

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS

**BIRNBAUM-SAUNDERS DAĞILIMININ PARAMETRELERİNİN BAYESCI
YÖNTEMLE TAHMİNİ**

Samet KAYA

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2022**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BIRNBAUM-SAUNDERS DAĞILIMININ PARAMETRELERİNİN BAYESCI YÖNTEMLE TAHMİNİ

Samet KAYA

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Esin KÖKSAL BABACAN

Birnbaum-Saunders dağılımı, su kalitesi, tarım, hava kirliliği, rüzgar hızı gibi konular ile işletme ve ekonomi, tıp, mühendislik bilimleri, çevre bilimi gibi birçok alanda kullanıma sahip bir dağılımdır. Bu dağılım iş dünyasında özellikle makinelerin dayanıklılığını ve parçaların yorulma veya bozulma ömrünü modellemek için tercih edilmektedir. Bu nedenle, dağılım parametrelerinin etkin bir şekilde tahmin edilmesi önemlidir. Birnbaum-Saunders dağılımının parametrelerinin tahmini için momentler yöntemi, uyarlanmış momentler yöntemi, en çok olabilirlik yöntemi, robust yöntemler ve Bayes yöntemi kullanılmaktadır.

Bu çalışmada amaç, Birnbaum-Saunders dağılımının parametrelerini tahmin etmek için başvurulan yöntemleri araştırmak ve Bayes yönteminin en çok olabilirlik yöntemine kıyasla etkinliğini saptamaktır. Bu nedenle, simülasyon programı yazılmış ve Birnbaum-Saunders dağılımının parametreleri hem klasik yöntemle hem de Bayesci yöntemle tahmin edilmiştir. Bu kapsamda, Birnbaum-Saunders dağılımında iki parametre için farklı önsel dağılımlar kullanılarak, farklı kayıp fonksiyonları altında Bayesci sonuç çıkarımına değinilmiştir. Dağılımın parametrelerini tahmin ederken kullanılan yöntemleri karşılaştırmak için hata kareler ortalaması ölçüt olarak kullanılmıştır. Daha sonra literatürde yer alan iki farklı gerçek veri seti çalışmaya dahil edilmiş ve parametrelere ilişkin tahmin sonuçları elde edilmiştir.

Haziran 2022, 65 sayfa

Anahtar Kelime: Bayesci Yöntem, Birnbaum-Saunders, Lindley Yaklaşımı, Markov Zinciri Monte Carlo, Metropolis Hastings algoritması,

ABSTRACT

Master Thesis

PARAMETER ESTIMATION OF THE BIRNBAUM-SAUNDERS DISTRIBUTION BY BAYESIAN METHOD

Samet KAYA

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Esin KÖKSAL BABACAN

The Birnbaum-Saunders distribution is used in many fields such as water quality, agriculture, air pollution, wind speed, business and economics, medicine, engineering sciences, and environmental science. This distribution is preferred in the business world, particularly to model the durability of machines and the fatigue or failure life of components. Therefore, it is significant to estimate the distribution parameters effectively. Moment method, adapted moment method, maximum likelihood method, robust method and Bayesian method are used for the estimation of the parameters of the Birnbaum-Saunders distribution.

The aim of this study is to investigate the methods which are used to estimate the parameters of the Birnbaum-Saunders distribution and to determine the efficiency of the Bayesian method compared to the maximum likelihood method. Therefore, a simulation program is written and the parameters of the Birnbaum-Saunders distribution are estimated by both the classical method and the Bayesian method. In this context, Bayesian inference under different loss functions is mentioned by using different prior distributions for two parameters in the Birnbaum-Saunders distribution. The mean squared error is used as comparison criteria for the methods which are used while estimating the parameters of the distribution. Then, two different real data sets in the literature are used in the study and estimation results are obtained.

June 2022, 65 pages

Key Words: Bayesian Approach, Birnbaum-Saunders, Lindley Approach, Markov Chain Monte Carlo, Metropolis Hastings algorithm

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmalarım sırasında bilgi birikimini aktaran, tecrübesiyle yön veren ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen saygıdeğer hocam sayın Doç. Dr. Esin KÖKSAL BABACAN' a (Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü Bilgi Sistemleri Anabilim Dalı) teşekkürlerimi sunarım.

Aldığım her kararda yanımda olan, beni bu günlere getiren, yol gösteren babam Ali KAYA, annem Munise KAYA, abim Serhat KAYA ve eşi Nuray KAYA ve kardeşlerim Mehmet Sait KAYA ve İsmail Sefa KAYA' ya; var oluş sebebim olan aileme sonsuz şükran ve teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak tez çalışmamda desteklerini hep hissettiğim arkadaşlarım Abdullatif ÇOBAN, Akın YILDIRAN ve TÜBİTAK İnsan Kaynakları Planlama Müdürlüğündeki müdürüm Hüseyin Fatih YAZ ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Samet KAYA
Ankara, Haziran 2022

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. BIRNBAUM-SAUNDERS DAĞILIMI.....	5
3. İKİ PARAMETRELİ BIRNBAUM-SAUNDERS DAĞILIMINDA PARAMETRE TAHMİNİ	8
3.1 Momentler Yöntemi	8
3.2 Uyarlanmış Momentler Yöntemi	9
3.3 En Çok Olabilirlik Yöntemi	10
3.4 Bayesci Tahmin Yöntemi.....	16
3.4.1 Farklı kayıp fonksiyonları altında Bayes tahmin edicileri.....	18
3.4.1.1 Genelleştirilmiş Entropi kayıp fonksiyonu altında Bayes tahmin edicisi	18
3.4.1.2 Linex kayıp fonksiyonu altında Bayes tahmin edicisi.....	19
3.4.1.3 Ağırlıklandırılmış Hata Kareler kayıp fonksiyonu altında Bayes tahmin edicisi	19
3.4.2 α ve β parametreleri için Bayesci tahmin	20
3.4.2.1 Şekil parametresi α 'nın bilinmediği durumda Bayesci tahmin.....	20
3.4.2.2 Jeffreys önsel bilgisi kullanılarak Birnbaum-Saunders dağılım parametreleri için Bayesci tahmin.....	22
3.4.2.3 Üstel dağılım önsel bilgisi kullanılarak Birnbaum-Saunders dağılım parametreleri için Bayesci tahmin.....	24
3.4.2.4 Weibull dağılım önsel bilgisi kullanılarak Birnbaum-Saunders dağılım parametreleri için Bayesci tahmin.....	27
3.4.3 Lindley yöntemi.....	30

3.4.3.1 Farklı kayıp fonksiyonları altında Lindley yaklaşımı	32
3.4.4 Markov Zinciri Monte Carlo yöntemleri	36
3.4.4.1 Metropolis algoritması.....	36
3.4.4.2 Metropolis-Hastings algoritması	37
4. UYGULAMA ÇALIŞMALARI	38
4.1 Simülasyon Çalışması	38
4.1.1 Simülasyon çalışması (α parametresinin bilinmediği durum).....	38
4.1.2 Simülasyon çalışması (Üstel dağılım önseli kullanıldığı durum)	41
4.1.3 Simülasyon çalışması (Weibull dağılım önseli kullanıldığı durum)	44
4.1.4 Simülasyon çalışması (Farklı kayıp fonksiyonları altında Bayesci sonuç çıkarımı)	46
4.2 Gerçek Veri Uygulamaları	49
4.2.1 Gerçek veri uygulaması-1.....	49
4.2.2 Gerçek veri uygulaması -2.....	51
5. SONUÇ VE TARTIŞMA.....	54
KAYNAKLAR	56
EKLER.....	58
EK 1 Lindley Yaklaşımı Kullanılarak İntegrallerin Yaklaşık Çözümleri.....	59
EK 2 Asimptotik Normallik	61
EK 3 Fisher Bilgi Matrisi	62
EK 4 Asimptotik Güven Aralıkları	63
ÖZGEÇMİŞ.....	64

SİMGELER DİZİNİ

α	Alfa
β	Beta
θ	Teta
Φ	Phi
π	Pi
\propto	Orantılıdır
Π	Çarpım
Σ	Toplam
\int	İntegral

Kısaltmalar

EÇO/MLE	En Çok Olabilirlik
MZMC	Markov Zinciri Monte Carlo
HKO	Hata Kare Ortalaması

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Şekil parametresi α 'nın değeri sabit iken farklı β 'nın değerleri için Olasılık yoğunluk fonksiyonları	6
Şekil 2.2 Ölçek parametresi β 'nın değeri sabit iken farklı α değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonları	7
Şekil 4.1 Histogram ve tahminlere ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonları.....	50
Şekil 4.2 Ampirik dağılım ve tahminlere ilişkin birikimli dağılım fonksiyonları	51
Şekil 4.3 Histogram ve tahminlere ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonları.....	52
Şekil 4.4 Ampirik dağılım ve tahminlere ilişkin birikimli dağılım fonksiyonları	53



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1 $\beta=2$ iken α Parametresi için Tahmin Sonuçları.....	39
Çizelge 4.2 $\beta=3$ iken α Parametresi için Tahmin Sonuçları.....	40
Çizelge 4.3 $\alpha=1,2,3$ ve $\beta=3,4,5$ için simülasyon sonuçları	42
Çizelge 4.4 $\alpha=2,3$ ve $\beta=2,3,4$ için simülasyon sonuçları	45
Çizelge 4.5 α ve β parametresinin farklı değerleri için çeşitli kayıp fonksiyonları altında elde edilen simülasyon sonuçları	47
Çizelge 4.6 31,000 psi basınca maruz kalan alüminyum kalıplarının yorulma ömürlerine ilişkin parametre tahmin sonuçları	50
Çizelge 4.7 Araba verilerine ilişkin parametre tahmin sonuçları.....	52

1. GİRİŞ

Birnbaum-Saunders dağılımı, adını Birnbaum ve Saunders tarafından 1969 yılında yapılan çalışma ile alan sürekli bir olasılık dağılımıdır. Bu dağılım aynı zamanda yorgunluk ömrü (fatigue life) dağılımı olarak da adlandırılır. Birnbaum-Saunders dağılımı ilk olarak makinelerde bulunan metalik parçaların yüzeylerinde meydana gelen çatlakların veya kırılmaların büyümesi sonucu oluşan arızayı modellemek amacıyla önerilmiştir.

İki parametrelili Birnbaum-Saunders dağılımı, bir yorulma çatlak büyümesi sürecinden başarısızlık süresini tanımlamak için türetilmiştir. Ölçek parametresi aynı zamanda dağılımın medyanıdır. Dağılımın medyanı için çıkarımlar çoğunlukla en çok olabilirlik yöntemine dayanır ve büyük örnek gereksinimlerine tabidir.

Birnbaum-Saunders dağılımı günümüzde, su kalitesi, tarım, hava kirliliği, rüzgar hızı gibi konular ile işletme ve ekonomi, mühendislik bilimleri, çevre bilimi ve tıp bilimi gibi farklı birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır. Birnbaum-Saunders dağılımı, bu alanlarda yaygın olarak kullanılan diğer yaşam dağılımları olan Weibull, LogNormal ve Ters Gamma dağılımlarına alternatif olarak kullanılmaktadır. Birnbaum-Saunders dağılımı ile ilgili bilimsel alanlarda en yaygın kullanılan gerçek veri Birnbaum ve Saunders (1969) makalesinde kullanılan ve saniyede 18 döngüde salınım yapan 6061-T6 Alüminyum kalıplarının yorulma ömrü verileridir.

Klasik ve Bayes yaklaşımları kullanılarak Birnbaum-Saunders dağılımı üzerinde çeşitli araştırmalar yapılmıştır. Birnbaum ve Saunders (1969) saniyede 18 döngüde salınım yapan 6061-T6 Alüminyum kalıplarının yorulma ömrü ile, Desmond(1985), Birnbaum Saunders dağılımına uygunluk gösteren biyolojik verileri ile, Pescim vd. (2014) fiber kompozit malzemelerinde kullanılan karbon fiber üreten bir işlemde bu fiberlerin gerilme mukavemetleri ile, Mohammadi vd. (2017) Kanada'nın Ontaria eyaletindeki 10 istasyona ait rüzgar verileri ile, Levia vd. (2009) Santiago şehrindeki hava kirletici konsantrasyonu (SO₂) verileri ile, Sha (2018) hızlandırılmış bir testte yalıtım yağna batırılmış bir çift disk elektrotun bozulma süresi ile ilgili çalışmalar yapmışlardır.

Achcar (1993) yaptığı çalışmada, ölçek parametresinin bilinmediği ve hem şekil hem ölçek parametresinin bilinmediği iki farklı durum için, en çok olabilirlik yöntemi ve Bayesci tahmin yöntemlerini kullanarak Birnbaum-Saunders dağılım parametrelerini tahmin etmiştir. Bayesci yöntem ile parametre tahmini yaparken önsel bilgi olarak Jeffreys önselini almıştır. Sonsal Dağılımı kullanarak parametre tahminlerini elde ederken Laplace yöntemi ve Simpson kuralını kullanmıştır.

From ve Li (2006) yaptıkları çalışmada, hem kompleks hem sansürlü veriye dayanan iki parametrelili Birnbaum-Saunders dağılımının bilinmeyen parametrelerinin tahmini için istatistiksel çıkarımını ele almışlardır. En çok olabilirlik tahmin edicilerini elde etmek için alternatif 4 farklı yöntem önermişlerdir. Elde ettikleri tahmin edicilerin hata kareler ortalamalarını karşılaştırmış ve sonuçları literatürdeki verilere uygulamışlardır.

Xu ve Tang (2010) yaptıkları çalışmada, hem şekil hem ölçek parametresinin bilinmediği durum için Bayesci tahmin yöntemini kullanarak Birnbaum-Saunders dağılım parametrelerini elde etmişlerdir. Önsel dağılım olarak Jeffreys önselini kullanmışlardır. Sonsal dağılımı kullanarak parametre tahmini yaparken Lindley yaklaşımı, Laplace yöntemi ve Gibbs örnekleme yöntemini kullanarak parametrelere ilişkin tahmin değerlerini elde etmiş ve en çok olabilirlik yöntemi ile karşılaştırmışlardır.

Wang vd. (2015) yaptıkları çalışmada, Birnbaum-Saunders dağılımının hem şekil hem ölçek parametresinin bilinmediği durum için, en çok olabilirlik yöntemi ve Bayesci tahmin yöntemlerini kullanarak Birnbaum-Saunders dağılım parametrelerini elde etmiş ve karşılaştırmışlardır. Bayesci tahmin yönteminde parametreler için Ters Gamma dağılımını önsel bilgi olarak almışlardır. Markov Zinciri Monte Carlo simülasyonu ile parametre tahminlerini standart sapma ve %90, %95 güven aralıklarına göre karşılaştırmış ve sonuçları gerçek verilere uygulamışlardır.

Mohammadi vd. (2017) yaptıkları çalışmada, rüzgar hızı ve rüzgar gücü gibi verilerde Birnbaum-Saunders dağılımının yaşam dağılımlarına alternatif olarak kullanılabileceğini göstermişlerdir. Rüzgar hızı verileri ile ortalama, maksimum, varyans, çarpıklık katsayısı ve basıklık katsayısı arasındaki ilişkiyi grafiksel ve

matematiksel olarak göstermişlerdir. Birnbaum-Saunders dağılımının parametrelerini en çok olabilirlik yöntemi ile tahmin etmişlerdir. Gerçek veri çalışmasında ise Weibull, Ters Gamma, Rayleigh gibi yaşam dağılımları ile Birnbaum-Saunders dağılımının parametrelerini en çok olabilirlik yöntemi ile tahmin etmiş ve modelleri Akaike Bilgi Kriteri, Bayesci Bilgi Kriteri, açıklama oranı ve hata kareler ortalaması kriterlerine göre karşılaştırmışlardır.

Balacrishnan ve Kundu (2018) yaptıkları çalışmada, Birnbaum-Saunders dağılımının parametrelerini en çok olabilirlik yöntemi, robust tahmin yöntemleri, momentler ve uyarlanmış momentler yöntemlerini kullanarak tahmin etmişler, parametrelerin tahmin edicilerini teorik olarak elde etmişlerdir. Birnbaum-Saunders dağılımının ölçek parametresini medyan olarak almışlar ve daha sonra dönüşümler ile şekil parametresinin tahminini bulacak şekilde yeni bir tahmin edici elde etmişlerdir. Tahmin edici yöntemlerini karşılaştırmak için standart sapma ve güven aralıklarını kullanmışlardır.

Pedroso vd. (2021) yaptıkları çalışmada, sıralı küme örneklemesini kullanarak en çok olabilirlik yöntemi, Anderson Darling yöntemi, momentler ve uyarlanmış momentler tahmin yöntemleri ile Birnbaum-Saunders dağılımının parametrelerini tahmin etmiş ve karşılaştırmışlardır. Monte Carlo simülasyonu ile tahminlerin yan, hata kareler ortalaması ve integral kare hata ortalamalarını karşılaştırmış ve sonuçları literatürdeki verilere uygulamışlardır.

Costa vd. (2021) yaptıkları çalışmada, hata kareler, karesel, Linex ve entropi kayıp fonksiyonları altında, Ters Gamma dağılımını önsel dağılım olarak belirleyerek, Birnbaum-Saunders dağılımına ait ölçek parametresinin Bayes tahmin edicisinin genel yapılarını elde etmişlerdir.

