

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**EĞİK KİRİŞ-KOLON YAPILARIN FARKLI SINIR ŞARTLARI ALTINDA
DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU KULLANARAK
BURKULMA ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe ÖZKAN

Uçak ve Uzay Mühendisliği Anabilim Dalı

Uçak ve Uzay Mühendisliği Programı

EYLÜL 2012

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**EĞİK KİRİŞ-KOLON YAPILARIN FARKLI SINIR ŞARTLARI ALTINDA
DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU KULLANARAK
BURKULMA ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Ayşe ÖZKAN
(511081126)**

Uçak ve Uzay Mühendisliği Anabilim Dalı

Uçak ve Uzay Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İbrahim ÖZKOL

Eylül 2012

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 511081126 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Ayşe Özkan**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**Eğik Kiriş-Kolon Yapıların Farklı Sınır Şartları Altında Diferansiyel Dönüşüm Metodu Kullanarak Burkulma Analizi**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. İbrahim ÖZKOL**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Metin Orhan KAYA**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Erol Uzal
İstanbul Üniversitesi

Teslim Tarihi : **3 Eylül 2012**
Savunma Tarihi : **26 Eylül 2012**

Babamın hatırasına ve anneme,

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında değerli görüşleriyle yol gösteren sayın hocam Prof. Dr. İbrahim Özkol'a teşekkürlerimi sunarım.

Mathematica bilgisayar programı kodlarının oluşturulmasındaki katkıları nedeniyle sayın Öğr. Gör. Dr. Aytaç Arıkoğlu'na ve giriş çizimlerinin gerçekleştirilmesindeki katkılarından dolayı sayın Öğr. Gör. Dr. Barbaros Soyer'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, eğitim hayatım boyunca kendisinden ders alarak bugünkü bilgi birikimimin oluşmasında katkı sağlayan hocalarıma teşekkürlerimi sunar, kaybettiklerimizi saygıyla anarım.

Gauss Metodu ile toplamayı orta okul çağında öğreterek matematiğin gizemli kapısını aralamamı sağlayan Felsefe Öğretmeni babam Hakkı Özkan'ı saygıyla anar; güler yüzünü, sevgisini ve desteğini hiçbir zaman benden esirgememiş olan anneme ve kardeşlerime teşekkürlerimi sunarım.

Eylül 2012

Ayşe Özkan
Uzay Mühendisi

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR	xi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xiii
ŞEKİL LİSTESİ.....	xv
ÖZET.....	xvii
SUMMARY	xxi
1. GİRİŞ	1
1.1 Tarihsel Gelişim	1
1.2 Çalışmanın Amacı	1
2. YAPI MEKANİĞİNDE ENERJİ YÖNTEMLERİ	5
2.1 Amaç	5
2.2 Elastik Şekil Değiştirme Enerjisi	5
2.2.1 Normal gerilme halinde elastik şekil değiştirme enerjisi.....	5
2.2.2 Kayma gerilmeleri halinde elastik şekil değiştirme enerjisi	6
2.2.3 Çok eksenli gerilme hali için elastik şekil değiştirme enerji	8
2.2.3.1 Eksenel yüklü bir çubuğun şekil değiştirme enerjisi.....	9
2.2.3.2 Eğilmede şekil değiştirme enerjisi	9
2.2.3.3 Burulmaya maruz dairesel tüplerin şekil değiştirme enerjisi	9
2.3 Enerji Yöntemiyle Deplasmanın Tayini.....	10
2.4 Burkulma Yükünün Tayininde Enerji Metodu.....	12
3. EKSTREMUM KAVRAMI VE VARYASYONLAR METODU.....	15
3.1 Amaç	15
3.2 Ekstreum Kavramı.....	15
3.2.1 Tek değişkenli fonksiyonlarda ekstreum	15
3.2.2 İki değişkenli fonksiyonlarda ekstreum	15
3.2.3 Bağlı maksimum minimum.....	19
3.2.4 Lagrange çarpanları yöntemi	20
3.3 Varyasyonlar Hesabı	22
3.3.1 Varyasyonlar hesabının temelleri.....	22
3.3.2 Varyasyonlar hesabının özellikleri.....	26
4. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ	29
4.1 Amaç	29
4.2 Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin Tanımı	29
4.3 Diferansiyel Dönüşüm Yönteminde Bazı Teoremler	29
5. EKSENİ EĞİK OLMAYAN KENDİ AĞIRLIĞI ETKİSİNDEKİ EULER- BERNOULLİ KİRİŞ-KOLONLARI İÇİN BURKULMA KRİTİK YÜKÜNÜN BELİRLENMESİ.....	43
5.1 Amaç	43
5.2 Düzgün Yayılı Yüke Maruz Kiriş-Kolonun Burkulma Kritik Yüğü	43
5.2.1 Ankastre-serbest mesnetli düşey kiriş-kolon	43

5.2.2 İki ucu basit mesnetli düşey kiriş-kolon.....	49
5.2.3 İki ucu basit mesnetli yatay kiriş-kolon	49
6. EĞİK EKSENLİ KENDİ AĞIRLIĞI VE DIŞ YÜK ETKİSİNDEKİ EULER-BERNOULLİ KİRİŞ-KOLONU İÇİN BURKULMA KRİTİK YÜKÜNÜN BELİRLENMESİ.....	53
6.1 Amaç.....	53
6.2 İki Ucu Basit Mesnetli Eğik Kiriş Kolon	53
6.2.1 Eğik kiriş-kolonun eksenel yöndeki yer değiştirmesi	53
6.2.2 Eğik kiriş-kolonun toplam potansiyel enerjisi	54
6.2.3 Toplam potansiyelin varyasyonu	56
6.2.4 Elastik eğrinin diferansiyel denkleminin boyusuzlaştırılması	58
6.2.5 Sınır şartlarının boyutsuz koordinatlardaki ifadeleri.....	60
6.2.6 Elastik eğrinin diferansiyel denkleminin genel çözümü	61
6.2.7 Elastik eğri denkleminin diferansiyel transform metodu (DTM) ile çözümü	61
6.2.8 Burkulma determinantı ve kökleri.....	64
6.3 Ankastre-Basit Mesnetli Eğik Kiriş Kolon.....	68
6.3.1 Toplam potansiyel ve varyasyonu.....	68
6.3.2 Elastik eğrinin diferansiyel denkleminin DTM ile çözümü.....	70
6.4 İki Ucu Ankastre Mesnetli Eğik Kiriş Kolon	75
6.4.1 Toplam potansiyel ve varyasyonu.....	75
6.4.2 Elastik eğrinin diferansiyel denkleminin DTM ile çözümü	77
6.5 Bir Ucu Ankastre Mesnetli Eğik Kiriş Kolon	82
6.5.1 Toplam potansiyel ve varyasyonu.....	82
6.5.2 Sınır şartlarının boyutsuz koordinatlar türünden ifadeleri	84
6.5.3 Elastik eğrinin diferansiyel denkleminin DTM ile çözümü	85
6.6 Ağırlık ve Yük Katsayılarının Tanımı ve Bazı Analizler.....	90
6.7 Yük Katsayısı (ϕ) Ağırlık Katsayısı (β_c) Öz Değerler (X_2) Eğim Açısı (θ) ve Boyutsuz Uzunluk (L_D) Arasındaki Bağlıntılar.....	91
6.8 Kritik Yüke Yakın Zorlamanın Eğik Kiriş-Kolonda Oluşturacağı Yer Değiştirmeler	97
6.9 Özel Hal: $\theta = 0^\circ$ İçin Burkulma Analizi	102
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	107
KAYNAKLAR.....	109
EKLER.....	111
ÖZGEÇMİŞ.....	117

KISALTMALAR

DTM	: Diferansiyel Dönüşüm Metodu
A	: Ankastre Mesnet
B	: Basit Mesnet
S	: Serbest Uç
β	: Ağırlık Katsayısı
ϕ	: Yük Katsayısı
x	: Eğik Kiriş-Kolonun Tarafsız Yüzeyinde Kiriş Açıklığı Boyunca Uzanan Eksen
y	: Tarafsız Yüzeye Dik Eksen
z	: Eğik Kiriş-Kolonun Tarafsız Ekseni
Π	: Toplam Potansiyel Enerji
U	: İç Enerji
V	: Dış ve Hacim Kuvvetlerinin Potansiyel Enerjisi
F	: Tekil Kuvvet
q	: Eğik Kiriş-Kolonun Ağırlığı
θ	: Kiriş Eksenin Düşeyle Yaptığı Aç
q_s	: Çubuk Ağırlığı q'nun y Ekseni Üzerindeki Bileşeni
q_c	: Çubuk Ağırlığı q'nun x Ekseni Üzerindeki Bileşeni
W_e	: Dış ve Hacim Kuvvetlerinin İş
W_T	: Ağırlığın Teğet Doğrultusundaki Bileşenlerinin İş
W_N	: Dış Kuvvet ve Ağırlığın Kesite Normal Bileşenlerinin Yaptığı İş
Δ	: Eksenel Yer Değiştirme
E	: Young Modülü
I	: Atalet Momenti, Kesitin Tarafsız Ekseni Etrafındaki İkinci Momenti
L	: Kiriş-Kolonun Uzunluğu
δ	: Varyasyonel
ψ	: Toplam Potansiyel Enerji Fonksiyonunun İntegrantı
c	: İntegrasyon Sabiti
X	: Boyutsuz Değişken
α	: Eğik Kiriş-Kolon Parametresi
L_D	: Kiriş-Kolonun Boyutsuz Uzunluğu
a^*	: Sabit
b^*	: Kirişin Fiziksel Özelliklerine, F'ye ve c'ye Bağlı Bir Sabit
λ	: Burkulma Determinantı
n	: DTM'de Kullanılan Terim Sayısı
X_2	: Burkulma Determinantının Kökleri
$Y(k)$	: y(x)'in Diferansiyel Transformu

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 6.1 : İki ucu basit mesnetli eğik kiriş-kolonun burkulma determinantının kökleri.....	65
Çizelge 6.2 : Ankastre-basit mesnetli eğik kiriş-kolonun burkulma determinantının ilk dört kökü.	72
Çizelge 6.3 : İki ucu ankastre mesnetli eğik kiriş-kolonun burkulma determinantının kökleri.....	79
Çizelge 6.4 : Bir ucu ankastre mesnetli eğik kiriş-kolonun burkulma determinantının kökleri.....	87
Çizelge 6.5 : Farklı sınır şartlarına sahip eğik kiriş-kolonlar için kritik boyutsuz uzunluk ve kritik ağırlık katsayısı.	95
Çizelge 6.6 : Yer değiştirme davranışı incelenecek eğik kiriş-kolona ait parametreler.....	97
Çizelge 6.7 : $\phi = 0$ için β 'nin kritik değerlerinin karşılaştırılması	106
Çizelge 6.8 : $\beta = 0$ için ϕ 'nin kritik değerlerinin karşılaştırılması	106
Çizelge A.1 : Ankastre-ankastre ve ankastre-basit mesnetli eğik kiriş-kolonların sınır şartlarının diferansiyel dönüşümleri.....	112
Çizelge A.2 : Basit-basit ve ankastre-serbest mesnetli eğik kiriş-kolonların sınır şartlarının diferansiyel dönüşümleri.....	112
Çizelge C.1 : A-A ve A-B mesnetli kolon ve eğik kiriş-kolonun kritik boyu ve ağırlığı	115
Çizelge C.2 : B-B ile A-S mesnetli kolon ve eğik kiriş-kolonun kritik boyu ve ağırlığı	116

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1	: Antonov An-2 uçağı ve üzerindeki strutlar	2
Şekil 1.2	: Eğik kiriş-kolon için örnekler a) Sondaj çıkarma sistemi b) Eğimli sondaj sistemi	2
Şekil 2.1	: a) Çekmeye maruz bir eleman b) Gerilme birim uzama eğrisi	6
Şekil 2.2	: a) Diferansiyel hacim elemanına etkiyen kayma gerilmesi b) Kayma şekil değişimi	7
Şekil 3.1	: (x_0, y_0) noktasının (h,k) komşuluğu.	16
Şekil 3.2	: x eksenini etrafında döndürülmüş $y=y(x)$ eğrisi.....	22
Şekil 3.3	: $y(x)$ ve $Y(x)$ eğrisi.	23
Şekil 5.1	: Ankastre-serbest mesnetli kiriş-kolon a) Yükleme şekli b) Deforme olmuş AB elemanı ve kesit tesirleri.	43
Şekil 5.2	: Basit mesnetli kiriş-kolon a) Yükleme şekli b) Deforme olmuş AB elemanı ve kesit tesirleri	49
Şekil 6.1	: Kendi ağırlığı ve F dış yükü etkisindeki eğik kiriş-kolon	53
Şekil 6.2	: $L_D = 2$ için burkulma determinantının grafiği	66
Şekil 6.3	: $L_D = 2.8$ için burkulma determinantının grafiği.....	66
Şekil 6.4	: $X_2 = -3.04406$ değerine sağdan yaklaşırken kirişte oluşan maksimum yer değiştirme.....	67
Şekil 6.5	: $X_2 = -3.04406$ değerine soldan yaklaşırken kirişte oluşan maksimum yer değiştirme.....	67
Şekil 6.6	: Ankastre-basit mesnetli eğik kiriş-kolon.....	68
Şekil 6.7	: $L_D = 2$ için burkulma determinantının grafiği	73
Şekil 6.8	: $L_D = 2.5$ için burkulma determinantının grafiği.....	73
Şekil 6.9	: $X_2 = -7.32904$ değerine sağdan yaklaşırken kirişte oluşan maksimum yer değiştirme.....	74
Şekil 6.10	: $X_2 = -7.32904$ değerine soldan yaklaşırken kirişte oluşan maksimum yer değiştirme.....	74
Şekil 6.11	: İki ucu ankastre mesnetli eğik kiriş-kolon	75
Şekil 6.12	: $L_D = 1.9$ için burkulma determinantının grafiği.....	80
Şekil 6.13	: $L_D = 2.4$ için burkulma determinantının grafiği.....	80
Şekil 6.14	: $X_2 = -14.6187$ değerine sağdan yaklaşırken kirişte oluşan maksimum yer değiştirme.....	81
Şekil 6.15	: $X_2 = -14.6187$ değerine soldan yaklaşırken kirişte oluşan maksimum yer değiştirme.....	81
Şekil 6.16	: Bir ucu ankastre mesnetli eğik kiriş-kolon.....	82
Şekil 6.17	: $L_D = 2$ için burkulma determinantının grafiği	88
Şekil 6.18	: $L_D = 0.9$ için burkulma determinantının grafiği.....	88
Şekil 6.19	: $X_2 = -0.473869$ değerine sağdan yaklaşırken kirişte oluşan maksimum yer değiştirme.....	89
Şekil 6.20	: $X_2 = -0.473869$ değerine soldan yaklaşırken kirişte oluşan maksimum yer değiştirme.....	89

Şekil 6.21 : L_D^* ile eğik kiriş-kolonun eğim açısı θ 'nın değişimi.....	92
Şekil 6.22 : Tüm mesnet şartları için yük katsayısı ϕ 'nin boyutsuz uzunluk L_D ile değişimi	92
Şekil 6.23 : Eğik kiriş-kolonun yük katsayısı ϕ 'nin ağırlık katsayısı β_c ile değişimi	93
Şekil 6.24 : İki ucu basit mesnetli eğik kiriş-kolonun yük katsayısı ϕ ile ağırlık katsayısı β 'nin eğim açısı θ ile değişimi	94
Şekil 6.25 : Tüm mesnet şartları için öz değerlerin yük ve ağırlık katsayıları ile değişimi a) A-A b) A-B c) B-B d) A-S	96
Şekil 6.26 : Ankastre basit mesnetli eğik kiriş-kolonun $L_D = 1.6$ burkulma yük katsayısına sağdan yaklaşıldığında ($\phi \rightarrow \phi_1^+$) kirişte oluşacak yer değiştirmeler.....	97
Şekil 6.27 : Bir ucu ankastre mesnetli eğik kiriş kolonun ikinci burkulma yük katsayısına soldan yaklaşırken ($\phi \rightarrow \phi_2^-$) oluşacak yer değiştirmeler ..	98
Şekil 6.28 : Tüm mesnet şartları için birinci burkulma yük değerine soldan yaklaşırken ($F \rightarrow F_1^-$) kirişte oluşacak yer değiştirmeler	99
Şekil 6.29 : Tüm mesnet şartları için birinci burkulma yük değerine sağdan yaklaşırken ($F \rightarrow F_1^+$) kirişte oluşacak yer değiştirmeler	99
Şekil 6.30 : Tüm mesnet şartları için ikinci burkulma yük değerine soldan yaklaşırken ($F \rightarrow F_2^-$) kirişte oluşacak yer değiştirmeler	100
Şekil 6.31 : Tüm mesnet şartları için ikinci burkulma yük değerine sağdan yaklaşırken ($F \rightarrow F_2^+$) kirişte oluşacak yer değiştirmeler	100
Şekil 6.32 : Tüm mesnet şartları için üçüncü burkulma yük değerine soldan yaklaşırken ($F \rightarrow F_3^-$) kirişte oluşacak yer değiştirmeler	101
Şekil 6.33 : Tüm mesnet şartları için üçüncü burkulma yük değerine sağdan yaklaşırken ($F \rightarrow F_3^+$) kirişte oluşacak yer değiştirmeler	101
Şekil 6.34 : q ağırlığı ve tekil yük F 'nin etkisi altındaki kiriş-kolonun burkulma yük katsayıları	104
Şekil 6.35 : Düşey kolon(eğik kiriş-kolonun $\theta = 0^\circ$ özel hali) (a) $\beta>0$, $\phi>0$ (b) $\beta<0$, $\phi>0$ (c) $\beta>0$, $\phi<0$ (d) $\beta>0$, $\phi=0$ (e) $\beta=0$, $\phi>0$	105
Şekil B.1 : Farklı mesnetlere sahip eğik kiriş-kolonlar için yük katsayısı ϕ ve ağırlık katsayısı β 'nin eğim açısı θ ile değişimi (a)A-A (b)A-B	113
Şekil B.2 : Farklı mesnetlere sahip eğik kiriş-kolonlar için yük katsayısı ϕ ve ağırlık katsayısı β 'nin eğim açısı θ ile değişimi (a)B-B (b)A-S	114

EĞİK KİRİŞ-KOLON YAPILARIN FARKLI SINIR ŞARTLARI ALTINDA DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU KULLANILARAK BURKULMA ANALİZİ

ÖZET

Bu çalışmada eğik kiriş-kolon yapıların burkulma davranışı analiz edilmiştir. Yapılan analizlerde kiriş ağırlığı dikkate alınmıştır. Eğimin, çubuk boyununun ve sınır şartlarının değişimiyle eğik kiriş-kolonun burkulma davranışının nasıl etkilendiği ayrıntılı olarak incelenmiştir. Ayrıca bu tip bir yapı elemanının burkulma analizinde daha önce birçok yöntem kullanılmış olmasına rağmen Diferansiyel Transform Metodu ilk defa kullanılmıştır.

İkinci bölümde, yapı mekaniğinde enerji yöntemlerine değinilmiştir. Öncelikle tek eksenli halde normal ve kayma gerilmesi için elastik şekil değiştirme enerjisinin ifadesi, ardından çok eksenli hal için elastik şekil değiştirme enerjisinin ifadesi verilmiştir. Eğilme durumunda şekil değiştirme enerjisi belirlendikten sonra deplasman hesabı yapılmıştır. Son olarak, burkulma yükünün tayininde enerji metodunun nasıl kullanıldığı açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde, ekstramum kavramına ve varyasyonel metoda değinilmiştir. Tek ve iki değişkenli fonksiyonlarda ekstremum noktasının varlığı için gerek ve yeter şartlar belirtilmiş, daha sonra bağlı minimum ve maksimum kavramı açıklanmıştır. Ardından Lagrange çarpanları yöntemi hakkında bilgiler aktarılmıştır.

Dördüncü bölümde, Diferansiyel Transform Metodu (DTM) ele alınmıştır. DTM'nin tanımı yapıldıktan sonra metodun temel teoremleri ispatları ile birlikte verilmiştir.

Beşinci bölümde, kendi ağırlığı etkisindeki Euler-Bernoulli kiriş-kolonlarının burkulma kritik yükünün hesabı yapılmıştır. Ankastre-serbest mesnetli düşey ve iki ucu basit mesnetli yatay kiriş-kolon için burkulma yükü hesaplanmış, iki ucu basit mesnetli düşey kiriş-kolon içinse kritik yük değeri verilmiştir.

İkinci, üçüncü ve dördüncü bölümler tezin asıl konusunu oluşturan problemin çözümünde kullanılan metotların tanıtımı ya da kısa bir tekrarı olarak düşünülmüştür. Beşinci bölümde Newton mekaniği ile burkulma kritik yükünün hesabı verilmiştir.

Altıncı bölümde, dört farklı sınır şartına sahip eğik eksenli, kendi ağırlığı ve dış yük etkisi altındaki Euler-Bernoulli kiriş-kolonu için burkulma kritik yükü ayrı ayrı tayin edilmiştir. Önce eğik kiriş-kolonun toplam potansiyel enerji ifadesi oluşturulmuştur. Bir integral denklem olan toplam potansiyel ifadesinin varyasyonu alınarak elastik eğrinin diferansiyel denklemine ulaşılmıştır. Boyutsuz koordinatlara geçildikten sonra denklemin Diferansiyel Transformu alınarak elde edilen öz yineleyen (rekürsif) bağıntı ve sınır şartlarının boyutsuz koordinatlardaki ifadelerinin diferansiyel dönüşümleri kullanılıp, burkulma determinantı oluşturulmuştur. Mathematica bilgisayar programında yazılan kodlar ile burkulma determinantının kökleri olan ve yük ve ağırlığın fonksiyonu öz değerler bulunmuştur. Burkulma determinantının sonsuz sayıda kökü olacağı ve bu köklerde küçük yer değiştirme kabulünün

çığnendiği çizdirilen eğrilerle ispat edilmiştir. Dış yük F 'nin ve kiriş-kolon ağırlığı q 'nın burkulmaya etkilerini daha iyi analiz edebilmek için F 'in fonksiyonu olan yük katsayısı ϕ ve q 'nın fonksiyonu olan ağırlık katsayısı β_c tanımlanmıştır. Tüm mesnet şartları için burkulmanın hangi (β_c, ϕ) ikililerinde gerçekleşeceği çizdirilen eğrilerle gösterilmiştir. Eğim açısı θ 'nın değişiminden (β_c, ϕ) burkulma ikililerinin nasıl etkileneceği yine çizdirilen grafikler ile gösterilmiştir. Bir eğik kiriş-kolonun yer değiştirtirme davranışı öz değerlerin yakın komşuluğu için incelenmiştir. Tüm mesnet şartları için elde edilen sonuçlar tablolar ve grafikler halinde sunulmuştur. İki ucu basit mesnetli eğik kiriş-kolon için elde edilen sonuçlar, ulaşılan literatürdeki sonuçlar ile karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Ayrıca, eğik kiriş-kolonun $\theta = 0^\circ$ özel hali incelenmiş, elde edilen sonuçlar literatürde yer alan hipergeometrik seriler ve yaklaşık çözüm metodları kullanılarak elde edilmiş iki ayrı çalışmanın sonuçlarıyla karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Yapılan bu çalışmada aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

1. Basit mesnetli eğik kiriş-kolon için Diferansiyel Transform Metodu kullanılarak elde edilen sonuçlar, literatürde hipergeometrik seriler kullanılarak elde edilmiş olan sonuçlar ile tam bir uyum içersindedir. Bu durum DTM'nin eğik kiriş-kolon yapıların burkulma yüklerinin belirlenmesinde de güvenli bir araç olduğunu göstermektedir.
2. Aynı eğilme rijitliğine (EI), boya (L) ve eğime (θ) sahip, aynı malzemeden yapılmış ve ağırlığı ihmal edilmeyen, eğik kiriş-kolonlardan mesnet şartları daha sıkı olan kendi ağırlığı nedeniyle oluşabilecek burkulmaya karşı daha dirençlidir. Şöyleki; iki ucu ankastre mesnetli çubuk ankastre-basite göre, ankastre-basit mesnetli çubuk ise iki ucu basit mesnetliye göre, iki ucu basit mesnetli çubuk bir ucu ankastre mesnetli olana göre ağırlığı kaynaklı burkulmaya karşı daha dirençlidir.
3. Aynı eğilme rijitliğine (EI), boya (L) ve eğime (θ) sahip, aynı malzemeden yapılmış ve ağırlığı ihmal edilmeyen, tekil basma yüküne maruz eğik kiriş-kolonlardan mesnet şartları daha sıkı olan burkulmaya karşı daha dirençlidir. Daha büyük (β_c, ϕ) ikililerinde burkulma gerçekleşir
4. Aynı malzemeden yapılmış (q), aynı eğilme rijitliğine (EI) ve boya (L) sahip ve aynı tip mesnetler ile mesnetlenmiş eğik kiriş-kolonlardan eğim açısı fazla olanın burkulmasına neden olacak tekil yük daha büyüktür. Diğer bir deyişle, aynı tür mesnete sahip iki özdeş çubuktan eğim açısı daha büyük olanın burkulmaya karşı direnci daha fazladır. Burkulma yükünün yüksek olması ise çubuğun ezilme yönünden de analiz edilmesini gerektirecektir
5. Aynı tür mesnetler ile mesnetlenmiş, boyu dışındaki geometrik özellikleri aynı olan, özdeş (kesit geometrisi, eğimi ve malzemesi aynı) kolon-kirişlerden boyu daha kısa olan daha zor burkulur; yani kısa olan eğik kolon-kiriş burkulmaya karşı daha dirençlidir. Burkulmasına neden olan ağırlık bileşeni β_c küçülürken yük bileşeni ϕ artar, bu ise burkulmasına neden olacak tekil yükün daha büyük olması anlamına gelir.
6. Yalnızca ağırlığı etkisindeki eğik bir kiriş-kolonun kritik boyu; düşey kolonun kritik boyunun $1/\sqrt[3]{\cos\theta}$ katı, kritik ağırlığı ise $1/\cos\theta$ katıdır. Örneğin, yalnızca ağırlığı etkisindeki düşey bir kolona 60 derecelik eğim vererek burkulmanın gerçekleşeceği kolon boyunu 1.26 kat, burkulmanın gerçekleşeceği ağırlığı 2 kat artırabiliriz.

7. Bu çalışmada eğik kiriş-kolonun $\theta = 0^0$ özel hali incelemiştir. Elde edilen sonuçlar literatürde yer alan hipergeometrik seri çözümleri ile tam bir uyuşun içersindedir. Bu durum ankastre-ankastre, ankastre-basit, ankastre-serbest mesnetli eğik kiriş kolonlar için yaptığımız matematiksel modelin ve elde ettiğimiz çözümlerinde doğruluğunu ispatlamaktadır.

BUCKLING ANALYSIS OF INCLINED BEAM-COLUMN STRUCTURES UNDER DIFFERENT BOUNDARY CONDITIONS USING DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD

SUMMARY

Mainly in aircraft and space vehicles, i.e., thin-walled structures, and in many engineering fields, beam-column type structures are widely used. When a beam-column or a slender structure is loaded in compression; for small loads it deforms hardly any noticeable change in geometry and load carrying ability. However on reaching a critical load value, the structure unexpectedly shows a large deformation and it may also totally loss its load carrying capability. Therefore, the structure is considered to have buckled. In many situations this load would not be sufficiently great enough to cause mechanical yield of material in the structures. In this type of structure mechanical behavior and buckling characteristics under various loading and boundary conditions must be carefully analyzed.

Leonhard Euler pioneered the study of buckling of column. A simple derivation of the formula for the critical load was given in his work. He examined buckling of column which had variable cross section under its own weight. Later Greenhill, found the greatest height as $\sqrt[3]{7.837 EI/q}$ to which the pole can reach for the vertical position to be stable. He expand his work on variable cross section. Timoshenko and Gere, Li studied the same problem. Another important study which has related to the slanted columns was concerned by Chang, he examined Mises truss in this study. Earlier work such as Huang and Vahidi studied the post-buckling behavior of Mises truss by neglecting the axial deformation and treating the truss as made of inextensible bars. In Chang's work, the effect of both bending and normal thrust taken into consideration. Due to symmetry, he analyzed the truss by a slanted column. In 1998, Sampaio made a formulation and solution for inclined beam column with only pinned end. He used hypergeometric functions for the solution. In 2008, Duan and Wang write a paper about buckling of columns including self weight. They use hypergeometric series for analysis. In this work they investigated effect of both load and weight on buckling phenomena of columns. In 1988, Wang and Ang investigated same problem but they used approximate formulas.

In the present study the buckling behavior of inclined beam-column structure and column which is a special one that has zero inclination angle have been analyzed, including its own weight, for various boundary conditions, i.e., pinned, built-in, free and their combinations. The governing equation related to structure is derived by using energy approach which is given explicitly in the following sections. Implementing the energy approach to the structures result in an integral equation in terms of displacement and the other geometric properties i.e., length L , inclination angle θ , flexural rigidity EI , weight q , and load F . Then the calculus of variation reduced the integral equation into fourth-order, non-homogenous ordinary differential equation having variable coefficients. This equation which has

inclination angle, distributed load parameters, flexural rigidity and externally applied forces as the parameters, is solved with appropriate boundary and geometric conditions. For the solution of the equation the well-known semi-analytical numerical technique Differential Transform Method (DTM) is applied. This method which is also capable of solving difference equations, fractional differential equations, integral and integro-differential equations was first introduced by Zhou in 1986 with the application to electrical circuits.

In open literature the simply supported boundary condition case has been solved by Sampaio using hypergeometric functions; in this solution asymptotic expansion for large value of nondimensional parameter, X , and serial expansion for small values of the same nondimensional parameter are implemented. In this work we obtained the same result by using DTM without needing serial and asymptotic expansions. Since the DTM is powerful enough to overcome such type of differential equations. Furthermore we examined built in-free, built in-built in, built in-pinned cases again by applying DTM.

Duang and Wang's work in 2008 [9] was related to a special inclined beam-column that has zero inclination angle. They used again hypergeometric function for solution. Their results are the same as results of present study for this mentioned special beam-column. This means that results and mathematical model developed in this work are correct for clamped-clamped, clamped-pinned, clamped-free end conditions. When the solutions carried out in terms of physical parameters, i.e., inclination angle, length of beam, flexural rigidity and support types; it is easily noticed that the critical load at which structure is buckled considerably changes with changing boundary conditions.

Results were found the end of this work, i.e.,

1. Dimensionless length, L_D determines whether the weight or load is the reason of buckling. If L_D is smaller than L_D^{cr} , inclined beam-column buckles due to compressive force and weight. While L_D is equal to L_D^{cr} , buckling occurs due to only the weight because of non-existence of external compressive force. It can be observed that if dimensionless length is greater than L_D^{cr} , structure buckles under its own weight and tensile force. Tables show the results related to L_D and L_D^{cr} values, also show the relation between ends conditions and L_D^{cr} . It could be easily noticed that, the critical dimensionless length value increases, while the rigidity of support of structure increases.
2. Among the inclined heavy beam-columns which have same flexural rigidity (EI), length (L), and inclination angle (θ), are made of same material, the one has greater the support rigidity more resistive structure against to buckling. In other words, buckling rigidity of a inclined beam-column structure, under the influence of external force F and including its own weight, depending on end conditions from higher to lower values, can be listed as fixed-fixed, fixed-pinned, pinned-pinned, and fixed-free respectively.
3. Critical buckling load of inclined heavy beam columns for all type of boundary condition, which are made of the same material, have the same geometry of cross section, and the same length, increases while the inclination angle increases. If critical buckling load is high, beam may crush due to compressive force. Thus, under this condition one must examine both the crushing of the inclined beam column and buckling except for fixed-free inclined beam-columns since they have comparatively small critical buckling load.

4. Among two inclined beam-columns which have same flexural rigidity (EI), inclination angle (θ), support conditions, but have different length (L), smaller one has greater buckling load. Moreover, weight coefficient β_c increases, and load coefficient ϕ decreases while β_c and ϕ represent of buckling components.
5. Critical length of a inclined heavy beam-column is equal to $1/\sqrt{\cos\theta}$ multiplied by critical length of vertical column. In addition to critical weight of heavy beam-column is equal to $1/\cos\theta$ times critical weight of vertical column. In other words, if a column is inclined 60° its critical length is increase 1.26 times and buckling weight is increase two times compare with vertical column's buckling parameters which are critical length and weight.
6. Special inclined heavy beam-column which has zero inclination angle is also investigated for buckling behavior using DTM. In 2008, Duang and Wang examine the buckling of the same type of structure by using hypergeometric functions. Results of this present study are consistent with Duang's. Other work in open literature is carried out Wang and Ang in 1988. They used approximate functions, so their solutions for clamped-clamped and clamped-pinned cases contains %5.8 and %2.68 error, respectively. Therefore, again, the results presented in this work, with our mathematical model and powerful solution technique (DTM), as the conclusions for inclined beam-columns having fixed-fixed, fixed-pinned, fixed-free and the case of zero inclination are highly precise and easily applicable.

1. GİRİŞ

1.1 Tarihsel Gelişim

Kolonların burkulması üzerine ilk çalışmayı Leonhard Euler 1757’de gerçekleştirmiştir. Euler [1], sabit kesitli bir kolonun ağırlığının burkulma üzerine etkilerini incelemiştir. Daha sonra Greenhill [2] düşey bir kolonun (*pole*) boyunu, stabilitesini bozmadan ne kadar arttırılabileceğiyle ilgilenmiş ve kritik kolon boyunun $\sqrt[3]{7.837 EI/q}$ olacağını belirlemiştir. Aynı çalışmada kesit değişiminin burkulma yükü üzerine etkilerinde analiz etmiştir. Timoshenko ve Gere [3], Siginer [4], Li [5] aynı konu ile ilgilenmişlerdir. Chang [6], 1974’te Mises kafesinden yola çıkarak eğik kolonların burkulmasıyla ilgili çalışma yapmıştır. Bu çalışmada; aynı konuyu ele alan öncüllerinden Von Karman ve Kerr [7] ile Huang ve Vahidi [8]’den farklı olarak eğilme ve eksenel basma kuvvetinin etkilerinde dikkate almıştır. Chang, Mises kafesinin sahip olduğu simetri nedeniyle yapıyı eğik kolon olarak modellemiş ve çözümünü elastik stabilitenin büyük yer değiştirme teorisi (*elastica*) üzerine inşaa etmiştir. 1998 yılında Sampaio, iki ucu basit mesnetli eğik kiriş-kolonlar için burkulma yüklerini, elastik stabilitenin küçük yer değiştirmeler kabulüyle, hipergeometrik serileri kullanarak belirlemiştir [9]. 2008 yılında Duang ve Wang, ağırlığı ihmal edilmeyen düşey bir kolonun dış yük altında burkulma davranışını hipergeometrik serileri kullanarak analiz etmiştir [10]. Benzer bir çalışma 1988 yılında Wang ve Ang tarafından yaklaşık fonsiyonlar kullanılarak gerçekleştirmiştir [11].

1.2 Çalışmanın Amacı

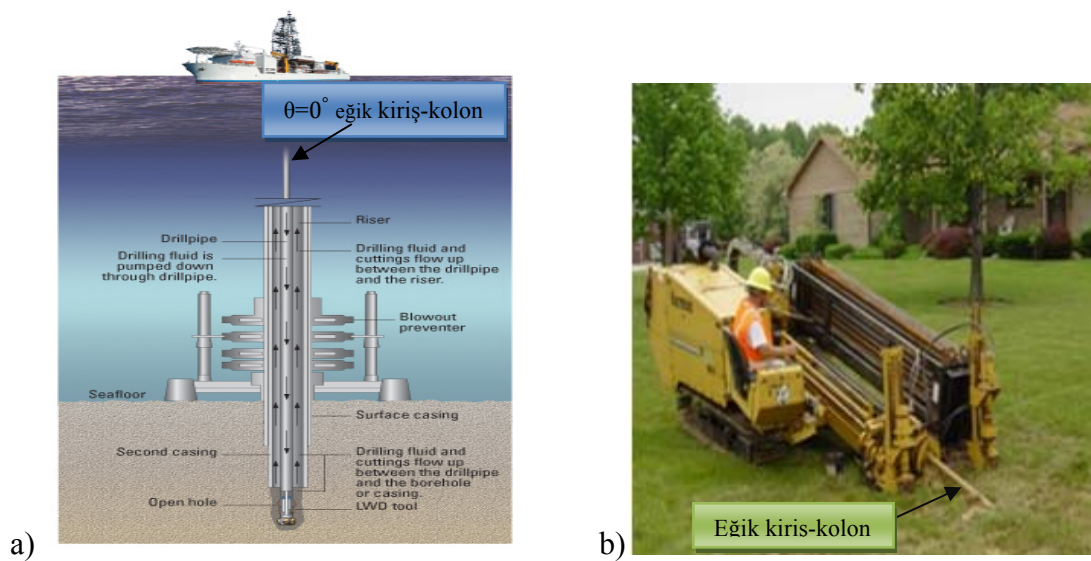
Bir kiriş-kolon tipi yapı elemanı basma kuvvetine maruz kaldığında bu kuvvet küçük olsa dahi deformasyon oluşabilir, oluşan deformasyon yapının geometrisinde ve yük taşıma kapasitesinde önemli oranda değişime neden olur. Kritik yük değerine ulaşıldığında ise yapıda büyük bir deformasyon oluşur ve yük taşıma kabiliyetini kaybeder. Bu tip yapılar burkulmuş olarak adlandırılır [12]. Ayrıca birçok durumda burkulmaya neden olacak yük malzemenin akmasına neden olacak büyüklükte dahi

değildir. Bu nedenle bu tip yapıların mekanik davranışları ve burkulma karakteristikleri farklı yük ve sınır şartları altında dikkatli bir şekilde analiz edilmelidir.

