T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUHAMEL BANACH CEBİR YAPISI VE DUHAMEL ÇARPIMININ BAZI UYGULAMALARI

Mevlüt ALTINTAŞ

Danışman
Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

II. Danışman
Dr. Ramiz TAPDIGOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2022

TEZ ONAYI

Mevlüt ALTINTAŞ tarafından hazırlanan "**Duhamel Banach Cebir Yapısı ve Duhamel Çarpımının Bazı Uygulamaları**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL** Süleyman Demirel Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Suna SALTAN** Süleyman Demirel Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Dr. Öğrt. Üyesi Işıl Açık DEMİRCİ** Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi	....

Enstitü Müdürü	**Doç. Dr. Şule Sultan UĞUR**	....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Mevlüt ALTINTAŞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa
İÇİNDEKİLER i
ÖZET ii
ABSTRACT iv
TEŞEKKÜR vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ vii
1. GİRİŞ 1
2. KAYNAK ÖZETLERİ 5
3. DUHAMEL İÇÇARPIMI VE İNVARYANT ALTUZAYLAR 8
3.1. Bazı Uzay Ve Operatörlerin Temel Kavramları 8
3.2. α-Duhamel Çarpımı 12
3.3. Genişletilmiş Özdeğerler ve Genişletilmiş Özvektörler 14
3.4. Hardy Uzayının Volterra İnvaryant Altuzayları 16
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA 21
4.1. α-Duhamel Çarpımının Bazı Uygulamaları 21
4.1.1. $C^{(n)}(\Omega)$ cebirinin $\underset{\alpha}{*}$-üreteçleri 21
4.1.2. Volterra integral denkleminin çözüm kümesine uzaklığı 24
4.1.3. H^p uzayında V-invaryant alt uzayların latisi 26
4.1.4. $I - V_\alpha$ yörüngeleri ve iç türev hakkında 32
4.2. $(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{\circledast})$ Banach Cebiri Hakkında 37
4.2.1. V_α operatörün genişletilmiş özdeğerleri ve genişletilmiş özvektörleri 43
5. SONUÇ VE ÖNERİLER 49
KAYNAKLAR 49
ÖZGEÇMİŞ 59

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DUHAMEL BANACH CEBİR YAPISI VE DUHAMEL ÇARPIMININ BAZI UYGULAMALARI

Mevlüt ALTINTAŞ

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

II. Danışman: Dr. Ramiz TAPDIGOĞLU

Bu yüksek lisans tez çalışması Duhamel çarpımının uygulama alanları ve bazı uzayların Banach cebir yapısı ile ilgilidir. Bu bağlamda bu yüksek lisans tez çalışması Giriş, Kaynak Özetleri, Duhamel İç Çarpımı ve İnvaryant Alt Uzaylar ve Araştırma Bulguları ve Tartışma olmak üzere dört ana bölümden oluşacak biçimde planlanmıştır. Bu bölümlerden ilki giriş kısmı olarak oluşturulmuş ve konu hakkında genel çerçeve bu bölümde verilmiştir. Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde ise Duhamel çarpımının uygulama alanları ve invaryant altuzay problemi ile ilgili bazı teori hakkında tarihsel gelişimi sunulmuştur. Bu bölümün devamında ise $C^{(n)}(\Omega)$ uzayı ve Volterra integral operatörünün genişletilmiş özdeğerleri ve genişletilmiş özvektörleri ele alınmıştır. Tez çalışmasının üçüncü bölümünde ise devirli alt uzay, devirli operatör, konvolüsyon çarpımı, Duhamel çarpımı, α-Duhamel çarpımı, Banach cebir, maksimal ideal uzay, genişletilmiş özdeğer, genişletilmiş özvektör, invaryant alt uzay, Hardy uzayı ve Volterra integrasyon operatörü gibi kavramların tanımları verilmiş ve bu kavramlarla ilgili sonuçlar hakkında bilgi verilmiştir. Son bölüm ise alt başlıklara ayrılarak planlanmıştır. $\alpha \in \mathbb{C}$ bir sayı ve $\Omega \subset \mathbb{C}$ bölgesi $z = \alpha$ noktasına göre yıldız şekilli bir bölge, yani her $z \in \Omega$ ve λ, $0 \leq \lambda \leq 1$, için $\lambda z + (1-\lambda)\alpha \in \Omega$ olmak üzere $\Omega \subset \mathbb{C}$ bölgesi α noktasını içeren basit bağlantılı sınırlı bölge olsun. Başlangıç olarak α-Duhamel çarpımına göre $\overline{\Omega}$ üzerinde n. türevi sürekli Ω kümesinde tüm sürekli fonksiyonların $C^{(n)}(\Omega)$ uzayının Banach cebir yapısı incelenmiş ve $C^{(n)}(\Omega)$ uzayının maksimal ideal uzayı tanımlanmıştır. Ayrıca integrasyon α ve z noktalarını bağlayan düz doğru parçası üzerinde olmak üzere α-integrasyon operatörü olan V_α operatörü $V_\alpha f(z) := \int\limits_\alpha^z f(t)\,dt$ ile $C^{(n)}$ üzerinde tanımlı olsun. Aynı zamanda, $C^{(n)}(\Omega)$ uzayı üzerinde V_α Volterra integral operatörünün Malamud-Biswas-Lambert-Petrović anlamında genişletilmiş özvektörleri karakterize edilmiştir. Diğer taraftan α-Duhamel çarpımı yardımıyla $\left(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{*}\right)$ Banach cebirinin $\underset{\alpha}{*}$-üreteçleri tanımlanmıştır. Volterra denkleminin çözümlerinin bu denklemin çözüm kümesine olan mesafesinin tahmin edilmesi için α-Duhamel çarpımının kullanımı incelenmiştir ve Aleman-Korenblum teoreminin yeni ispatı verilmiştir. Duhamel çarpımını kullanarak H^p Hardy uzayında V-invaryant alt uzaylarının tanımlanması amaçlanmıştır. Son olarak da, $\delta_A(X) := [X, A]$ ile tanımlanan $\mathcal{B}\left(C^{(n)}(\Omega)\right)$ üzerindeki δ_A iç türevli yörüngelerin normu α-Duhamel çarpımları cinsinden tahmin edilmiştir. Bu tez çalışmasının dört ana bölümünden sonra Sonuç ve Öneriler kısmı yer almaktadır. Bu kısımda tez çalışması sonunda elde edilen sonuçlar ve bu sonuçlardan ortaya çıkacak bir takım açık problemler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: α-Duhamel çarpımı, Banach cebir, α-integrasyon operatör, Maksimal ideal uzay, Genişletilmiş özvektör, Yıldız şekilli bölge, Üreteç, İç türev operatörü, İnvaryant altuzay, Hardy uzayı, Volterra integrasyon operatörü.

2022, 59 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

DUHAMEL BANACH ALGEBRA STRUCTURE AND SOME APPLICATIONS OF THE DUHAMEL PRODUCT

Mevlüt ALTINTAŞ

Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

Co-Supervisor: Dr. Ramiz TAPDIGOĞLU

This master's thesis is about the application areas of Duhamel multiplication and the Banach algebra structure of some spaces. In this context, this master's thesis is planned to consist of four main parts: Introduction, Source Summaries, Duhamel Dot Product and Invariant Subspaces and Research Findings and Discussion. The first of these chapters was created as an introduction and the general framework on the subject is given in this chapter. In the second part of this thesis, the application areas of Duhamel product and the historical development of some theory related to the invariant subspace problem are presented. In the continuation of this section, expanded eigenvalues and expanded eigenvectors of $C^{(n)}(\Omega)$ space and Volterra integral operator are discussed. In the third part of the thesis, cyclic subspace, cyclic operator, convolution product, Duhamel product, α-Duhamel product, Banach algebra, maximal ideal space, extended eigenvalue, extended eigenvector, invariant subspace, Hardy space and Volterra integration operator definitions of the concepts are given and information about the results related to these concepts is given. The last chapter is planned by dividing it into sub-headings. Let $\alpha \in \mathbb{C}$ and $\Omega \subset \mathbb{C}$ be a simply connected bounded region containing the point α, which is a star-like region with respect to the point $z = \alpha$, i.e., $\lambda z + (1-\lambda)\alpha \in \Omega$ for every $z \in \Omega$ and λ, $0 \le \lambda \le 1$. Firstly, Banach algebra structure of $C^{(n)}(\Omega)$ space of all continuous functions on Ω with the n th derivative continuous on $\overline{\Omega}$ was investigated according to α-Duhamel product and maximal ideal space of $C^{(n)}(\Omega)$ space was defined. Also, the α-integration operator V_α is defined on $C^{(n)}$ by $V_\alpha f(z) := \int_\alpha^z f(t)\,dt$, where the integration is performed as above over straight-line segments connecting the points α and z. At the same time, extended eigenvectors of the V_α Volterra integral operator in the Malamud-Biswas-Lambert-Petrović sense on the $C^{(n)}(\Omega)$ space are characterized. On the other hand, $\underset{\alpha}{*}$-generators of $\left(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{*}\right)$ Banach algebra are defined with the help of α-Duhamel product. The use of α-Duhamel product to estimate the distance of the solutions of the Volterra equation to the solution set of this equation is examined and a new proof of the Aleman-Korenblum theorem is given. It is aimed to define V-invariant subspaces in H^p Hardy space using Duhamel

product. Finally, the norm of inner-derivative orbits δ_A on $\mathcal{B}\left(C^{(n)}(\Omega)\right)$ defined by $\delta_A(X) := [X,A]$ is estimated in terms of α-Duhamel products. After the four main parts of this thesis, there is the Conclusion and Suggestions part. In this section, the results obtained at the end of the thesis work and some open problems that will emerge from these results are given.

Keywords: α-Duhamel product, Banach algebra, α-integration operator, Maximal ideal space, Extended eigenvector, Starlike region, Generator, Inner derivation operator, Invariant subspace, Hardy space, Volterra integration operator.

2022, 59 pages

TEŞEKKÜR

Bu yüksek lisans tez konusunun seçilmesinde ve çalışmalarım esnasında, ortaya çıkan her türlü bilimsel problemin aşılmasında, yaptığı uyarılar ve verdiği desteklerden dolayı her zaman yardımlarını gördüğüm çok değerli bilim insanı Danışman hocam Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL'a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu çalışmam için her türlü imkanı sağlamak lütfunda bulunan ikinci danışman hocam Dr. Ramiz TAPDIGOĞLU'na teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca beni bugünlere sevgi, saygı ve vefayı bilecek şekilde yetiştirerek getiren ve çalışmamın her safhasında beni yalnız bırakmayan maddi, manevi desteğini esirgemeyen bu hayattaki en büyük şansım olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Mevlüt ALTINTAŞ

ISPARTA, 2022

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathrm{Cyc}(V)$	V operatörünün devirli altuzaylarının kümesi
$(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{*})$	Banach cebiri
$\mathbb{D}$	Birim disk
$d(f,g)$	Öteleme değişmez metriği
D_g	α-Duhamel operatörü
$f \circledast g$	f ve g iki fonksiyonun Duhamel çarpımı
$f \underset{\alpha}{\circledast} g$	f ve g iki fonksiyonun α-Duhamel çarpımı
$Hol(\mathbb{D})$	Birim diskteki analitik fonksiyonlar
H^p	Hardy uzayı
$\widetilde{h}(\lambda)$	Klasik Borel dönüşümü
I	$C^{(n)}(\Omega)$ üzerinde bir özdeşlik operatörü
$*$	Konvolüsyon çarpımı
$\underset{\alpha}{*}$	α-konvolüsyon çarpımı
$\circledast$	Duhamel çarpımı
$\underset{\alpha}{\circledast}$	α-Duhamel çarpımı
$\mathrm{Lat}V$	V operatörünün latisi
Γ	Gamma fonksiyonu
δ_A	İç türev operatörü
$L_a^2(\mathbb{D})$	Bergman uzayı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
V	Volterra integral operatörü
V_α	α-integral operatörü

1. GİRİŞ

Bu yüksek lisans tezinde α-Duhamel çarpımının bazı uygulamaları ve bazı uzayların Duhamel Banach cebir yapısı üzerine incelemeler yapılmıştır. Ayrıca integral operatörünün invaryant altuzaylarının latisi ve genişletilmiş özvektörleri karakterize edilmiştir. Yani, Volterra integral operatörleri için α-Duhamel çarpımının bazı yeni uygulama alanları belirlenmiştir. Burada verilen sonuçların daha rahat kavranılması için ihtiyaç duyulan notasyon ve kavramlar tezimizin üçüncü kısmında verilmiştir.

1800'lü yılların başında operatör kalkülüsü'nün temelleri atılmıştır. Boole, Cauchy, Laplace gibi birçok bilim insanı operatör kalkülüsünde bulunan metotları çalışmacıların kullanımına sunmuşlardır. Ancak operatör kalkülüsün fizik ve ilgili problemlerde ilk kullanımı O. Heaviside'e aittir. Ayrıca, bu teoriyi elektrodinamik ve ilgili alanlarda yer alan problemlere uygulayan kişi yine Heaviside olmuştur. Bu konu için farklı bir yaklaşım 1930'lu yıllarda cebirsel mantıktan yararlanarak J. Mikusinski tarafından geliştirilmiştir (Mikusinski, 1956). Burada,

$$(f*g)(z)=\int_0^z f(z-t)g(t)dt$$

ile ifade edilen konvolüsyon çarpımı matematiksel analiz problemleri ve uygulamalarında pek çok bakımdan değere sahiptir (Mikusinski, 1956; Frankfurt ve Rovnyak, 1977, 1978). Heaviside'ın operatör kalkülüsü ile ilgili olacak şekilde konvolüsyon çarpımı verilmiştir. Ayrıca ortaya konan bu ilişki, konvolüsyon çarpımı ile

$$Vf(z)=\int_0^z f(t)dt$$

integral operatörü arasındaki ilişkiye dayanmaktadır. Bu ilişki, $Vf=1*f$ ile ifade edilebilir. Bu sebeple, elde edilen bağıntı değişik fonksiyon uzaylarında Volterra integral operatörünün komutantlarının tasvir edilmesini gerçekler. Diğer taraftan Mikusinski'nin konvolüsyon çarpımının türevi Duhamel çarpımı olarak tanımlanır. Bu tanımlanan Duhamel çarpımı matematiksel analizin farklı problemlerinde, adi diferansiyel denklemler teorisi, matematiksel fiziğin sınır değer problemleri ve Mikusinski'nin operatör hesabı gibi farklı uygulamalara sahiptir.

Matematiğin açık olan önemli problemleri arasında invaryant altuzay problemi mevcut olup çözüm hala bulunmamıştır. İnvaryant altuzay problemi;

X kompleks Banach uzayı ve $T : X \to X$ dönüşümü sınırlı lineer olmak üzere M özdeş olmayan ve M, T için invaryant, yani $M \neq \{0\}$, $M \neq X$ ve $T(M) \subset M$ olacak şekilde herhangi $M \subset X$ kapalı altuzayı mevcut mu?

şeklinde ifade edilmektedir. Bu konu fonksiyonel analiz ve operatörler teorisininin en önemli konuları arasında bulunmaktadır. Bu nedenle, $x \neq 0$ olmak üzere her $x \in X$ in A nın devirli vektörü olması için gerekli ve yeterli koşul A operatörünün özdeş olmayan kapalı invaryant alt uzaya sahip olmamasıdır. Eğer X Hilbert uzayı ise A operatörü E gibi kapalı bir invaryant alt uzaya sahiptir. Buna bağlı olarak, A operatörünün $H = E \oplus E^{\perp}$ şeklinde ortogonal ayrılışı mevcut ve A operatörünün matris gösterimi de üçgen biçiminde olur. Bu gösterim ise çoğu problemin çözümünde önemli kolaylıklara sahiptir.

Neumann 20. yüzyılın başlarında Hilbert uzayında kompakt operatörlerin özdeş olmayan invaryant altuzaya sahip olduğunu vermiştir. Diğer taraftan ispat bir daha yapılmış ve Banach uzayında her kompakt operatörün özdeş olmayan hiperinvaryant altuzaylara sahip olduğu ifade edilmiştir (Aronszajn ve Smith, 1954). Daha sonra 20. yüzyılın ortalarında belli koşullar altında özdeş olmayan hiperinvaryant altuzaya sahip bir skaler operatör ile ilgili sonuç ispatlanmıştır (Bernstein ve Robinson, 1966). Lomonosov ise kısa bir süre sonra Banach uzayı üzerinde her sınırlı lineer operatörün özdeş olmayan kapalı invaryant altuzaya sahip olduğunu sabit nokta teoremini kullanarak vermiştir (Lomonosov, 1973). Daha sonra altnormal operatörün özdeş olmayan invaryant altuzaya sahip olduğu Brown (1978) tarafından verilmiştir (diğer ispat için bkz. (Bercovici vd., 1985; Thomson, 1986)). Öte yandan invaryant altuzaya sahip olmayan bazı ters örnekler kurularak bu türden uzaylar inşaa edilmiştir (Beauzamy, 1985; Enflo, 1976, 1987). Buna bir örnek ℓ^1 uzayı verilebilir (Read, 1984, 1985).

Ünlü Carleson interpolasyon teoremini veren bir sonuç 2004 yılında Ambrozie ve Müller (2004) tarafından literatüre kazandırılmıştır. Bu alanda yapılan en önemli sonuçlardan birisi Argyros ve Haydon (2011) tarafından inşaa edilmiştir. Diğer taraftan belli koşulları sağlayan sınırlı operatör ve bir uzay oluşturulmuştur (Gowers ve Maurey, 1997). Ayrıca Hilbert uzayında quasinilpotent operatörler için özdeş olmayan invaryant altuzayın mevcutluğunu veren minimal vektörlerin kavramı incelenmiştir (Ansari ve Enflo, 1998; Enflo, 1998; Enflo ve Hoim, 2003). Ayrıca yansımalı Banach uzay için bazı geliştirici olanaklar incelenmiştir (Troitsky, 2000, 2004). Bu ise Read (1997) in çalışmasında elde edilen sonuçlara göre bu yöndeki çalışmaların motivasyonunu azalttı. Ansari ve Enflo (1998) de verilen yöntemler sayesinde invaryant altuzayın mevcutluğunun alternatif ispatları oluşmuştur (Beauzamy, 1985; Anisca ve Troitsky, 2005; Chalendar ve Partington, 2005a,b; Kim, 2011; Chalendar ve Partington, 2013).

Operatör teorisinin diğer önemli problemlerinden biri ise A operatörünün hangi operatörler ile yer değiştirdiğidir, yani

$$\{A\}' = \{B : AB = BA\}$$

kümesini araştırmaktır. Diğer durum ise bu B operatörünün ne gibi faydasının olduğudur. Bu A operatörünün invaryant ve hiperinvaryant altuzaylarını bulmak A operatörünün hangi operatör ile yer değiştirebilirliği için önemlidir. Lomonosov (1973) un sonucuna göre, eğer A operatörü kompakt ise bu operatörün tüm komutantları olan $\{A\}'$ özdeş olmayan bir invaryant altuzaya sahiptir. Üstte bahsedilen Lomonosov teoremi araştırmacılar tarafından genelleştirilmeye çalışılmıştır. Bunlardan biri de A ile B nin komutatiflik şartını daha zayıf olan $AB = \lambda BA$ şartıyla değiştirmektir. Bu durum ise genelleştirilmiş özdeğer ve genelleştirilmiş özvektör kavramlarının öğrenilmesini önemli kılmaktadır ((Nagnibida, 1966; Raichinov, 1970; Kiryutenko, 1975; Crownover ve Hansen, 1977; Pearcy, 1976; Nagnibida, 1978; Tkachenko, 1979a; Nagnibida, 1981, 1984; Tkachenko, 1997; Karaev, 2006b)).