Lu vd. (2022) yaptıkları çalışmada, Birnbaum-Saunders dağılımının ölçek parametresinin medyan olduğu varsayımını kullanarak, şekil parametresinin bilindiği ve bilinmediği durumlarda medyana bağlı olarak en çok olabilirlik tahmin edicilerini teorik olarak elde etmişlerdir. Monte Carlo simülasyonu ile tahminlerin güven aralıklarını karşılaştırmış ve sonuçları literatürdeki verilere uygulamışlardır.

Çalışmanın geri kalan kısmı şu şekilde organize edilmiştir: 2. Bölümde Birnbaum-Saunders dağılımı ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. 3. Bölümde Birnbaum-Saunders dağılımının parametrelerinin tahmini için kullanılan yöntemler (momentler yöntemi, uyarlanmış momentler yöntemi, en çok olabilirlik yöntemi ve Bayes yöntemi) anlatılmıştır. 4. Bölümde Bayesci tahmin yönteminde sonuç çıkarımında kullanılan Lindley yaklaşımı ve Markov Zinciri Monte Carlo yöntemlerinin algoritmaları verilmiştir. 5. Bölüm uygulama çalışmalarına ayrılmıştır. Bu bölümde ilk olarak Birnbaum-Saunders dağılımından veri türeterek simülasyon çalışmaları yapılmış, daha sonra literatürde yer alan gerçek veriler kullanılarak sonuç çıkarımına gidilmiştir. Son bölümde, çalışma ile elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.



2. BIRNBAUM-SAUNDERS DAĞILIMI

Birnbaum-Saunders dağılımı, pozitif değer alan verileri modellemek için kullanılan asimetric ve pozitif (sağa) çarpık bir dağılımdır. Genel olarak, α şekil ve β ölçek parametresi olmak üzere iki parametrelili bir dağılımdır.

$T \sim BS(\alpha, \beta)$ dağılımına sahip bir rasgele değişken olmak üzere olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t|\alpha, \beta) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\alpha\beta}} \left[\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right) \right\}, \quad t > 0, \alpha, \beta > 0 \quad (1)$$

dağılım fonksiyonu,

$$F(t|\alpha, \beta) = \Phi \left(\frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \right), \quad t > 0, \alpha, \beta > 0 \quad (2)$$

biçimindedir. Burada, Φ standart Normal dağılımın dağılım fonksiyonudur. Birnbaum-Saunders dağılımının beklenen değer ve varyansı,

$$E(T) = \beta \left(1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) \quad (3)$$

$$Var(T) = (\alpha\beta)^2 \left(1 + \frac{5}{4} \alpha^2 \right) \quad (4)$$

biçimindedir (Wang vd., 2016 ve Mohammadi vd., 2017). Çarpıklık katsayısı δ ve basıklık katsayısı φ sırasıyla,

$$\delta = \frac{44\alpha^3 + 24\alpha}{(5\alpha^2 + 4)^{3/2}}, \quad \varphi = 3 + \frac{558\alpha^4 + 240\alpha^2}{(5\alpha^2 + 4)^2} \quad (5)$$

biçimindedir (Balakrishnan ve Kundu, 2018).

$T \sim BS(\alpha, \beta)$ dağılımına sahip bir rasgele değişken olmak üzere bu değişkene ait bazı özellikler

1. $\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}}\right) \sim N(0,1),$
2. $CT \sim BS(\alpha, C\beta), C > 0$ ve
3. $1/T \sim BS(\alpha, 1/\beta)$

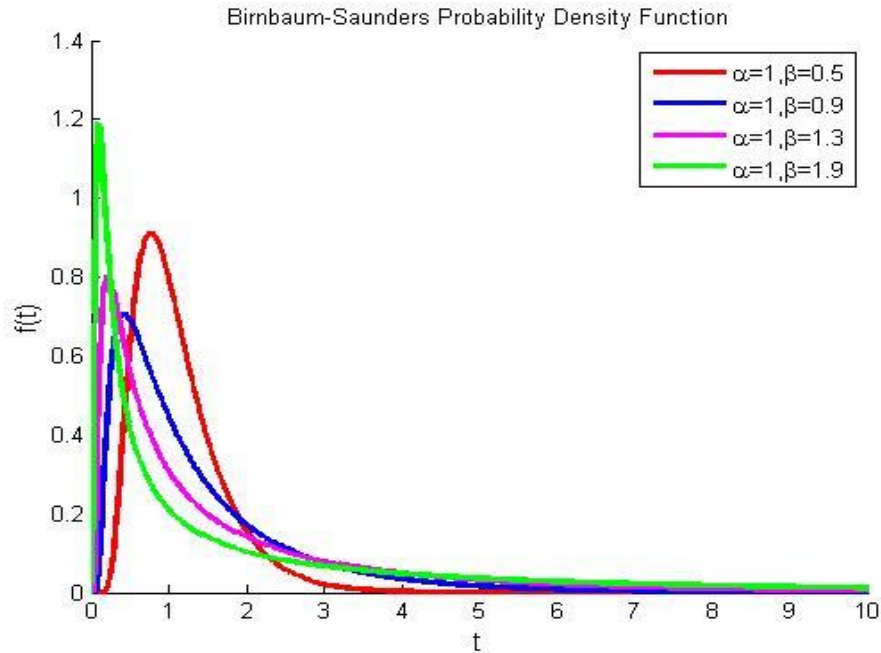
biçiminde verilebilir. Özellik (3) kullanılarak $1/T'$ ye ilişkin beklenen değer ve varyans,

$$E(T^{-1}) = \beta^{-1} \left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right) \quad (6)$$

$$Var(T^{-1}) = \alpha^2 \beta^{-2} \left(1 + \frac{5}{4}\alpha^2\right) \quad (7)$$

biçiminde elde edilir (Balakrishnan ve Kundu, 2018).

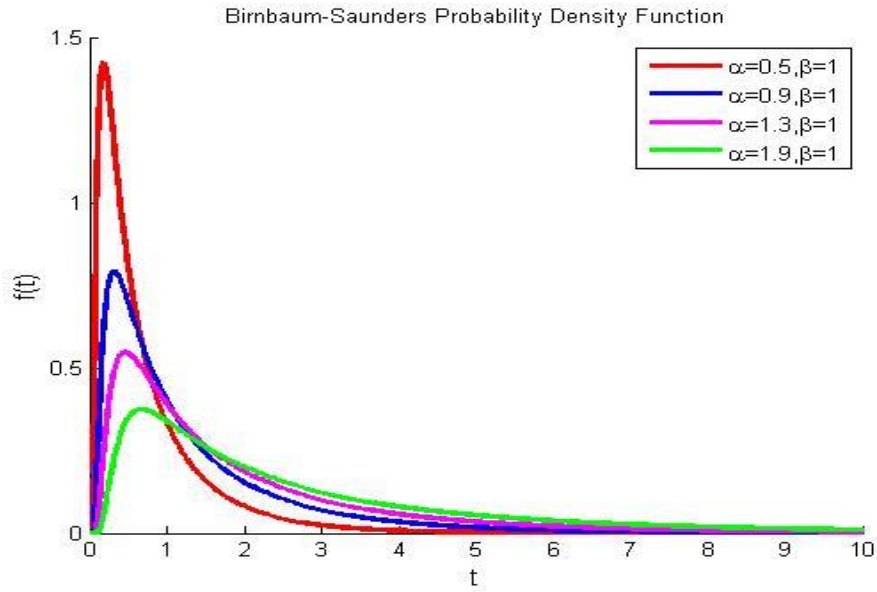
Şekil parametresi (α) sabit tutulup, ölçek parametresi (β) nın farklı değerler aldığı durumda Birnbaum-Saunders dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafiği şekil 2.1 deki gibidir.



Şekil 2.1 Şekil parametresi α 'nın değeri sabit iken farklı β 'nın değerleri için Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları

Şekil 2.1'e bakıldığında, α şekil parametresinin sabit olduğu durumda β ölçek parametresinin değerleri arttıkça olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiğinin çarpıklığının arttığı görülmektedir.

Aynı şekilde, β ölçek parametresi sabit, α şekil parametresinin farklı değerler aldığı durumda Birnbaum-Saunders dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafiği şekil 2.2 deki gibidir.



Şekil 2.2 Ölçek parametresi β 'nin değeri sabit iken farklı α değerleri için Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları

Şekil 2.2' ye baktığımızda, β parametresinin sabit olduğu durumda α parametresinin değerleri arttıkça olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiğinin basıklığının arttığı görülmektedir

3. İKİ PARAMETRELİ BIRNBAUM-SAUNDERS DAĞILIMINDA PARAMETRE TAHMİNİ

Günümüzde bozulma oranları ile ilişkili verilerin analizinde sıkça kullanılan Birnbaum-Saunders dağılımı, genellikle iki parametrelî model ile ifade edilir. Birnbaum-Saunders dağılımının parametrelerini tahmin etmek için çeşitli yöntemler kullanılabilir. Bu yöntemlerden; momentler yöntemi, uyarlanmış momentler yöntemi, en çok olabilirlik yöntemi ve Bayes yöntemi en sık kullanılanlar arasındadır.

3.1 Momentler Yöntemi

Momentler tahmin edicileri kitle momentlerinin hesaplanarak örneklem momentlerine eşitlenmesi ile bulunmaktadır. Parametrelerin momentler tahmin edicilerini bulabilmek için önce kitle momentlerinin var olması gerekmektedir. T_1, T_2, \dots, T_n olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(t|\theta)$ olan kitleden alınan bir örneklem olsun. $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)'$ olmak üzere, kitle momentleri bu parametrelere bağlıdır. Yani, $s = 1, 2, 3, \dots, k$ için $E_{\underline{\theta}}(T^s) = g_s(\underline{\theta})$ kitle momentleri ve

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i, m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^2, m_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^3, \dots, m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^k \quad (8)$$

örneklem momentleri hesaplanır (Akdi, 2011).

Birnbaum- Saunders Dağılımının parametreleri α ve β 'nin momentler tahmin edicileri, sırasıyla örneklem ortalamasının kitle ortalamasına ve örneklem varyansının kitle varyansına eşitlenmesi ile elde edilir. Örneklem ortalaması s ve örneklem varyansı v ile gösterilmek üzere α ve β 'nin momentler tahmin edicileri,

$$s = \beta \left(1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \right), v = (\alpha \beta)^2 \left(1 + \frac{5}{4} \alpha^2 \right)$$

eşitlikleri kullanılarak elde edilir. Buna göre, α 'nın momentler tahmin edicisi

$$\alpha^4(5s^2 - v) + 4\alpha^2(s^2 - 4) - 4v = 0 \quad (9)$$

lineer olmayan denkleminin köküdür. Denklem (9) ile verilen lineer olmayan denklemin kökleri elde edilmek istendiğinde, köklerin örneklem değişim katsayısının $\sqrt{5}$ 'ten küçük olduğu durumlarda mevcut olduğu görülür. Bu durumda α 'nın momentler tahmin edicisi,

$$\hat{\alpha} = \left[\frac{-2(s^2-4) + 2\sqrt{(s^2-4)^2 + v(5s^2-v)}}{(5s^2-v)} \right]^{1/2} \quad (10)$$

biçiminde elde edilir. β 'nin momentler tahmin edicisi ise

$$\hat{\beta} = \frac{2s}{\hat{\alpha}^2 + 2} \quad (11)$$

olarak bulunur. Örneklem değişim katsayısının $\sqrt{5}$ 'ten büyük olduğu durumlarda α 'nın momentler tahmin edicisi elde edilemez (Balakrishnan ve Kundu, 2018).

3.2 Uyarlanmış Momentler Yöntemi

Ng vd. (2003) yaptıkları çalışma ile denklem (3) ve denklem (6)'yı kullanarak uyarlanmış yeni bir momentler tahmin edicisi önermişlerdir. Birnbaum-Saunders dağılımının parametrelerine ait uyarlanmış momentler tahmin edicilerini bulabilmek için. örneklem aritmetik ortalaması (s) ve örneklem harmonik ortalaması (r)'yi sırasıyla denklem (3) ve denklem (6)'ya eşitlemişlerdir. Buna göre

$$s = \beta \left(1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \right), \quad r^{-1} = \beta^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) \quad (12)$$

olmak üzere (9) ile verilen denklemi kullanarak α ve β 'nin uyarlanmış momentler tahmin edicilerini,

$$\hat{\alpha} = \left\{ 2 \left[\left(\frac{s}{r} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \right\}^{1/2} \quad \text{ve} \quad \hat{\beta} = (sr)^{1/2} \quad (13)$$

biçiminde elde etmişlerdir. Balakrishnan ve Kundu, (2018) yaptıkları çalışmada uyarlanmış momentler tahmin edicilerinin önemli özelliğinin, momentler tahmin edicilerinin aksine her zaman var olmaları ve daha açık formlara sahip olmaları olduğunu söylemişler ve $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ 'nin asimptotik ortak dağılımının,

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{2n} & 0 \\ 0 & \frac{(\alpha\beta)^2}{n} \left(\frac{1 + \left(\frac{3}{4}\right)\alpha^2}{\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)\alpha^2\right)^2} \right) \right] \right] \quad (14)$$

biçiminde iki boyutlu Normal dağılıma sahip olduğunu ifade etmişlerdir.

Ng vd. (2003) yaptıkları çalışma ile kapsamlı bir Monte Carlo simülasyon çalışmasının sonuçlarına dayanarak en çok olabilirlik tahmin edicilerinin ve Uyarlanmış Momentler tahmin edicilerinin hem yanlışlık hem de hata kareler ortalaması açısından özellikle küçük α değerleri için çok benzer şekilde performans gösterdiğini gözlemlemişlerdir. Uyarlanmış momentler tahmin edicilerinin sapma modellerini incelediklerinde, sapma için tam olarak aşağıdaki formüllerin geçerli olduğunu bulmuşlardır

$$Bias(\hat{\alpha}) \approx -\frac{\alpha}{n}, \quad Bias(\hat{\beta}) \approx \frac{\alpha^2}{4n}. \quad (15)$$

3.3 En Çok Olabilirlik Yöntemi

En çok olabilirlik yöntemi, tahmin edicileri elde etmede kullanılan yöntemler arasında en popüler olan yöntemdir. En çok olabilirlik tahmin edicilerinin en önemli özelliklerinden biri, asimptotik olarak yansız ve minimum varyanslı olmasıdır.

T_1, T_2, \dots, T_n olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(t|\theta)$ olan kitleden alınan bir örneklem olmak üzere, θ 'nın olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\theta|T_1, T_2, \dots, T_n) = f(T_1, T_2, \dots, T_n|\theta) = \prod_{i=1}^n f(T_i|\theta)$$

biçimindedir. Olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan değer (örneklem bir fonksiyonu), θ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi olarak bulunur. Yani θ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi,

$$\hat{\theta}(T_1, T_2, \dots, T_n) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta|T_1, T_2, \dots, T_n) \quad (16)$$

dır. Genellikle olabilirlik fonksiyonunun maksimize edilmesi yerine fonksiyonun logaritması alınarak maksimize edilir. Bu fonksiyon,

$$\ell(\theta|T_1, T_2, \dots, T_n) = \log(L(\theta|T_1, T_2, \dots, T_n)) \quad (17)$$

biçimindedir. Olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan değeri bulabilmek için parametreye göre birinci türev alınıp sıfıra eşitlenir

$$\frac{d \log(L(\theta|T_1, T_2, \dots, T_n))}{d\theta} = 0. \quad (18)$$

Denklem (18) ile elde edilen değer maksimum olduğunu göstermek için parametreye göre ikinci türev alınır ve bu türev sonucunun sıfırdan küçük olması gerekir. Yani

$$\frac{\partial^2 \log(L(\theta|T_1, T_2, \dots, T_n))}{\partial \theta^2} < 0 \quad (19)$$

olmalıdır.

Birnbaum-Saunders dağılımının şekil ve ölçek parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri ilk olarak Birnbaum ve Saunders (1969) tarafından ele alınmış, tahmin edicilerin asimptotik dağılımları Engelhardt vd. (1981) tarafından yapılan çalışma ile elde edilmiştir.

T , iki parametrelili Birnbaum-Saunders dağılımına sahip bir rasgele değişken olmak üzere olasılık yoğunluk fonksiyonunun,

$$f(t|\alpha, \beta) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\alpha\beta}} \left[\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right) \right\}, \quad t > 0,$$

$$\alpha, \beta > 0$$

biçiminde olduğu daha önce ifade edilmişti.

T_1, T_2, \dots, T_n iki parametrelili Birnbaum-Saunders dağılımından alınan n birimlik rasgele bir örneklem olmak üzere olabilirlik fonksiyonu,

$$T_1, T_2, \dots, T_n \sim BS(\alpha, \beta)$$

$$L(\alpha, \beta | t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{2\sqrt{2\pi\alpha\beta}} \left[\left(\frac{\beta}{t_i}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\beta}{t_i}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \frac{1}{(2\alpha)^n} \frac{1}{\beta^n} \left[\prod_{i=1}^n \beta^{\frac{1}{2}} t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{n/2}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\}$$
(20)

biçiminde olur. Denklem (20) de elde edilen olabilirlik fonksiyonunun doğal logaritması alındığında,

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - n \ln(2) - n \ln(\alpha) - \frac{n}{2} \ln(\beta) - \frac{3}{2} (\sum_{i=1}^n \ln t_i) + \sum_{i=1}^n \ln(t_i + \beta)$$

$$- \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right)$$
(21)

elde edilir. Denklem (21)'in α 'ya göre kısmi türevi alınıp sifıra eşitlendiğinde;

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = -\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right) = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i + \beta}{\beta t_i} - 2 \right)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n\beta} + \frac{\beta \sum_{i=1}^n t_i^{-1}}{n} - 2 \quad (22)$$

olur. Burada, $s = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n}$ ve $k = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^{-1}}{n}$ olmak üzere sırasıyla örneklem aritmetik ve harmonik ortalamasıdır (Mohammadi vd., 2017). Buna göre, α parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{s}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{k} - 2 \right)^{1/2} \quad (23)$$

olarak elde edilir.

β parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\beta}$ 'yi belirlemek için (21) eşitliğinin β 'ya göre kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlenmelidir. Buna göre,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = -\frac{n}{2\beta} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i + \beta)} - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right) \right) = 0 \quad (24)$$

olup $\hat{\beta}$ 'ya göre lineer olmayan bu denklemin çözümü için iteratif yöntemler kullanılabilir. Newton-Raphson yöntemi bu yöntemlerden yaygın olarak kullanılanlarından bir tanesidir. Burada, parametreleri en çok olabilirlik yöntemiyle tahmin etmek için Newton-Raphson yönteminin çok değişkenli durumu kullanılmıştır. Buna göre çözümler aşağıda verildiği gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \ln L}{d\alpha d\beta} &= \frac{1}{\alpha^3} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right) \right) \\ \frac{d^2 \ln L}{d\alpha^2} &= \frac{n}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha^4} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right) \\ \frac{d^2 \ln L}{d\beta^2} &= \frac{n}{2\beta^2} + \sum_{i=1}^n \frac{-1}{(t_i + \beta)^2} - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{2t_i}{\beta^3} \right) \right) \\ \frac{d^2 \ln L}{d\beta d\alpha} &= \frac{1}{\alpha^3} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right) \right) \end{aligned}$$

olmak üzere birinci türevler için f vektörü,

$$f = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right) \\ -\frac{n}{2\beta} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i + \beta)} - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right) \right) \end{pmatrix}$$

ve ikinci türevlerin yer aldığı Hessian matrisi,

$$H = \begin{bmatrix} \frac{n}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha^4} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right) & \frac{1}{\alpha^3} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right) \right) \\ \frac{1}{\alpha^3} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right) \right) & \frac{n}{2\beta^2} + \sum_{i=1}^n \frac{-1}{(t_i + \beta)^2} - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{2t_i}{\beta^3} \right) \right) \end{bmatrix}$$

dir. Buna göre, α ve β için α_0 ve β_0 başlangıç değerleri ile başlanıp aşağıdaki adımlar

$$\begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{i-1} \\ \beta_{i-1} \end{pmatrix} - H^{-1} \begin{pmatrix} f(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}) \\ f(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}) \end{pmatrix}.$$

seçilen durdurma kuralı gerçekleşinceye kadar tekrar edilir. Böylece, α ve β parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri olan $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ elde edilmiş olur. Büyük örneklem durumunda, yani $n \rightarrow \infty$ iken en çok olabilirlik tahmin edicilerinin dağılımlarının asimptotik Normal dağılım olduğu bilinmektedir.

Engelhardt vd. (1981) yaptıkları çalışma ile Birnbaum-Saunders dağılımının düzenli bir dağılım ailesinden geldiğini ve Fisher bilgi matrisinin,

$$I(\alpha, \beta) = - \begin{bmatrix} \frac{2n}{\alpha^2} & 0 \\ 0 & n \left[\frac{1}{\alpha^2 \beta^2} + E \left(\frac{1}{(T + \beta)^2} \right) \right] \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} \frac{2n}{\alpha^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{\alpha^2 \beta^2} \left(1 + \alpha (2\pi)^{-\frac{1}{2}} h(\alpha) \right) \end{bmatrix}$$

biçiminde olduğunu göstermişlerdir. Burada,

$$h(\alpha) = \alpha \sqrt{\pi/2} - \pi e^{\frac{2}{\alpha^2}} [1 - \Phi(2/\alpha)]$$

dır. Fisher Bilgi Matrisinin tersi, asimptotik varyans-kovaryans matrisidir ve hesaplanması EK-2 ile verilmiştir. Hesaplamalar sonucunda $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ 'nin ortak olasılık dağılımının,

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta}_i \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{2n} & 0 \\ 0 & \frac{\beta^2}{n(0.25 + \alpha^{-2} + I(\alpha))} \end{pmatrix} \right] \quad (25)$$

iki değişkenli Normal dağılım olduğunu göstermişlerdir. Burada,

$$I(\alpha) = 2 \int_0^\infty \left\{ (1 + g(\alpha t))^{-1} - \frac{1}{2} \right\}^2 d\Phi(t)$$

ve

$$g(y) = 1 + \frac{y^2}{2} + y \left(1 + \frac{y^2}{4} \right)^{1/2}$$

dır. $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ 'nin asimptotik olarak bağımsız olduğunu belirtmek ilginçtir. α için asimptotik bir güven aralığı denklem (25)'ten kolayca elde edilebilir ve belirli bir α için β 'nin asimptotik güven aralıklarını da denklem (25) kullanılarak elde edilebilir (Engelhardt vd., 1981). Buna göre, α ve β parametrelerine ilişkin %100 $(1 - \alpha)$ güven aralığı,

$$\hat{\alpha} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\alpha^2}{2n}}$$

$$\hat{\beta} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\beta^2}{n(0.25 + \alpha^{-2} + I(\alpha))}}$$

ile verilir. Burada, $z_{\alpha/2}$ ile Standart Normal dağılımın $\alpha/2$. ci yüzdeliğine karşılık gelen üst sınır noktası ifade edilmiştir.

3.4 Bayesci Tahmin Yöntemi

Birnbaum-Saunders dağılımının parametrelerinin Bayesci yöntemle tahminine geçmeden önce Bayesci yöntemin genel hali verilecektir.

İstatistik biliminde temel olarak iki farklı felsefi yaklaşım söz konusudur. Bunlardan birincisi, klasik veya frekansçı yaklaşım diğeri ise Bayesci yaklaşımdır. Bayesci yaklaşım, Thomas Bayes tarafından 1763’de ortaya atılan ve matematiksel istatistiğin önemli bir teoremi olan *Bayes teoremine* dayanır.

Bayesci sonuç çıkarımında, $p(t|\theta)$ olasılık (yoğunluk) fonksiyonu ile tanımlı modelde yer alan θ parametresi $t = t_1, t_2, \dots, t_n$ gözlemleri kullanılarak tahmin edilmek istenir. Bu yaklaşımda θ parametresi kendine ait dağılımı olan bir rasgele değişken olarak düşünülür. Bayesci sonuç çıkarımında, parametreye ilişkin bu dağılım önsel dağılım olarak bilinir. Bu önsel dağılım ve verilen veri bilgisi kullanılarak parametreye ait son dağılım olan sonsal dağılım elde edilir. Bu çıkarımda, parametreye ilişkin tüm bilgi bu sonsal dağılım ile elde edilir. Buna göre Bayesci sonuç çıkarımında ilk olarak θ parametresi için bir önsel dağılım ($\Pi(\theta)$) seçilir. Daha sonra, gözlemlenen y değerleri için $L(\theta|t)$ olabirlik fonksiyonu belirlenir. Son aşamada, önsel dağılım bilgisi ve olabirlik güncellenerek $p(\theta|t)$ sonsal dağılımı elde edilir. θ , için elde edilecek tüm istatistiksel sonuç çıkarımları bu sonsal dağılım kullanılarak yapılır.

Bahsedilen adımlar Bayes teoremi kullanılarak,

$$p(\theta|t) = \frac{p(\theta, t)}{p(t)} = \frac{L(\theta|t)\pi(\theta)}{p(t)} = \frac{L(\theta|t)\pi(\theta)}{\int L(\theta|t)\pi(\theta)d\theta} \quad (26)$$

ile ifade edilebilir,

Burada, paydadaki $\int L(\theta|t)\pi(\theta)d\theta$ ifadesi sonsal dağılımın normalleştirme sabitidir. $p(t)$ marjinal dağılımı bir integral olup sonlu değerler aldığı sürece sonsal dağılım hakkında herhangi bir ek bilgi içermez. Buna göre $p(\theta|t)$,

$$p(\theta|t) \propto L(\theta|t)\pi(\theta) \quad (27)$$

biçiminde orantısal olarak yazılabilir. Sonuç olarak, Bayesci sonuç çıkarımı var olan bilginin yeni bilgi ile güncellenmesidir.

Burada anlatılanlar kısaca şu şekilde özetlenebilir, önsel dağılım veriyi analiz etmeden önce parametre hakkında kesin olmayan bilgileri içeren olasılık dağılımıdır. Önsel dağılım ile olabirlik fonksiyonunun çarpımı orantısal olarak sonsal dağılımı verir. Elde edilen, sonsal dağılım kullanılarak parametreye ilişkin istenilen çıkarımlar yapılabilir.

Bayesci yaklaşımda parametreler için önsel dağılımı belirlemek en önemli sorunlardan biridir. Temel olarak önsel dağılımlar, bilgi vermeyen ve bilgi veren önsel dağılımlar olmak üzere iki gruba ayrılır. Bayesci sonuç çıkarımında, önsel dağılım analize başlamadan önce parametreye ilişkin sahip olunan bilgi göz önüne alınarak araştırmacı tarafından seçilir. Parametreye ilişkin önsel bir bilginin olmadığı veya gözlem sayısının çok ve parametre sayısının az olduğu durumlarda, veriden gelen bilgi daha baskın olacağından bilgi vermeyen önsel dağılım kullanılabilir. Parametrelere ilişkin daha önce yapılmış çalışmalardan elde edilen bilgi, geçmişte elde edilen deneyimler veya mevcut bilgi ile birleştirilebilen uzman görüşlerine uygun önsel dağılımlar kullanıldığında bilgi veren önsel dağılım kullanılmış olur ve bu durumlarda Bayesci yöntemin gücü artar.

$\hat{\theta}$, θ parametresinin tahmin edicisi olmak üzere $L(\theta, \hat{\theta})$ kayıp fonksiyonu göz önüne alınsın. Kayıp fonksiyonu, θ ile $\hat{\theta}$ arasındaki farkı göz önüne alan bir cezalandırma fonksiyonu olarak ifade edilebilir. Literatürde tanımlı olan çok farklı yapıda kayıp fonksiyonu vardır. Bayesci sonuç çıkarımında amaç, beklenen kaybı minimize

etmektedir. Beklenen kayıp risk olarak ifade edilir. Amaç, parametre tahmini yaparken riski minimize etmektir. Aslında, bir optimizasyon problemi vardır. Risk fonksiyonu kayıp fonksiyonunun beklenen değeridir ve Bayesci sonuç çıkarımında bu beklenen değer daha önce de ifade edildiği gibi sonsal dağılım kullanılarak hesaplanır. En çok kullanılan kayıp fonksiyonu hata kareler kayıp fonksiyonudur ve

$$L(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$$

ile tanımlıdır. Sonsal dağılım kullanılarak beklenen kayıp,

$$E(L(\theta, \hat{\theta})) = R(\theta, \hat{\theta}) = \int (\theta - \hat{\theta})^2 \pi(\theta|t) d\theta$$

ile ifade edilir. Amaç bu kaybı minimum yapacak şekildeki $\hat{\theta}$ tahmin edicisini belirlemektir. θ parametresinin hata kareler kayıp fonksiyonu altındaki Bayes tahmin edicisi sonsal dağılımın beklenen değeridir. $\hat{\theta}_{SELF}$ ile θ 'nın hata kareler kayıp fonksiyonu altında tahmin edicisi gösterilmek üzere;

$$\hat{\theta}_{SELF} = E(\theta|t) \quad (28)$$

biçiminde elde edilir.

3.4.1 Farklı kayıp fonksiyonları altında Bayes tahmin edicileri

Çalışmamız kapsamında literatürde yer alan bazı kayıp fonksiyonları incelenmiştir.

3.4.1.1 Genelleştirilmiş Entropi kayıp fonksiyonu altında Bayes tahmin edicisi

T rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(t, \theta)$ ve θ dağılımın parametresi olsun. Genelleştirilmiş Entropi Kayıp fonksiyonu,

$$L(\hat{\theta}, \theta) \propto \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^k - k \times \ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) - 1, \quad k \neq 0$$

biçiminde verilir. $\hat{\theta}_{GE}$, θ 'nın genelleştirilmiş entropi kayıp fonksiyonu altında tahmin edicisi gösterilmek üzere;

$$\hat{\theta}_{GE} = (E(\theta^{-1}|t))^{-\frac{1}{k}} \quad (29)$$

biçiminde verilir. Denklem (28)'de k değeri simetrimin büyüklüğünü ve derecesini yansıtmaktadır (Fuad, 2021).

3.4.1.2 Linex kayıp fonksiyonu altında Bayes tahmin edicisi

Asimetrik bir fonksiyon olan Linex kayıp fonksiyonu,

$$L(\hat{\theta}, \theta) \propto b \times [e^{a(\theta - \hat{\theta})} - a(\theta - \hat{\theta}) - 1], \quad b > 0, \quad a \neq 0$$

biçiminde ifade edilir. $\hat{\theta}_{LINEX}$, θ 'nın Linex kayıp fonksiyonu altında tahmin edicisi olmak üzere;

$$\hat{\theta}_{LINEX} = -\frac{1}{k} \ln E(e^{-k\theta} | t) \quad (30)$$

biçiminde verilir. Denklem (29)'da k değeri simetrimin büyüklüğünü ve derecesini yansıtmaktadır (Ahmadi vd., 2005).

3.4.1.3 Ağırlıklandırılmış Hata Kareler kayıp fonksiyonu altında Bayes tahmin edicisi

Ağırlıklandırılmış Hata kareler kayıp fonksiyonu,

$$L(\hat{\theta}, \theta) = \frac{(\hat{\theta} - \theta)^2}{\theta(1 - \theta)}$$

biçiminde ifade edilir. $\hat{\theta}_{WSELF}$, θ 'nın ağırlıklandırılmış hata kareler kayıp fonksiyonu altında tahmin edicisi olmak üzere;

$$\hat{\theta}_{WSELF} = (E(\theta^{-1}|t))^{-1} \quad (31)$$

biçiminde tanımlanır (Sun ve Tian, 2014).

Bu açıklamaların ışığı altında artık Birnbaum-Saunders dağılımının parametreleri için Bayesci sonuç çıkarımına geçilebilir.

3.4.2 α ve β parametreleri için Bayesci tahmin

3.4.2.1 Şekil parametresi α 'nın bilinmediği durumda Bayesci tahmin

Bu kısımda, ölçek parametresi β biliniyor olsun. b parametrelili Üstel dağılım, şekil parametresi α için önsel dağılım olarak alınsın. Buna göre, α şekil parametresine ait önsel olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\pi(\alpha|b) = be^{-b\alpha} \quad \alpha > 0 \quad (32)$$

biçimindedir. Birnbaum-Saunders dağılımının olabilirlik fonksiyonu,

$$L(t, \alpha, \beta) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{n/2}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} \quad (33)$$

biçiminde verilmiştir. Bayes tahmin edicisini elde edebilmek için öncelikle önsel olasılık yoğunluk fonksiyonu ile olabilirlik fonksiyonu çarpılmalıdır. Buradan,

$$\begin{aligned} P(t, \alpha) &= \pi(t|\alpha) \times L(t, \alpha, \beta) \\ &= be^{-b\alpha} \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{n/2}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

olup daha sonra şekil parametresi α 'ya göre integral alınarak t 'nin marjinali elde edilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
f(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \int_0^{\infty} f(\alpha, \beta, t_1, t_2, \dots, t_n) d\alpha \\
&= b \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{n/2}} e^{-b\alpha} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} d\alpha
\end{aligned} \tag{35}$$

biçiminde yazılır. Son adımda da bunlar birbirine oranlanarak şekil parametresi için sonsal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
&f(\alpha|t_1, t_2, \dots, t_n, \beta) \\
&= \frac{b e^{-b\alpha} \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{n/2}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\}}{b \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{n/2}} e^{-b\alpha} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} d\alpha} \\
&f(\alpha|t_1, t_2, \dots, t_n, \beta) = \frac{e^{-b\alpha} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{n/2}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\}}{\int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{n/2}} e^{-b\alpha} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} d\alpha}
\end{aligned} \tag{36}$$

biçiminde elde edilir.

α parametresinin Bayes tahmin edicisi, karesel kayıp fonksiyonu altında, bu dağılımın beklenen değeridir. Buna göre,

$$\hat{\alpha} = E(\alpha|t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-b\alpha} \frac{1}{\alpha^{n-1}} \frac{1}{\beta^{n/2}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\}}{\int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{n/2}} e^{-b\alpha} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} d\alpha} d\alpha
\end{aligned} \tag{37}$$

biçiminde elde edilir. Görüldüğü üzere parametre için Bayes tahmin edicisinin kapalı formu bulunamamıştır. Bu tür integrallerin çözümü için nümerik hesaplama yöntemleri kullanılabilir. Fakat, bu yöntemlerle sonuç elde edilmek istendiğinde

büyük hatalarla ve örneklem duyarlılığı ile karşılaşılır. Bunun yerine, bu gibi durumlar için geliştirilen simülasyon tabanlı örnekleme yöntemlerini uygulamak daha uygun olacaktır. Bu çalışmada, daha sonraki bölümlerde anlatılacak Metropolis Hastings algoritması kullanılarak sonuç çıkarımı yapılmıştır.