Günümüzde uçak ve uzay araçlarında ve birçok mühendislik sahasında eğik kiriş-kolon tipi yapı elemanları yaygın olarak kullanılmaktadır. Hava uzay yapılarında kullanılan strutlar, denizcilikte kullanılan sondaj çıkarma sistemleri (*marine drilling riser*), eğimli sondaj sistemleri (*directional drilling systems*), ırmak kapakları (*navigation locks*), şok sönümleyiciler (*shock absorber*), ve uçak iniş takımları eğik kiriş-kolon olarak modellenip burkulma analizi yapılır (Şekil1.1-2).



Şekil 1.1 : Antonov An-2 uçağı ve üzerindeki strutlar [13].



Şekil 1.2 : Eğik kiriş-kolon için örnekler a) Sondaj çıkarma sistemi [14] b) Eğimli sondaj sistemi [15].

Bu çalışmada farklı sınır şartlarına sahip, dış yük ile zorlanan eğik eksenli Euler-Bernoulli kiriş-kolon tipi yapı elemanları için burkulma analizi, elemanın ağırlığında dikkate alınarak yapılmıştır. Önce eğik kiriş-kolonun toplam potansiyel enerji ifadesi oluşturulmuştur. Bir integral denklem olan toplam potansiyel enerji ifadesinin, varyasyonu alınarak elastik eğrinin diferansiyel denklemi elde edilmiştir. Bu denklem boyutsuzlaştırıldıktan sonra Diferansiyel Dönüşümü alınıp öz yineleyen (rekürsif) bağıntıya ulaşılmıştır. Sınır şartlarının boyutsuz koordinatlardaki ifadelerinin diferansiyel dönüşümleri ile rekürsif bağıntı kullanılarak burkulma determinanı oluşturulmuştur. Mathematica bilgisayar programında yazılan kodlar ile öz değerler belirlenmiştir [16,17]. Belirlenen kritik yüklerin yakın komşuluğundaki değerler için özel bir eğik kiriş-kolonun yer değiştirme davranışı incelenmiştir. Tüm mesnet şartları için elde edilen sonuçlar tablolar ve grafikler şeklinde sunulmuştur. İki ucu basit mesnetli eğik kiriş-kolon için ulaşılan sonuçlar, literatürde hipergeometrik seriler kullanılarak elde edilmiş sonuçlar ile karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Ayrıca, eğik kiriş-kolonun $\theta = 0^0$ özel hali, tüm mesnet şartları için incelenmiştir. Bu özel hal için elde edilen sonuçlar, literatürde yer alan hipergeometrik seriler ve yaklaşık çözüm metodları kullanılarak elde edilmiş iki ayrı çalışmanın sonuçları ile karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

2. YAPI MEKANİĞİNDE ENERJİ YÖNTEMLERİ

2.1 Amaç

Bu çalışmada eğik eksenli kiriş-kolon yapı elemanlarının burkulma analizi yapılırken enerji metodu kullanılacaktır. Bu nedenle, bu bölüm yapı mekaniğinde enerji yöntemlerine ayrılmıştır. Çok eksenli gerilme halinde ve yalnız eğilme durumunda elastik şekil değişimi ifadesi türetildikten sonra enerji metodu ile burkulma yükünün tayini konusunda temel bilgiler aktarılacaktır.

2.2 Elastik Şekil Değiştirme Enerjisi

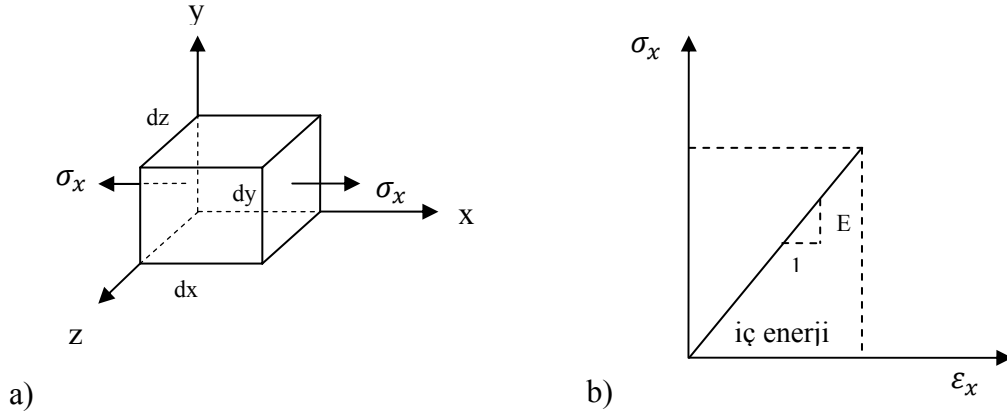
Mekanikte problemler, dengenin vektörel gösterilimine dayalı olan Newton yaklaşımıyla ya da skaler fonksiyonlar temeline dayalı olan Lagrange yaklaşımıyla incelenebilir. Lagrange yöntemi enerjinin korunumu ilkesine dayalı olup skaler fonksiyonlar ile çalışılması, karışık deformasyon problemlerinin çözümünde kolaylık sağlar.

2.2.1 Normal gerilme halinde elastik şekil değiştirme enerjisi

Mekanikte enerji, iş yapma kapasitesi olarak tanımlanır ve kuvvetin hareket doğrultusundaki bileşeni ile katedilen yolun çarpımı şeklinde verilir. Şekil değiştiren cisimlerde kuvvet, gerilmenin etkidiği yüzey alanı ile çarpımı olarak verilirken kat edilen yol deformasyona eşittir. Bu iki büyüklüğün çarpımından cisimde depo edilen iç enerji bulunur. Bu iç enerji deformasyonun elastik iç enerjisi veya elastik şekil değiştirme enerjisi adını alır [18, 19].

Şekil 2.1a'da lineer elastik bir malzemeden çıkarılmış bir diferansiyel hacim elemanı gösterilmektedir. Bu elemanın sağ ve sol yüzlerine etkiyen kuvvet, σ_x normal gerilme ile yüzey alanı $dydz$ 'in çarpımıdır. Bu kuvvetin etkisi altında eleman $\epsilon_x dx$ kadar uzar; burada ϵ_x , x yönündeki şekil değiştirme bileşenidir. Malzeme Hook kanununa uyduğu için gerilme, şekil değiştirmenin lineer bir fonksiyonudur. Bu nedenle cisimde ön gerilme yoksa cisme etkiyen kuvvet sıfırdan başlayarak lineer

olarak artarak $\sigma_x dydz$ değerine ulaşır. Deformasyon oluşurken elemana etkiyen ortalama kuvvet $\sigma_x dydz/2$ şiddetindedir. Bu ortalama kuvvet ile katedilen yolun çarpımından iş ifadesi elde edilir. Tam elastik cisimlerde enerji kaybı olmayacağına



Şekil 2.1: a) Çekmeye maruz bir eleman b) Gerilme birim uzama eğrisi.

dışarıdan yapılan işin tamamı cisimde iç enerji olarak depo edilir. Eksenel gerilmeye maruz bir cismin diferansiyel hacim elemanında depo edilen elastik enerji

$$dU = \left(\frac{0 + \sigma_x}{2} \right) dydz(\epsilon_x dx) = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy dz \quad (2.1)$$

(2.1) denklemini diferansiyel hacim olan $dx dy dz$ 'e bölerek birim hacimde depo edilen elastik şekil değiştirme enerjisi veya elastik enerji yoğunluğu bulunur,

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x. \quad (2.2)$$

Bu ifade, gerilme-şekil değiştirme eğrisinin altında kalan alanı göstermektedir, Şekil 2.1b. Bu alana karşı gelen ve eğimi malzemenin elastisite modülünü veren doğru ile düşey eksen arasında kalan alana tamamlayıcı enerji denir. Lineer elastik cisimler için bu iki alan birbirine eşittir [19]. (2.1) denklemine benzer ifadeler σ_y ve σ_z normal gerilmeleri ve bunlara karşı gelen ϵ_y ve ϵ_z içinde türetilebilir.

2.2.2 Kayma gerilmeleri halinde elastik şekil değiştirme enerjisi

Şekil 2.2(a) da gösterilen kayma gerilmesi tesiri altındaki diferansiyel hacim elemanının, elastik enerjisi yukarıdakine benzer şekilde belirlenebilir. Şekil 2.2(b)'

de bu elemanda kayma gerilmesi nedeniyle oluşan kayma şekil değişimi γ_{xy} gösterilmiştir. Bu eleman deforme oldukça, elemanın üst kısmındaki kuvvet $\tau_{xy}dx dz$ değerine ulaşır. Küçük deformasyonlar için bu kuvvetin kat ettiği toplam yol $\gamma_{xy}dy$ olarak verilir, Şekil 2.2 (b). Bir eleman üzerine yapılan dış kuvvetlerin işi iç enerjiye eşit ve

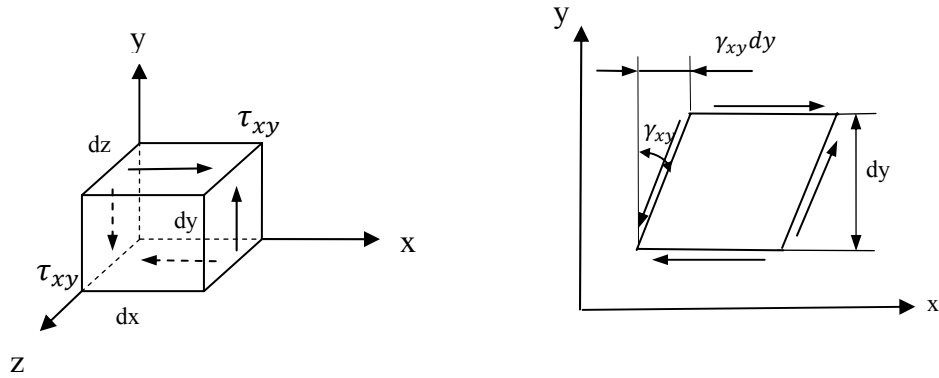
$$dU = \left(\frac{0 + \tau_{xy}}{2} \right) dx dz (\gamma_{xy} dy) = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} dx dy dz \quad (2.3)$$

ile verilir [19].

(2.3) denklemini diferansiyel hacime bölerek, kayma gerilmesi kaynaklı şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu aşağıdaki denklem

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy}. \quad (2.4)$$

ile belirlenir.



Şekil 2.2: a) Diferansiyel hacim elemanına etkiyen kayma gerilmesi b) Kayma şekil değişimi.

τ_{xy} kayma gerilmesi ve γ_{xy} kayma şekil değişimi için belirlenen kayma şekil değişimi enerjisi, denklem (2.3), kayma gerilmesinin diğer bileşenleri τ_{xz} , τ_{yz} ve bunlara karşı gelen γ_{xz} , γ_{yz} kayma şekil değiştirmeleri için de benzer metod ile türetilir.

2.2.3 Çok eksenli gerilme hali için elastik şekil değiştirme enerjisi

Üç boyutlu gerilme haline ait elastik enerji ifadesi, her gerilme haline karşı gelen elastik enerjilerin süperpozisyonu ile elde edilir. En genel duruma ait elastik şekil değiştirme enerjisi

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dx dy dz \quad (2.5)$$

ile verilir. Birim hacime karşı gelen şekil değiştirme enerjisi veya iş

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) \quad (2.6)$$

olup, Hook kanuna ait gerilme şekil değiştirme bağıntıları kullanılarak (2.5) denklemi düzenlenirse,

$$U_0 = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + \frac{1}{G}(\tau_{xy} + \tau_{xz} + \tau_{yz}) \quad (2.7)$$

birim şekil değiştirme enerjisi normal ve kayma gerilmeleri cinsinden elde edilir[20].

Şekil değiştiren elastik cismin toplam şekil değiştirme enerjisi, birim hacme ait U_0 şekil değiştirme enerjisinden integrasyonla

$$U = \iiint U_0 dx dy dz \quad (2.8)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade, yükleme sırasında, iç kuvvetlere karşı yapılan toplam işi temsil eder. Eksenel yüklü bir çubuk veya eğilmeye ve kesmeye maruz bir kiriş için elastik şekil değiştirme enerjisi (2.5) denkleminde türetilerek,

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \epsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (2.9)$$

olarak elde edilir. Dairesel şaftlar ve ince cidarlı tüplerin burulması sonucu ortaya çıkacak şekil değiştirme enerjisi

$$U = \frac{1}{2} \iiint \tau_{xy} \gamma_{xy} dx dy dz \quad (2.10)$$

denklemleriyle belirlenir [19].

Lineer elastik malzemede, tek eksenli gerilme durumunda $\sigma_x = E \epsilon_x$ ve basit kayma halinde de $\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$ olarak verilir. Bu halde (2.9) denklemi

$$U = \iiint \frac{\sigma_x^2}{2E} dx dy dz + \iiint \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dx dy dz \quad (2.11)$$

halini alır.

2.2.3.1 Eksenel yüklü bir çubuğun şekil değiştirme enerjisi

Bu durumda kesitte oluşacak normal gerilme $\sigma_x = F/A$ olup kesit alanı $A = \iint dy dz$ dir. Kuvvet F ve kesit alanı A , x koordinatının bir fonksiyonu olabileceğinden

$$U = \int_0^L \frac{F^2}{2EA} dx \quad (2.12)$$

2.2.3.2 Eğilmede şekil değiştirme enerjisi

Bu halde kesitte oluşan normal gerilme $\sigma_x = -My/I$ olup, atalet momenti $I = \iint y^2 dy dz$ olur. Bu eşitlikler, Young modülü E , moment M ve atalet momenti I 'nin, x 'in fonksiyonu olabileceği göz önünde tutularak, (2.11) in ilk teriminde yazılırsa

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (2.13)$$

elde edilir [19].

2.2.3.3 Burulmaya maruz dairesel tüplerin şekil değiştirme enerjisi

Kesit yarıçapı ρ , polar atalet momenti J , $J = \int \rho^2 dA$, burulma momenti T iken kesitte oluşan kayma gerilmesi $\tau = T\rho/J$ ile verilir. Dairesel kesit için $dA = 2\pi\rho d\rho$ olduğu göz önünde tutularak (2.11) denkleminde

$$U = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx \quad (2.14)$$

elde edilir [19].

2.3 Enerji Yöntemiyle Deplasmanın Tayini

Enerjinin korunumu prensibi, kuvvet sistemlerinin neden olduğu deplasmanların hesabında kullanılabilir. Termodinamiğin birinci kanuna göre, yapılan iş enerjideki değişime eşittir. Sistem içersinde ısı yaratılmadığı hallerde, adyabatik sistemlerde uygulanan kuvvetler yarı-statik tarzda etkiğinden, konservatif sistemler için bu kural aşağıdaki formu alır,

$$W_d = U. \quad (2.15)$$

W_d yükleme sırasında dış kuvvetler tarafından yapılan işi, U ise sistemde depo edilen toplam şekil değıştirme enerjisini ifade eder.

Değişik bir hal olarak

$$W_d + W_i = 0 \quad (2.16)$$

olup, dış iş W_d ile iç iş W_i toplamının sıfır olması gerekir. Bu son iki denklemden

$$U = -W_i \quad (2.17)$$

elde edilir. Deformasyonun yönü iç kuvvetler yönü ile ters olduğundan W_i 'nin önüne negatif işaret konulmuştur. Lineer elastik sistemlere uygulanan kuvvet veya momentlerin sıfır değerinden başlayıp en son değerine kadar lineer gitmesi gerekmektedir. Bunun sonucu olarak, W_d dış işi toplam kuvvetin hareket doğrultusundaki deplasmanı ile çarpımına eşittir.

2F şiddetindeki düşey kuvvete maruz kesit alanı sabit ve A , uzunluğu $L/2$ olan elastik çubuğun serbest ucunda oluşacak toplam çökme miktarı

$$\Delta = \frac{FL}{AE} \quad (2.18)$$

olarak belirlenir.

Bir ucu eksenel dönmeye karşı anakastre olan $L/2$ uzunluklu silindirik bir şaftın serbest ucuna $2T$ torku uygulandığında, şaftın serbest ucundaki dönme miktarı

$$\phi = \frac{TL}{GJ} \quad (2.19)$$

olarak belirlenir.

Serbest uçta düşey F kuvvetiyle eğilmeye zorlanan, L uzunluklu anakstre kirişin, kuvvetin tatbik noktasındaki deplasmanını, kesitteki oluşan kayma gerilmesini dikkate alarak

$$W_d = U_{eğilme} + U_{kayma} \quad (2.20)$$

bu ifade yardımıyla belirlenebilir. Burada

$$W_d = \frac{F\Delta}{2} \quad (2.21)$$

olup

$$U_{eğilme} = \int_0^{L/2} \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{F^2 L^3}{6EI} \quad (2.22)$$

dır. Kesitte oluşan kesme kuvveti F şiddetinde olup, dikdörtgen kesitli bir kirişte kayma gerilmesinin dağılımı

$$\tau = \frac{F}{2I} \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right) \quad (2.23)$$

ile verilir, burada y tarafsız eksenenden olan uzaklık, h ise kirişin yüksekliğidir.

$$U_{kayma} = \iiint \frac{\tau^2}{2G} dV = \frac{1}{2G} \int_0^L dx \int_{-h/2}^{h/2} \frac{F^2}{4I^2} \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right) dy \int_{-b/2}^{b/2} dz$$

$$= \frac{3F^2L}{5AG} \quad (2.24)$$

(2.23) denklemi kullanılarak

$$\Delta = \frac{FL^3}{3EI} + \frac{6FL}{5AG} \quad (2.25)$$

bu ifadedeki birinci terim eğilmeden, ikinci terim ise kaymadan dolayı çökmedir. Kesitte oluşan ortalama kayma gerilmesi $\tau_{ort} = F/A$ dir. Bunun G kayma modulu ile bölümünden uniform kayma gerilmesinden doğan kayma şekil değişimi bulunur. Ancak kayma gerilmesi kesitte parabolik bir dağılım gösterdiğinden α düzeltme faktörü ile çarpmalıyız. Burada α 'nın $6/5$ olarak alınması gerektiği (2.25) denkleminde gözükmemektedir. Bu halde kayma gerilmesinden kaynaklanan çökme

$$\Delta_{kayma} = \gamma_k L = \alpha \frac{\tau_{ort}}{G} L = \frac{6FL}{5AG} \quad (2.26)$$

Kirişin dik kesit alanı değiştikçe kesit içersindeki kayma gerilmesi dağılımı değişir buda α düzeltme faktörünün değişmesine neden olur. E/G oranı 2.59 olan yapı çeliği (ASTM-A36) için (2.25) ifadesini

$$\Delta = \Delta_{eğilme} \left(1 + 0.78 \frac{h^2}{L^2} \right) \quad (2.27)$$

haline getirilebilir. Kiriş yüksekliği kiriş açıklığının ondabiri olduğunda kayma gerilmesinin toplam çökmeye katkısı yüzdebirden daha az olur. Yani ince elemanlarda kaymadan dolayı oluşacak çökme çok azdır. Kayma kaynaklı çökmeler açıklık ile orantılı iken eğilmeden kaynaklı çökmeler açıklığın küpüyle orantılıdır.

2.4 Burkulma Yükünün Tayininde Enerji Metodu

Enerji yöntemi kullanılarak stabilite problemi genel bir tarzda incelenebilir. Konservatif ve lineer elastik cisimlerde dengenin kararlılığını belirleyen bir kriter tanımlanır. Stabilite kriterini oluşturmak için “sistemin toplam potansiyeli” olarak

bilinen , Π fonksiyonu tanımlanır. Bu fonksiyon, sistemin U iç potansiyel enerjisi (elastik enerji) ile sisteme etkiyen dış kuvvetlerin Ω potansiyel enerjisinin toplamına eşittir

$$\Pi = U + \Omega. \quad (2.28)$$

İhmal edilebilecek mertebedeki bir sabiti hesaba katmazsak $\Omega = -W_e$; kuvvetlerin uygulanması sırasındaki sistemin kaybettiği potansiyel enerji miktarı, dış kuvvetlerin sistem üzerinde yaptığı işe eşittir. Yukarıdaki (2.28) denklemi aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\Pi = U - W_e. \quad (2.29)$$

Klasik mekanikten bilindiği gibi, dengede olan bir sistemin Π potansiyeli kararlı olmalıdır; yani $\delta\Pi$ varyasyonu sıfıra eşit olmalıdır.

$$\delta\Pi = \delta U - \delta W_e = 0 \quad (2.30)$$

yani Π 'nin bağlı olduğu bağımsız değişkene göre türevi sıfır olmalıdır. Dengenin stabilitesi hakkında fikir sahibi olabilmek için $\Delta\Pi$ değişim ifadesinin

$$\Delta\Pi = \delta\Pi + \frac{1}{2!}\delta^2\Pi + \frac{1}{3!}\delta^3\Pi + \dots \quad (2.31)$$

sıfırdan farklı ilk teriminin işaretine bakılır. Lineer elastik sistemlerde ikinci terimin işaretini incelemek yeterlidir. Denklem 2.31'den stabilite kriteri belirlenir; şöyle ki,

$$\begin{aligned} \delta^2\Pi > 0 & \quad \text{kararlı bir denge} \\ \delta^2\Pi < 0 & \quad \text{kararsız bir denge} \\ \delta^2\Pi = 0 & \quad \text{tarafsız bir denge} \end{aligned} \quad (2.32)$$

konumunu verir [19, 21].

3. EKSTREMUM KAVRAMI VE VARYASYONLAR METODU

3.1 Amaç

Bu çalışmada ele alınan problemin çözümünde kullanılan metodlardan ikincisi varyasyonlar hesabıdır. Bu nedenle, bu bölümde önce ekstramum kavramı ele alınacak ardından varyasyonlar hesabının temellerine değinilecektir.

3.2 Ekstramum Kavramı

3.2.1 Tek değişkenli fonksiyonlarda ekstremum

$y = f(x)$ tek değişkenli fonksiyonunun, x 'in (a,b) aralığında maksimum ve minimum değerinin belirlenmesi, diferansiyel hesabında önemli bir problemidir. Bu aralıkta $f(x)$ sürekli türeve sahipse, aralıkta ki bir x_0 noktasında fonksiyonun bir maksimum ya da minimum değerinin mevcut olabilmesi için gerek şart,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} = 0 \quad (3.1)$$

olmasıdır. Bu noktada minimumun varlığı için yeter şart

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \quad (3.2)$$

olup, maksimumun varlığı için yeter şart ise

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0 \quad (3.3)$$

olmasıdır [22].

3.2.2 İki değişkenli fonksiyonlarda ekstremum

Tanım. İki değişkenli bir z fonksiyonu, $z = f(x, y)$, $|h|$ ve $|k|$ yeterince küçük büyüklükler olmak üzere bir (x_0, y_0) noktası civarındaki noktalar için

$$f(x_0, y_0) < f(x_0 + h, y_0 + k) \quad (3.4)$$

bağıntısını gerçekleştiriyorsa söz konusu noktada bir minimuma sahiptir.

$$f(x_0, y_0) > f(x_0 + h, y_0 + k) \quad (3.5)$$

(3.5) eşitsizliği gerçekleştiriyorsa söz konusu noktada bir maksimuma sahiptir[22].

Teorem 1. $f(x, y)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasında ekstremumunun (maksimum veya minimumunun) olabilmesi için

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) \quad (3.6)$$

eşitliğinin gerçekleşmesi gerekir [22].

Bu şart bir noktada fonksiyonun bir ekstremumunun olması için gerekli fakat yeterli değildir. Yeter şartı belirlemek için $f(x, y)$ fonksiyonunu (x_0, y_0) noktasında ikinci mertebeye türevlere kadar Taylor serisine açmak gerekir. $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$

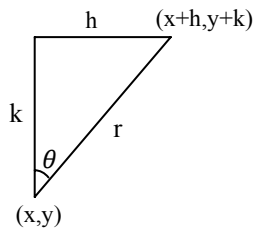
$$\begin{aligned} f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) \\ + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) + R_3 \end{aligned} \quad (3.7)$$

burada R , Lagrange kalanı olup

$$R_3 = \frac{1}{3!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \quad (3.8)$$

dır.

Burada $0 < \theta < 1$ olup $(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$ noktası (x_0, y_0) noktasını $(x_0 + h, y_0 + k)$ noktasına birleştiren doğru parçası üzerinde bir noktadır, Şekil 3.1.



Şekil 3.1 : (x_0, y_0) noktasının (h, k) komşuluğu.

(3.6) gereği (3.7)'nin ikinci terimi sıfıra eşit olur,

$$\left[h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0 \quad (3.9)$$

$f(x,y)$ 'nin (x_0, y_0) noktasında bir minimuma sahip olması için denklem (3.4) gereği denklem (3.7)'nin üçüncü teriminin sıfırdan büyük olması gerekir.

$$\frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) > 0 \quad (3.10)$$

yani

$$\left[h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} > 0 \quad (3.11)$$

olmalıdır. Şekil 3.1'de yer alan $h = r \cos \theta$ ve $k = r \sin \theta$ bağıntıları denklem (3.11) da kullanılarak

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin^2 \theta \right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} > 0 \quad (3.12)$$

Bu ifade de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ iken $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$ olur. (3.12) denkleminin sağlanabilmesi için $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ olması gerekir. Bu terim ile denklem (3.12) genişletilir ve düzenlenirse

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \sin \theta \right)^2 + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \sin^2 \theta > 0 \quad (3.13)$$

elde edilir, buradaki ilk terim sıfıra eşit veya sıfırdan büyüktür.

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \sin \theta \right)^2 > 0 \quad (3.14)$$

halinde ikinci terim incelenmelidir;

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \sin^2 \theta > 0 \quad (3.15)$$

$\sin^2 \theta > 0$ olduğundan $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, nin de sıfırdan büyük olması gerektiği anlaşılır. Sonuç olarak,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \text{ iken } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \left(\text{veya } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0 \right) \quad (3.16)$$

(3.16) şartları sağlanırsa $f(x,y)$ fonksiyonu (x_0, y_0) noktasında *minimuma* sahiptir [22]. (3.13)'deki ilk terim aşağıdaki gibi

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \sin \theta \right)^2 = 0 \quad (3.17)$$

sıfıra eşit ise

$$\operatorname{tg} \theta = - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq 0 \quad (3.18)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq 0 \text{ ve } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0 \quad (3.19)$$

olduğundan $\sin \theta \neq 0$ elde edilir. Bu bilgiler ışığı altında ikinci terim irdelenirse

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \text{ iken } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0 \quad (3.20)$$

olması gerektiği ortaya çıkar. Bu ise (3.16)'da elde edilmiş olan sonuçlarla aynıdır. (3.16) denklemi $f(x,y)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasında *minimuma* sahip olması için yeter şarttır [22]. Benzer olarak

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \text{ iken } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \left(\text{veya } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0 \right) \quad (3.21)$$

ise $f(x,y)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasında *maksimumu* vardır.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial x \partial y} \right)^2 < 0 \text{ iken } f_{xx} f_{yy} < 0 \quad (3.22)$$

şartları sağlanıyorsa $f(x,y)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasında semer noktası vardır [22].

3.2.3 Bağlı maksimum minimum

$\mathbb{R}^n$ uzayının bir D bölgesinde tanımlanmış bulunan bir $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonunun bağlı bulunduğu $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenleri arasında $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ şeklinde bir bağıntı varsa, u fonksiyonunun bu koşul altındaki *ekstramumlarına* u nun bağlı *minimumu* veya bağlı *maksimumu* denir.

Bir fonksiyonun bağlı ekstramumlarının araştırılmasında, bağ koşullarının sayısı serbest değişkenlerin sayısından en fazla bir eksik sayıda olabilir [22].

I. Hal

$f(x, y)$ ve $g(x, y)$ bir D bölgesinde diferansiyellenebilen iki fonksiyon iken $f(x, y)$ 'nin $g(x, y) = 0$ şartı altında ekstramumlarını veren x, y değerleri

$$g(x, y) = 0, \quad J \left(\frac{f, g}{x, y} \right) = 0 \quad (3.23)$$

denklem sisteminin çözümleri arasında aranmalıdır.

$g(x, y) = 0$ denkleminin y 'ye göre çözümü $y = y(x)$ ve $f(x, y(x)) = F(x)$ olsun. (3.23) sisteminin bir çözümü olan (x_0, y_0) noktasında:

- i. $d^2 F > 0$ ise, bu nokta $f(x, y)$ fonksiyonunun bir bağlı minimum noktasıdır.
- ii. $d^2 F < 0$ ise, bu nokta $f(x, y)$ fonksiyonunun bir bağlı maksimum noktasıdır.

II. Hal

$f(x, y, z)$ ve $g(x, y, z)$ bir $\mathbb{R}^3$ uzayının bir D bölgesinde diferansiyellenebilen iki fonksiyon olmak üzere $f(x, y, z)$ fonksiyonunun $g(x, y, z) = 0$ koşulu altındaki *ekstramumlarını* veren x, y, z değerleri

$$g(x, y, z) = 0, \quad J\left(\frac{f, g}{x, y}\right) = 0, \quad J\left(\frac{f, g}{y, z}\right) = 0 \quad (3.24)$$

denklem sisteminin çözümleri arasından aranmalıdır.

$g(x, y, z) = 0$ denkleminin z 'ye göre çözümü $z = z(x, y)$ ve $f(x, y, z(x, y)) = F(x, y)$ olsun. (3.24) sisteminin bir çözümü olan (x_0, y_0, z_0) noktasında:

- i. $d^2F > 0$ ise, bu nokta $f(x, y, z)$ fonksiyonunun bir bağlı minimum noktası,
- ii. $d^2F < 0$ ise, bu nokta $f(x, y, z)$ fonksiyonunun bir bağlı maksimum noktasıdır.

III. Hal

$f(x, y, z)$ ve $g(x, y, z)$, $h(x, y, z)$ fonksiyonları $\mathbb{R}^3$ uzayının bir D bölgesinde diferansiyellenebilen fonksiyonlar olup $g(x, y, z)$ ve $h(x, y, z)$ fonksiyonları D' de fonksiyonel bağlı değilken $f(x, y, z)$ fonksiyonunun $g(x, y, z) = 0$ ve $h(x, y, z) = 0$ koşulları altındaki ekstremlerini veren (x_0, y_0, z_0) değerleri

$$g(x, y, z) = 0, \quad h(x, y, z) = 0, \quad J\left(\frac{f, g, h}{x, y, z}\right) = 0 \quad (3.25)$$

$g(x, y, z) = 0$ ve $h(x, y, z) = 0$ denklem sisteminin y ve z ye göre çözümü $y = y(x)$ ve $z = z(x)$ ve $f(x, y(x), z(x)) = F(x)$ iken (3.25) denklem sisteminin bir çözümü olan (x_0, y_0, z_0) noktasında:

- i. $d^2F > 0$ ise, bu nokta $f(x, y, z)$ fonksiyonunun bir bağlı minimum noktası,
- ii. $d^2F < 0$ ise, bu nokta $f(x, y, z)$ fonksiyonunun bir bağlı maksimum noktasıdır.

3.2.4 Lagrange çarpanları yöntemi

$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $g_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($k = 1, 2, \dots, m; m < n$) fonksiyonlarının $\mathbb{R}^n$ uzayını bir D bölgesinde diferansiyellenebilen fonksiyonlar, $g_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonlarının D bölgesinde fonksiyonel bağımlı olmadıkları kabulü ile

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonunun

$$g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m; m < n) \quad (3.26)$$

bağ koşulları altındaki ekstremlerini bulmak için, *Lagrange* fonksiyonu adı verilen

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) =$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.27)$$

tanımlanır. Burada $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sabitler olup, *Lagrange* çarpanları adını alır [22]. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonunun (3.26) bağ koşulları altındaki ekstremleri, $n + m$ değişkenli *Lagrange* fonksiyonunun serbest ekstremleri arasından aranır. Buna göre $x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ değerleri,

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial g}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial g}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial g}{\partial x_2} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0,$$

.....

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial g}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial g}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = g_1 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = g_2 = 0,$$

.....

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = g_m = 0.$$

denklem sisteminden bulunur [22].

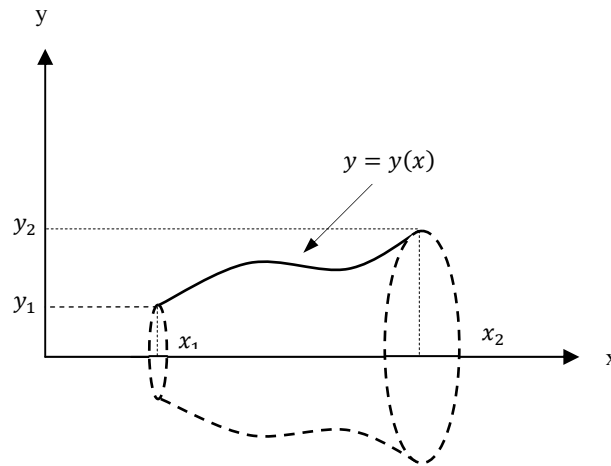
$x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ değer takımı için $d^2L > 0$ ise $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktasında bir bağlı minimuma; $d^2L < 0$ olması halinde ise, bir bağlı maksimuma sahiptir [22].

3.3 Varyasyonlar Hesabı

Varyasyonlar metodunda bir fonksiyonun maksimum ve minimum değerlerinin belirlenmesi amacı güdülür [23].

3.3.1 Varyasyonlar hesabının temelleri

Verilen (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarından geçen eğrinin x eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzeyin alanının minimum yapılması varyasyon hesabının çözümünü bulmaya çalıştığı problemlere tipik bir örnek olarak verilebilir [23].



Şekil 3.2 : x eksenini etrafında döndürülmüş $y = y(x)$ eğrisi.

Bu amaçla her iki noktadan geçen ve

$$I = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (3.29)$$

(3.29) ile hesaplanan yüzey alanını minimum yapan $y = y(x)$ eğrisinin belirlenmesi gerekir.

Genel anlamda (3.29) denklemini

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \psi(x, y, y') dx \quad (3.30)$$

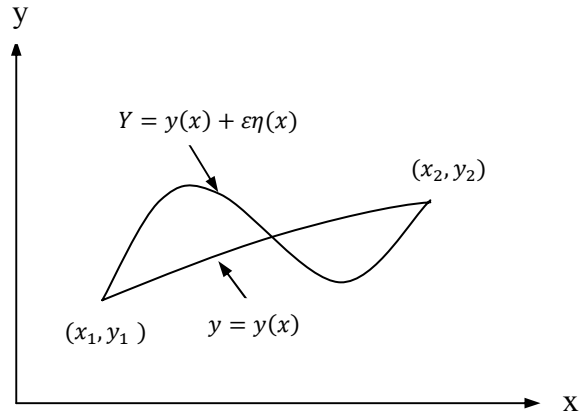
şeklinde ifade edilebilir. Verilen sınır şartlarını

$$y(x_1) = y_1 \text{ ve } y(x_2) = y_2 \quad (3.31)$$

sağlarken (3.30) denkleminide maksimum ya da minimum yapan ve fonksiyonun tanım aralığında sürekli türevlenebilen $y = y(x)$ fonksiyonu aranır. Bu amaçla

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x) \quad (3.32)$$

şeklinde bir eğri ailesi tanımlanır [23]. Burada ε eğri ailesinin parametresidir. $\eta(x)$ diferansiyellenebilir keyfi bir fonksiyon olup, $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ şartını sağlar. Bu sayede $y(x) + \varepsilon \eta(x)$ toplamı $y(x)$ in sınır şartlarını sağlar. Bu durum Şekil 3.3'te açık olarak gösterilmiştir.



Şekil 3.3 : $y(x)$ ve sınır şartlarını sağlayan $Y(x)$ eğrisi.

x_1, x_2 ve ε sabit olduğu gözönünde tutulursa, (3.30) denklemine $Y(x)$ fonksiyonu ve türevi yerleştirilerek, I fonksiyonunun ε parametresi cinsinden ifadesi aşağıdaki şekilde

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \psi(x, y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta') dx \quad (3.33a)$$

verilir ya da kapalı formda

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \psi(x, Y, Y') dx \quad (3.33b)$$

şeklinde bulunur. (3.33) in türevi integral işareti altında türev alma kuralını veren Leibniz formülü yardımıyla belirlenir, şöyle ki;

$$I'(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{u_0(\varepsilon)}^{u_1(\varepsilon)} \phi(x, \varepsilon) dx = \int_{u_0(\varepsilon)}^{u_1(\varepsilon)} \frac{d}{d\varepsilon} \phi(x, \varepsilon) dx + \frac{du_1}{d\varepsilon} \phi(u_1(\varepsilon), \varepsilon) - \frac{du_0}{d\varepsilon} \phi(u_0(\varepsilon), \varepsilon) \quad (3.34)$$

İntegralin sınırları integral parametresine bağlı olmadığından, diğer bir deyişle u_1 ve u_0 sabit olduğunda

$$I'(\varepsilon) = \int_{u_0}^{u_1} \frac{d}{d\varepsilon} \phi(x, \varepsilon) dx \quad (3.35)$$

ile hesaplanır. (3.35) denklemini (3.33b) denklemine uyarlırsak

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d\psi}{dY} \frac{dY}{d\varepsilon} + \frac{d\psi}{dY'} \frac{dY'}{d\varepsilon} \right) dx \quad (3.36)$$

$dY/d\varepsilon = \eta$ ve $dY'/d\varepsilon = \eta'$ olduğundan (3.36)

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d\psi}{dY} \eta + \frac{d\psi}{dY'} \eta' \right) dx \quad (3.37)$$

halini alır. I fonksiyonunun minimum olması için gerek şart ε 'a göre türevinin sıfır olmasıdır. Bu şart $\varepsilon = 0$ değeri içinde geçerli olacağından

$$I'(\varepsilon = 0) = 0 \quad (3.38)$$

yazılabilir. Bu durumda $Y(x) = y(x)$ olur, (3.37) denklemini

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d\psi}{dy} \eta + \frac{d\psi}{dy'} \eta' \right) dx = 0 \quad (3.39)$$

halini alır. Kısmi integrasyonla

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d\psi}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dy'} \right) \right] \eta dx + \frac{d\psi}{dy'} \eta \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \quad (3.40)$$

elde edilir. Son terimin değeri $\eta(x)|_{x_1}^{x_2} = 0$ olduğundan sıfırdır. İlk terim incelenirse;

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d\psi}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dy'} \right) \right] \eta dx \quad (3.41)$$

integrali η 'nın $x_1 < x < x_2$ aralığında sıfır dışı keyfi değerlere sahip olacağından η 'nın çarpanı olan fonksiyonun

$$\frac{d\psi}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dy'} \right) = 0 \quad (3.42)$$

sıfır olması gerekir. Bu denklem “ikinci mertebeden Euler-Lagrange diferansiyel denklemi olarak adlandırılır [23]. Bu diferansiyel denklemin çözümü olan $y(x)$ fonksiyonu, I fonksiyonunu minimize eden fonksiyondur.

