^2}-\frac{1}{8}m^2\left(\lambda^2+4\mu\right)$$



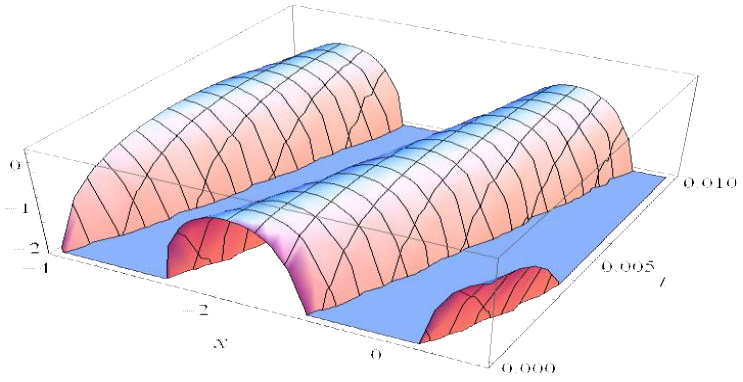
Şekil 20: $u_7(x,t)$ fonksiyonunun $\alpha=0.8$, $m=1.2$, $\lambda=3,\mu=1,C=1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

- $\lambda^2-4\mu<0$ ve $\mu\neq 0$ için çözüm;

$$u_8(x,t)=-\frac{4\mu^2m^2}{\left(\sqrt{4\mu-\lambda^2}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}\left(C+mx+\frac{m^3\left(\lambda^2-4\mu\right)t^\alpha\left(\sqrt{105}\sqrt{m^4\left(\lambda^2-4\mu\right)^2}-11m^2\left(\lambda^2-4\mu\right)\right)}{8\alpha}\right)\right)-\lambda\right)^2}$$

$$-\frac{2\lambda\mu m^2}{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}\left(C+\frac{m^3\left(\lambda^2-4\mu\right)t^\alpha\left(\sqrt{105}\sqrt{m^4\left(\lambda^2-4\mu\right)^2}-11m^2\left(\lambda^2-4\mu\right)\right)}{8\alpha}+mx\right)\right)-\lambda}$$

$$+\frac{1}{8}\sqrt{\frac{7}{15}}\sqrt{m^4\left(\lambda^2-4\mu\right)^2}-\frac{1}{8}m^2\left(\lambda^2+4\mu\right)$$



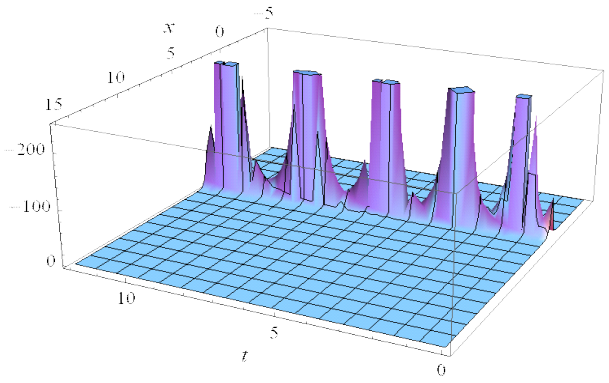
Şekil 21: $u_8(x,t)$ fonksiyonunun $\alpha=0.8$, $m=1.2$, $\lambda=1,\mu=1,C=1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