3.4.2.2 Jeffreys önsel bilgisi kullanılarak Birnbaum-Saunders dağılım parametreleri için Bayesci tahmin

Bu başlık altında, α ve β parametreleri için bilgi vermeyen önsel dağılım kullanılarak sonuç çıkarımı yapılmıştır. α ve β parametrelerinin birbirinden bağımsız olduğu varsayımı altında Jeffreys önsel olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\pi(t|\alpha, \beta) \propto \frac{1}{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (38)$$

olarak alınabilir. Birnbaum-Saunders dağılımının olabilirlik fonksiyonu denklem (20)'de,

$$L(t, \alpha, \beta) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{n/2}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} \quad (39)$$

olarak bulunmuştur. Bayes tahmin edicisini bulmak için öncelikle önsel olasılık yoğunluk fonksiyonu ile olabilirlik fonksiyonu çarpılır.

$$\begin{aligned} P(t, \alpha, \beta) &= \pi(t|\alpha, \beta) \times L(t, \alpha, \beta) \\ &= \frac{1}{\alpha\beta} \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{n/2}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\alpha^{n+1}} \frac{1}{\beta^{\frac{n}{2}+1}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} \end{aligned} \quad (40)$$

α ve β parametreleri için ortak sonsal olasılık yoğunluk fonksiyonu, denklem (40)'ın denklem (26)'da yerine yazılması ile,

$$\begin{aligned}
& f(\alpha, \beta|t) \\
&= \frac{\frac{1}{2^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\alpha^{n+1}} \frac{1}{\beta^{\frac{n}{2}+1}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\alpha^{n+1}} \frac{1}{\beta^{\frac{n}{2}+1}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} d\alpha d\beta} \\
& f(\alpha, \beta|t) = \frac{\frac{1}{\alpha^{n+1}} \frac{1}{\beta^{\frac{n}{2}+1}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^{n+1}} \frac{1}{\beta^{\frac{n}{2}+1}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} d\alpha d\beta} \quad (41)
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. α parametresine ilişkin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
& f_1(\alpha|t) = \int_0^\infty f(\alpha, \beta|t) d\beta \\
&= \int_0^\infty \frac{\frac{1}{\alpha^{n+1}} \frac{1}{\beta^{\frac{n}{2}+1}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^{n+1}} \frac{1}{\beta^{\frac{n}{2}+1}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} d\alpha d\beta} d\beta
\end{aligned}$$

ve β parametresine ilişkin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
& f_2(\beta|t) = \int_0^\infty f(\alpha, \beta|t) d\alpha \\
&= \int_0^\infty \frac{\frac{1}{\alpha^{n+1}} \frac{1}{\beta^{\frac{n}{2}+1}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^{n+1}} \frac{1}{\beta^{\frac{n}{2}+1}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} d\alpha d\beta} d\alpha
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Karesel kayıp fonksiyonu altında Bayes tahmin edicileri daha önce ifade edildiği gibi bu dağılımların beklenen değerleri olacaktır. Buna göre, beklenen değerler,

$$\begin{aligned}
& \hat{\alpha} = E(\alpha|t_1, t_2, \dots, t_n) = \\
& \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{\frac{n}{2}+1}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^{n+1}} \frac{1}{\beta^{\frac{n}{2}+1}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} d\alpha d\beta} d\beta d\alpha
\end{aligned}$$

ve

$$\hat{\beta} = E(\beta|t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\frac{1}{\alpha^{n+1}} \frac{1}{\beta^2} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2\right)\right\}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^{n+1}} \frac{1}{\beta^2+1} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2\right)\right\}} d\alpha d\beta \quad (42)$$

olarak elde edilir. Denklem (42)' de görüldüğü gibi parametrelere ilişkin Bayes tahmin edicisinin kapalı formunu elde etmek mümkün değildir. Bölüm 3.4.2.1' de bahsedilen yöntemler ile parametrelere ilişkin sonuç çıkarımı yapılacaktır.

3.4.2.3 Üstel dağılım önsel bilgisi kullanılarak Birnbaum-Saunders dağılım parametreleri için Bayesci tahmin

Bu kısımda, α ve β parametreleri için önsel dağılım olarak Üstel dağılım alınarak sonuç çıkarımı yapılmıştır. α ve β parametrelerinin birbirinden bağımsız olduğu varsayımı altında önsel olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$\begin{aligned} \pi_1(\alpha|c) &= ce^{-c\alpha}, \quad \alpha > 0 \\ \pi_2(\beta|b) &= be^{-b\beta}, \quad \beta > 0 \end{aligned} \quad (43)$$

olarak alınmıştır. Birnbaum-Saunders dağılımının olabilirlik fonksiyonu denklem (20)'de,

$$L(\alpha, \beta|t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{n/2}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2\right)\right\} \quad (44)$$

olarak bulunmuştur. Bayes tahmin edicisini bulmak için öncelikle önsel olasılık yoğunluk fonksiyonu ile olabilirlik fonksiyonu çarpılır.

$$f(\alpha, \beta, t_1, t_2, \dots, t_n) = \pi_1(\alpha|c) \times \pi_2(\beta|b) \times L(\alpha, \beta|t_1, t_2, \dots, t_n)$$

$$\begin{aligned}
&= ce^{-c\alpha} be^{-b\beta} \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{n/2}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i \right. \\
&\quad \left. + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} \\
&= cbe^{-(c\alpha+b\beta)} \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{\frac{n}{2}}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\}
\end{aligned} \tag{45}$$

Daha sonra t 'nin marjinali

$$\begin{aligned}
f(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(\alpha, \beta, t_1, t_2, \dots, t_n) d\alpha d\beta \\
&= cb \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{\frac{n}{2}}} e^{-(c\alpha+b\beta)} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} d\alpha d\beta
\end{aligned} \tag{46}$$

biçiminde elde edilir. Son olarak bunlar birbirine oranlanarak iki parametre için ortak sonsal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
f(\alpha, \beta | t_1, t_2, \dots, t_n) &= \frac{cbe^{-(c\alpha+b\beta)} \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{\frac{n}{2}}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\}}{\int_0^\infty \int_0^\infty cbe^{-(c\alpha+b\beta)} \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{\frac{n}{2}}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} d\alpha d\beta} \\
f(\alpha, \beta | t_1, t_2, \dots, t_n) &= \frac{e^{-(c\alpha+b\beta)} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{\frac{n}{2}}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\}}{\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(c\alpha+b\beta)} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{\frac{n}{2}}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} d\alpha d\beta}
\end{aligned} \tag{47}$$

biçiminde elde edilir. Parametrelere ait sonsal marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını elde edebilmek için sırasıyla parametrelere göre integral alınır. Buna göre marjinal sonsal olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$f_1(\alpha | t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_0^\infty f(\alpha, \beta | t_1, t_2, \dots, t_n) d\beta$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-(c\alpha+b\beta)} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^2} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i+\beta) \right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i+\beta}{\beta+t_i}-2\right)\right\}}{\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(c\alpha+b\beta)} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^2} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i+\beta) \right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i+\beta}{\beta+t_i}-2\right)\right\}} d\alpha d\beta \quad (48)$$

$$f_2(\beta|t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_0^\infty f(\alpha, \beta|t_1, t_2, \dots, t_n) d\alpha$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-(c\alpha+b\beta)} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^2} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i+\beta) \right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i+\beta}{\beta+t_i}-2\right)\right\}}{\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(c\alpha+b\beta)} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^2} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i+\beta) \right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i+\beta}{\beta+t_i}-2\right)\right\}} d\alpha d\beta \quad (49)$$

biçiminde elde edilir. Karesel kayıp fonksiyonu altında Bayes tahmin edicileri daha önce ifade edildiği gibi bu dağılımların beklenen değerleri olacaktır. Buna göre, beklenen değerler,

$$\hat{\alpha} = E(\alpha|t_1, t_2, \dots, t_n) =$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-(c\alpha+b\beta)} \frac{1}{\alpha^{n-1}} \frac{1}{\beta^2} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i+\beta) \right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i+\beta}{\beta+t_i}-2\right)\right\}}{\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(c\alpha+b\beta)} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^2} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i+\beta) \right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i+\beta}{\beta+t_i}-2\right)\right\}} d\beta d\alpha$$

ve

$$\hat{\beta} = E(\beta|t_1, t_2, \dots, t_n) =$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-(c\alpha+b\beta)} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{n-1}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i+\beta) \right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i+\beta}{\beta+t_i}-2\right)\right\}}{\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(c\alpha+b\beta)} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^2} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i+\beta) \right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i+\beta}{\beta+t_i}-2\right)\right\}} d\alpha d\beta \quad (50)$$

olarak elde edilir. Görüldüğü gibi, parametrelere ilişkin elde edilen Bayes tahmin edicilerinin kapalı formu bulunamamıştır. Yine, Bölüm 3.4.2.1' de bahsedilen yöntemler ile parametrelere ilişkin sonuç çıkarımı yapılacaktır. Simülasyon ve gerçek veri çalışmalarında, sonuç çıkarımı için Lindley yaklaşımı ve Metropolis Hastings algoritması kullanılmıştır.

3.4.2.4 Weibull dağılım önsel bilgisi kullanılarak Birnbaum-Saunders dağılım parametreleri için Bayesci tahmin

Bu kısımda, α ve β parametreleri için önsel dağılım olarak Weibull dağılım kullanılarak sonuç çıkarımı yapılmıştır. α ve β parametrelerinin birbirinden bağımsız olduğu varsayımı altında önsel olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$\begin{aligned}\pi_1(\alpha|b, c) &= bc\alpha^{b-1}e^{-c\alpha^b}, \quad \alpha > 0, b, c > 0 \\ \pi_2(\beta|d, e) &= de\beta^{d-1}e^{-e\beta^d}, \quad \beta > 0, d, e > 0\end{aligned}\quad (51)$$

olarak alınmıştır. Parametreler birbirinden bağımsız varsayılmak üzere, α ve β parametrelerinin ortak önsel olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$\pi(\alpha, \beta) = bcde\alpha^{b-1}\beta^{d-1}e^{-(c\alpha^b+e\beta^d)} \quad (52)$$

biçiminde yazılır. Birnbaum-Saunders dağılımının olabilirlik fonksiyonu denklem (20)'de,

$$L(\alpha, \beta|t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{n/2}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} \quad (53)$$

olarak bulunmuştur. Bayes tahmin edicisini bulabilmek için öncelikle önsel olasılık yoğunluk fonksiyonu ile olabilirlik fonksiyonu çarpılır.

$$\begin{aligned}f(\alpha, \beta, t_1, t_2, \dots, t_n) &= \Pi(\alpha, \beta) \times L(\alpha, \beta|t_1, t_2, \dots, t_n) \\ &= bcde\alpha^{b-1}\beta^{d-1}e^{-(c\alpha^b+e\beta^d)} \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{n/2}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i \right. \\ &\quad \left. + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\}\end{aligned}$$

$$= \frac{bcde}{2^n(2\pi)^{n/2}} \alpha^{b-n-1} \beta^{d-1-\frac{n}{2}} e^{-(c\alpha^b + e\beta^d)} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} \quad (54)$$

Daha sonra t 'nin marjinali her iki parametreye göre integral alınarak

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(\alpha, \beta, t_1, t_2, \dots, t_n) d\alpha d\beta \\ &= \frac{bcde}{2^n(2\pi)^{n/2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{b-n-1} \beta^{d-1-\frac{n}{2}} e^{-(c\alpha^b + e\beta^d)} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (55)$$

biçiminde bulunur. Son adımda da bunlar birbirine oranlanarak iki parametre için ortak sonsal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta | t_1, t_2, \dots, t_n) &= \frac{\frac{bcde}{2^n(2\pi)^{n/2}} \alpha^{b-n-1} \beta^{d-1-\frac{n}{2}} e^{-(c\alpha^b + e\beta^d)} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\}}{\frac{bcde}{2^n(2\pi)^{n/2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{b-n-1} \beta^{d-1-\frac{n}{2}} e^{-(c\alpha^b + e\beta^d)} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} d\alpha d\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta | t_1, t_2, \dots, t_n) &= \frac{\alpha^{b-n-1} \beta^{d-1-\frac{n}{2}} e^{-(c\alpha^b + e\beta^d)} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{b-n-1} \beta^{d-1-\frac{n}{2}} e^{-(c\alpha^b + e\beta^d)} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} d\alpha d\beta} \end{aligned} \quad (56)$$

biçiminde bulunur. Parametrelere ait sonsal marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını elde edebilmek için sırasıyla parametrelere göre integral alınır. Buna göre marjinal sonsal olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$f_1(\alpha | t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_0^\infty f(\alpha, \beta | t_1, t_2, \dots, t_n) d\beta$$

$$= \int_0^\infty \frac{\alpha^{b-n-1} \beta^{d-1-\frac{n}{2}} e^{-(c\alpha^b + e\beta^d)} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i + \beta}{t_i} - 2\right)\right\}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{b-n-1} \beta^{d-1-\frac{n}{2}} e^{-(c\alpha^b + e\beta^d)} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i + \beta}{t_i} - 2\right)\right\} d\alpha d\beta} d\beta \quad (57)$$

$$f_2(\beta|t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_0^\infty f(\alpha, \beta|t_1, t_2, \dots, t_n) d\alpha$$

$$= \int_0^\infty \frac{\alpha^{b-n-1} \beta^{d-1-\frac{n}{2}} e^{-(c\alpha^b + e\beta^d)} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i + \beta}{t_i} - 2\right)\right\}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{b-n-1} \beta^{d-1-\frac{n}{2}} e^{-(c\alpha^b + e\beta^d)} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i + \beta}{t_i} - 2\right)\right\} d\alpha d\beta} d\alpha \quad (58)$$

biçiminde elde edilir. Karesel kayıp fonksiyonu altında Bayes tahmin edicileri daha önce ifade edildiği gibi bu dağılımların beklenen değerleri olacaktır. Buna göre, beklenen değerler,

$$\hat{\alpha} = E(\alpha|t_1, t_2, \dots, t_n) =$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha^{b-n} \beta^{d-1-\frac{n}{2}} e^{-(c\alpha^b + e\beta^d)} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i + \beta}{t_i} - 2\right)\right\}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{b-n-1} \beta^{d-1-\frac{n}{2}} e^{-(c\alpha^b + e\beta^d)} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i + \beta}{t_i} - 2\right)\right\} d\alpha d\beta} d\beta d\alpha$$

ve

$$\hat{\beta} = E(\beta|t_1, t_2, \dots, t_n) =$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha^{b-n-1} \beta^{d-\frac{n}{2}} e^{-(c\alpha^b + e\beta^d)} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i + \beta}{t_i} - 2\right)\right\}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{b-n-1} \beta^{d-1-\frac{n}{2}} e^{-(c\alpha^b + e\beta^d)} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i + \beta}{t_i} - 2\right)\right\} d\alpha d\beta} d\alpha d\beta \quad (59)$$

olarak elde edilir. Görüldüğü gibi, parametrelere ilişkin elde edilen Bayes tahmin edicilerinin kapalı formu bulunamamıştır. Yine, Bölüm 3.4.2.1' de bahsedilen yöntemler ile parametrelere ilişkin sonuç çıkarımı yapılacaktır. Simülasyon ve gerçek veri çalışmalarında, sonuç çıkarımı için Metropolis Hastings algoritması kullanılmıştır.

3.4.3 Lindley yöntemi

Bayes tahmin edicisi elde edilirken, hesaplanması gereken iki integral oranı genellikle güçlükler ortaya çıkarmaktadır. Lindley (1980) yaptığı çalışma ile, n 'in yeterince büyük olması durumunda çok parametrelili dağılımlarda zorlanılan integrallerin yaklaşık çözümünü bulmak için Lindley yaklaşımı olarak bilinen bir yöntem geliştirmiştir.

