

T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER n -NORMLU UZAYLARIN TAMLAMASININ İDEAL
YAKINSAKLIK KARAKTERİZASYONU

Tuba YİĞİT

Danışman: Doç. Dr. Ahmet ŞAHİNER

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2012

TEZ ONAYI

Tuba YİĞİT tarafından hazırlanan “ **Lineer n-Normlu Uzayların Tamlamasının İdeal Yakınsaklık Karakterizasyonu** ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Süleyman Demirel Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

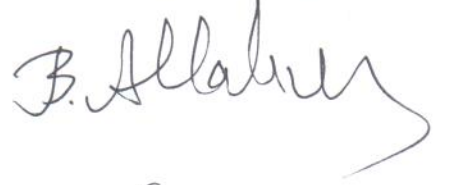
Danışman : Doç. Dr. Ahmet ŞAHİNER
Süleyman Demirel Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı



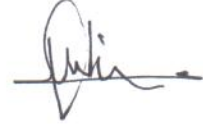
Jüri Üyeleri :
Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ
İstanbul Ticaret Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı



Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU
Süleyman Demirel Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı



Prof. Dr. Ali KÖKÇE
Süleyman Demirel Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı



Doç. Dr. Mehmet GÜRDAL
Süleyman Demirel Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı



Prof.Dr. Mehmet Cengiz KAYACAN

Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	6
2.1. 2-Normlu ve n -Normlu Uzaylar.....	6
2.2. İstatistiksel Yakınsaklık ve İdeal Yakınsaklık.....	18
3. 2-NORM ve n -NORMLU UZAYLARDA İDEAL YAKINSAKLIK.....	25
4. LİNEER n -NORMLU UZAYLARIN TAMLAMASININ İDEAL YAKINSAKLIK KARAKTERİZASYONU.....	34
5. KAYNAKLAR.....	44
ÖZGEÇMİŞ.....	50

ÖZET

Doktora Tezi

LİNEER n -NORMLU UZAYLARIN TAMLAMASININ İDEAL YAKINSAKLIK KARAKTERİZASYONU

Tuba YİĞİT

Süleyman Demirel Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ahmet ŞAHİNER

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konunun tarihsel gelişimi, literatür özeti ve konunun amacı ifade edilmiştir.

İkinci bölümde ideal yakınsaklık teorisi ile beraber 2-normlu uzaylar ve n -normlu uzaylar teorileri ile ilişkili bazı temel kavramlara ve sonuçlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde 2-normlu ve n -normlu uzaylarda $\mathcal{I}$ -yakınsaklık ve $\mathcal{I}$ -Cauchy kavramları ile ilgili bazı teoremler ve sonuçlara yer verilmiştir.

Son olarak, dördüncü bölümde ise düzgün sürekli n -norm ve ideal denk diziler tanımlanarak, ideal yakınsaklık yardımıyla lineer n -normlu uzayların tamlaştırılması verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: 2-normlu uzay, n -normlu uzay, $\mathcal{I}$ -yakınsaklık, $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisi, tamlaştırma.

2012, 50 sayfa

ABSTRACT

PhD. Thesis

IDEAL CONVERGENCE CHARACTERIZATION OF THE COMPLETION OF LINEAR n -NORMED SPACES

Tuba YİĞİT

Süleyman Demirel University

Graduate School of Applied and Natural Sciences

Mathematics Department

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ahmet ŞAHİNER

This study consists of four chapters. In the first chapter, the brief information on how the topic has evolved diachronically, the relevant literature review and aim of the topic is presented .

In the second chapter, some basic principles and results of the theories of 2-normed spaces and n -normed spaces are given with theory of ideal convergent.

In the third chapter, $\mathcal{I}$ -Convergence, $\mathcal{I}$ -Cauchy and some results of these notations are presented in 2-normed spaces and n -normed spaces.

Finally, in the fourth chapter, the completion of a linear n -normed space in terms of ideal convergence by introducing the concept of a uniformly continuous n -norm.

Key Words: 2-normed space, n -normed space, $\mathcal{I}$ -convergence, $\mathcal{I}$ -Cauchy sequence, completion.

2012, 50 pages

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli danışman hocam Doç. Dr. Ahmet ŞAHİNER'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım esnasında yardımını esirgemeyen Doç. Dr. Mehmet GÜRDAL'a ve aynı zamanda maddi ve manevi destekleri için aileme ve başta Havva GÖKKAYA arkadaşım olmak üzere herkese sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Tuba YİĞİT

ISPARTA, 2012

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathcal{P}(\mathbb{N})$	: Doğal sayılar kümesinin kuvvet kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}^2$	: 2-boyutlu reel Öklid uzayı
$\mathbb{R}^n$	: n -boyutlu reel Öklid uzayı
$\ \cdot, \cdot\ $	: 2-norm fonksiyonu
$\ \cdot\ _p$	: $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere p ile elde edilen norm
$\ \cdot\ _\infty$	: 2-normların maksimumu olan sonsuz norm
$\ \cdot, \dots, \cdot\ $	: n -norm fonksiyonu
$\ \cdot, \dots, \cdot\ _\infty$	: $(n - 1)$ -boyutlu norm fonksiyonu
$\ \cdot, \dots, \cdot\ _S$	: Standart n -norm
$\{u_1, \dots, u_d\}$	: d -boyutlu baz
$B_{\{u_1, \dots, u_d\}}(x, r)$	: $\{u_1, \dots, u_d\}$ bazıaltındaki x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\delta(A)$	: A kümesinin asimptotik (doğal) yoğunluğu
$\underline{u}(A)$	: A kümesinin düzgün alt yoğunluğu
$\bar{u}(A)$	: A kümesinin düzgün üst yoğunluğu
$u(A)$	: A kümesinin düzgün yoğunluğu
$\underline{d}(A)$	: A kümesinin logaritmik alt yoğunluğu
$\bar{d}(A)$	: A kümesinin logaritmik üst yoğunluğu
$d(A)$	: A kümesinin logaritmik yoğunluğu
$\mathcal{I}$	: Bir kümenin alt kümelerinin bir ideali
$\mathcal{I}_\delta$	: Sıfır doğal yoğunluklu pozitif tamsayı kümelerinin oluşturduğu ideal
$\mathcal{I}_f$	: Sonlu elemanlı pozitif tamsayı kümelerinin oluşturduğu ideal
$\mathcal{I}_d$	: Sıfır logaritmik yoğunluklu pozitif tamsayı kümelerinin oluşturduğu ideal
$\mathcal{I}-\lim_{x_n}$	: Bir metrik uzayda alınan bir (x_n) dizisinin $\mathcal{I}$ -limiti

1. GİRİŞ

Klasik yakınsaklık kavramının yanı sıra ölçüm, küme ve benzeri araçlar kullanılarak bu kavrama yakın birçok yakınsaklık kavramı tanımlanmıştır. Temeli pozitif tamsayıların doğal yoğunluğu kavramına dayanan, dizilerin adi anlamda yakınsaklık kavramından farklı olan istatistiksel yakınsaklık kavramından bahsedecek olursak bunun için önce yoğunluk kavramından bahsetmemiz gerekir.

Yoğunluk kavramı oldukça geniş bir kavram olup asimptotik yoğunluk, doğal yoğunluk, düzgün yoğunluk, rasyonel ve reel sayıların yoğunluğu, oran kümelerinin yoğunluğu vb. gibi birbirinden farklı birçok şekilde tanımlanmıştır. Pozitif tamsayılar kümesinde; Buck tarafından genelleştirilmiş asimptotik yoğunluk ve Freedman tarafından da yoğunluk aksiomatik olarak tanımlanıp, bazı yoğunluk fonksiyonlarının özellikleri ve yoğunluk için toplamsallık özelliği verilmiştir (Buck, 1953; Freedman, 1981).

Reel sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklığın içeriği ilk kez birbirinden bağımsız olarak Fast ve Steinhaus tarafından verilmiştir (Fast, 1951 ve Steinhaus, 1951). Buck ve Schoenberg tarafından istatistiksel yakınsaklık kavramı reel ve kompleks diziler için; Maddox tarafından da herhangi bir Hausdorff lokal konveks topolojik vektör uzayındaki diziler için verilmiştir (Buck, 1953; Schoenberg, 1959; Maddox, 1988).