- $\lambda^2-4\mu>0$, $\lambda\neq 0$ ve $\mu=0$ için çözüm;

$$u_9(x,t)=-\frac{\lambda^2m^2}{\sinh\left(\lambda\left(C+\frac{\lambda^2m^3\left(\sqrt{105}\sqrt{\lambda^4m^4}-11\lambda^2m^2\right)t^\alpha}{8\alpha}+mx\right)\right)+\cosh\left(\lambda\left(C+\frac{\lambda^2m^3\left(\sqrt{105}\sqrt{\lambda^4m^4}-11\lambda^2m^2\right)t^\alpha}{8\alpha}+mx\right)\right)-1}$$

$$-\frac{\lambda^2m^2}{\left(\sinh\left(\lambda\left(C+\frac{\lambda^2m^3\left(\sqrt{105}\sqrt{\lambda^4m^4}-11\lambda^2m^2\right)t^\alpha}{8\alpha}+mx\right)\right)+\cosh\left(\lambda\left(C+\frac{\lambda^2m^3\left(\sqrt{105}\sqrt{\lambda^4m^4}-11\lambda^2m^2\right)t^\alpha}{8\alpha}+mx\right)\right)-1\right)^2}$$

$$+\frac{1}{8}\sqrt{\frac{7}{15}}\sqrt{\lambda^4m^4}-\frac{1}{8}\lambda^2m^2$$



Şekil 22: $u_9(x,t)$ fonksiyonunun $\alpha=0.8$, $m=-1.2$, $\lambda=1,\mu=0,C=1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

3.5 Kesirli Mertebeden Negatif Mertebeli KDV-Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff Denklemi

Kesirli mertebeden lineer olmayan negatif mertebeli KDV-Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff denklemini ele alalım.

$$D_t^{\alpha} D_x u + \theta D_x^2 u + \kappa D_x D_y u + D_x^3 D_y u + 2 D_y u D_x^2 u + 4 D_x u D_x D_y u + \psi D_x D_z u = 0 \quad (3.25)$$

(3.25) denkleminde $\xi = x + y + z + \frac{dt^{\alpha}}{\alpha}$ dalga dönüşümü ve zincir kuralı uygulanıp, elde edilen denklem bir kez integre edilirse aşağıdaki lineer olmayan adi diferansiyel denkleme ulaşılır.

$$u''' + u'(d + \theta + \kappa + \psi) + 3\left(u'\right)^2 = 0 \quad (3.26)$$

(3.26) denkleminde homojen denge yöntemi kullanırsa

$$m + 3 = 2(m + 1) \quad (3.27)$$

olmak üzere iki denklem eşitlenirse $m = 1$ bulunur. (2.9) dan (3.26) denkleminin çözümü

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \exp(-\phi(\xi)) \quad (3.28)$$

şeklinde elde edilecek olup, a_0 ve a_1 daha sonra hesaplanacaktır. (3.28) denklemi ve (2.10) denklemleri (3.26) denklemlerinde yerine yazılır ve elde edilen denklem $\exp(-\phi(\xi))$ fonksiyonunun kuvvetlerine göre düzenlenir ve her bir katsayı sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklem sistemine ulaşılır.

$$\begin{aligned}
&3a_1^2\mu^2 - a_1 d\mu - a_1\theta\mu - a_1\kappa\mu - a_1\lambda^2\mu - 2a_1\mu^2 - a_1\mu\psi = 0\\
&6a_1^2\lambda - 12a_1\lambda = 0,\\
&3a_1^2 - 6a_1 = 0,\\
&3a_1^2\lambda^2 + 6a_1^2\mu - a_1 d - a_1\theta - a_1\kappa - 7a_1\lambda^2 - 8a_1\mu - a_1\psi = 0,\\
&6a_1^2\lambda\mu - a_1 d\lambda - a_1\theta\lambda - a_1\kappa\lambda - a_1\lambda^3 - 8a_1\lambda\mu - a_1\lambda\psi = 0
\end{aligned} \quad (3.29)$$