Bu tezde, ilk olarak, $C^{(n)}(\Omega)$ Banach uzayının normu verilmiş ve $C^{(n)}$ üzerinde α-konvolüsyonu ve α-Duhamel çarpımının tanımları verilmiştir. İkinci olarak, $\left(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{\circledast}\right)$ Banach cebirinin $\underset{\alpha}{*}$-üreteçleri α-Duhamel çarpımı yardımıyla tanımlanmıştır. Aynı zamanda

$$C_{\alpha,\mathcal{K}}f = g$$

Volterra denkleminin çözüm kümesini araştırmak için α-Duhamel çarpımı kullanılmıştır. Üçüncü olarak, H^p'nin V-invaryant alt uzayları karakterize edilmiş ve Hilbert uzaylarında tek nokta spektrumlu Cesaro sınırlı operatörler için Esterle-Katznelson-Tzafriri teoremi ile ilgili olan $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim disk için $H^2(\mathbb{D})$ Hilbert-Hardy uzayında $I - V_\alpha$ operatörünün yörüngelerinin normu hesaplanmıştır (bkz. Tkachenko (1977)). Ayrıca, α-Duhamel çarpımları yardımıyla $\delta_A(X) := [X,A]$ ile tanımlanan $\mathcal{B}\left(C^{(n)}(\Omega)\right)$ üzerindeki δ_A iç-türevli yörüngelerinin normu tahmin edilmiştir. Son kısımda ise $\left(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{\circledast}\right)$ nin değişmeli bir Banach cebiri olduğu ispatlanmış ve onun maksimal ideal uzayı ve invaryant altuzayları tanımlanmıştır. Ayrıca $C^{(n)}(\Omega)$ üzerinde α-integrasyon operatorü V_α için Malamud-Biswas-Lambert-Petrović anlamında genişletilmiş özvektörleri de incelenmiştir.

Şimdi, detaya girilmeden başlıklar halinde yüksek lisans tez çalışması sonucunda elde edilen sonuçlar verelim. Bu başlıklar ile ilgili detay Araştırma Bulguları ve Tartışma kısmında verilecektir.

- $C^{(n)}(\Omega)$ Banach uzayının normu verilmiş ve $C^{(n)}$ üzerinde α-konvolüsyonu ve α-Duhamel çarpımının tanımları verilmiştir.
- $\left(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{\circledast}\right)$ Banach cebirinin $\underset{\alpha}{*}$-üreteçleri α-Duhamel çarpımı yardımıyla tanımlanmıştır. Aynı zamanda $C_{\alpha,\mathcal{K}}f = g$ Volterra denkleminin çözüm kümesini araştırmak için α-Duhamel çarpımı kullanılmıştır.
- H^p'nin V-invaryant alt uzayları karakterize edilmiş ve birim diski üzerindeki Hardy uzayında $I - V_\alpha$ operatörünün yörüngelerinin normu hesaplanmıştır. Ayrıca, α-Duhamel çarpımları yardımıyla $\mathcal{B}\left(C^{(n)}(\Omega)\right)$ üzerindeki δ_A iç-türevli yörüngelerinin normu tahmin edilmiştir.
- $\left(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{\circledast}\right)$ nin değişmeli bir Banach cebiri olduğu ispatlanmış ve onun maksimal ideal uzayı tanımlanmıştır. Ayrıca $C^{(n)}(\Omega)$ üzerinde V_α için genişletilmiş özvektörleri de incelenmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu kısımda invaryant altuzay ve α-Duhamel çarpımının uygulama alanları ile literatür ve son yıllarda yapılan çalışmalar detaylı olarak incelenmiştir.

Duhamel çarpımı adi diferansiyel denklemler teorisi (Lavrentiev ve Shabat, 1973), eğimli plaj problemi (Wigley, 1974) ve Mikusinski'nin operatör hesabı gibi analizin çeşitli problemlerinde birçok uygulamaya sahiptir. Bu konu ilk olarak birim diskteki analitik fonksiyonlar uzayı için incelenmiştir (Wigley, 1974). Ayrıca bu uzay ve Duhamel çarpımı ikilisinin oluşturduğu cebirinin kapalı ideallerinin tanımlanmasında Duhamel çarpımı notasyonu kullanılmıştır. Bir diğer çalışmada Hilbert-Hardy uzayının Duhamel çarpımı altında bir Banach cebiri yapısı belirttiğini ispatlamıştır (Wigley, 1975). Bu elde edilen sonuçlardan yola çıkılarak $H^p(\mathbb{D}\times\mathbb{D})$ Banach uzayının bazı karakteristik özelliklerini incelemişlerdir (Merryfield ve Watson, 1991). Diğer taraftan bazı uzaylarda Volterra integral operatörünün devirli vektörlerin tanımında, diğer ilgili incelemelerde ve direkt toplamlar için spektral katsayıların öğrenilmesinde Duhamel çarpımı kullanılmıştır (Karaev, 1984, 1995, 2003). Bazı klasik cebirlerin katlı çarpımlarının teorisini içeren problemlerde Duhamel çarpımı kullanılmıştır (Bozhinov, 1988; Dimovski, 1990). Son yıllarda ise bazı $L^p(0,1)$, $C^\infty(0,1)$, $W^{(n)}(0,1)$ ve $W_+(\mathbb{D})$ gibi fonksiyon uzaylarında Duhamel çarpımı konusu incelenmiştir (Karaev, 1990, 2004; Karaev ve Tuna, 2004; Karaev ve Saltan, 2005; Karaev, 2005a,b, 2006b; Bouzeffour ve Garayev, 2018).

Duhamel çarpımları methodu Ivanona ve Melikhov (2017a,b, 2019a)'un son eserlerinde de kullanılmaktadır. Duhamel çarpımları methodunun diğer uygulamaları için Raichinov (1970); Nikolskii (1974); Karaev (1984); Dimovski (1990); Tsedenbayar (2003); Karaev ve Tuna (2004); Karaev (2005c); Karaev ve Tuna (2006); Linchuk (2007); Gürdal (2009a,b); Leka (2010); Tapdigoglu (2012); Karaev vd. (2014); Gürdal vd. (2015); Linchuk (2015); Bouzeffour ve Garayev (2018); Garayev (2019) çalışmalarına atıfta bulunuyoruz.

Öte yandan, günümüze kadar matematiğin çözülmemiş en önemli problemlerinden birisi invaryant altuzay problemidir. Genel olarak problemin çözümü henüz bulunmuş değildir. Ancak bazı özel uzaylarda belli operatörler için invaryant altuzayı problemi çözümüne kavuşmuştur. Bu problem ilk olarak Gelfand (1938) tarafından verilmiş olup Agmon (1949) tarafından $L^2(0,1)$ uzayında çözümü verilmiştir. Devamında bu çözüm daha geniş integral operatörler için genişletilmiştir (Kalish, 1957; Gohberg ve Krein, 1969, 1970; Foias ve Williams, 1972). Ayrıca, kaydırma operatörü kullanılarak bazı özel durumda invaryant altuzay problemi çözüme kavuşmuştur (Sarason, 1965). Hilbert-Hardy uzayında integral operatörü için invaryant altuzay problemi çeşitli çalışmalarda yerini almıştır (Donoghue, 1957). Volterra operatörlerin direkt toplamlarının invaryant ve hiperinvaryant alt uzayları, sınırlı lineer operatörlerin invaryant altuzayları, V^{α} Riemann-Liouville kesirli integral operatörü için invaryant altuzayların belirlenmesi, Sobolev uzaylarında operatörünün invaryant altuzaylarının latisleri, kesirli integral operatörünün spektral teorisi ve benzerlik problemleri gibi çeşitli çalışmalarda yer almaktadır (Nikolskii, 1974; Malamud, 1988; Domanov ve Malamud, 2002; Romashchenko, 2004, 2006; Aleman ve Korenblum, 2008; Domanov ve Malamud, 2009; Malamud, 2019). Son zamanlarda Duhamel ve genelleştirilmiş Duhamel çarpımları kullanılarak daha genel Banach uzaylarında genelleştirme yapılmıştır (Karaev, 2005a). Diğer elde edilen sonuçlara bakınız (Karaev, 1984; Dimovski, 1990; Karaev, 2005a; Gürdal, 2009a,b; Karaev ve Gürdal, 2011; Karaev vd., 2011; Saltan ve Gürdal, 2011; Tapdigoglu, 2012, 2013; Saltan ve Özel, 2014; Gürdal vd., 2015; Saltan, 2018).

Biswas vd. (2002) tarafından C belli bir kompakt Volterra operatör ise (3.7) nin uygun olduğunu göstererek önemli bir sonuç ortaya konulmuştur. Ayrıca V nin tüm genişletilmiş özdeğerlerinin kümesinin $(0,\infty)$ olduğunu ve her bir λ genişletilmiş özdeğerine karşılık gelen özvektörlerinin integral operatörü sınıfları içerisinde bulunduğunu göstermiştir. V ile değişmeli tüm böyle A genişletilmiş özvektörlerinin olmadığını göstermek kolaydır. Aynı sonuç daha sonra daha kuvvetli şekli almıştır (Karaev, 2006b). Shkarin (2007) yaptığı çalışmada $\lambda = 1$ haricinde genişletilmiş özdeğerlere sahip olmayan ayrılabilir Hilbert uzayında Volterra operatörünün mevcut olduğunu göstererek "her kompakt operatör özdeş olmayan genişletilmiş özdeğere sahip mi?" problemini çözmüştür. Ayrıca, $\beta > 0$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ özelliğine sahip $V^{\beta}, \lambda V^{\beta}$ ikilisi için bağlayıcı (intertwining) operatörler kümesi çalışılmıştır (Malamud, 1994, 1998;

Bourdon ve Shapiro, 2008; Domanov ve Malamud, 2009). Eğer $\lambda > 0$ ise o zaman $V^{\beta}, \lambda V^{\beta}$ ikilisi için sıfırdan farklı bağlayıcı operatörün mevcut olduğunu göstermişlerdir. Daha sonra $\beta = 1$ için diğer metotlar ile yeniden çalışılmıştır (Biswas vd., 2002; Karaev, 2005a, 2006a; Gürdal, 2009a,b).

Bu tez önerisinde ise, α-Duhamel çarpımının bazı uygulamaları ve bazı uzayların Duhamel Banach cebir yapısı üzerine bazı incelemeler yapılmıştır.

3. DUHAMEL İÇÇARPIMI VE İNVARYANT ALTUZAYLAR

Bu tez çalışması α-Duhamel çarpımına göre $C^{(n)}(\Omega)$ uzayının Banach cebir yapısı ve onun maksimal ideal uzayı, $C^{(n)}(\Omega)$ uzayı üzerinde V_α Volterra integral operatörünün genişletilmiş özvektörleri ve Duhamel çarpımı yardımıyla H^p Hardy uzayında V-invaryant altuzaylarının tanımlanması ile ilgili hedeflere sahiptir. Bu hedeflerin rahatlıkla algılanabilmesi için gerekli terim ve notasyonları bu kısımda vereceğiz.

3.1. Bazı Uzay Ve Operatörlerin Temel Kavramları

Bu alt kısımda bazı gerekli notasyon ve sonuçlar ile α-Duhamel çarpımı ile ilgili özellikleri vereceğiz.

Tanım 3.1. A kompleks vektör uzayı olmak üzere A cebir ve her $x, y \in A$ için $x.y = y.x$ ise o zaman A cebirine değişmeli cebir denir. Her $x \in A$ için

$$x.e = e.x = x$$

olacak şekilde $e \in A$ varsa A cebirine birim elemanlı cebir ve e ye A nın birim elemanı denir (Rudin, 1991).

Tanım 3.2. $\mathcal{A}$ cebir olmak üzere her $x,\ y \in \mathcal{A}$ için

$$\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\| \tag{3.1}$$

ise o zaman $\mathcal{A}$ ya normlu cebir denir ve $(\mathcal{A},\ \|.\|)$ ile gösterilir. $(\mathcal{A},\ \|.\|)$ normlu cebiri, normlu lineer uzay olarak tam ise bu normlu cebire Banach cebiri adı verilir.

Eğer $\mathcal{A}$**,** her $x \in \mathcal{A}$ için

$$ex = xe = x$$

olacak şekilde değişmeli bir e elemanı içeriyorsa, $\mathcal{A}$ ya birim elemanlı normlu cebir denir.

i) Reel doğru ile kompleks düzlem $e = 1$ birim elemanına sahip birer değişmeli Banach cebiridir.

ii) $C[a,b]$ uzayı, $e=1$ birim elemanına sahip değişmeli bir Banach cebiridir.

iii) $\mathcal{A}(\mathbb{D})$, uzayı $\mathbb{D}$ ve $\overline{\mathbb{D}}$ da sürekli analitik fonksiyonlar uzayı olmak üzere bu uzay bir Banach cebiridir (Maddox, 1970).

Teorem 3.3. *X normlu uzay olmak üzere $\mathcal{L}(X)=\{A : A : X \to X$ lineer operatör$\}$ ve $\mathcal{B}(X)=\{A : A : X \to X$ sürekli lineer operatör$\}$ operatör cebirleri konvolüsyon çarpımına göre değişmeli olmayan cebirlerdir.*

Uyarı 3.4. $(\mathcal{B}(X), \|.\|)$ uzayı değişmeli olmayan Banach cebirleri iken H Hilbert uzay olmak üzere $(\mathcal{B}(H), \|.\|)$ birimli değişmeli olmayan cebirdir.

Tanım 3.5. X vektör uzay ve $A \subset X$ olmak üzere A nın vektörlerinin lineer kombinasyonlarının kümesine A nın gereni denir ve $A = \mathrm{span}A$ ile gösterilir (Maddox, 1970).

Tanım 3.6. X bir Banach uzayı, $A : X \to X$ sınırlı lineer operatör ve $x \in X$ osun. Eğer span $\{x, Ax, A^2x, A^3x, ...\} = X$ ise o zaman x değerine A nın devirli vektörü denir (Nikolskii, 1986).

Tanım 3.7. X Banach uzayı, $A : X \to X$ sınırlı lineer operatör ve $E \subset X$ olsun. Eğer span$\{A^nE : n \geq 0\} = X$ ise o zaman E uzayına A operatörünün devirli altuzayı denir. Burada A nın devirli altuzaylarının kümesi Cyc (A) ile gösterilir (Wigley, 1974, 1975).

Tanım 3.8. X Banach uzayı, $A : X \to X$ sınırlı lineer operatör, $E \subset X$ ve E, A operatörünün devirli alt uzayı olsun. O zaman

$$\mu_A := \min\{\dim E : E \in Cyc(A)\}$$

değerine A operatörünün spektral katı adı verilir. Burada μ_A değeri sıfır, pozitif tamsayı veya ∞ değerine sahiptir. Eğer $\mu_A = 1$ değerine sahip ise A operatörüne devirli operatör denir (Wigley, 1974, 1975).

İnvaryant altuzayın mevcutluğu ile devirli altuzay arasında önemli bir bağıntı mevcuttur. Yani, $A : X \to X$ operatörünün özdeş olmayan invaryant altuzaya sahip olması için gerekli ve yeterli koşulun sıfır olmayan $x \in X$ için $x \in \mathrm{Cyc}(A)$ olmasıdır.

Teorem 3.9. *T operatörü kompakt ve $\lambda \neq 0$ olsun. Eğer $(T - \lambda I)x = 0$ denklemi sadece $x = 0$ noktasında tek çözüme sahip ise, o zaman $T - \lambda I$ tersinebilirdir (Kantorovich ve Akilov, 1964).*

Tanım 3.10. $f : M \to \mathbb{C}, M \subset \mathbb{C}$, kompleks fonksiyonu ve $z_0 \in M$ olsun. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilir ise, o zaman f fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir şeklinde ifade edilir. Eğer f fonksiyonu M nin tüm noktalarında analitik ise f ye M üzerinde analitiktir denir. Tüm kompleks düzlemde analitik ise f ye tam fonksiyon adı verilir (Rudin, 1991).

Teorem 3.11. *Eğer z_0 ın komşuluğundaki z ler için f fonksiyonu analitik ise o zaman*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Taylor açılımına sahiptir. (Rudin, 1991).

Tanım 3.12. Birim disk üzerinde

$$Hol(\mathbb{D}) = \left\{ f(z) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \right\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye tek değerli analitik fonksiyonların uzayı (veya holomorf fonksiyonların uzayı) denir. Burada $f(n)$, f fonksiyonunun n. Taylor katsayısı olup $\widehat{f}(n) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ şeklinde ifade edilir (Furuta, 2001).

Tanım 3.13. Eğer $f,g \in Hol(\mathbb{D})$ olmak üzere

$$(f*g)(z) := \int_0^z f(z-t)g(t)dt$$

ifadesine f ve g nin konvolüsyon çarpımı denir (Dimovski, 1990; Rudin, 1991).

Teorem 3.14. *$f(x)$ ve $g(x)$ sürekli fonksiyonlar olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in (0,x))$ için $f(x) \neq 0$ ve*

$$(f*g)(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy = 0$$

ise o zaman $g(x) = 0$ olur (Titchmarsh, 1926).

Tanım 3.15. $f,g \in Hol(\mathbb{D})$ olmak üzere

$$(f \circledast g)(z) := \frac{d}{dz}\int_0^z f(z-t)g(t)dt = \int_0^z f^{'}(z-t)g(t)dt + f(0)g(z) \tag{3.2}$$

eşitliğine f ve g nin Duhamel çarpımı denir (Wigley, 1974).

Aynı zamanda, klasik Duhamel çarpımı

$$(f \circledast g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{n!m!}{(n+m)!}\widehat{f}(n)\widehat{g}(m)z^{n+m}$$

biçiminde de ifade edilebilir (Wigley, 1974).

Şimdi bu duhamel çarpımının değişme ve birleşme özelliğine sahip olduğunu gösterelim. Gerçekten $f,g,h \in Hol(\mathbb{D})$ olmak üzere

$$\frac{d}{dz}\int_0^z f(z-t)g(t)dt = m(z) \text{ ve } \frac{d}{dz}\int_0^z g(z-t)h(t)dt = n(z)$$

olur.

$$\int_0^z m(z-t)h(t)dt = \int_0^z \left[\int_0^t f(z-t-k)g(k)dk\right] h(t)dt$$

olur. Burada $k = w - t$ kullanılarak

$$\int_0^z m(z-t)h(t)dt = \int_0^z \left[\int_0^t f(z-w)g(w-t)dw\right] h(t)dt$$
$$= \iint_T f(z-w)g(w-t)h(t)dwdt$$

ve buradan

$$\int_0^z m(z-t)h(t)dt = \int_0^z f(z-w)\left[\int_0^w g(w-t)h(t)dt\right] dw$$
$$= \int_0^z f(z-w)n(w)dw$$

elde edilir. Burada türev alınırsa

$$\frac{d}{dz}\int_0^z m(z-t)h(t)dt = \frac{d}{dz}\int_0^z f(z-t)n(t)dt,$$

yani, $(f \circledast g) \circledast h = f \circledast (g \circledast h)$ olur. Aynı adımları uygulayarak $(f \circledast g)(z) = \frac{d}{dz}\int_0^z f(z-t)g(t)dt$ eşitliğinde $u = z-t$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$(f \circledast g)(z) = \frac{d}{dz}\int_z^0 f(u)g(z-u)du(-1) = -\frac{d}{dz}\int_z^0 f(u)g(z-u)du$$
$$= \frac{d}{dz}\int_0^z f(u)g(z-u)du = (g \circledast f)(z)$$

olup bu ise $f \circledast g = g \circledast f$ olduğunu verir. O halde değişme özelliği sağlanmış olur.

Uyarı 3.16. Duhamel çarpımına göre $Hol(\mathbb{D})$ uzayı birim elemana sahip olmasına rağmen konvolüsyon çarpımına göre birim elemana sahip değildir.