Bir limit noktasından sonsuz defa ve sınırsızca uzaklaşabilen, rastgele salınımlar sergileyebilen bir dizi klasik anlamda yakınsak olmasa bile istatistiksel yakınsak olabilir ya da istatistiksel yakınsaklığın araçları yardımıyla modellenenebilir. Zygmund bu tip bir yakınsaklığı, "hemen hemen yakınsaklık" olarak adlandırmış ve kuvvetli toplanabilme ile bu yakınsaklık arasında bir ilişki ortaya koymuştur (Zygmund, 1979). Fridy, Śalāt, Connor, Maddox, Rath ve Tripathy tarafından istatistiksel yakınsaklık ve toplanabilme arasında bağıntı kurulmuş, Fridy, Rath ve Tripathy tarafından da istatistiksel Cauchy dizileri üzerinde çalışılmıştır (Fridy, 1985; 1993; Śalāt, 1980; Connor, 1988; Maddox, 1988; Rath ve Tripathy, 1994).

Fridy çalışmasında istatistiksel monotonluk kavramına girmiş ancak istatistik-

sel yakınsaklık için monoton yakınsaklık teoremi Tripathy tarafından verilmiştir (Fridy, 1993; Tripathy, 1998).

Fridy ve Orhan istatistiksel yakınsak bir dizinin yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşulun $st\text{-}\lim \inf x = st\text{-}\lim \sup x$ olmasıdır düşüncesi ile bağlantılı olarak istatistiksel üst limit ve istatistiksel alt limit kavramlarını tanımlamışlardır (Fridy ve Orhan, 1997).

Tripathy, Mursaleen ve Edely double dizilerin istatistiksel yakınsaklığı tanımını ve double diziler için istatistiksel Cauchy dizisi tanımını verip bazı özelliklerini inceleyerek istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli Cesaro toplanabilir double diziler arasındaki bağlantıyı oluşturmuşlardır (Tripathy, 2003; Mursaleen ve Edely, 2003).

Das vd. bir double dizinin tüm istatistiksel limit noktalarının kümesinin yapısını incelemişlerdir (Das vd., 2009). Günümüzde istatistiksel yakınsaklık ile ilgili birçok çalışma yayımlanmakta ve konu aktif bir araştırma alanı olarak değerlendirilmektedir.

İstatistiksel yakınsaklığın, pozitif tamsayı kümelerinin doğal yoğunluğuna ilişkin olması ve doğal yoğunluğu sıfır olan pozitif tamsayı kümelerinin ailesinin bir ideal oluşturması gerçeğinden yola çıkılarak, istatistiksel yakınsaklığın bir genellemesi olacak biçimde "ideal yakınsaklık ($\mathcal{I}$ -yakınsaklık)" kavramı tanımlanmıştır.

$\mathcal{I}$ -yakınsaklık ilk olarak Kostyrko vd. tarafından klasik metrik uzaylardaki diziler için tanımlanmış olup istatistiksel yakınsaklığın da ötesinde oldukça genel bir yakınsaklık tipidir (Kostyrko vd., 2000). Bu kavramı tanımlamak için $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin alt kümelerinin ideal $\mathcal{I}$ kavramını kullanmışlar ve metrik uzaylardaki dizilerin $\mathcal{I}$ -yakınsaklığını, bu yakınsaklığın bazı özelliklerini çalışmışlardır. Birbirinden bağımsız olarak Gürdal ve Dems bir metrik uzayda $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisinin içeriğini vermiş ve metrik uzaydaki bir dizinin $\mathcal{I}$ -yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşulun $\mathcal{I}$ -Cauchy olmasıdır gerektiğini göstermişlerdir (Gürdal, 2004; Dems, 2004).

Ayrıca Kostyrko vd., istatistiksel limit ve istatistiksel yığılma noktalarının bir

genellemesi olacak biçimde bir dizinin $\mathcal{I}$ -limit noktası ve $\mathcal{I}$ -yığılma noktası kavramlarını da tanımlamışlar ve bu kavramların temel özelliklerini incelemişlerdir (Kostyrko vd., 2005).

Šalát vd., istatistiksel yakınsaklık teorisindeki bazı sonuçları $\mathcal{I}$ -yakınsaklık açısından ele almışlar (Šalát vd., 2004); Tripathy $\mathcal{I}$ -yakınsaklık kavramını double dizilere genişletmiştir (Tripathy, 2005).

Nabiev vd. $\mathcal{I}$ -Cauchy dizilerini dikkate alarak diğer bazı özellikleri ispatlamışlardır (Nabiev vd., 2007). Das double dizilerde $\mathcal{I}$ -yakınsaklık kavramı çalışmıştır (Das, 2008a, b).

2-normlu uzaylar normlu uzayların bir genellemesi olup fonksiyonel analizde önemli bir yer tutmaktadır. 2-metrik uzay ve 2-normlu uzay kavramları ilk olarak Gähler tarafından verilmiştir (Gähler, 1963; 1964; 1965). 2-normlu uzaylarda 2-Banach uzaylarını ise White çalışmıştır (White, 1968; 1969). O yıllarda 2-Banach uzayları üzerine bir çalışma da Gähler tarafından yapılmıştır (Gähler, 1969). Siddiqi bu konu hakkında birçok konferansta çeşitli sunumlar yapmıştır. Gähler, Siddiqi ve Gupta hazırladıkları makalede bu konu ile ilgili önemli sonuçlar vermişlerdir (Gähler vd., 1975). 1977 yılına kadar olan sonuçlar Siddiqi tarafından özetlenmiştir (Siddiqi, 1980).

Temeli 2-normlu uzaylara dayanan 2-iç çarpım uzayı ilk defa Diminnie vd. tarafından çalışılmış, her 2-iç çarpım uzayının bir 2-normlu uzay olduğu gösterilmiş ve bu konuyla ilgili olarak çalışmalar yapılmaya devam edilmiştir (Diminnie vd., 1973; 1974; 1976; 1977). Diminnie ve White, Gähler'den ayrı olarak 2-normlu uzaylarda 2-iç çarpımları elde etmişlerdir (Diminnie ve White, 1982). White ve Cho lineer 2-normda lineer dönüşümler üzerine çalışmışlardır (White ve Cho, 1984).

Kim doktora tezinde lineer 2-normlu uzaylar üzerine çalışmıştır (Kim, 1990). Kim vd. lineer 2-normlu uzaylar üzerindeki lineer operatorleri incelemişlerdir (Kim vd., 1992). Freese ve Cho tarafından da lineer 2-normlu uzayların özellikleri incelenmiştir (Freese ve Cho, 1994).

Genelleştirilmiş 2-normlu uzaylar üzerindeki lineer operatörlerin yeniden düzenlenip genişletilmesi Lewandowska tarafından incelenmiştir (Lewandowska, 1999). Aynı şekilde lineer 2-normlu uzaylar üzerindeki bazı sonuçlar Elumalai ve Asha tarafından çalışılmıştır (Elumalai ve Asha, 2000). Lewandowska genelleştirilmiş 2-normlu uzayların temel özelliklerini Freese, Gähler gibi birçok matematikçinin makaleleri yardımıyla tekrar düzenlemiştir (Lewandowska, 2001).

Bu yapılan çalışmalara ek olarak normlu uzaylar ve 2-normlu uzaylar ile ilgili bir çok çalışma Raymond vd. nin lineer 2-normlu uzayların geometrisi adlı kitapta toplanmıştır (Raymond vd., 2001).

Chu vd. lineer 2-normlu uzaylarda alanı koruyan dönüşüm kavramını göstermek için uygun olan 2-izometri kavramını tanımlamışlardır (Chu vd., 2004). Gürdal ve Pehlivan 2-Banach uzayında istatistiksel yakınsak dizileri ve istatistiksel Cauchy dizilerini içeren kümeleri elde etmişlerdir (Gürdal ve Pehlivan, 2004). Son zamanlarda 2-normlu uzaylar matematiğin farklı dallarında da gelişme göstermiştir. Örneğin olasılıksal normlu uzaylar teorisi Golet tarafından 2-normlu uzaylara genişletilmiştir (Golet, 2005).

Gürdal, $\mathcal{I}$ -yakınsaklık kavramını 2-normlu uzaylara genişletmiştir (Gürdal, 2006). Şahiner vd. 2-normlu uzaylarda $\mathcal{I}$ -yakınsaklık kavramını çalışmışlardır (Şahiner vd., 2007). Balcerzak vd., fonksiyon dizilerinin $\mathcal{I}$ -yakınsaklığını incelemişlerdir (Balcerzak vd., 2007). Gürdal ve Açıık tarafından 2-normlu uzaylarda $\mathcal{I}$ -Cauchy dizileri çalışılmıştır (Gürdal ve Açıık, 2008). Gürdal ve Şahiner tarafından $\mathcal{I}$ -sınırlı dizi, $\mathcal{I}$ -alt limit ve $\mathcal{I}$ -üst limit tanımları verilmiştir (Gürdal ve Şahiner, 2008).