$U(\alpha, \beta)$, α ve β 'nin bir fonksiyonu olsun. Denklem (56)'yı kullanarak $U(\alpha, \beta)$ 'nin beklenen değeri,

$$\hat{U} = E(U(\alpha, \beta)|x) = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty U(\alpha, \beta) v(\alpha, \beta) L(\alpha, \beta; x) d\alpha d\beta}{\int_0^\infty \int_0^\infty v(\alpha, \beta) L(\alpha, \beta; x) d\alpha d\beta} \quad (60)$$

şeklinde elde edilir. Burada $v(\alpha, \beta)$ ortak önsel dağılım ve $L(\alpha, \beta; x)$ olabilirlik fonksiyonudur. Lindley yöntemi kullanılarak \hat{U} yaklaşık olarak aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\begin{aligned} \hat{U} \approx \{ & U(\alpha, \beta) + 0.5[u_{11}\sigma_{11} + u_{22}\sigma_{22} + 2u_1(\sigma_{11}\rho_1 + \sigma_{21}\rho_2) + 2u_2(\sigma_{12}\rho_1 + \\ & \sigma_{22}\rho_2)] + 0.5[L_{111}(u_1\sigma_{11}^2 + u_2\sigma_{11}\sigma_{12}) + L_{112}(3u_1\sigma_{11}\sigma_{12} + u_2(\sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{12}^2)) + \\ & L_{122}(u_1(\sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{12}^2) + 3u_2\sigma_{12}\sigma_{22}) + L_{222}(u_1\sigma_{12}\sigma_{22} + u_2\sigma_{22}^2)] \}_{\hat{\alpha}_{MLE}, \hat{\beta}_{MLE}} \end{aligned} \quad (61)$$

Burada $\hat{\alpha}_{MLE}$, α parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisidir. Aynı şekilde $\hat{\beta}_{MLE}$ de β parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisidir. α ve β 'nin bir fonksiyonu olan $U(\alpha, \beta)$ 'nin türevi,

$$u_1 = \frac{dU(\alpha, \beta)}{d\alpha}, \quad u_{11} = \frac{d^2 U(\alpha, \beta)}{d\alpha^2}, \quad u_2 = \frac{dU(\alpha, \beta)}{d\beta}, \quad u_{22} = \frac{d^2 U(\alpha, \beta)}{d\beta^2}, \quad u_{12} = \frac{d^2 U(\alpha, \beta)}{d\alpha d\beta}$$

ve önsel dağılımın türevi,

$$\rho_1 = \frac{dv(\alpha, \beta)}{d\alpha} \quad \rho_2 = \frac{dv(\alpha, \beta)}{d\beta}$$

olabilirlik fonksiyonunun türevleri,

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{dLnL}{d\alpha} = -\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right) \\
L_{11} &= \frac{d^2LnL}{d\alpha^2} = \frac{n}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha^4} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right) \\
L_{111} &= \frac{d^3LnL}{d\alpha^3} = -\frac{2n}{\alpha^3} + \frac{12}{\alpha^5} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right) \\
L_2 &= \frac{dLnL}{d\beta} = -\frac{n}{2\beta} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i+\beta)} - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right) \right) \\
L_{22} &= \frac{d^2LnL}{d\beta^2} = \frac{n}{2\beta^2} + \sum_{i=1}^n \frac{-1}{(t_i+\beta)^2} - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{2t_i}{\beta^3} \right) \right) \\
L_{222} &= \frac{d^3LnL}{d\beta^3} = -\frac{n}{\beta^3} + \sum_{i=1}^n \frac{2(t_i+\beta)}{(t_i+\beta)^4} - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-6t_i}{\beta^4} \right) \right) \\
L_{12} &= L_{21} = \frac{d^2LnL}{d\alpha d\beta} = \frac{1}{\alpha^3} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right) \right) \\
L_{211} &= L_{121} = L_{112} = \frac{d^3LnL}{d\alpha^2 d\beta} = \frac{-3}{\alpha^4} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right) \right) \\
L_{212} &= L_{221} = L_{122} = \frac{d^3LnL}{d\alpha d\beta^2} = \frac{1}{\alpha^3} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{2t_i}{\beta^3} \right) \right)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

olup

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \frac{1}{\det(\sigma_{ij})} \begin{bmatrix} L_{22} & -L_2 \\ -L_{21} & L_{11} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{n}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha^4} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right) \right) \left(\frac{n}{2\beta^2} + \sum_{i=1}^n \frac{-1}{(t_i+\beta)^2} - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{2t_i}{\beta^3} \right) \right) \right) - \left(\frac{1}{\alpha^3} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right) \right) \right)^2} \times \\
&\quad \begin{vmatrix} \frac{n}{2\beta^2} + \sum_{i=1}^n \frac{-1}{(t_i+\beta)^2} - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{2t_i}{\beta^3} \right) \right) & -\frac{1}{\alpha^3} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right) \right) \\ -\frac{1}{\alpha^3} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right) \right) & \frac{n}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha^4} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$T = \left(\frac{n}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha^4} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right) \right) \left(-\frac{n}{2\beta^2} + \sum_{i=1}^n \frac{-1}{(t_i+\beta)^2} - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{2t_i}{\beta^3} \right) \right) \right) - \left(\frac{1}{\alpha^3} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right) \right) \right)^2$$

$$U = \frac{n}{2\beta^2} + \sum_{i=1}^n \frac{-1}{(t_i+\beta)^2} - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{2t_i}{\beta^3} \right) \right)$$

$$V = -\frac{1}{\alpha^3} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right) \right)$$

$$W = \frac{n}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha^4} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right)$$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{U}{T} & \frac{V}{T} \\ \frac{V}{T} & \frac{W}{T} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Yukarıdaki işlem sonuçları denklem (61)'de yerine koyularak parametrelere ilişkin tahmin değerleri elde edilir.

3.4.3.1 Farklı kayıp fonksiyonları altında Lindley yaklaşımı

Bölüm 3.4.1'de bahsedilen kayıp fonksiyonları altında Bayes tahmin sonuçlarını elde etmek için Lindley yöntemi ile elde edilen sonuçlar verilecektir.

✓ Hata Kareler kayıp fonksiyonu altında Lindley yaklaşımı

Hata kareler kayıp fonksiyonu altında α 'nın Bayes tahmin edicisi,

$$u(\alpha, \beta) = \alpha \text{ alınır} \text{sa } u_1 = 1, u_2 = u_{12} = u_{21} = u_{11} = u_{22} = 0$$

$$\hat{\alpha}_{SELF} = \hat{\alpha}_{MLE} + \sigma_{11}\rho_1 + \sigma_{12}\rho_2 + \frac{1}{2}(L_{111}\sigma_{11}^2 + 3L_{112}\sigma_{11}\sigma_{12} + L_{122}(\sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{12}^2) + L_{222}\sigma_{12}\sigma_{22})$$

Hata kareler kayıp fonksiyonu altında β 'nin Bayes tahmin edicisi,

$$u(\alpha, \beta) = \beta \text{ alınırsa } u_2 = 1, u_1 = u_{12} = u_{21} = u_{11} = u_{22} = 0$$

$$\hat{\beta}_{SELF} = \hat{\beta}_{MLE} + \sigma_{21}\rho_1 + \sigma_{22}\rho_2 + \frac{1}{2}(L_{222}\sigma_{22}^2 + L_{112}(\sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{12}^2) + 3L_{122}\sigma_{12}\sigma_{22} + L_{111}\sigma_{11}\sigma_{12})$$

şeklinde elde edilir.

✓ LİNEX kayıp fonksiyonu altında Lindley yaklaşımı

$$u(\alpha, \beta) = e^{-k\alpha} \text{ alınırsa } u_1 = -ke^{-k\alpha}, u_{11} = k^2e^{-k\alpha}, u_2 = u_{12} = u_{21} = u_{22} = 0$$

$$E(e^{-k\alpha}|x) = e^{-k\alpha} + 0.5(u_{11}\sigma_{11}) + u_1(\sigma_{11}\rho_1 + \sigma_{21}\rho_2) + 0.5[L_{111}(u_1\sigma_{11}^2) + L_{112}(3u_1\sigma_{11}\sigma_{12}) + L_{122}(u_1(\sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{12}^2)) + L_{222}(u_1\sigma_{12}\sigma_{22})].$$

Linex kayıp fonksiyonu altında α 'nın Bayes tahmin edicisi,

$$\hat{\alpha}_{LİNEX} = -\frac{1}{k} \ln E(e^{-k\alpha}|x)$$

$$u(\alpha, \beta) = e^{-k\beta} \text{ alınırsa } u_2 = -ke^{-k\beta}, u_{22} = k^2e^{-k\beta}, u_1 = u_{12} = u_{21} = u_{11} = 0$$

$$E(e^{-k\beta}|x) = e^{-k\beta} + 0.5[u_{22}\sigma_{22}] + u_2(\sigma_{12}\rho_1 + \sigma_{22}\rho_2) + 0.5[L_{111}(u_2\sigma_{11}\sigma_{12}) + L_{112}(u_2(\sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{12}^2)) + L_{122}(3u_2\sigma_{12}\sigma_{22}) + L_{222}(u_2\sigma_{22}^2)].$$

Linex kayıp fonksiyonu altında β 'nin Bayes tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_{LİNEX} = -\frac{1}{k} \ln E(e^{-k\beta}|x)$$

olarak bulunmuştur.

✓ **Genelleştirilmiş Entropi kayıp fonksiyonu altında Lindley yaklaşımı**

$$u(\alpha, \beta) = \alpha^{-k} \text{ alınırsa } u_1 = -k\alpha^{-k-1}, u_{11} = k(k+1)\alpha^{-k-2}, u_2 = u_{12} = u_{21} = u_{22} = 0$$

$$\begin{aligned} E(\alpha^{-k}|x) &= \alpha^{-k} + 0.5(u_{11}\sigma_{11}) + u_1(\sigma_{11}\rho_1 + \sigma_{21}\rho_2) \\ &\quad + 0.5[L_{111}(u_1\sigma_{11}^2) + L_{112}(3u_1\sigma_{11}\sigma_{12}) + L_{122}(u_1(\sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{12}^2)) \\ &\quad + L_{222}(u_1\sigma_{12}\sigma_{22})]. \end{aligned}$$

Genelleştirilmiş Entropi kayıp fonksiyonu altında α 'nın Bayes tahmin edicisi,

$$\hat{\alpha}_{GE} = \left(E(\alpha^{-k}|x)\right)^{-\frac{1}{k}}$$

$$u(\alpha, \beta) = \beta^{-k} \text{ alınırsa } u_2 = -k\beta^{-k-1}, u_{22} = k(k+1)\beta^{-k-2}, u_1 = u_{12} = u_{21} = u_{11} = 0$$

$$\begin{aligned} E(\beta^{-k}|x) &= \beta^{-k} + 0.5[u_{22}\sigma_{22}] + u_2(\sigma_{12}\rho_1 + \sigma_{22}\rho_2) \\ &\quad + 0.5[L_{111}(u_2\sigma_{11}\sigma_{12}) + L_{112}(u_2(\sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{12}^2)) + L_{122}(3u_2\sigma_{12}\sigma_{22}) \\ &\quad + L_{222}(u_2\sigma_{22}^2)]. \end{aligned}$$

Genelleştirilmiş Entropi kayıp fonksiyonu altında β 'nin Bayes tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_{GE} = \left(E(\beta^{-k}|x)\right)^{-\frac{1}{k}}$$

olarak bulunmuştur.

✓ **Ağırlıklandırılmış Hata Kareler kayıp fonksiyonu altında Lindley yaklaşımı**

$$u(\alpha, \beta) = \alpha^{-1} \text{ alınırsa } u_1 = -\alpha^{-2}, u_{11} = 2\alpha^{-3}, u_2 = u_{12} = u_{21} = u_{22} = 0$$

$$\begin{aligned} E(\alpha^{-k}|x) &= \alpha^{-1} + 0.5(u_{11}\sigma_{11}) + u_1(\sigma_{11}\rho_1 + \sigma_{21}\rho_2) \\ &\quad + 0.5[L_{111}(u_1\sigma_{11}^2) + L_{112}(3u_1\sigma_{11}\sigma_{12}) + L_{122}(u_1(\sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{12}^2)) \\ &\quad + L_{222}(u_1\sigma_{12}\sigma_{22})]. \end{aligned}$$

Ağırlıklandırılmış Hata Kareler kayıp fonksiyonu altında α 'nın Bayes tahmin edicisi,

$$\hat{\alpha}_{WSELF} = (E(\alpha^{-1}|x))^{-1}$$

$$u(\alpha, \beta) = \beta^{-1} \text{ alınırsa } u_2 = -\beta^{-2}, u_{22} = 2\beta^{-3}, u_1 = u_{12} = u_{21} = u_{11} = 0$$

$$\begin{aligned} E(\beta^{-1}|x) &= \beta^{-1} + 0.5[u_{22}\sigma_{22}] + u_2(\sigma_{12}\rho_1 + \sigma_{22}\rho_2) \\ &\quad + 0.5[L_{111}(u_2\sigma_{11}\sigma_{12}) + L_{112}(u_2(\sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{12}^2)) + L_{122}(3u_2\sigma_{12}\sigma_{22}) \\ &\quad + L_{222}(u_2\sigma_{22}^2)]. \end{aligned}$$

Ağırlıklandırılmış Hata Kareler kayıp fonksiyonu altında β 'nin Bayes tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_{GE} = (E(\beta^{-1}|x))^{-1}$$

olarak bulunmuştur.

Bayesci sonuç çıkarımında, denklem (37), (42), (50) ve (59)'da elde edilen parametrelere ilişkin integrallerin çözümü için Lindley yaklaşımının yanında geliştirilen simülasyon yöntemleri kullanılabilir. Markov Zinciri Monte Carlo (MZMC) simülasyon yöntemleri olarak bilinen bu yöntemlerle sonsal dağılımdan büyük çapta örneklem çekilmekte ve sonuç çıkarımı yapmak için bu örneklemeler kullanılmaktadır. Parametrelerin sonuç çıkarımında MZMC yöntemlerinden Metropolis Hastings algoritması kullanılmıştır.

3.4.4 Markov Zinciri Monte Carlo yöntemleri

Bayesci sonuç çıkarımında, en büyük problem sonsal dağılımları elde edilebilmek için yüksek boyutlu integrallerin hesaplanmasıdır. Bu gibi durumlarda, karmaşık dağılımlardan simülasyon yöntemleri ile örneklem çeken MZMC yöntemleri kullanılır. İlk olarak fizikçiler tarafından kullanılan bu yöntemler, son yıllarda özellikle Bayesci istatistik alanında birçok problemin çözülmesi için yaygın olarak kullanılmaktadır.

Metropolis- Hastings ve Gibbs algoritmaları en yaygın kullanılan MZMC yöntemleridir. Bu yöntemleri kullanarak, ilgilenilen dağılımdan örneklem çekilir ve örneklem ortalamaları hesaplanır.

3.4.4.1 Metropolis algoritması

Metropolis algoritması, karışık dağılımlardan örneklem seçmek için kabul-red yöntemini kullanan bir rasgele yürüyüş algoritmasıdır. Metropolis algoritmasında istenilen dağılımdan sayı üretmek için, sayı üretmesi kolay olan $q(\cdot)$ öneri dağılımı kullanılır. Öneri dağılımı üzerindeki tek kısıt, dağılımın simetrik bir dağılım olmasıdır. Metropolis algoritmasının adımları:

1. $i = 0$ için θ^0 başlangıç noktası, $f(\theta^0|y) > 0$ şeklinde seçilir.
2. $q(\cdot|\theta^i)$ öneri dağılımı kullanılarak θ_{yeni} üretilir.
3. Kabul olasılığı, $r = \min\left\{\frac{f(\theta_{yeni}|y)}{f(\theta^i|y)}, 1\right\}$ hesaplanır.
4. $U \sim U(0,1)$ olmak üzere bir u üretilir.
5. $u < r$ ise $\theta^{i+1} = \theta_{yeni}$ kabul edilir, değilse $\theta^{i+1} = \theta^i$ olur.
6. $i = i + 1$ alınır ve $i < I$ (I belirlenen örneklem sayısı) ise 2.nci adıma dönülür, değilse durulur.

3.4.4.2 Metropolis-Hastings algoritması

Metropolis algoritmasından farklı olarak hem simetrik hem de simetrik olmayan öneri dağılımı kullanılabilir. Metropolis-Hastings algoritmasında kabul olasılığı olarak,

$$\alpha = \min\left(1, \frac{p(\theta^*)}{p(\theta^{t-1})} \frac{g(\theta^{t-1}|\theta^*)}{g(\theta^*|\theta^{t-1})}\right)$$

kullanır (Metropolis vd., 1953, Hastings, 1970, Peskun, 1973).



4. UYGULAMA ÇALIŞMALARI

4.1 Simülasyon Çalışması

Bu bölümde Matlab programı yardımıyla bir simülasyon programı yazılarak 100 deneme (N) yapılmış ve Birnbaum-Saunders dağılımının parametrelerinin en çok olabilirlik yöntemi ve Bayesci tahmin yöntemiyle elde edilen tahmin sonuçları karşılaştırılmıştır. Örneklem büyüklüğü ($n=30, 60, 90, 120, 150$ veya $20, 50, 80, 110, 140$) olarak seçilmiştir. Her bir örneklem büyüklüğü için farklı α ve β değerleri alınarak örnekler simülasyon yardımıyla üretilmiştir.

4.1.1 Simülasyon çalışması (α parametresinin bilinmediği durum)

Bayesci sonuç çıkarımında kullanılan Metropolis-Hastings yönteminde, β parametresinin bilindiği durumda, denklem (32)'de verilen Üstel dağılım bilgisi α parametresi için önsel dağılım bilgisi olarak alınmıştır. Simülasyon çalışmasında sayı üretilirken $\beta = 2, 3$ alınmıştır ve $\alpha = 2, 3, 4$ değerleri alınarak örnekler üretilmiştir ve önsel dağılım parametresi $a = 2, 3$ farklı değerler alınarak seçilmiştir.

En çok olabilirlik ve Bayesci tahmin yöntemlerine göre elde edilen tahmin sonuçlarının performanslarını karşılaştırmak hata kareler ortalaması ölçütü olarak seçilmiştir. Buna göre seçilen ölçüt,

$$HKO_{\alpha} = \sum_{i=1}^N \frac{(\alpha_i - \hat{\alpha})^2}{N}$$

biçiminde hesaplanmıştır. Buna göre $\beta = 2$ alındığı durum için simülasyon sonuçları çizelge 4.1'de verilmiştir.