3.2. α-Duhamel Çarpımı

$\alpha \in \mathbb{C}$ bir sayı olsun. Ayrıca $\Omega \subset \mathbb{C}$ bölgesi α noktasını içeren basit bağlantılı sınırlı bölge olsun. Burada Ω bölgesi $z = \alpha$ noktasına göre yıldız şekilli bir bölge, yani her

$z \in \Omega$ ve λ, $0 \leq \lambda \leq 1$, için $\lambda z + (1-\lambda)\alpha \in \Omega$ dır. $\overline{\Omega}$ üzerinde n. türevi sürekli olan Ω üzerinde tüm analitik fonksiyonların $C^{(n)}(\Omega)$ Banach uzayı tanımlı olsun. $C^{(n)} := C^{(n)}(\Omega)$ uzayı

$$\|f\|_n := \max\left\{\max_{z\in\overline{\Omega}}\left|f^{(i)}(z)\right| : i = 1, 2, ..n\right\}$$

normuna sahip bir Banach uzayıdır. α-konvolüsyonu ve α-Duhamel çarpımı sırasıyla $C^{(n)}$ de

$$\left(f \underset{\alpha}{*} g\right)(z) := \int_{\alpha}^{z} f(z+\alpha-t)\, g(t)dt \tag{3.3}$$

ve

$$\left(f \underset{\alpha}{\circledast} g\right)(z) := \frac{d}{dz}\int_{\alpha}^{z} f(z+\alpha-t)\, g(t)dt = \int_{\alpha}^{z} f'(z+\alpha-t)\, g(t)dt + f(\alpha)\, g(z) \tag{3.4}$$

ile tanımlanır. Burada integral α ve z $(z \in \Omega)$ noktalarını bağlayan parça üzerinden alınır. V_α, α-integral operatörü $C^{(n)}$ üzerinde

$$V_\alpha f(z) := \int_{\alpha}^{z} f(t)\, dt$$

ile tanımlıdır. Burada integrasyon yukarıda olduğu gibi α ve z noktalarını birleştiren doğru parçaları ile gerçekleştirilir.

α-Duhamel çarpımının tüm çarpma aksiyomlarını karşıladığı bilinmektedir (ve doğrulanması kolaydır) ve sabit fonksiyon **1** bu çarpımın birim elemanıdır. Ayrıca herhangi bir $f \in C^{(n)}(\Omega)$ için $V_\alpha f = (z-\alpha) \underset{\alpha}{\circledast} f$ olduğuna dikkat ediniz. Genel olarak herhangi bir $g \in C^{(n)}(\Omega)$ için α-Duhamel operatörü $D_g : C^{(n)}(\Omega) \to C^{(n)}(\Omega)$,

$$(D_{\alpha,g} f)(z) := g \underset{\alpha}{\circledast} f,\ f \in C^{(n)}(\Omega)$$

ile tanımlanır. Klasik Duhamel çarpımının (yani, $\alpha = 0$) ilk olarak Wigley (1974) tarafından tanıtıldığını ve araştırıldığını hatırlayınız. Devamında Wigley (1974, 1975) de bu çarpımı ayrıntılı olarak açıkladı ve bu çarpımı tüm holomorfik fonksiyonların Frechet uzayı $Hol(\mathbb{D})$'ye ve Hardy uzaylarına $H^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p \leq +\infty$ cebir yapısı sağlamak için kullandı ve onların maksimal ideal uzaylarını karakterize etti. Merryfield ve Watson (1991) konuyu çoklu diskin vektör değerli Hardy uzayları bağlamında genişletti. Gürdal vd. (2015) de $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ birim diski üzerindeki analitik fonksiyonların Bergman uzayı

$L_a^2(\mathbb{D})$, üzerinde

$$(f \circledast g)(z) := \frac{d}{dz}\int_0^z f(z-t)\,g(t)dt = \int_0^z f^{'}(z-t)\,g(t)dt + f(0)\,g(z) \tag{3.5}$$

ile tanımlanan klasik Duhamel çarpımı $\circledast$ a göre Banach cebiri olduğunu göstermişlerdir. Genel olarak Duhamel çarpımı ve α-Duhamel çarpımı Garayev (2019); Garayev vd. (2016); Gürdal vd. (2015); Gürdal ve Şöhret (2013); Linchuk (2015); Merryfield ve Watson (1991); Wigley (1975) çalışmalarında çeşitli yazarlar tarafından bazı alanlarda kapsamlı bir şekilde araştırılmıştır. Duhamel çarpımının birçok uygulaması iyi araştırılmıştır, örneğin, bakınız Tkachenko (1979b); Fage ve Nagnibida (1987); Dimovski (1990); Karaev ve Tuna (2004); Saltan ve Özel (2014); Gürdal vd. (2015); Garayev vd. (2015); Karaev (2018); Ivanona ve Melikhov (2021). Özellikle Ivanova ve Melikhov, Pommiez operatörünün komütatörü araştırmasına ait Ivanona ve Melikhov (2017a,b, 2019a,b) son çalışmalarında Duhamel çarpımını kullandılar. Ayrıca Tapdigoglu (2012, 2013, 2020), klasik Volterra integrasyon operatörü V, $Vf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$'nin aşikar olmayan invaryant alt uzaylarının ve çift integrasyon operatörü W, $Wf(x,y) = \int_0^x\int_0^y f(t,\tau)d\tau dt$ nin bazı W-invaryant alt uzaylarında genişletilmiş özvektörlerinin tanımlanmasında Duhamel çarpımını uygulamıştır.

3.3. Genişletilmiş Özdeğerler ve Genişletilmiş Özvektörler

X Banach uzayı üzerinde tüm sınırlı lineer operatörlerin cebiri $\mathcal{B}(X)$ ile tanımlansın. $C \in \mathcal{B}(X)$ sabit operatör olmak üzere

$$AC = CB \tag{3.6}$$

olacak şekilde $0 \neq A, B \in \mathcal{B}(X)$ vardır.

$\mathcal{E}_C$ kümesi

$$\mathcal{E}_C = \{A : AC = CB,\ \exists B \neq 0\}$$

şeklinde tanımlı bir cebirdir. Ayrıca,

$$\Phi_C : \mathcal{E}_C \longrightarrow \mathcal{B}(X),\ \Phi_C(A) = B$$

dönüşümü cebir homomorfizmi olup kapalı lineer dönüşümdür. Eğer $B = \lambda A$ ise bazı λ kompleks sayısı için (3.6) denklemi

$$AC = \lambda CA \tag{3.7}$$

şeklini alır. $\mathcal{B}(X)\backslash\{0\} \times \mathbb{C}$ de (A, λ) ikilisinin (3.7) yi sağlaması için gerekli ve yeterli koşulun Φ_C için λ nın bir özdeğer ve Φ_C için A nın bir özvektör olmasıdır. Yani Φ_C için (3.7) denkleminin genişletilmiş özdeğerleri ve genişletilmiş özvektörleri denir. Daha sonraki yıllarda, Pearcy (1976) ve Brown (1979) un yaptığı çalışmalar sayesinde $\{A\}'$ yı içeren bir $\mathcal{A}$ cebirinin invaryant altuzaya sahip olup olmayacağı sorusunu ortaya çıkarmıştır. Bu şekildeki cebir Lambert ve Petrović (2005) tarafından tanımlanmıştır ve sadece C ile değişmeli değil aynı zamanda bazı $|\lambda| \leq 1$ için (3.7) yi sağlayan operatörleri de içerdiğini göstermişlerdir.

Diğer taraftan, C gibi kompakt operatör için böyle bir cebirin özdeş olmayan invaryant altuzaya sahip olduğu gösterilmiş ve $A = \{C\}'$ durumu Lomonosov (1973)'un teoremi olması sebebiyle önemli bir hal almıştır. Bundan dolayı

$$\{C\}' \subset A \tag{3.8}$$

kapsamasının olup olmayacağını öğrenme konusu önemli bir problemdir. Lambert ve Petrović (2005) tarafından A nın spektral yarıçapı pozitif ise bu durumun mümkün olduğu gösterilmiştir. Böylece geriye operatörün spektral yarıçapının sıfıra eşit olduğu kısmın incelenmesi kalmıştır. Bununla ilgili olarak Biswas vd. (2002) $X = L^2(0,1)$ ve $C = V$ durumunu incelemiş ve olumlu sonuçlar almışlardır. Biswas vd. (2002) V integral operatörünün tüm genişletilmiş özdeğerlerinin kümesinin $(0, \infty)$ olduğunu ve her bir λ genişletilmiş özdeğerine karşılık gelen özvektörlerinin integral operatörü sınıfları içerisinde bulunduğunu göstermiştir. V ile değişmeli böyle tüm A genelleştirilmiş özvektörlerinin olmadığını göstermek kolaydır. Shkarin (2007) yılında yaptığı çalışmasında $\lambda = 1$ haricinde genelleştirilmiş özdeğerlere sahip olmayan ayrılabilir Hilbert uzayında Volterra operatörünün var olduğunu göstererek "her kompakt operatör özdeş olmayan genişletilmiş bir özdeğere sahip mi?" açık problemini çözmüştür.

3.4. Hardy Uzayının Volterra İnvaryant Altuzayları

Bu kısımda Domanov ve Malamud (2002) tarafından verilen V_k^{α} operatörünün hiperinvaryant altuzaylarının latisi ve invaryant altuzaylarının latisi ile Aleman ve Korenblum (2008) tarafından verilen bir Hardy uzay üzerinde tanımlı integral operatörünün bazı invaryant alt uzayları ile ilgili özellikleri verilmiştir.

$V : f \to \int_0^x f(t)$ ile $L_p[0,1]$ üzerinde tanımlanan Volterra integral operatörü $p \in [1,\infty)$ için tek hücrelidir ve invaryant alt uzayların latisi $[0,1]$ parçasına anti-izometriktir (Gohberg ve Krein, 1970; Nikolskii, 1986). Benzer durum V integral operatörünün kompleks kuvvetleri olan

$$V^{\alpha} : f \to \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t)\, dt, \ \operatorname{Re}\alpha > 0$$

operatörleri için de sağlanır. Yani, V^{α} operatörünün invaryant ve hiperinvaryant altuzaylarının latisleri

$$\operatorname{Lat} V^{\alpha} = \operatorname{Hyplat} V^{\alpha} = \left\{ E_a :=_{X[a,1]} L_p[0,1] : 0 \leq a \leq 1 \right\} \tag{3.9}$$

biçimindedir (Gohberg ve Krein, 1970; Brodskii, 1971; Nikolskii, 1986).

Diğer taraftan Volterra integral operatörü

$$V_{\alpha} f(z) := \int_{\alpha}^{z} f(t)\, dt$$

her $|a| \leq 1$ için H^1 Hardy uzayında f için iyi tanımlıdır. Operatör H^1 den disk cebirine bir dönüşüm ve onun spektrumu her H^p $(p \geq 1)$ Hardy uzayı üzerinde $\lambda = 0$ tek noktasını içerir. V_{α} nın rezolventi

$$(\lambda - V_{\alpha})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} V_{\alpha}^{n}, \ \lambda \neq 0$$

ile ifade edilir. Burada seriler operatör normda yakınsaktır. Eğer $V_{\alpha} M \subset M$ ise H^p nin bir M kapalı altuzayına V_{α}-invaryanttır denir. H^p uzayının tüm V_{α}-invaryant altuzaylarının latisi $p = 2$ ve $a = 0$ olduğu durumda Donoghue (1957) tarafından tanımlanmıştır. Donoghue'ın metodu pür operatör teori olup $|a| = 1$ özel durumunda p nin diğer değerlerine zor bir şekilde adapte edilebilir.

Teorem 3.17. *(i) $|a| < 1$ olmak üzere H^p $(p > 1)$ nin bir M öz altuzayının V_α-invaryant olması için gerekli ve yeterli koşul*

$$M = b_a^N H^p$$

olacak şekilde bir N pozitif tamsayısının mevcut olmasıdır. Burada $b_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ dir.

(ii) $|a| = 1$ olmak üzere H^p $(p > 1)$ nin bir M uygun altuzayının V_α-invaryant olması için gerekli ve yeterli koşul

$$M = S_a^t H^p$$

olacak şekilde bir $t > 0$ mevcut olmasıdır. Burada $S_a(z) = \exp \frac{z+a}{z-a}$ dir.

Sonuç 3.18. *H^p $(p > 1)$ nin V_α-invaryant altuzaylarının latisi kapsamaya göre lineer sıralıdır.*

Kompleks bölgedeki Volterra operatörlerinin invaryant alt uzayları üzerindeki sonuçların yetersiz olmasının aksine onların reel değişkenli benzerlerinin incelenmesi uzun bir geçmişe ve geniş bir literatüre sahiptir. $V : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$,

$$Vf(x) := \int_\alpha^x f(t)\,dt$$

operatörü için invaryant altuzayların tanımı ilk olarak Gelfand (1938) a ait olup Agmon (1949) tarafından çözülmüştür. Agmon $L^2(0,1)$ uzayının tüm V-invaryant altuzayların

$$M_t = X_{(t,1)} L^2(0,1),\ 0 < t < 1$$

formunda olduğunu ve bundan dolayı bir lineer sıralı latis formuna sahip olduğunu göstermiştir.

$|a| \leq 1$ sabit değeri ve H^p, $p > 1$, üzerinde tanımlı Volterra operatörü

$$V_\alpha f(z) := \int_\alpha^z f(t)\,dt$$

ifadesini gözönüne alalım. Ayrıca Aleman ve Siskakis (1995) çalışmasından V_α operatörünün H^p den kendisi üzerine bir kompakt operatör olduğu iyi bilinen bir gerçektir. Ayrıca V_α nin özdeğerlere sahip olmadığı, yani V_α quasinilpotent olduğu kolayca elde edilebilir. Bu operatörün bazı diğer basit özellikleri aşağıda verilmiştir.

Önerme 3.19. *(i) $\lambda \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$ değeri için $(\lambda - V_\alpha)^{-1} : H^p \to H^p$ rezolvent operatörü her $b \in \mathbb{D}$ için*

$$\begin{aligned}(\lambda - V_\alpha)^{-1} f(z) &= \left[(\lambda - V_\alpha)^{-1} f\right](b)\, e^{(z-b)/\lambda} + \frac{1}{\lambda} e^{z/\lambda} \int_b^z e^{-t/\lambda} f'(t)\,dt \\ &= \left[(\lambda - V_\alpha)^{-1} f\right](b)\, e^{(z-b)/\lambda} + \frac{f(z)}{\lambda} - \frac{f(b)}{\lambda} e^{(z-b)/\lambda} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} e^{z/\lambda} \int_b^z e^{-t/\lambda} f'(t)\,dt.\end{aligned}$$

eşitliğini sağlar.

(ii) Eğer M uzayı V_α için bir kapalı altuzay ise o zaman M uzayı her $\lambda \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$ ve $(\lambda - V_\alpha)^{-1}$ için invaryanttır.

(iii) Her e_a üstel fonksiyonu V_α için bir devirli vektördür.

Aşağıdaki önerme V_α operatörünün invaryant altuzayları ile ilgili bazı doğal örnekleri sağlar. Şimdi Önerme 3.20 için bazı kavramları hatırlatalım.

H^∞ Hardy uzay kompleks birim diskte sınırlı analitik fonksiyonların uzayıdır. H^∞ Hardy uzayında herhangi f fonksiyonu g iç fonksiyonu ve h dış fonksiyonunun çarpımı olarak $f = gh$ şeklinde yazılabilir. Burada g iç fonksiyonu $\mathbb{T}$ birim çember üzerinde hemen hemen her yerde modülüsü 1 dir. h dış fonksiyonu ise $\mathbb{D}$ de sıfırlara sahip olmayan ve tamamıyla birim çember üzerinde $|f|$ nin sınır değerleriyle belirlenen fonksiyondur. Singüler iç fonksiyon $\mathbb{D}$ de sıfırlara sahip olmayan ve $\mathbb{T}$ birim çember üzerinde hemen

hemen her yerde modülüsü 1 olan fonksiyondur. Singüler bir iç fonksiyonun bilinen örneği, birim çember üzerindeki herhangi bir t noktası için

$$\exp\left(\frac{z+t}{z-t}\right)$$

dir. Bu t de temel bir singülerliğe sahiptir. Buradan yola çıkarak, en genel singüler iç fonksiyon aşağıdaki gibi elde edilir:

$$s(z) := c\exp\int_{\mathbb{T}} \frac{z+t}{z-t} d\mu(t).$$

Burada μ, $\mathbb{T}$ ve $|c| = 1$ üzerinde normalleştirilmiş singüler bir ölçüdür. Çember üzerindeki bir ölçü, bir Lebesgue sıfır ölçüsü kümesinde destekleniyorsa singüler olduğunu hatırlatalım. Anlaması en kolay singüler ölçüler, Dirac delta ölçülerinin (muhtemelen sonsuz) lineer kombinasyonları olan atomik ölçülerdir. w birimin özdeş olmayan beşinci kökü olmak üzere

$$f(z) = \prod_{k=1}^{5} \exp\left(\frac{z+w^k}{z-w^k}\right)$$

fonksiyonu bir atomik singüler iç fonksiyondur .

Önerme 3.20. *(i) Eğer $a \in \mathbb{D}$ ve $b_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ ifadesi a noktasında sıfır ile Blaschke çarpımı ise o zaman her N pozitif tamsayı için $b_a^N H^p$ altuzayı V_α için invaryanttır.*

(ii) Eğer $|a| = 1$ ve $S_a(z) = \exp\frac{z+a}{z-a}$ ifadesi a noktasında singülerliği ile atomik singüler iç fonksiyon ise o zaman her $t > 0$ için $S_a^t H^p$ altuzayı V_α için invaryanttır.

Yardımcı Teorem 3.21. *Bir sıfırdan farklı $f \in H^p$ fonksiyonu $S_a^t H^p$ ye ait olması için gerekli ve yeterli koşul*

$$\lim_{r\to 1^-} \sup(1-r)\log|f(ra)| \leq -2t$$

olmasıdır.

Teorem 3.22. *M uzayı H^p, $p > 1$, üzerinde V_α nin özdeş olmayan invaryant altuzayı olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(i) Eğer $a \in \mathbb{D}$ ise o zaman $M = b_a^N H^p$ olacak şekilde bir N pozitif tamsayısı mevcuttur.

(ii) Eğer $|a| = 1$ ise o zaman $M = S_a^t H^p$ olacak şekilde $t > 0$ mevcuttur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu kısımda elde edilen sonuçların genel değerlendirilmesi yapılacaktır. Yani, yüksek lisans tez önerisinde hedeflenen problemler ve sonuçları detaylı olarak incelenecektir.

4.1. α-Duhamel Çarpımının Bazı Uygulamaları

Bu kısımdaki elde edilen sonuçlar Aleman ve Korenblum (2008), Garayev vd. (2016), Gürdal (2009b), Karaev (2005b), Merryfield ve Watson (1991) çalışmaları dikkate alınarak elde edilmiştir. Burada Banach cebiri $\left(C^{(n)}[0,1], \underset{\alpha}{\circledast}\right)$ ve Volterra integrasyon operatörü V_α nın bazı özellikleri üzerinde çalışılmıştır. Bu ilk kısımda ilk olarak $\left(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{\circledast}\right)$ Banach cebirinin $\underset{\alpha}{*}$-üreteçleri α-Duhamel çarpımı yardımıyla tanımlanmıştır. Aynı zamanda

$$C_{\alpha,\mathcal{K}} f = g$$

Volterra denkleminin çözüm kümesini araştırmak için α-Duhamel çarpımı kullanılmıştır. Burada $C_{\alpha,\mathcal{K}}$, formul (3.3) eşitliğiyle $C^{(n)}$ üzerinde tanımlanan bir $\underset{\alpha}{*}$-konvolüsyon operatörüdür, yani,

$$C_{\alpha,\mathcal{K}} f := \int_{\alpha}^{z} \mathcal{K}(z+\alpha-t) f(t) dt$$

dir. Daha sonra Duhamel çarpım yöntemini dahil ederek H^p'nin V-invaryant alt uzayları karakterize edilmiş ve dolayısıyla Aleman ve Korenblum (2008) un makalelerindeki sonucunun yeni bir ispatı verilmiştir. Son olarak, Hilbert uzaylarında tek nokta spektrumlu Cesaro sınırlı operatörler için Esterle-Katznelson-Tzafriri teoremi ile ilgili olan $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ üzerindeki $H^2(\mathbb{D})$ Hardy uzayında $I - V_\alpha$ operatörünün yörüngelerinin normu hesaplanmıştır (bkz. (Tkachenko, 1977)). Ayrıca, α-Duhamel çarpımları yardımıyla $\delta_A(X) := [X, A]$ ile tanımlanan $\mathcal{B}\left(C^{(n)}(\Omega)\right)$ üzerindeki δ_A iç-türevli yörüngelerinin normu tahmin edilmiştir.