Bir eğrinin x eksenı etrafında döndürölmesiyle elde edilen yüzeyin alanını minimize eden $y(x)$ eğrisini belirleyelim: Burada denklem (3.29) da yer alan integrant

$$\psi = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \quad (3.43)$$

olup, (3.42) Euler-Lagrange denklemi

$$(1 + y'^2)^{1/2} - \frac{d}{dx} \left[\frac{yy'}{(1 + y'^2)^{1/2}} \right] = 0 \quad (3.44)$$

halini alır. Ara adımlar yapılrısa

$$yy'' - y'^2 - 1 = 0 \quad (3.45)$$

elde edilir.

$y' = u$ dönüşümü yaparsak $y'' = udu/dy$ olur. Bu ifadeler (3.45)' te kullanılır ve düzenlenirse

$$\frac{u}{u^2 + 1} du = \frac{1}{y} dy \quad (3.46)$$

integrasyonla

$$y(x) = c_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (3.47)$$

elde edilir. c_1 ve c_2 integrasyon sabitleri olmak üzere

$$\cosh^{-1}\left(\frac{y}{c_1}\right) = \frac{x}{c_1} + c_2, \quad c_1 > 0 \quad (3.48)$$

elde edilir. Düzenlemeyle

$$y(x) = c_1 \cosh\left(\frac{x}{c_1} + c_2\right), \quad c_1 > 0 \quad (3.49)$$

yüzey alanını minimize edecek fonksiyon belirlenmiş olur.

3.3.2 Varyasyonlar hesabının özellikleri

Diferansiyel hesap ile varyasyon hesabı arasındaki analogiyi daha açık olarak görebilmek için varyasyonel gösterim oluşturulabilir.

$\mathcal{L}$ $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli birinci türevlere sahip tek değişkenli fonksiyonların kümesi olsun. $\mathcal{L}$ kümesi içinde her bir fonksiyonla bağlantılı sayısal bir değer alan her hangi bir büyüklüğe $\mathcal{L}$ kümesi içinde fonksiyonel denir [23].

$$I = \int_a^b y(x) dx \quad (3.50)$$

işleminin sonucu bir sayısal değer olduğundan yukardaki ifade bir fonksiyoneldir. Denklem (3.20)'nin integrantı $\psi(x, y, y')$, x 'in sabit bir değeri için $y(x)$ ve türevi $y'(x)$ 'in fonksiyonudur. $y(x)$ 'i $y(x) + \varepsilon \eta(x)$ ile değiştirdiğimizde $y(x)$ fonksiyonundaki $\varepsilon \eta(x)$ değişimine y 'nin varyasyonu denir,

$$\delta y \rightarrow \varepsilon \eta(x) \quad (3.51)$$

şeklinde gösterilir [23]. x 'in sabit değeri için $y(x)$ 'deki bu değişimin, ψ fonksiyonelinde oluşturduğu değişim ise,

$$\Delta\psi = \psi(x, y, y') - \psi(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') \quad (3.52)$$

dır. ψ 'nin üçüncü mertebeye kadar Taylor serisi açılımı

$$\begin{aligned} \psi(x, y, y') &= \psi(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') + \varepsilon\eta \frac{\partial\psi}{\partial y} + \varepsilon\eta' \frac{\partial\psi}{\partial y'} \\ &+ (\varepsilon\eta)^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + 2\varepsilon^2\eta\eta' \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial y'} + (\varepsilon\eta')^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2} + \dots \end{aligned} \quad (3.53)$$

dır. ε 'un iki ve daha büyük kuvvetlerini içeren terimlerin katkısı azdır, ihmal edilir. Bu halde $\Delta\psi$

$$\Delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial y} \varepsilon\eta + \frac{\partial\psi}{\partial y'} \varepsilon\eta' \quad (3.54)$$

olup, diferansiyelin tanımıyla benzerlik kurularak terim ψ 'nin varyasyonu olarak tanımlanır,

$$\delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial y} \varepsilon\eta + \frac{\partial\psi}{\partial y'} \varepsilon\eta' \quad (3.55)$$

(3.51) ve $\delta y' = \varepsilon\eta'$ olduğu dikkate alınarak (3.55),

$$\delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial\psi}{\partial y'} \delta y' \quad (3.56)$$

Varyasyonların toplamı, çarpımı, bölümü ve kuvveti diferansiyel hesabın ilgili kurallarıyla benzerdir, şöyleki,

$$\delta(\psi_1\psi_2) = \psi_1\delta\psi_2 + \psi_2\delta\psi_1 \quad (3.57)$$

ve

$$\delta \left(\frac{\psi_1}{\psi_2} \right) = \frac{\psi_2 \delta \psi_1 - \psi_1 \delta \psi_2}{\psi_2^2} \quad (3.58)$$

x ve y bağımsız u ve v bağımlı değişkenleri göstermek üzere

$$G = G(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y) \quad (3.59)$$

şeklinde bir G fonksiyoneli tanımlansın. u ve v, x ve y'ye bağımlı değişkenler olduğundan

$$\delta u = \varepsilon \xi(x, y), \quad \delta v = \varepsilon \eta(x, y) \quad (3.60)$$

çok değişkenli fonksiyonların Taylor serisi açılımından

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial u} \varepsilon \xi + \frac{\partial G}{\partial v} \varepsilon \eta + \frac{\partial G}{\partial u_x} \varepsilon \xi_x + \frac{\partial G}{\partial v_x} \varepsilon \eta_x + \frac{\partial G}{\partial u_y} \varepsilon \xi_y + \frac{\partial G}{\partial v_y} \varepsilon \eta_y + \dots \quad (3.61)$$

şeklinde yazılır. Bu ifadenin birinci mertebeden terimleri G'nin varyasyonunudur,

$$\delta G = \frac{\partial G}{\partial u} \delta u + \frac{\partial G}{\partial v} \delta v + \frac{\partial G}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial G}{\partial v_x} \delta v_x + \frac{\partial G}{\partial u_y} \delta u_y + \frac{\partial G}{\partial v_y} \delta v_y. \quad (3.62)$$

4. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU

4.1 Amaç

Diferansiyel dönüşüm metodu (DTM) ilk defa Zhou'nun elektrik devreler hakkındaki çalışmasında yer almıştır [24]. Taylor serileri temeline dayanan bu metod kullanılarak fark denklemlerinin çözümleri ile diferansiyel ve integro-diferansiyel denklemlerin yüksek doğruluklu çözümleri kolaylıkla elde edilebilir [25-27]. Bu çalışmada eğik eksenli giriş-kolon yapıların burkulma analizi DTM kullanılarak gerçekleştirilecektir. Yapılan çözümün anlaşılabilirliğini artırabilmek amacıyla, bu bölümde metodun temel teoremleri ispatları ile beraber verilecektir. Teoremler literatürde geçenler olsada [25, 26], burada yapılan ispatların çoğu literatürdekilerden farklı yöntemler ile gerçekleştirilmiştir.

4.2 Diferansiyel Dönüşüm Metodunun Tanımı

f sürekli türevlenebilir ve tek değişkenli bir fonksiyon iken $x=x_0$ civarında bu fonksiyonun k 'inci türevinin transformu $F(k)$ aşağıdaki şekilde verilir;

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} f(x) \right]_{x=x_0}. \quad (4.1)$$

$f(x)$ 'in ters transformu ise

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F(k)(x - x_0)^k \quad (4.2)$$

ile verilir. (4.1) ve (4.2) tanımlarını kullanarak aşağıdaki teoremler elde edilebilir.

4.3 Diferansiyel Dönüşüm Metodunda Bazı Teoremler

f , g ve h , x değişkeninin sürekli türevlenebilir fonksiyonlarını, c ise bir sabiti göstermek üzere,

Teorem 1:

f fonksiyonu g ve h'nin toplamı iken f'nin dönüşümü g ve h'nin dönüşümlerinin toplamına eşittir [25, 26].

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \text{ iken } F(k) = G(k) \pm H(k) \quad (4.3)$$

Teorem 2:

f fonksiyonu c sabiti ile g fonksiyonunun çarpımı iken f'nin transformu, g'nin transformu ile c sabitinin çarpımına eşittir [25, 26].

$$f(x) = cg(x) \text{ iken } F(k) = cG(k) \quad (4.4)$$

Teorem 3:

f fonksiyonu

$$f(x) = x^n \quad (4.5)$$

ile verilmiş olsun, bu halde f'nin dönüşümü

$$F(k) = \delta(k - n) = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases} \quad (4.6)$$

ile belirlenir.

Teorem 4:

n tamsayı olmak üzere; f, g'nin n'inci mertebeden türevi olsun. Bu halde f'nin transformu (4.8) denklemi ile verilir [25, 26].

$$f(x) = \frac{d^n}{dx^n} g(x) \quad (4.7)$$

ise

$$F(k) = \frac{(n+k)!}{k!} G(n+k) \quad (4.8)$$

İspat:

g(x)'in ters transformu

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} G(k)(x - x_0)^k \quad (4.9)$$

olup bu ifadenin n . mertebeden türevi

$$\begin{aligned} \frac{d^n g}{dx^n} &= n(n-1)(n-2) \dots 1G(n) + (n+1)n(n-1) \dots 2G(n+1)(x-x_0) \\ &\quad + (n+2)(n+1)n(n-1) \dots 3G(n+2)(x-x_0)^2 \\ &\quad + \dots (n+k)(n+k-1) \dots (k+1)G(n+k)(x-x_0)^k + \dots \end{aligned} \quad (4.10)$$

olarak bulunur. Düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{d^n g}{dx^n} &= n! G(n) + \frac{(n+1)!}{1!} G(n+1)(x-x_0) \\ &\quad + \frac{(n+2)!}{2!} G(n+2)(x-x_0)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{(n+k)!}{k!} G(n+k)(x-x_0)^k + \dots \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir. Böylelikle bu ifadeyi sonsuz seri toplamı formuna getirmek için gerekli olan genel terimde bulunmuş olur, şöyleki,

$$\frac{d^n g(x)}{dx^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} G(n+k)(x-x_0)^k. \quad (4.12)$$

(4.9) denklemi dikkate alınarak (4.12) ifadesinden $g(x)$ 'in transformu $G(k)$

$$G(k) = \frac{(n+k)!}{k!} G(n+k) \quad (4.13)$$

olarak bulunur.

Teorem 5:

$f(x)$ fonksiyonu g ve h gibi iki fonksiyonun çarpımı iken, yani

$$f(x) = h(x)g(x) \quad (4.14)$$

ise $f(x)$ 'in dönüşümü

$$F(k) = \sum_{k_1=0}^k G(k_1)H(k - k_1) \quad (4.15)$$

ile verilir [25, 26].

İspat:

$g(x)$ ve $h(x)$ 'in ters dönüşümü

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} G(k)(x - x_0)^k, \quad h(x) = \sum_{k_1=0}^{\infty} H(k_1)(x - x_0)^{k_1} \quad (4.16)$$

olup,

$$\begin{aligned} f(x) = & [G(0) + G(1)(x - x_0) + G(2)(x - x_0)^2 + \dots + G(k)(x - x_0)^k \\ & + \dots][H(0) + H(1)(x - x_0) + H(2)(x - x_0)^2 + \dots \\ & + H(k)(x - x_0)^k + \dots] \end{aligned} \quad (4.17)$$

düzenlenirse

$$\begin{aligned} f(x) = & G(0)H(0) + [G(0)H(1) + G(1)H(0)](x - x_0) + [G(0)H(2) + \\ & G(1)H(1) + G(2)H(0)](x - x_0)^2 + [G(0)H(3) + G(1)H(2) + G(2)H(1) + \\ & G(3)H(0)](x - x_0)^3 + [G(0)H(k) + G(1)H(k-1) + G(2)H(k-2) + \\ & G(k-2)H(2) + G(k-1)H(1) + G(k)H(0)](x - x_0)^k + \dots. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Bu ifadeyi

$$f(x) = g(x)h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^k G(k_1)H(k - k_1)(x - x_0)^k \quad (4.19)$$

olarak yazabiliriz. Buradan da $f(x)$ 'in transformunun

$$F(k) = \sum_{k_1=0}^k G(k_1)H(k - k_1) \quad (4.20)$$

olduğu açık olarak görülmektedir.

Teorem 6:

f tek değişkenli fonksiyonu n adet tek değişkenli fonksiyonun çarpımı olsun

$$f(x) = g_1(x)g_2(x)g_3(x) \dots g_{n-1}(x)g_n(x) \quad (4.21)$$

bu halde f 'in dönüşümü

$$F(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1) G_2(k_2 - k_1) \dots G_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}) \times G_n(k - k_{n-1}) \quad (4.22)$$

ile verilir [25].

İspat:

g_1 ve g_2 'nin çarpımına $h(x)$ diyelim;

$$h(x) = g_1(x)g_2(x) \quad (4.23)$$

iken Teorem 5, denklem (4.15)'den

$$H(k) = \sum_{k_1=0}^k G(k_1)G_2(k - k_1) \quad (4.24)$$

yazılabilir. $h(x)$ ile $g_3(x)$ 'in çarpımı $u(x)$ olsun

$$u(x) = h(x) g_3(x) \quad (4.25)$$

iken, $u(x)$ 'in dönüşümü teorem 5'ten

$$U(k) = \sum_{k_2=0}^k H(k_2)G_3(k - k_2) \quad (4.26)$$

olarak elde edilir. (4.24)'de $k = k_2$ yazılıp (4.26)'da bu ifade kullanılarak

$$U(k) = \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} G(k_1)G_2(k_2 - k_1)G_3(k - k_2) \quad (4.27)$$

elde edilir. $f(x)$, $u(x)$ ile $g_4(x)$ 'in çarpımı olsun;

$$f(x) = u(x)g_4(x) \quad (4.28)$$

f(x)'in dönüşümü

$$F(k) = \sum_{k_3=0}^k U(k_3)G_4(k - k_3) \quad (4.29)$$

olarak bulunur. (4.29)'da geçen terimler hesaplanır ve yerine konulur. Sonuç olarak

$$f(x) = g_1(x)g_2(x)g_3(x)g_4(x) \quad (4.30)$$

f dört fonksiyonun çarpımı iken (n=4) transformu

$$F(k) = \sum_{k_3=0}^k \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} G(k_1)G_2(k_2 - k_1)G_3(k_3 - k_2)G_4(k - k_3) \quad (4.31)$$

olarak bulunur.

f, 5 adet fonksiyonun çarpımı ise, yani n=5 iken

$$f(x) = g_1(x)g_2(x)g_3(x)g_4(x)g_5(x) \quad (4.32)$$

f'nin transformu

$$F(k) = \sum_{k_4=0}^k \sum_{k_3=0}^{k_4} \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} G(k_1)G_2(k_2 - k_1)G_3(k_3 - k_2)G_4(k_4 - k_3)G_5(k - k_4) \quad (4.33)$$

olur. Genel anlamda f, n adet fonksiyonun çarpımı ise

$$f(x) = g_1(x)g_2(x)g_3(x) \dots g_{n-1}(x)g_n(x) \quad (4.34)$$

iken transformunun

$$F(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1)G_2(k_2 - k_1) \dots G_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}) \times G_n(k - k_{n-1}) \quad (4.35)$$

olduğu (4.31) ve (4.33) dönüşüm formüllerinden kolayca görülür.

Teorem 7:

a bir sabit olmak üzere, f fonksiyonu

$$f(x) = g(x + a) \quad (4.36)$$

olarak tanımlanmışsa f 'in transformu

$$F(k) = \sum_{h=k}^{\infty} \binom{h}{k} a^{h-k} G(h) \quad (4.37)$$

ile verilir [25].

İspat:

$f(x)$ 'in $x = x_0$ civarındaki ters transformu

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} G(k)(x + a - x_0)^k \quad (4.38)$$

olup bu sonsuz seri toplamının ilk dört terimi açık olarak yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} f(x) = & G(0) + G(1)(x - x_0 + a) + G(2)(x - x_0 + a)^2 \\ & + G(3)(x - x_0 + a)^3 + G(4)(x - x_0 + a)^4 + \dots \end{aligned} \quad (4.39)$$

elde edilir. Bu ifade $(x - x_0)$ 'in kuvvetlerinin ortak parantezine alınırsa

$$\begin{aligned} f(x) = & G(0) + aG(1) + a^2G(2) + a^3G(3) + a^4G(4) + \dots \\ & + [G(1) + 2aG(2) + 3a^2G(3) + 4a^3G(4) + \dots](x - x_0) \\ & + [G(2) + 3aG(3) + 6a^2G(4) + \dots](x - x_0)^2 \\ & + [G(3) + 4aG(4) + \dots](x - x_0)^3 + \dots \end{aligned} \quad (4.40)$$

olarak elde edilir. Düzenlenmiş hali (4.41) denkleminde yer almaktadır,

$$\begin{aligned}
f(x) = & \sum_{h=0}^{\infty} a^h G(h) + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{h!}{1! (h-1)!} a^{h-1} G(h) (x - x_0) \\
& + \sum_{h=2}^{\infty} \frac{h!}{2! (h-2)!} a^{h-2} G(h) (x - x_0)^2 \\
& + \sum_{h=3}^{\infty} \frac{h!}{3! (h-3)!} a^{h-3} G(h) (x - x_0)^3 + \dots
\end{aligned} \tag{4.41}$$

bu ifade

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=k}^{\infty} \binom{h}{k} a^{h-k} G(h) (x - x_0)^k \tag{4.42}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan f 'nin dönüşümünün

$$F(k) = \sum_{h=k}^{\infty} \binom{h}{k} a^{h-k} G(h) \tag{4.43}$$

olduğu açık olarak görülür.

Teorem 8:

a_1 ve a_2 keyfi sabitler olmak üzere, f fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanırsa

$$f(x) = g_1(x + a_1) g_2(x + a_2) \tag{4.44}$$

bu fonksiyonun dönüşümü

$$F(k) = \sum_{k_1=0}^k \sum_{h_1=k_1}^N \sum_{h_2=k-k_1}^N \binom{h_1}{k_1} \binom{h_2}{k-k_1} a_1^{h_1-k_1} a_2^{h_2-k+k_1} G_1(h_1) G_2(h_2) \tag{4.45}$$

ile verilir [25].

İspat:

$g_1(x + a_1)$ 'in dönüşümü

$$G_1(k) = \sum_{h_1=k}^{\infty} \binom{h_1}{k} a_1^{h_1-k} G_1(h_1) \tag{4.46}$$

$g_2(x + a_1)$ 'in transformu

$$G_2(k) = \sum_{h_2=k}^{\infty} \binom{h_2}{k} a^{h_2-k} G_2(h_2) \quad (4.47)$$

dir. Teorem 5, denklem (4.15)'dan

$$F(k) = \sum_{k_1=0}^k G_1(k_1) G_2(k - k_1) \quad (4.48)$$

elde edilir. $G_1(k_1)$ ve $G_2(k - k_1)$ ifadeleri (4.46) ve (4.47) kullanılarak belirlenip (4.48)'de yerine konursa $F(k)$,

$$F(k) = \sum_{k_1=0}^k \sum_{h_1=k_1}^{\infty} \sum_{h_2=k-k_1}^{\infty} \binom{h_1}{k_1} \binom{h_2}{k-k_1} a^{h_1-k_1} a^{h_2-k+k_1} G_1(h_1) G_2(h_2) \quad (4.49)$$

olarak elde edilir.

Teorem 9:

f fonksiyonu

$$f(x) = g_1(x + a_1) g_2(x + a_2) \dots g_{n-1}(x + a_{n-1}) g_n(x + a_n) \quad (4.50)$$

şeklinde tanımlı olsun, f 'nin transformu

$$\begin{aligned} F(k) = & \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \sum_{h_1=k_1}^N \sum_{h_2=k_2-k_1}^N \sum_{h_3=k_3-k_2}^N \dots \times \\ & \sum_{h_{n-1}=k_{n-1}-k_{n-2}}^N \sum_{h_n=k-k_{n-1}}^N \binom{h_1}{k_1} \binom{h_2}{k_2-k_1} \binom{h_3}{k_3-k_2} \dots \binom{h_{n-1}}{k_{n-1}-k_{n-2}} \times \quad (4.51) \\ & \binom{h_n}{k-k_{n-1}} a_1^{h_1-k_1} a_2^{h_2-k_2+k_1} a_3^{h_3-k_3+k_2} \dots a_{n-1}^{h_{n-1}-k_{n-1}+k_{n-2}} a_n^{h_n-k+k_{n-1}} \times \\ & G_1(h_1) G_2(h_2) \dots \times G_{n-1}(h_{n-1}) G_n(h_n) \end{aligned}$$

ile verilir [25] .

Teorem 10:

f , fonksiyonu

$$f(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt \quad (4.52)$$

ile verilsin, f 'nin dönüşümü

$$F(k) = \frac{G(k-1)}{k}, \quad k \geq 1 \quad (4.53)$$

ile verilir [26].

İspat:

$g(t)$ 'nin ters dönüşümü

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} G(k) (t - x_0)^k \quad (4.54)$$

ifadesi (4.52) de kullanılırsa

$$f(x) = \int_{x_0}^x \sum_{k=0}^{\infty} G(k) (t - x_0)^k dt \quad (4.55)$$

olur, seriyi açarsak

$$f(x) = \int_{x_0}^x \{G(0) + G(1)(t - x_0) + G(2)(t - x_0)^2 + G(3)(t - x_0)^3 + \dots G(n)(t - x_0)^n\} dt \quad (4.56)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} f(x) &= G(0)(x - x_0) \\ &+ G(1) \int_{x_0}^x (t - x_0) dt + G(2) \int_{x_0}^x (t - x_0)^2 dt + \dots \\ &+ G(n) \int_{x_0}^x (t - x_0)^n dt + \dots \end{aligned} \quad (4.57)$$

integraller alınır

$$f(x) = G(0)(x - x_0) + \frac{1}{2}G(1)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3}G(2)(x - x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n+1}G(n)(x - x_0)^n + \dots \quad (4.58)$$

buradan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G(k)}{k+1} (x - x_0)^{k+1} \quad (4.59)$$

elde edilir. k'yı birden başlatmamız halinde ise

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G(k-1)}{k} (x - x_0)^k, \quad k \geq 1 \quad (4.60)$$

olur, bu durumda f'in diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \frac{G(k-1)}{k}, \quad k \geq 1, \quad F(0) = 0 \quad (4.61)$$

olarak elde edilerek ispat gerçekleştirilmiş olur.

Teorem 11:

f fonksiyonu

$$f(x) = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_{n-1}} \dots \int_{x_0}^{x_3} \int_{x_0}^{x_2} \int_{x_0}^{x_1} g(t) dt dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \quad (4.62)$$

şeklinde tanımlı iken diferansiyel dönüşümü,

$$F(k) = \frac{(k-n)!}{k!} G(k-n), \quad k \geq n \quad (4.63)$$

ile verilir [26].

İspat:

Önce aşağıdaki gibi bir fonksiyon tanımlayalım;

$$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} g(t) dt \quad (4.64)$$

olsun, diferansiyel dönüşümü (4.59) denkleminde

$$I_1(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G(k)}{k+1} (x_1 - x_0)^{k+1} \quad (4.65)$$

olarak elde edilir.

$$I_2 = \int_{x_0}^{x_2} \int_{x_0}^{x_1} g(t) dt dx_1 \quad (4.66)$$

olsun, I_2 'nin diferansiyel dönüşümü ise,

$$I_2(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G(k)}{(k+1)(k+2)} (x_2 - x_0)^{k+2} \quad (4.67)$$

olur. Genelleştirme yapılarak, I_n aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$I_n = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_{n-1}} \dots \int_{x_0}^{x_3} \int_{x_0}^{x_2} \int_{x_0}^{x_1} g(t) dt dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{n-1} dx \quad (4.68)$$

ve genelleştirme yapılarak diferansiyel transformu

$$I_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G(k)}{(k+1)(k+2)\dots(k+n)} (x - x_0)^{k+n} \quad (4.69)$$

olarak elde edilir. $I_n = f(x)$ olduğundan $I_n(k) = F(k)$ 'dir.

Teorem 12:

f fonksiyonu (4.70) ile verilmişse,

$$f(x) = g(x) \int_{x_0}^x h(t) dt \quad (4.70)$$

f 'nin transformu

$$F(k) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{k_1} G(k - k_1) H(k_1 - 1), \quad k \geq 1 \quad (4.71)$$

dir [26].

İspat:

$g(x)$ 'in ters diferansiyel dönüşümü denklem 4.1b ile bulunurken, $\int_{x_0}^x h(t)dt$ 'in transformu ise denklem (4.59) ile bulunur. Teorem 5 denklem (4.15) ile de bu iki fonksiyonun çarpımı olan $f(x)$ 'in dönüşümü bulunabilir.

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} G(k)(x - x_0)^k \quad (4.72)$$

ve

$$u(x) = \int_{x_0}^x h(t)dt \rightarrow u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H(k)}{k+1} (x - x_0)^{k+1} \quad (4.73)$$

ise

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} G(k)(x - x_0)^k \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H(k)}{k+1} (x - x_0)^{k+1} \quad (4.74)$$

yazılabilir. Burada geçen ifadeleri açık olarak yazıp gerekli işlemleri yaparsak

$$\begin{aligned} f(x) = & G(0)H(0)(x - x_0) + \left[\frac{1}{2} G(0)H(1) + G(1)H(0) \right] (x - x_0)^2 \\ & + \left[\frac{1}{3} G(0)H(2) + \frac{1}{2} G(1)H(1) + G(2)H(0) \right] (x - x_0)^3 \\ & + \left[\frac{1}{4} G(0)H(3) + \frac{1}{3} G(1)H(2) + \frac{1}{2} G(2)H(1) \right. \\ & \left. + G(3)H(0) \right] (x - x_0)^4 + \dots \end{aligned} \quad (4.75)$$

elde edilir, düzenlenirse

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k_1=1}^k \frac{1}{k_1} G(k - k_1) H(k_1 - 1) (x - x_0)^k \quad (4.76)$$

olarak elde edilir. Bu ifadeden f 'nin diferansiyel dönüşümünün

$$F(k) = \sum_{k_1=1}^k \frac{1}{k_1} G(k - k_1) H(k_1 - 1) \quad (4.77)$$

olduğu açık olarak görülür.

5. EKSENİ EĞİK OLMAYAN KENDİ AĞIRLIĞI ETKİSİNDEKİ EULER-BERNOULLİ KİRİŞ-KOLONLARI İÇİN BURKULMA KRİTİK YÜKÜNÜN BELİRLENMESİ

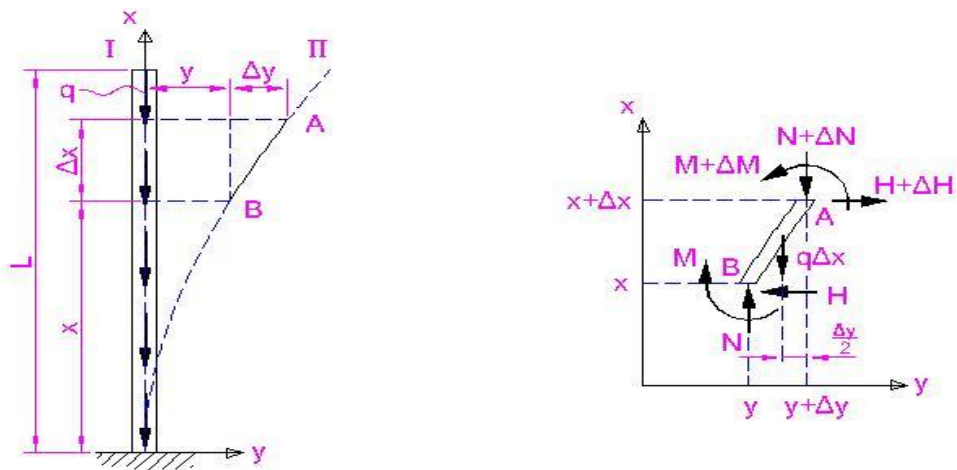
5.1 Amaç

Bu bölümde, eksenî eğik olmayan, farklı yükleme ve sınır şartlarına sahip Euler – Bernoulli kirişleri için burkulma kiritik yüklerinin ifadeleri belirlenecektir [3, 28, 30].

5.2 Düzgün Yayılı Yüke Maruz Kiriş-Kolonun Burkulma Kritik Yüğü

5.2.1 Ankastre-serbest mesnetli düşey kiriş-kolon

Şekil 5.1a’da alt ucu düşey ankastre, üst ucu serbest, kendi ağırlığı etkisindeki bir kolon gösterilmektedir. Bu tip bir yükleme ve sınır şartına sahip kolonun burkulma kritik yükünün belirlemek için; I konumundan deforme olarak II konumuna gelmiş kirişten, orjinden x uzaklığında bulunan B noktası ile $x + \Delta x$ mesafesinde bulunan A noktası arasında yer alan AB kiriş elemanının denge denklemleri oluşturulmalıdır.



Şekil 5.1 : Ankastre serbest mesnetli kiriş-kolon a) Yükleme şekli b) Deforme olmuş AB elemanı ve kesit tesirleri.

Şekil 1b' deki düşey kuvvet dengesinden

$$N - N - \Delta N - q\Delta x = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\Delta N}{\Delta x} = -q$$

elde edilir. Limit alınırsa yani $\Delta x \rightarrow 0$ iken

$$\frac{dN}{dx} = -q \quad (5.2)$$

halini alır. İntegrasyon ile

$$\int dN = -q \int dx \rightarrow \int_N^0 d\xi = -q \int_x^l d\eta$$

orjinden herhangi bir x mesafesindeki normal kuvvet

$$N = q(l - x) \quad (5.3)$$

olarak bulunur. Yatay kuvvet dengesinden

$$-H + H + \Delta H = 0$$

$$\Delta H = 0 \quad (5.4)$$

(5.4) denklemi, H kesme kuvvetinin çubuk boyunca değişmediğini ifade eder. A noktasına göre moment alınırsa

$$M + \Delta M - M - H\Delta x + q\Delta x \frac{\Delta y}{2} - N\Delta y = 0$$

$\Delta x\Delta y$ çarpımının çok küçük olması nedeniyle ihmal edilir ve

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} = H + N \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

limit alınırsa

$$\frac{dM}{dx} = H + N \frac{dy}{dx}$$

elde edilir.

Bu son denklemde moment M yerine $-EIy''$ yazılır ve denklem düzenlenirse

$$H = -EI \frac{d^3y}{dx^3} - N \frac{dy}{dx} \quad (5.5)$$

$x = l$ 'de $y'''(l)=0$ olup, (5.5) denkleminde bu verileri kullanılırsa H 'ın değeri sıfır olarak bulunur. Ayrıca denklem (5.4)'ten kesme kuvveti H 'ın, x 'in fonksiyonu olmadığı; yani x 'e göre türevinin sıfır olduğu anlaşılmaktadır [28]. Bu iki hal dikkate alınarak (5.5) denkleminin bir kez x 'e göre türevi alınırsa elastik eğrinin diferansiyel denklemi aşağıdaki şekilde

$$EI \frac{d^3y}{dx^3} + q(l-x) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (5.6)$$

değişken katsayılı homojen bir diferansiyel denklem olarak bulunur. Bu tip denklemlerin çözümü sonsuz seriler yardımıyla veya enerji metodu gibi yaklaşık çözüm metodları kullanılarak gerçekleştirilir [3]. Literatürde yer alan çözümün anlaşılabilirliğini artırabilmek amacıyla, bu çalışmada ara adımlara da yer verilerek sonsuz seriler yardımıyla çözüm üretilmiştir.

Denklem (5.6)'yı Bessel diferansiyel denklemi formuna getirmek için

$$z = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{q}{EI}} (l-x)^3 \quad \text{ve} \quad g(z) = \frac{dz}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{3qz}{2EI}} \quad (5.7)$$

dönüşümü yapılır. (5.6) nolu diferansiyel denklemde geçen türevler zincir kuralı yardımıyla aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} g(z)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2} \frac{dz}{dx} g(z) + \frac{dy}{dz} \frac{dg(z)}{dz} \frac{dz}{dx}$$

Bu son ifadede geçen türevler hesaplanıp denkleme konulduğunda y 'nin x 'e göre ikinci türevi, z in fonksiyonu olarak

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{3q}{2EI}\right)^{\frac{2}{3}} \left[z^{2/3} \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{3} z^{-1/3} \frac{dy}{dz} \right]$$

şeklinde elde edilir. y 'nin x 'e göre üçüncü türevini belirlemek için bu son ifadeyi x 'e göre bir defa türetmek gerekir;

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{3}{2} \frac{q}{EI}\right)^{\frac{2}{3}} \left[\frac{d^3y}{dz^3} \frac{dz}{dx} z^{2/3} + \frac{d^2y}{dz^2} \frac{d(z^{2/3})}{dz} \frac{dz}{dx} + \frac{1}{3} \frac{d^2y}{dz^2} \frac{dz}{dx} z^{-1/3} + \frac{1}{3} \frac{dy}{dz} \frac{d(z^{-1/3})}{dz} \frac{dz}{dx} \right]$$

bu ifadede geçen türevlerin değerleri hesaplanıp yerine yazılırsa, y 'nin x 'e göre üçüncü türevi

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3}{2} \frac{q}{EI} \left[-\frac{d^3y}{dz^3} z - \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{9z} \frac{dy}{dz} \right]$$

olarak belirlenir. d^3y/dx^3 ile dy/dx 'in ifadeleri (5.6) nolu denklemde yerine yazılır ve $q(l-x)/EI$ 'in $(3qz/2EI)^{2/3}$ 'e eşit olduğu dikkate alınarak

$$z^2 \frac{d^3y}{dx^3} + z \frac{d^2y}{dz^2} + \left(z^2 - \frac{1}{9}\right) \frac{dy}{dz} = 0$$

elde edilir. $u(z) = dy/dz$ dönüşümü yapılarak

$$z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + z \frac{du}{dz} + \left(z^2 - \frac{1}{9}\right) u = 0 \quad (5.8)$$

Bessel diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklemin $z=0$ kaldırılabilir türden bir tekil noktasıdır. Bu nedenle, diferansiyel denklemin çözümünde Frobenius metodunu kullanabiliriz [29], şöyle ki,

$$u(z) = z^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

u 'nun z 'e göre birinci türevi

$$\frac{du}{dz} = z^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n) a_n z^{n-1},$$

ikinci türevi

$$\frac{d^2u}{dz^2} = z^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n)(\lambda + n - 1) a_n z^{n-2}$$

olup bu ifadeler denklemde yerine yazılır ve düzenleme yapılırsa

$$\left[\lambda^2 - \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right] a_0 + \left[(\lambda + 1)^2 - \frac{1}{9} \right] a_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left[(\lambda + n)^2 - \frac{1}{9} \right] a_n + a_{n-2} \right\} z^n = 0$$

Buradan $a_0 \neq 0$ iken $\lambda = \pm \frac{1}{3}$ olarak belirlenir. n 'in çift tamsayı değerleri için rekürsif bağıntı

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{(\lambda + n)^2 - \frac{1}{9}}, \quad n = 2m \text{ iken } m \in \mathbb{Z}^+$$

olup, ikinci terimin sıfır olabilmesi için $a_1 = 0$ alınması gerektiği görülür. Rekürsif bağıntı gereği tek indisli katsayılar sıfır olmalıdır.

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2n-1} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

$\lambda = \pm \frac{1}{3}$ için çift indisli katsayılar belirlenirse (5.8) denkleminin genel çözümü

$$\begin{aligned} u(z) = & C_1 z^{-1/3} \left(1 - \frac{3}{8} z^2 + \frac{9}{320} z^4 - \frac{9}{10240} z^6 \dots \right) \\ & + C_2 z^{1/3} \left(1 - \frac{3}{16} z^2 + \frac{9}{896} z^4 - \frac{9}{35840} z^6 \dots \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

olarak belirlenir. Problemin sınır şartları

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=l} = 0$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=l} = \left(\frac{3q}{2EI} \right)^{\frac{2}{3}} \left[z^{\frac{2}{3}} \frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{1}{3} z^{-\frac{1}{3}} \frac{dy}{dz} \right]_{z=0} = 0$$

$$\left[z^{\frac{2}{3}} \frac{du}{dz} + \frac{1}{3} z^{-\frac{1}{3}} u(z) \right]_{z=0} = 0$$

şeklinde ifade edilir. $z=0$ da, $u(z)$ 'in sıfıra eşit olabilmesi

$$C_2 = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıyla mümkündür. Ankastre uçta dönme açısı sıfır olacağından

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0 \xrightarrow{u(z)=dy/dz} u(z)|_{z(x=0)} = 0$$

yazılabilir.

$$C_1 \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{ql^3}{EI}} \right)^{-1/3} \left[1 - \frac{3}{8} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{ql^3}{EI}} \right)^2 + \frac{9}{320} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{ql^3}{EI}} \right)^4 - \frac{9}{10240} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{ql^3}{EI}} \right)^6 + \dots \right] = 0$$

köşeli parantezler içindeki ifade, -1/3'üncü mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu olup,

$$J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{ql^3}{EI}} \right) = 0$$

bu ifadeyi sıfır yapan en küçük değerin 1.866 olduğu tablolardan okunur,

$$\frac{2}{3} \sqrt{\frac{ql^3}{EI}} = 1.866.$$

Burkulmanın gerçekleşeceği minimum yük değeri

$$(ql)_{kr} = 7.837 \frac{EI}{l^2} \quad (5.10a)$$

olarak belirlenir. Bu değer A.G. Greenhill tarafından 1881 yılında yapılan çalışma ile literatüre girmiştir. Greenhill [2], “Bir direğin (*pole*) boyu düşey pozisyonundaki stabilitesini bozmadan ne kadar artırılabilir?” sorusuna yanıt aramış ve

$$l_{kr} = \sqrt[3]{7.837 \frac{EI}{q}} \quad (5.10b)$$

olarak belirlemiştir.