Çizelge 4.1 $\beta=2$ iken α Parametresi için Tahmin Sonuçları

Parametre Değerleri	Üstel Dağılım Parametre Değeri	En Çok Olabilirlik Yöntemi			Bayes Yöntemi (MCMC)	
		n	$\hat{\alpha}$	HKO	$\hat{\alpha}$	HKO
$\alpha = 2$	$a = 2$	20	1.934699	0.250782	1.998363	0.231449
		50	2.054508	0.129018	2.033861	0.125208
		80	2.098776	0.092329	2.080907	0.092096
		110	2.066976	0.092274	2.061408	0.092074
		140	1.965142	0.020218	1.972280	0.015175
$\alpha = 3$	$a = 2$	20	3.15453	0.99804	3.118379	0.998006
		50	2.861992	0.095618	2.864611	0.098309
		80	2.939394	0.051118	2.955202	0.050374
		110	3.040402	0.082894	3.040774	0.088320
		140	2.993526	0.086539	2.995558	0.085924
$\alpha = 3$	$a = 3$	20	2.904542	0.69309	2.969700	0.678503
		50	2.973064	0.247188	2.988316	0.246707
		80	3.032729	0.210132	3.031856	0.204851
		110	2.85384	0.288485	2.856617	0.285246
		140	3.022283	0.103004	3.028646	0.103738
$\alpha = 4$	$a = 3$	20	4.170403	0.622088	4.163655	0.603457
		50	3.990946	0.177261	3.999454	0.176209
		80	3.99883	0.171268	3.994796	0.174705
		110	3.926753	0.183338	3.929831	0.146903
		140	4.034498	0.098192	4.029779	0.098492

Yukarıdaki tabloya bakıldığında $\beta = 2$ alındığında α parametresine ilişkin tahminlerin gerçek değerlere oldukça yakın oldukları görülmektedir. MCMC yöntemi kullanılarak elde edilen Bayes tahmin sonuçlarının en çok olabilirlik tahmin yöntemine göre gerçek değerlere daha yakın olduğu görülmüştür. Örneklem değeri arttıkça iki tahmin yöntemi için α parametresine ilişkin hata kareler ortalaması azalmıştır.

$\beta = 3$ alındığı durum için simülasyon sonuçları çizelge 4.2' de verilmiştir.

Çizelge 4.2 $\beta=3$ iken α Parametresi için Tahmin Sonuçları

Parametre Değerleri	Üstel Dağılım Parametre Değeri	n	En Çok Olabilirlik Yöntemi		Bayes Yöntemi (MCMC)	
			$\hat{\alpha}$	HKO	$\hat{\alpha}$	HKO
$\alpha = 4$	$a = 2$	20	4.227134	2.208847	4.205699	2.103049
		50	4.003215	0.709676	4.00838	0.717761
		80	4.062075	0.479365	4.025054	0.449127
		110	4.016549	0.322810	4.023646	0.318796
		140	3.982344	0.247209	3.991558	0.238239
$\alpha = 2$	$a = 3$	20	1.948167	0.171807	1.948798	0.177146
		50	1.965586	0.317869	1.973873	0.282281
		80	1.983578	0.043585	2.006691	0.044263
		110	1.997484	0.035881	1.997480	0.034051
		140	2.062039	0.034961	2.053680	0.034001
$\alpha = 3$	$a = 3$	20	3.155570	0.88818	3.15374	0.880528
		50	2.921375	0.205111	2.939810	0.193779
		80	3.070569	0.192867	3.058169	0.187338
		110	3.096695	0.15823	3.099727	0.151430
		140	3.075503	0.150260	3.035406	0.149748

Yukarıdaki tabloya bakıldığında $\beta = 3$ alındığında α parametresine ilişkin tahminlerin gerçek değerlere oldukça yakın oldukları görülmektedir. MCMC yöntemi kullanılarak elde edilen Bayes tahmin sonuçlarının en çok olabilirlik tahmin yöntemine göre gerçek değerlere daha yakın olduğu görülmüştür. Örneklem değeri arttıkça iki tahmin yöntemi için α parametresine ilişkin hata kareler ortalaması azalmıştır.

4.1.2 Simülasyon çalışması (Üstel dağılım önseli kullanıldığı durum)

Bayesci sonuç çıkarımında kullanılan Lindley yaklaşımı ve Metropolis-Hastings yönteminde, denklem (43)'te verilen Üstel dağılım bilgisi α ve β parametreleri için önsel dağılım bilgisi olarak alınmıştır. Simülasyon çalışmasında sayı üretilirken $\alpha = 2$ iken $\beta = 3, 4, 5$ değerleri alınarak örnekler üretilmiştir ve önsel dağılımların parametreleri b ve c farklı değerler alınarak seçilmiştir.

En çok olabilirlik ve Bayesci tahmin yöntemlerine göre elde edilen tahmin sonuçlarının performanslarını karşılaştırmak hata kareler ortalaması ölçütü olarak seçilmiştir. Buna göre seçilen ölçüt,

$$\mathbf{HKO}_{\alpha} = \sum_{i=1}^N \frac{(\alpha_i - \hat{\alpha})^2}{N}, \quad \mathbf{HKO}_{\beta} = \sum_{i=1}^N \frac{(\beta_i - \hat{\beta})^2}{N}$$

biçiminde hesaplanmıştır. Buna göre simülasyon sonuçları çizelge 4.3' te verilmiştir.

Çizelge 4.3 $\alpha=1,2,3$ ve $\beta=3,4,5$ için simülasyon sonuçları

Parametre Değerleri	Bayes için Üstel Dağılım Parametre Değeri	n	En Çok Olabilirlik Yöntemi				Bayes Yöntemi (Lindley Yaklaşımı)				Bayes Yöntemi (MCMC)			
			$\hat{\alpha}$	HKO	$\hat{\beta}$	HKO	$\hat{\alpha}$	HKO	$\hat{\beta}$	HKO	$\hat{\alpha}$	HKO	$\hat{\beta}$	HKO
$\alpha = 2$ $\beta = 2$	$b = 2$ $c = 2$	30	2.158785	0.33924	1.77646	0.179839	2.23067	0.57149	1.881563	0.210345	2.222934	0.40695	1.86366	0.161796
		60	2.09629	0.12379	1.921177	0.029867	2.15988	0.377179	1.930417	0.027180	2.123258	0.119968	1.95351	0.02699
		90	1.881995	0.10028	2.031276	0.025697	1.92935	0.11789	2.156669	0.09259	1.90228	0.101718	2.05994	0.027238
		120	1.970187	0.06561	1.976119	0.010143	1.938596	0.184097	2.110401	0.049727	1.984213	0.062772	2.00964	0.011572
		150	1.924531	0.04929	2.038896	0.018710	1.946319	0.070366	2.083584	0.026779	1.926706	0.052650	2.05708	0.021739
$\alpha = 2$ $\beta = 3$	$b = 2$ $c = 2$	30	2.400706	0.39530	3.037595	0.204523	2.23812	0.831429	3.195697	0.21205	2.448543	0.475181	3.19569	0.253289
		60	1.871809	0.12269	3.051635	0.044700	1.970978	0.141041	3.058414	0.043950	1.91065	0.127194	3.03491	0.041581
		90	1.997197	0.13914	2.99381	0.021610	2.071161	0.16807	3.002162	0.021139	2.004144	0.14077	3.03066	0.02125
		120	2.110646	0.12269	2.90218	0.03648	2.20052	0.20707	2.90561	0.03562	2.037128	0.114106	2.93396	0.031769
		150	2.128397	0.04451	2.97678	0.02774	2.184257	0.06654	2.98139	0.02709	2.124883	0.043125	2.99195	0.026884

Çizelge 4.3 $\alpha=1,2,3$ ve $\beta=3,4,5$ için simülasyon sonuçları (devamı)

Parametre Değerleri	Bayes için Üstel Dağılım Parametre Değeri	n	En Çok Olabilirlik Yöntemi				Bayes Yöntemi (Lindley Yaklaşımı)				Bayes Yöntemi (MCMC)			
			$\hat{\alpha}$	HKO	$\hat{\beta}$	HKO	$\hat{\alpha}$	HKO	$\hat{\beta}$	HKO	$\hat{\alpha}$	HKO	$\hat{\beta}$	HKO
$\alpha = 2$ $\beta = 4$	$b = 2$ $c = 2$	30	2.09584	0.17887	3.98898	0.23238	2.34269	0.42264	3.99672	0.22992	2.16305	0.22125	4.13179	0.29340
		60	2.12474	0.43399	3.992156	0.11550	2.261913	0.651866	4.005209	0.11878	2.15610	0.457469	4.07827	0.140989
		90	2.084774	0.09407	3.91569	0.07582	2.15501	0.126813	3.917498	0.07556	2.110789	0.11155	3.96734	0.075243
		120	2.05506	0.07923	3.85183	0.097357	2.10831	0.09941	3.85334	0.09673	2.07583	0.08470	3.90494	0.086324
		150	2.00577	0.02582	3.87475	0.09939	2.043582	0.030807	3.87586	0.09869	2.01207	0.02515	3.91378	0.093195
$\alpha = 2$ $\beta = 3.5$	$b = 2$ $c = 2$	30	2.08439	0.19416	3.415573	0.171046	2.054329	0.177326	3.431330	0.162598	2.031109	0.172529	3.47897	0.154201
		60	1.94664	0.14332	3.428091	0.051754	1.944999	0.164946	3.43204	0.050531	1.969052	0.122304	3.48235	0.04944
		90	1.915835	0.08108	3.448599	0.05373	1.981490	0.09012	3.451145	0.05536	1.939135	0.051324	3.48699	0.052926
		120	2.05988	0.06346	3.56118	0.056172	2.10491	0.056172	3.56363	0.055761	2.05446	0.052407	3.51087	0.054777
		150	2.032170	0.05215	3.498322	0.052674	2.086053	0.05112	3.49144	0.05116	2.047216	0.050618	3.49686	0.050604

Yukarıdaki tabloya bakıldığında tahminlerin gerçek değerlere oldukça yakın oldukları görülmektedir. MZMC yöntemi kullanılarak elde edilen Bayesci tahminlerin diğer tahmin yöntemlerine göre gerçek değerlere daha yakın olduğu görülmüştür. Örneklem sayısı arttıkça her bir parametreye ilişkin hata kareler ortalamasının düştüğü görülmüştür. Lindley yaklaşımı ile hesaplama yapılırken parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri kullanıldığından, bu yöntemle bulunan sonuçlar en çok olabilirlik yöntemi ile elde edilen sonuçlara yakın olarak elde edilmiş ve küçük örneklerde hata kareler ortalamasının oldukça büyük çıktığı görülmüştür.

4.1.3 Simülasyon çalışması (Weibull dağılım önseli kullanıldığı durum)

Bayesci sonuç çıkarımında kullanılan Metropolis-Hastings yönteminde, bilinmeyen α ve β parametreleri için denklem (52)'de verilen Weibull dağılım bilgisi önsel dağılım olarak alınmıştır. Simülasyon çalışmasında sayı üretilirken $\alpha = 2, 3$ iken $\beta = 2, 3, 4$ değerleri alınarak örnekler üretilmiştir ve önsel dağılımların parametreleri $b = 2, 3$, $c = 2$, $d = 2, 3$ ve $e = 2$ olarak seçilmiştir.

En çok olabilirlik ve Bayesci tahmin yöntemlerine göre elde edilen tahmin sonuçlarının performanslarını karşılaştırmak hata kareler ortalaması ölçütü olarak seçilmiştir. Buna göre seçilen ölçüt,

$$\mathbf{HKO}_\alpha = \sum_{i=1}^N \frac{(\alpha_i - \hat{\alpha})^2}{N}, \quad \mathbf{HKO}_\beta = \sum_{i=1}^N \frac{(\beta_i - \hat{\beta})^2}{N}$$

biçiminde hesaplanmıştır. Buna göre simülasyon sonuçları çizelge 4.4' te verilmiştir.

Çizelge 4.4 $\alpha=2,3$ ve $\beta=2,3,4$ için simülasyon sonuçları

Parametre Değerleri	Bayes için Weibull Parametre Değerleri	En Çok Olabilirlik Yöntemi				Bayes Yöntemi (MCMC)				
		n	$\hat{\alpha}$	HKO	$\hat{\beta}$	HKO	$\hat{\alpha}$	HKO	$\hat{\beta}$	HKO
$\alpha = 3$ $\beta = 2$	$b = 3$ $c = 2$ $d = 3$ $e = 2$	30	3.08579	0.26934	1.99443	0.05485	3.07577	0.15512	2.04345	0.07656
		60	3.03742	0.70627	1.99325	0.02874	3.03863	0.51415	2.06431	0.03824
		90	3.13016	0.18882	1.95764	0.01911	3.12260	0.16732	2.00224	0.01969
		120	3.04741	0.14256	1.92632	0.02425	3.06985	0.12775	1.96017	0.01950
		150	3.02507	0.05637	1.98625	0.02062	3.02336	0.04770	1.99045	0.01989
$\alpha = 2$ $\beta = 2$	$b = 2$ $c = 2$ $d = 2$ $e = 2$	30	1.79982	0.10538	1.87558	0.06171	1.85199	0.06445	1.97310	0.04458
		60	2.01539	0.08621	1.9064	0.02652	2.02285	0.06848	1.94479	0.02029
		90	2.01919	0.01141	1.93963	0.02394	2.02919	0.01394	1.95835	0.02319
		120	1.98660	0.09551	1.92169	0.01291	1.98516	0.07564	1.95077	0.00976
		150	1.98262	0.04812	1.89361	0.02069	1.99299	0.04607	1.91302	0.01672
$\alpha = 2$ $\beta = 4$	$b = 2$ $c = 2$ $d = 2$ $e = 2$	30	1.92116	0.39307	3.97378	0.35078	1.89396	0.23532	3.75580	0.24457
		60	1.97497	0.10469	3.87315	0.03576	1.97969	0.07453	3.78074	0.06479
		90	2.05860	0.20913	3.92807	0.14959	2.06003	0.18098	3.86824	0.13457
		120	2.12592	0.07617	4.07445	0.05179	2.13523	0.07655	4.01717	0.04033
		150	2.18780	0.17746	3.98655	0.03411	2.18162	0.15152	3.96037	0.03081
$\alpha = 2$ $\beta = 3$	$b = 3$ $c = 3$ $d = 3$ $e = 3$	30	2.08467	0.15957	2.99125	0.12782	2.07681	0.09413	3.00839	0.08186
		60	2.08980	0.40785	2.99162	0.06515	2.06457	0.27375	2.98194	0.06235
		90	2.08857	0.09504	2.93631	0.04281	2.08798	0.08632	2.93596	0.04714
		120	2.04708	0.07649	2.8888	0.05481	2.05511	0.06822	2.89518	0.05215
		150	2.01164	0.02651	2.83023	0.06185	2.02116	0.02175	2.82924	0.06439

Yukarıdaki tabloya bakıldığında tahminlerin gerçek değerlere oldukça yakın oldukları görülmektedir. MZMC yöntemi kullanılarak elde edilen Bayes tahmin sonuçlarının en çok olabilirlik tahmin yöntemine göre gerçek değerlere daha yakın olduğu görülmüştür. Örneklem sayısı arttıkça, her bir parametreye ilişkin hata kareler ortalamasının düştüğü görülmüştür.

4.1.4 Simülasyon çalışması (Farklı kayıp fonksiyonları altında Bayesci sonuç çıkarımı)

Bu kısımda, Bölüm 3.4.1. 'de anlatılan kayıp fonksiyonları göz önüne alınarak parametre tahminleri yapılmıştır. Bayesci sonuç çıkarımında, α ve β parametreleri için önsel dağılım bilgisi olarak denklem (43) ile verilen Üstel dağılımlar alınmıştır. Bunun için, α şekil parametresi 2 olarak alındığı durumda Birnbaum- Saunders dağılımından $n = 40, 70, 100, 130, 160$ birimlik örneklem farklı ölçek parametresi $\beta = 2, 3, 4, 5$ değerleri için üretilmiştir. Linex ve Genelleştirilmiş Entropi Kayıp Fonksiyonundaki k değeri literatür taraması sonucunda 1 olarak alınmıştır. Hangi kayıp fonksiyonunun daha iyi sonuç verdiğini görebilmek için 100 deneme (N) yapılmış ve karşılaştırma yapmak için hata kareler ortalaması (HKO) ölçüt olarak kullanılmıştır. Buna göre seçilen ölçüt,

$$\mathbf{HKO}_{\alpha} = \sum_{i=1}^N \frac{(\alpha_i - \hat{\alpha})^2}{N}, \quad \mathbf{HKO}_{\beta} = \sum_{i=1}^N \frac{(\beta_i - \hat{\beta})^2}{N}$$

biçiminde hesaplanmıştır. Simülasyon sonuçları çizelge 4.5' te verilmiştir.