4.1.1. $C^{(n)}(\Omega)$ cebirinin $\underset{\alpha}{*}$-üreteçleri

Bir Banach cebiri $\mathcal{B}$ için, $\mathcal{B}$'nin $\mathcal{R}$ radikalinin, $\mathcal{B}$'nin tüm (kesinlikle) indirgenemez temsillerinin çekirdeğinin kesişimi olduğunu hatırlayalım. Eğer $\mathcal{R} = \{0\}$ ise, o zaman $\mathcal{B}$'nin yarı-basit olduğu söylenir ve $\mathcal{R} = \mathcal{B}$ ise, $\mathcal{B}$'ye bir radikal cebir denir. Eşdeğer olarak, eğer her $b \in \mathcal{B}$ elemanı için birleşme özelliğine sahip çarpma operatörü $M_b a := ba\ (a \in \mathcal{B})$, $\mathcal{B}$ üzerinde yarı-nilpotent ise, yani $\sigma(M_b) = \{0\}$ ise $\mathcal{B}$ bir radikal Banach cebiridir denir.

$\lim\limits_{k\to\infty} \left\| f^{\underset{\alpha}{*}k} \right\|^{1/k} = 0$ olması bilinen bir sonuçtur. Dolayısıyla $\left(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{*} \right)$ uzayı (3.3) formülü ile tanımlanan $\underset{\alpha}{*}$ konvolüsyonuna göre bir radikal Banach cebiridir. Burada

$$f^{\underset{\alpha}{*}k} := \underbrace{f \underset{\alpha}{*} \ldots \underset{\alpha}{*} f}_{k}$$

$C^{(n)}(\Omega)$' deki f fonksiyonunun k. tekrarlı konvolüsyonudur. Açıkça herhangi bir $f \in C^{(n)}(\Omega)$ için $\left(f \underset{\alpha}{*} f \right)(\alpha) = 0$'dır. Aynı zamanda,

$$\left(f \underset{\alpha}{*} f \underset{\alpha}{*} f \right)(\alpha) = f \underset{\alpha}{*} \left(f \underset{\alpha}{*} f \right) = \left(\int_{\alpha}^{z} f(z+\alpha-t) \int_{\alpha}^{t} f(t+\alpha-\tau) f(\tau)\, d\tau \right)(\alpha) = 0$$

olduğundan her $k = 1, 2, \ldots$ için $\left(f^{\underset{\alpha}{*}k} \right)(\alpha) = 0$ olduğu açıktır. Bu nedenle, $f \in C^{(n)}(\Omega)$'nin $\left(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{*} \right)$'yi üretmesi yani,

$$\operatorname{span}\left\{ f, f \underset{\alpha}{*} f, f \underset{\alpha}{*} f \underset{\alpha}{*} f, \ldots \right\} = C^{(n)}(\Omega)$$

vermesi için gerekli koşulun $f(\alpha) \neq 0$ olduğunu görüyoruz. Ancak bu koşulun $\alpha = 0$ için bile yeterli olup olmadığı henüz bilinmemektedir (bkz. (Ginsberg ve Newman, 1970) ve (Karaev vd., 2014)). Daha fazla ayrıntı için Garayev vd. (2016) çalışması incelenebilir.

Şimdi, Banach cebiri $\left(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{*} \right)$ için yukarıda ifade edilen soruyu

$$C^{(n)}_{\alpha}(\Omega) := \left\{ f \in C^{(n)}(\Omega) : f(\alpha) = 0 \right\}$$

altcebiri durumundaki soruya indirgeyen Teorem 4.3 ispatlanmıştır. Sonucumuzu ifade etmeden önce, Garayev vd. (2016) nolu kaynaktaki Yardımcı Teorem 2.1 ve 2.2'nin ispatlarına oldukça benzeyen iki Yardımcı teoremi ifade edebiliriz.

Yardımcı Teorem 4.1. $\left(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{\circledast}\right)$ *birim elemanı $f = \mathbf{1}$ olan değişmeli bir Banach cebiridir.*

Yardımcı Teorem 4.2. $f \in C^{(n)}(\Omega)$ *fonksiyonu $\underset{\alpha}{\circledast}$-tersinebilir olması için yeterli ve gerekli koşul $f(\alpha) \neq 0$ olmasıdır.*

Teorem 4.3. $f \in C^{(n)}(\Omega)$, $f(\alpha) \neq 0$ *olacak şekilde bir fonksiyon ve $F(z) = \int\limits_{\alpha}^{z} f(t)\,dt$ olsun. O zaman f fonksiyonunun $\left(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{*}\right)$ cebirinin bir $\underset{\alpha}{*}$-üreteci olması için yeterli ve gerekli koşul F nin $\left(C_{\alpha}^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{\circledast}\right)$ altcebirinin bir $\underset{\alpha}{\circledast}$-üreteci olmasıdır.*

İspat. Gerçektende, $F(z) = \int\limits_{\alpha}^{z} f(t)\,dt$ olduğundan her $g \in C^{(n)}(\Omega)$ için

$$(D_{\alpha,F}\,g)(z) = \frac{d}{dz}\int\limits_{\alpha}^{z} F(z+\alpha-t)\,g(t)dt = \int\limits_{\alpha}^{z} f(z+\alpha-t)\,g(t)dt$$

elde edilir. Dolayısıyla $D_{\alpha,F} = C_{\alpha,f}$ dir. Bu nedenle $F \underset{\alpha}{\circledast} f = f \underset{\alpha}{*} f$, yani

$$\left(F \underset{\alpha}{\circledast} F\right) \underset{\alpha}{\circledast} f = D_{\alpha,F}^{2} f = D_{\alpha,F}\left(D_{\alpha,F} f\right) = D_{\alpha,F}\left(C_{\alpha,f} f\right) = C_{\alpha,f}^{2} f$$

olur. Böylece, her $k \geq 0$ için tümevarım yoluyla $C_{\alpha,f}^{k} f = D_{\alpha,F}^{k} f$ elde ederiz, bu da

$$\begin{aligned}
\operatorname{span}\left\{f, f \underset{\alpha}{*} f, f \underset{\alpha}{*} f \underset{\alpha}{*} f, \ldots\right\} &= \operatorname{span}\left\{f, F \underset{\alpha}{\circledast} f, F \underset{\alpha}{\circledast} F \underset{\alpha}{\circledast} f, \ldots\right\} \\
&= \operatorname{span}\left\{D_{\alpha,f}\left(F^{\circledast_{\alpha} k}\right) : k \geq 0\right\} \\
&= \overline{D_{\alpha,f}\operatorname{span}\left\{\left(F^{\circledast_{\alpha} k}\right) : k \geq 0\right\}} \\
&= D_{\alpha,f}\operatorname{span}\left\{\mathbf{1}, F, F \underset{\alpha}{\circledast} F, F \underset{\alpha}{\circledast} F \underset{\alpha}{\circledast} F, \ldots\right\}
\end{aligned}$$

olduğunu gösterir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{span}\left\{\mathbf{1}, F, F \underset{\alpha}{\circledast} F, F \underset{\alpha}{\circledast} F \underset{\alpha}{\circledast} F, \ldots\right\} \\
&= \operatorname{span}\left\{\lambda\mathbf{1} : \lambda \in \mathbb{C}\right\} \oplus \operatorname{span}\left\{F, F \underset{\alpha}{\circledast} F, F \underset{\alpha}{\circledast} F \underset{\alpha}{\circledast} F, \ldots\right\}
\end{aligned}$$

gerçeğini kullanarak, $\oplus$'nin alt uzayların direkt toplamını temsil ettiği yerde,

$$\begin{aligned}&\operatorname{span}\left\{f, f \underset{\alpha}{*} f, \ldots\right\} \\ &= \operatorname{clos}\left\{D_{\alpha,f}\left(\operatorname{span}\{\lambda \mathbf{1} : \lambda \in \mathbb{C}\} \oplus \operatorname{span}\left\{F, F \underset{\alpha}{\circledast} F, \ldots\right\}\right)\right\}\end{aligned} \tag{4.1}$$

olduğunu görürüz. Yardımcı Teorem 4.2 den $f(\alpha) \neq 0$ olduğundan, α-Duhamel operatörü $D_{\alpha,f}$, $C^{(n)}(\Omega)$ uzayında tersinebilirdir. Diğer taraftan,

$$C^{(n)}(\Omega) = \operatorname{span}\{\lambda \mathbf{1} : \lambda \in \mathbb{C}\} \oplus C_{\alpha}^{(n)}(\Omega) \tag{4.2}$$

kullanılarak, teoremin iddiaları $D_{\alpha,f}$ operatörünün tersinebilirliğinden ve (4.1) ve (4.2) temsillerinden elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. □

4.1.2. Volterra integral denkleminin çözüm kümesine uzaklığı

Bu alt kısımda,

$$\int_{\alpha}^{z} \mathcal{K}(z+\alpha-t) f(t) dt = g(z) \tag{4.3}$$

denkleminin çözüm kümesine olan uzaklığını çekirdek fonksiyonu $\mathcal{K} \in C^{(n)}(\Omega)$ cinsinden tahmin etmek için α-Duhamel çarpım tekniği kullanılmıştır. Tabi ki , (4.3) denkleminin verilen herhangi bir $g \in C^{(n)}(\Omega)$ fonksiyonu için $C^{(n)}(\Omega)$ uzayında bir çözümünün olması bilinen bir gerçektir.

$$G_g := \left\{u \in C^{(n)}(\Omega) : u, \text{ (4.2) denkleminin bir çözümüdür}\right\}$$

alalım. $C_{\alpha,\mathcal{K}}$ bir Volterra operatörü olduğundan, $C_{\alpha,\mathcal{K}} f = \mathcal{K} \underset{\alpha}{*} f$ ve $\sigma\left(C_{\alpha,\mathcal{K}}\right) = \{0\}$ olduğunu hatırlayalım. $\sigma_p\left(C_{\alpha,\mathcal{K}}\right)$, $C_{\alpha,\mathcal{K}}$ operatörünün nokta spektrumu olsun. O zaman $\sigma_p\left(C_{\alpha,\mathcal{K}}\right) = \varnothing$ olup $C^{(n)}(\Omega)$'deki herhangi bir sıfır olmayan g fonksiyonu için $g \notin G_g$ anlamına gelmektedir.

$$G_g^1 := \left\{u \in G_g : \|u\|_n = 1\right\}$$

ifadesi G_g'nin birim küresi olsun. Aşağıdaki problem doğal olarak ortaya çıkar:

Soru 4.4. g ve G_g^1 arasındaki mesafe tahmin edilebilir mi?

Aşağıdaki teorem bu problemi çözmektedir. $f \in \left(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{\circledast}\right)$ tersinebilir elemanının $\underset{\alpha}{\circledast}$-tersi için $f^{-1\underset{\alpha}{\circledast}}$ sembolünü kullanacağız.

Teorem 4.5. *O zaman*

$$\operatorname{dist}\left(g, G_g^1\right) \geq \frac{1}{n+2}\left\|\left(-1+\int_\alpha^z \mathcal{K}(t)\,dt\right)^{-1\underset{\alpha}{\circledast}}\right\|_n^{-1}$$

elde edilir.

İspat. $F(z) = -1+\int_\alpha^z \mathcal{K}(t)\,dt$ alınsın. O zaman $C_{\alpha,\mathcal{K}}u = g$ konvolüsyon denklemi,

$$\frac{d}{dz}\int_\alpha^z F(z+\alpha-t)\,u(t)dt + u(z) = g(z)$$

veya kısaca $F \underset{\alpha}{\circledast} u = g-u$ olarak yeniden yazılabilir. O halde, Garayev vd. (2016)'deki Yardımcı Teorem 2'ye göre $F(\alpha) = -1$ olduğunu göz önünde bulundurarak, $f \underset{\alpha}{\circledast} F = 1$ olacak şekilde bir $f \in C^{(n)}(\Omega)$ fonksiyonu vardır, bu da

$$f \underset{\alpha}{\circledast} F \underset{\alpha}{\circledast} u = f \underset{\alpha}{\circledast} (g-u)$$

yani $u = f \underset{\alpha}{\circledast} (g-u)$'yi ifade eder. Dolayısıyla, Yardımcı Teorem 4.1'i kullanarak, herhangi bir $u \in G_g^1$ için

$$1 = \|u\|_n = \left\|f \underset{\alpha}{\circledast} (g-u)\right\|_n \leq (n+2)\,\|f\|_n\,\|g-u\|_n$$

elde edilir. Bu da her $u \in G_g^1$ için

$$\|g-u\|_n \geq \frac{1}{n+2}\frac{1}{\|f\|_n}$$

olduğunu gösterir. $f = F^{-1\underset{\alpha}{\circledast}}$ olduğundan, her $u \in G_g^1$ için

$$\|g-u\|_n \geq \frac{1}{n+2}\frac{1}{\left\|F^{-1\underset{\alpha}{\circledast}}\right\|_n} = \frac{1}{n+2}\left\|\left(-1+\int_\alpha^z \mathcal{K}(t)\,dt\right)^{-1\underset{\alpha}{\circledast}}\right\|_n^{-1}$$

ifadesine sahibiz. Sonuç olarak,

$$\inf_{u\in G_g^1}\|g-u\|_n \geq \frac{1}{n+2}\left\|\left(-1+\int_{\alpha}^{z}\mathcal{K}(t)\,dt\right)^{-1\circledast}_{\alpha}\right\|_n^{-1}$$

olup bu da

$$\operatorname{dist}\left(g,G_g^1\right) \geq \frac{1}{n+2}\left\|\left(-1+\int_{\alpha}^{z}\mathcal{K}(t)\,dt\right)^{-1\circledast}_{\alpha}\right\|_n^{-1}$$

anlamına gelir. Dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanır. □

4.1.3. H^p uzayında V-invaryant alt uzayların latisi

$\mathbb{D}$ karmaşık $\mathbb{C}$ düzlemindeki açık birim diski göstersin. Hardy uzayı $H^p = H^p(\mathbb{D})$, $0 < p < \infty$,

$$\|f\|_{H^p}^p := \sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p\frac{d\theta}{2\pi} < +\infty$$

olacak şekilde $\mathbb{D}$ üzerindeki tüm analitik fonksiyonlardan oluşur. Bu norm ile H^p, $1 \leq p < \infty$ için bir Banach uzayı $0 < p < 1$ için ise yerel konveks olmayan, öteleme invaryant metriği $d(f,g) = \|f-g\|_{H^p}^p$, $f,g \in H^p$ ile bir topolojik vektör uzayıdır. $p = +\infty$ için $H^\infty = H^\infty(\mathbb{D})$ uzayı $\|f\|_{H^\infty} := \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{D}\}$ normuna sahip bir Banach cebiridir.

Bu alt kısımda, Hardy uzayı H^p $1 \leq p < +\infty$ üzerinde Volterra integrasyon operatörü V ele alınarak ve onun aşikar olmayan kapalı invaryant alt uzayları tanımlanmıştır. Ayrıca, $(I-V_\alpha)^n$, $n = 1,2,...$ yörüngelerinin H^2 üzerindeki normu hesaplanmıştır.

H^p'nin tüm V_α-invaryant alt uzaylarının latisinin, $p = 2$ ve $\alpha = 0$ olduğu durumda Donoghue (1957) tarafından tanımlandığına dikkat ediniz. Donoghue'nin yöntemi operatör teorisidir ve p'nin diğer değerlerine ve özellikle $|\alpha| = 1$ ise zorlukla uyarlanmıştır. Aleman ve Korenblum (2008) bu boşluğu doldurmuştur. Onların yaklaşımları, H^p-fonksiyonlarının karmaşık eşleniklerinin $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ birim çemberi üzerindeki klasik Borel dönüşümüne dayanır, bu,

$$\widetilde{h}(\lambda) := \int_{\mathbb{T}} e_\lambda h\,dm$$

fonksiyonunun tamamı tarafından tanımlanır. Burada $e_\lambda(z) := e^{\lambda z}$ ve $dm = \frac{|dz|}{2\pi}$, $\mathbb{T}$ üzerindeki normalleştirilmiş Lebesgue ölçüsüdür. Aleman ve Korenblum (2008) dan sonra, karmaşık alanlardaki Volterra operatörlerinin invaryant alt uzayları üzerindeki sonuçların yetersiz olmasına karşın, onların gerçek değişken analoglarının incelenmesinin uzun bir geçmişi ve kapsamlı bir literatürü olduğunu unutmayınız (bkz. Nagnibida (1981)). Klasik Volterra integrasyon operatörü $V : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ için invaryant alt uzayların tanımı,

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)\,dt,$$

esasen 1938'de Gelfand (1938) tarafından ortaya konan ve ilk olarak $L^2[0,1]$'nin tüm V-değişmez alt uzaylarının

$$\mathcal{M}_t = \mathcal{X}_{(t,1)}L^2[0,1],\ 0 < t < 1,$$

biçiminde olduğunu gösteren Agmon (1949) tarafından çözülen problemdir ve dolayısıyla V operatörünün tek hücreliliği anlamına gelen doğrusal olarak sıralanmış bir latis oluşturur. Devamında, bu sonuç Kalish (1957), Gürdal ve Şöhret (2013), Sakhnovich (1957), Saltan ve Özel (2014), Brodskii (1957), Saltan ve Özel (2012) ve Sarason (1965) tarafından daha geniş bir konvolüsyon operatörleri sınıfına genişletilmiştir (bkz. (Sakhnovich, 1957; Sarason, 1965) ve buradaki referanslar).

Aşağıdaki teoremde, $\alpha = 0$ olduğu durumda Aleman-Korenblum teoreminin başka bir ispatı verilmiştir (Aleman ve Korenblum, 2008). Yaklaşımımız Nagnibida (1981), Wigley (1974), Tkachenko (1977, 1979b), Dimovski (1990), Karaev (1984), Tapdigoglu (2013, 2020) ve Raichinov (1970) tarafından erken kullanılan Duhamel çarpımına dayanmaktadır.

Teorem 4.6. *$V : H^p \to H^p$, H^p $(1 \leq p < \infty)$ Hardy uzayında bir integral operatörü olsun. O zaman*

$$E^{(n)} = \left\{ f \in H^p : f(0) = f'(0) = \dots f^{(n)}(0) = 0 \right\}$$

olmak üzere

$$\operatorname{Lat}(V) = \left\{E^{(n)} : n = 0, 1, 2..\right\}$$

elde edilir.

İspat. Burada

$$\operatorname{Lat}(V) \supset \left\{E^{(n)} : n \geq 0\right\}$$

yani tüm $n \geq 0$ için $VE^{(n)} \subset E^{(n)}$ olduğunu görmek kolaydır. Bu nedenle geriye sadece $\operatorname{Lat}(V) \subset \left\{E^{(n)} : n \geq 0\right\}$'nin, yani herhangi bir V-invaryant alt uzay E'nin, bazı $n \geq 0$ için $E^{(n)}$ formuna sahip olduğunu göstermek kalır. Bunun için aşağıdaki yardımcı teoremlere ihtiyacımız olacak. □

Yardımcı Teorem 4.7. *(Tsedenbayar, 2003). Herhangi iki $f, g \in H^p$ fonksiyonu için*

$$\|f \circledast g\|_\infty \leq C \|f\|_\infty \|g\|_\infty \text{ (for } p = +\infty)$$

vardır. Burada $C > 0$ bir mutlak sabittir ve bazı $C_p > 0$ sabitleri için

$$\|f \circledast g\|_p \leq C_p \|f\|_p \|g\|_p \text{ (for } 1 \leq p \leq +\infty), \tag{4.4}$$

yani, $(H^p, \circledast)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ bir Banach cebiridir.