2-normlu uzaylarda Gürdal ve Pehlivan istatistiksel yakınsaklık kavramlarını çalışmışlardır (Gürdal ve Pehlivan, 2009). Ayrıca Gürdal vd. 2-Banach uzayda yaklaşım teorisini çalışmışlardır (Gürdal vd., 2009). Ayrıca Savaş ideal yakınsaklık ve orlicz fonksiyonunu kullanarak 2-normlu uzaylarda fark dizi uzaylarını incelemiştir (Savaş, 2010).

Lineer n -normlu uzay kavramı ilk olarak 2-normlu uzayların bir genellemesi olarak

Misiak tarafından tanımlanmış ve araştırılmıştır (Misiak, 1989a, b). Bunlarla birlikte Gunawan ve Mashadi genellikle Gähler, Diminnie ve White'ın yayınlanmış olan makalelerinden faydalananarak n -normlu uzayları geliştirmişlerdir ve $n \geq 2$ olmak üzere her n -normlu uzayın bir $(n - 1)$ -normlu uzay olduğunu yani, tümevarımla her $n = 1, \dots, n - 1$ için bir $(n - r)$ -normlu uzay olduğunu incelemişlerdir (Gunawan ve Mashadi, 2001b). Chu vd. lineer n -normlu uzaylarda hacim dönüşümünü koruyan kavramı göstermek için uygun n -izometri kavramını tanımladılar (Chu vd., 2004). Chen ve Song lineer n -normlu uzaylarda n -izometri kavramını vermişlerdir (Chen ve Song, 2010).

Son yıllarda yapılan bu yoğun çalışmalar, lineer 2-normlu uzayların ve n -normlu uzayların önemli bir yere sahip olduğunu açık bir biçimde ortaya koymaktadır.

Hazırlanan bu doktora tez çalışmasında ise ilk olarak n -normlu uzaylarda ideal Cauchy dizilerinden yararlanılarak ideal denklik kavramı ve bazı özellikleri ile ideal Cauchy dizilerinin ideal denklik sınıfı kümeleri ile ilgili bazı kavram ve teorilerine yer verilmiştir. Ayrıca n -normlu uzaylarda ideal düzgün süreklilik kavramı tanımlanmış ve n -normlu uzayların tamlaştırılması ile ilgili teori ideal yakınsaklık yardımıyla verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ilk olarak metrik, norm, yakınsaklık ile ilgili bazı temel kavramlar ve sonuçları verilmiştir. İkinci olarak 2-normlu uzayın tanımı ve bazı özellikleri ile beraber $n \geq 2$ için n -normlu uzaylar ile ilgili bazı temel kavram ve sonuçlara yer verilmiştir.

Son olarak istatistiksel ve ideal yakınsaklık kavramları ve bazı örnekleri verilmiştir.

2.1. 2-Normlu ve n-Normlu Uzaylar

Tanım 2.1.1. X bir küme olmak üzere $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

i) ρ reel değerli, sonlu ve negatif olmayan,

ii) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

iii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

iv) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde bir metrik olarak adlandırılır ve (X, ρ) ikilisine de metrik uzay denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.2. Bir $X = (X, \rho)$ metrik uzayında bir (x_k) dizisini ele alalım. Eğer

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_k, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ noktası mevcut ise (x_k) dizisine yakınsaktır denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.3. Bir $X = (X, \rho)$ metrik uzayında bir (x_k) dizisini ele alalım. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $m, k > N$ için

$$\rho(x_k, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ mevcut ise (x_k) dizisine Cauchy dizisi denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.4. $X = (X, \rho)$ ve $\tilde{X} = (\tilde{X}, \tilde{\rho})$ iki metrik uzay olsun.

i) X den $\tilde{X}$ içine bir T dönüşümü gözönüne alalım. Eğer T dönüşümü uzaklıkları koruyor, yani Tx ve Ty sırasıyla x ve y nin görüntüleri olmak üzere, her $x, y \in X$ için

$$\tilde{\rho}(Tx, Ty) = \rho(x, y)$$

ise T dönüşümüne bir izometrik dönüşüm yada izometri denir.

ii) X den $\tilde{X}$ üzerine birebir ve örten bir izometrinin var olması halinde X uzayı $\tilde{X}$ uzayı ile izometriktir denir. Bu durumda X ve $\tilde{X}$ uzayları izometrik uzaylar adını alır (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.5. Verilen bir X uzayı üzerinde tanımlanan $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa

$$(N_1) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$(N_2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in \mathbb{K},$$

$$(N_3) \quad \text{Her } x, y \in X \text{ için } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$\|\cdot\|$ fonksiyonuna bir norm, $\|\cdot\|$ normu üzerinde tanımlanan X lineer uzayına normlu lineer uzay denir ve $(X, \|\cdot\|)$ ile gösterilir. $\|\cdot\|$ fonksiyonu reel değerli fonksiyondur (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.6. X , $2 \leq d < \infty$ boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. X üzerinde $\|\cdot, \cdot\| : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

i) $\|x, y\| = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul x ve y nin lineer bağımlı olmasıdır,

$$\text{ii) } \|x, y\| = \|y, x\|,$$

$$\text{iii) } \|\alpha x, y\| = |\alpha| \|x, y\|, \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\text{iv) } \|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$$

koşullarını sağlıyorsa $\|\cdot, \cdot\|$ fonksiyonuna 2-norm ve $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ ikilisine de bir 2-normlu uzay denir. 2-normlu uzayın bir standart örneği aşağıdaki 2-normla donatılan $\mathbb{R}^2$ dir:

$$\|x, y\| := 0, x \text{ ve } y \text{ vektörlerinin oluşturduğu üçgenin alanı}$$

veya

x ve y vektörlerinin oluşturduğu paralelkenarın alanının yarısı

dır.

$(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu uzayda her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|x, y\| \geq 0$ ve $\|x, y + \alpha x\| = \|x, y\|$ özellikleri sağlanır. Eğer x, y ve z lineer bağımlı ise ($d = 2$ olduğunda) $\|x, y + z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$ veya $\|x, y - z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$ elde edilir (Gähler, 1963; 1965; Gunawan ve Mashadi, 2001a).

Bir $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu uzayı için aşağıda verilen bir dizinin limiti kavramından faydalananarak bir topoloji elde edilebilir.

Tanım 2.1.7. Eğer her $y \in X$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x, y\| = 0$ ise X deki bir (x_k) dizisi x değerine yakınsaktır denir. Böyle bir durumda, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k := x$ yazılır ve (x_k) dizisinin limiti x dir denir (Gunawan ve Mashadi, 2001a).

2-normlu uzaylarda yakınsak bir dizinin limitinin tek olduğunu gösterelim: (x_k) dizisinin X deki iki farklı x ve y limitlerine yakınsadığını kabul edelim.

$\|x - y, z\| \neq 0$ olacak şekilde $z \in X$ seçelim. $\|x_N - x, z\| < \frac{1}{2} \|x - y, z\|$ ve $\|x_N - y, z\| < \frac{1}{2} \|x - y, z\|$ olacak şekilde yeteri kadar büyük $N \in \mathbb{N}$ alalım. O zaman, üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|x - y, z\| &\leq \|x - x_N, z\| + \|x_N - y, z\| \\ &< \frac{1}{2} \|x - y, z\| + \frac{1}{2} \|x - y, z\| = \|x - y, z\| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu mümkün olmadığından, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ tek olmalıdır.

Şimdi ise bir 2-normlu uzayda yakınsak dizileri tanımlayalım. Boyutu $2 \leq d < \infty$ olan 2-normlu X uzayı için $\{u_1, \dots, u_d\}$ bir baz olsun. Tanımlanan bu baz yardımıyla aşağıda 2-normlu uzaylardaki yakınsaklık kavramı için bazı karakterizasyonlar hatırlatılmıştır.

Teorem 2.1.8. X deki bir (x_k) dizisinin X deki bir x elemanına yakınsak olması

için gerekli ve yeterli koşul her $i = 1, \dots, d$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x, u_i\| = 0$ olmasıdır (Gunawan ve Mashadi, 2001a).

Teorem 2.1.8 in devamından aşağıdaki ifade elde edilir.

Teorem 2.1.9. X deki bir (x_k) dizisinin X deki bir x elemanına yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max \{ \|x_k - x, u_i\| : i = 1, \dots, d \} = 0$$

olmasıdır (Gunawan ve Mashadi, 2001a).