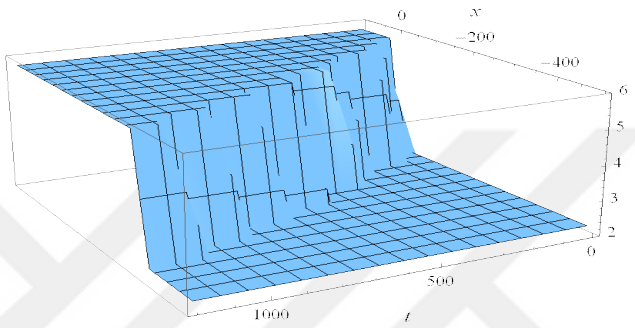
(3.29) denklem sistemi MATHEMATICA programı yardımıyla çözülürse

$$\kappa = -d - \theta - \lambda^2 + 4\mu - \psi, a_1 = 2 \quad (3.30)$$

Çözüm seti elde edilir. (3.28), (3.30), (2.10) ve $\xi = x + y + z + \frac{dt^{\alpha}}{\alpha}$ dönüşümü yardımıyla, (3.25) denkleminin analitik çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

- $\lambda^2 - 4\mu > 0$ ve $\mu \neq 0$ için çözüm;

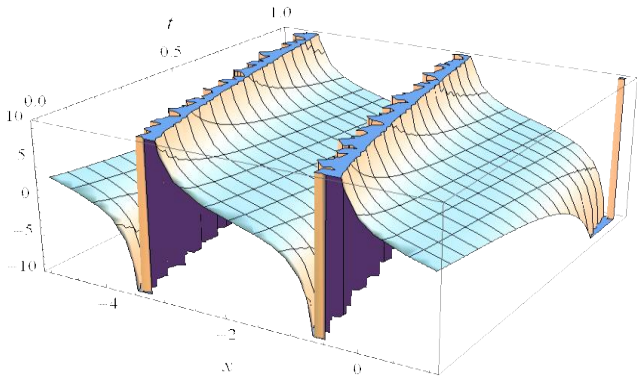
$$u_1(x,y,z,t) = a_0 + \frac{4\mu}{-\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\left(C + \frac{dt^{\alpha}}{\alpha} + x + y + z\right)\right) - \lambda}$$



Şekil 23: $u_1(x,y,z,t)$ fonksiyonunun $\alpha = 0.8$, $a_0 = 1, d = 1, y = 1, z = 1,$ $\lambda = -3, \mu = 1.5, C = 1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

- $\lambda^2 - 4\mu < 0$ ve $\mu \neq 0$ için çözüm;

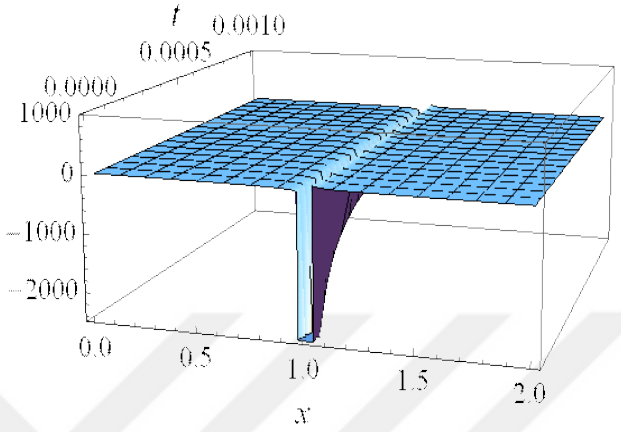
$$u_2(x,y,z,t) = a_0 + \frac{4\mu}{\sqrt{4\mu - \lambda^2}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}\left(C + \frac{dt^{\alpha}}{\alpha} + x + y + z\right)\right) - \lambda}$$



Şekil 24: $u_2(x,y,z,t)$ fonksiyonunun $\alpha = 0.8$, $a_0 = 1, d = 1, y = 1, z = 1,$ $\lambda = -1, \mu = 1.5, C = 1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

- $\lambda^2 - 4\mu > 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\mu = 0$ için çözüm;

$$u_3(x,y,z,t) = a_0 + \frac{2\lambda}{\sinh\left(\lambda\left(C + \frac{dt^\alpha}{\alpha} + x + y + z\right)\right) + \cosh\left(\lambda\left(C + \frac{dt^\alpha}{\alpha} + x + y + z\right)\right) - 1}$$