Aşağıdaki yardımcı teoremin ispatı, Wigley'in makalesinde bulunmaktadır (Wigley, 1975).

Yardımcı Teorem 4.8. *$f \in H^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$, sıfırdan farklı bir fonksiyon olsun. O halde f fonksiyonunun $\circledast$-tersinebilir olması için gerekli ve yeterli koşul $f(0) \neq 0$ olmasıdır.*

$p = \infty$ uç durumu Wigley'in teoremine dahil edilmiştir (Wigley, 1975). O halde sadece $1 \leq p < +\infty$ durumunu ispatlayacağız. $f \in H^p$ $\circledast$-tersinebilir ise, o zaman

$$f \circledast g = g \circledast f = \mathbf{1}$$

olacak şekilde bir $g \in H^p$ fonksiyonu vardır. Buradan $(f \circledast g)(\alpha) = f(\alpha) g(\alpha) = 1$ olduğunu, $f(0) \neq 0$'ın nereden geldiğini görmek kolaydır. Tersine, eğer $f(0) \neq 0$ ise, o zaman $F(z) := f(z) - f(\alpha)$ yazılır, ve

$$D_F g = (F \circledast g)(z) = \int_0^z F'(z-t) g(t) dt = \int_0^z f'(z-t) g(t) dt \ \ (g \in H^p)$$

tarafından tanımlanan Duhamel operatörü $D_F : H^p \to H^p$ yi ele alalım. D_F'nin kompakt olduğunu göstereceğiz. Aslında, F, birim disk $\mathbb{D}$ üzerinde bir analitik fonksiyon olduğundan, elimizde

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{F}(n) z^n$$

vardır. Burada $\widehat{F}(n) = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}$, $n \geq 0$, dır. Kısmi toplamı dikkate alınırsa,

$$F_N := \sum_{n=0}^{N} \widehat{F}(n) z^n = \sum_{n=1}^{N} \widehat{f}(n) z^n$$

elde edilir. O zaman tüm $g \in H^p$ için

$$\begin{aligned} D_{F_N} g(z) &= \int_\alpha^z F_N'(z-t) g(t) dt \\ &= \sum_{n=1}^{N} n! \widehat{f}(n) \int_\alpha^z \frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!} g(t) dt \\ &= \sum_{n=1}^{N} n! \widehat{f}(n) V^n g(z) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$D_{F_N} = \sum_{n=1}^{N} n! \widehat{f}(n) V^n$$

dir. V kompakt olduğundan, herhangi bir $N > 0$ için D_{F_N}'nin H^p üzerinde kompakt olduğu sonucuna varırız. Yani, (4.4) ile, $1 \leq p < +\infty$ için elimizde

$$\|D_F - D_{F_N}\| = \|D_{F-F_N}\| \leq C_p \|F - F_N\|_p \tag{4.5}$$

vardır. (4.5)'deki limite $N \to \infty$ olarak geçersek, D_F'nin bir kompakt operatör olduğunu elde ederiz.

Şimdi D_f operatörünü (f sembolü ile) dikkate alalım ve $g \in \ker(D_F)$ yani

$$D_f g(z) = \int_0^z f'(z-t)\, g(t)dt + f(0)\, g(z) = 0, \ \forall z \in \mathbb{D}$$

olduğunu varsayalım. Buradan $f(0)\, g(0) = 0$ ve dolayısıyla $g(0) = 0$, çünkü $f(\alpha) \neq 0$'dır. Benzer şekilde tüm $z \in \mathbb{D}$ için

$$0 = \frac{d}{dz}\left(D_f g\right)(z) = \int_0^z f''(z-t)\, g(t)dt + f'(0)\, g(z) + f(0)\, g'(z)$$

alırız ve 0 değeri için $g'(0) = 0$ verir. Tümevarım ile $g^{(n)}(0) = 0$, $n \geq 1$ ve dolayısıyla $g \equiv 0$ elde ederiz. Bu da $\ker\left(D_f\right) = \{0\}$ olduğunu gösterir. $D_f = f(0)I + D_F$ olduğundan, Teorem 3.9 ile D_f'nin H^p' de tersinir olduğu sonucu elde edilir. Böylece Yardımcı teoremin ispatı tamamlanır.

Eğer

$$\operatorname{span}\{V^n f : n = 0, 1, 2, ...\} = H^p$$

ise $f \in H^p$ fonksiyonunun V için devirli bir vektör olduğunu hatırlayınız. V'nin tüm devirli vektörlerinin kümesi $\operatorname{Cyc}(V)$ ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 4.9. *$f \in H^p$ olsun. O halde $f \in \operatorname{Cyc}\left(V \mid E^{(n)}\right)_{(n \geq 0)}$ olması için gerekli ve yeterli koşul $f \in E^{(n)} \setminus E^{(n+1)}$ $(n \geq 0)$ olmasıdır.*

İspat. Yardımcı teoremin ispatı, Sakhnovich (1957) makalesinin bazı argümanlarını kullanmıştır. Aşağıdaki Duhamel çarpımını $E^{(n)}$ alt uzayında tanıtalım:

$$\left(g \overset{n}{\circledast} h\right)(z) := \frac{d}{dz}\int_0^z \frac{g(z-t)}{(z-t)^n} h(t)\, dt \ \left(g, h \in E^{(n)}\right), \ n = 0, 1, ... \tag{4.6}$$

Açıkça, $n = 0$ için, $\overset{0}{\circledast}$ çarpımı klasik Duhamel çarpımı (3.4) ile çakışmaktadır.

$f \in E^{(n)}$ ve $f \notin E^{(n+1)}$ olsun. Formül (4.6) her $k \geq 0$ ve $n = 0, 1, ...$ için

$$V^k g = \frac{z^{n+k}}{k!} \overset{n}{\circledast} g, \ g \in E^{(n)} \tag{4.7}$$

olduğunu ima eder. $f \in E^{(n)}$ fonksiyonunu Maclaurin serisine genişleterek

$$f(z) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}z^{n+1} + ... = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + R(z) \tag{4.8}$$

elde ederiz. Burada $f^{(n)}(0) \neq 0$ ve

$$R(z) := \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k \in E^{(n)}$$

olur. $D_{f,n}g := f \overset{n}{\circledast} g$, $g \in E^{(n)}$ (bkz. (4.6)) formülü ile $E^{(n)}$ altuzayında hareket eden $D_{f,n}$ Duhamel operatörünü dikkate alalım. (4.7) ve (4.8)'den

$$D_{f,n} := f^{(n)}(0) I_{E^{(n)}} + D_{R,n}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 4.8'in ispatında olduğu gibi aynı argümanlar, $D_{f,n}$'nin $E^{(n)}$' de tersinebilir olduğu sonucunu çıkarmamıza izin verir ki bu ihmal edilir. Öte yandan (4.7)'ye göre

$$\text{span}\left\{z^{n+k} : k \geq 0\right\} = E^{(n)},$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
E_f &:= \text{span}\left\{\left(V \mid E^{(n)}\right)^k f : k \geq 0\right\} = \text{span}\left\{V^k f : k \geq 0\right\} \\
&= \text{span}\left\{\frac{z^{n+k}}{k!} \overset{n}{\circledast} f : k \geq 0\right\} \\
&= \text{span}\left\{D_{f,n}\frac{z^{n+k}}{k!} : k \geq 0\right\} = \overline{D_{f,n}\text{span}\left\{z^{n+k} : k \geq 0\right\}} \\
&= \overline{D_{f,n}E^{(n)}} = E^{(n)} \text{ (çünkü } D_{f,n} \text{ tersinebilirdir)}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece, eğer $E^{(n)} \setminus E^{(n+1)}$ ise, o zaman $f \in \text{Cyc}\left(V \mid E^{(n)}\right)$ dir.

Tersine $E_f = E^{(n)}$ eşitliği $f^{(n+1)}(0) \neq 0$ ve dolayısıyla $f \notin E^{(n+1)}$ anlamına gelir. Sonuç olarak, eğer $f \in E^{(n)}$ ve $f \in \text{Cyc}\left(V \mid E^{(n)}\right)$ ise, o zaman $f \notin E^{(n+1)}$ olup Yardımcı teorem ispatlanmış olur. Şimdi Teorem 4.6'nın ispatına devam ediyoruz.

$$\{0\} \subset ... \subset E^{(n+1)} \subset E^{(n)} \subset E^{(n-1)} \subset ... \subset E^{(0)} \tag{4.9}$$

zincirinden farklı zincir içermeyen V-invaryant alt uzayların olduğunu ispatlayacağız ve dolayısıyla

$$\operatorname{Lat}(V) = \left\{E^{(n)} : n = 0, 1, 2, ...\right\}$$

olacaktır. Aslında, tersine H^p'de (4.9)'daki invaryant alt uzaylardan farklı olan, aşikar olmayan bir V-invaryant E altuzayı olduğunu varsayalım. $E = \cup_{g \in E} E_g$ temsili ve Yardımcı Teorem 4.8 ve 4.9 sayesinde, $f(0) \neq 0$ olacak şekilde bir $f \in E$ fonksiyonunun var olduğunu görüyoruz. Bu nedenle, Yardımcı Teorem 4.8 ile, $\{0\} \neq E \neq H^p$ varsayımımızla çelişen $E = H^p$ olduğu sonucuna varıyoruz. Dolayısıyla (4.9) kapsamasına göre, $\operatorname{Lat}(V)$ lineer sıralı bir kümedir ve dolayısıyla V tek hücreli bir operatördür. Böylece teoremin ispatı tamamlanır. □

4.1.4. $I - V_\alpha$ yörüngeleri ve iç türev hakkında

Bu alt kısımda, çoğunlukla Montes-Rodriguez vd. (2005) ve Leka (2013) çalışmaları kullanılmıştır. Şimdi, $I - V_\alpha$ operatörünün tekrarlanan normu hesaplanmıştır. Burada $V_\alpha f = \int_\alpha^z f(t)\,dt$, H^2 üzerindeki Volterra integrasyon operatörüdür. $V = V_0$ operatörünün klasik Volterra operatörü olduğuna dikkat edelim. Volterra operatörünün birçok yönü geniş çapta çalışılmıştır ve geniş bir literatüre sahiptir. Özellikle Montes-Rodriguez vd. (2005)

$$\|(I-V)^n\|_{L^p[0,1]} \asymp n^{\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{2p}\right|} \ (n \geq 1)$$

normları üzerinde keskin tahminler sağlayan $(I-V)^n$ kuvvetlerinin asimptotik davranışlarını incelediler. Elde ettikleri sonuçlar, genel olarak tek tip Kreiss sınırlılığının, minimal spektral varsayımı altında güç sınırlılığı anlamına gelip gelmediği sorusuna olumsuz bir cevap vermiştir. Ayrıca $I - V$'nin ardışık güçlerinin farklılıklarının normları hakkında keskin tahminler sunulmuş, yani

$$\left\|(I-V)^n - (I-V)^{n+1}\right\|_{L^p[0,1]} \asymp n^{-\frac{1}{2}+\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{2p}\right|} \ (n \geq 1)$$

elde edilmiştir. Bu aynı zamanda Tsedenbayar (2003) ın $L^2[0,1]$'deki önceki sonucunun keskin olduğunu göstermiştir. Leka (2013) makalesinin ana amacı, f ,

$$(V^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, \ 0 \le x \le 1$$

tarafından $L^p[0,1]$ üzerinde tanımlanan Riemann-Liouville kesirli integrasyon operatörü V^{α} aralığında olduğunda $(I-V)^n f$ yörüngelerine daha yakından bakmaktır, burada Γ standart gamma fonksiyonu anlamına gelir. Daha doğrusu, Leka (2013)'te

$$\|(I-V^n)V^{\alpha}\|_{L^p[0,1]} \asymp n^{-\frac{\alpha}{2}+\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{2p}\right|} \ (n \ge 1), \ \alpha > 0$$

olduğunu ispatlamıştır. Leka (2013) nın sonucunun ispatı, daha önceki Montes-Rodriguez vd. (2005) (ayrıca bkz. (Leka, 2013)) daki yönteminin ve Fejer'in Laguerre polinomları üzerindeki asimptotik formülünün kullanılmasına dayanmaktadır. Ayrıca, son zamanlarda Volterra operatörü ile değişmeli operatörlerin yörüngelerine ilişkin yeni sonuçların ve tahminlerin Bermudo vd. (2008) tarafından sunulduğunu da ifade edelim. Daha fazla ayrıntı için Leka (2013) çalışması incelenebilir.

Hardy uzayı $H^2 = H^2(\mathbb{D})$'nin $\|f\|_2 := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} < +\infty$ olacak şekilde $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ analitik fonksiyonlarının Hilbert uzayı olduğunu hatırlayınız.

Önerme 4.10. *$\alpha \in \mathbb{D}$ sabit ve V_{α}, $V_{\alpha} f(z) = \int_{\alpha}^{z} f(t)\, dt$ tarafından tanımlanan H^2 üzerinde Volterra integrasyon operatörü olsun. O zaman*

$$\|(I-V_{\alpha})^n\| = \left[\sum_{k=0}^{n} \left|\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \alpha^j \frac{n!}{k!\,(n-k)!\,j!\,(k-j)!}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir.

İspat. α-Duhamel çarpımı

$$\left(f_1 \underset{\alpha}{\circledast} f_2\right)(z) = \frac{d}{dz} \int_{\alpha}^{z} f_1(z+\alpha-t)\, f_2(t)\, dt$$

$$= \int_{\alpha}^{z} f_1'(z+\alpha-t)\, f_2(t)\, dt + f_1(0)\, f_2(z)\,,\ f_1, f_2 \in H^2 \tag{4.10}$$

ile tanımlanır. (4.10)'dan, tüm $f \in H^2$ ve

$$V_\alpha^n f = \frac{(z-\alpha)^n}{n!} \underset{\alpha}{\circledast} f,\ \forall f \in H^2 \tag{4.11}$$

için $\mathbf{1} \underset{\alpha}{\circledast} f = f \underset{\alpha}{\circledast} \mathbf{1} = f$ olduğunu görmek kolaydır. Wigley (1974) ve Wigley (1975)'deki ispat yöntemleri özellikle $(H^2, \underset{\alpha}{\circledast})$'nin bir Banach cebiri olduğunu gösterir (H^2'nin bazı eşdeğer normlarına göre). Dolayısıyla, (4.11)'den

$$\|V_\alpha^n f\|_2 \le \frac{\|(z-\alpha)^n\|_2}{n!} \|f\|_2\,,\ \forall f \in H^2,\ \forall n \ge 0 \tag{4.12}$$

çıkar, bu da $\|V_\alpha^n\| \le \frac{\|(z-\alpha)^n\|_2}{n!}$, $\forall n \ge 0$ anlamına gelir. Öte yandan $\|V_\alpha^n \mathbf{1}\|_2 = \left\| \frac{(z-\alpha)^n}{n!} \circledast \mathbf{1} \right\|_2 = \frac{\|(z-\alpha)^n\|_2}{n!}$ ve dolayısıyla

$$\|V_\alpha^n\| = \frac{1}{n!} \|(z-\alpha)^n\|_2\,, \forall n \ge 0 \tag{4.13}$$

dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\|(I-V_\alpha)^n\| &= \left\| (\mathbf{1} - (z-\alpha))^{\circledast n}_{\alpha} \right\|_2 = \left\| \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\mathbf{1}_{\alpha}^{\circledast(n-k)} \underset{\alpha}{\circledast} (z-\alpha)_{\alpha}^{\circledast k} \right) \right\|_2 \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} (z-\alpha)_{\alpha}^{\circledast k} \right\|_2 = \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{(z-\alpha)^k}{k!} \right\|_2 \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k!)^2\,(n-k)!} \sum_{j=0}^{k} C_k^j z^{k-j} (-1)^j \alpha^j \right\|_2 \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k!)^2\,(n-k)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{(j!)\,(k-j)!} (-1)^j \alpha^j z^{k-j} \right\|_2 \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \frac{n!\,(-1)^j \alpha^j}{k!\,(n-k)!\,j!\,(k-j)!} z^{k-j} \right\|_2 \\
&= \left[\sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j \alpha^j n!}{k!\,(n-k)!\,j!\,(k-j)!} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar. □

Sonuç 4.11. $\|(I-V)^n\| = \left[\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n!}{(k!)^2 (n-k)!}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ *dir.*

Aşağıdaki ifade Sonuç 4.11'den hemen elde edilir.

Sonuç 4.12. $\|(I-V)^n\| \geq \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^4}\right)^{\frac{1}{2}}$ *dir.*

Sonuç 4.13. *O zaman*

$$\left\|(I-V_\alpha)^n - (I-V_\alpha)^{n+1}\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \alpha^j \frac{n!}{k!\,(n-k)!\,j!\,(k-j)!} z^{k-j} \right.$$
$$\left. -\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \alpha^j \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!\,j!\,(k-j)!} z^{k-j}\right\|_2$$

dir.

Burada üstteki sonucun ispatı, Önerme 4.10'un ispatına oldukça benzerdir ve bu nedenle verilmemiştir.

Şimdi $\mathcal{B}\left(C^{(n)}(\Omega)\right)$ üzerinde iç türev operatörü ele alınmış ve yörüngesinin normu tahmin edilmiştir. $A \in \mathcal{B}\left(C^{(n)}(\Omega)\right)$ olsun. İç türev operatörü δ_A, $\mathcal{B}\left(C^{(n)}(\Omega)\right)$ üzerinde

$$\delta_A(X) := [X,A] = XA - AX,\ X \in \mathcal{B}\left(C^{(n)}(\Omega)\right)$$

formülü ile tanımlanır. $\|\delta_A\| \leq 2\|A\|$ olması temeldir. Burada, δ_A^n, $n = 2,3,\ldots$ yörüngeleri için α-Duhamel çarpımı cinsinden daha düşük bir tahmin olduğu ispatlanmıştır. Bu ise Gürdal ve Şöhret (2013)'deki elde edilen sonucu iyileştirmiştir.

Önerme 4.14. $A \in \mathcal{B}\left(C^{(n)}(\Omega)\right)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ *sabit olsun. Her* $n \geq 1$ *ve* $X \in \mathcal{B}\left(C^{(n)}(\Omega)\right)$ *için*

$$\left(\delta_A^n(X) f_{n,X}\right)(\alpha) \neq 0$$

olacak şekilde $f_{n,X} \in C^{(n)}(\Omega)$ *olduğunu varsayalım. O halde*

$$C_n \leq \|\delta_A^n\| \leq 4\|A\|^n\,(n \geq 1)$$

olacak şekilde $C_n > 0$ sabiti vardır.

İspat. $\|\delta_A\| \leq 2\|A\|$ olduğundan $\|\delta_A\| \leq 4\|A\|$ eşitsizliği aşikardır. Ayrıca, elimizde

$$\begin{aligned}\left\|\delta_A^2(X)\right\| &= \|[[X,A],A]\| = \|[X,A]A - A[X,A]\| \\ &= \left\|XA^2 - 2AXA + A^2X\right\| \\ &\leq 4\|A\|^2\|X\| \text{ tüm } X \in \mathcal{B}\left(C^{(n)}(\Omega)\right)\end{aligned}$$

vardır. Dolayısıyla $\left\|\delta_A^2\right\| \leq 4\|A\|^2$ olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\delta_A^3(X) &= [[[X,A],A],A] \\ &= XA^3 - 3AXA^2 - A^2XA - A^3X\end{aligned}$$

olup, bu da $\left\|\delta_A^3\right\| \leq 4\|A\|^3$ anlamına gelir. Tümevarım yoluyla, istendiği gibi tüm $n \geq 1$ için

$$\|\delta_A^n\| \leq 4\|A\|^n$$

sonucuna varırız.