Bu verilen gerçek bizi Gunawan ve Mashadi (2001a) tarafından tanımlanan X üzerindeki bir norm tanımına götürür. X üzerinde $\{u_1, \dots, u_d\}$ bazıyla bir norm tanımlayabiliriz. $\|\cdot\|_\infty$ normunu

$$\|x\|_\infty := \max \{ \|x, u_i\| : i = 1, \dots, d \}$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Gerçekten,

i) $\|x\|_\infty = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $x = 0$ olmasıdır,

ii) $\|\alpha x\|_\infty = |\alpha| \|x\|_\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

iii) Her $x, y \in X$ için $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

olduğundan $\|\cdot\|_\infty$ norm koşullarını sağlar.

Genelde $1 \leq p \leq \infty$ için, X üzerinde $\|\cdot\|_p$ normunu

$$\|x\|_p := \left\{ \sum_{i=1}^d \|x, u_i\|^p \right\}^{1/p}$$

biçiminde tanımlayabiliriz. Bu normları sırasıyla sonsuz norm ve p norm olarak tanımlayacağız. X sonlu boyutlu olduğunda bu normlar denktir. Burada üzerinde durmamız gereken önemli diğer durum, bu normların adi norm özelliklerini sağlamasına rağmen değer olarak adi normlardan farklı olmasıdır. Ayrıca

burada bazın seçimi önemli değildir. X için başka $\{v_1, \dots, v_d\}$ şeklinde bir baz seçilir ve $\|\cdot\|_\infty$ normu bu baza ait olarak tanımlanırsa, sonuçta elde edilen norm $\{u_1, \dots, u_d\}$ bazına ait olan tanımlamaya denk olacaktır.

Böylece $\|\cdot\|_\infty$ normu için bir başka karakterizasyon aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 2.1.10. X de bir (x_k) dizisinin $x \in X$ elemanına yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\|_\infty = 0$ olmasıdır (Gunawan ve Mashadi, 2001a).

Tanımlanan $\|\cdot\|_\infty$ normu yardımıyla, x merkezli r yarıçaplı $B_{\{u_1, \dots, u_d\}}$ açık yuvarı

$$B_{\{u_1, \dots, u_d\}}(x, r) := \{y : \|x - y\|_\infty < r\}$$

şeklinde tanımlanır.

$B_{\{u_1, \dots, u_d\}}$ açık yuvarı kullanılarak Teorem 2.1.10 aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 2.1.11. X de bir (x_k) dizisinin $x \in X$ değerine yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul her $\varepsilon > 0$ ve $k \geq N$ için $x_k \in B_{\{u_1, \dots, u_d\}}(x, \varepsilon)$ olacak şekilde en az bir N pozitif tamsayısı mevcuttur (Gunawan ve Mashadi, 2001a).

Dolayısıyla yukarıda verilenler de kullanılarak şu sonuca ulaşılabilir: Her sonlu boyutlu 2-normlu uzay bir normlu uzaydır ve bunların topolojileri ile $\|\cdot\|_\infty$ arasında bir ilişki vardır. Bu durumu bir örnekle inceleyelim.

Örnek 2.1.12. $X = \mathbb{R}^2$, $\|x, y\| := x$ ve y vektörlerinden meydana gelen paralelkenarın alanı olarak alalım. Bu açıkça

$$\|x, y\| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

formülüyle verilebilir.

$\mathbb{R}^2$ için $\{i, j\}$ standart bazı alınsın. O zaman, $\|x, i\| = |x_2|$ ve $\|x, j\| = |x_1|$, ve $\{i, j\}$ bazına ait $\|\cdot\|_\infty$ normu

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}, \quad x = (x_1, x_2)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece, burada tanımlanan $\|\cdot\|_\infty$ normu $\mathbb{R}^2$ üzerindeki düzgün norm ile tamamen aynıdır. Bundan dolayı, $B_{\{i,j\}}(x, r)$ küresi x merkezli r yarıçaplı bir karedir. Elde edilen norm $\mathbb{R}^2$ üzerindeki Öklid normuna denk olduğu için, yukarıdaki 2-norm ile donatılan $\mathbb{R}^2$ Öklid düzleminden başka birşey ifade etmez sonucuna varılır.

Daha genel olarak Gunawan ve Mashadi tarafından aşağıdaki teorem elde edilmiştir (Gunawan ve Mashadi, 2001a).

Teorem 2.1.13. $\|x, y\| := x$ ve y den meydana gelen paralelkenarın alanında $(\mathbb{R}^d, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu uzayı bir normlu uzaydır ve bunun normu Öklid normuna denktir (Gunawan ve Mashadi, 2001a).

İspat. Her $x = (x_1, \dots, x_d)$ ve $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ için $\|x, y\|$ 2-normu

$$\|x, y\| = \left\{ \left(\sum_{i=1}^d x_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^d y_j^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^d x_i y_i \right)^2 \right\}^{1/2}$$

formülü ile verilebilir. $\mathbb{R}^d$ için $\{e_1, \dots, e_d\}$ standart baz olsun. O zaman, her bir $j = 1, \dots, d$ için

$$\|x, e_j\| = \left\{ \left(\sum_{i=1}^d x_i^2 \right) - x_j^2 \right\}^{1/2}$$

elde ederiz ve $\{e_1, \dots, e_d\}$ ile ilgili olarak tanımlanan $\|\cdot\|_\infty$ normu

$$\|x\|_\infty = \max \left\{ \left\{ \left(\sum_{i=1}^d x_i^2 \right) - x_j^2 \right\}^{1/2} : j = 1, \dots, d \right\}$$

dir. Şimdi $\mathbb{R}^d$ üzerinde Euclidean normu $\|\cdot\|_E$ tanımlansın. O zaman tüm $x \in \mathbb{R}^d$ için

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_E \leq \sqrt{2} \|x\|_\infty$$

dur. Tanımlanan normun Öklid normuna denk olduğu doğrulanır.

Bu kısımda Raymond vd. ne göre lineer 2-normlu uzaylardaki Cauchy dizisi ve dizi yakınsaklığı üzerine bazı tanımları ve bazı özelliklerini verelim (Raymond

vd., 2001).

Tanım 2.1.14. X lineer 2-normlu uzayında herhangi bir (x_k) dizisi alalım. Eğer her $z \in X$ için

$$\lim_{k,m \rightarrow \infty} \|x_k - x_m, z\| = 0$$

ise (x_k) dizisine bir Cauchy dizisi denir (Raymond vd., 2001).

Tanım 2.1.15. Eğer lineer 2-normlu X uzayında her Cauchy dizisi X de bir x değerine yakınsak ise $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ ikilisine 2-Banach uzayı denir (Raymond vd., 2001).

Teorem 2.1.16. $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ bir lineer 2-normlu uzay olmak üzere a, b değerlerine göre (x_k) ve (y_k) 2-normlu X uzayında Cauchy dizileri ise

- i) $(\|x_k, a\|)$ ve $(\|x_k, b\|)$ birer reel Cauchy dizisidir,
- ii) (α_k) bir reel Cauchy dizisi olmak üzere $(x_k + y_k)$ ve $(\alpha_k x_k)$ dizileri X de Cauchy dizileridir (Raymond vd., 2001).

Teorem 2.1.17. Her $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ lineer 2-normlu uzayında aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i) $x_k \rightarrow x, k \rightarrow \infty$ ve $y_k \rightarrow y, k \rightarrow \infty$ ise $k \rightarrow \infty$ için $x_k + y_k \rightarrow x + y$,
- ii) $x_k \rightarrow x, k \rightarrow \infty$ ve $\alpha_k \rightarrow \alpha, k \rightarrow \infty$ ise $k \rightarrow \infty$ için $\alpha_k x_k \rightarrow \alpha x$,
- iii) $\dim X \geq 2$ ve $k \rightarrow \infty$ için $x_k \rightarrow x$ ve $x_k \rightarrow y$ ise $x = y$ dir (Raymond vd., 2001).

Teorem 2.1.18. 2 boyutlu her lineer 2-normlu uzay tanımlandığı cisim altında tam ise bir 2-Banach uzayıdır (Raymond vd., 2001).

Teorem 2.1.19. $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ bir lineer 2-normlu uzay olsun. Her bir $x \in X$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x, d\| = 0$$

ise $(\|x_k - x, d\|)$ bir yakınsak dizidir (Raymond vd., 2001).