5.2.2 İki ucu basit mesnetli düşey kiriş-kolon

Bu durumda $dH/dx = 0$ olduğundan (5.5) denkleminin x 'e göre türevi alınır, elastik eğrinin diferansiyel denklemi

$$\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^3 y}{dx^3} \right) + \frac{d}{dx} \left[q(l-x) \frac{dy}{dx} \right] = 0 \quad (5.11)$$

şeklinde elde edilir. Aşağıdaki sınır şartları yardımıyla

$$y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0$$

5.2.1 bölümündekine benzer metodla burkulma kritik yük değeri

$$(ql)_{kr} = 18.57 \frac{EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.729l)^2} \quad (5.13a)$$

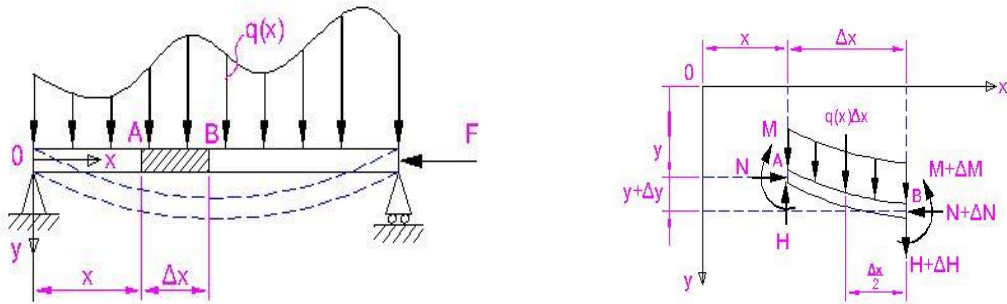
olarak bulunur. Kritik uzunluk ise

$$l_{kr} = \sqrt[3]{18.57 \frac{EI}{q}} \quad (5.13b)$$

olarak elde edilir.

5.2.3 İki ucu basit mesnetli yatay kiriş-kolon

Burada iki ucu basit mesnetli, sabit kesitli, eksenel F basınç kuvveti ve düzgün yayılı yüke maruz Şekil 5.2a'da gösterilen yatay kiriş-kolonun burkulma kritik yük değeri belirlenecektir [30].



Şekil 5.2 : a) Basit mesnetli kiriş-kolon a) Yükleme şekli b) Deforme olmuş AB elemanı ve kesit tesirleri.

x yönündeki kuvvetlerin dengesinden

$$N - N - \Delta N = 0$$

$$\Delta N = 0 \quad (5.14)$$

Bu ifade, kesitte oluşan normal kuvvetin x ile değişmediğini gösterir. Kesme kuvveti N, F eksenel kuvvetine eşittir. y yönündeki kuvvetlerin dengesinden

$$-H + H + \Delta H + q\Delta x = 0$$

$$\frac{\Delta H}{\Delta x} = -q(x)$$

elde edilir ve $\Delta x \rightarrow 0$ iken limit alınır

$$\frac{dH}{dx} = -q(x) \quad (5.15)$$

elde edilir.

A noktasına göre moment alınır

$$\sum M_A = 0 \rightarrow N\Delta y + H\Delta x + M - M - \Delta M - q(x)\Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$(\Delta x)^2 \rightarrow 0$ olduğundan

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} = H + N \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Bu ifadenin önce limiti ardından x'e göre türevi alınır

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dH}{dx} + N \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$M = -EIy''$, $N=F$ ve (5.15) ifadesi kullanılarak

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + F \frac{d^2 y}{dx^2} = q(x) \quad (5.16)$$

elde edilir. Yayılı yükün sabit olduğu kabul yapılarak $q(x) = q$, (5.16) denklemi iki kez integer edilir ve $\alpha^2 = F/EI$ kısaltması kullanılırsa

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha^2 y = \frac{q}{2EI} x^2 + Ax + B \quad (5.17)$$

elde edilir. Burada A ve B integrasyon sabitleri olup, belirlemek için sınır şartları kullanılır. $x=0$ da moment ve yer değiştirme yoktur, yani $y(0) = y''(0) = 0$ olup, bu sınır şartları kullanılarak B integrasyon sabiti

$$B = 0$$

olarak elde edilir. $x=l$ 'de de moment ve yer değiştirme olmayacağından, yani $y(l) = y''(l) = 0$, A integrasyon sabiti

$$A = -\frac{ql}{2EI}$$

olarak elde edilir. A ve B için bulunan değerler (5.17) de yazılarak

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = \frac{q}{2EI} x^2 - \frac{ql}{2EI} x \quad (5.18)$$

elastik eğrinin diferansiyel denklemi şeklinde belirlenir. Bu denklemin homojen çözümü

$$y_h(x) = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x)$$

özel çözümü

$$y_p = Cx^2 + Dx + E$$

dir. Bu ifade (5.18) de yerine konursa C, D ve E katsayıları belirlenir. Özel çözüm

$$y_p(x) = \frac{q}{2EI\alpha^2} x^2 - \frac{ql}{2EI\alpha^2} x - \frac{q}{EI\alpha^4}$$

olup, genel çözüm ise

$$y(x) = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x) + \frac{q}{2EI\alpha^2} x^2 - \frac{ql}{2EI\alpha^2} x - \frac{q}{EI\alpha^4} \quad (5.19)$$

olarak elde edilir. A ve B katsayılarını belirlemek için iki adet sınır şartına ihtiyaç duyulur. Bunlardan biri $x=0$ 'daki yer değiştirmedir,

$$y(0) = 0$$

diğeri ise maksimum yer değiştirmenin $x=l/2$ 'de oluşmasıdır, yani

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=l/2} = 0$$

dir. Bu iki sınır şartı kullanılarak

$$y(x) = \frac{q}{EI} \left[tg \left(\frac{\alpha l}{2} \right) \sin \alpha x + \cos \alpha x - 1 \right] - \frac{qx}{2EI\alpha^2} (l - x) \quad (5.20)$$

elde edilir. Burada $u = \alpha l/2$ dönüşümü yapılırsa elastik eğri denklemi

$$y(x) = \frac{ql^4}{16EIu^4} \left[\frac{\cos(u - 2ux/l)}{\cos u} - 1 \right] - \frac{ql^2x}{8EIu^2} (l - x) \quad (5.21)$$

olarak elde edilir. Maksimum yer değiştirme

$$y(l/2) = \frac{ql^4}{32EIu^4} [2 \sec u - u^2 - 2] \quad (5.22)$$

olup, bu ifade $\cos u = 0$ için sonsuz değeri alır. Bu durumda burkulma kritik yük değeri

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (5.23)$$

olur.

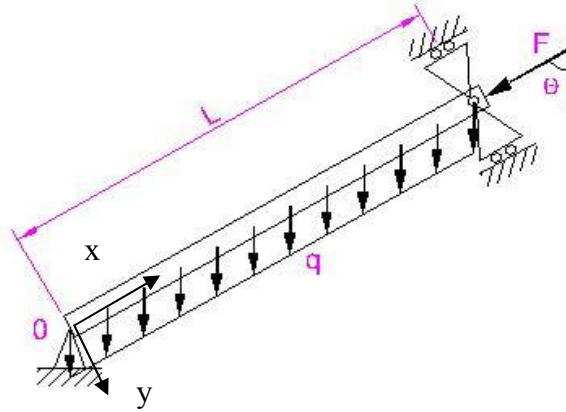
6. EĞİK EKSENLİ KENDİ AĞIRLIĞI VE DIŞ YÜK ETKİSİNDEKİ EULER-BERNOULLİ KİRİŞ-KOLONU İÇİN BURKULMA KRİTİK YÜKÜNÜN BELİRLENMESİ

6.1 Amaç

Bu bölümde eğik bir kiriş-kolonun burkulma davranışı analiz edilecektir. Bu amaçla elastik eğrisinin diferansiyel denklemi enerji ve varyasyon metodu kullanılarak elde edilecektir. Ardından burkulma determinantı oluşturularak farklı mesnetleme şartları için burkulma kritik yük ve ağırlık değerleri belirlenecektir. Sınır şartlarının ve eğim açısının burkulma üzerine etkileri irdelenecektir. Ayrıca kritik yük değerinin yakın komşuluğunda kiriş-kolonun yer değiştirme davranışları incelenecektir.

6.2 İki Ucu Basit Mesnetli Eğik Kiriş-Kolon

Bu bölümde Şekil 6.1’de gösterilen iki ucu basit mesnetli eğik kiriş-kolonun burkulma davranışı irdelenecektir.



Şekil 6.1 : Kendi ağırlığı ve F dış yükü etkisindeki eğik kiriş-kolon.

6.2.1 Eğik kiriş-kolonun eksenel yöndeki yer değiştirmesi

Şekil 6.1’deki dış yükün yaptığı işi hesaplayabilmek için düşeyle θ açısı yapan eksen boyunca kirişin yapacağı yer değiştirme, Δ ’nın türetilmesi yapılacaktır.

$d\Delta$, deforme olmuş kirişin diferansiyel elemanının uzunluğu ds ’in

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

deforme olmamış kirişin diferansiyel elemanının uzunluğu dx ile arasındaki fark olup,

$$d\Delta = ds - dx = dx \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - 1 \right) \quad (6.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifade de yer alan köklü terim, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 < 1$ şartını sağlandığı için sıfır civarında Taylor serisine açılabilir, yani

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + \dots, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 < 1$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada dy/dx 'in dört ve daha yüksek kuvvetlerinin katkısı ihmal edilebilecek mertebededir. Bu nedenle

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

eşitliğin sağ tarafındaki ilk iki terimi almak yeterlidir. Bu eşitlik (6.1) de kullanılırsa

$$d\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \quad (6.2)$$

kirişin düşeyle θ açısı yapan eksendeki diferansiyel yer değiştirmesi olup, bu ifadeyi kiriş boyunca integre ederek kirişin aynı eksen boyunca yapacağı toplam yer değiştirme

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \quad (6.3)$$

olarak belirlenmiş olur.

6.2.2 Eğik kiriş-kolonun toplam potansiyel enerjisi

Şekil 6.1'deki F dış yükü ve q ağırlığı etkisi altındaki eğik kiriş-kolonun burkulma kritik yük değerini belirlemek için öncelikle toplam potansiyel enerji ifadesi

yazılmalıdır. Toplam potansiyel enerji, dış kuvvet ve hacim kuvvetlerinin potansiyel enerjisi V ile iç potansiyel enerjinin U toplamına eşittir,

$$\Pi(y) = U + V. \quad (6.4)$$

İç potansiyel enerji, elastik şekil değişimi enerjisi olup

$$U = \int_0^l \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx \quad (6.5)$$

ile verilir. Dış ve hacim kuvvetlerinin potansiyel enerjisi bu kuvvetlerin yaptığı işin toplamının işaretçe negatifine eşittir. W_N dış ve hacim kuvvetlerinin kiriş kesitine normal doğrultudaki bileşenlerinin yaptığı işi, W_T ise aynı kuvvetlerin kiriş kesitine teğet yöndeki bileşenlerinin yaptığı işi temsil etmesi halinde; V potansiyeli

$$V = -W_N - W_T \quad (6.6)$$

ifadesi ile bulunur. Denklem (6.4) ile verilen potansiyel ifadesini belirlemek için Şekil 6.1’de verilen kiriş-kolona etkiyen kuvvetlerin kiriş kesitine dik ve teğet bileşenlerini belirlenmelidir. Kiriş ağırlığının kiriş kesitine paralel (kesit teğeti üzerindeki) bileşeni q_s ve kiriş kesitine normal bileşeni q_c

$$q_s = q \sin \theta, \quad q_c = q \cos \theta$$

ifadeleri ile verilir. q_s hacim kuvvetinin yaptığı iş ise,

$$W_{q_s} = W_T$$

$$W_T = \int_0^l q_s y dx \quad (6.7)$$

ile ifade edilir. Kesitteki normal kuvvet, tekil yük F ile hacim kuvveti q’nun x eksenini üzerindeki bileşenin toplamı olup

$$N(x) = F + q_c(l - x) \quad (6.8)$$

şeklinde ifade edilir. N(x) normal kuvvetinin yaptığı iş ise

$$dW_N = N d\Delta \quad (6.9)$$

$$W_N = \frac{1}{2} \int_0^l [F + q_c(l-x)] \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx.$$

şeklinde ifade edilir. Toplam potansiyel ifadesi (6.5), (6.7), (6.9) denklemlerinin (6.4) denkleminde yazılmasıyla

$$\Pi(y) = \int_0^l \left\{ \frac{EI}{2} (y'')^2 - \frac{1}{2} [F + q_c(l-x)] (y')^2 - q_s y \right\} dx \quad (6.10)$$

olarak elde edilir.

6.2.3 Toplam potansiyelin varyasyonu

Dengede olan bir sistemin Π toplam potansiyeli kararlı olmalıdır; yani $\delta\Pi$ varyasyonu sifıra eşit olmalıdır. Bu nedenle (6.10) denkleminin varyasyonunu alınır;

$$\psi(x, y, y', y'') = \frac{EI}{2} (y'')^2 - \frac{1}{2} [F + q_c(l-x)] (y')^2 - q_s y \quad (6.11)$$

olmak üzere, toplam potansiyel,

$$\Pi = \int_0^l \psi(x, y, y', y'') dx \quad (6.12)$$

şeklinde ifade edilebilir. Toplam potansiyel enerjiyi minimize yapacak bir parametrelili eğri ailesi

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x) \quad (6.13)$$

olarak seçilirse (6.10)'un integrantı

$$\psi(x, y, y', y'') = \psi(x, y(x) + \varepsilon \eta(x), y'(x) + \varepsilon \eta'(x), y''(x) + \varepsilon \eta''(x))$$

ya da

$$\psi(x, y, y', y'') = \psi(x, \varepsilon) \quad (6.14)$$

şeklinde ifade edilebilir. (6.10)'un ε 'a göre türevi alınırken (3.35) denklemi kullanılmalıdır.

$$\Pi'(\varepsilon) = \int_0^l \left(\frac{d\psi}{dY} \frac{dY}{d\varepsilon} + \frac{d\psi}{dY'} \frac{dY'}{d\varepsilon} + \frac{d\psi}{dY''} \frac{dY''}{d\varepsilon} \right) dx \quad (6.15)$$

$\varepsilon = 0$ iken $Y(x) = y(x)$ olduğundan

$$\Pi'(0) = 0$$

$$\Pi'(0) = \int_0^l \left(\frac{d\psi}{dy} \eta + \frac{d\psi}{dy'} \eta' + \frac{d\psi}{dy''} \eta'' \right) dx = 0 \quad (6.16)$$

ifadesi kısmi integrasyonla

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[\frac{d\psi}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dy'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d\psi}{dy''} \right) \right] \eta dx + \left[\frac{d\psi}{dy'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dy''} \right) \right] \eta \Big|_0^l \\ + \frac{d\psi}{dy''} \eta' \Big|_0^l = 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

haline dönüştürülür. Bu denklemin sıfıra eşit olması için terimlerinin ayrı ayrı sıfıra eşit olması gerekir. $\eta(0) = \eta(l) = 0$ olduğu için ikinci terim sıfıra eşittir,

$$\left[\frac{d\psi}{dy'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dy''} \right) \right] \eta \Big|_0^l = 0. \quad (6.18)$$

η , $0 < x < l$ aralığında sıfır dışı değere sahiptir, bu nedenle integralin sıfır olması ancak ve ancak η 'nin katsayısının sıfır olması ile mümkündür, yani

$$\frac{d\psi}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dy'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d\psi}{dy''} \right) = 0 \quad (6.19)$$

olur. Son olarak, üçüncü terimin sıfır olması gerekir

$$\frac{d\psi}{dy''} \eta' \Big|_0^l = 0 \quad (6.20)$$

bunun sağlanabilmesi içinse

$$\frac{d\psi}{dy''} \Big|_0^l = 0 \quad (6.21a)$$

veya

$$\left. \frac{d\eta}{dx} \right|_0^l = 0 \quad (6.21b)$$

eşitliklerinden biri sağlanmalıdır. İki ucu basit mesnetli bir kiriş için (6.21a) denklemi sağlanır. (6.21b) ise ancak iki ucu ankastre mesnet için sağlanabilir. İncelediğimiz kirişin iki ucu da basit mesnetli olduğundan (6.10) toplam potansiyel ifadesinin minimum olması için (6.19) ve (6.21a) şartlarının sağlanması gerekir.

(6.19) ve (6.21a)'da geçen türevler hesaplanırsa, iki ucu basit mesnetli eksenî düşeyle θ açısı yapan, kendi ağırlığı q ve F tekil yüküne maruz kiriş-kolonun elastik eğrisinin diferansiyel denklemi

$$\frac{d^2}{dx^2}(EIy'') + \frac{d}{dx}\{[F + q_c(l - x)]y'\} - q_s = 0 \quad (6.22)$$

olarak bulunur. Sınır şartları ise

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y''} \right|_{x=l} = EIy''|_{x=l} = 0 \Rightarrow y''(x=l) = 0 \quad (6.23a)$$

ve

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y''} \right|_{x=0} = EIy''|_{x=0} = 0 \Rightarrow y''(x=0) = 0 \quad (6.23b)$$

olarak elde edilir.

6.2.4 Elastik eğrinin diferansiyel denkleminin boyutsuzlaştırılması

Elastik eğrinin diferansiyel denklemi (6.22) bir defa integre edilirse,

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{1}{EI}[F + q_c(l - x)]y' = \frac{q_s}{EI}x + \frac{c}{EI} \quad (6.24)$$

ifadesi elde edilir. Burada c integrasyon sabitidir. Boyutsuzlaştırmak ve Airy diferansiyel denklemine ulaşabilmek için

$$x = aX + b \quad (6.25)$$

değişken dönüşümü yapılır. Zincir kuralı ile x 'e göre türevlerin X türünden ifadeleri belirlenir, şöyle ki,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dX} \frac{dX}{dx} = \frac{1}{a} \frac{dy}{dX} \quad (6.26)$$

genel halde,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{a^n} \frac{d^n y}{dX^n}, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \quad (6.27)$$

olur. (6.27)'den y 'nin x 'e göre üçüncü ve birinci mertebeden türevleri hesaplanır ve (6.24)'te yazılırsa

$$\frac{d^3 y}{dX^3} + \frac{1}{EI} [F + q_c(l - aX - b)] a^2 \frac{dy}{dX} = \frac{q_s}{EI} (aX + b) a^3 + \frac{c}{EI} a^3 \quad (6.28)$$

bulunur. y 'nin birinci mertebeden türevini içeren terimin katsayısı $-X$ olacak şekilde seçilirse (6.25) değişken dönüşümünün a ve b katsayıları,

$$a = \sqrt[3]{\frac{EI}{q_c}} \quad \text{ve} \quad b = \frac{F}{q_c} + l, \quad (a, b) \in \mathbb{R} \quad (6.29)$$

şeklinde bulunur.

a 'nın ve b 'nin reel sayı olması, $\theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$ olamayacağını ifade eder. Bu ise yukarıda yapılan dönüşüm yardımıyla elde edilecek çözümün kiriş-kolonun tam yatay konumu için geçerli olamayacağı anlamına gelir. Ancak $0 \leq \theta < \pi/2$ ve $3\pi/2 < \theta \leq 2\pi$ için çözüm mevcuttur.

(6.28) denkleminde (6.29)'da bulunan a ve b değerleri kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{d^3 y}{dX^3} - X \frac{dy}{dX} = \sqrt[3]{\frac{EI}{q_c}} \operatorname{tg} \theta X + \left(\frac{F}{q_c} + l \right) \operatorname{tg} \theta + \frac{c}{q_c} \quad (6.30)$$

ifadesi elde edilir. Bu denklemin sağ tarafında yer alan X in katsayısı kiriş-kolon parametrelerine bağlı olup α ile diğer terimlerin toplamı da b^* gösterilirse diferansiyel denklem

$$\frac{d^3y}{dX^3} - X \frac{dy}{dX} = \alpha X + b^* \quad (6.31)$$

halini alır. (6.31) denklemi elastik eğrinin boyutsuz koordinatlar cinsinden diferansiyel denklemidir. Burada yer alan α ve b^*

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{EI}{q_c}} t g \theta \quad \text{ve} \quad b^* = \left(\frac{F}{q_c} + l \right) t g \theta + \frac{c}{q_c} \quad (6.32)$$

dır. (6.32) denklemlerinden α 'nın yalnızca kiriş parametrelerine bağlı olduğu, b^* 'ın ise kiriş parametrelerinin yanı sıra c integrasyon sabitine de bağlı olduğu görülür.

6.2.5 Sınır şartlarının boyutsuz koordinatlardaki ifadeleri

Kirişin $x = 0$ 'daki ucunun yeni koordinatı X_1 ise

$$X_1 = X|_{x=0} = -\sqrt[3]{\frac{q_c}{EI}} \left(\frac{F}{q_c} + l \right) \quad (6.33)$$

olup, $x = l$ 'deki ucunun yeni koordinatı X_2 ise

$$X_2 = X|_{x=l} = -\sqrt[3]{\frac{q_c}{EI}} \frac{F}{q_c} \quad (6.34)$$

şeklinde ifade edilir. Boyutsuz koordinatlar cinsinden kiriş uzunluğu L 'nin ifadesi ise

$$L_D = X|_{x=l} - X|_{x=0} = X_2 - X_1$$

ile belirlenirse

$$L_D = \sqrt[3]{\frac{q_c}{EI}} l \quad (6.35)$$

olarak elde edilir.

İki ucu basit mesnetli kirişin uçlarındaki yer değiştirme ve moment sıfır olacağından sınır şartları boyutsuz koordinatlar cinsinden

$$y(X|_{x=0}) = y(X|_{x=l}) = y''(X|_{x=0}) = y''(X|_{x=l}) = 0 \quad (6.36)$$

şeklinde ifade edilir.

6.2.6 Elastik eğrinin diferansiyel denkleminin genel çözümü

(6.31) diferansiyel denkleminde

$$z(X) = y'(X) \quad (6.37)$$

dönüşümü yapılarak

$$z'' - Xz = \alpha X + b^* \quad (6.38)$$

sağ taraflı Airy diferansiyel denkleminde ulaşılır. Bu diferansiyel denklemin homojen çözümü

$$z_h(X) = c_1 Ai(X) + c_2 Bi(X) \quad (6.39)$$

dir. Genel çözümünü belirlemek için öncelikle Wronskian determinant belirlenmelidir, şöyleki;

$$W(Ai(X), Bi(X)) = Ai Bi' - Ai' Bi = \frac{1}{\pi} \quad (6.40)$$

elde edilir. Genel çözüm

$$\begin{aligned} z(X) = & c_1 Ai(X) + c_2 Bi(X) + c_3 Bi(X) \int \frac{(\alpha X + b^*)}{1/\pi} Ai(X) dX \\ & - c_4 Ai(X) \int \frac{(\alpha X + b^*)}{1/\pi} Bi(X) dX \end{aligned}$$

olup, c_i katsayıları $i = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere reel sayıları ifade ederken (6.38) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$\begin{aligned} z(X) = & \left(c_1 - c_4 \pi \int (\alpha X + b^*) Bi(X) dX \right) Ai(X) \\ & + \left(c_2 + c_3 \pi \int (\alpha X + b^*) Ai(X) dX \right) Bi(X) \end{aligned} \quad (6.41)$$

olarak bulunur.

6.2.7 Elastik eğri denkleminin diferansiyel transform metodu (DTM) ile çözümü

(6.31) denkleminin çözümü literatürde yalnızca iki ucu basit mesnetli eğik kiriş-kolon için hipergeometrik seriler kullanılarak gerçekleştirilmiştir [9]. Bu çalışmada

ise Diferansiyel Transform Metodu kullanılarak basit-basit mesnetli kiriş ek olarak, ankastre-basit, ankastre-ankastre, ankastre-serbest sınır şartlarına sahip eğik kiriş-kolonlar içinde çözümler üretilecektir.

(6.31) diferansiyel denkleminin Diferansiyel Transformu alınır

$$(k+1)(k+2)(k+3)Y(k+3) - kY(k) - X_1(k+1)Y(k+1) = \alpha\delta(k-1) + (\alpha X_1 + b^*)\delta(k) \quad (6.42)$$

olarak elde edilir. Burada $Y(k)$, $y(X)$ 'in diferansiyel transformunu temsil etmektedir.

(6.36) ile verilen sınır şartlarının diferansiyel dönüşümü

$$Y(0) = Y(2) = 0 \quad (6.43)$$

$$\sum_{k=0}^n Y(k) (X_2 - X_1)^k = 0 \text{ ve } \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)Y(k+2)(X_2 - X_1)^k = 0 \quad (6.44)$$

burada kullanılan n yeterli büyüklükte bir tamsayı olup hesaplanacak terim sayısını ifade eder. Y fonksiyonları (6.42) denklemi kullanılarak hesaplanabilir.

$$Y(0) = 0$$

$$Y(1) = a^*$$

$$Y(2) = 0$$

$$Y(3) = \frac{X_1(\alpha + a^*) + b^*}{6} \quad (6.45)$$

$$Y(4) = \frac{\alpha + a^*}{24}$$

$$Y(5) = \frac{X_1^2(\alpha + a^*) + X_1 b^*}{120}$$

$$Y(6) = \frac{4X_1(\alpha + a^*) + 3b^*}{720}$$

$$Y(7) = \frac{4(\alpha + a) + X_1^2[X_1(\alpha + a^*) + b^*]}{5040}$$

⋮

Y fonksiyonlarının ilk sekizi (6.45) ile verilmiştir. Burada a^* , değeri çözümün sonunda belirlenecek, keyfi bir sabiti göstermektedir. Bilinen $Y(0)$, $Y(1)$, $Y(2)$ ve hesaplanan $Y(3), Y(4), \dots, Y(n)$ terimleri (6.44)'te verilen sınır şartlarında yerine yazılırsa

$$a^*(X_2 - X_1) + \frac{X_1(\alpha + a^*) + b^*}{1 * 2 * 3} (X_2 - X_1)^3 + \frac{\alpha + a^*}{2 * 3 * 4} (X_2 - X_1)^4 \quad (6.46a)$$

$$+ \frac{X_1^2(\alpha + a^*) + X_1 b^*}{2 * 3 * 4 * 5} (X_2 - X_1)^5 + \dots = 0$$

ve

$$(\alpha X_1 + b^* + a X_1)(X_2 - X_1) + \frac{\alpha + a^*}{2} (X_2 - X_1)^2 \quad (6.46b)$$

$$+ \frac{X_1^2(\alpha + a^*) + X_1 b^*}{6} (X_2 - X_1)^3 + \dots = 0$$

olarak bulunur. Bu denklemlerde $X_2 - X_1$ yerine L_D ve X_1 yerine $X_2 - L_D$ yazarak (6.46) denklem sistemini aşağıdaki gibi

$$\begin{bmatrix} f_1(X_2, L_D) & f_2(X_2, L_D) \\ f_3(X_2, L_D) & f_4(X_2, L_D) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a^* \\ b^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix}. \quad (6.47a)$$

matris formuna getirebiliriz. Her L_D =sabit için (6.47)'deki katsayılar determinantı yalnızca X_2 'nin fonksiyonudur, şöyle ki,

$$\begin{bmatrix} f_1(X_2) & f_2(X_2) \\ f_3(X_2) & f_4(X_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a^* \\ b^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix}. \quad (6.47b)$$

X_2 , F dış kuvveti ile doğru orantılı bir büyüklüktür (denklem 6.34). (6.47) deki katsayılar determinantı burkulma determinantı olarak adlandırılır.

$$\lambda(X_2) = \begin{vmatrix} f_1(X_2) & f_2(X_2) \\ f_3(X_2) & f_4(X_2) \end{vmatrix} \quad (6.48)$$

çünkü burkulma, (6.48) determinantı sıfır değerini aldığı anda oluşur

$$\lambda(X_2) = 0 \quad (6.49a)$$

denkleminin kökleri burkulmaya neden olacak kuvvetin belirlenmesini sağlar (denklem 6.91). Dolayısıyla karakteristik denklem

$$f_1(X_2)f_4(X_2) - f_2(X_2)f_3(X_2) = 0 \quad (6.49b)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemin kökleri olan X_2 'ler öz değerlerdir. X_2 'nin mutlak değeri matematiksel anlamda sonsuz yer değiştirmeye neden olan, fiziksel anlamda ise küçük yer değiştirme kabulünün çiğnenmesine neden olan F dış yükü ile doğru orantılıdır (denklem (6.34)).

λ burkulma determinantını sıfır dışı değere sahip olduğu

$$\lambda(X_2) \neq 0 \quad (6.50)$$

her X_2 değeri için a^* ve b^* sabitleri hesaplanabilir, şöyleki,

$$a^* = \frac{\begin{vmatrix} g_1 & f_2(X_2) \\ g_2 & f_4(X_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1(X_2) & f_2(X_2) \\ f_3(X_2) & f_4(X_2) \end{vmatrix}}, \quad (6.51)$$

ve

$$b^* = \frac{\begin{vmatrix} f_1(X_2) & g_1 \\ f_3(X_2) & g_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1(X_2) & f_2(X_2) \\ f_3(X_2) & f_4(X_2) \end{vmatrix}}. \quad (6.52)$$

(6.50) şartını sağlayan her X_2 değeri için (6.51) ve (6.52) ile belirlenecek a^* ve b^* değerleri kullanılarak yer değiştirme eğrileri oluşturulabilir.

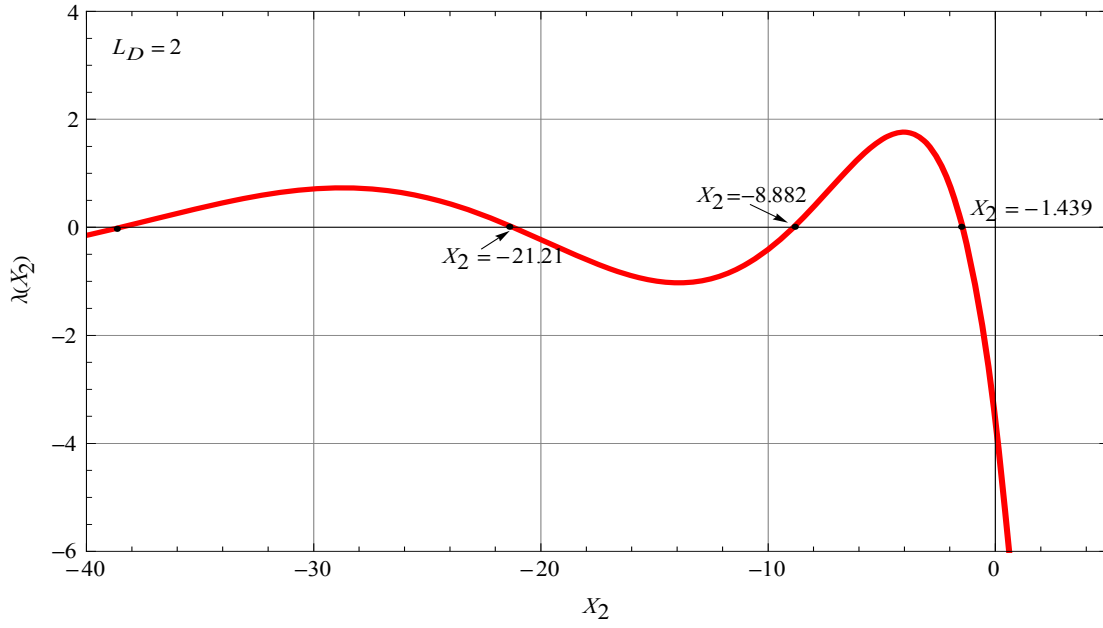
6.2.8 Burkulma determinantı ve kökleri

Burkulma determinantının köklerinin bulunması sırasında gerekli hesaplamalar Mathematica kullanılarak gerçekleştirildi. $n = 70$ alınıp (6.44) ile verilen sınır şartları kullanılarak (6.45)-(6.47)'deki ara adımlar gerçekleştirildi. Burkulma determinantının L_D 'nin 0.6-3 değerleri için kökleri olan X_2 'ler belirlendi. DTM ile bulunan kökler, Çizelge 6.1'de Ref[9]'da yer alan hipergeometrik seriler kullanılarak elde edilmiş sonuçlar ile karşılaştırmalı olarak gösterilmiştir. Diferansiyel Dönüşüm Metodu ile bulunan sonuçlar Ref[9] ile tam bir uyuşum içersidedir.

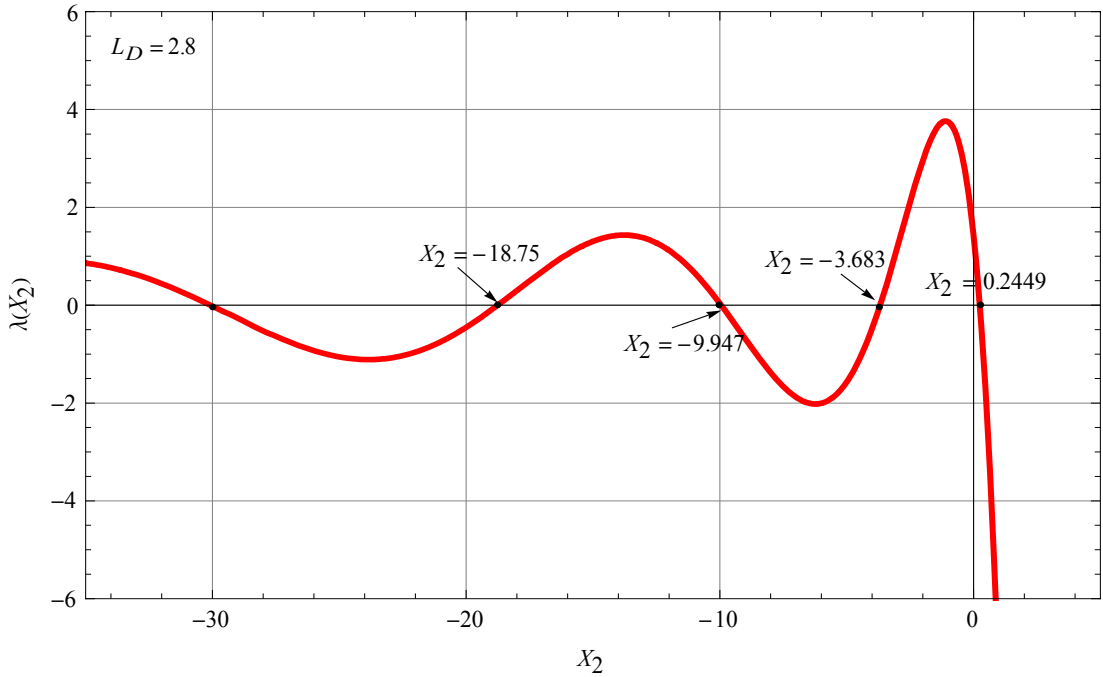
Çizelge 6.1 : İki ucu basit mesnetli eğik kiriş-kolonun burkulma determinantının kökleri(X_2).

L_D	1. kök		2. kök		3. kök		4. kök
	Ref[9]	DTM	Ref[9]	DTM	Ref[9]	DTM	DTM
0,6	-27,115	-27,11530	-109,363	-109,36200	-246,435	-246,44000	-438,34900
0,7	-19,792	-19,79160	-80,219	-80,21840	-180,930	-180,92900	-321,92300
0,8	-15,021	-15,02060	-61,286	-61,28540	-138,390	-138,39100	-246,34000
0,9	-11,734	-11,73360	-48,289	-48,28930	-109,212	-109,21200	-184,50500
1,0	-9,368	-9,36789	-38,972	-38,97920	-88,327	-88,32670	-157,41400
1,1	-7,604	-7,60418	-32,078	-32,07800	-72,861	-72,86070	-129,95700
1,2	-6,252	-6,25033	-26,817	-26,87200	-61,086	-61,08560	-109,06300
1,3	-5,185	-5,18509	-22,712	-22,71230	-51,911	-51,91080	-92,79050
1,4	-4,329	-4,32891	-19,445	-19,44520	-44,621	-44,62070	-79,86880
1,5	-3,629	-3,62779	-16,800	-16,80010	-38,730	-38,72980	-69,43460
1,6	-3,044	-3,04406	-14,627	-14,62650	-33,900	-33,89970	-60,88600
1,7	-2,551	-2,55074	-12,817	-12,81710	-29,888	-29,88810	-53,79270
1,8	-2,129	-2,12815	-11,293	-11,29320	-26,519	-26,51850	-47,84090
1,9	-1,762	-1,76160	-9,996	-9,99635	-23,656	-23,65930	-42,79530
2,0	-1,440	-1,43996	-8,883	-8,88247	-21,211	-21,21110	-38,48080
2,1	-1,155	-1,15468	-7,918	-7,91764	-19,098	-19,09750	-34,76100
2,2	-0,900	-0,89908	-7,076	-7,07546	-17,259	-17,25910	-31,53030
2,3	-0,669	-0,66787	-6,335	-6,33519	-15,649	-15,64920	-28,70550
2,4	-0,458	-0,45684	-5,680	-5,68031	-14,231	-14,23050	-26,22050
2,5	-0,263	-0,26259	-5,098	-5,09752	-12,973	-12,97310	-24,02200
2,6	-0,082	-0,08621	-4,576	-4,57605	-11,853	-11,85270	-22,06680
2,7	-0,086	0,08621	-4,107	-4,10708	-10,850	-10,84950	-20,31960
2,8	0,244	0,24494	-3,683	-3,68334	-9,947	-9,94703	-18,75120
2,9	0,295	0,39543	-3,300	-3,29878	-9,132	-9,13171	-17,33750
3,0	0,539	0,53902	-2,948	-2,94834	-8,392	-8,39218	-16,05810

$0.6 \leq L_D \leq 3$ aralığı için X_2 değerleri hesaplanmıştır. Bu aralık X_2 nin sıfıra eşit olduğu L_D değerinde kapsayacak şekilde seçilmiştir. $0.6 \leq L_D < 2,648057$ bölgesinde $X_2 < 0$ yani $F > 0$ olup bu bölgede dış kuvvetin ve ağırlığın etkisiyle burkulma oluşur. Yapılan hesaplamalarla $L_D = 2,648057$ için $X_2 = 0$ olduğu belirlenmiştir. X_2 nin sıfır olması F tekil yükünün olmaması anlamına gelir (denk.(6.34)). Bu durumda burkulmanın yegane kaynağı eğik kiriş-kolonun ağırlığıdır. $2,648057 < L_D$ bölgesinde ise $X_2 > 0$ yani $F < 0$ kirişte küçük bir F tekil çekme yükü varlığında dahi burkulmanın oluşması, bu bölgede kiriş ağırlığının burkulmanın kaynağı olduğunu göstermektedir.