Şekil 25: $u_3(x,y,z,t)$ fonksiyonunun $\alpha = 0.8$, $a_0 = -1, d = -1, y = -1, z = -1,$ $\lambda = -1, \mu = 1.5, C = 1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

3.6 Kesirli Mertebeden Genelleştirilmiş Benjamin Denkleminin Analitik Çözümleri

Kesirli mertebeden lineer olmayan genelleştirilmiş Benjamin denklemini ele alalım.

$$D_t^{2\alpha}u + \beta D_x^4 u + \lambda u D_x^2 u + D_t^\alpha u + \lambda\left(D_x u\right)^2 = 0 \tag{3.31}$$

(3.31) Denkleminde $\xi = px + \frac{ct^\alpha}{\alpha}$ dalga dönüşümü ve zincir kuralı uygulanıp, elde edilen denklem bir kez integre edilirse aşağıdaki lineer olmayan adi diferansiyel denkleme ulaşılır.

$$\beta p^4 u''' + c^2 u' + \lambda p^2 u u' = 0 \tag{3.32}$$

(3.32) denkleminde homojen denge yöntemi kullanırsa

$$m+3 = 2m+1 \tag{3.33}$$

olmak üzere iki denklem eşitlenirse $m=2$ bulunur. (2.9) dan (3.32) denkleminin çözümü

$$u(\xi)=a_0+a_1\exp(-\phi(\xi))+a_2\exp(-\phi(\xi))^2 \tag{3.34}$$

şeklinde elde edilecek olup, a_0 ,a_1 ve a_2 daha sonra hesaplanacaktır. (3.34) denklemi ve (2.10) denklemleri (3.32) denklemlerinde yerine yazılır ve elde edilen denklem $\exp(-\phi(\xi))$ fonksiyonunun kuvvetlerine göre düzenlenir ve her bir katsayı sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklem sistemine ulaşılır.

$$-2a_2^{\,2}\lambda p^2-24a_2\beta p^4=0$$

$$-3a_1a_2\lambda p^2-6a_1\beta p^4-2a_2^{\,2}\lambda^2p^2-54a_2\beta\lambda p^4=0$$

$$-2a_0a_2\lambda p^2-a_1^{\,2}\lambda p^2-3a_1a_2\lambda^2p^2-12a_1\beta\lambda p^4-$$
$$2a_2^{\,2}\lambda\mu p^2-2a_2c^2-38a_2\beta\lambda^2p^4-40a_2\beta\mu p^4=0$$

$$-a_0a_1\lambda p^2-2a_0a_2\lambda^2p^2-a_1^{\,2}\lambda^2p^2-3a_1a_2\lambda\mu p^2-a_1c^2-$$
$$7a_1\beta\lambda^2p^4-8a_1\beta\mu p^4-2a_2c^2\lambda-8a_2\beta\lambda^3p^4-52a_2\beta\lambda\mu p^4=0$$

$$-a_0a_1\lambda^2p^2-2a_0a_2\lambda\mu p^2-a_1^{\,2}\lambda\mu p^2-a_1c^2\lambda-a_1\beta\lambda^3p^4-$$
$$8a_1\beta\lambda\mu p^4-2a_2c^2\mu-14a_2\beta\lambda^2\mu p^4-16a_2\beta\mu^2p^4=0$$

$$-a_0a_1\lambda\mu p^2-a_1c^2\mu-a_1\beta\lambda^2\mu p^4-2a_1\beta\mu^2p^4-6a_2\beta\lambda\mu^2p^4=0 \tag{3.35}$$