Teorem 2.1.20. Eğer $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x, d\| = 0$ ise $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k, d\| = \|x, d\|$ dir (Raymond vd., 2001).

Şimdi de n -normlu uzaylarda temel kavramları verelim. Gunawan ve Mashadi

(2001 (b)) $n \geq 2$ için verilen bir n -normlu uzaydan $(n - 1)$ -norm elde etmenin basit bir yolunu sunmuş ve her n -normlu uzayın bir $(n - 1)$ -normlu uzay olduğunu göstermiştir. Ayrıca belirli bazı koşullar altında n -normdan $(n - 1)$ -norm elde edilebilir olduğunu, bu yolla n -normdaki yakınsaklığın ve tamlığın elde edilen $(n - 1)$ -normdakine denk olduğu gösterilmiştir.

Tanım 2.1.21. $n \in \mathbb{N}$ ve $X, d \geq n$ boyutlu bir reel vektör uzayı olsun (Burada d yi sonsuz olarak alabiliriz). X^n üzerinde aşağıdaki dört özelliği sağlayan $\|\cdot, \dots, \cdot\|$ reel değerli fonksiyonuna X üzerinde bir n -norm ve $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ ikilisine de n -normlu uzay denir:

- i) $\|x_1, \dots, x_n\| = 0 \Leftrightarrow x_1, \dots, x_n$ lineer bağımlı,
- ii) $\|x_1, \dots, x_n\|$ permütasyon altında değişmez,
- iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\|x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \alpha x_n\| = |\alpha| \|x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\|$,
- iv) $\|x_1, \dots, x_{n-1}, y + z\| \leq \|x_1, \dots, x_{n-1}, y\| + \|x_1, \dots, x_{n-1}, z\|$ (Gunawan ve Mashadi, 2001b)

n -normlu uzayın bilinen bir örneği aşağıdaki n -norm ile tanımlanmış $\mathbb{R}^n$ dir. Her $i = 1, \dots, n$ için $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in}) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere n -norm

$$\|x_1, \dots, x_n\|_E := \text{mutlak} \left(\begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \right)$$

şeklinde tanımlanır. Burada E ifadesi öklid uzayını ifade etmektedir. Dikkat edilirse, $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu uzayında, her $x_1, \dots, x_n \in X$ ve $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ için

$$\|x_1, \dots, x_n\| \geq 0$$

ve

$$\|x_1, \dots, x_n\| = \|x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}\|$$

özellikleri sağlanır.

Uyarı 2.1.22. n -normlu $\|\cdot, \dots, \cdot\|$ uzayında bir $\{a_1, \dots, a_n\}$ lineer bağımsız kümesini

alalım. X^{n-1} üzerinde tanımlanan $\|\cdot, \dots, \cdot\|_\infty$ fonksiyonu

$$\|x_1, \dots, x_{n-1}\|_\infty := \max \{\|x_1, \dots, x_{n-1}, a_i\| : i = 1, \dots, n\}$$

ile tanımlanır.

Bu tanımlanan $\|\cdot, \dots, \cdot\|_\infty$ normuna göre aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.1.23. X üzerinde $\|\cdot, \dots, \cdot\|_\infty$ fonksiyonu bir $(n-1)$ -norm tanımlar (Gunawan ve Mashadi, 2001b).

Sonuç 2.1.24. Her $r = 1, 2, \dots, n-1$ için her n -normlu uzay bir $(n-r)$ -normlu uzaydır. Özel olarak, her n -normlu uzay bir normlu uzaydır (Gunawan ve Mashadi, 2001b).

Uyarı 2.1.25. Genelde $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere

$$\|x_1, \dots, x_{n-1}\|_p := \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_1, \dots, x_{n-1}, a_i\|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonu aynı zamanda X üzerinde bir $(n-1)$ -norm tanımlar. Bu $(n-1)$ -normlar n tane $a_1, \dots, a_n$ vektörlerinin aynı kümesini kullanmak koşuluyla $\|\cdot, \dots, \cdot\|_\infty$ normuna denktir. Bazı durumlarda, eğer n vektörlerin farklı kümeleri kullanılırsa $(n-1)$ -norma denk olması mümkün olmayabilir.

Şimdi de n -norm kavramı için standart durumu ele alalım. X uzayı $d \geq n$ boyutlu bir reel iç çarpım uzayı olsun. X deki standart n -norm

$$\|x_1, \dots, x_n\|_S := \left| \begin{array}{ccc} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{array} \right|^{\frac{1}{2}}$$

ile Gunawan ve Mashadi (2001b) tarafından tanımlanmıştır. Burada $X = R^n$ ise, bu n -norm Öklid n -normu ile tamamen aynıdır.

Şimdi yukarıda verilen norma göre geometrik yapıyı verelim. Verilmiş olan n -

norm,

- i) $n = 1$ için $\|x_1\|_S = \langle x_1, x_1 \rangle^{\frac{1}{2}}$ adi normu, yani x_1 in uzunluğunu,
- ii) $n = 2$ için $\|x_1, x_2\|_S = \{\|x_1\|_S^2 \|x_2\|_S^2 - \langle x_1, x_2 \rangle^2\}^{\frac{1}{2}}$ standart 2-normu, yani x_1 ve x_2 tarafından gerilen paralelkenarın alanını,
- iii) $n = 3$ için $\|x_1, x_2, x_3\|_S = \|x_1, x_2, x_3\|_E$ normunu, yani x_1, x_2, x_3 tarafından gerilen paralelyüzün hacmini verir.

Genelde, $\|x_1, \dots, x_n\|_S$ X deki $x_1, \dots, x_n$ ler tarafından gerilen n -boyutlu paralelyüzün hacmini belirtir.

Şimdi $\{e_1, \dots, e_n\}$ X üzerinde bir ortogonal küme olsun. O halde, Teorem 2.1.23 ifadesinden

$$\|x_1, \dots, x_{n-1}\|_\infty := \max \{\|x_1, \dots, x_{n-1}, e_i\|_S : i = 1, \dots, n\}$$

fonksiyonu X üzerinde bir $(n-1)$ -norm tanımlar. Bu norma göre, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.1.26. Bir X standart n -norm üzerinde $\{e_1, \dots, e_n\}$ bazına göre tanımlanan $\|\cdot, \dots, \cdot\|_\infty$ $(n-1)$ -normu standart $\|\cdot, \dots, \cdot\|_S$ $(n-1)$ -normuna denktir. Yani, her $x_1, \dots, x_{n-1} \in X$ için

$$\|x_1, \dots, x_{n-1}\|_\infty \leq \|x_1, \dots, x_{n-1}\|_S \leq \sqrt{n} \|x_1, \dots, x_{n-1}\|_\infty$$

dur (Gunawan ve Mashadi, 2001b).

Şimdi sonlu boyutlu durum için n -norm kavramını inceleyelim. $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ sonlu boyutlu n -normlu uzaylar için n -normdan bir $(n-1)$ -normun elde edilmesini hatırlayalım. X de $n \leq m \leq d$ olacak şekilde bir lineer bağımsız $\{a_1, \dots, a_m\}$ kümesi alalım. $\{a_1, \dots, a_m\}$ ifadesine göre

$$\|x_1, \dots, x_{n-1}\|_\infty := \max \{\|x_1, \dots, x_{n-1}, a_i\| : i = 1, \dots, m\}$$

ile X^{n-1} üzerinde $\|\cdot, \dots, \cdot\|_\infty$ fonksiyonu tanımlanır.

Teorem 2.1.23 den $\|\cdot, \dots, \cdot\|_\infty$ fonksiyonu X üzerinde bir $(n-1)$ -norm tanımlar.

Tanım 2.1.27. $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu uzaydaki bir (x_k) dizisi her $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x, z_1, \dots, z_{n-1}\| = 0$$

koşulunu sağlarsa $x \in X$ elemanına n -normda yakınsaktır denir (Gunawan ve Mashadi, 2001b).

Aşağıdaki önerme n -normdaki yakınsaklıktan $(n-1)$ -normdaki $\|\cdot, \dots, \cdot\|_\infty$ yakınsaklığın elde edilmesini verir.

Önerme 2.1.28. (x_k) dizisi n -normda bir $x \in X$ elemanına yakınsak ise (x_k) aynı zamanda $\|\cdot, \dots, \cdot\|_\infty$ $(n-1)$ -normda x elemanına yakınsaktır, yani her $z_1, \dots, z_{n-2} \in X$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x, z_1, \dots, z_{n-2}\|_\infty = 0$$

dır (Gunawan ve Mashadi, 2001b).