Şekil 6.2 : $L_D = 2$ için burkulma determinantının grafiği.

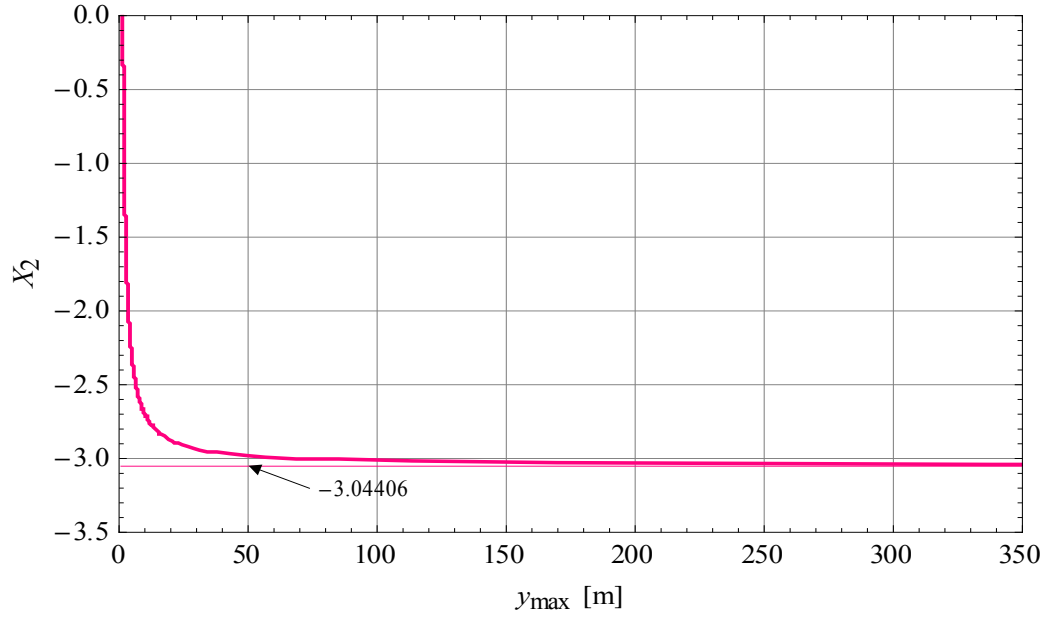


Şekil 6.3 : $L_D = 2.8$ için burkulma determinantının grafiği.

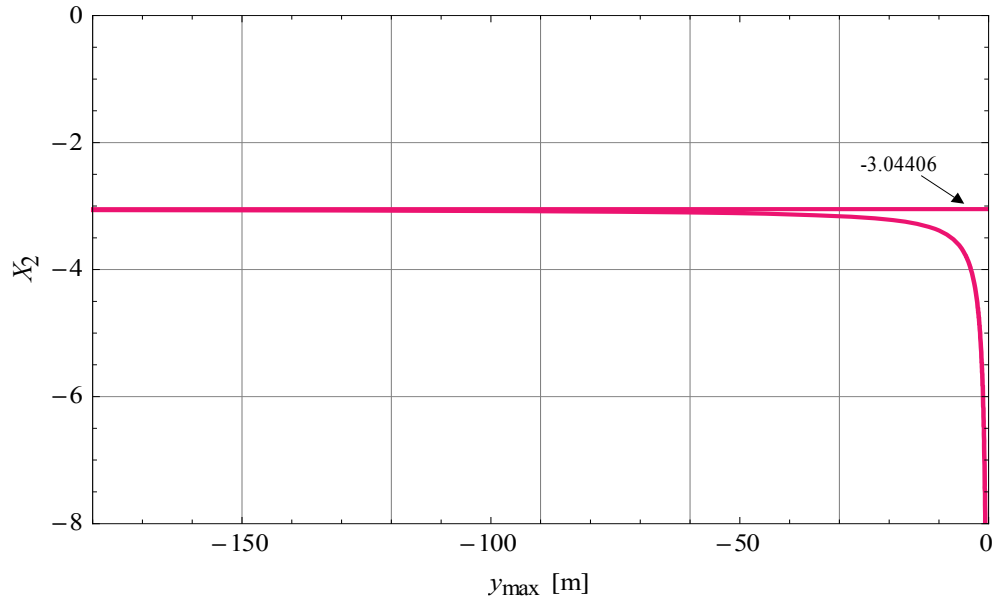
Şekil 6.2 ve 6.3'te sırasıyla L_D nin 2 ve 2.8 değerleri için λ burkulma determinantının grafiği gösterilmiştir. Bu iki eğrinin salınım yapıyor olmasından sonsuz kez yatay eksenini keseceği yani sonsuz adet kökü olacağı anlaşılmaktadır.

Şekil 6.4 ve 6.5'te burkulma determinantının ilk kökü olan -3.044 değerine yaklaşırken kirişte oluşan maksimum yer değiştirmeler gösterilmiştir. kiriş-kolonda

oluşan maksimum yer değıştirmelerin büyüklüğü bu değerde burkulmanın oluşacağını göstermektedir.



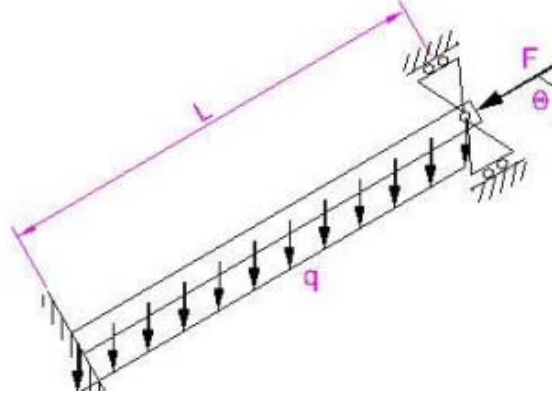
Şekil 6.4 : $X_2 = -3.04406$ değerine sağdan yaklaşırken kirişte oluşan maksimum yer değıştirme.



Şekil 6.5 : $X_2 = -3.04406$ değerine soldan yaklaşırken kirişte oluşan maksimum yer değıştirme.

6.3 Ankastre-Basit Mesnetli Eğik Kiriş-Kolon

Bu bölümde bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli olan Şekil 6.6'da gösterilen eğik kiriş-kolonun burkulma davranışı incelenecektir.



Şekil 6.6 : Ankastre-basit mesnetli eğik kiriş-kolon.

6.3.1 Toplam potansiyel ve varyasyonu

Kirişe ait sınır şartları

$$y(0) = y(l) = y'(0) = y''(l) = 0$$

olup, (6.10) ile verilen toplam potansiyel ve (6.17) ile verilen toplam potansiyelin varyasyonu

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[\frac{d\psi}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dy'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d\psi}{dy''} \right) \right] \eta dx + \left[\frac{d\psi}{dy'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dy''} \right) \right] \eta \Big|_0^l \\ + \frac{d\psi}{dy''} \eta' \Big|_0^l = 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

ifadesi bu halde de geçerlidir. Bu eşitliğin sağlanabilmesi için terimlerin ayrı ayrı sıfıra eşit olması gerekir.

η , $0 < x < l$ aralığında sıfır dışı değere sahiptir, bu nedenle integralin sıfır olması ancak ve ancak η nın katsayısının sıfır olması ile mümkündür, yani

$$\frac{d\psi}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dy'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d\psi}{dy''} \right) = 0 \quad (6.53)$$

olmalıdır, bu ifade (6.19) denklemi ile aynıdır. Ayrıca kiriş uçlarında yer değiştirme olmayacağından

$$y(0) = y(l) = 0 \quad (6.54a)$$

dır. Bu şart dikkate alınarak (6.13)'ten

$$\eta(0) = \eta(l) = 0 \quad (6.54b)$$

elde edilir. Bu ise (6.17)'deki ikinci terimin sıfıra eşit olmasını sağlar.

$$\left[\frac{d\psi}{dy'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dy''} \right) \right] \eta \Big|_0^l = 0$$

$x = 0$ 'da mesnet ankastre olduğundan

$$y'(0) = 0 \quad (6.55a)$$

dır. (6.13)'de bu ifade kullanılırsa

$$\eta'(0) = 0 \quad (6.55b)$$

olması gerektiği ortaya çıkar. $x = l$ 'de ise η' sıfır dışı bir değere sahiptir. Bu nedenle üçüncü terimin sıfır olabilmesi ancak ve ancak

$$\frac{d\psi}{dy''} \Big|_{x=l} = 0$$

şartının gerçekleşmesi ile mümkün olacaktır. ψ 'nin y'' ne göre birinci mertebeden türevi alınırsa

$$y''(x = l) = 0 \quad (6.56)$$

elde edilir. (6.55)-(6.56) denklemlerinden

$$y(0) = y(l) = y'(0) = y''(l) = 0 \quad (6.57)$$

sınır şartlarına sahip eğik bir kiriş-kolonun elastik eğrisinin diferansiyel denklemi (6.53)'ten

$$\frac{d^2}{dx^2}(EIy'') + \frac{d}{dx}\{[F + q_c(l - x)]y'\} - q_s = 0 \quad (6.58)$$

şeklinde bulunur. Bu denklem daha önce verilen (6.22) denklemiyle özdeştir.

6.3.2 Elastik eğrinin diferansiyel denkleminin DTM ile çözümü

(6.58) diferansiyel denklemi (6.25) değişken dönüşümü kullanılarak X boyutsuz değişkeni cinsinden (6.31) denklemi haline dönüştürülür. (6.57) ile verilen sınır şartları boyutsuz değişkenler cinsinden

$$y(X_1) = y(X_2) = y'(X_1) = y''(X_2) = 0 \quad (6.59)$$

halini alır. (6.31) diferansiyel denkleminin Diferansiyel Dönüşümü alınır (6.42) denklemi elde edilir. Düzenlenerek aşağıdaki şekilde rekürsif bağıntıya ulaşılır

$$Y(k+3) = \frac{\alpha\delta(k-1) + (\alpha X_1 + b^*)\delta(k) + kY(k) + X_1(k+1)Y(k+1)}{(k+1)(k+2)(k+3)} \quad (6.60)$$

(6.59) ile verilen, X_1 noktasındaki yer değiştirme ve dönme açısını ifade eden sınır şartlarının diferansiyel dönüşümü

$$Y(0) = Y(1) = 0 \quad (6.61)$$

X_2 ucundaki yer değiştirme ve momentle ilgili olan sınır şartlarının ters diferansiyel dönüşümü ise

$$\sum_{k=0}^{\infty} Y(k) (X_2 - X_1)^k = 0, \quad (6.62a)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)Y(k+2)(X_2 - X_1)^k = 0. \quad (6.62b)$$

(6.61) ile verilen sınır şartları (6.60) bağıntısında kullanılarak k nın istenildiği kadar büyük değeri için $Y(k)$ ifadeleri hesaplanır

$$Y(0) = 0$$

$$Y(1) = 0$$

$$Y(2) = a^*$$

$$Y(3) = \frac{\alpha X_1 + b^*}{6} \quad (6.63)$$

$$Y(4) = \frac{2a^*X_1 + \alpha}{24}$$

$$Y(5) = \frac{X_1^2\alpha + X_1b^* + 4a^*}{120}$$

$$Y(6) = \frac{2a^*X_1^2 + 4\alpha X_1 + 3b^*}{720}$$

İlk yedi terim (6.63)'te verilmiştir. Bu değerler (6.62) ile verilen sınır şartlarında yazılırsa

$$\begin{aligned} & a^*(X_2 - X_1)^2 + \frac{\alpha X_1 + b^*}{6}(X_2 - X_1)^3 + \frac{2a^*X_1 + \alpha}{24}(X_2 - X_1)^4 \\ & + \frac{X_1^2\alpha + X_1b^* + 4a^*}{120}(X_2 - X_1)^5 \\ & + \frac{2a^*X_1^2 + 4\alpha X_1 + 3b^*}{720}(X_2 - X_1)^6 + \dots = 0, \end{aligned} \quad (6.64a)$$

ve

$$\begin{aligned} & 2a^* + (\alpha X_1 + b^*)(X_2 - X_1) + \frac{2a^*X_1 + \alpha}{2}(X_2 - X_1)^2 \\ & + \frac{X_1^2\alpha + X_1b^* + 4a^*}{6}(X_2 - X_1)^3 \\ & + \frac{2a^*X_1^2 + 4\alpha X_1 + 3b^*}{24}(X_2 - X_1)^4 + \dots = 0 \end{aligned} \quad (6.64b)$$

(6.64) denklemlerinde $X_2 - X_1$ yerine L_D ve X_1 yerine $X_2 - L_D$ yazarak (6.64) denklem sistemi X_2 ve L_D nin fonksiyonu haline getirilir. 6.2.7'de geçen ara adımlar gerçekleştirilerek burkulma determinantı oluşturulur, kökleri X_2 ler belirlenir. Elde edilen X_2 değerleri Çizelge 6.2'de verilmiştir. Ulaşılan literatürde bu sınır şartları için bir çözüm olmadığından sonuçlar karşılaştırmalı olarak verilememiştir.

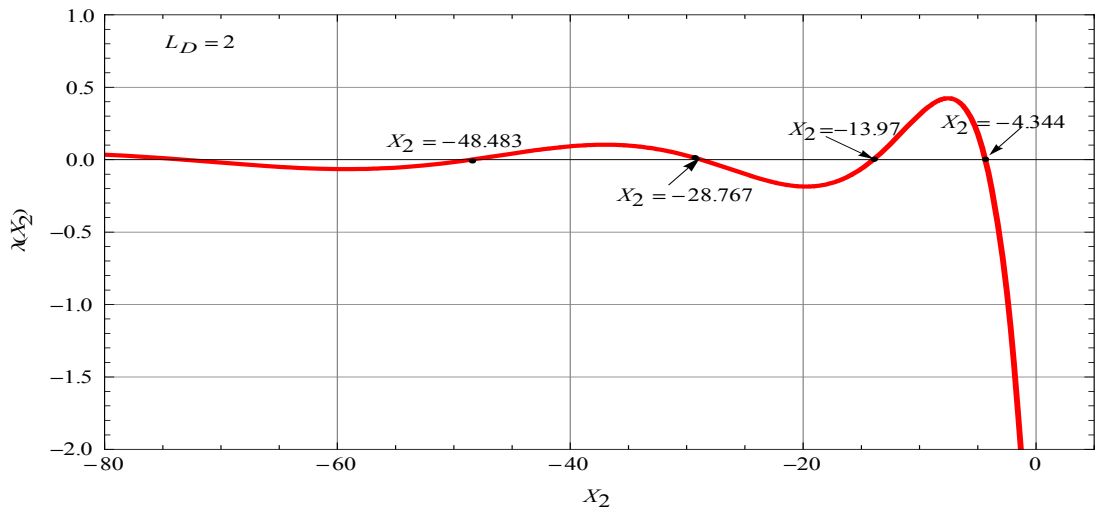
Çizelge 6.2 : Ankastre-basit mesnetli eğik kiriş-kolonun burkulma determinantının ilk dört kökü.

L_D	1. Kök	2. Kök	3. Kök	4. Kök
0,6	-55,87770	-165,49200	-329,99000	-549,31000
0,7	-40,96320	-121,46300	-242,31700	-403,44800
0,8	-31,27100	-92,87000	-185,39700	-308,76000
0,9	-24,61500	-73,25170	-146,35800	-243,82700
1,0	-19,84410	-59,20540	-118,42000	-197,36700
1,1	-16,30500	-48,80050	-97,73680	-162,97900
1,2	-13,60480	-40,87530	-81,99390	-136,81200
1,3	-11,49550	-34,69710	-69,73160	-116,43700
1,4	-9,81446	-29,78510	-59,99200	-100,26000
1,5	-8,45130	-25,81330	-52,12540	-87,20040
1,6	-7,32904	-22,55400	-45,67850	-76,50280
1,7	-6,39263	-19,84470	-40,32740	-67,62850
1,8	-5,60186	-17,56670	-35,83540	-60,18390
1,9	-4,92682	-15,63150	-32,02650	-53,87600
2,0	-4,34487	-13,97240	-28,76770	-48,48330
2,1	-3,83861	-12,53810	-25,95670	-43,83570
2,2	-3,39450	-11,28860	-23,51390	-39,80090
2,3	-3,00186	-10,19260	-21,37690	-36,27470
2,4	-2,65219	-9,22494	-19,49570	-33,17410
2,5	-2,33863	-8,36561	-17,83020	-30,43240
2,6	-2,05560	-7,59825	-16,34800	-27,99550
2,7	-1,79855	-6,90953	-15,02250	-25,81910
2,8	-1,56367	-6,28843	-13,83160	-23,86660
2,9	-1,34782	-5,72581	-12,75720	-22,10780
3,0	-1,14835	-5,21403	-11,78400	-20,51730
3,1	-0,96301	-4,74667	-10,89920	-19,07360
3,2	-0,78989	-4,31829	-10,09210	-17,75890
3,3	-0,62735	-3,92428	-9,35328	-16,55760
3,4	-0,47398	-3,56069	-8,67498	-15,45670
3,5	-0,32853	-3,22412	-8,05040	-14,44490
3,6	-0,18995	-2,91164	-7,47371	-13,51250
3,7	-0,05729	-2,62074	-6,93986	-12,65100
3,8	0,07028	-2,34920	-6,44445	-11,85300
3,9	0,19350	-2,09508	-5,98364	-11,11220
4,0	0,31301	-1,85670	-5,55409	-10,42290
4,1	0,42940	-1,63255	-5,15284	-9,78023

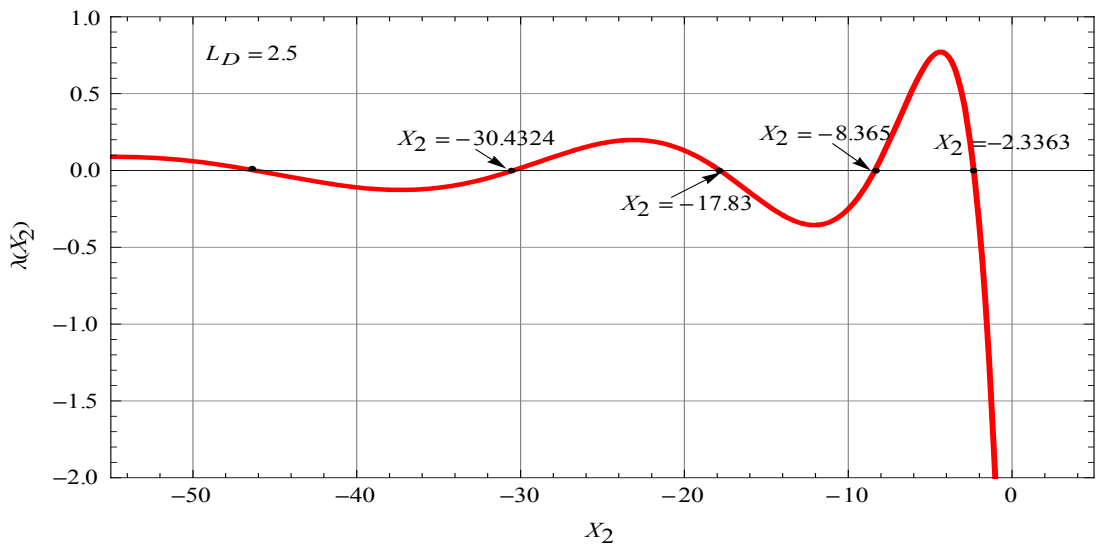
$0.6 \leq L_D \leq 4.1$ aralığı için X_2 değerleri hesaplanmıştır. Bu aralık X_2 nin sıfıra eşit olduğu L_D değerinde kapsayacak şekilde seçilmiştir. $0.6 \leq L_D < 3,744453$ bölgesinde $X_2 < 0$ yani $F > 0$ olup bu bölgede dış kuvvetin ve ağırlığın etkisiyle

burkulma oluşur. Yapılan hesaplamalarla $L_D = 3,744453$ için $X_2 = 0$ olduğu belirlenmiştir. X_2 nin sıfır olması F tekil yükünün olmaması anlamına gelir (denk.(6.34)) ki bu durumda burkulmanın kaynağı eğik kiriş-kolonun ağırlığıdır. $3,744453 < L_D$ bölgesinde ise $X_2 > 0$ yani $F < 0$ kirişte küçük bir F tekil çekme yükü varlığında dahi burkulmanın oluşması bu bölgede kiriş ağırlığının burkulmanın kaynağını olduğunu gösterir.

Şekil 6.7 ve 6.8’de sırasıyla L_D nin 2 ve 2.5 değerleri için λ burkulma determinantının grafiği gösterilmiştir. $L_D = 2$ ve $L_D = 2.5$ için yatay ekseni kestiği ilk beş nokta yani ilk beş kök gözükmemektedir.

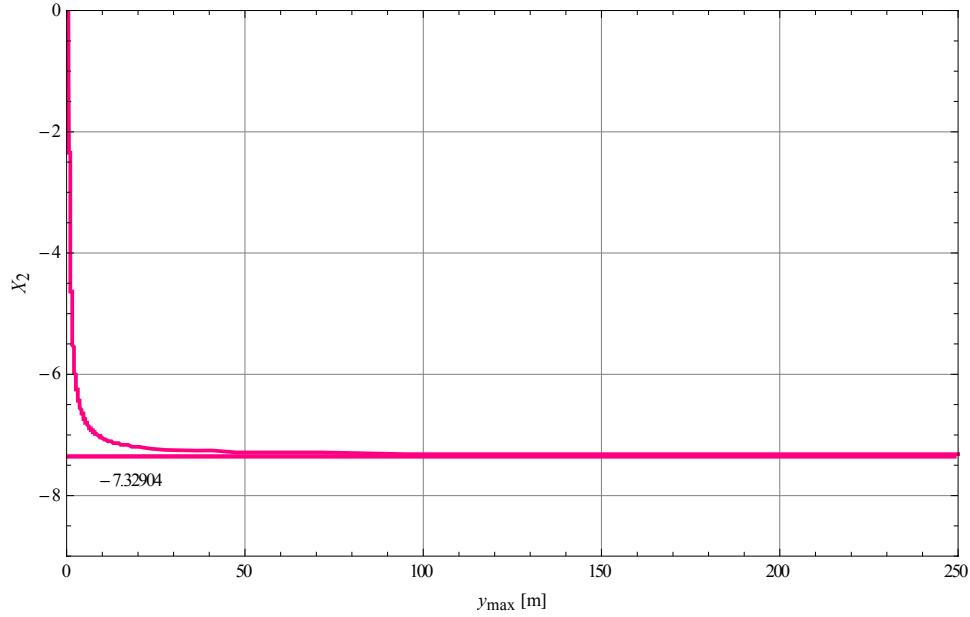


Şekil 6.7 : $L_D = 2$ için burkulma determinantının grafiği.

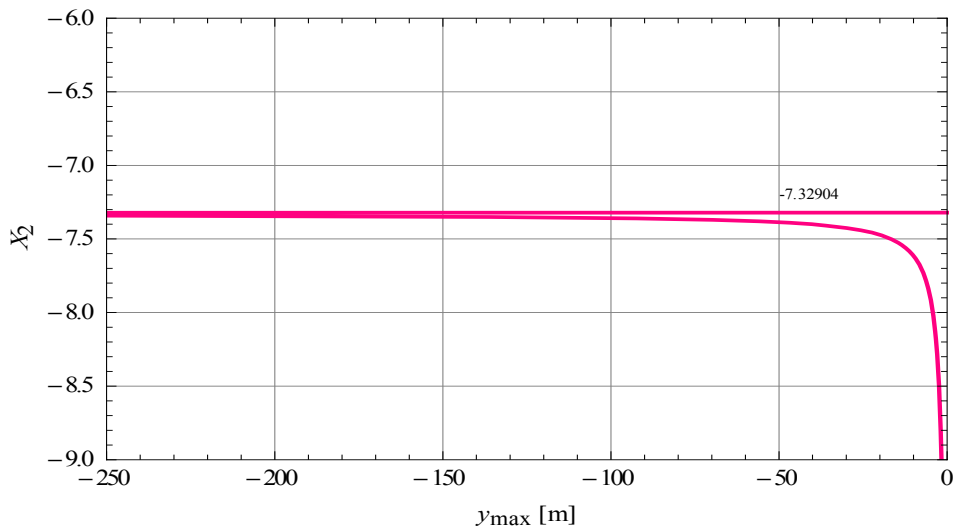


Şekil 6.8 : $L_D = 2.5$ için burkulma determinantının grafiği.

Şekil 6.9’da burkulma determinantının ilk kökü olan -7.32904 değerinden daha büyük kökler için kirişte oluşan maksimum yer değiştirmeler gösterilmiştir. Şekil 6.10’da ise -7.32904’den daha küçük değerler için kirişin yapacağı en büyük yer değiştirmeler gösterilmiştir. Her iki grafiktede burkulma determinantının ilk kökü olan -7.329’a yaklaşıldığında yer değiştirmenin maksimum değerinin çok büyük değerler aldığı görülmektedir.



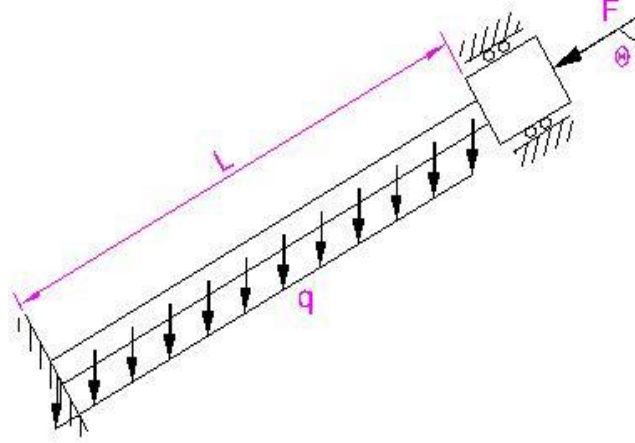
Şekil 6.9 : $X_2 = -7.32904$ değerine sağdan yaklaşırken kirişte oluşan maksimum yer değiştirme.



Şekil 6.10 : $X_2 = -7.32904$ değerine soldan yaklaşırken kirişte oluşan maksimum yer değiştirme.

6.4 İki Ucu Ankastre Mesnetli Eğik Kiriş-Kolon

Bu bölümde Şekil 6.11’de gösterilen iki ucu ankastre mesnetli eğik kiriş-kolonun burkulma davranışı irdelenecektir.



Şekil 6.11 : İki ucu ankastre mesnetli eğik kiriş-kolon.

6.4.1 Toplam potansiyel ve varyasyonu

Daha önce belirlenmiş olan (6.10) denklemiyle verilen toplam potansiyel ifadesi burada da geçerlidir. ψ , (6.11) denklemi ile verilen fonksiyon olmak üzere toplam potansiyelin varyasyonu

$$\int_0^l \left[\frac{d\psi}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dy'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d\psi}{dy''} \right) \right] \eta dx + \left[\frac{d\psi}{dy'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dy''} \right) \right] \eta \Big|_0^l + \frac{d\psi}{dy''} \eta' \Big|_0^l = 0 \quad (6.65)$$

olarak elde edilir.

Kirişe ait sınır şartları

$$y(0) = y(l) = y'(0) = y'(l) = 0 \quad (6.66)$$

olup bu şartları dikkate alarak (6.65) denklemindeki terimler incelenmelidir.

η , $0 < x < l$ aralığında sıfır dışı değere sahiptir, bu nedenle integralin sıfır olması ancak ve ancak η nın katsayısının sıfır olması ile mümkündür

$$\frac{d\psi}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dy'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d\psi}{dy''} \right) = 0. \quad (6.67)$$

Kiriş uçlarında yer değiştirme olmayacağından

$$y(0) = y(l) = 0 \quad (6.68a)$$

dır. Bu şart dikkate alınarak (6.13)'ten

$$\eta(0) = \eta(l) = 0 \quad (6.68b)$$

elde edilir. Bu ise (6.65)'teki ikinci terimin sıfıra eşit olmasını sağlar

$$\left[\frac{d\psi}{dy'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dy''} \right) \right] \eta \Big|_0^l = 0.$$

$x = 0$ ve $x = l$ 'de mesnetler ankastre olduğundan

$$y'(0) = y'(l) = 0 \quad (6.69a)$$

dır. (6.13)'te bu ifade kullanılırsa

$$\eta'(0) = \eta'(l) = 0 \quad (6.69b)$$

olması gerektiği ortaya çıkar. Bu nedenle

$$\frac{d\psi}{dy''} \eta' \Big|_0^l = 0.$$

(6.68)-(6.69) denklemlerinden

$$y(0) = y(l) = y'(0) = y'(l) = 0 \quad (6.70)$$

sınır şartlarına sahip eğik bir kiriş-kolonun elastik eğrisinin diferansiyel denklemi (6.67)'den

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI y'') + \frac{d}{dx} \{ [F + q_c(l-x)] y' \} - q_s = 0 \quad (6.71)$$

şeklinde bulunur. Bu denklem (6.22) ve (6.58) ile aynıdır.

6.4.2 Elastik eğrinin diferansiyel denkleminin DTM ile çözümü

(6.71) diferansiyel denklemi (6.25) değişken dönüşümü kullanılarak X boyutsuz değişkeni cinsinden (6.31) denklemi haline dönüştürülür. (6.70) ile verilen sınır şartları boyutsuz değişkenler cinsinden

$$y(X_1) = y(X_2) = y'(X_1) = y'(X_2) = 0 \quad (6.72)$$

halini alır. (6.31) diferansiyel denkleminin Diferansiyel Dönüşümü alınır (6.42) denklemi elde edilir. Düzenlenerek aşağıdaki şekilde rekürsif bağıntıya ulaşılır

$$Y(k+3) = \frac{\alpha\delta(k-1) + (\alpha X_1 + b^*)\delta(k) + kY(k) + X_1(k+1)Y(k+1)}{(k+1)(k+2)(k+3)} \quad (6.73)$$

(6.72) ile verilen, X_1 noktasındaki yer değiştirmeyi ve dönme açısını ifade eden sınır şartlarının diferansiyel dönüşümü

$$Y(0) = Y(1) = 0 \quad (6.74)$$

X_2 ucundaki yer değiştirme ve dönme açısıyla ilgili olan sınır şartlarının ters diferansiyel dönüşümü ise

$$\sum_{k=0}^{\infty} Y(k) (X_2 - X_1)^k = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)Y(k+1)(X_2 - X_1)^k = 0 \quad (6.75)$$

(6.74) ile verilen sınır şartları (6.73) bağıntısında kullanılarak k nın istenildiği kadar büyük değeri için $Y(k)$ ifadeleri hesaplanır

$$Y(0) = 0$$

$$Y(1) = 0$$

$$Y(2) = a^*$$

$$Y(3) = \frac{\alpha X_1 + b^*}{6} \quad (6.76)$$

$$Y(4) = \frac{2a^*X_1 + \alpha}{24}$$

$$Y(5) = \frac{X_1^2 \alpha + X_1 b^* + 4a^*}{120}.$$

İlk altı terim (6.76)'da verilmiştir. Bu değerler (6.75) ile verilen sınır şartlarında yazılırsa

$$\begin{aligned} a^*(X_2 - X_1)^2 + \frac{\alpha X_1 + b^*}{6}(X_2 - X_1)^3 + \frac{2a^*X_1 + \alpha}{24}(X_2 - X_1)^4 \\ + \frac{X_1^2 \alpha + X_1 b^* + 4a^*}{120}(X_2 - X_1)^5 \\ + \frac{2a^*X_1^2 + 4\alpha X_1 + 3b^*}{720}(X_2 - X_1)^6 + \dots = 0 \end{aligned} \quad (6.77a)$$

ve

$$\begin{aligned} 2a^*(X_2 - X_1) + \frac{\alpha X_1 + b^*}{2}(X_2 - X_1)^2 + \frac{2a^*X_1 + \alpha}{6}(X_2 - X_1)^3 \\ + \frac{X_1^2 \alpha + X_1 b^* + 4a^*}{24}(X_2 - X_1)^4 \\ + \frac{2a^*X_1^2 + 4\alpha X_1 + 3b^*}{120}(X_2 - X_1)^5 + \dots = 0 \end{aligned} \quad (6.77b)$$

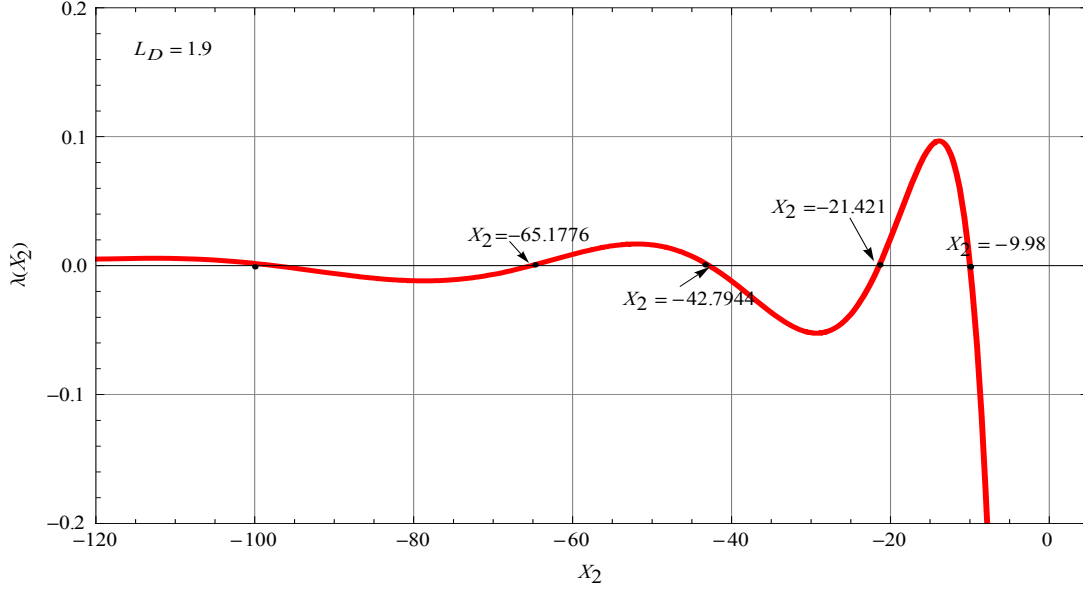
olur. (6.77) denklemlerinde $X_2 - X_1$ yerine L_D ve X_1 yerine $X_2 - L_D$ yazarak (6.77) denklem sistemini X_2 ve L_D nin fonksiyonu haline getirilir. 6.2.7'de geçen ara adımlar gerçekleştirilerek burkulma determinantı oluşturulup kökleri olan X_2 'ler belirlenir. Elde edilen X_2 değerleri Çizelge 6.3'te verilmiştir. Bu sınır şartları altında ulaşılan literatürde bir çözüm olmadığı için sonuç karşılaştırması yapılamamıştır.

$0.6 \leq L_D \leq 4.6$ aralığı için X_2 değerleri hesaplanmıştır. Bu aralık X_2 nin sıfıra eşit olduğu L_D değerinde kapsayacak şekilde seçilmiştir. $0.6 \leq L_D < 4.210191$ bölgesinde $X_2 < 0$ yani $F > 0$ olup bu bölgede dış kuvvetin ve ağırlığın etkisiyle burkulma oluşur. Yapılan hesaplamalarla $L_D = 4.210191$ için $X_2 = 0$ olduğu belirlenmiştir. X_2 'nin sıfır olması F tekil yükünün olmaması anlamına gelir (denk.(6.34)) ki bu durumda burkulma eğik kiriş-kolonun ağırlığı nedeniyle oluşur. $4.210191 < L_D$ bölgesinde ise $X_2 > 0$ yani $F < 0$ kirişte küçük bir F tekil çekme yükü varlığında dahi burkulmanın oluşması bu bölgede kiriş ağırlığının burkulmanın kaynağını olduğunu gösterir.