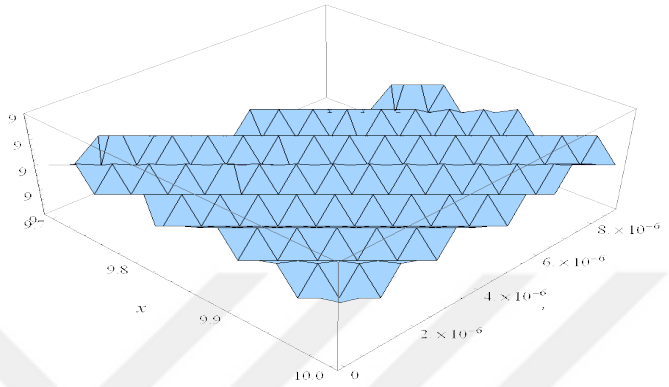
(3.35) denklem sistemi sembolik hesaplama programlarından biri olan MATHEMATICA yardımıyla çözülürse;

$$a_1=-12\beta p^2,\ a_2=-\frac{12\beta p^2}{\lambda},\ c=-\sqrt{-a_0\lambda p^2-\beta\lambda^2p^4-8\beta\mu p^4} \tag{3.36}$$

çözüm seti elde edilir. (3.34), (3.36), (2.10) ve $\xi=px+\dfrac{ct^{\alpha}}{\alpha}$ dönüşümü yardımıyla, (3.31) denkleminin analitik çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

- $\lambda^2-4\mu>0$ ve $\mu\neq0$ için çözüm;

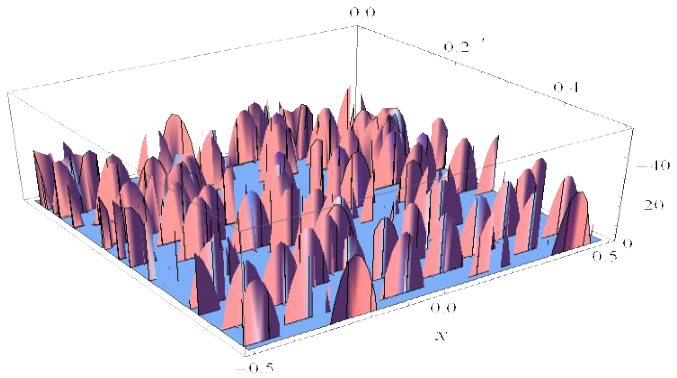
$$u_1(x,t)=-\frac{48\beta\mu^2p^2}{\lambda\left(-\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\left(-\frac{t^\alpha\sqrt{-a_0\lambda p^2-\beta\lambda^2p^4-8\beta\mu p^4}}{\alpha}+\kappa+px\right)\right)-\lambda\right)^2}$$
$$-\frac{24\beta\mu p^2}{-\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\left(-\frac{t^\alpha\sqrt{-a_0\lambda p^2-\beta\lambda^2p^4-8\beta\mu p^4}}{\alpha}+\kappa+px\right)\right)-\lambda}+a_0$$



Şekil 26: $u_1(x,t)$ fonksiyonunun $\alpha=0.4$, $p=1$, $\kappa=3$, $\beta=2$, $\lambda=3$, $\mu=1$, $a_0=1$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

- $\lambda^2-4\mu<0$ ve $\mu\neq0$ için çözüm;