Teorem 2.1.29. Bir X standart n -normlu uzayda bir dizinin n -normda yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul $\|\cdot, \dots, \cdot\|_\infty$ $(n-1)$ -normda yakınsak olmasıdır (Gunawan ve Mashadi, 2001b).

Sonuç 2.1.30. Bir standart n -normlu uzayda bir dizinin n -normda yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul standart $(n-1)$ -normda yakınsak olmasıdır ve tümevarım metodu ile her $r = 1, \dots, n-1$ için standart $(n-r)$ -normda yakınsak olmasıdır. Özellikle, standart n -normlu uzayda bir dizinin n -normda yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\|\cdot\|_S := \langle \cdot, \cdot \rangle^{\frac{1}{2}}$ adi normda yakınsak olmasıdır (Gunawan ve Mashadi, 2001b).

$(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ sonlu boyutlu n -normlu uzayı için de benzer sonuç elde edilir. X için bir baz $\{b_1, \dots, b_d\}$ olsun. $\{b_1, \dots, b_d\}$ ile X^{n-1} üzerinde $\|\cdot, \dots, \cdot\|_\times$ fonksiyonu

$$\|x_1, \dots, x_{n-1}\|_\times := \max \{\|x_1, \dots, x_{n-1}, b_i\| : i = 1, \dots, d\}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman, $\|\cdot, \dots, \cdot\|_{\infty}$ fonksiyonu X üzerinde bir $(n-1)$ -norm tanımlar.

Önerme 2.1.31. X sonlu boyutlu n -normlu uzayda bir dizinin n -normda yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul $\|\cdot, \dots, \cdot\|_{\infty}$ $(n-1)$ -normda dizinin yakınsak olmasıdır (Gunawan ve Mashadi, 2001b).

Sonuç 2.1.32. Bir standart n -normlu X uzayı üzerinde $\|\cdot, \dots, \cdot\|_{\infty}$, $\|\cdot, \dots, \cdot\|_{\infty}$ $(n-1)$ -normları ve $\|\cdot, \dots, \cdot\|_S$ standart $(n-1)$ -normu denktir. Sonuç olarak, bir standart n -normlu X uzayı üzerinde tanımlı bir dizinin n -normda yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul bu tanımlanan üç tane $(n-1)$ -normun birinde yakınsak olmasıdır (Gunawan ve Mashadi, 2001b).

Şimdi Gunawan ve Mashadi (2001b) tarafından verilen n -normlu uzaylarda Cauchy dizisi ve tamlık kavramlarını hatırlatalım.

Tanım 2.1.33. Her $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$ için

$$\lim_{k, m \rightarrow \infty} \|x_k - x_m, z_1, \dots, z_{n-1}\| = 0$$

ise $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu uzaydaki bir (x_k) dizisine n -norma göre bir Cauchy dizisi denir. Eğer X de her Cauchy dizisi bir $x \in X$ değerine yakınsak ise n -norma göre X uzayına tamdır denir. Tam n -normlu uzaya bir n -Banach uzayı denir (Gunawan ve Mashadi, 2001b).

Gunawan ve Mashadi (2001a) nin 2-normlu uzaylarda verdiği aşağıdaki iki sonuç n -normlu uzayların genelleştirilmesi olarak benzer metotlarla verilebilir.

Teorem 2.1.34. $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ bir n -normlu uzay olsun. X deki bir (x_k) dizisinin X deki bir x elemanına yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul her $i = 1, \dots, n$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x, x_1, \dots, x_{n-2}, a_i\| = 0$ olmasıdır.

İspat. Her $i = 1, \dots, n$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x, x_1, \dots, x_{n-2}, a_i\| = 0$ olsun. O zaman her $x_1, \dots, x_{n-2} \in X$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x, x_1, \dots, x_{n-2}, a_i\| = 0$ dır. Her

$z \in X$ ve $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ için $z = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$ yazılabilir. Üçgen eşitsizliğini kullanarak, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \|x_k - x, x_1, \dots, x_{n-2}, z\| &\leq |\alpha_1| \|x_k - x, x_1, \dots, x_{n-2}, a_1\| + \dots \\ &\quad + |\alpha_n| \|x_k - x, x_1, \dots, x_{n-2}, a_n\| \end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $x_1, \dots, x_{n-2} \in X$ ve $z \in X$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x, x_1, \dots, x_{n-2}, z\| = 0$$

dır. Teoremin gerekliliği açıktır.

Teorem 2.1.34 ün devamından aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

Teorem 2.1.35. $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ bir n -normlu uzay olsun. X deki bir (x_k) dizisinin X deki x elemanına yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x, x_1, \dots, x_{n-2}\|_{\infty} = 0$$

olmasıdır (Gunawan ve Mashadi, 2001b).

2.2. İstatistiksel Yakınsaklık ve İdeal Yakınsaklık

Bu kısımda yoğunluk ve istatistiksel yakınsaklık kavramları ile beraber ideal yakınsaklık tanımı ve örnekleri verilmiştir.

Tanım 2.2.1. $K, \mathbb{N}$ nin bir alt kümesi ve $K_n := \{k \leq n : k \in K\}$ olsun. Buna göre K kümesinin sırasıyla alt ve üst yoğunluğu;

$$\underline{\delta}(K) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|K_n|}{n} \text{ ve } \bar{\delta}(K) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|K_n|}{n}$$

olarak verilir. $\frac{|K_n|}{n}$ dizisinin limitinin var olmadığı durumunda, bu limite K kümesinin doğal yoğunluğu denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir. Yani $\delta(K) = \underline{\delta}(K) = \bar{\delta}(K)$ eşitlik-

lerinin sağlanması halinde $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu;

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

dir (Niven vd., 1991).

Tanım 2.2.2. $A \subseteq \mathbb{N}$, t, s tamsayı ve $t \geq 0$, $s \geq 1$ olsun. $A \cap [t+1, t+s]$ kümesinin eleman sayısı $A(t+1, t+s)$ olarak belirtilsin.

$$\alpha_s = \liminf_{t \rightarrow \infty} A(t+1, t+s), \quad \alpha^s = \limsup_{t \rightarrow \infty} A(t+1, t+s) \quad (2.2.2)$$

olmak üzere

$$\underline{u}(A) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\alpha_s}{s} \text{ ve } \bar{u}(A) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\alpha^s}{s} \quad (2.2.3)$$

sırasıyla A nın alt ve üst düzgün yoğunlukları olarak adlandırılır. Eğer $\underline{u}(A) = \bar{u}(A) =: u(A)$ ise ortak olan $u(A)$ sayısına A kümesinin düzgün yoğunluğu denir (Brown ve Freedman, 1990).

Tanım 2.2.3. $A \subseteq \mathbb{N}$ için

$$\underline{d}(A) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{a \in A, a \leq n} \frac{1}{a} \text{ ve } \bar{d}(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{a \in A, a \leq n} \frac{1}{a} \quad (2.2.4)$$

sayılarına sırasıyla A kümesinin alt ve üst logaritmik yoğunluğu denir. Eğer $\underline{d}(A) = \bar{d}(A) =: d(A)$ ise

$$d(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{a \in A, a \leq n} \frac{1}{a} \quad (2.2.5)$$

sayısına A kümesinin logaritmik yoğunluğu denir (Halberstam ve Roth, 1966).

Tanım 2.2.4. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = \{x_k\}$ dizisi L ye istatistiksel yakınsaktır denir ve $st\text{-}\lim x = L$ ile gösterilir (Fast, 1951).

Örnek 2.2.5. $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} k & , k = n^2 \\ 0 & , k \neq n^2 \end{cases} , n \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlansın. $\frac{1}{2}$ den küçük olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$K = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - 0| \geq \varepsilon\} = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$$

alınır. Burada K kümesinin yoğunluğu $\delta(K) = 0$ dır. Dolayısıyla x dizisi $L = 0$ değerine istatistiksel yakınsaktır, yani $st\text{-}\lim x = 0$ dır. Aynı zamanda bu dizinin ε komşuluğu dışında kalan elemanları sonsuz sayıda olduğundan yakınsak değildir. O halde istatistiksel yakınsak her dizinin yakınsak olamayacağı söylenebilir. Diğer taraftan yakınsak her dizinin istatistiksel yakınsak olduğu sonlu sayıdaki kümenin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan söylenebilir (Fridy, 1985).

Teorem 2.2.6. (x_k) reel bir dizi olsun. Bu durumda $st\text{-}\lim x_k = L$ olması için gerek ve yeter koşul $\delta(K) = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = L$ olacak şekilde bir $K = \{k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots\} \subset \mathbb{N}$ kümesinin mevcut olmasıdır (Šalát, 1980).