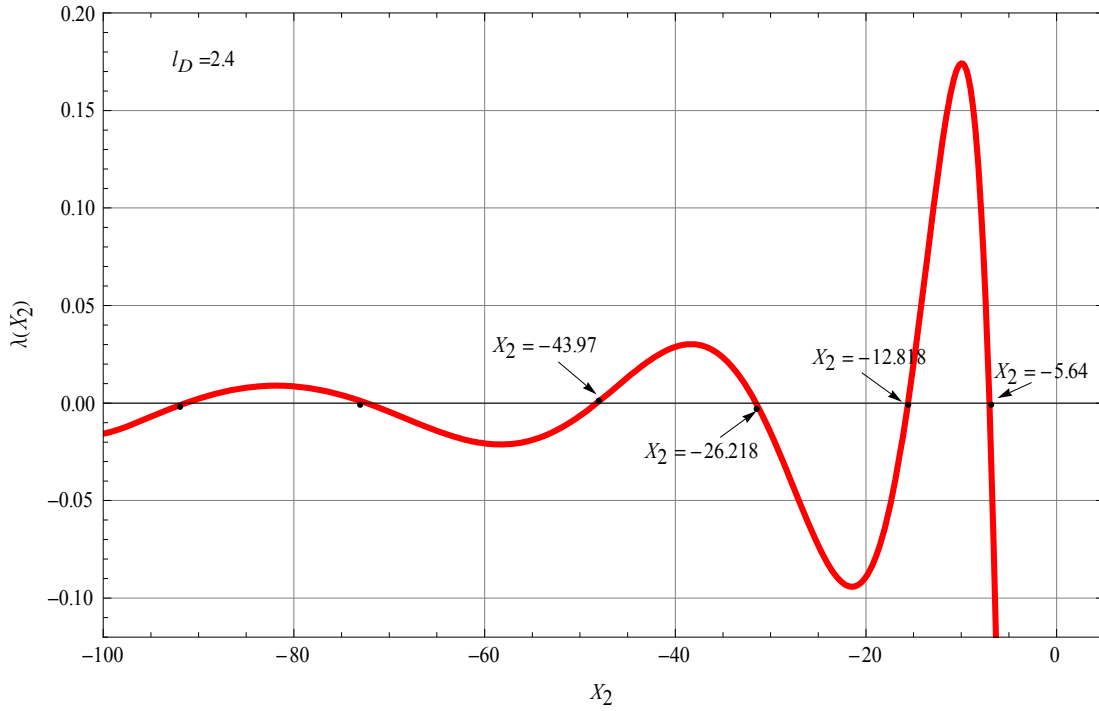
Çizelge 6.3 : İki ucu ankastre mesnetli eğik kiriş-kolonun burkulma determinantının kökleri.

L_D	1. Kök	2. Kök	3. Kök	4. Kök
0,6	-109,36200	-224,04100	-438,34900	-662,80500
0,7	-80,21810	-164,47200	-321,92300	-486,83000
0,8	-61,28490	-125,79200	-246,34000	-372,59700
0,9	-48,28850	-99,25730	-194,50500	-294,26400
1,0	-38,97800	-80,26280	-157,41400	-238,21800
1,1	-32,07620	-66,19610	-129,95700	-196,73800
1,2	-26,81470	-55,48520	-109,06200	-165,17700
1,3	-22,70890	-47,13850	-92,79030	-140,60300
1,4	-19,44050	-40,50530	-79,86850	-121,09500
1,5	-16,79400	-35,14420	-69,43420	-105,34700
1,6	-14,61870	-30,74750	-60,88550	-92,44920
1,7	-12,80710	-27,09500	-53,79200	-81,75210
1,8	-11,28060	-24,02600	-47,83960	-72,77880
1,9	-9,98071	-21,42100	-42,79440	-65,17760
2,0	-8,86329	-19,18950	-38,47960	-58,68030
2,1	-7,89435	-17,26210	-34,75950	-53,08200
2,2	-7,04746	-15,58470	-31,52850	-48,22300
2,3	-6,30180	-14,11490	-28,70340	-43,97770
2,4	-5,64081	-12,81880	-26,21800	-40,24570
2,5	-5,05114	-11,66900	-24,01910	-36,94680
2,6	-4,52199	-10,64360	-22,06340	-34,01560
2,7	-4,04447	-9,72446	-20,31560	-31,39860
2,8	-3,61113	-8,89661	-18,74660	-29,05170
2,9	-3,21636	-8,14770	-17,33210	-26,93850
3,0	-2,85459	-7,46735	-16,05200	-25,02820
3,1	-2,52170	-6,84684	-14,88910	-23,29510
3,2	-2,21406	-6,27881	-13,82900	-21,71740
3,3	-1,92857	-5,75696	-12,85960	-20,27660
3,4	-1,66258	-5,27592	-11,97020	-18,95690
3,5	-1,41382	-4,83108	-11,15200	-17,74450
3,6	-1,18030	-4,41845	-10,39710	-16,62780
3,7	-0,96032	-4,03457	-9,69873	-15,59650
3,8	-0,75237	-3,67643	-9,05113	-14,64190
3,9	-0,55516	-3,34139	-8,44914	-13,75610
4,0	-0,36753	-3,02715	-7,88827	-12,93230
4,1	-0,18846	-2,73168	-7,36457	-12,16470
4,2	-0,01707	-2,45317	-6,87457	-11,44790
4,3	0,14746	-2,19003	-6,41517	-10,77720
4,4	0,30582	-1,94084	-5,98364	-10,14860
4,5	0,45864	-1,70434	-5,57754	-9,55836
4,6	0,60650	-1,47939	-5,19470	-9,00317

Şekil 6.12 ve 6.13'te sırasıyla L_D 'nin 1.9 ve 2.4 değerleri için λ burkulma determinantının grafiği gösterilmiştir. $L_D = 1.9$ ve $L_D = 2.4$ için yatay ekseni kestiği ilk beş nokta yani ilk beş kök gözükmektedir.

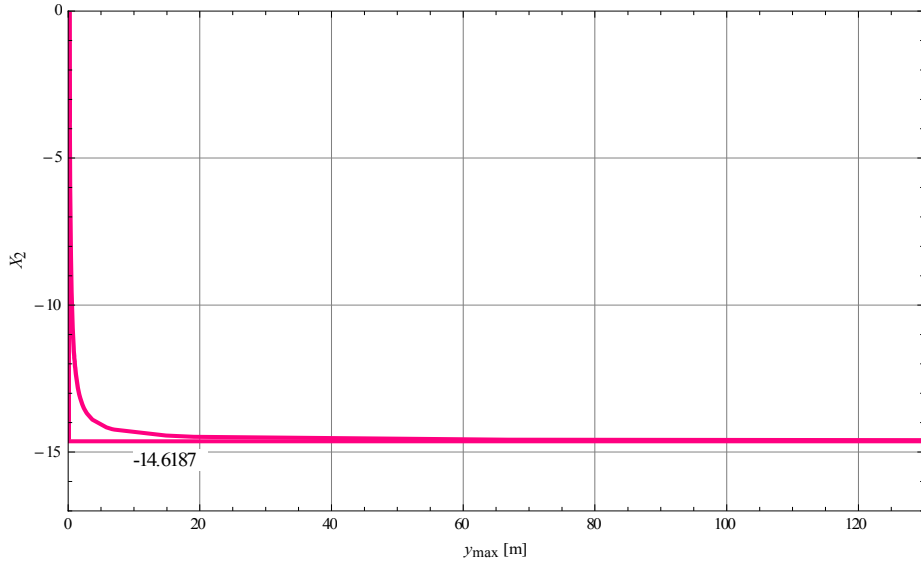


Şekil 6.12 : $L_D = 1.9$ için burkulma determinantının grafiği.

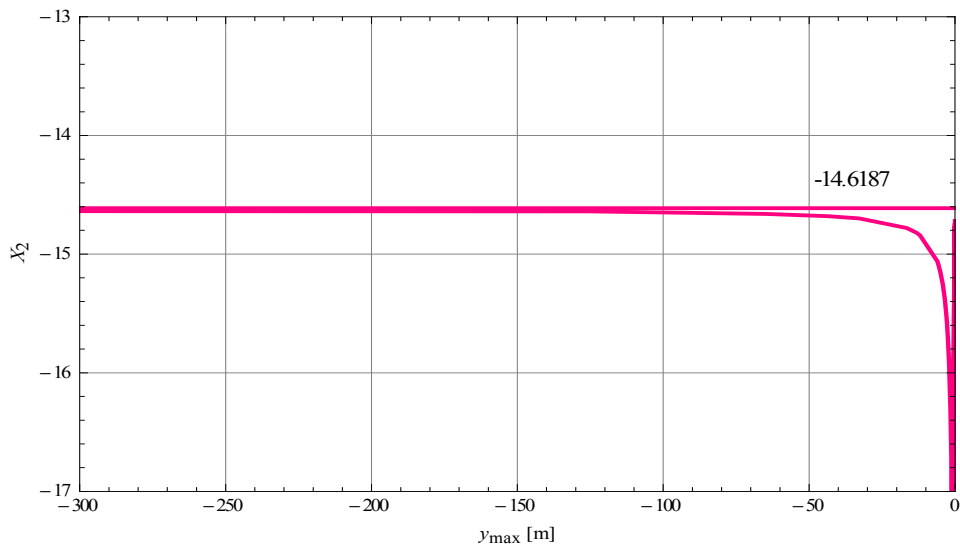


Şekil 6.13 : $L_D = 2.4$ için burkulma determinantının grafiği.

Şekil 6.14'te burkulma determinantının ilk kökü olan -14.6187 değerinden daha büyük kökler için kirişte oluşan maksimum yer değiştirmeler gösterilmiştir. Şekil 6.10'da ise -14.6187'den daha küçük değerler için kirişin yapacağı en büyük yer değiştirmeler gösterilmiştir. Her iki grafikte de burkulma determinantının ilk kökü olan -14.6187'a yaklaşıldığında yer değiştirmenin maksimum değerinin çok büyük değerler aldığı görülmektedir.



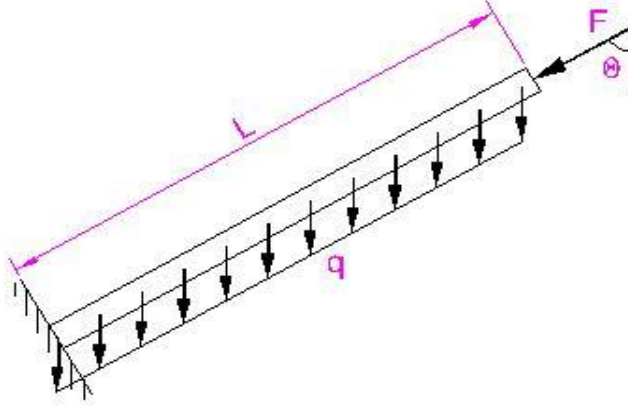
Şekil 6.14 : $x_2 = -14.6187$ değerine sağdan yaklaşırken kirişte oluşan maksimum yer değiştirme.



Şekil 6.15 : $x_2 = -14.6187$ değerine soldan yaklaşırken kirişte oluşan maksimum yer değiştirme.

6.5 Bir Ucu Ankastre Mesnetli Eğik Kiriş-Kolon

Bu bölümde Şekil 6.16’da gösterilen bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest olan eğik kiriş-kolonun burkulma davranışı irdelenecektir.



Şekil 6.16 : Bir ucu ankastre mesnetli eğik kiriş-kolon.

6.5.1 Toplam potansiyel ve varyasyonu

Daha önce belirlenmiş olan (6.10) denklemiyle verilen toplam potansiyel ifadesi burada da geçerlidir. ψ , (6.11) denklemi ile verilen fonksiyon olmak üzere toplam potansiyelin varyasyonu

$$\int_0^l \left[\frac{d\psi}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dy'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d\psi}{dy''} \right) \right] \eta dx + \left[\frac{d\psi}{dy'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dy''} \right) \right] \eta \Big|_0^l + \frac{d\psi}{dy''} \eta' \Big|_0^l = 0 \quad (6.78)$$

olarak elde edilir.

Kirişe ait sınır şartları

$$y(0) = y'(0) = y''(l) = 0 \quad (6.79)$$

ve serbest uça kesme kuvveti sıfır değerine sahiptir. Bu şartları dikkate alarak (6.17) denklemindeki terimler ayrı ayrı incelenmelidir.

Birinci terimin irdelenmesi:

η , $0 < x < l$ aralığında sıfır dışı değere sahiptir, bu nedenle integralin sıfır olması ancak ve ancak η nın katsayısının sıfır olması ile mümkündür

$$\frac{d\psi}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dy'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d\psi}{dy''} \right) = 0. \quad (6.80)$$

İkinci terimin irdelenmesi:

ankastre uçta yer değiştirme

$$y(0) = 0 \quad (6.81a)$$

dır. Bu şart dikkate alınarak (6.13)'den

$$\eta(0) = 0 \quad (6.81b)$$

elde edilir. Buradan (6.78)'deki ikinci terimin sıfıra eşit olması için

$$\left[\frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dy''} \right) - \frac{d\psi}{dy'} \right] \Big|_{x=l} = 0 \quad (6.81c)$$

eşitliğinin sağlanması gerektiği anlaşılır. ψ 'nin y'' ve y' ne göre birinci mertebeden türevleri belirlenip (6.81c)'de yerlerine yazılırsa

$$\{(EIy'')' + [F + q_c(l - x)]y'\} \Big|_{x=l} = 0 \quad (6.81d)$$

elde edilir. Bu ifade serbest uçta kesme kuvvetinin sıfır değerine sahip olduğunu söylemektedir.

Üçüncü terimin irdelenmesi:

$x = 0$ 'da mesnet ankastre olduğundan

$$y'(0) = 0 \quad (6.82a)$$

dır. (6.13)'te bu ifade kullanılırsa

$$\eta'(0) = 0 \quad (6.82b)$$

olması gerektiği ortaya çıkar. η' , $x = l$ 'de sıfır dışı bir değere sahiptir. Bu nedenle

$$\left. \frac{d\psi}{dy''} \right|_{x=l} = 0 \quad (6.82c)$$

olmalıdır. Diğer bir ifadeyle

$$EIy''|_{x=l} = 0$$

olmalıdır. Bu serbest uçta momentin sıfır değerine sahip olduğunu gösteri.

(6.81)-(6.82) denklemlerinden

$$y(0) = y'(l) = y''(l) = 0 \quad (6.83a)$$

ve

$$\{(EIy'')' + [F + q_c(l - x)]y'\}|_{x=l} = 0 \quad (6.83b)$$

sınır şartlarına sahip eğik bir kiriş-kolonun elastik eğrisinin diferansiyel denklemi (6.80)'den

$$\frac{d^2}{dx^2}(EIy'') + \frac{d}{dx}\{[F + q_c(l - x)]y'\} - q_s = 0 \quad (6.84)$$

şeklinde bulunur. Bu denklem (6.12), (6.58) ve (6.71) ile özdeştir.

6.5.2 Sınır şartlarının boyutsuz koordinatlar türünden ifadeleri

(6.84) diferansiyel denklemi (6.25) değişken dönüşümü kullanılarak X boyutsuz değişkeni cinsinden (6.31) denklemi haline dönüştürülür. (6.79) ile verilen sınır şartları boyutsuz değişkenler cinsinden

$$y(X_1) = y'(X_1) = y''(X_2) = 0 \quad (6.85)$$

halini alır. Serbest uçtaki kesme kuvvetinin temsil eden (6.81d) eşitliğinin boyutsuz koordinat cinsinden

$$[y''' - Xy']_{X=X_2} = 0 \quad (6.86)$$

şeklinde ifade edilir.

6.5.3 Elastik eğrinin diferansiyel denkleminin DTM ile çözümü

(6.31) diferansiyel denkleminin diferansiyel dönüşümü alınırsa (6.42) denklemi elde edilir. Düzenlenerek aşağıdaki şekilde rekürsif bağıntıya ulaşılır

$$Y(k+3) = \frac{\alpha\delta(k-1) + (\alpha X_1 + b^*)\delta(k) + kY(k) + X_1(k+1)Y(k+1)}{(k+1)(k+2)(k+3)}. \quad (6.87)$$

Ankastre uca ait sınır şartlarının transformu

$$Y(0) = Y(1) = 0 \quad (6.88a)$$

serbest uca ait sınır şartlarından moment ifadesinin ters diferansiyel dönüşümü

$$\left[\sum_{k=0}^n (k+1)(k+2)Y(k+2)(X-X_1)^k \right]_{X=X_2} = 0 \quad (6.88b)$$

ve kesme kuvvetinin ters diferansiyel dönüşümü ise,

$$\left[\sum_{k=0}^n \{ (k+1)(k+2)(k+3)Y(k+3) - kY(k) - X_1(k+1)Y(k+1) \} (X-X_1)^k \right]_{X=X_2} = 0 \quad (6.88c)$$

olarak bulunur. (6.88a) ile verilen sınır şartları (6.87) bağıntısında kullanılarak k'nın istenildiği kadar büyük değeri için Y(k) ifadeleri hesaplanabilir.

$$Y(0) = 0$$

$$Y(1) = 0$$

$$Y(2) = a^*$$

$$Y(3) = \frac{\alpha X_1 + b^*}{6} \quad (6.89)$$

$$Y(4) = \frac{2a^*X_1 + \alpha}{24}$$

$$\begin{aligned}
Y(5) &= \frac{X_1^2 \alpha + X_1 b^* + 4a^*}{120} \\
Y(6) &= \frac{3b^* + 4aX_1 + 2aX_1^2}{720} \\
Y(7) &= \frac{4a + 12a^*X_1 + X_1^2 b^* + X_1^3 \alpha}{720} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

İlk sekizi (6.89)'da verilmiştir. Bu değerler (6.88b) ve (6.88c)'de yazılırsa

$$\begin{aligned}
&2a^* + (\alpha X_1 + b^*)(X_2 - X_1) + \frac{2a^*X_1 + \alpha}{2}(X_2 - X_1)^2 \\
&+ \frac{X_1^2 \alpha + X_1 b^* + 4a^*}{6}(X_2 - X_1)^3 \\
&+ \frac{2a^*X_1^2 + 4aX_1 + 3b^*}{12}(X_2 - X_1)^4 + \dots = 0
\end{aligned} \tag{6.89a}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\alpha X_1 + b^* + (2a^*X_1 + \alpha)(X_2 - X_1) + \frac{\alpha X_1^2 + X_1 b^*}{2}(X_2 - X_1)^2 \\
&+ \frac{2a^*X_1^2 + \alpha X_1 + b^*}{6}(X_2 - X_1)^3 + \dots \\
&- X_1 \left\{ 2a(X_2 - X_1) + \frac{\alpha X_1 + b^*}{2}(X_2 - X_1)^2 \right. \\
&\left. + \frac{2a^*X_1 + \alpha}{6}(X_2 - X_1)^3 \right\} + \dots = 0
\end{aligned} \tag{6.89b}$$

elde edilir. (6.89) denklemlerinde $X_2 - X_1$ yerine L_D ve X_1 yerine $X_2 - L_D$ yazarak (6.89) denklem sistemi X_2 ve L_D 'nin fonksiyonu haline getirilir. 6.2.7'de geçen adımlar gerçekleştirilerek burkulma determinantı oluşturulup kökleri olan X_2 ler belirlenir. Elde edilen X_2 değerleri Çizelge 6.4'te verilmiştir. Bu sınır şartları altında ulaşılan literatürde bir çözüm olmadığı için sonuçlar literatür karşılaştırmalı olarak verilememiştir.

$0.6 \leq L_D \leq 3$ aralığı için X_2 değerleri hesaplanmıştır. Bu aralık X_2 nin sıfıra eşit olduğu L_D değerinde kapsayacak şekilde seçilmiştir. $0.6 \leq L_D < 1,986353$ bölgesinde $X_2 < 0$ yani $F > 0$ olup bu bölgede dış kuvvetin ve ağırlığın etkisiyle burkulma oluşur. Yapılan hesaplamalarla $L_D = 1,986353$ için $X_2 = 0$ olduğu belirlenmiştir. X_2 nin sıfır olması F tekil yükünün olmaması anlamına gelir

(denk.(6.34)). Bu durumda burkulma eğik kiriş-kolonun ağırlığı nedeniyle oluşur. $1,986353 < L_D$ bölgesinde ise $X_2 > 0$ yani $F < 0$ kirişte küçük bir F tekil çekme yükü varlığında dahi burkulmanın oluşması bu bölgede kiriş ağırlığının burkulmanın kaynağını olduğunu gösterir.

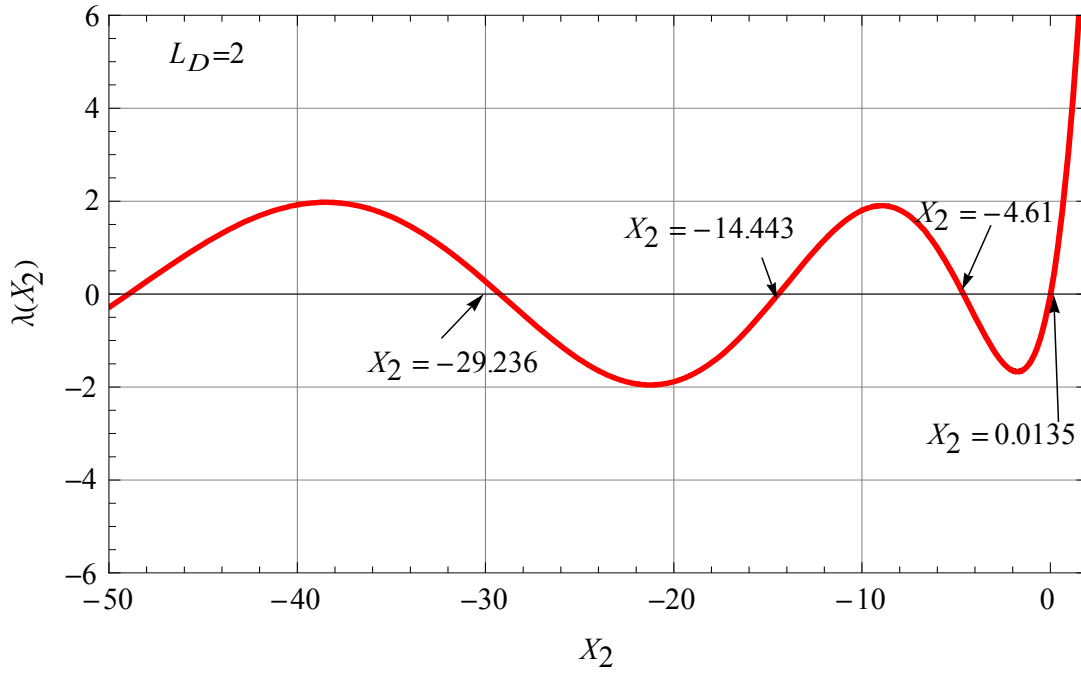
Çizelge 6.4 : Bir ucu ankastre mesnetli eğik kiriş-kolonun burkulma determinantının kökleri.

L_D	1. Kök	2. Kök	3. Kök	4. Kök
0,6	-6,67521	-61,39870	-171,05200	-335,54300
0,7	-4,82686	-44,98560	-125,54400	-246,39300
0,8	-3,61657	-34,31630	-95,98950	-188,51400
0,9	-2,77717	-26,98650	-75,71190	-148,81600
1,0	-2,16793	-21,73020	-61,19350	-120,40700
1,1	-1,70898	-17,82890	-50,43880	-99,37440
1,2	-1,35224	-14,85050	-42,24730	-83,36550
1,3	-1,06735	-12,52230	-35,86160	-70,89590
1,4	-0,83435	-10,66560	-30,78470	-60,99150
1,5	-0,63969	-9,15890	-26,67950	-52,99160
1,6	-0,47387	-7,91771	-23,31100	-46,43540
1,7	-0,33007	-6,88155	-20,51110	-40,99330
1,8	-0,20326	-6,00630	-18,15690	-36,42490
1,9	-0,08968	-5,25915	-16,15730	-32,55120
2,0	0,01357	-4,61534	-14,44320	-29,23680
2,1	0,10876	-4,05586	-12,96160	-26,37770
2,2	0,19771	-3,56596	-11,67120	-23,89310
2,3	0,28187	-3,13407	-10,53950	-21,71940
2,4	0,36245	-2,75099	-9,54077	-19,80590
2,5	0,44059	-2,40938	-8,65419	-18,11170
2,6	0,51705	-2,10329	-7,86292	-16,60390
2,7	0,59264	-1,82789	-7,15317	-15,25540
2,8	0,66803	-1,57922	-6,51360	-14,04380
2,9	0,74379	-1,35398	-5,93477	-12,95070
3,0	0,82043	-1,14942	-5,40882	-11,96060

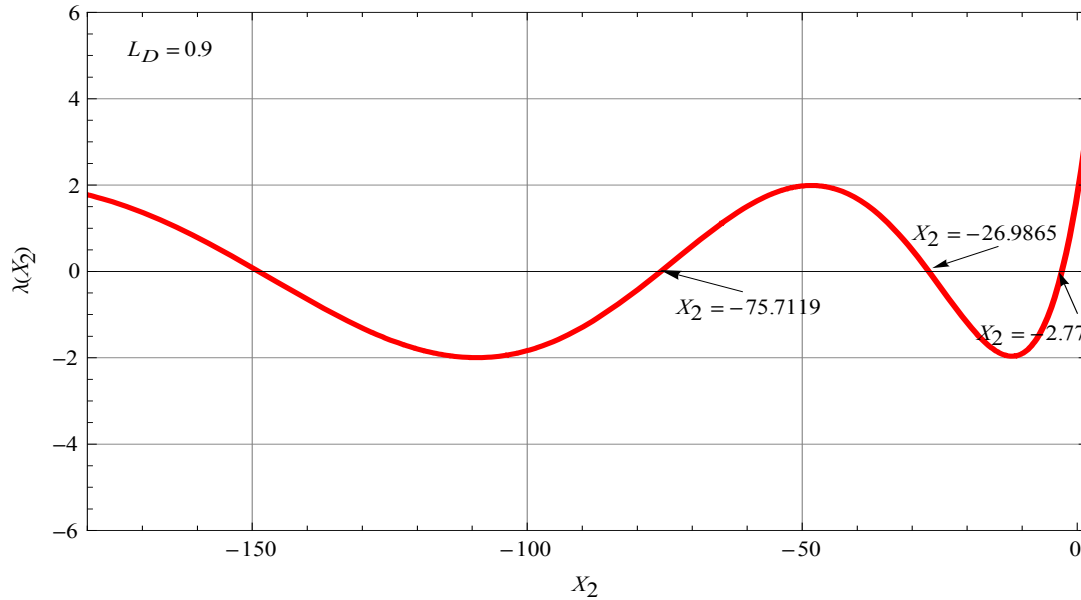
Şekil 6.17 ve 6.18’de sırasıyla L_D ’nin 2 ve 0.9 değerleri için λ burkulma determinantının grafiği gösterilmiştir. $L_D = 2$ için ilk beş ve $L_D = 0.9$ için yatay eksen kestiği ilk dört nokta yani ilk dört kök gözükmemektedir.

Şekil 6.19’da burkulma determinantının $L_D = 1.6$ için ilk kökü olan -0.473869 değerinden daha büyük kökler için kirişte oluşan maksimum yer değiştirmeler gösterilmiştir. Şekil 6.20’de ise -0.473869’dan daha küçük değerler için kirişin yapacağı en büyük yer değiştirmeler gösterilmiştir. Her iki grafikte de burkulma

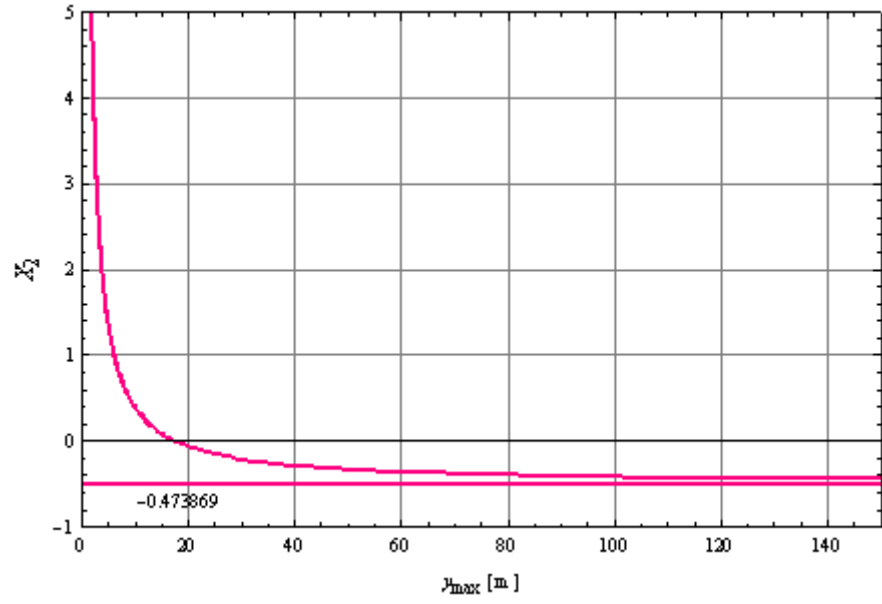
determinantının ilk kökü olan -0.473869 'a yaklaşıldığında yer değiştirmenin maksimum değerinin çok büyük değerler aldığı görülmektedir.



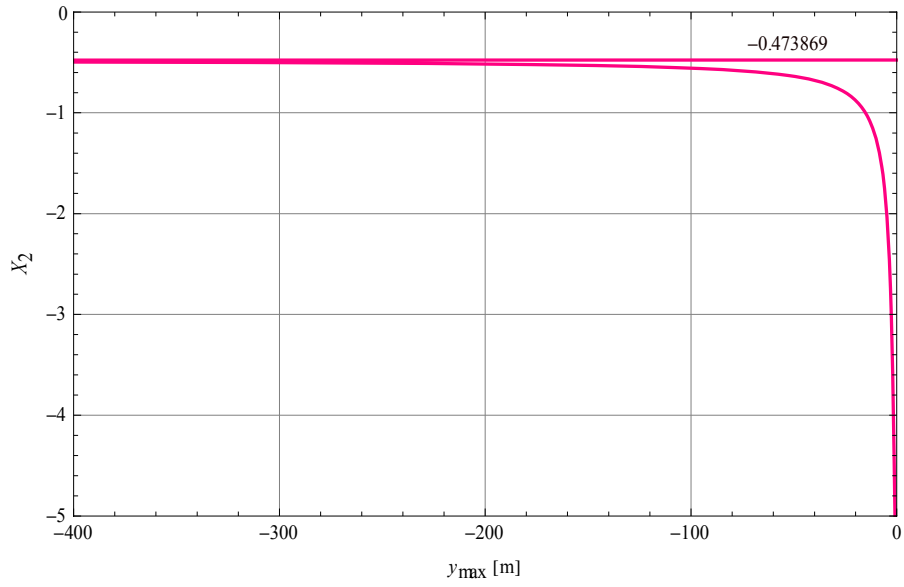
Şekil 6.17 : $L_D = 2$ için burkulma determinantının grafiği.



Şekil 6.18 : $L_D = 0.9$ için burkulma determinantının grafiği.



Şekil 6.19 : $x_2 = -0.473869$ değerine sağdan yaklaşırken kirişte oluşan maksimum yer değiştirme.



Şekil 6.20 : $x_2 = -0.473869$ değerine soldan yaklaşırken kirişte oluşan maksimum yer değiştirme.

6.6 Ağırlık ve Yük Katsayılarının Tanımı ve Bazı Analizler

Buraya kadar burkulma determinantının kökleri (öz değerler) olan X_2 'leri belirledik, bunların sonsuz sayıda olacağını gösterdik. Bulunan X_2 'lerin burkulma determinantının kökleri olduğunu grafikler ile ispat ettik ve bu köklere yaklaşırken kirişte oluşacak maksimum yer değiştirmenin küçük yer değiştirmeler kabulünü çığnediğini yine grafikler ile gösterdik. Hatırlanacağı gibi; burkulma determinantının kökleri olan X_2 değerleri dış yük F ve eğik kiriş-kolonun ağırlığı q 'nın fonksiyonudur (bkz denklem (6.34)). Bu kısımda dış yükün ve ağırlığın burkulmaya etkilerini daha iyi görebilmek için iki yeni parametre tanımlayacağız. Bu gaye ile (6.34) numaralı denklemde değişkenlere ayırma (separation of variable) metodu uygulanmalıdır, şöyleki;

$$-X_2 = u(q_c)v(F) \quad (6.90)$$

(6.34) denklemi yalnızca q_c ve F 'e bağlı iki ayrı fonksiyonunun çarpımı şeklinde yazılırsa

$$u(q_c) = \left(\frac{q_c L^3}{EI} \right)^{-2/3} \quad ve \quad v(F) = \frac{FL^2}{EI} \quad (6.91)$$

olarak bulunur. Bu ifadelerden $X_2 < 0$ iken F 'nin $-x$ doğrultusunda yani basma tipi kuvvet olduğu anlaşılır, q_c çekme ya da basma yönünde olabilir. $X_2 > 0$ iken $u(q_c) > 0$ olduğundan F dış yükünün yönü $+x$ doğrultusunda olmalıdır. Bu ise F 'in çekmeye çalışan bir kuvvet olduğunu gösterir. $X_2=0$ durumu ise F 'in sıfır değere sahip olduğu anlamına gelir, bu halde kiriş-kolona dış yük etkimez.

$v(F)$ dış yük ile orantılı bir büyüklük olup, ϕ ile gösterilir

$$\phi = \frac{FL^2}{EI} \quad (6.92)$$

ve yük katsayısı olarak adlandırılır. $u(q_c)$ ise ağırlık ile orantılı bir büyüklük olup bunun $-3/2$ inci kuvveti eğik kiriş-kolonun ağırlık katsayısı olarak adlandırılır ve β_c ile gösterilir,

$$\beta_c = \beta \cos \theta = \frac{q_c L^3}{EI}. \quad (6.93)$$

Özel olarak $\theta = 0^\circ$ iken $\beta_c = \beta$ ve

$$\beta = \frac{qL^3}{EI} \quad (6.94)$$

olur. Burkulmaya neden olacak zorlamanın ağırlık bileşenini temsil eden ağırlık katsayısı (6.34), (6.35) ve (6.92-93) denklemleri kullanılarak

$$\beta_c = L_D^3 \quad veya \quad L_D = \sqrt[3]{\beta_c} \quad (6.95)$$

olarak elde edilir. Yine burkulmaya neden olacak zorlamanın yük bileşenini temsil eden yük katsayısı ϕ fonksiyonu ise benzer metod ile boyutsuz uzunluk L_D ile burkulma determinantının kökü X_2 'nin fonksiyonu olarak

$$\phi = -L_D^2 X_2 \quad (6.96)$$

şeklinde belirlenir. Diğer yandan; burkulma determinantı λ 'nın kökü olan X_2 'nin eğik kiriş-kolonun ağırlık katsayısı β_c ve yük katsayısı ϕ cinsinden ifadesi

$$X_2 = -\frac{\phi}{\sqrt[3]{\beta_c^2}} \quad (6.97)$$

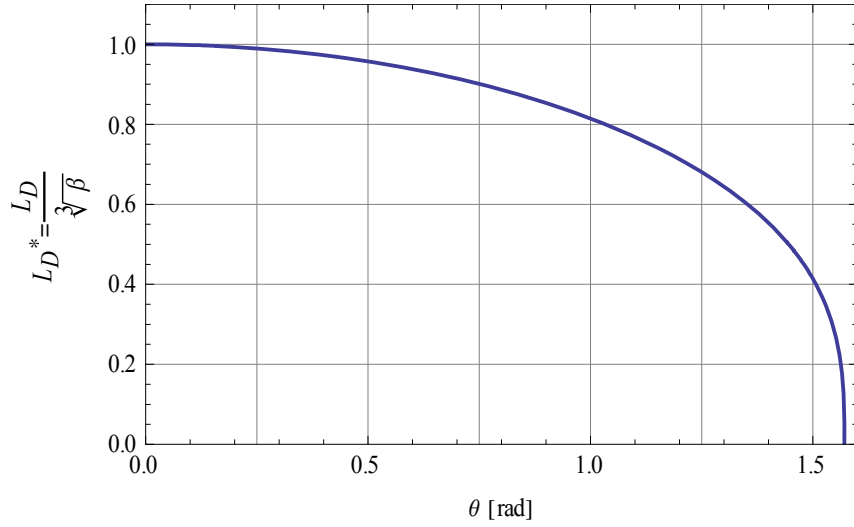
olarak bulunur.

6.7 Yük Katsayısı (ϕ) Ağırlık Katsayısı (β_c) Öz değerler (X_2) Eğim Açısı (θ) ve Boyutsuz Uzunluk (L_D) Arasındaki Bağlılıklar

Boyutsuz uzunluk L_D ile doğru orantılı olan L_D^* fonksiyonu tanımlanırsa, şöyle ki;

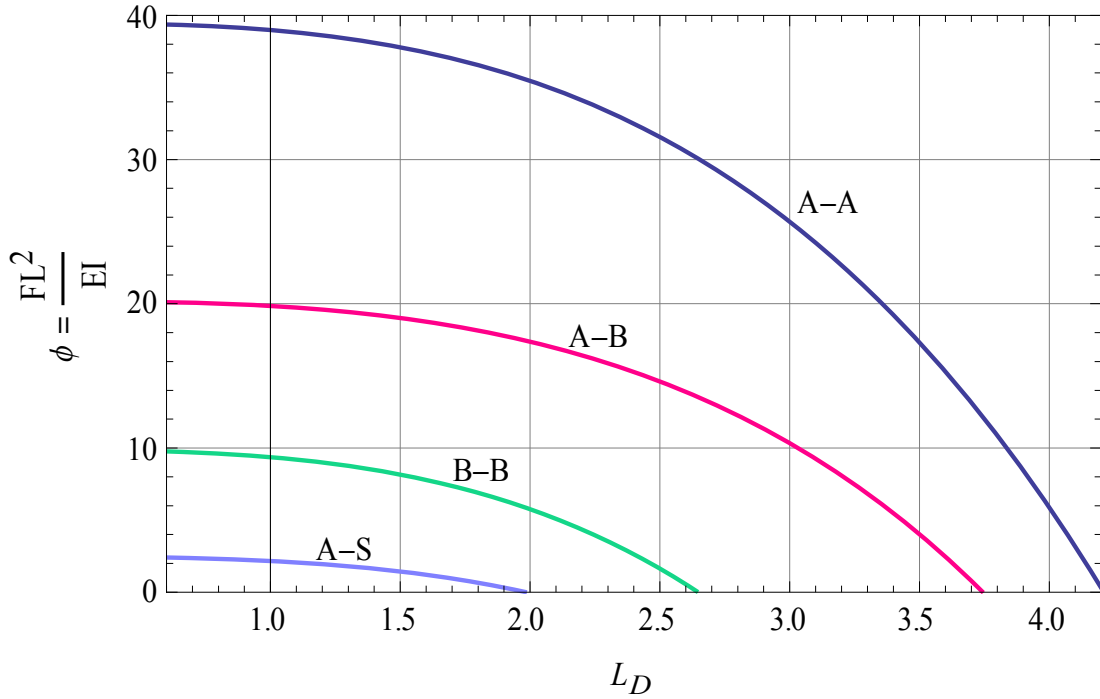
$$L_D^* = \frac{L_D}{\sqrt[3]{\beta}} \quad (6.98)$$

bu büyüklük ile kiriş eğimi θ arasındaki ilişkiyi veren grafik Şekil 6.21'de yer almaktadır. Bu grafik $0 \leq \theta < \pi/2$ bölgesi için çizdirilmiştir. θ artarken L_D^* azalmaktadır. Benzer yöntemle $3\pi/2 < \theta \leq 2\pi$ bölgesi içinde bir eğri çizdirilebilir.