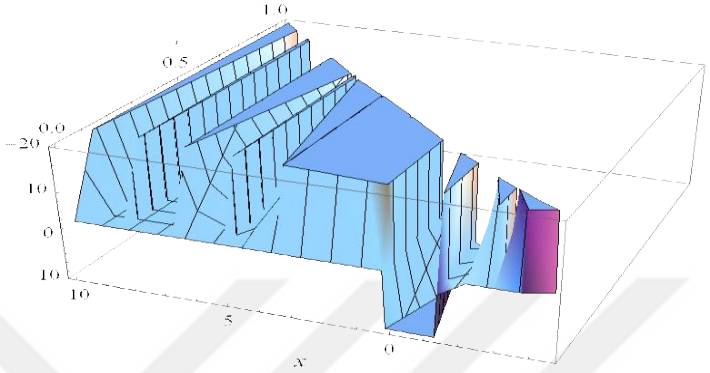
$$u_2(x,t)=-\frac{48\beta\mu^2p^2}{\lambda\left(\sqrt{4\mu-\lambda^2}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}\left(-\frac{t^\alpha\sqrt{-a_0\lambda p^2-\beta\lambda^2p^4-8\beta\mu p^4}}{\alpha}+\kappa+px\right)\right)-\lambda\right)^2}$$
$$-\frac{24\beta\mu p^2}{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}\left(-\frac{t^\alpha\sqrt{-a_0\lambda p^2-\beta\lambda^2p^4-8\beta\mu p^4}}{\alpha}+\kappa+px\right)\right)-\lambda}+a_0$$



Şekil 27: $u_2(x,t)$ fonksiyonunun $\alpha=0.2$, $p=3$, $\kappa=3$, $\beta=-1$, $\lambda=1$, $\mu=3$, $a_0=-1$ değerleri için üç boyutlu grafiği

- $\lambda^2-4\mu>0$, $\lambda\neq 0$ ve $\mu=0$ için çözüm;

$$u_3(x,t)=-\frac{12\beta\lambda p^2}{\sinh\left(\lambda\left(-\frac{t^\alpha\sqrt{-a_0\lambda p^2-\beta\lambda^2p^4}}{\alpha}+\kappa+px\right)\right)+\cosh\left(\lambda\left(-\frac{t^\alpha\sqrt{-a_0\lambda p^2-\beta\lambda^2p^4}}{\alpha}+\kappa+px\right)\right)-1}$$
$$-\frac{12\beta\lambda p^2}{\left(\sinh\left(\lambda\left(-\frac{t^\alpha\sqrt{-a_0\lambda p^2-\beta\lambda^2p^4}}{\alpha}+\kappa+px\right)\right)+\cosh\left(\lambda\left(-\frac{t^\alpha\sqrt{-a_0\lambda p^2-\beta\lambda^2p^4}}{\alpha}+\kappa+px\right)\right)-1\right)^2}+a_0$$



Şekil 28: $u_3(x,t)$ fonksiyonunun $\alpha=0.9$, $p=3$, $\kappa=2$, $\beta=-2$, $\lambda=3$, $\mu=0$, $a_0=-3$ değerleri için 3 boyutlu grafiği

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, conformable kesirli türevli Yu-Toda-Sasa-Fukuyama, geliştirilmiş değiştirilmiş KDV, Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa, Caudrey-Dodd-Gibbon, negatif mertebeli KDV-Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff, genelleştirilmiş Benjamin denklemleri ele alındı. Ele alınan kesirli mertebeden kısmi türevli denklemler dalga dönüşümü ve zincir kuralı ile tam sayı mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleme indirgendikten sonra alt denklem yöntemi ve $\exp(-\phi(\xi))$ yöntemleri yardımıyla çözüldü. Bu işlemleri gerçekleştirirken MATHEMATICA programından yardım alınmıştır.

Literatürde ilk olma özelliğini taşıyan bu çözümlerin, geometrik davranışını gözlemleyebilmek için bazı özel değerler kullanılarak üç boyutlu grafikleri oluşturulmuştur.

Sonuç olarak, alt denklem yöntemi ve $\exp(-\phi(\xi))$ yöntemlerinin, conformable mertebeden türev içeren kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde oldukça etkili ve kullanışlı yöntemler olduğu anlaşılmıştır.

5. KAYNAKLAR

Abdeljawad, T., "On conformable fractional calculus". *Journal of computational and Applied Mathematics*, 279, 57-66, (2015).

Abdeljawad, T., Alzabut, J. & Jarad, F., "A generalized Lyapunov-type inequality in the frame of conformable derivatives", *Advances in Difference Equations*, 2017(1), 1-10, (2017).