Şimdi alt eşitsizliği ispatlıyoruz. Koşullara göre, her $n \geq 1$ ve $X \in \mathcal{B}\left(C^{(n)}(\Omega)\right)$ için

$$(\delta_A^n(X) f_{n,X})(\alpha) \neq 0 \tag{4.14}$$

olacak şekilde $f_{n,X} \in C^{(n)}(\Omega)$ vardır. $g_{n,X} := \delta_A^n(X) f_{n,X}$ tanımlansın. Yardımcı Teorem 4.8'e göre $g_{n,X}(\alpha) \neq 0$ olduğundan,

$$G_{n,X} \underset{\alpha}{\circledast} g_{n,X} = g_{n,X} \underset{\alpha}{\circledast} G_{n,X} = \mathbf{1}$$

olacak şekilde tek değerli bir $G_{n,X} \in C^{(n)}(\Omega)$ ögesi vardır. Dolayısıyla, $f_{n,X} \underset{\alpha}{\circledast} G_{n,X} \underset{\alpha}{\circledast} g_{n,X} = f_{n,X}$.

$$F_{n,X} := f_{n,X} \underset{\alpha}{\circledast} G_{n,X}$$

alalım. Dolayısıyla (4.14)'ten

$$\left(D_{\alpha,F_{n,X}} \delta_A^n(X)\right) f_{n,X} = f_{n,X}$$

çıkar, bu da $f_{n,X}$'in $1 \in \sigma_p\left(D_{\alpha,F_{n,X}}\delta_A^n(X)\right)$ özdeğerine karşılık gelen $D_{\alpha,F_{n,X}}\delta_A^n(X)$ operatörünün bir özvektörü olduğu anlamına gelir. Ardından,

$$\begin{aligned} 1 &\leq r\left(D_{\alpha,F_{n,X}}\delta_A^n(X)\right) \leq \left\|D_{\alpha,F_{n,X}}\delta_A^n(X)\right\| \\ &\leq \left\|D_{\alpha,F_{n,X}}\right\| \left\|\delta_A^n(X)\right\| = \left\|F_{n,X}\right\|_n \left\|\delta_A^n(X)\right\|_{\mathcal{B}\left(C^{(n)}(\Omega)\right)} \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada $r(.)$ ifadesi operatörün spektral yarıçapını gösterir. Buradan

$$\frac{1}{\left\|F_{n,X}\right\|_n} \leq \left\|\delta_A^n(X)\right\|$$

elde edilir. $\|X\| \leq 1$ ile $X \in \mathcal{B}\left(C^{(n)}(\Omega)\right)$ operatörleri üzerinde supremum alınırsa, bu eşitsizlikten

$$\sup_{\|X\|\leq 1} \frac{1}{\left\|F_{n,X}\right\|_n} \leq \sup_{\|X\|\leq 1} \left\|\delta_A^n(X)\right\| = \left\|\delta_A^n\right\|$$

veya eşdeğer olarak

$$0 < C_A := \frac{1}{\inf\left\{\left\|F_{n,X}\right\|_n : \ \|X\| \leq 1\right\}} \leq \left\|\delta_A^n(X)\right\|$$

elde ederiz. Bu da önermenin ispatını tamamlar. □

4.2. $(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{\circledast})$ Banach Cebiri Hakkında

Bu kısımda α-Duhamel çarpımına (3.4) göre $C^{(n)}(\Omega)$ uzayının Banach cebir yapısı incelenmiştir ve maksimal ideal uzayı tanımlanmıştır. Bu kısımda elde edilen sonuçlarımız Aleman ve Korenblum (2008); Garayev vd. (2016); Gürdal ve Şöhret (2013) çalışmaları kullanılarak elde edilmiştir. Yani, $\left(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{\circledast}\right)$ nin değişmeli bir Banach cebiri olduğu ispatlanmış ve maksimal ideal uzayı tanımlanmıştır. Ayrıca $C^{(n)}(\Omega)$ üzerinde α-integrasyon operatorü V_α için Biswas vd. (2002) anlamında genişletilmiş özvektörleri de incelenmiştir. Diğer bazı ilgili problemler de tartışılmıştır.

Aşağıdaki yardımcı teoremler ile başlayalım.

Yardımcı Teorem 4.15. *$C^{(n)}(\Omega)$ uzayı, $f = \mathbf{1}$ özdeşliğine sahip α-Duhamel çarpımı ile değişmeli bir Banach cebiridir.*

İspat. $C^{(n)}(\Omega)$ bir Banach uzayı olduğundan, sadece norm çarpım eşitsizliğini göstermemiz yeterlidir. Gerçekten, herhangi iki $f,g \in C^{(n)}(\Omega)$ fonksiyonları için tümevarım yardımıyla

$$\left(f \underset{\alpha}{\circledast} g\right)^{(k)}(z) := \int_{\alpha}^{z} f^{(k+1)}(z+\alpha-t)\, g(t)dt + \sum_{m=0}^{k} f^{(m)}(\alpha)g^{(k-m)}(z) \tag{4.15}$$

elde edilir. Kısmi integral metodu yardımıyla

$$\left(f \underset{\alpha}{\circledast} g\right)^{(k)}(z) := \int_{\alpha}^{z} f^{(k)}(z+\alpha-t)\, g'(t)dt + \sum_{m=0}^{k-1} f^{(m)}(\alpha)g^{(k-m)}(z) + g(\alpha)\, f^{(k)}(z)$$

olup buradan

$$\left|\left(f \underset{\alpha}{\circledast} g\right)^{(k)}(z)\right| \leq \left\|f^{(k)}\right\| \left\|g'\right\| + \sum_{m=0}^{k-1} \left\|f^{(m)}\right\| \left\|g^{(k-m)}\right\| + \|g\| \left\|f^{(k)}\right\|$$

elde edilir. Böylece

$$\left\|\left(f \underset{\alpha}{\circledast} g\right)^{(k)}(z)\right\| \leq (k+2)\, \|f\|_n \, \|g\|_n$$

olup buradan arzulanan

$$\left\|f \underset{\alpha}{\circledast} g\right\|_n \leq (n+2)\, \|f\|_n \, \|g\|_n$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise $\left(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{\circledast}\right)$ ikilisinin bir Banach cebiri olduğunu gösterir. Her $f,g \in C^{(n)}(\Omega)$ için $f \underset{\alpha}{\circledast} g = g \underset{\alpha}{\circledast} f$ ve $f \underset{\alpha}{\circledast} \mathbf{1} = \mathbf{1} \underset{\alpha}{\circledast} f$ olduğundan yardımcı teoremin ispatı tamamlanır. $\square$

Sonraki yardımcı teorem α-Duhamel çarpımına göre bir tersinebilirlik kriterini verir.

Yardımcı Teorem 4.16. *Eğer* $f \in \left(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{\circledast}\right)$ *ise, o zaman* $\underset{\alpha}{\circledast}$*-tersinebilir olması için gerekli ve yeterli koşulun* $f(\alpha) \neq 0$ *olmasıdır.*

İspat. Aslında, eğer $g \in \left(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{\circledast}\right)$, f nin $\underset{\alpha}{\circledast}$-tersi ise, o zaman (3.5) den

$$1 = \left(f \underset{\alpha}{\circledast} g\right)(\alpha) = f(\alpha)\, g(\alpha)$$

olur, yani $f(\alpha) \neq 0$ dır.

Tersine $f(\alpha) \neq 0$ ise $D_{\alpha,f} := f \underset{\alpha}{\circledast} g$ denklemini kurabiliriz. Şimdi α-Duhamel operatörü $D_{\alpha,f}$ nin $C^{(n)}(\Omega)$ uzayında tersinebilir operatör olduğunu ispatlıyoruz. Bu amaçla f yi $f = F + f(\alpha)$ olarak yazalım, buradan $F := f - f(\alpha)$ dır. Bu nedenle $D_{\alpha,f} = f(\alpha) I + D_{\alpha,F}$, burada I, $C^{(n)}(\Omega)$ üzerinde bir özdeşlik operatörüdür. $D_{\alpha,f}$ operatörünün tersinebilirliğinin ispatı için aslında iki yöntem kullanabileceğimize dikkat ediniz. İlk yöntem, kompakt operatörler için klasik sonuç olan Teorem 3.9 ve Teorem 3.10 temel alır (bkz. (Karaev, 2005c)). İkincisi, Banach cebirinin elemanlarının spektral yarıçapı için Gelfand formülünü kullanır. Burada ikinci yöntemi uygulayacağız. Mevcut ispat (Garayev vd., 2016, Yardımcı Teorem 2.2) çalışmasından birine benzerdir. Dolayısıyla, $f(\alpha) \neq 0$ olduğunu göz önünde bulundurarak, $D_{\alpha,F}$ nin yarı-nilpotent bir operatör olduğunu ispatlamak yeterlidir, yani, $\sigma(D_{\alpha,F}) = \{0\}$ dır. Bunun için Gelfand formülünü Garayev vd. (2016); Karaev ve Tuna (2004) kullanılarak

$$\lim_{k\to\infty} \left\| D_{\alpha,F}^{k} \right\|^{\frac{1}{k}} = 0 \tag{4.16}$$

olduğunu ispatlıyoruz. (4.16) nın ispatına geçmeden önce, $C^{(n)}(\Omega)$ üzerindeki aşağıdaki konvolüsyon operatörünü tanımlayalım.

$$\left(\mathcal{K}_{\alpha,f}\, g\right)(z) := \left(f \underset{\alpha}{*} g\right)(z) := \int_{\alpha}^{z} f(z+\alpha-t)\, g(t)\,dt. \tag{4.17}$$

Şimdi (4.16) nın ispatına başlamaya hazırız. Aslında

$$\begin{aligned}(D_{\alpha,F}\, g)(z) &:= \frac{d}{dz}\int_{\alpha}^{z} F(z+\alpha-t)\, g(t)\,dt = \int_{\alpha}^{z} F'(z+\alpha-t)\, g(t)\,dt \\ &= \mathcal{K}_{\alpha,F'},\, g(z),\end{aligned}$$

herhangi bir $g \in C^{(n)}(\Omega)$ için $D_{\alpha,F} g = \mathcal{K}_{\alpha,F'}, g$ dir, ve bu nedenle $D_{\alpha,F} = \mathcal{K}_{\alpha,F'}$ dür. Böylece

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{K}^2_{\alpha,F'} g\right)(z) &= \mathcal{K}_{\alpha,F'}\left(\mathcal{K}_{\alpha,F'} g\right)(z) = \int_\alpha^z F'(z+\alpha-t)\left(\mathcal{K}_{\alpha,F'} g\right)(t)\,dt \\ &= \int_\alpha^z F'(z+\alpha-t)\left(\int_\alpha^t F'(t+\alpha-\tau)\,d\tau\right)dt\end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$\left|\left(\mathcal{K}^2_{\alpha,F'} g\right)(z)\right| \le \|F\|_n^2 \|g\|_n \frac{|z-\alpha|^2}{2!}$$

olduğunu görüyoruz.

$$\left|\left(\mathcal{K}^k_{\alpha,F'} g\right)(z)\right| \le \|F\|_n^k \|g\|_n \frac{|z-\alpha|^k}{k!}$$

olduğu tümevarım yoluyla kolayca elde edilebilir. Öte yandan, elimizde

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{K}^2_{\alpha,F'} g\right)'(z) &= \int_\alpha^z F''(z+\alpha-t)\left(\int_\alpha^t F'(z+\alpha-\tau)\,d\tau\right)dt \\ &\quad + F'(\alpha)\int_\alpha^z F'(z+\alpha-\tau)\,g(\tau)\,d\tau\end{aligned}$$

var. Böylece

$$\begin{aligned}\left|\left(\mathcal{K}^2_{\alpha,F'} g\right)'(z)\right| &\le \|F\|_n^2 \|g\|_n \left(\frac{|z-\alpha|^2}{2} + |z-\alpha|\right) \\ &\le \|F\|_n^2 \|g\|_n \frac{(|z-\alpha|+1)^2}{2!}\end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi, tümevarımla

$$\left|\left(\mathcal{K}^k_{\alpha,F'} g\right)'(z)\right| \le \|F\|_n^k \|g\|_n \frac{(|z-\alpha|+1)^k}{k!}$$

olduğunu varsayalım. Farklılaşma ile

$$\left(\mathcal{K}^{k+1}_{\alpha,F'} g\right)'(z) = \int_\alpha^z F''(z+\alpha-t)\left(\mathcal{K}^k_{\alpha,F'} g\right)(t)\,dt + F''(\alpha)\left(\mathcal{K}^k_{\alpha,F'} g\right)(z)$$

ifadesine sahibiz, dolayısıyla

$$\begin{aligned}\left|\left(\mathcal{K}_{\alpha,F'}^{k+1}g\right)'(z)\right| &\leq \|F\|_n^{k+1}\|g\|_n\left(\frac{|z-\alpha|^{k+1}}{(k+1)!}+\frac{|z-\alpha|^k}{k!}\right)\\ &\leq \|F\|_n^{k+1}\|g\|_n\frac{(|z-\alpha|+1)^{k+1}}{(k+1)!}\end{aligned}$$

olduğu sonucuna varıyoruz.

$$\left(\mathcal{K}_{\alpha,F'}^{2}g\right)'(z)=\int_\alpha^z F''(z+\alpha-t)\left(\mathcal{K}_{\alpha,F'}g\right)(t)\,dt+F'(\alpha)\left(\mathcal{K}_{\alpha,F'}g\right)(z),$$

olduğunu göz önünde bulundurarak, var olan

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{K}_{\alpha,F'}^{2}g\right)''(z)&=\int_\alpha^z F'''(z+\alpha-t)\left(\mathcal{K}_{\alpha,F'}g\right)(t)\,dt\\ &\quad+F''(\alpha)\left(\mathcal{K}_{\alpha,F'}g\right)(z)+F'(\alpha)\left(\mathcal{K}_{\alpha,F'}g\right)'(z),\end{aligned}$$

eşitliğiyle

$$\begin{aligned}\left|\left(\mathcal{K}_{\alpha,F'}^{2}g\right)''(z)\right| &\leq \|F\|_n^{2}\|g\|_n\left(\frac{|z-\alpha|^{2}}{2}+|z-\alpha|+\frac{(|z-\alpha|+1)^2}{2}\right)\\ &\leq \|F\|_n^{2}\|g\|_n\frac{(|z-\alpha|+2)^{2}}{2}\end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz. Böylece, tümevarım yoluyla tüm $j=2,3,..n$ için

$$\left|\left(\mathcal{K}_{\alpha,F'}^{k}g\right)^{(j)}(z)\right| \leq \|F\|_n^{k}\|g\|_n\frac{(|z-\alpha|+j)^{k}}{k!}$$

bulunur. Bu ise

$$\left\|\mathcal{K}_{\alpha,F'}^{k}g\right\|_n \leq \|F\|_n^{k}\|g\|_n\frac{(n+1)^{k}}{(k!)^{\frac{1}{k}}}\to 0,\ k\to\infty$$

anlamına gelir. Bu da, $\mathcal{K}_{\alpha,F'}$ nin yarı-nilpotent bir operatör olduğunu gösterir. Sonuç olarak $D_{\alpha,f}=f(\alpha)I+D_{\alpha,F}$ tersinebilirdir. Böylece ispat tamamlanır. □

Şimdi bu kısımdaki ana sonucumuzu vermeye hazırız.

Teorem 4.17. $\left(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{\circledast}\right)$ *maksimal ideal uzayı ile* $\mathcal{M} = \{\varphi_\alpha\}$ *olan bir birim değişmeli Banach cebiridir. Burada* $\varphi_\alpha : C^{(n)}(\Omega) \to \mathbb{C}$ *ve* $\varphi_\alpha(f) = f(\alpha)$ *dir.*

İspat. Burada $\sigma(f)$ ile $\left(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{\circledast}\right)$ Banach cebirindeki f elemanının α-Duhamel çarpımı $\underset{\alpha}{\circledast}$ ya göre spektrumunu göstereceğiz. Yardımcı Teorem 4.16 dan $\sigma(f) = \{f(\alpha)\}$ çıkar ve Gelfand'ın teorisine göre $\mathcal{M} = \{\varphi_\alpha\}$ olduğunu görürüz. Aslında

$$\left\{f \in C^{(n)}(\Omega) : f(\alpha) = 0\right\}$$

kümesi bir maksimal idealdir. Başka herhangi bir uygun ideal, α da kaybolmayan bir elemana sahip olamaz, dolayısıyla yalnızca bir maksimal ideal vardır. Böylece Banach cebirinin $\left(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{\circledast}\right)$ maksimal ideal uzayı $\mathcal{M}$, bir homomorfizmden oluşur, yani α da değerlendirme ve Gelfand dönüşümü önemsizdir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmıştır. □

V_α, $V_\alpha f(z) = \int_\alpha^z f(t)\,dt$, $C^{(n)}(\Omega)$ üzerinde Volterra integrasyon operatörü olsun. α-Duhamel çarpımının tanımından (bkz. (3.3) formülü) genel olarak,

$$V_\alpha f(z) = (z-\alpha) \underset{\alpha}{\circledast} f$$

ve

$$V_\alpha^m f(z) = \frac{(z-\alpha)^m}{m!} \underset{\alpha}{\circledast} f,\ m \geq 0 \tag{4.18}$$

olarak ifade edilmektedir. Eğer $\operatorname{span}\{V_\alpha^m g : m \geq 0\} = C^{(n)}(\Omega)$ ise $g \in C^{(n)}(\Omega)$ fonksiyonunun V_α operatörünün devirli vektörü olarak adlandırıldığını hatırlayınız. Ω, α noktasını içeren yıldız şekilli sınırlı bölge olduğundan, $\{(z-\alpha)^m : m \geq 0\}$ in $C^{(n)}(\Omega)$'de tam bir sistem olduğu bilinmektedir (bkz. (Fage ve Nagnibida, 1987)). Bu nedenle aşağıdaki sonuç Yardımcı Teorem 4.16 dan hemen elde edilir.

Sonuç 4.18. *Sıfırdan farklı* $f \in C^{(n)}(\Omega)$ *fonksiyonunun* V_α *operatörü için devirli olması için gerekli ve yeterli koşul* $f(\alpha) \neq 0$ *olmasıdır.*

İspat. Gerçekten de (4.18)'den

$$\operatorname{span}\{V_\alpha^m g : m \geq 0\} = \operatorname{span}\left\{\frac{(z-\alpha)^m}{m!} \underset{\alpha}{\circledast} f : m \geq 0\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{\operatorname{span}\left\{D_{\alpha,f}\left(\frac{(z-\alpha)^m}{m!}\right) : m \geq 0\right\}} \\
&= D_{\alpha,f}\overline{\operatorname{span}\left\{\frac{(z-\alpha)^m}{m!} : m \geq 0\right\}} \\
&= \overline{D_{\alpha,f}C^{(n)}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$
\operatorname{span}\{V_\alpha^m g : m \geq 0\} = \overline{D_{\alpha,f}C^{(n)}(\Omega)} \tag{4.19}
$$

olur. Böylece Yardımcı Teorem 4.16 ve (4.19) eşitliği kullanlarak istenilen sonuç bulunur. □

Teorem 4.17'nin aşağıdaki sonucu, Wigley (1974), Fage ve Nagnibida (1987) ve Tapdigoglu (2012, 2013) nun çalışmalarının benzer argümanlarıyla ispatlanabilir olduğundan ispatı verilmemiştir.

Sonuç 4.19. *Özdeş olmayan V_α-invaryant alt uzaylarının latisi*

$$
\text{Lat }(V_\alpha) = \left\{E^{(k)} : k = 0, 1, 2, .., n\right\}
$$

olup

$$
E^{(k)} := \left\{f \in C^{(n)}(\Omega) : f(\alpha) = f'(\alpha) = ... = f^{(k)}(\alpha) = 0\right\}
$$

yani V_α, $C^{(n)}(\Omega)$ üzerinde tek hücreli bir operatördür.