Şekil 6.21 : L_D^* ile eğik kiriş-kolonun eğim açısı θ 'nın değişimi.

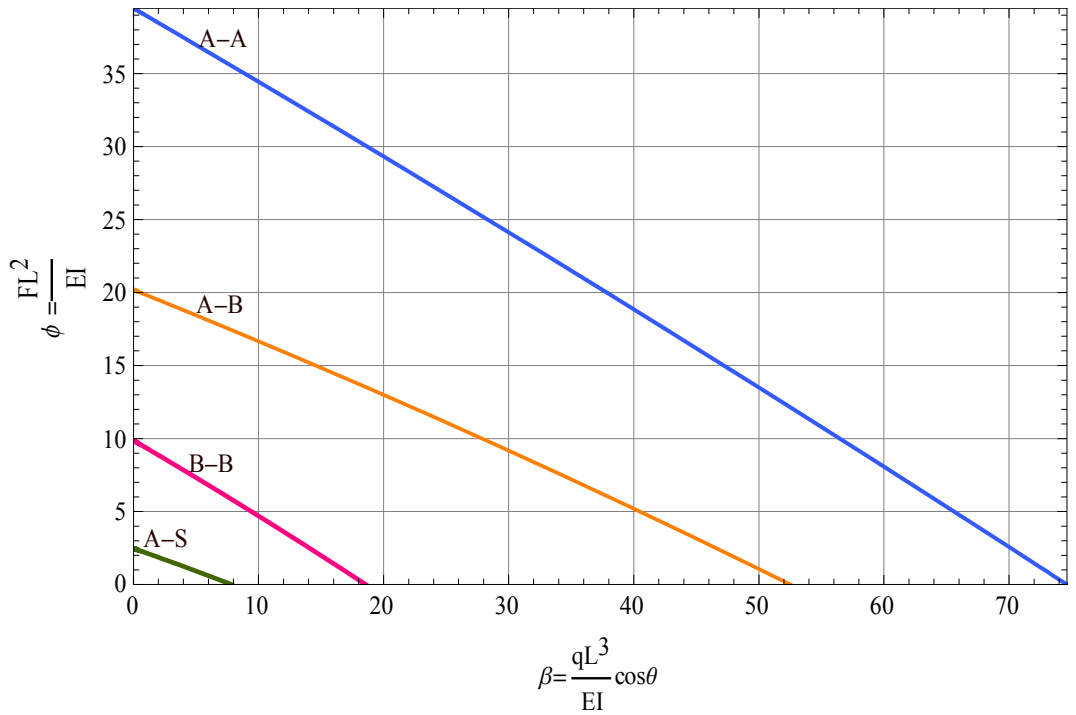
Şekil 6.22'de ise denklem (6.96) kullanılarak farklı mesnetleme şartları için $F > 0$ bölgesinde yük katsayısı ϕ 'nin boyutsuz uzunluk L_D ile nasıl değiştiği gösterilmiştir. Bu eğriler incelendiğinde, özdeş fakat farklı mesnetlere sahip eğik kiriş-kolonlardan daha sıkı mesnet şartlarına sahip olanın burkulmasına neden olacak dış yükün daha büyük olduğu görülmektedir.



Şekil 6.22 : Tüm mesnet şartları için yük katsayısı ϕ 'nin boyutsuz uzunluk L_D ile değişimi.

Şekil 6.21 ve Şekil 6.22 eğrileri birlikte değerlendirilerek θ 'nın değişimiyle L_D ve burkulmaya neden olacak yükün (F_{kr}) nasıl değişeceği hakkında yorum yapılabilir. Bu eğrilerden $0 \leq \theta < \pi/2$ ve aralığında ve $F > 0$ bölgesinde θ artarken L_D azalır, F 'nin kritik değeri ise artar. θ azalırken L_D artar, kritik yük (F_{kr}) ise azalır.

Tüm mesnet şartları için eğik kiriş-kolonun yük ve ağırlık katsayıları arasındaki değişimi gösterir eğriler Şekil 6.23'te sunulmuştur. Burkulma eğri üzerindeki (β_c, ϕ) değerlerin de gerçekleşir.



Şekil 6.23 : Eğik kiriş-kolonun yük katsayısı ϕ 'nin ağırlık katsayısı β_c ile değişimi.

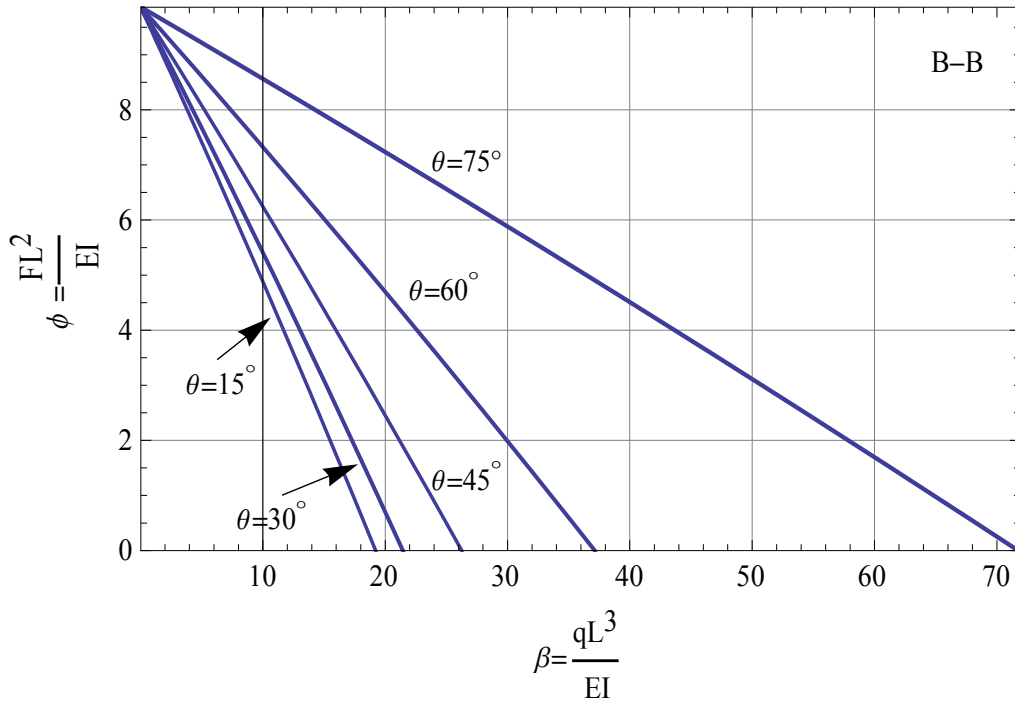
Grafikteki eğrilerin yatay ekseni kestiği noktalar $\phi = 0$ yani dış yükün olmadığı duruma karşı gelir. Bu değerler vasıtasıyla bir eğik kiriş-kolonun kendi ağırlığı etkisinde burkulmadan boyunu ne kadar artırdılabileceğimizi belirleyebiliriz. Örneğin iki ucu basit mesnetli kiriş için eğri yatay ekseni 18.5687'de keser, kritik uzunluk

$$L_{kr}^{\theta} = \sqrt[3]{18.57 \frac{EI}{q \cos\theta}} \quad (6.99)$$

olarak bulunur. L_{kr}^{θ} 'nin değeri $\theta = 0^\circ$ için denklem (5.13b) ile aynıdır. Denklem (6.29) gereği $\theta = 90^\circ$ çözüm kümemiz dışındadır. Denklem (6.97)'den daha önce belirlediğimiz X_2 değerlerinin $\beta \cos\theta \neq 0$ hali için geçerli olduğu anlaşılır. Diğer bir deyişle; β ve $\cos\theta$ sıfıra eşit olamaz. $\beta \neq 0$ ve $\theta \neq 90^\circ$ eğik kiriş-kolon için

yapılan matematiksel modelin ve çözümün geçerlilik bölgesini ifade eder. $\beta \cos \theta \neq 0$ olması, çözümün ağırlığı ihmal edilen eğik kiriş-kolon için saf dış yük etkisindeki burkulma yüklerini veremeyeceğini anlatır. Bu nedenle Şekil 6.23'teki eğrilerin düşey eksenini kestiği noktalar $\beta \cos \theta = 0$ değerleri değildir, çizimler $0.2 \leq \beta_c \leq 75$ aralığı için yapılmıştır. Bu değerleri kapsayacak matematiksel model ve çözüm 6.9 numaralı konuda, literatürle karşılaştırmalı olarak anlatılmıştır.

Şekil 6.24, iki ucu basit mesnetli eğik kiriş-kolonda kiriş eğimi ile burkulma katsayılarının nasıl değiştiğini göstermektedir. Bu eğriler iki ucu basit mesnetli bir eğik kiriş-kolon için oluşturulmuştur. θ arttıkça aynı ağırlık katsayısı β 'ya sahip eğik kiriş-kolonun burkulmasına neden olacak dış yükün arttığı, bu eğrilerden anlaşılmaktadır. Aynı eğilme rijitliğine (EI), boya (L) ve ağırlığa (q) sahip eğik kiriş-kolonlardan θ eğim açısı fazla olanın burkulmasına neden olacak dış yük bileşeni daha büyüktür.



Şekil 6.24 : İki ucu basit mesnetli eğik kiriş-kolonun yük katsayısı ϕ ile ağırlık katsayısı β 'nın eğim açısı θ ile değişimi.

Aynı yük katsayısı ϕ 'ye sahip eğik kiriş-kolonlardan eğim açısı fazla olanın ağırlık katsayısı β daha büyük olacağı da Şekil 6.24'ten anlaşılmaktadır. Diğer bir ifade ile; aynı dış yük ile zorlanan, aynı eğilme rijitliği (EI) ve boya (L) sahip farklı malzemelerden yapılmış eğik kiriş-kolonlardan ağırlığı (q) fazla olan daha büyük θ

eğim açısında burkulacaktır. Diğer mesnet şartları için çizdirilen eğriler Ek B'de sunulmuştur.

Çizelge 6.5'te tüm mesnet şartları için burkulma determinantı λ 'nın kökü X_2 'nin sıfır değerini aldığı birinci L_D değerleri verilmiştir. X_2 'nin sıfır olması F dış yükünün olmadığı anlamına gelir. Bu durum denklem (6.34) veya (6.96)'dan anlaşılmaktadır. Bu şartlar altında kiriş yalnızca ağırlığı nedeniyle burkulur. Denklem (6.95) kullanılarak bu L_D değerlerine karşı gelen ağırlık katsayısı β_c 'nin değerleri hesaplanıp Çizelge 6.5'te sunulmuştur. Bulunan β_c değerleri bölüm 6.8'de bulunan β değerleri ile aynıdır.

Çizelge 6.5 : Farklı sınır şartlarına sahip eğik kiriş-kolonlar için kritik boyutsuz uzunluk ve kritik ağırlık katsayısı.

Mesnet Şartları	L_D^{kr}	β_c^{kr}
Ankastre-Ankastre (A-A)	4,210191	74,6286
Ankastre-Basit(A-B)	3,744453	52,5007
Basit-Basit(B-B)	2,648057	18,5687
Ankastre-Serbest(A-S)	1,986353	7,8373

Örneğin, iki ucu da ankastre mesnetli ağırlığı ihmal edilmeyen bir eğik kiriş-kolon için kritik ağırlık,

$$(qL)_{kr}^{\theta} = 74.6286 \frac{EI}{L^2 \cos \theta} \quad (6.100)$$

iken kritik boy

$$L_{kr}^{\theta} = \sqrt[3]{74.6286 \frac{EI}{q \cos \theta}} \quad (6.101)$$

olarak bulunur. L_{kr} ağırlığı ihmal edilmeyen düşey bir kolonun kritik boyu, L_{kr}^{θ} ise aynı mesnet şartlarına sahip ağırlığı ihmal edilmeyen eğik kiriş-kolonun kritik boyu ise iki kritik boy arasında

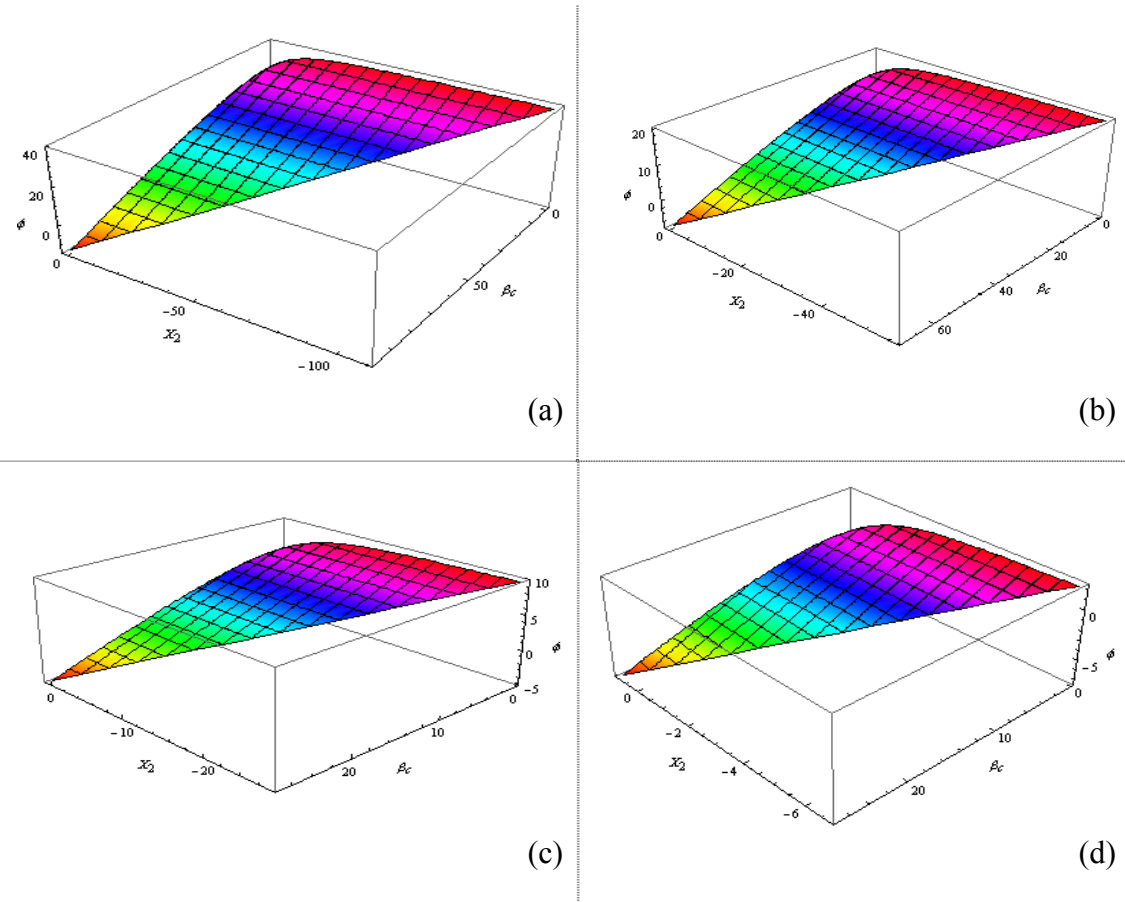
$$L_{kr}^{\theta} = \frac{L_{kr}}{\sqrt[3]{\cos\theta}} \quad (6.102)$$

bağıntısı vardır. Tüm mesnet şartları için belirlenen kritik uzunluk değerleri EK C’de verilmiştir. Burkulma kritik yükü içinse $(qL)_{kr}$ düşey kolonun, $(qL)_{kr}^{\theta}$ eğik kiriş-kolonun burkulmasına neden olacak yükleri gösteriyorken

$$(qL)_{kr}^{\theta} = \frac{(qL)_{kr}}{\cos\theta} \quad (6.103)$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Tüm mesnet şartları için belirlenen kritik ağırlık değerleri EK C’de verilmiştir. Örneğin; düşey bir kolona 60 derecelik bir eğim verilmesi halinde burkulmanın gerçekleşeceği boy $\sqrt[3]{2} \sim 1.26$ kat artarken burkulmanın gerçekleşeceği ağırlık iki kat artar.

Öz değer X_2 ile eğik kiriş-kolonun ağırlık katsayısı β_c ve yük katsayısı ϕ arasındaki bağıntının tüm mesnet şartları için grafiği şekil 6.25’te verilmiştir.



Şekil 6.25 : Tüm mesnet şartları için öz değerlerin yük ve ağırlık katsayıları ile değişimi a) A-A b) A-B c) B-B d) A-S.

6.8 Kritik Yüke Yakın Zorlamanın Eğik Kiriş-Kolonda Oluşturacağı Yer Değiştirmeler

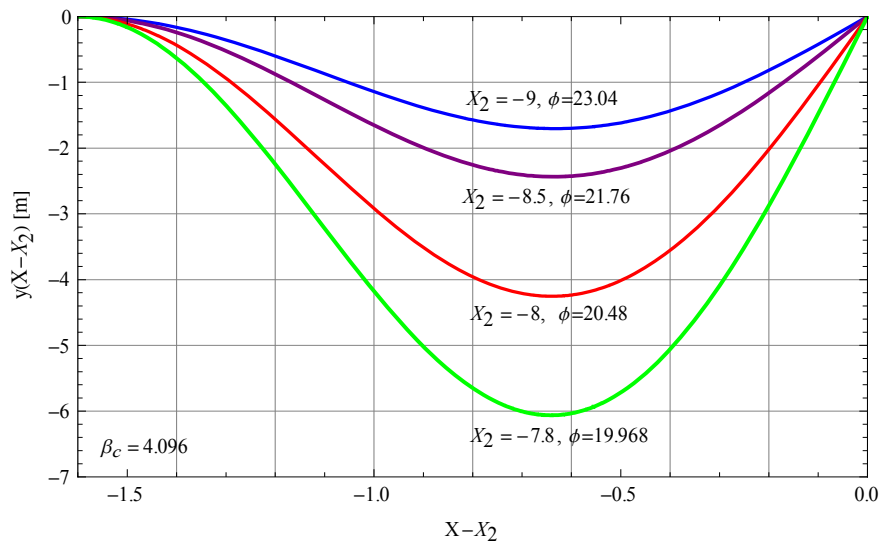
Kritik yükün yakın komşuluğundaki yük değerleri için eğik kriş-kolonda oluşacak yer değiştirmeleri analiz edebilmek amacıyla özel bir kiriş ele alınmalıdır. Bu çalışmanın bundan sonraki kısmında Çizelge 6.6'da özellikleri verilen eğik kiriş-kolon için türetimler gerçekleştirilecektir.

Çizelge 6.6: Yer değiştirme davranışı incelenecek eğik kiriş-kolona ait parametreler [9, 31].

Elastisite Modülü	E	$30 * 10^6$ psi	206,8 GPa
Dış Çap	D	5 in	127 mm
İç Çap	d	4.276 in	108.62 mm
Et Kalınlığı	t	0.362 in	9.19 mm
Nominal Yük	q	19.5 lbf/ft	3.41491 N/mm
Atalet Momenti	I	$6.881 * 10^{-4}$ ft ⁴	5.93927×10^6 mm ⁴

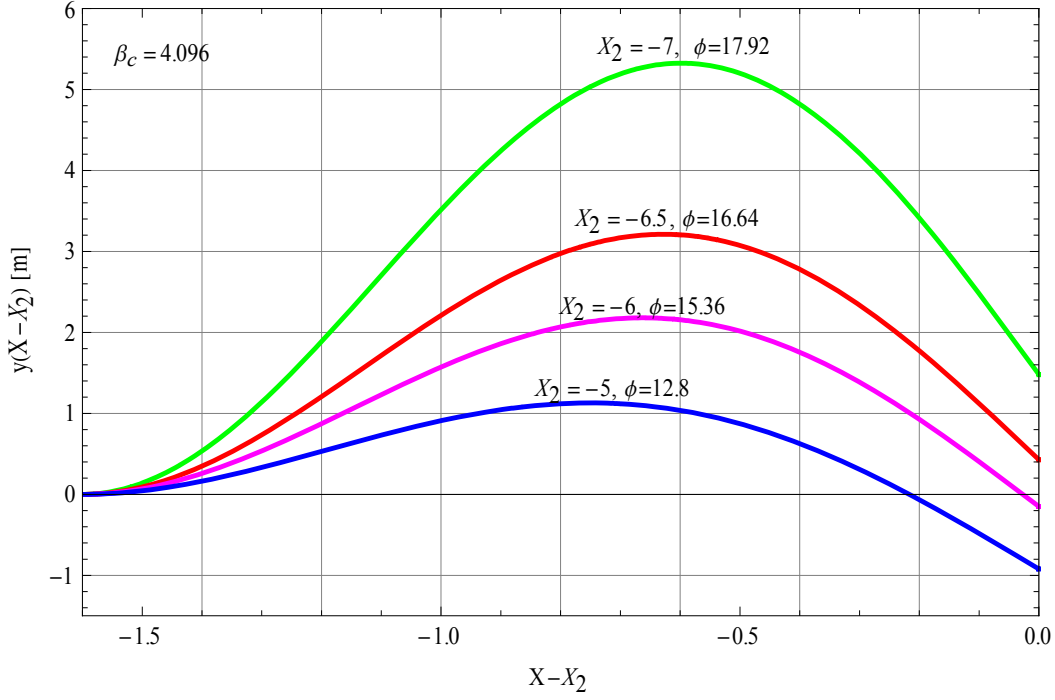
Eğim açısı $\theta = 31^\circ$, uzunluğu $L = 27$ m, ilgili geometrik özellikleri ile malzeme özellikleri Çizelge 6.6'da yer alan kiriş için oluşturulan yer değiştirme eğrileri Şekil 6.26 ile 6.33 arasında gösterilmiştir.

Denklem (6.32) ve (6.35) kullanılarak $\alpha = 10.2992$ m ve $L_D = 1.6$ olarak bulunur. Bu değerler yardımıyla Şekil 6.26'te ankastre-basit mesnetli eğik kiriş-kolonun Çizelge 6.2'de yer alan ilk burkulma determinantının köküne soldan yaklaşılrken yani $X_2 \rightarrow (X_2)_1^-$ iken kirişte oluşacak yer değiştirmeler gösterilmiştir.



Şekil 6.26 : Ankastre basit mesnetli eğik kiriş-kolonun $L_D=1.6$ için burkulma yük katsayısına sağdan yaklaşıldığında ($\phi \rightarrow \phi_1^+$) kirişte oluşacak yer değiştirmeler.

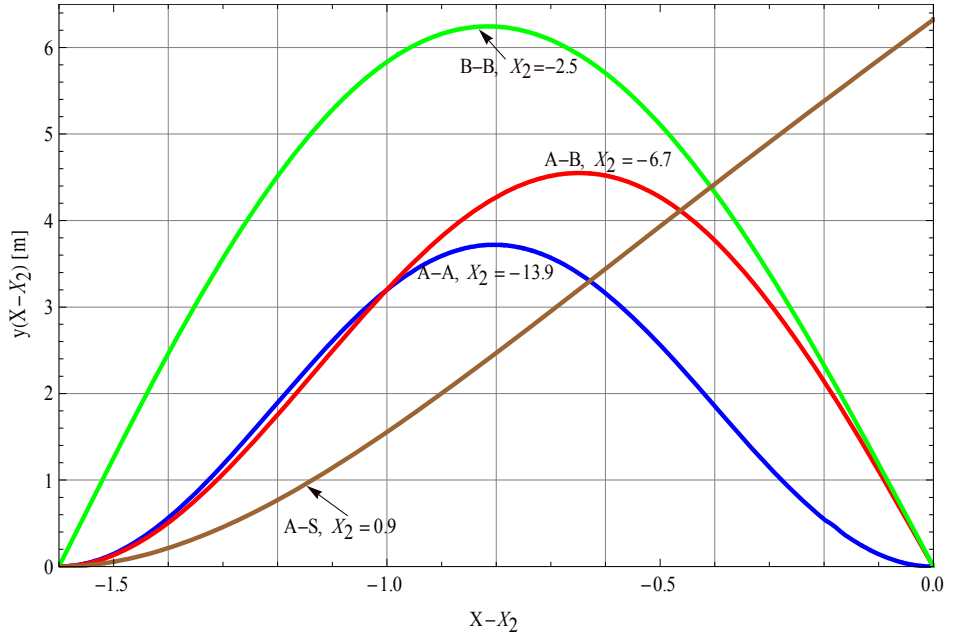
Benzer şekilde bir ucu ankastre mesnetli eğik kiriş-kolon içinde Çizelge 6.4'te yer alan burkulma determinantının ikinci köküne sağdan yaklaşırken $X_2 \rightarrow (X_2)_2^+$ iken kirişte oluşacak yer değiştirmeler Şekil 6.27'de gösterilmiştir.



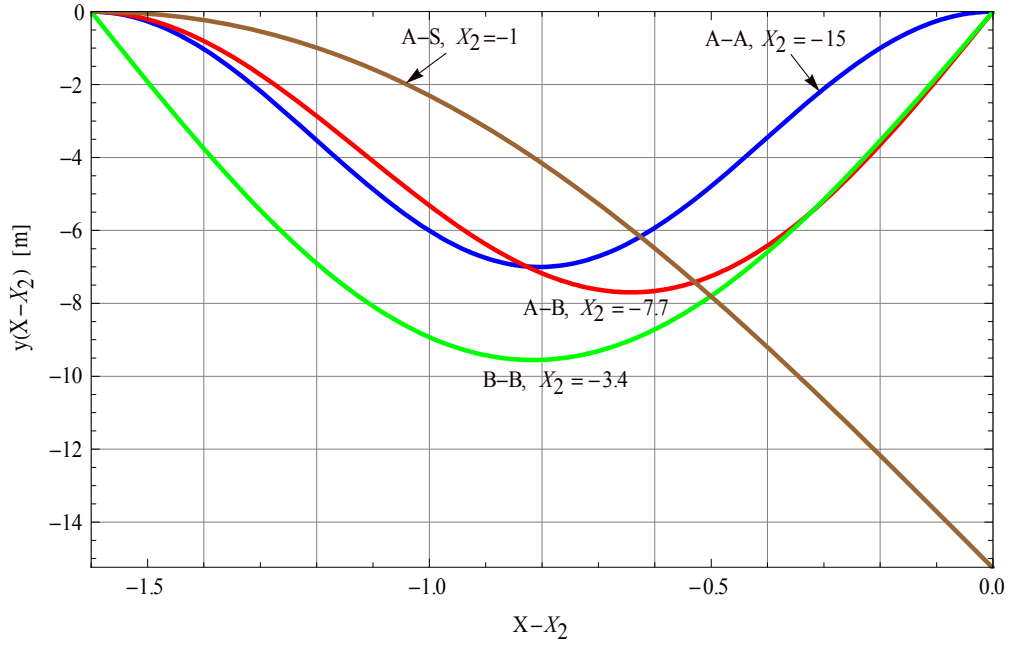
Şekil 6.27 : Bir ucu ankastre mesnetli eğik kiriş-kolonun ikinci burkulma yük katsayısına soldan yaklaşırken ($\phi \rightarrow \phi_2^-$) oluşacak yer değiştirmeler.

$X_1 \leq X \leq X_2$ bu eşitsizlik X 'in kiriş açıklığı boyunca değiştiğinin ifadesidir. X_2 'yi bu eşitsizlikten çıkarırsak $X_1 - X_2 \leq X - X_2 \leq 0$ elde edilir. Bu ise $-L_D \leq X - X_2 \leq 0$ 'a denktir. Bu nedenle, şekil 6.26-6.33'te yer alan eğriler $X - X_2$ 'nin $[-1.6 \ 0]$ aralığında çizdirilmiştir.

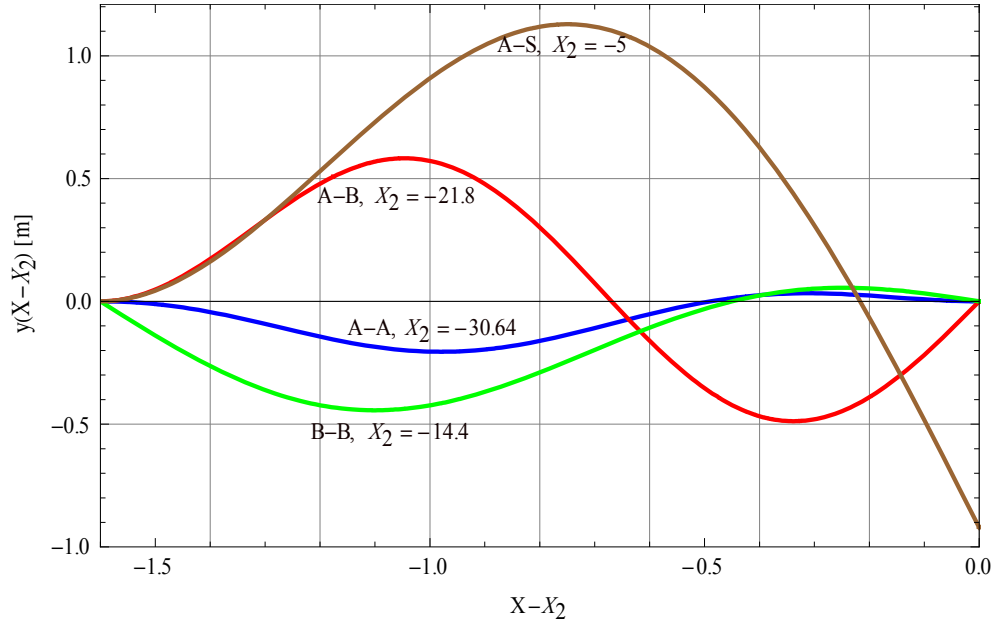
Şekil 6.28-6.33 arasında ankastre-ankastre(A-A), ankastre-basit(A-B), basit-basit(B-B) ve ankastre-serbest(A-S) mesnetli eğik kiriş-kolonların Çizelge 6.1-6.4'te verilen $L_D = 1.6$ iken ilk üç burkulma kritik yükünün yakın civarındaki X_2 değerleri için oluşturulan yer değiştirme eğrileri sunulmuştur. Çizelgelerde geçen yük değerleri küçük yer değiştirme kabulünün çiğnendiği değerler olduğundan yakın komşulukları için yer değiştirme eğrilerinin oluşturulması yoluna gidilmiştir.



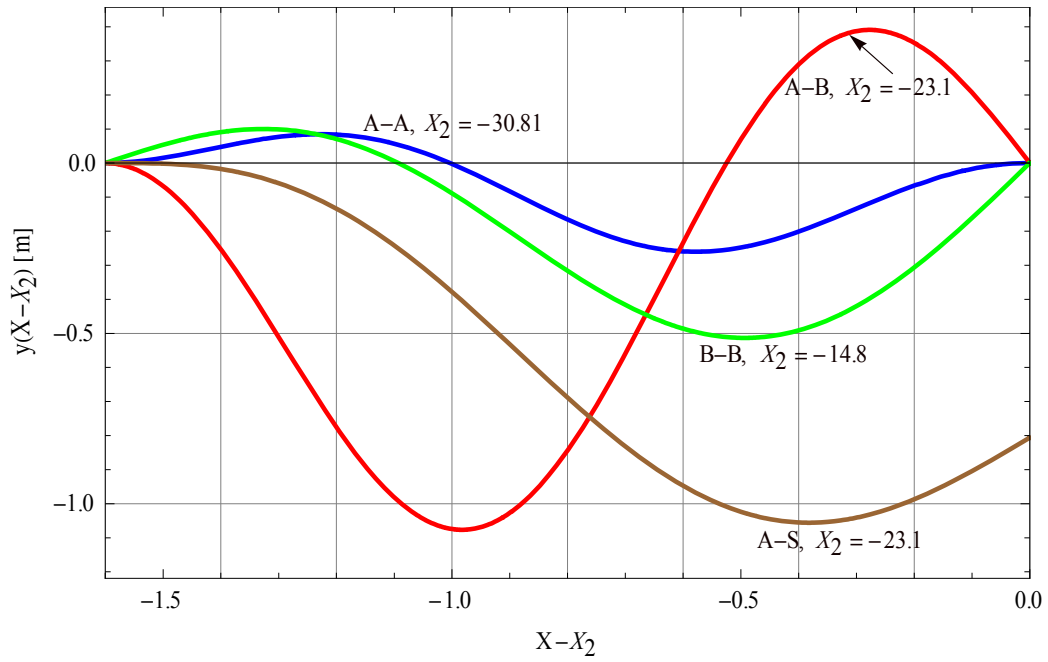
Şekil 6.28 : Tüm mesnet şartları için birinci burkulma yük değerine soldan yaklaşırken ($F \rightarrow F_1^-$) kirişte oluşacak yer değiştirmeler.



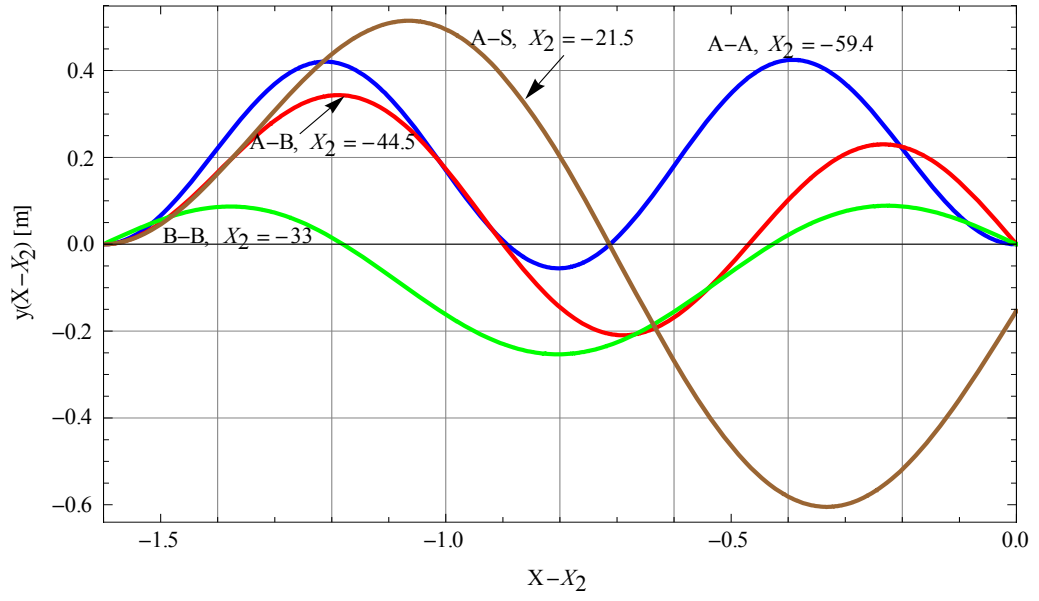
Şekil 6.29 : Tüm mesnet şartları için birinci burkulma yük değerine sağdan yaklaşırken ($F \rightarrow F_1^+$) kirişte oluşacak yer değiştirmeler.



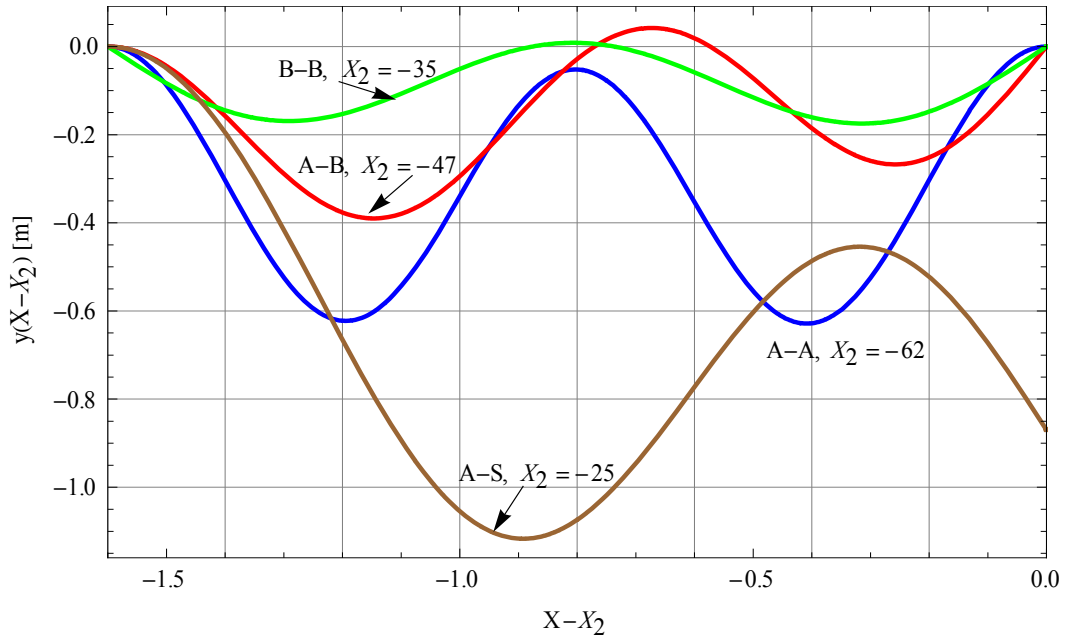
Şekil 6.30 : Tüm mesnet şartları için ikinci burkulma yük değerine soldan yaklaşırken ($F \rightarrow F_2^-$) kirişte oluşacak yer değiştirmeler.