Adolfsson, K., Enelund, M., & Olsson, P., "On the fractional order model of viscoelasticity*", Mechanics of Time-Dependent Materials*, 9(1), 15-34, (2005).

Agarwal, R., Belmekki, M. & Benchohra, M., "A survey on semilinear differential equations and inclusions involving Riemann-Liouville fractional derivative", *Advances in Difference Equations*, 2009, 1-47, (2009).

Akbulut, A., Kaplan, M., & Tascan, F., "The investigation of exact solutions of nonlinear partial differential equations by using $\exp(-\phi(\xi))$ method", *Optik*, 132, 382-387, (2017).

Akbulut, A. & Kaplan, M., "Auxiliary equation method for time-fractional differential equations with conformable derivative*", Computers & Mathematics with Applications*, 75(3), 876-882, (2018).

Almeida, R., Brito da Cruz, A., Martins, N. & Monteiro, M. T. T., "An epidemiological MSEIR model described by the Caputo fractional derivative", *International Journal of Dynamics and Control*, 7(2), 776-784, (2019).

Alotta, G., Barrera, O., Cocks, A. C., Paola, M. D., "On the behavior of a three-dimensional fractional viscoelastic constitutive model", *Meccanica*, *52*(9), 2127-2142,(2017).

Arqub, O. A. & Al-Smadi, M., "Fuzzy conformable fractional differential equations: novel extended approach and new numerical solutions", *Soft Computing*, 24(16), 12501-12522, (2020).

Arqub, O. A., Al-Smadi, M., Almusawa, H., Baleanu, D., Hayat, T., Alhodaly, M. & Osman, M. S. "A novel analytical algorithm for generalized fifth-order time-fractional nonlinear evolution equations with conformable time derivative arising in shallow water waves", *Alexandria Engineering Journal*, 61(7), 5753-5769, (2022).

Atangana, A., “Derivative with a new parameter: Theory, methods and applications”, *Academic Press*, (2015).

Atangana, A., Baleanu, D. & Alsaedi, A., “New properties of conformable derivative”, *Open Mathematics*, 13(1), (2015).

Atangana, A. & Gómez-Aguilar, J. F., “Numerical approximation of Riemann-Liouville definition of fractional derivative: from Riemann-Liouville to Atangana-Baleanu”, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 34(5), 1502-1523, (2018).

Batarfi, H. Losada, J., Nieto, J. J. & Shammakh, W., “Three-point boundary value problems for conformable fractional differential equations”, *Journal of Function Spaces*, (2015).

Benghorbal, M.M., “Power series solutions of fractional differential equations and symbolic derivatives and integrals”, PhD thesis, Faculty of Graduate Studies The University of Western Ontario, Canada, (2004).

Chen, C. & Jiang, Y. L. “Simplest equation method for some time-fractional partial differential equations with conformable derivative”, *Computers & Mathematics with Applications*, 75(8), 2978-2988, (2018).

Choi, Y. S., Chan, K. Y., “Fractional step algorithm for a model problem in electrochemistry”, *Mathematics and Computers in Simulation*, 34(2), 101-112,(1992).

Çenesiz, Y. & Kurt, A., “The solutions of time and space conformable fractional heat equations with conformable Fourier transform”, *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica*, 7(2), 130-140, (2015).

Çenesiz, Y., Baleanu, D., Kurt, A. & Tasbozan, O., “New exact solutions of Burgers’ type equations with conformable derivative”, *Waves in Random and Complex Media*, 27(1), 103-116, (2017).

Durur, H., Kurt, A., & Tasbozan, O., “New travelling wave solutions for KdV6 equation using sub equation method”, *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 5(1), 455-460, (2020).

Engheta,”Non fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 44(4), 554-566,(1996).

Eslami, M. & Rezazadeh, H., “The first integral method for Wu–Zhang system with conformable time-fractional derivative”, *Calcolo*, 53(3), 475-485, (2016).