4.2.1. V_α operatörün genişletilmiş özdeğerleri ve genişletilmiş özvektörleri

$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ bir birim disk ve $\alpha \in \mathbb{D}$ sabit bir nokta olsun. Bu alt kısımda, $C^{(n)}(\mathbb{D})$ uzayında, Biswas vd. (2002); Malamud (1995, 1998) açısından Volterra integrasyon operatörü V_α'nın genişletilmiş özvektörleri karakterize edilmiştir. A, $C^{(n)}(\mathbb{D})$ üzerinde sıfırdan farklı bir sınırlı lineer operatör ve λ,

$$
V_\alpha A = \lambda A V_\alpha \tag{4.20}
$$

olacak şekilde karmaşık bir sayı ise λ'ya V_α'nın genişletilmiş özdeğeri ve A operatörüne de λ'ya karşılık gelen genişletilmiş bir özvektör denildiğini hatırlayınız. Genişletilmiş özdeğerler ve genişletilmiş özvektörler hakkında daha ayrıntılı bilgi Biswas vd. (2002); Karaev (2006b); Karaev vd. (2011); Cassier ve Alkanjo (2014); Gürdal vd. (2015); Garayev vd. (2015); Cassier ve Alkanjo (2017); Tapdigoglu (2020) de bulunabilir.

$\ker(V_\alpha) = \{0\}$ olduğundan, (4.20)'den $\lambda = 0$ noktasının V_α'nın genişletilmiş özdeğeri olmadığı sonucu çıkar, yani, $0 \notin \mathrm{ext}_p(V_\alpha)$ dır (V_α'nın tüm genişletilmiş özdeğerleri kümesi). Sonuç olarak $\mathrm{ext}_p(V_\alpha) \subset \mathbb{C}\backslash 0$. Sonraki sonuçlarımız, $\mathbb{C}\backslash 0$ kümesinin V_α'nın genişletilmiş nokta spektrumu olduğunu, yani $\mathrm{ext}_p(V_\alpha) = \mathbb{C}\backslash 0$ olduğunu gösterir. İlgili sonuçlar için bakınız (Domanov ve Malamud, 2009; Gürdal, 2009a,b; Karaev vd., 2011; Tapdigoglu, 2020).

Teorem 4.20. *$\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ herhangi bir sabit sayı ve $V_\alpha : C^{(n)}(\mathbb{D}) \to C^{(n)}(\mathbb{D})$ bir integral operatörü olsun.*

(i) Eğer $|\lambda| > 1$ ise, o zaman $B\mathbf{1} \neq 0$ olan her $B \in \mathcal{B}\left(C^{(n)}(\mathbb{D})\right)$ operatörü için $T = D_{\alpha,B\mathbf{1}}C_{1/\lambda}$ operatörü

$$V_\alpha T = \lambda T V_\alpha \tag{4.21}$$

denklemini sağlar ve tersine (4.21)'i sağlayan sıfırdan farklı her $T \in \mathcal{B}\left(C^{(n)}(\mathbb{D})\right)$ operatörü $T = D_{\alpha,B\mathbf{1}}C_{1/\lambda}$ biçiminde olmalıdır. Burada $D_{\alpha,B\mathbf{1}}$, $D_{\alpha,B\mathbf{1}}g = B\mathbf{1} \underset{\alpha}{\circledast} g$ ve $\left(C_{1/\lambda}f\right)(z) = f\left(\frac{1}{\lambda}z\right)$ ile tanımlanan $C^{(n)}(\mathbb{D})$ üzerindeki α-Duhamel operatörüdür.

(ii) Eğer $|\lambda| \leq 1$ ise, o zaman $V_\alpha B = \lambda B V_\alpha$ olması için gerekli ve yeterli koşul B nin $BC_\lambda = D_{\alpha,B\mathbf{1}}$ denklemini sağlamasıdır. Burada $(C_\lambda f)(z) = f(\lambda z)$ dir.

İspat. (i) $B \in \mathcal{B}C^{(n)}(\mathbb{D})$ operatörü $(C^{(n)}(\mathbb{D}), \underset{\alpha}{\circledast})$ Banach cebirinin birim elemanı $\mathbf{1}$ olmak üzere $B\mathbf{1} \neq 0$ olacak şekilde herhangi bir operatör olsun. $D_{\alpha,B\mathbf{1}}$, $B\mathbf{1} \in C^{(n)}(\mathbb{D})$ sembolüyle $C^{(n)}(\mathbb{D})$ üzerindeki α-Duhamel operatörü ve $C_{1/\lambda}$, $C^{(n)}(\mathbb{D})$ üzerinde $\left(C_{1/\lambda}f\right)(z) = f\left(\frac{1}{\lambda}z\right)$ ile tanımlanan basit bileşke operatörü olmak üzere $D_{\alpha,B\mathbf{1}}C_{1/\lambda}$ operatörünü ele alalım. O zaman bu operatörün (4.21) denklemini sağladığını görmek kolaydır. Aslında, her $f \in C^{(n)}(\mathbb{D})$ için

$$\begin{aligned}
D_{\alpha,B\mathbf{1}}C_{1/\lambda}V_\alpha f(z) &= D_{\alpha,B\mathbf{1}}(V_\alpha f)\left(\frac{1}{\lambda}z\right) = B\mathbf{1} \underset{\alpha}{\circledast} (V_\alpha f)\left(\frac{1}{\lambda}z\right) \\
&= B\mathbf{1} \underset{\alpha}{\circledast} \left(\frac{z-\alpha}{\lambda} \underset{\alpha}{\circledast} f\left(\frac{z}{\lambda}\right)\right) \\
&= \frac{z-\alpha}{\lambda} \underset{\alpha}{\circledast} \left(B\mathbf{1} \underset{\alpha}{\circledast} f\left(\frac{z}{\lambda}\right)\right) = \frac{z-\alpha}{\lambda} \underset{\alpha}{\circledast} D_{\alpha,B\mathbf{1}}C_{1/\lambda}f(z) \\
&= \frac{1}{\lambda}\left((z-\alpha) \underset{\alpha}{\circledast} D_{\alpha,B\mathbf{1}}C_{1/\lambda}f(z)\right) = \frac{1}{\lambda}V_\alpha D_{\alpha,B\mathbf{1}}C_{1/\lambda}f(z) \\
&= \frac{1}{\lambda}V_\alpha D_{\alpha,B\mathbf{1}}C_{1/\lambda}f(z),
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\left(\mathcal{D}_{\alpha B\mathbf{1}}C_{1/\lambda}\right)V_\alpha = \frac{1}{\lambda}V_\alpha\left(D_{\alpha,B\mathbf{1}}C_{1/\lambda}\right)$ olup bu ise $\lambda\left(D_{\alpha,B\mathbf{1}}C_{1/\lambda}\right)V_\alpha = V_\alpha\left(D_{\alpha,B\mathbf{1}}C_{1/\lambda}\right)$ anlamına gelir.

Diğer taraftan, $D_{\alpha,B\mathbf{1}}C_{1/\lambda}$'nın $C^{(n)}(\mathbb{D})$ üzerinde sıfırdan farklı bir operatör olduğunu göstermek zor değildir. Aslında, böyle değilse, o zaman $D_{\alpha,B\mathbf{1}}C_{1/\lambda} = 0$ olur ve dolayısıyla tüm $f \in C^{(n)}(\mathbb{D})$ için $D_{\alpha,B\mathbf{1}}C_{1/\lambda}f = 0$ veya eşdeğer olarak her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\frac{d}{dz}\int_\alpha^z (B\mathbf{1})(z+\alpha-t)\,f(t)\,dt = 0$$

olur. Buradan her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\int_\alpha^z (B\mathbf{1})(z+\alpha-t)\,f(t)\,dt = \text{const}$$

elde ederiz. Özellikle, $z = \alpha$ için const $= 0$ ve dolayısıyla tüm $z \in \mathbb{D}$ için

$$\int_\alpha^z (B\mathbf{1})(z+\alpha-t)\,f(t)\,dt = 0 \tag{4.22}$$

ifadesine sahibiz. f keyfi olduğundan, $f = \mathbf{1}$ için $\underset{\alpha}{*}$ konvolüsyonunun değişme özelliğiyle (4.22)'den $\int_\alpha^z (B\mathbf{1})(t)\,dt = 0$ olur. Bu ise $B\mathbf{1}$=0 anlamına gelir. Böylece $B\mathbf{1} \neq 0$ varsayımımızla çelişir. Aslında $D_{\alpha,B\mathbf{1}}C_{1/\lambda}$'nin sıfırdan farklı bir operatör olduğunu gösterir. Bu sebeple $|\lambda| > 1$ ile $\lambda \in \mathbb{C}$'nin V_α operatörünün genişletilmiş bir özdeğeri sonucuna varıyoruz; yani $\lambda \in \mathrm{ext}_p(V_\alpha)$ dir. Şimdi bu genişletilmiş özdeğer λ'ya karşılık gelen her genişletilmiş özvektör $B \in \mathcal{B}(C^{(n)}(\mathbb{D}))$'nin $\mathcal{D}_{\alpha,B\mathbf{1}}C_{1/\lambda}$ formuna sahip olduğunu ispatlayalım. Gerçekten,

$$\lambda BV_\alpha = V_\alpha B$$

olsun. O zaman $\frac{1}{\lambda}V_\alpha B = BV_\alpha$, ve dolayısıyla tüm $m \geq 0$ için

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^m V_\alpha^m B = BV_\alpha^m$$

olur. O halde $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^m V_\alpha^m B\mathbf{1} = BV_\alpha^m \mathbf{1}$, dir. Buradan (4.18) formülünü kullanarak

$$\frac{\left(\frac{z-\alpha}{\lambda}\right)^m}{m!} \underset{\alpha}{\circledast} B\mathbf{1} = B\left(\frac{\left(\frac{z-\alpha}{\lambda}\right)^m}{m!} \underset{\alpha}{\circledast} \mathbf{1}\right) = B\left(\frac{\left(\frac{z-\alpha}{\lambda}\right)^m}{m!}\right)$$

elde edilir. O halde

$$B\left(\frac{\left(\frac{z-\alpha}{\lambda}\right)^m}{m!}\right) = B\mathbf{1} \underset{\alpha}{\circledast} \frac{\left(\frac{z-\alpha}{\lambda}\right)^m}{m!}$$

ve böylece

$$B\left((z-\alpha)^m\right) = B\mathbf{1} \underset{\alpha}{\circledast} \left(\frac{z-\alpha}{\lambda}\right)^m, \; m \geq 0$$

elde edilir. Bu nedenle, tüm p polinomları için $Bp(z-\alpha) = B\mathbf{1} \underset{\alpha}{\circledast} p\left(\frac{z-\alpha}{\lambda}\right)$. $(z-\alpha)$ polinomları $C^{(n)}(\mathbb{D})$'de yoğun olduğundan, tüm $f \in C^{(n)}(\mathbb{D})$ için $(Bf)(z) = \mathcal{D}_{\alpha,B\mathbf{1}}C_{1/\lambda}f(z)$ sonucuna varırız. Sonuç olarak, gerektiği gibi $B = \mathcal{D}_{\alpha,B\mathbf{1}}C_{1/\lambda}$.

(ii)

$$\frac{(z-\alpha)^m}{m!} \underset{\alpha}{\circledast} f(z) = V_\alpha^m f(z), \; \forall f \in C^{(n)}(\mathbb{D})$$

ifadesinden bahsediyoruz (bkz. (4.18)). $V_\alpha B = \lambda BV_\alpha$ olsun. O zaman herhangi bir $m \geq 0$ tamsayısı için $\lambda^m BV_\alpha^m = V_\alpha^m B$, diğer bir deyişle, tüm $f \in C^{(n)}(\mathbb{D})$ için $\lambda^m BV_\alpha^m f = V_\alpha^m Bf$. Özellikle $\lambda^m BV_\alpha^m \mathbf{1} = V_\alpha^m B\mathbf{1}$, ve dolayısıyla yukarıdaki özdeşlik sayesinde

$$B\left(\frac{(\lambda(z-\alpha))^m}{m!} \underset{\alpha}{\circledast} \mathbf{1}\right) = \left(\frac{(z-\alpha)^m}{m!} \underset{\alpha}{\circledast} B\mathbf{1}\right)$$

ifadesine sahibiz, veya eşdeğer olarak,

$$B(\lambda(z-\alpha))^m = (z-\alpha)^m \underset{\alpha}{\circledast} B\mathbf{1}, \; m \geq 0.$$

Yine, $p(z-\alpha)$ polinomları $C^{(n)}(\mathbb{D})$'de yoğun olduğundan, her $f \in C^{(n)}(\mathbb{D})$ için

$$(BC_\lambda) f(z) = (Bf)(\lambda z) = B\mathbf{1} \underset{\alpha}{\circledast} f(z) = \mathcal{D}_{\alpha,B\mathbf{1}} f(z)$$

elde ederiz. Yani, tüm $f \in C^{(n)}(\mathbb{D})$ için $(BC_\lambda) f(z) = \mathcal{D}_{\alpha,B\mathbf{1}} f(z)$ dir. Buradan, $C_\lambda f(z) = f(\lambda z)$, $f \in C^{(n)}(\mathbb{D})$ olmak üzere $|\lambda| \leq 1$ için C_λ operatörü $C^{(n)}(\mathbb{D})$ üzerinde bir sınırlı operatör olduğundan $BC_\lambda = \mathcal{D}_{\alpha,B\mathbf{1}}$ olduğu elde edilir.

Tersine, eğer $BC_\lambda = \mathcal{D}_{\alpha,B\mathbf{1}}$ ise, o zaman her $p \in C^{(n)}(\mathbb{D})$ polinomu için

$$\begin{aligned}
V_\alpha Bp(z) &= V_\alpha BC_\lambda p\left(\frac{z}{\lambda}\right) = V_\alpha \mathcal{D}_{\alpha,B\mathbf{1}} p\left(\frac{z}{\lambda}\right) \\
&= \mathcal{D}_{\alpha,B\mathbf{1}} V_\alpha p\left(\frac{z}{\lambda}\right) = BC_\lambda V_\alpha p\left(\frac{z}{\lambda}\right) \\
&= BC_\lambda \left((z-\alpha) \underset{\alpha}{\circledast} p\left(\frac{z}{\lambda}\right)\right) \\
&= \lambda BC_\lambda \left(\frac{z-\alpha}{\lambda} \underset{\alpha}{\circledast} p\left(\frac{z}{\lambda}\right)\right) \\
&= \lambda BC_\lambda (V_\alpha p)\left(\frac{z}{\lambda}\right) = \lambda BV_\alpha p(z),
\end{aligned}$$

dolayısıyla, istendiği gibi $V_\alpha B = \lambda BV_\alpha$ olur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar. □

$C^{(n)}(\mathbb{D})$ üzerindeki C_φ bileşke operatörünün genel olarak, uygun bir $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ fonksiyonu için

$$(C_\varphi f)(z) = (f \circ \varphi)(z) = f(\varphi(z))$$

şeklinde tanımlanan operatör olduğuna dikkat ediniz. Aşağıdaki sonucun ispatı Gürdal vd. (2015)'deki Sonuç 3.1 in ispatına benzer olup sadece bütünlük olması için burada verilmiştir.

Sonuç 4.21. *λ, $|\lambda| > 1$ olacak şekilde bir sayı olmak üzere C_φ bileşke operatörünün $C_\varphi V_\alpha = \lambda V_\alpha C_\varphi$ koşulunu sağlaması için gerekli ve yeterli koşul $\varphi(z) = \frac{z}{\lambda}$ olmasıdır.*

İspat. C_φ bir bileşke operatörü olduğundan, $C_\varphi \mathbf{1} = \mathbf{1}(\varphi(z)) = \mathbf{1}$ olduğu açıktır. O zaman Teorem 4.20'nin (i)'sinden $C_\varphi V_\alpha = \lambda V_\alpha C_\varphi$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$C_\varphi = \mathcal{D}_{\alpha,C_\varphi \mathbf{1}} C_{1/\lambda} = \mathcal{D}_{\alpha,\mathbf{1}} C_{1/\lambda} = C_{1/\lambda}$$

olmasıdır. Bu ise her $z \in \mathbb{D}$ için $\varphi(z) = \frac{z}{\lambda}$ olduğunu gösterir. Bu da istenilen sonucu verir. $\square$

Sonuç 4.22. $\{V_\alpha\}' = \left\{D_{\alpha,f} : f \in C^{(n)}(\mathbb{D})\right\}$*, yani* V_α *operatörünün komutantları* $f \in C^{(n)}(\mathbb{D})$ *özelliğine sahip* α*-Duhamel operatörleri* $D_{\alpha,f}$ *lerden oluşmaktadır.*

Sonuç olarak Teorem 4.20'nin ayrıca $\mathrm{ext}_p(V) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$'yi ima ettiğini söyleyebiliriz. Çünkü $BC_\lambda = \mathcal{D}_{\alpha,B\mathbf{1}}$ denkleminin $|\lambda| \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir $\lambda \in \mathbb{C}$ için sıfır olmayan bir B çözümüne sahip olduğu gösterilebilirdir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu kısım elde edilen sonuçlar ve bu sonuçlardan ortaya çıkacak bir takım açık problemlerin verilmesini kapsamaktadır.

Bu yüksek lisans tez çalışmasında, $\alpha \in \Omega$ değerine göre $\Omega \subset \mathbb{C}$ yıldız şekilli bir bölge olmak üzere $\overline{\Omega}$ de n. türevi sürekli olan sürekli fonksiyonların $C^{(n)}(\Omega)$ Banach uzayı çalışılmıştır. α-Duhamel çarpımı

$$\left(f \underset{\alpha}{\circledast} g\right)(z) := \frac{d}{dz}\int_{\alpha}^{z} f(z+\alpha-t)g(t)dt = \frac{d}{dz}\left(f \underset{\alpha}{*} g\right)(z)$$

yardımıyla $\left(C^{(n)}(\Omega), \underset{\alpha}{*}\right)$ Banach cebirlerinin $\underset{\alpha}{*}$-üreteçleri tanımlanmış, V_α operatörü $V_\alpha f(z) = \int\limits_{\alpha}^{z} f(t)\,dt$ ile tanımlı integral operatörü ve δ_A operatörü ise $\delta_A(X) := [X, A]$ ile tanımlı iç türev operatörü olmak üzere $\|(I - V_\alpha)^m\|$ tahmini ve $\|\delta_A^m\|$ normunun alttan tahmini incelenmiştir. Özel durumda Aleman-Korenblum teoreminin yeni ispatı verilmiştir. Yani, Duhamel çarpımı yardımıyla H^p Hardy uzayının V-invaryant altuzayları tasvir edilmiştir. Devamında, α bir sabit kompleks sayı olmak üzere Ω üzerinde analitik fonksiyonların bazı Banach uzayları tanımlanmış ve α-Duhamel çarpımına göre onun Banach cebiri olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca, $h_\alpha(f) = f(\alpha)$ ile tanımlı h_α homomorfizmini içeren maksimum ideal uzay olduğu ispatlanmıştır. Son olarak, $V_\alpha f(z) = \int_\alpha^z f(t)\,dt$ integral operatörünün invaryant altuzaylarının latisleri karakterize edilmiş ve α-Duhamel çarpımı yardımıyla V_α nin genişletilmiş özvektörleri verilmiştir.

Tez kapsamında yapılan çalışmalar dikkate alındığında bunların devamı olarak aşağıdaki soruyu ortaya koyabiliriz:

Soru 5.1. Bu tez kapsamında elde edilen sonuçlar Banach uzayların farklı sınıflarında Riemann-Liouville kesirli integral operatörünün farklı sınıfları için verilebilir mi?

KAYNAKLAR

Agmon, S., 1949. Sur une probleme de translations. Comptes rendus de l'Academie des Sciences, 229(11), 540–542.