Çizelge 4.5 α ve β parametresinin farklı değerleri için çeşitli kayıp fonksiyonları altında elde edilen simülasyon sonuçları

Parametre Değerleri	Kayıp Fonksiyonları																
	n	Hata Kareler				Ağırlıklandırılmış Hata Kareler				Entropi				Linex			
		$\hat{\alpha}$	HKO	$\hat{\beta}$	HKO	$\hat{\alpha}$	HKO	$\hat{\beta}$	HKO	$\hat{\alpha}$	HKO	$\hat{\beta}$	HKO	$\hat{\alpha}$	HKO	$\hat{\beta}$	HKO
$\alpha = 2$ $\beta = 4$	40	2.0141	0.2705	3.9106	0.2444	2.0609	2.3714	3.8538	13.9408	2.0252	2.2768	3.8538	13.9408	2.0319	3.5419	3.8078	15.8044
	70	2.0419	0.0878	3.9126	0.0886	2.0113	2.2649	3.9126	13.0106	1.9413	2.2106	3.8538	13.0106	2.0017	3.4796	3.8733	15.8041
	100	2.0675	0.1411	3.9594	0.0878	2.0306	2.2478	3.9385	13.0335	2.0727	2.3074	3.9385	13.0335	2.0185	3.4349	3.9199	15.8016
	130	2.0901	0.0657	3.9079	0.0707	2.0697	2.3042	3.8990	13.0365	2.0282	2.2741	3.8990	13.0365	2.028	3.4087	3.8917	15.8000
	160	2.0428	0.0225	3.9861	0.0625	2.0385	2.2796	3.9696	13.0284	2.0081	2.2572	3.9696	13.0284	2.0335	3.3939	3.9535	15.7498
$\alpha = 2$ $\beta = 3$	40	2.1705	0.2059	2.9226	0.1738	2.0400	2.3029	2.8776	7.0378	1.8944	2.1883	2.9331	7.0374	2.0170	3.4916	2.9584	8.659
	70	2.0178	0.2037	3.0114	0.0671	1.9335	2.2134	2.9874	7.1045	1.8586	2.1506	2.9874	7.1040	1.9259	3.4423	2.9874	8.6974
	100	2.1025	0.0862	3.0053	0.0422	2.0789	2.3114	2.9899	7.1056	2.0152	2.2654	2.9889	7.1052	2.0682	3.4115	2.9841	8.6961
	130	1.9676	0.0833	2.9068	0.0485	1.9534	2.2172	2.900	7.0506	1.9499	2.2194	2.9001	7.0507	1.9502	3.4026	2.9003	8.6731
	160	2.1061	0.0859	2.9028	0.0468	2.0762	2.2093	2.8858	7.0416	2.0300	2.2157	2.8794	7.0416	2.0669	3.4008	2.8794	8.6663

Çizelge 4.5 α ve β parametresinin farklı değerleri için çeşitli kayıp fonksiyonları altında elde edilen simülasyon sonuçları (devamı)

Parametre Değerleri	Kayıp Fonksiyonları																
	n	Hata Kareler				Ağırlıklandırılmış Hata Kareler				Entropi				Linex			
		$\hat{\alpha}$	HKO	$\hat{\beta}$	HKO	$\hat{\alpha}$	HKO	$\hat{\beta}$	HKO	$\hat{\alpha}$	HKO	$\hat{\beta}$	HKO	$\hat{\alpha}$	HKO	$\hat{\beta}$	HKO
$\alpha = 2$ $\beta = 5$	40	2.0674	0.4218	4.9243	0.3798	2.0251	2.2892	4.9463	22.9798	1.9867	2.2111	4.9463	22.9798	2.0079	3.4862	4.9422	24.913
	70	2.0115	0.1892	4.9395	0.1201	2.0145	2.2797	4.9157	22.0172	1.9605	2.2377	4.9157	22.0172	2.0174	3.4802	4.9821	24.904
	100	1.9949	0.1354	4.9428	0.0951	1.9473	2.2158	4.9242	22.0106	1.9133	2.1884	4.9242	22.0106	1.9405	3.4477	4.8979	24.9025
	130	2.0826	0.0642	4.9433	0.0714	2.0611	2.1978	4.92934	22.0126	2.0298	2.1751	4.9293	22.0126	2.0554	3.4051	4.9094	24.906
	160	1.9596	0.0602	4.9516	0.0531	1.9304	2.1015	4.9519	22.0103	1.9093	2.1744	4.9519	22.0103	1.9295	3.4016	4.9263	24.908
$\alpha = 2$ $\beta = 2$	40	2.1402	1.2428	2.0998	0.4795	2.1407	2.4049	2.1484	2.3769	1.9702	2.2346	2.1484	2.3769	2.0866	3.5332	2.1515	3.5551
	70	1.9881	1.6929	2.0675	0.3762	1.9669	2.2052	2.0661	2.6063	2.0135	2.2183	2.0661	2.6063	1.9514	3.3387	2.1836	3.5593
	100	2.0713	0.9561	2.0822	0.3942	1.9519	2.2014	2.0895	2.4108	2.0026	2.2087	2.0896	2.4108	1.9377	3.4633	2.0952	3.5259
	130	2.1041	0.3114	2.0232	0.1382	2.0466	2.2032	2.0056	2.2617	2.0209	2.2012	2.0056	2.2617	2.0311	3.4576	2.0044	3.4814
	160	2.0767	0.1315	1.9819	0.0199	2.0553	2.1650	1.9764	2.2333	2.0663	2.2015	1.9764	2.2333	2.0409	3.4452	1.9756	3.4648

Çizelge 4.5'te elde edilen sonuçlara göre; farklı α ve β parametre değerlerine ilişkin bütün durumlarda Hata Kareler kayıp fonksiyonu için hata kareler ortalaması (HKO) değerlerinin daha düşük olduğu görülmektedir. Buna göre, aynı α ve β parametre değerleri için örneklem sayısı arttıkça, her bir parametreye ilişkin hata kareler ortalamasının düştüğü görülmüştür. Genelleştirilmiş Entropi Kayıp fonksiyonunun k değeri 1 alındığı durumda parametrelere ilişkin parametre değerleri ve hata kareler ortalaması değerleri Ağırlıklandırılmış Hata Kareler kayıp fonksiyonu ile benzer sonuçlar verdiği görülmüştür.

4.2 Gerçek Veri Uygulamaları

Bu bölümde bir önceki bölümden farklı olarak gerçek veri seti üzerine uygulama çalışması yapılmıştır.

4.2.1 Gerçek veri uygulaması-1

Gerçek veri çalışmasında, Birnbaum ve Saunders'un 1969 yılında yaptıkları çalışmada kullandıkları veri seti kullanılmıştır. Bu veriler saniyede 18 döngüde salınım yapan 6061-T6 Alüminyum kalıplarının yorulma ömrüne ilişkindir. 31,000 psi basınca maruz kalan alüminyum kalıplarının yorulma ömürlerine ilişkin değerleri içeren 101 adet gözlem aşağıda yer almaktadır.

31,000 psi basınca maruz kalan alüminyum kalıplarının yorulma ömürleri

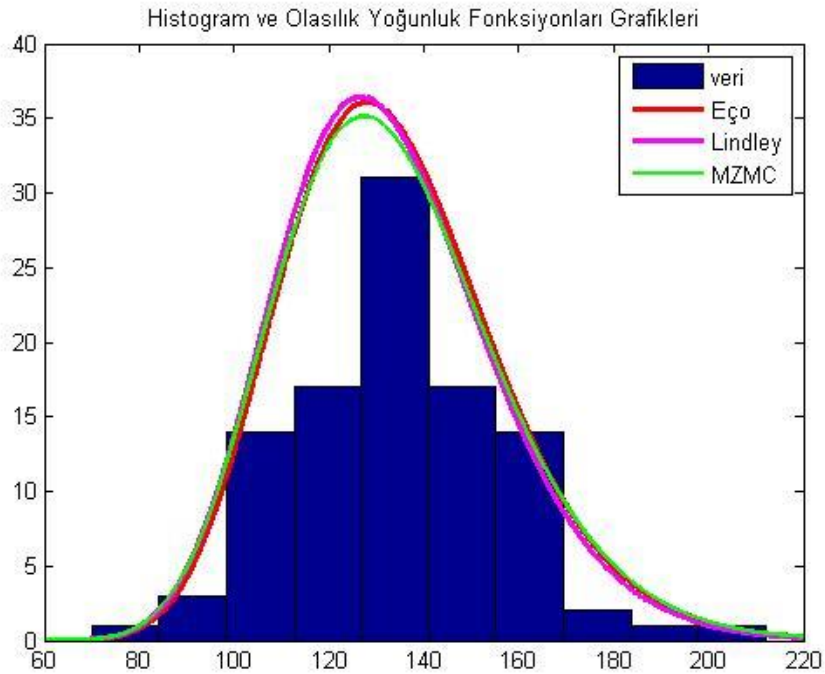
70	90	96	97	99	138	138	139	139
100	103	104	104	105	141	142	142	142
107	108	108	108	109	142	142	144	144
109	112	112	113	114	146	148	148	149
114	114	116	119	120	151	152	155	156
120	120	121	121	123	157	157	157	
124	124	124	124	124	162	163	163	
128	128	129	129	130	166	168	170	
130	130	131	131	131	212	151	196	
131	131	132	132	132	141	157	158	
133	134	134	134	134	142	159	164	
134	136	136	137	138	145	166	174	

Yukarıdaki veriler için program çalıştırılmış ve tahmin sonuçları çizelge 4.6'da verilmiştir.

Çizelge 4.6 31,000 psi basınca maruz kalan alüminyum kalıplarının yorulma ömürlerine ilişkin parametre tahmin sonuçları

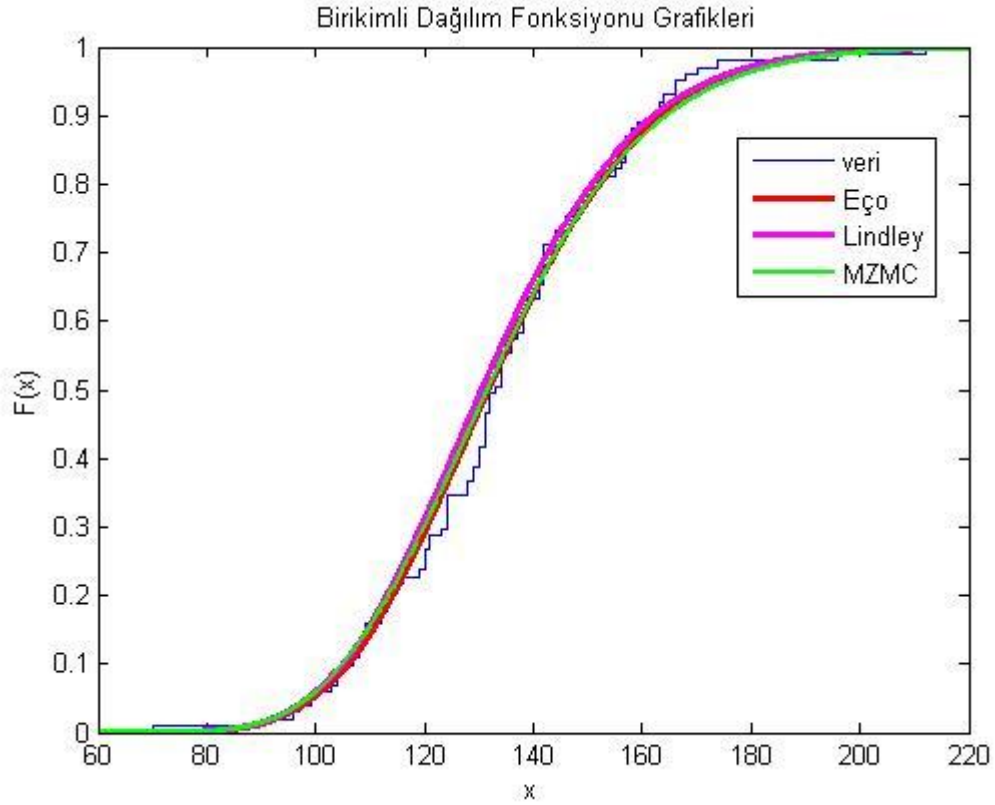
EÇO		Bayes (Lindley)		Bayes(MCMC)	
$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
131.818792	0.170385	130.545722	0.170381	131.403263	0.171470

Sonuçlara bakıldığında, en çok olabilirlik yöntemi, MZMC kullanılarak elde edilen Bayes ve Lindley yaklaşımı kullanılarak elde edilen Bayes tahminleri birbirine oldukça yakındır. Ayrıca $\hat{\beta}$ için EÇO ve Lindley yaklaşımı benzer tahmin değerini elde edilmiştir. Elde edilen bu tahmin sonuçlarının modele uygunluğunu görebilmek için verilerin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve birikimli dağılım fonksiyonlarına ilişkin grafikler şekil 4.1 ve şekil 4.2'de verilmiştir.



Şekil 4.1 Histogram ve tahminlere ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonları

Şekil 4.1'deki grafikler birbirleri ile ve 31,000 psi basınca maruz kalan alüminyum kalıplarının yorulma ömürleri verisine ilişkin histogram ile uyumlu oldukları görülmektedir.



Şekil 4.2 Ampirik dağılım ve tahminlere ilişkin birikimli dağılım fonksiyonları

Grafiklere bakıldığında kullanılan tahmin edici yöntemlerinin üçünün de birbirine yakın sonuçlar verdiği görülmektedir.

4.2.2. Gerçek veri uygulaması -2

Araba verisi orijinalinde 23 Mart 1985 Cumartesi günü İngiltere Bedfordshire'de Junction 13'e yakın sabit bir noktadan M1 otoyolu üzerinde kuzeye doğru hareket eden araçların 41 ardışık geçiş zamanını içermektedir. Veri Hand (1994) tarafından 40 ardışık olaylar arası geçen zaman olarak revize edilmiştir (Pekalp ve Aydoğdu, 2019).

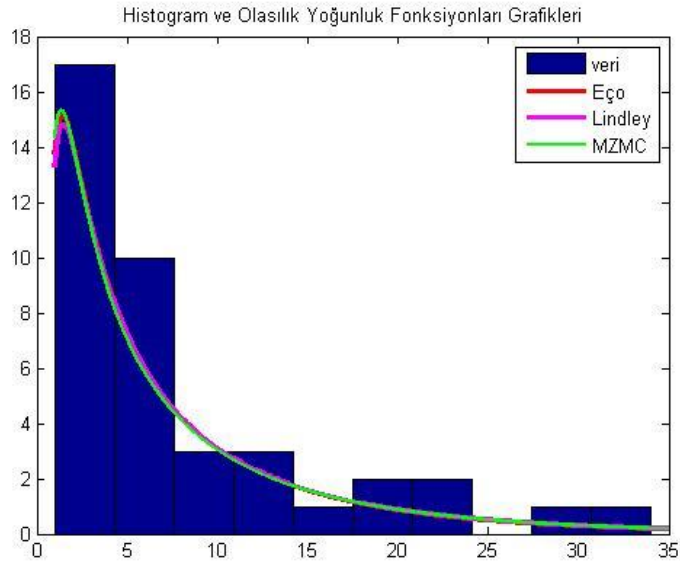
12, 2, 6, 2, 19, 5, 34, 4, 1, 4, 8, 71, 21, 6, 11, 8, 28, 6, 4, 5, 1, 18, 9, 5, 1, 21, 1, 1, 5, 3, 14, 5, 3, 4, 5, 1, 3, 16, 2

Yukarıdaki veriler için program çalıştırılmış ve tahmin sonuçları çizelge 4.7’de verilmiştir.

Çizelge 4.7 Araba verilerine ilişkin parametre tahmin sonuçları

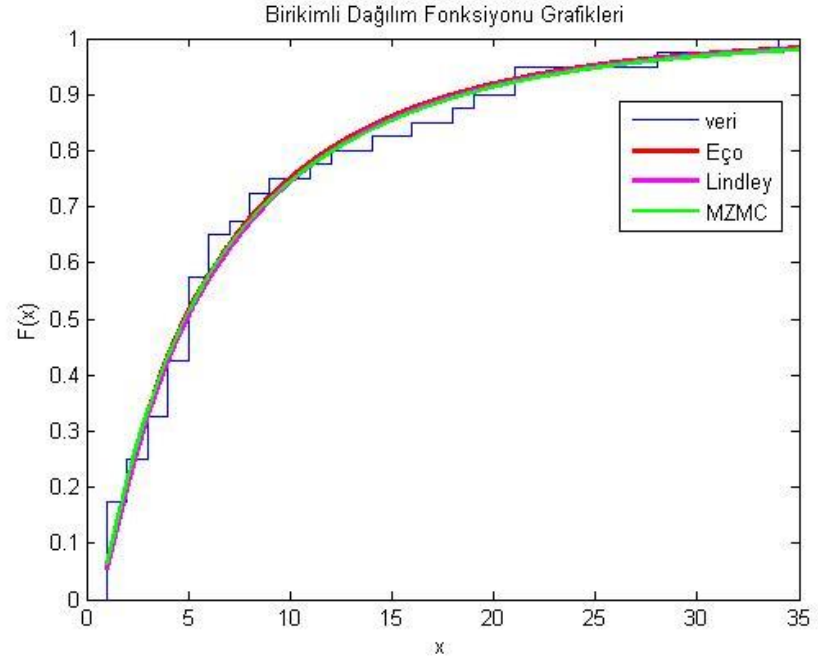
EÇO		Bayes (Lindley)		Bayes(MCMC)	
$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
4.838767	1.103873	4.837177	1.103668	4.823583	1.104123

Sonuçlara bakıldığında En çok olabilirlik yöntemi, Bayes için Lindley yaklaşımı ve MCMC yöntemleri kullanılarak elde edilen tahmin sonuçlarının birbirine yakın olduğu görülmektedir. Elde edilen bu tahmin sonuçlarının modele uygunluğunu görebilmek için verilerin olasılık yoğunluk fonksiyonları ve birikimli dağılım fonksiyonlarına ilişkin grafikler şekil 4.3 ve şekil 4.4’de verilmiştir.