Gao, G. H., Sun, Z. Z. & Zhang, H. W., “A new fractional numerical differentiation formula to approximate the Caputo fractional derivative and its applications”, *Journal of Computational Physics*, 259, 33-50, (2014).

Gómez-Aguilar, J. F., Atangana, A., Morales-Delgado, V. F., “Electrical circuits RC, LC, and RL described by Atangana–Baleanu fractional derivatives”, *International Journal of Circuit Theory and Applications*, *45*(11), 1514-1533, (2017).

Jiang, S., Zhang, J., Zhang, Q. & Zhang, Z., “Fast evaluation of the Caputo fractional derivative and its applications to fractional diffusion equations”, *Communications in Computational Physics*, 21(3), 650-678, (2017).

Karayer, H., Demirhan, D. & Büyükkılıç, F., “Conformable fractional Nikiforov-Uvarov method”, *Communications in Theoretical Physics*, 66(1), 12, (2016).

Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. & Sababheh, M., “A new definition of fractional derivative”, *Journal of computational and applied mathematics*, 264, 65-70, (2014).

Khalil, R., Al Horani, M. & Hammad, M. A., “Geometric meaning of conformable derivative via fractional cords”, *J. Math. Comput. Sci*, 19, 241-245, (2019).

Kurt, A., “New analytical and numerical results for fractional Bogoyavlensky-Konopelchenko equation arising in fluid Dynamics”, *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 35(1), 101-112,(2020).

Magin, R. L.,” Fractional calculus in bioengineering: A tool to model complex Dynamics”, *In Proceedings of the 13th International Carpathian Control Conference (ICCC)* (pp. 464-469). IEEE.13, (2012, May).

Nisar, K. S., Ahmad, S., Ullah, A., Shah, K., Alrabaiah, H. & Arfan, M., “Mathematical analysis of SIRD model of COVID-19 with Caputo fractional derivative based on real data”, *Results in Physics*, 21, 103772, (2021).

Oldham, K. B.,” Fractional differential equations in electrochemistry”, *Advances in Engineering Software*, *41*(1), 9-12, (2010).

Podlubny, I., “An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications”, *Fractional differential equations, Amsterdam: Elsevier*, (1998).

Saoudi, K., Agarwal, P., Kumam, P., Ghanmi, A. & Thounthong, P., "The Nehari manifold for a boundary value problem involving Riemann–Liouville fractional derivative", *Advances in Difference Equations*, 2018(1), 1-18, (2018).

Sau Fa, K., "Fractional Langevin equation and Riemann-Liouville fractional derivative", *The European Physical Journal E*, 24(2), 139-143, (2007).

Shiri, B., Baleanu, D., "Numerical solution of some fractional dynamical systems in medicine involving non-singular kernel with vector order", *Results in Nonlinear Analysis*, *2*(4), 160-168, (2019).

Tasbozan, O., Çenesiz, Y. & Kurt, A., "New solutions for conformable fractional Boussinesq and combined KdV-mKdV equations using Jacobi elliptic function expansion method", *The European Physical Journal Plus*, 131(7), 1-14, (2016).

Thabet, H. & Kendre, S., "Analytical solutions for conformable space-time fractional partial differential equations via fractional differential transform", *Chaos, Solitons & Fractals*, 109, 238-245, (2018).

Tuan, N. H., Mohammadi, H. & Rezapour, S., "A mathematical model for COVID-19 transmission by using the Caputo fractional derivative", *Chaos, Solitons & Fractals*, 140, 110107 (2020).

Zhao, D. & Luo, M., "General conformable fractional derivative and its physical interpretation", *Calcolo*, 54(3), 903-917, (2017).

Zhou, Y. & Na Wang, J., "The nonlinear Rayleigh-Stokes problem with Riemann-Liouville fractional derivative", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(3), 2431-2438, (2021).