Şekil 6.31 : Tüm mesnet şartları için ikinci burkulma yük değerine sağdan yaklaşırken ($F \rightarrow F_2^+$) kirişte oluşacak yer değiştirmeler.



Şekil 6.32 : Tüm mesnet şartları için üçüncü burkulma yük değerine soldan yaklaşırken ($F \rightarrow F_3^-$) kirişte oluşacak yer değiştirmeler.



Şekil 6.33 : Tüm mesnet şartları için üçüncü burkulma yük değerine sağdan yaklaşırken ($F \rightarrow F_3^+$) kirişte oluşacak yer değiştirmeler.

6.9 Özel Hal: $\theta = 0^\circ$ İçin Burkulma Analizi

Eğim açısı sıfır derece ise kiriş-kolon ağırlığının bileşenleri $q_s = 0$ ve $q_c = q$ olur.

Bu durumda çubuğun toplam potansiyel enerjisi, denklem (6.10)'dan

$$\Pi(y) = \int_0^L \left\{ \frac{EI}{2} (y'')^2 - \frac{1}{2} [F + q(L - x)] (y')^2 \right\} dx \quad (6.104)$$

olarak elde edilir. Bu denklemin farklı sınır şartları altında varyasyonu alınarak elastik eğrinin diferansiyel denklemi ya da denklem (6.22) den,

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI y'') + \frac{d}{dx} \{ [F + q(L - x)] y' \} = 0 \quad (6.105)$$

olarak bulunur. Bir defa integre ederek

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{1}{EI} [F + q(L - x)] y' = \frac{c}{EI} \quad (6.106)$$

elde edilir. Denklem (6.25) ile verilen $x = aX + b$ değişken dönüşümü yapılırsa diferansiyel denklem

$$\frac{d^3 y}{dX^3} + \frac{a^2}{EI} [F + q(L - aX - b)] \frac{dy}{dX} = \frac{ca^3}{EI} \quad (6.107)$$

y' nün katsayısı $-X$ olacak şekilde a ve b değerleri hesaplanırsa,

$$a = \sqrt[3]{\frac{EI}{q}} \quad \text{ve} \quad b = \frac{F}{q} + L \quad (6.108)$$

olarak bulunur. Bu halde yeni koordinat X 'in x cinsinden ifadesi

$$X = \sqrt[3]{\frac{EI}{q}} \left[\frac{F}{EI} + L - x \right] \quad (6.109)$$

olur. Bu halde elastik eğrinin diferansiyel denklemi (6.107)'den

$$\frac{d^3 y}{dX^3} - X \frac{dy}{dX} = \frac{c}{q} \quad (6.110)$$

şeklinde sağ taraflı bir diferansiyel denklem olarak bulunur. Burada c integrasyon sabitidir.

Kiriş-kolonun iki ucuna ait koordinatları denklem (6.109)'da yazarak veya (6.33) ve (6.34)'de θ yerine sıfır derece koyarak

$$X_1 = X|_{x=0} = -\sqrt[3]{\frac{q}{EI}} \left(\frac{F}{q} + L \right) \quad (6.111)$$

ve

$$X_2 = X|_{x=L} = -\sqrt[3]{\frac{q}{EI}} \frac{F}{q} \quad (6.112)$$

bulunur. Kiriş uzunluğunun yeni koordinat cinsinden ifadesi,

$$L_D = \sqrt[3]{\frac{q}{EI}} L \quad (6.113)$$

olarak bulunur.

Farklı mesnet halleri için (6.110) denkleminin çözümünde kullanılacak sınır şartları daha önce belirlenenlerle aynıdır, şöyleki; B-B için denklem (6.36), A-B için denklem (6.59), A-A için denklem (6.72) ve A-S için denklem (6.85) ve (6.86) kullanılmalıdır. Fakat burada geçen X_1 ve X_2 değerleri (6.111-112) ile verilen ifadelerdir.

Denklem (6.110) ile verilen elastik eğrinin diferansiyel denkleminin diferansiyel transformu alınır,

$$\begin{aligned} (k+1)(k+2)(k+3)Y(k+3) - kY(k) - X_1(k+1)Y(k+1) \\ = b^* \delta(k) \end{aligned} \quad (6.114)$$

olarak bulunur. Burada

$$b^* = \frac{c}{q} \quad (6.115)$$

dir.

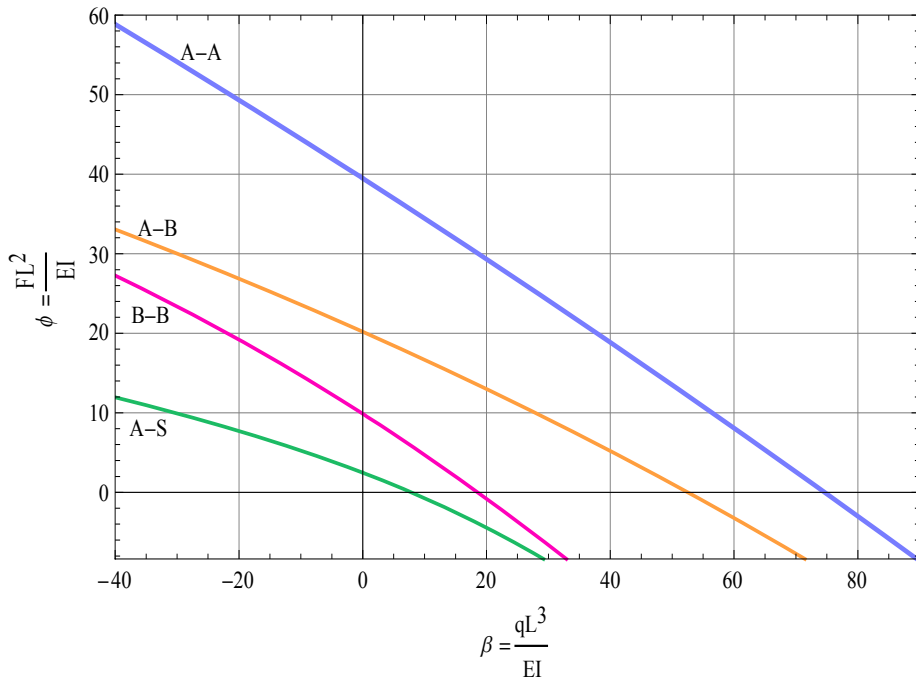
Sınır şartlarında transformları alınırsa, B-B için denklem (6.43) ve (6.44), A-B için denklem (6.61) ve (6.62), A-A için denklem (6.74) ve (6.75) ve A-S için denklem (6.88) denklemleri bulunur. Her mesnet tipi için (6.114) denklemi ilgili sınır şartının dönüşümü ile birlikte kullanılarak 6.2.7'deki metod ile çözümler üretilebilir.

Denklem (6.92) ve (6.94)'ten yük katsayısı ϕ ve β ağırlık katsayısı

$$\beta = \frac{qL^3}{EI} \text{ ve } \phi = \frac{FL^2}{EI} \quad (6.116)$$

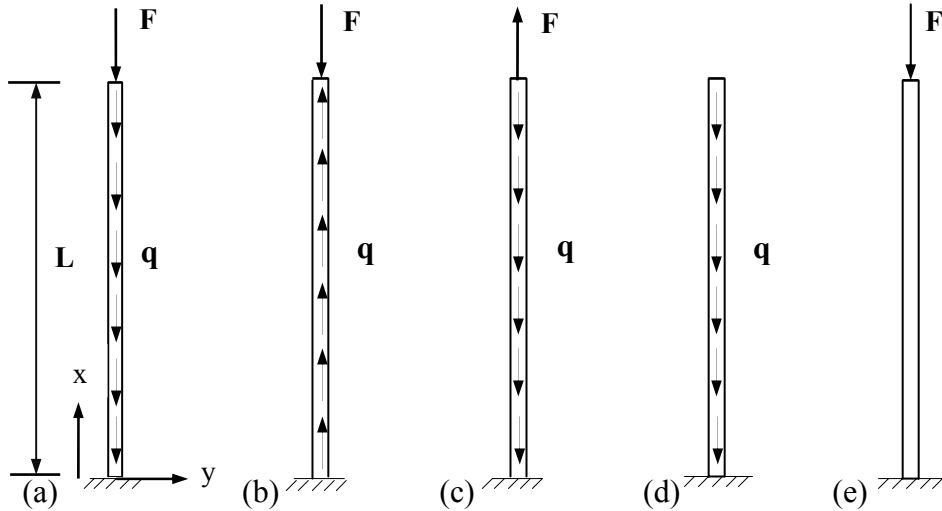
olur. Burada da β kiriş-kolonun ağırlığı ile, ϕ ise tekil yük ile orantılı büyüklüklerdir. Şekil 6.34'te β ve ϕ arasındaki bağıntı tüm mesnet şartları için gösterilmiştir.

Diferansiyel Transform Metodu kullanılarak kendi ağırlığı ve basma tipi dış yük etkisindeki farklı mesnet şartlarına sahip düşey kiriş-kolonlar için burkulma katsayılarının sayısal değerleri bulunup grafiği Şekil 6.34'te verilmiştir. Beklenildiği gibi eğriler mesnet şartlarına göre farklılık göstermektedir. Tüm mesnet şartları için; ağırlık katsayısı β ile ϕ yük katsayısı arasında nonlineer bir ilişki olduğu eğrilerden anlaşılmaktadır ($\phi = -X_2\beta^{\frac{2}{3}}$).



Şekil 6.34 : q ağırlığı ve tekil yük F'nin etkisi altındaki kiriş-kolonun burkulma yük katsayıları.

Şekil 6.34'te, eğrilerin altında kalan bölgedeki (β, ϕ) değerlerinde burkulma oluşmaz. Eğrileri oluşturan (β, ϕ) ikililerinde ise burkulma yalnızca dış yük, yalnızca ağırlık veya her ikisinin beraber etkisiyle oluşur. Eğriler $\beta\phi$ eksen takımının düzlemi kestiği üç bölgede yer almaktadır. Birincisi $\beta>0, \phi>0$ bölgesinde olup bu bölgede yer alan eğri üzerindeki (β, ϕ) ikililerinde burkulma basmaya çalışan dış yük ve ağırlık etkisiyle oluşur (bkz Şekil 6.35a). İkincisi $\beta<0, \phi>0$ bölgesi olup bu bölgede yer alan eğri üzerindeki (β, ϕ) değerlerinde burkulma basmaya çalışan dış yük ve çekmeye çalışan yayılı yük q nedeniyle oluşur (bkz. Şekil 6.35b). Üçüncü bölgeden, $\beta<0, \phi<0$ bölgesinden eğri geçmemektedir. Dördüncü bölge ise $\beta>0, \phi<0$ bölgesi olup bu bölgede yer alan eğri üzerindeki (β, ϕ) değerlerinde burkulma çekmeye çalışan dış yük ve q ağırlığı etkisiyle oluşur (bkz. Şekil 6.35c). Eğrilerin eksenleri kestiği noktalar ise yalnız dış yükün ve yalnız ağırlığın burkulmaya neden olduğu (β, ϕ) değerleridir. Eğrilerin yatay eksenini kestiği $(\beta, 0)$ değerlerinde yalnız ağırlık etkisiyle burkulma (bkz. Şekil 6.35d) , düşey eksenini kestiği $(0, \phi)$ değerlerinde ise yalnız dış yük etkisiyle burkulma gerçekleşir (bkz. Şekil 6.35e).



Şekil 6.35 : Düşey kolon (eğik kiriş-kolonun $\theta = 0^\circ$ özel hali) (a) $\beta>0, \phi>0$ (b) $\beta<0, \phi>0$ (c) $\beta>0, \phi<0$ (d) $\beta>0, \phi=0$ (e) $\beta=0, \phi>0$.

Şekil 6.35c'deki yükleme halinde burkulmanın oluşması için kesitlerde basma kuvvetinin var olması gerekir; yani $0<x<L$ iken $q(L-x)>F$ 'nin sağlandığı bir bölge olmalıdır. Ayrıca, çekmenin etkin olduğu bölgede kolon akma yönünden de incelenmelidir. Şekil 6.35b'deki hal asılı bir kolon durumuna denk düşer. Şekil 1.2a'da yer alan sondaj çıkarma sistemi olarak düşünülebilir.

$\phi = 0$ için β kritik değeri tasarımcı açısından ayrı bir öneme sahiptir çünkü bu değer gerçekleştirilebilir maksimum kolon boyunu belirler. Diferansiyel Transform Metodu kullanılarak elde edilen β kritik değerleri ve ulaşılan literatürdeki değerler Çizelge 6.7’de karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Sonuçlarımız Duang ve Wang [10] tarafından hipergeometrik seriler kullanılarak elde edilen sonuçlar ile tam olarak uyuşmaktadır. Wang ve Ang’ın 1988’de yaklaşık metodlar kullanarak elde ettiği sonuçların A-A ve A-B mesnet durumunda sırasıyla %5.8 ve %2.68’lik hata içerdiği görülmüştür [11].

Çizelge 6.7 : $\phi = 0$ için β ’nın kritik değerlerinin karşılaştırılması.

Sınır şartları	A-A	A-B	B-B	A-S
Şimdiki Çalışma	74,6286	52,5007	18,5687	7,8373
Duan ve Wang (2008)	74,6286	52,5007	18,5687	7,8373
Wang ve Ang (1988)	78,96	53,91	18,58	7,84
Fark (%)	5,800	2,680	0,060	0,030

Çizelge 6.8’de $\beta = 0$ iken elde edilen ve literatürde mevcut olan ϕ ’nin kritik değerleri karşılaştırılmalı olarak verilmiştir. DTM ile elde edilen sonuçların tam çözümler ile örtüştüğü gözlenmektedir.

Çizelge 6.8 : $\beta = 0$ iken ϕ ’nin kritik değerlerinin karşılaştırılması.

Sınır şartları	A-A	A-B	B-B	A-S
Şimdiki Çalışma	39,4784	20,1907	9,86961	2,4674
Duan ve Wang (2008)	39,4782	20,1904	9,8688	2,4664
Wang ve diğ. (2005)	$4\pi^2$	$2.0457\pi^2^*$	π^2	$\pi^2/4$

* A-B mesnetli çubuk için stabilite kriteri $tg\sqrt{\phi} = \sqrt{\phi}$ dir [12]. Bu nedenle $\phi = 20.1907$ olur.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

1. Bu çalışmada basit mesnetli eğik kiriş-kolon için Diferansiyel Transform Metodu kullanılarak elde edilen sonuçlar, literatürde hipergeometrik seriler kullanılarak elde edilmiş olan sonuçlar ile tam bir uyuşum içersindedir [9]. Bu durum DTM'nin eğik kiriş-kolon yapıların burkulma yüklerinin belirlenmesinde de güvenli bir araç olduğunu göstermektedir.

2. Aynı eğilme rijitliğine (EI), boya (L) ve eğime (θ) sahip, aynı malzemeden yapılmış ve ağırlığı ihmal edilmeyen, eğik kiriş-kolonlardan mesnet şartları daha sıkı olan kendi ağırlığı nedeniyle oluşabilecek burkulmaya karşı daha dirençlidir. Bu durum şekil 6.23'ten açık olarak görülmektedir. Şöyleki; iki ucu ankastre mesnetli çubuk ankastre-basite göre, ankastre-basit mesnetli çubuk ise iki ucu basit mesnetliye göre, iki ucu basit mesnetli çubuk bir ucu ankaste mesnetli olana göre ağırlığı kaynaklı burkulmaya karşı daha dirençlidir.

3. Aynı eğilme rijitliğine (EI), boya (L) ve eğime (θ) sahip, aynı malzemeden yapılmış ve ağırlığı ihmal edilmeyen, tekil basma yüküne maruz eğik kiriş-kolonlardan mesnet şartları daha sıkı olan burkulmaya karşı daha dirençlidir. Daha büyük (β_c , ϕ) ikililerinde burkulma gerçekleşir (bkz. Şekil 6.24).

4. Aynı malzemeden yapılmış (q), aynı eğilme rijitliğine (EI) ve boya (L) sahip ve aynı tip mesnetler ile mesnetlenmiş eğik kiriş-kolonlardan eğim açısı fazla olanın burkulmasına neden olacak tekil yük daha büyüktür. Diğer bir deyişle, aynı tür mesnete sahip iki özdeş çubuktan eğim açısı daha büyük olanın burkulmaya karşı direnci daha fazladır (Şekil 6.22-23-25). Burkulma yükünün yüksek olması ise çubuğun ezilme yönünden de analiz edilmesini gerektirecektir.

5. Aynı tür mesnetler ile mesnetlenmiş, boyu dışındaki geometrik özellikleri aynı olan, özdeş (kesit geometrisi, eğimi ve malzemesi aynı) kolon-kirişlerden boyu daha kısa olan daha zor burkulur; yani kısa olan eğik kolon-kiriş burkulmaya karşı daha dirençlidir. Burkulmasına neden olan ağırlık bileşeni β_c küçülürken yük bileşeni ϕ

artar, bu ise burkulmasına neden olacak tekil yükün daha büyük olması anlamına gelir (Şekil 6.23 ve denklem (6.35) veya şekil 6.24).

6. Yalnızca ağırlığı etkisindeki eğik bir kiriş-kolonun kritik boyu düşey kolonun kritik boyunun $1/\sqrt[3]{\cos\theta}$ katı, kritik ağırlığı ise $1/\cos\theta$ katıdır. Örneğin yalnızca ağırlığı etkisindeki düşey bir kolona 60 derecelik eğim vererek burkulmanın gerçekleşeceği kolon boyunu 1.26 kat, burkulmanın gerçekleşeceği ağırlığı 2 kat artırabiliriz. Tüm mesnet şartları için EK C’de kritik uzunluk değerleri verilmiştir.

7. Bu çalışmada eğik kiriş-kolonun $\theta = 0^0$ özel hali de incelemiştir. Elde edilen sonuçlar ile literatürde yer alan hipergeometrik seri çözümleri tam bir uyuşun içersindedir [10]. Bu durum ankastre-ankastre, ankastre-basit, ankastre-serbest mesnetli eğik kiriş kolonlar için yaptığımız matematiksel modelin ve elde ettiğimiz çözümlerinde doğruluğunu ispatlamaktadır. Ayrıca elde ettiğimiz sonuçlar ile yapılan karşılaştırmalar neticesinde; Wang ve Ang’ın 1988’de ankastre-ankastre ve ankastre-basit mesnetli düşey kiriş-kolonlar için yaklaşık metodlar kullanarak elde ettiği sonuçların sırasıyla %5.8 ve %2.68’lik hata içerdiği görülmüştür [11].

KAYNAKLAR

- [1] **Euler, L.** (1757). Sur La Forces Des Colonnes, Mem. Acad. Berlin, **13**, 252-282.
- [2] **Greenhill, A. G.** (1881). Determination of the greatest height consistent with stability that a vertical pole or mast can be made, and of the greatest height to which a tree of a given proportions can grow., Proc. Cambridge Phil. Soc., **4**, 65-74.
- [3] **Timoshenko, S. P., Gere, G. M.** (1961). Theory of Elastic Stability, 2nd ed., Dover, New York.
- [4] **Siginer, A.** (1992). Buckling of Column of variable flexural rigidity, Journal of Engineering Mechanics ,**118**, 640-643.
- [5] **Li, Q.S.**(2001). Exact solution for buckling of non-uniform columns under axial concentrated and distributed loading, Eur. J. Mech. A/Solids, **20**, 485-500.
- [6] **Chang, C. H.** (1974). Buckling of slanted columns, J. of the Eng. Mech. Div. ASCE, **100** (EM4), 737-756.
- [7] **Von Karman, T ve Kerr, A. D.** (1965). "Instability of spherical shells subjected to external pressure, Topic in Applied Mechanics, Elsevier PUBLISHING Company, New York, 1-22.
- [8] **Huang, N. C. ve Vahidi, B.** (1971). Snap-through buckling of two simple structure, International Journal of Non-Linear Mechanics, **6**, 295-310.
- [9] **Sampaio, J. H. B.** (1998). A mathematical model and analytical solution for buckling of inclined beam-columns, Applied Mathematical Modelling, **22**, 405-421.
- [10] **Duan, W. H., Wang, C. M.** (2008). Exact solution for buckling of columns including self-weight, Journal of Engineering Mechanics ASCE, **134**(1), 116-119.
- [11] **Wang, C.M., Ang, K. K.** (1988). Buckling capacities of braced heavy columns under an axial load, Computers and Structures, **28**(5), 563,571.
- [12] **Wang, C.M. , Wang, C. Y. ve Reddy, J.N.** (2005). Exact Solutions for Buckling of Structural Members, CRC Press, USA.
- [13] **Url-1**< <http://en.wikipedia.org/wiki/Strut>>, alındığı tarih: 30.08.2012.
- [14] **Url-2**< <http://www.glossary.oilfield.slb.com/Display.cfm?Term=drilling%20riser>>, alındığı tarih: 30.08.2012.
- [15] **Url-3**< <http://www.kalinexcavation.com/site/drilling/>>, alındığı tarih: 30.08.2012.

- [16] **Kreyszig, E. ve Normington, E.J.** (2006). *Mathematica Computer Guide*, 9th ed, J.Wiley&Sons, NJ.
- [17] **Don, E.** (2009). *Shaum's Outline of Mathematica*, McGraw-Hill, 2nd ed. New York.
- [18] **Popov, E. P.** (1990). *Engineering Mechanic of Solids*, Prentice- Hall, 2nd ed. New Jersey
- [19] **Popov, E. P., Çev. Demiray, H.** (1990). *Mukavemet Katı Cisimlerin Mekanikine Giriş, Çağlayan Kitabevi*, 2. baskı, İstanbul.
- [20] **Ugural, A. C., Fenstel, S. K.** (2008). *Advanced Strength and Applied Elasticity*, 4th ed., Prentice-Hall, New Jersey.
- [21] **İnan, M.** (1967). *Cisimlerin Mukavemeti*, İTÜ Yayını, İstanbul
- [22] **Özdeğer, A. ve Özdeğer N.** (1994). *Çözümlü Yüksek Matematik Problemleri Cilt 1*, İ.T.Ü. Fen Edebiyat Fak., İstanbul.
- [23] **Hildebrand, F. B.** (1965). *Methods of Applied Mathematics*, 2nd ed., Prentice Hall, New Jersey.
- [24] **Zhou, J. K.** (1986). *Differential Transformation and Its Application for Electrical Circuits*, Huazhong University Press, Wuhan.
- [25] **Arikoğlu, A. ve Özkol, İ.** (2006). Solution of difference equations by using differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, **174**, 1216–1228.
- [26] **Arikoğlu, A. ve Özkol, İ.** (2005). Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, **168**, 1145–1158.
- [27] **Arikoğlu, A. ve Özkol, İ.** (2008). Solutions of integral and integro-differential equation systems by using differential transform method, *Comput. Math. Appl.*, **56**, 2411-2417.
- [28] **Tüfekçi, E.** (2010). *Elastik Stabilité Teorisi Ders Notları (Basılmamış)*, İ.T.Ü.,İstanbul
- [29] **Delale, C. F.** (2010). *Kısmi Diferansiyel Denklemler Ders Notları*, İ.T.Ü.,İstanbul
- [30] **Chajes, A.** (1974). *Principle Structural Stability Theory*, Prentice-Hall, New Jersey
- [31] **API Specification** (2001). *Specification for drillpipe*, American Petroleum Institute, Washington.

EKLER

EK A: Sınır şartlarının diferansiyel dönüşümleri

EK B: Yük katsayısı ϕ ve ağırlık katsayısı β 'nin eğim açısı θ ile değişimi

EK C: Eğik kiriş-kolonun kritik boyu ve ağırlığı

EK A

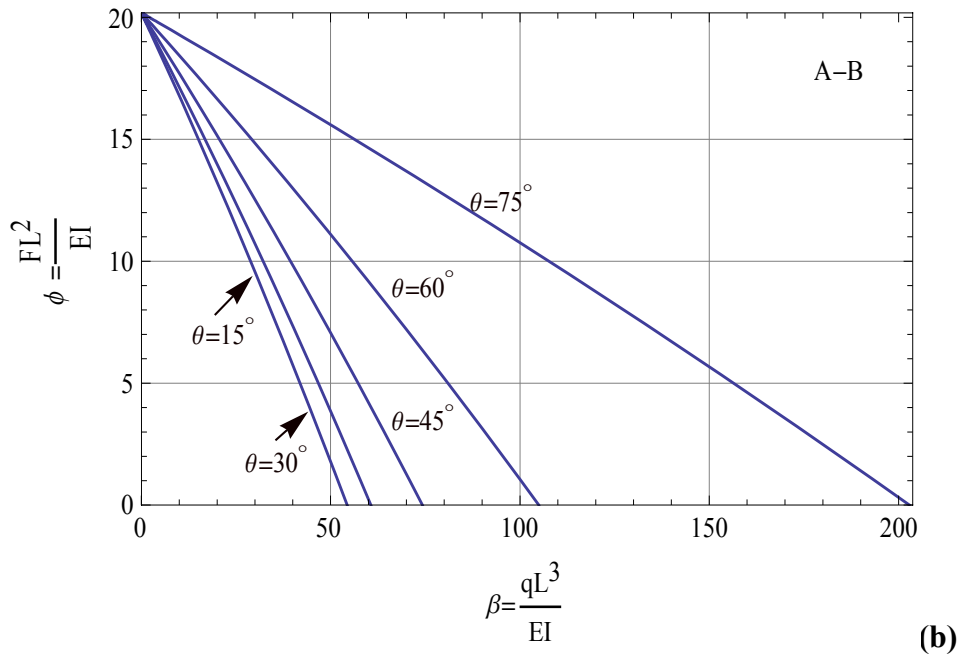
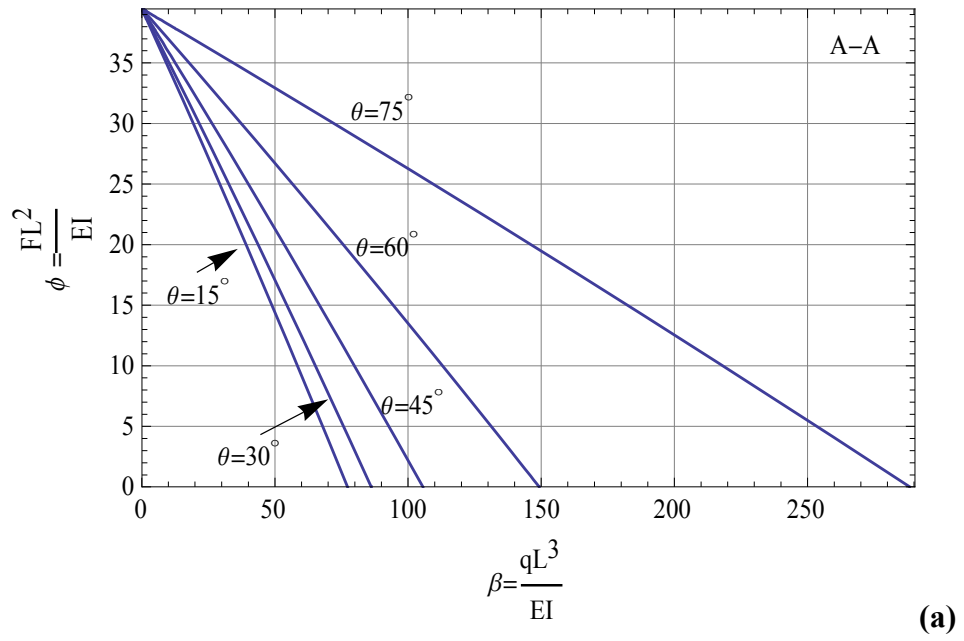
Çizelge A.1 : Ankastre-ankastre ve ankastre-basit mesnetli eğik kiriş-kolonlar için sınır şartlarının diferansiyel dönüşümleri.

Ankastre-Ankastre (A-A)	Ankastre-Basit (A-B)
$Y(0) = Y(1) = 0$	$Y(0) = Y(1) = 0$
$\sum_{k=0}^{\infty} Y(k) (X_2 - X_1)^k = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} Y(k) (X_2 - X_1)^k = 0$
$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)Y(k+1)(X_2 - X_1)^k = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)Y(k+2)(X_2 - X_1)^k = 0$

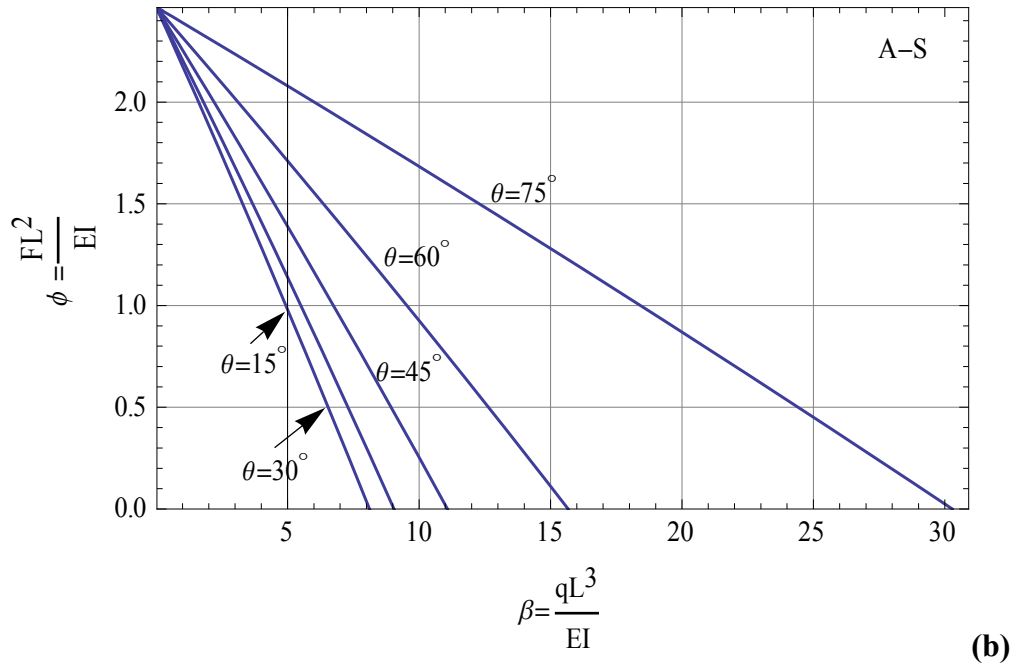
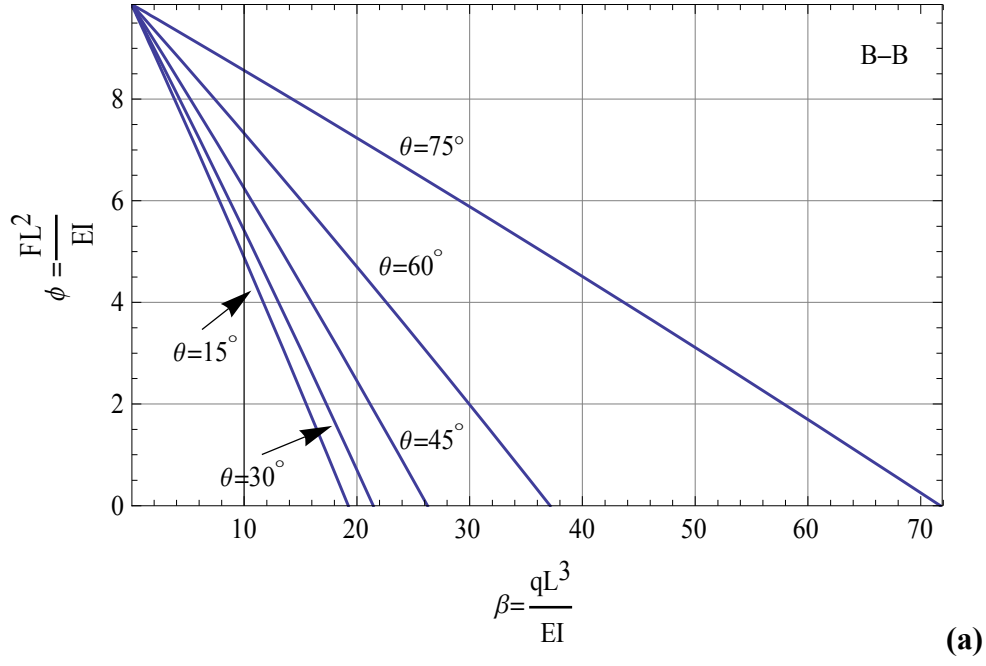
Çizelge A.2 : Basit-basit ve ankastre-serbest mesnetli EKK'ler için sınır şartlarının diferansiyel dönüşümleri.

Basit-Basit (B-B)	Ankastre-Serbest (A-S)
$Y(0) = Y(2) = 0$	$Y(0) = Y(1) = 0$
$\sum_{k=0}^n Y(k) (X_2 - X_1)^k = 0$	$\sum_{k=0}^n (k+1)(k+2)Y(k+2)(X_2 - X_1)^k = 0$
$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)Y(k+2)(X_2 - X_1)^k = 0$	$\sum_{k=0}^n \{(k+1)(k+2)(k+3)Y(k+3) - kY(k) - X_1(k+1)Y(k+1)\}(X_2 - X_1)^k = 0$

EK B



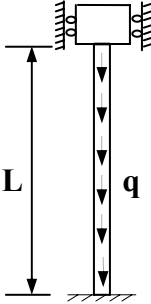
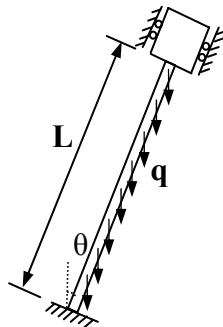
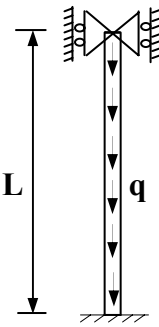
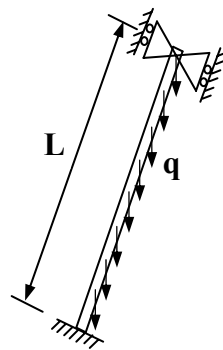
Şekil B.1 : Farklı mesnetlere sahip eğik kiriş-kolonlar için β - ϕ eğrileri (a) A-A
(b) A-B.



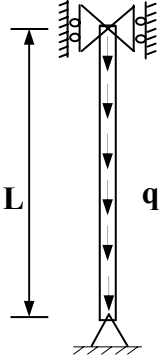
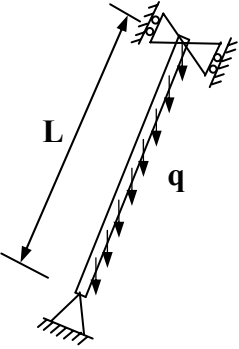
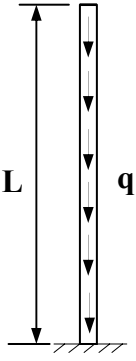
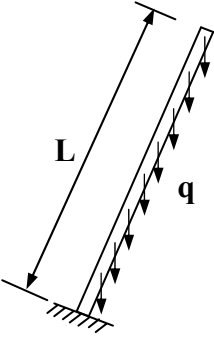
Şekil B.2 : Farklı mesnetlere sahip eğik kiriş-kolonlar için β - ϕ eğrileri (a) B-B
(b) A-S.

EK C

Çizelge C.1 : A-A ile A-B mesnetli kolon ve eğik kiriş-kolonun kritik boyu ve ağırlığı.

Kolon /Eğik Kiriş- Kolon	Kritik Uzunluk	Kritik Ağırlık
	$L_{kr} = \sqrt[3]{74.6286 \frac{EI}{q}}$	$(qL)_{kr} = 74.6286 \frac{EI}{L^2}$
	$L_{kr}^{\theta} = \sqrt[3]{74.6286 \frac{EI}{q \cos \theta}}$	$(qL)_{kr}^{\theta} = 74.6286 \frac{EI}{L^2 \cos \theta}$
	$L_{kr} = \sqrt[3]{52.5007 \frac{EI}{q}}$	$(qL)_{kr} = 52.5007 \frac{EI}{L^2}$
	$L_{kr}^{\theta} = \sqrt[3]{52.5007 \frac{EI}{q \cos \theta}}$	$(qL)_{kr}^{\theta} = 52.5007 \frac{EI}{L^2 \cos \theta}$

Çizelge C.2 : B-B ile A-S mesnetli kolon ve eğik kiriş-kolonun kritik boyu ve ağırlığı.

Kolon /Eğik Kiriş- Kolon	Kritik Uzunluk	Kritik Ağırlık
	$L_{kr} = \sqrt[3]{18.5687 \frac{EI}{q}}$	$(qL)_{kr} = 18.5687 \frac{EI}{L^2}$
	$L_{kr}^{\theta} = \sqrt[3]{18.5687 \frac{EI}{q \cos \theta}}$	$(qL)_{kr}^{\theta} = 18.5687 \frac{EI}{L^2 \cos \theta}$
	$L_{kr} = \sqrt[3]{7.8373 \frac{EI}{q}}$	$(qL)_{kr} = 7.8373 \frac{EI}{L^2}$
	$L_{kr}^{\theta} = \sqrt[3]{7.8373 \frac{EI}{q \cos \theta}}$	$(qL)_{kr}^{\theta} = 7.8373 \frac{EI}{L^2 \cos \theta}$

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Ayşe Özkan

E-Posta: ayse.ozkan.tr@hotmail.com

Lisans: Uzay Mühendisliği (İTÜ), 2001-2002 güz.

Mesleki Deneyim:

- Modern Kimya, EÜAŞ Ambarlı Termik Santrali, Mühendis, 2005-2007.
- Güntes Mühendislik, Mühendis, 2004 (2 ay).
- Türk Havacılık ve Uzay Sanayisi (TAİ), Stajyer, 2001 (1 ay).
- Karel Kalıp İşletmesi, Stajyer, 2000, (1 ay).
- İTÜ, Stajyer (Atelye)

Yayın Listesi:

- Gülçat, Ü, **Özkan, A.**, Timoshenko Kirişlerinde Serbest Titreşim Analizi, XII. Ulusal Mekanik Kongresi, 10-14 Eylül 2001, Konya.

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