Tanım 2.2.7. Bir reel sayı dizisinin istatistiksel limiti sıfıra eşitse diziye istatistiksel sıfır dizisi denir.

İstatistiksel yakınsaklık herhangi bir metrik uzay üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.2.8. (X, ρ) bir metrik uzay; (x_k) , X uzayında bir dizi ve $x \in X$ olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\{k \in \mathbb{N} : \rho(x_k, x) \geq \varepsilon\} = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa x_n dizisi x noktasına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim x_k = x$ yazılır (Kostyrko vd., 2000).

Bu tanıma göre

$$st - \lim x_k = x \Leftrightarrow st - \lim \rho(x_k, x) = 0$$

yazılabilir. Yani, herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\rho(x_k, x) < \varepsilon$ kalır.

Fridy (1985)'nin reel istatistiksel Cauchy dizisi tanımından yararlanılarak herhangi bir metrik uzayda bir istatistiksel Cauchy dizisi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.9. (X, ρ) bir metrik uzay ve (x_k) , X uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\delta\{k \in \mathbb{N} : \rho(x_k, x_N) \geq \varepsilon\} = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_k) bir istatistiksel Cauchy dizisidir denir (Gürdal, 2004; Dems, 2004).

Teorem 2.2.10. Bir (X, ρ) metrik uzayındaki (x_k) dizisi için aşağıdaki koşullar denktir:

- i) (x_k) bir istatistiksel Cauchy dizisidir,
- ii) Her bir $\varepsilon > 0$ için $m, k \notin D$ iken $\rho(x_m, x_k) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta(D) = 0$ koşulunu sağlayan bir $D \subset \mathbb{N}$ kümesi vardır (Dems, 2004).

$\mathcal{I}$ -yakınsaklık kavramını verebilmek için önce ideal ve filtre tanımları verilecektir.

Tanım 2.2.11. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ doğal sayılar kümesinin kuvvet kümesi olmak üzere $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ailesi için

- i) $\emptyset \in \mathcal{I}$,
- ii) $A, B \in \mathcal{I}$ ise $A \cup B \in \mathcal{I}$ (toplamsallık),
- iii) $A \in \mathcal{I}$ ve $B \subset A$ ise $B \in \mathcal{I}$ (kahtsallık),

koşulları sağlanıyorsa $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir ideal olarak adlandırılır (Kuratowski, 1966).

Yukarıdaki tanımdaki (ii) den $\emptyset \in \mathcal{I}$ olacağı açıktır. Eğer $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$ ise $\mathcal{I}$ ideali öz

ideal olarak adlandırılır. Buna göre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dışındaki bütün idealler öz idealdir.

$\emptyset$ ve $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ aşıkâr olan ideallerdir. $\emptyset$ ve $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ in dışındaki ideallere gerçek ideal denir.

Her $x \in \mathbb{N}$ için $\{x\} \in \mathcal{I}$ ise, yani $\mathcal{I}$ ideali $\mathbb{N}$ nin tüm sonlu alt kümelerini içeriyorsa uygun ideal olarak adlandırılır (Kostyrko vd., 2000).

$\mathcal{I}$ ideali kapsamaya göre maksimal olan bir öz ideal ise maksimal ideal adını alır (Kostyrko vd., 2000).

Şimdi ideale dual bir kavram olan filtre tanımını verelim.

Tanım 2.2.12. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ailesi için

- i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- ii) Her $A, B \in \mathcal{F}$ için $A \cap B \in \mathcal{F}$,
- iii) Her $A \in \mathcal{F}$ ve $A \subset B$ için $B \in \mathcal{F}$

koşulları sağlanıyorsa $\mathcal{F}$ ye $\mathbb{N}$ de bir filtre denir (Nagata, 1974).

$\mathcal{I}$ ile $\mathcal{F}$ arasındaki ilişkiyi aşağıdaki önerme açıkca vermektedir.

Önerme 2.2.13. $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir öz ideal olsun.

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subseteq \mathbb{N} : \exists A \in \mathcal{I} \ni M = \mathbb{N} \setminus A\} \quad (2.2.6)$$

ailesi $\mathbb{N}$ de $\mathcal{I}$ ideali ile ilgili filtredir (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 2.2.14. $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ $\mathbb{N}$ de bir öz ideal olsun. $x = (x_k)$ reel değerli bir dizi ve $\xi \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$A(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I} \quad (2.2.7)$$

ise x dizisi ξ sayısına $\mathcal{I}$ -yakınsaktır denir ve $\mathcal{I}$ -lim $x_k = \xi$ şeklinde yazılır (Kostyrko vd., 2000).

Şimdi ideal kavramını sağlayan, doğal sayıların alt kümelerinin farklılıklarını

gösterelim.

Örnek 2.2.15. $\mathcal{I}_f$, $\mathbb{N}$ nin tüm sonlu altkümelerinin ailesi olsun. Bilindiği gibi klasik yakınsaklıkta limit noktasının komşuluğu dışında kalan eleman sayısı sonlu bir değerdir. Ölçüm teorisinde bunun dizinin tüm terimlerine oranı bilindiği gibi sıfırdır. Bu özelliğe sahip kümeler ideal tanımındaki özellikleri sağlar. Bu nedenle $\mathcal{I}_f$ -yakınsaklık klasik yakınsaklığın genelleştirilmiştir. $\mathcal{I}_f$, kapsamaya göre en küçük uygun idealdir (Kostyrko vd., 2000).

Örnek 2.2.16. $\mathcal{I}_\delta = \{A \subset \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$ ailesi $\mathbb{N}$ de bir uygun idealdir. Bilindiği gibi istatistiksel yakınsaklıkta limit noktasının komşuluğu dışında kalan eleman sayısı sonlu veya tüm eleman sayısına göre daha az bir değerdir. Ancak sonlu olması gerekmez sonsuz da olabilir. Ölçüm teorisinde bunun dizinin tüm terimlerine oranı bilindiği gibi sıfırdır. Yakınsaklık ise hemen hemen bir yakınsaklık türüdür. Bu özelliğe sahip kümeler ideal tanımındaki özellikleri sağlar. Bu nedenle $\mathcal{I}_\delta$ -yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığın genelleştirilmiştir (Kostyrko vd., 2000).

Örnek 2.2.17. $\mathcal{I}_u = \{A \subset \mathbb{N} : u(A) = 0\}$ ailesi $\mathbb{N}$ de bir uygun idealdir. $\mathcal{I}_u$ -yakınsaklık düzgün istatistiksel yakınsaklık olarak adlandırılır (Kostyrko vd., 2000).

Örnek 2.2.18. $\mathcal{I}_0 = \{\emptyset\}$ olmak üzere $\mathcal{I}_0$ ideali $\mathbb{N}$ de minimal idealdir. $x = (x_n)$ dizisinin $\mathcal{I}_0$ -yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul x in sabit dizi olmasıdır (Kostyrko vd., 2000).

Örnek 2.2.19. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, m sayısını bulundurmeyen kümelerin oluşturduğu aile bir maksimal idealdir (Kostyrko vd., 2000).

Bu ideal, uygun ideal değildir. Çünkü $\{m\}$ kümesi bu ideale ait değildir. Herhangi bir x dizisi m inci elemanına bu ideal üzerinden $\mathcal{I}$ -yakınsaktır.

Örnek 2.2.20. $\mathcal{I}_d = \{A \subset \mathbb{N} : d(A) = 0\}$ ailesi $\mathbb{N}$ de bir uygun idealdir ve $\mathcal{I}_d$ -yakınsaklık logaritmik istatistiksel yakınsaklık olarak adlandırılır (Kostyrko et al.,

2000).

Örnek 2.2.21. $\mathcal{I}$ -yakınsaklığının geniş bir sınıfı şu şekilde elde edilebilir. $T = \{t_{n,k}\}_{n,k \in \mathbb{N}}$ regüler negatif olmayan bir matris olsun. $A \subset \mathbb{N}$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $\delta_T^{(n)}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} t_{n,k} \chi_A(k)$ dir. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_T^{(n)}(A) = \delta_T(A)$ limiti varsa $\delta_T(A)$, A nın T -yoğunluğu olarak adlandırılır. $\mathcal{I}_{\delta_T} = \{A \subset \mathbb{N} : \delta_T(A) = 0\}$ olsun. $\mathcal{I}_{\delta_T}$, $\mathbb{N}$ nin doğal bir ideali ve $\mathcal{I}_{\delta_T}$ özel durumlarda $\mathcal{I}_{\delta}$ yakınsaklığını içerir (Kostyrko vd., 2000).