Şekil 4.3 Histogram ve tahminlere ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonları

Şekil 4.3'teki grafiklerin birbirleri ile ve araba verisine ilişkin histogram grafiği ile uyumlu oldukları görülmektedir.



Şekil 4.4 Ampirik dağılım ve tahminlere ilişkin birikimli dağılım fonksiyonları

Grafiklere bakıldığında tahmin edici yöntemlerinin birbirine yakın sonuçlar verdiği görülmektedir.

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, ilk olarak Birnbaum-Saunders dağılımından genel hatları ile bahsedilmiştir. Daha sonra Birnbaum-Saunders dağılımının parametrelerini tahmin etmek için en çok olabilirlik yöntemi ve Bayes yöntemi anlatılmıştır. Bayesci sonuç çıkarımında, parametrelere ilişkin önsel dağılımlar Üstel dağılım olarak alınmış ve işlemler yapılmıştır. Bu işlemler sonucunda sonsal dağılımın kapalı formu elde edilememiş ve bu nedenle Lindley yaklaşımı ve Metropolis Hastings algoritmaları kullanılarak parametrelere ilişkin tahmin değerleri elde edilmiştir. Hata kareler ortalaması ölçütü elde edilen tahmin yöntemlerini karşılaştırmak amacıyla kullanılmıştır.

Simülasyon çalışmasında, farklı örneklem büyüklükleri ve farklı parametre değerleri için program tekrar tekrar çalıştırılarak sonuç çıkarımında bulunulmuştur. Elde edilen bu tahmin sonuçlarına göre, örneklem sayısı arttıkça tüm tahmin yöntemleri için hata kareler ortalamasının azaldığı görülmüştür. Lindley yaklaşımının hata kareler ortalamasının küçük örneklerde büyük çıktığı gözlenmiştir. Kullanılan tahmin edicilerin parametre tahmin değerleri gerçek değerlerine yakın çıkmaktadır. Lindley yaklaşımı en çok olabilirlik tahminini kullandığı için parametre tahminlerinde en çok olabilirlik tahminlerine yakın sonuçlar çıkmaktadır.

Birnbaum- Saunders dağılımına ilişkin Bayesci yöntemle elde edilen simülasyon sonuçlarına bakıldığında, Hata Kareler kayıp fonksiyonu altında elde edilen tahmin sonuçlarının gerçek değerlere daha yakın olduğu ve hata kareler ortalamasının çalışma kapsamında araştırılan diğer kayıp fonksiyonlarına göre daha düşük olduğu gözlenmiştir. Ayrıca Ağırlıklandırılmış Hata Kareler ve Genelleştirilmiş Entropinin kayıp fonksiyonlarının benzer sonuçlar verdiği görülmüştür. Sonuç olarak, Hata Kareler kayıp fonksiyonunun hemen hemen tüm durumlarda diğer kayıp fonksiyonlarına kıyasla daha iyi sonuç verdiği söylenebilir.

Gerçek veri çalışmalarında elde edilen sonuçlara göre de parametre tahmin değerlerinin birbirine yakın çıktıkları görülmektedir. Grafıklere bakıldığında elde edilen sonuçlar ile gerçek verilerin uyumlu olduğu görülmüştür.

Simülasyon ve gerçek veri sonuçlarına göre, Lindley ve Metropolis Hastings algoritmaları kullanılarak elde edilen sonuçların en çok olabilirlik yöntemine göre bulunan sonuçlara benzer çıktığı görülmüştür. Bu sonuçlara göre, Bayesci yaklaşım yönteminin en çok olabilirlik yöntemine göre iyi bir alternatif olarak kullanılabilceği söylenebilir.



KAYNAKLAR

- Achcar, A. J. 1993. Inferences for the Birnbaum-Saunders fatigue life model using Bayesian methods. *Computational Statistics & Data Analysis*, 15, 367-380.
- Ahmadi, J., Doostparast, M. ve Parsian, A. 2005. Estimation and Prediction in a Two-Parameter Exponential Distribution Based on k-Record Values under LINEX Loss Function, *Communications in Statistics–Theory and Methods*, 34(4), 795-805.
- Akdi, Y. 2011. *Matematiksel İstatistiğe Giriş*. Gazi Kitapevi, Ankara.
- Balakrishnan, N. ve Kundu, D. 2018. Birnbaum-Saunders Distribution: A Review of Models, Analysis and Applications.
- Birnbaum, W. Z. ve Saunders, S. C. 1969. Estimation for a Family of Life Distributions with Applications to Fatigue. *Journal of Applied Probability*, 6(2), 328-347.
- Costa, E., Santos-Neto, M. ve Lrvia, V. 2021. Optimal Sample Size for the Birnbaum-Saunders Distribution under Decision Theory with Symmetric and Asymmetric Loss Functions. *Journal of Symmetry*, 13(6).
- Desmond, A. 1985. Stochastic Models of Failure in Random Environments. *The Canadian Journal of Statistics*. 13, 171-183.
- Engelhardt, M., Bain, L. J. ve Wright, F. T. 1981. Inferences on the Parameters of the Birnbaum-Saunders Fatigue Life Distribution Based on Maximum Likelihood Estimation. *Journal of Technometrics*, 23(3), 251-256.
- From, S. G. ve Li, L. 2006. Estimation of the Parameters of the Parameters of the Birnbaum- Saunders Distribution. *Communications in Statistics- Theory and Methods*, 35(12), 2157-2169.
- Fuad S. A. 2021. Bayesian reliability analysis based on the Weibull model under weighted General Entropy loss function, *Alexandria Engineering Journal*, 61(1), 247-255.
- Hand, D. J. 1994. *A Hand book of small data sets*. Chapman and Hall, London.
- Hastings, W. K. 1970. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *The Journal of Biometrika*, 57(1), 97-109.
- Koç, Y. 2020. Weibull Dağılımının Parametrelerinin Bayesci Yöntemle Tahmini. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, 64, Ankara

- Levia, V., Sanhueza, A. ve Angulo, J. M. 2009. Generalized Birnbaum-Saunders distributions applied to air pollutant concentration. 23, 299-307.
- Lindley, D. 1980. Approximate Bayes Methods, University College London.
- Lu, M., Chang, D. ve Yang, S. 2022. Exact statistical inferences for the median of the Birnbaum–Saunders distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 92(3), 567-578.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A., W., Rosenbluth, M., N., Teller, A. H, ve Teller, E. 1953. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *The Journal of Chemical Physics*. 21, 1087-1092.
- Mohammadi, K., Alavi, O. ve McGowan, G. J. 2017. Use of Birnbaum-Saunders distribution for estimating wind speed and wind power probability distributions: A review. *Energy Conversion and Management*, 143, 109–122.
- Ng., H.K.T., Kundu, D. ve Balakrishnan, N. 2003. Modified moment estimation for the two-parameter Birnbaum-Saunders distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, 43, 283-298
- Pekalp M. H, Aydoğdu, H. 2019. Discriminating Between Some Lifetime Distributions in Geometric Processes. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 1-23.
- Pescim, R. R., Cordeiro, G. M., Nararajah, S., Demetrio, C. G. B. ve Ortega, E. M. M. 2014. The Kummer beta Birnbaum-Saunders: An alternative fatigue life distribution. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*. 43(3), 473-510.
- Peskun, P. H. 1973. Optimum Monte-Carlo sampling using Markov chains. *The Journal of Biometrika*. 60(3), 607-612.
- Sha, N. 2018. Statistical Inference for Progressive Stress Accelerated Life Testing with Birnbaum-Saunders Distribution. *Stats*, 1, 189–203.
- Sun, T. ve Tian, H. 2014. Anomaly Detection by Diffusion Wavelet-Based Analysis on Traffic Matrix, *Sixth International Symposium on Parallel Architectures, Algorithms and Programming*, 148.
- Wang, M., Sun, X. ve Park, C. 2016. Bayesian analysis of Birnbaum-Saunders distribution via the generalized ratio-of-uniform method. *The Journal of Computational Statistics*, 31, 207–225.
- Xu, A. ve Tang, Y. 2010. Reference analysis for Birnbaum-Saunders distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, 54, 185-192

EKLER

EK 1 Lindley Yaklaşımı Kullanılarak İntegrallerin Yaklaşık Çözümleri

EK 2 Asimptotik Normallik

EK 3 Fisher Bilgi Matrisi

EK 4 Asimptotik Güven Aralıkları



EK 1 Lindley Yaklaşımı Kullanılarak İntegrallerin Yaklaşık Çözümleri

Bilgi veren önsel kullanılması durumunda, Birnbaum-Saunders dağılımına ilişkin Lindley yaklaşımı adımları aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Üstel Önsel Bilgisi kullanıldığında,

$$g(\alpha, \beta) = ce^{-c\alpha} \times be^{-b\beta}, \quad \log(g(\alpha, \beta)) = \log c + \log b - (c\alpha + b\beta)$$

$$g_1 = \frac{d \log(g(\alpha, \beta))}{d\alpha} = -c \quad g_2 = \frac{d \log(g(\alpha, \beta))}{d\beta} = -b$$

olabilirlik fonksiyonu ve türevler,

$$L(t_i, \beta, \alpha) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^{n/2}} \left[\prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} (t_i + \beta) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Ln}L &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - n \ln(2) - n \ln(\alpha) - \frac{n}{2} \ln(\beta) - \frac{3}{2} \left(\sum_{i=1}^n \ln t_i \right) + \sum_{i=1}^n \ln(t_i + \beta) - \\ &\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \end{aligned}$$

$$L_1 = \frac{d \text{Ln}L}{d\alpha} = -\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right)$$

$$L_{11} = \frac{d^2 \text{Ln}L}{d\alpha^2} = \frac{n}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha^4} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right)$$

$$L_{111} = \frac{d^3 \text{Ln}L}{d\alpha^3} = -\frac{2n}{\alpha^3} + \frac{12}{\alpha^5} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right)$$

$$L_2 = \frac{d \text{Ln}L}{d\beta} = -\frac{n}{2\beta} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i + \beta)} - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right) \right)$$

$$L_{22} = \frac{d^2 \text{Ln}L}{d\beta^2} = \frac{n}{2\beta^2} + \sum_{i=1}^n \frac{-1}{(t_i + \beta)^2} - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{2t_i}{\beta^3} \right) \right)$$

$$L_{222} = \frac{d^3 \text{Ln}L}{d\beta^3} = -\frac{n}{\beta^3} + \sum_{i=1}^n \frac{2(t_i + \beta)}{(t_i + \beta)^4} - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-6t_i}{\beta^4} \right) \right)$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{d^2 \text{Ln}L}{d\alpha d\beta} = \frac{1}{\alpha^3} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right) \right)$$

$$L_{211} = L_{121} = L_{112} = \frac{d^3 \text{Ln}L}{d\alpha^2 d\beta} = \frac{-3}{\alpha^4} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right) \right)$$

$$L_{212} = L_{221} = L_{122} = \frac{d^3 \text{Ln}L}{d\alpha d\beta^2} = \frac{1}{\alpha^3} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{2t_i}{\beta^3} \right) \right)$$

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
G_{ij} &= \frac{1}{\det(G_{ij})} \begin{bmatrix} L_{22} & -L_2 \\ -L_{21} & L_{11} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{n}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha^4} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right) \right)} \times \\
&\quad \frac{1}{\left(\frac{n}{2\beta^2} + \sum_{i=1}^n \frac{-1}{(t_i + \beta)^2} - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{2t_i}{\beta^3} \right) \right) - \left(\frac{1}{\alpha^3} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right) \right) \right)^2 \right)} \times \\
&\quad \begin{vmatrix} \frac{n}{2\beta^2} + \sum_{i=1}^n \frac{-1}{(t_i + \beta)^2} - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{2t_i}{\beta^3} \right) \right) & -\frac{1}{\alpha^3} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right) \right) \\ -\frac{1}{\alpha^3} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right) \right) & \frac{n}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha^4} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T &= \left(\frac{n}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha^4} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right) \right) \left(-\frac{n}{2\beta^2} + \sum_{i=1}^n \frac{-1}{(t_i + \beta)^2} - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{2t_i}{\beta^3} \right) \right) \right) - \\
&\quad \left(\frac{1}{\alpha^3} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right) \right) \right)^2
\end{aligned}$$

$$U = \frac{n}{2\beta^2} + \sum_{i=1}^n \frac{-1}{(t_i + \beta)^2} - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{2t_i}{\beta^3} \right) \right)$$

$$V = -\frac{1}{\alpha^3} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right) \right)$$

$$W = \frac{n}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha^4} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right)$$

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{U}{T} & \frac{V}{T} \\ \frac{V}{T} & \frac{W}{T} \end{bmatrix}$$

$$U(\alpha, \beta) = \alpha \text{ alınırsa } U_1 = 1, U_2 = U_{12} = U_{21} = U_{11} = U_{22} = 0$$

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_{BAYES} &= \hat{\alpha}_{MLE} + G_{11}g_1 + G_{12}g_2 + \frac{1}{2}(L_{111}G_{11}^2 + 3L_{112}G_{11}G_{12} + L_{122}(G_{11}G_{22} + \\
&\quad 2G_{12}^2) + L_{222}G_{12}G_{22})
\end{aligned}$$

$$U(\alpha, \beta) = \beta \text{ alınırsa } U_2 = 1, U_1 = U_{12} = U_{21} = U_{11} = U_{22} = 0$$

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{BAYES} &= \hat{\beta}_{MLE} + G_{21}g_1 + G_{22}g_2 + \frac{1}{2}(L_{222}G_{22}^2 + L_{112}(G_{11}G_{22} + 2G_{12}^2) + \\
&\quad 3L_{122}G_{12}G_{22} + L_{111}G_{11}G_{12})
\end{aligned}$$

Burada $\hat{\alpha}_{MLE}$, α parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisidir. Aynı şekilde $\hat{\beta}_{MLE}$ de β parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisidir.

EK 2 Asimptotik Normallik

(T_n) rasgele değişkenlerin bir dizisi, \xrightarrow{d} dağılımda yakınsamayı ve Z , standart Normal dağılıma sahip bir rasgele değişkeni göstermek üzere,

$$\frac{T_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} Z$$

olacak şekilde reel sayıların (a_n) ve pozitif reel sayıların (b_n) dizileri varsa (T_n) dizisine asimptotik Normal veya daha açık olarak “ a_n ortalaması” ve “ b_n^2 varyansı” ile asimptotik Normal dizisi denir ve $T_n \sim AN(a_n, b_n^2)$ biçiminde gösterilir. Burada, a_n değeri T_n 'nin beklenen değeri ve b_n^2 değeri T_n 'nin varyansı olmayabilir. a_n ve b_n^2 sırasıyla T_n 'nin asimptotik ortalama ve asimptotik varyansdır (Akdi, 2011).

EK 3 Fisher Bilgi Matrisi

T_1, T_2, \dots, T_n örnekleme, olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x; \theta), \theta \in \mathbb{R}^n$ olan kitleden alınan n birimlik bir örneklem olsun. Bu örneklem için Fisher Bilgi Matrisi,

$$\begin{aligned} I(\theta) &= -E \left\{ \left(\frac{d}{d\theta} \log(L(\theta; x)) \right) \right\} \\ &= -E \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \theta} l(\theta) \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_p} \\ \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_2 \partial \theta_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_p \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_p \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_p^2} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır (Koç,2020).

EK 4 Asimptotik Güven Aralıkları

$\hat{\theta}$ 'nin eço tahmin edicisi bazı düzgünlük şartları altında,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, I^{-1}(\theta))$$

olmak üzere asimptotik Normaldir. Burada, $I^{-1}(\theta)$, Ek-3'te gösterilen $\hat{\theta}$ 'nin asimptotik varyans-kovaryans matrisi ve Fisher Bilgi Matrisinin tersidir. Bu matrisin bilindiği durumda, büyük örneklem için, $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p$ tahmin edicilerinin ayrı ayrı asimptotik varyanslarının bilinmesi anlamına gelmektedir. $I^{-1}(\theta)$ 'nin tutarlı tahmin edicisi,

$$\hat{I}^{-1}(\theta) = - \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \cdots \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_p} \\ \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_2^2} & \cdots \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_2 \partial \theta_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_p \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_p \partial \theta_2} & \cdots \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2} \end{array} \right]_{\theta=\hat{\theta}}^{-1}$$

dır. Buradan $\theta_i, i = 1, 2, \dots, p$ için $\hat{\theta}$ 'ya dayalı asimptotik güven aralığı,

$$P \left(\hat{\theta}_i - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{V_{ii}} < \theta_i < \hat{\theta}_i + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{V_{ii}} \right) \cong 1 - \alpha$$

şeklinde elde edilebilir. Yukarıdaki güven aralığında bulunan V_{ii} değeri Fisher Bilgi matrisinin tersinde bulunan i . diagonal elemanıdır (Koç, 2020).