Aleman, A., Korenblum, B., 2008. Volterra invariant subspaces of H^p. Bulletin of Mathematical Sciences, 132, 510–542.

Aleman, A., Siskakis, A., 1995. An integral operator on H^p. Complex Variables Theory Application, 28(2), 149–158.

Ambrozie, C., Müller, V., 2004. Invariant subspaces for polynomially bounded operators. Journal of Functional Analysis, 213, 321–345.

Anisca, R., Troitsky, V.G., 2005. Minimal vectors of positive operators. Indiana University Mathematics Journal, 54, 861–872.

Ansari, S., Enflo, P., 1998. Extremal vectors and invariant subspaces. Transactions of the American Mathematical Society, 350, 539–558.

Argyros, S., Haydon, R., 2011. A hereditarily indecomposable L^{∞}-space that solves the scalar-plus-compact problem. Acta Mathematica, 206, 1–54.

Aronszajn, N., Smith, K., 1954. Invariant subspaces of completely continuous operators. Annals of Mathematics, 2(60), 345–350.

Beauzamy, B., 1985. Un operateur sans sous-espace invariant: simplification de l'exemple de P. Enflo. Integral Equations Operator Theory, 8(3), 314–384.

Bercovici, H., Foias, C., Pearcy, C., 1985. Dual algebras with applications to invariant subspaces and dilation theory. CBMS Regional conference series in mathematics, 56. A.M.S., Providence.

Bermudo, S., Montes-Rodriguez, A., Shkarin, S., 2008. Orbits of operators commuting with the Volterra operator. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 89, 145–173.

Bernstein, A., Robinson, A., 1966. Solution of an invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos. Pacific Journal of Mathematics, 16, 421–431.

Biswas, A., Lambert, A., Petrović, S., 2002. Extended eigenvalues and the Volterra operator. Glasgow Mathematical Journal, 44, 521–534.

Bourdon, P., Shapiro, J., 2008. Intertwining relations and extended eigenvalues of analytic Toeplitz operators. Illinois Journal of Mathematics, 52, 1007–1030.

Bouzeffour, F., Garayev, M., 2018. Duhamel convolution product in the setting of quantum calculus. Ramanujan Journal, 46, 345–356.

Bozhinov, N., 1988. Convolutional Representations of Commutants and Multipliers. Publishing House of Bulgarian Academy of Sciences, Sofia.

Brodskii, M., 1957. On a problem of I.M. Gelfand. Uspekhi Matematicheskikh Nauk (in Russian), 12, 129–132.

Brodskii, M., 1971. Triangular and Jordan Representations of Linear Operators. Translational Mathematical Monographs, vol. 32, AMS, Providence, Rhode Island.

Brown, S., 1979. Connections between an operator and a compact operator that yield hyperinvariant subspaces. Journal of Operator Theory, 1, 117–121.

Brown, S.W., 1978. Some invariant subspaces for subnormal operators. Integral Equations and Operator Theory, 1, 310–333.

Cassier, G., Alkanjo, H., 2014. Extended spectrum, extended eigenspaces and normal operators. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 418, 305–316.

Cassier, G., Alkanjo, H., 2017. Extended spectrum and extended eigenspaces of quasinormal operators. Banach Journal of Mathematical Analysis, 11(2), 266–281.

Chalendar, I., Partington, J., 2005a. Convergence properties of minimal vectors for normal operators and weighted shifts. Proceedings of the American Mathematical Society, 133, 501–510.

Chalendar, I., Partington, J., 2005b. Variations on Lomonosov's theorem via the technique of minimal vectors. Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), 71, 603–617.

Chalendar, I., Partington, J., 2013. An overview of some recent developments on the invariant subspace problem. Concrete Operators, 1, 1–10.

Crownover, R., Hansen, R., 1977. Commutants of generalized integrations on a space of analytic functions. Indiana University Mathematics Journal, 26(2), 233–245.

Dimovski, I., 1990. Convolutional calculus. Springer Netherlands, Vol. 43.

Domanov, I., Malamud, M., 2002. Invariant and hyperinvariant subspaces of an operator J^{α} and related operator algebras in Sobolev spaces. Linear Algebra and its Applications, 348, 209–230.

Domanov, I., Malamud, M., 2009. On the spectral analysis of direct sums of Riemann-Liouville operators in Sobolev spaces of vector functions. Integral Equations Operator Theory, 63, 181–215.

Donoghue, W., 1957. The lattice of invariant subspaces of a completely continuous quasinilpotent transformations. Pacific Journal of Mathematics, 7(2), 1031–1035.

Enflo, P., 1976. On the invariant subspace problem in Banach spaces, Séminaire Maurey–Schwartz (1975–1976), Espaces L^p, applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach. Exp. Nos. 14–15, 7 pp., Centre Math., École Polytech., Palaiseau.

Enflo, P., 1987. On the invariant subspace problem in Banach spaces. Séminaire Maurey–Schwartz (1975–1976). Acta Mathematica, 158, 213–313.

Enflo, P., 1998. Extremal vectors for a class of linear operators, Functional analysis and economic theory (Samos, 1996), 61–64. Springer, Berlin.

Enflo, P., Hoim, T., 2003. Some results on extremal vectors and invariant subspaces. Proceedings of the American Mathematical Society, 131, 379–387.

Fage, M., Nagnibida, N., 1987. The problem of equivalence of ordinary linear differential operators. Nauka Sibirsk Otdel, Russia.

Foias, C., Williams, J., 1972. Some remarks on the Volterra operator. Proceedings of the American Mathematical Society, 31(1), 177–184.

Frankfurt, R., Rovnyak, J., 1977. Finite convolution operators. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 49, 347–374.

Frankfurt, R., Rovnyak, J., 1978. Recent results and unsolved problems of finite convolution operators; in: Linear Spaces and Approximation, Butzer, P.L. Sz.-Nagy, B.(eds). International Series of Numerical Mathematics, 40, 133–350.

Furuta, T., 2001. Invitation to Linear Operators, From Matrices to bounded linear operators on a Hilbert space. Taylor & Francis, London and New York, 255 pp.

Garayev, M., 2019. Some properties and applications of convolution algebras. Advanced Mathematical Models and Applications, 4(3), 188–197.

Garayev, M., Guediri, H., Sadraoui, H., 2015. The Bergman space as a Banach algebra. New York Journal of Mathematics, 21, 339–350.

Garayev, M., Guediri, H., Sadraoui, H., 2016. On some problems in the space $C^n[0,1]$. UPB Scientific Bulletin, Series A, 78(1), 147–156.

Gelfand, I., 1938. A problem. Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 5, 233.

Ginsberg, J., Newman, D., 1970. Generators of certain radical algebras. Journal of Approximation Theory, 3, 229–235.

Gohberg, I., Krein, M., 1969. Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space. In: Translation Mathematical Monographs,18. American Mathematical Society, Providence, RI.

Gohberg, I., Krein, M., 1970. Theory and Applications of Volterra operators in Hilbert space Translation Mathematical Monographs 24. American Mathematical

Society, Providence, RI.

Gowers, W., Maurey, B., 1997. Banach spaces with small spaces of operators. Mathematische Annalen, 307, 543–568.

Gürdal, M., 2009a. Description of extended eigenvalues and extended eigenvectors of integration operator on the Wiener algebra. Expositiones Mathematicae, 27, 153–160.

Gürdal, M., 2009b. On the extended eigenvalues and extended eigenvectors of shift operator on the Wiener algebra. Applied Mathematics Letters, 22(11), 1727–1729.

Gürdal, M., Garayev, M., Saltan, S., 2015. Some concrete operators and their properties. Turkish Journal of Mathematics, 39, 970–989.

Gürdal, M., Şöhret, F., 2013. On some operator equation in the space of analytic functions and related questions. Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 62, 81–87.

Ivanona, O., Melikhov, S., 2017a. On operators which commute with the Pommiez type operator in weighted spaces of entire functions. St. Petersburg Mathematical Journal, 28(2), 209–224.

Ivanona, O., Melikhov, S., 2017b. On the completeness of orbits of a Pommiez operator in weighted (LF)-spaces of entire functions. Complex Analysis and Operator Theory, 11, 1407–1424.

Ivanona, O., Melikhov, S., 2019a. On invariant subspaces of the Pommiez operator in the spaces of entire functions of exponential type. Journal of Mathematical Sciences, 241, 760–769.

Ivanona, O., Melikhov, S., 2019b. On the commutant of the generalized backward shift operator in weighted spaces of entire functions. arXiv:1909.13703 [math.FA].

Ivanona, O., Melikhov, S., 2021. Operator Theory and Differential Equations: On the commutant of the generalized backward shift operator in weighted spaces of entire functions. Birkhauser Basel, VIII,, 341, 37–48.

Kalish, G., 1957. On similarity, reducing manifolds, and unitary equivalence of certain Volterra operators. Annals of Mathematics, 66, 481–494.

Kantorovich, L., Akilov, G., 1964. Functional Analysis in Normed Spaces. Macmillan, New York.

Karaev, M., 1984. Usage of convolution for the proof of unicellularity. Zapiski Nauchnykh Seminarov, LOMI (in Russian), 135, 66–68.

Karaev, M., 1990. Usage of Duhamel product in basis problems. İzvestiya Akademii Nauk Azerbaidzhana (in Russian), (3-6), 145–150.

Karaev, M., 1995. Usage of Duhamel product in description of invariant subspace. Trudy Instituta Matematiki i Mekaniki, Akademiya Nauk Azerbaidzhana (in Russian), 137–146.

Karaev, M., 2003. Some applications of the Duhamel product. Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI (in Russian), 303, 145–160.

Karaev, M., 2004. Closed ideals in C^∞ with the Duhamel product as multiplication. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 300, 297–302.

Karaev, M., 2005a. Invariant subspaces, cyclic vectors, commutant and extended eigenvectors of some convolution operators. Methods of Functional Analysis and Topology, 11, 48–59.

Karaev, M., 2005b. On some applications of the ordinary and extended Duhamel products. Siberian Mathematical Journal, 46, 553–566.

Karaev, M., 2005c. Some applications of the Duhamel product. Journal of Mathematical Sciences (N.Y.), 129, 4009–4017.

Karaev, M., 2006a. New proof of Nagnibida's theorem. Journal of Function Spaces and Applications, 4, 85–90.

Karaev, M., 2006b. On extended eigenvalues and extended eigenvectors of some operator classes. Proceedings of the American Mathematical Society, 134, 2383–2392.

Karaev, M., 2018. Duhamel Algebras and Applications. Functional Analysis and Its Applications, 52, 1–8.

Karaev, M., Gürdal, M., 2011. Strongly splitting weighted shift operators on Banach spaces and unicellularity. Operators and Matrices, 5(1), 157–171.

Karaev, M., Gürdal, M., Saltan, S., 2011. Some applications of Banach algebra techniques. Mathematiche Nachrichen, 284, 1678–1689.

Karaev, M., Saltan, S., 2005. A Banach algebra structure for the Wiener algebra $W(\mathbb{D})$ of the disc. Complex Variables and Elliptic Equations, 50, 299–305.

Karaev, M., Saltan, S., Kunt, T., 2014. Discrete Duhamel product, restriction of weighted shift operators and related problems. New York Journal of Mathematics, 20, 831–843.

Karaev, M., Tuna, H., 2004. Description of maximal ideal space of some Banach algebra with multiplication as Duhamel product. Complex Variables and Elliptic Equations, 49, 449–457.

Karaev, M., Tuna, H., 2006. On some applications of Duhamel product. Linear and Multilinear Algebra, 54(4), 301–311.

Kim, H., 2011. Hyperinvariant subspaces for operators having a normal part. Operators and Matrices, 5, 487–494.

Kiryutenko, Y.A., 1975. Operators of generalized integration that can be analytically continued from the origin. Transactions of Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, 7, 47–53.

Lambert, A., Petrović, S., 2005. Beyond hyperinvariance for compact operators. Journal of Operator Theory, 219, 93–108.

Lavrentiev, M., Shabat, B., 1973. Methods in the theory of functions in a complex variable. Moskow, Nauka.

Leka, Z., 2010. A note on the powers of Cesaro bounded operators. Czechoslovak Mathematical Journal, 60, 1091–1100.

Leka, Z., 2013. On orbits of functions of the Volterra operator. Complex Analysis and Operator Theory, 7, 1321–1335.

Linchuk, Y., 2007. Representation of solutions of one integro-differential operator equation. Ukrainian Mathematical Journal, 59, 143–146.

Linchuk, Y., 2015. On derivation operators with respect to the Duhamel convolution in the space of analytic functions. Mathematical Communications, 20, 17–22.

Lomonosov, V., 1973. Invariant subspaces of the family of operators that commute with a completely continuous operatör. Funkcional. Anal. Prilozen, 7(3), 55–56.

Maddox, I., 1970. Elements of functional analysis. Cambridge University Press, 208s. New York.

Malamud, M., 1988. Invariant and hyperinvariant subspaces of direct sums of simple Volterra operators. Operator Theory Advences and Applications, 102, 143–167.

Malamud, M., 1994. Similarity of Volterra operators and related problems in the theory of differential equations of fractional orders. Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva, 55, 73–148.

Malamud, M., 1995. Similarity of Volterra operators and related problems in the theory of differential equations of fractional orders. Transactions of the Moscow Mathematical Society, 56, 57–122.

Malamud, M., 1998. Invariant and hyperinvariant subspaces of direct sums of simple Volterra operators. Operator Theory: Advances and Applications, 102, 143–167.

Malamud, M., 2019. Spectral theory of fractional order integration operators, their direct sums, and similarity problem to these operators of their weak perturbations. Volume 1 Basic Theory, edited by Anatoly Kochubei and Yuri Luchko, Berlin, Boston: De Gruyter, pp. 427-460.

Merryfield, K., Watson, S., 1991. A local algebra structure for H^p of the polydisc. Colloquium Mathematicae, 62, 73–79.

Mikusinski, J., 1956. Operational Calculus. Pergamon Press: Oxford-Warszawa.

Montes-Rodriguez, A., Sanchez-Alvarez, J., Zemanek, J., 2005. Uniform Abel-Kreiss boundedness and the extremal behavior of the Volterra operator. Proceedings of the London Mathematical Society, 91, 761–788.

Nagnibida, N., 1966. Certain properties of operators of generalized integration in analytic spaces. Siberian Mathematical Journal, 7, 1306–1318.

Nagnibida, N., 1978. On the roots of a multiple integration operator in a space of functions analytic in the circle. Transactions of Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, 42, 1426–1435.

Nagnibida, N., 1981. Description of commutants of integration operator in analytic spaces. Siberian Mathematical Journal translated from Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, 22, 748–752, 127–131.

Nagnibida, N., 1984. Operators Commuting with the Multiple Integration in the Space of Analytic Functions. Siberian Mathematical Journal, 27(2), 255–262.

Nikolskii, N., 1974. Invariant subspaces in operator theory and function theory, Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya "Matematicheskii Analiz"(in Russian), 12, 199–412.

Nikolskii, N., 1986. Treatise on the Shift Operator. Springer, Berlin.

Pearcy, C., 1976. Some recent developments in operator theory. Regional Conference Series in Mathematics, No.36, American Mathematical Society, Providence, R.I.

Raichinov, I., 1970. Linear operators that commute with integration. Mathematical Analysis, 2, 63–72.

Read, C., 1984. A solution to the invariant subspace problem. Bulletin London Mathematical Society, 16, 337–401.

Read, C., 1985. A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ^1. Bulletin London Mathematical Society, 17, 305–317.

Read, C., 1997. Quasinilpotent operators and the invariant subspace problem. Journal of the London Mathematical Society, 56(2), 595–606.

Romashchenko, G., 2004. Spectral analysis of positive powers of integration operatör in Sobolev spaces. Methods of Functional Analysis and Topology, 10(1), 63–74.

Romashchenko, G., 2006. On similarity of convolution Volterra operators in Sobolev spaces. Methods of Functional Analysis and Topology, 12(3), 286–295.

Rudin, W., 1991. Functional Analysis. McGraw-Hill, 423s. New York.

Sakhnovich, L., 1957. Spectral analysis of Volterra operators and inverse problems. Doklady Akademii Nauk (in Russian), 115, 666–669.

Saltan, S., 2018. Description of invariant subspaces in terms of Berezin symbols. Turkish Journal of Mathematics, 42(6), 2926–2934.

Saltan, S., Gürdal, M., 2011. Spectral multiplicities of some operators. Complex Variables and Elliptic Equations, 56(6), 513–520.

Saltan, S., Özel, Y., 2012. On some applications of a special integrodifferential operators. Journal of Function Spaces and Applications.

Saltan, S., Özel, Y., 2014. Maximal ideal space of some Banach algebras and related problems. Banach journal mathematical analysis, 8, 16–29.

Sarason, D., 1965. A remark on the Volterra operator. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 12, 244–246.

Shkarin, A., 2007. Compact operators without extended eigenvalues. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 332, 455–462.

Tapdigoglu, R., 2012. Invariant subspaces of Volterra integration operator: Axiomatical approach. Bulletin of Mathematical Sciences, 136, 574–578.

Tapdigoglu, R., 2013. On the description of invariant subspaces in the space $C^{(n)}[0,1]$. Houston Journal Mathematics, 39, 169–176.

Tapdigoglu, R., 2020. On the Banach algebra structure for C of the bidisc and related topics. Illinois Journal of Mathematics, 64(2), 185–197.

Thomson, J., 1986. Invariant subspaces for algebras of subnormal operators. Proceedings of the American Mathematical Society, 96, 462–464.

Titchmarsh, E., 1926. The zeros of certain integral functions. Proceedings of the London Mathematical Society, 25, 283–302.

Tkachenko, V., 1977. Invariant subspaces and unicellalarity of operators of generalized integration in spaces of analytic functionals. Mathematical Notes, 22(2), 221–230.

Tkachenko, V., 1979a. Operators of generalized integration that can be analytically continued from the origin. Matematicheskie Zametki, 25, 271–282.

Tkachenko, V., 1979b. Operators that commute with generalized integration in spaces of analytic functionals. Mathematical Notes, 22(2), 141–146.

Tkachenko, V., 1997. Invariant subspaces and unicellularity of operators of generalized integration in spaces of analytic functionals. Mathematical Notes, 22, 221–230.

Troitsky, V., 2000. Lomonosov's theorem cannot be extended to chains of four operators. Proceedings of the American Mathematical Society, 128, 521–525.

Troitsky, V., 2004. Minimal vectors in arbitrary Banach spaces. Proceedings of the American Mathematical Society, 132, 1177–1180.

Tsedenbayar, D., 2003. On the power boundedness of certain Volterra operator pencils. Studia Mathematica, 156, 59–66.

Wigley, N., 1974. The Duhamel product of analytic functions. Duke Mathematical Journal, 41(1), 211–217.

Wigley, N., 1975. A Banach algebra structure for H^p. Canadian Mathematical Bulletin, 18(4), 597–603.

Şarkikaraağaç Fen Lisesi (Ücretli Öğretmen)	: 2018-2019
Şarkikaraağaç Asım ve Sıddıka Seçuk Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi (Ücretli Öğretmen)	: 2019-2021
Siirt Kurtalan Ekspresi Anadolu Lisesi (Öğretmen)	: 2021-devam ediyor

Yayınlar

Tapdigoglu, R., Gürdal, M., Altintas, M., 2022. Genişletilmiş Duhamel Çarpımı Üzerine, 2nd International Conference on Applied Engineering and Natural Sciences (ICAENS 2022), ISBN:978-625-00-0603-0, March 10-13, 2022, pp. 674, Konya, Turkey.

Tapdigoglu, R., Gürdal, M., Altintas, M., 2022. Duhamel Banach algebra structure of some space and related topics, Publications de l'Institut Mathematique, kabul edildi.

Gürdal, M., Garayev, M., Tapdigoglu, R., Altintas, M., 2022. Some applications of the α-Duhamel product, Annales Polonici Mathematici, incelemede.