3. 2-NORM ve n -NORMLU UZAYLARDA İDEAL YAKINSAKLIK

Bu bölümde Şahiner vd., Gürdal ve Şahiner tarafından 2-normlu ve n -normlu uzaylarda $\mathcal{I}$ -yakınsaklık ve $\mathcal{I}$ -Cauchy kavramları ile ilgili bazı teoremler ve sonuçlara yer verilmiştir (Şahiner vd. 2007; Gürdal ve Şahiner, 2008).

Tanım 3.1. $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}$ nin bir gerçek ideali olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve X deki z için $A(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - z\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ ise X , 2-normlu uzayındaki $\{x_k\}$ dizisi z değerine $\mathcal{I}$ -yakınsaktır denir.

Şimdi iki normlu uzaylarda bir $\mathcal{I}$ -yakınsaklık örneği verelim.

Örnek 3.2. $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\delta$ olsun. $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu uzayında

$$x_k = \begin{cases} (0, k) & , k = n^2, \quad n \in \mathbb{N} \\ (0, 0) & , k \neq n^2 \end{cases}$$

tanımlansın ve $L = (0, 0)$ ve $z = (z_1, z_2)$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $z \in X$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z\| \geq \varepsilon\} \subset \{1, 4, 9, 16, \dots, k^2, \dots\}$$

dır.

Her $\varepsilon > 0$ ve $z \in X$ için $\delta\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z\| \geq \varepsilon\} = 0$ elde ederiz. Bu da $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k, z\| = \|L, z\|$ olduğunu ifade eder. Fakat (x_k) dizisi L ye yakınsak değildir.

$(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu uzayında alacağımız bir dizinin $\mathcal{I}$ -limit altında toplama ve skalerle çarpma işlemine göre lineer olduğunu gösterelim.

Teorem 3.3. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. Her $z \in X$ için

i) Eğer $\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k, z\| = \|x, z\|$, $\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k, z\| = \|y, z\|$ ise $\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k + y_k, z\| = \|x + y, z\|$;

ii) $\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|\alpha x_k, z\| = \|\alpha x, z\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

İspat. i) $\varepsilon > 0$ olsun. Her $z \in X$ için

$$K_1 = K_1(\varepsilon) := \left\{ k \in \mathbb{N} : \|x_k - x, z\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

ve

$$K_2 = K_2(\varepsilon) := \left\{ k \in \mathbb{N} : \|y_k - y, z\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

olmak üzere $K_1, K_2 \in \mathcal{I}$ dir.

$$K = K(\varepsilon) := \{k \in \mathbb{N} : \|(x_k + y_k) - (x + y), z\| \geq \varepsilon\}$$

olsun. $K \subset K_1 \cup K_2$ olur ve ispat tamamlanır.

ii) $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \neq 0$ olmak üzere $\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k, z\| = \|L, z\|$ olsun. O zaman

$$\left\{ k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z\| \geq \frac{\varepsilon}{|\alpha|} \right\} \in \mathcal{I}$$

dir. Tanım 3.1 den

$$\{k \in \mathbb{N} : \|\alpha x_k - \alpha L, z\| \geq \varepsilon\} = \left\{ k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z\| \geq \frac{\varepsilon}{|\alpha|} \right\}$$

eşitsizliğin sağ tarafı $\mathcal{I}$ ya aittir. Böylece her bir $z \in X$ için

$$\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|\alpha x_k, z\| = \|\alpha L, z\|$$

dir.

$u = \{u_1, \dots, u_d\}$ X için bir baz olsun. Bu durumda aşağıdaki elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.4. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. X deki bir (x_k) dizisi $x \in X$ değerine $\mathcal{I}$ -yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul her $i = 1, \dots, d$ için $\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x, u_i\| = 0$ olmasıdır.

Yardımcı Teorem 3.4 ü ve $\|\cdot\|_\infty$ normu kullanarak Yardımcı Teorem 3.5 i elde ederiz.

Yardımcı Teorem 3.5. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. X deki bir (x_k) dizisi $x \in X$ değerine $\mathcal{I}$ -yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\|_\infty = 0$ olmasıdır.

$B_u(x, \varepsilon)$ açık yuvarını kullanarak Yardımcı Teorem 3.5 ten Yardımcı Teorem 3.6 elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.6. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. X deki bir (x_k) dizisi $x \in X$ değerine $\mathcal{I}$ -yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul

$$A(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : x_k \notin B_u(x, \varepsilon)\}$$

kümesinin $\mathcal{I}$ ya ait olmasıdır.

Tanım 3.7. $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}$ nin bir gerçek ideali olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $z \in X$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_{N(\varepsilon, z)}, z\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

koşulunu sağlayan bir $N = N(\varepsilon, z)$ sayısı varsa X in (x_k) dizisine X de $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisi denir.

Teorem 3.8. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. $\|.,.\|$ yada $\|.\|_\infty$ normunda verilen X deki bir (x_k) $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisi için,

- i) (x_k) dizisi $(X, \|.,.\|)$ uzayında $\mathcal{I}$ -yakınsaktır,
 - ii) (x_k) dizisi $(X, \|.\|_\infty)$ uzayında $\mathcal{I}$ -yakınsaktır
- ifadeleri denktir.

İspat. Yardımcı Teorem 3.5 ten, 2-normdaki $\mathcal{I}$ -yakınsaklık $\|.\|_\infty$ normuna göre denktir. Yani

$$\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x, z\| = 0, \forall z \in X \Leftrightarrow \mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\|_\infty$$

dur. Eğer (x_k) dizisi $\|.\|_\infty$ a göre $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisi ise (x_k) nın 2-norma göre $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisi olduğunu göstermek yeterlidir.

Şimdi de n -normlu uzaylarda $\mathcal{I}$ -yakınsaklık, $\mathcal{I}$ -Cauchy ve bazı özellik ve örneklerini verelim.

$(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ bir n -normlu uzay olsun. Aksi belirtilmedikçe $2 \leq n \leq d < \infty$ olmak üzere X , d boyutlu bir uzay olsun.

Tanım 3.9. $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}$ nin bir gerçekte ideali olsun. X in $\{x_k\}$ dizisi her $\varepsilon > 0$ ve $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in X$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \|x_k - x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

ise $\{x_k\}$ dizisi x e $\mathcal{I}$ -yakınsaktır denir. Eğer $\{x_k\}$ dizisi x değerine yakınsak ise $\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| = 0$ veya $\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| = \|x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\|$ yazılır. x sayısı $\{x_k\}$ dizisinin $\mathcal{I}$ -limitidir denir.

Sonuç 3.10. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal ise $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu uzayının yakınsaklığı, $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu uzayının $\mathcal{I}$ -yakınsaklığını gerektirir.

Şimdi X deki hangi yakınsaklık aksiyomlarının X in $\mathcal{I}$ -yakınsaklığında da sağlandığına bakacak olursak,

(S) X n -normlu uzayında her $(x, x, \dots, x, \dots)$ sabit dizisi x değerine yakınsar.

(H) n -normlu X uzayındaki her yakınsak dizinin limiti tektir.

(F) $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X$ dizisinin limiti X deki bir x noktası ise (x_k) dizisinin bütün alt dizileri aynı noktada limite sahiptir.

(U) $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X$ dizisinin her bir alt dizisi $x \in X$ değerine yakınsayan bir alt diziye sahipse (x_k) dizisi de $x \in X$ değerine yakınsar.

Önerme 3.11. X n -normlu uzayının en az 2 noktası olduğunu varsayalım. $\mathcal{I} \subset 2^X$ de bir uygun ideal olsun.

i) X deki $\mathcal{I}$ -yakınsaklık S , H ve U koşullarını sağlar.

ii) Eğer $\mathcal{I}$ sonsuz bir küme içeriyorsa X deki $\mathcal{I}$ -yakınsaklık F koşulunu sağlamaz.

İspat. (S) aşıkardır. (H) yi gösterelim.

Her $A_1, A_2 \in \mathcal{I}$ için $(\mathbb{N} \setminus A_1)$ ve $(\mathbb{N} \setminus A_2)$ kümeleri $\mathcal{I}$ nın filtresine ait olduğundan $(\mathbb{N} \setminus A_1) \cap (\mathbb{N} \setminus A_2) \neq \emptyset$ olduğunu göstermek yeterlidir. $x_1 \neq x_2$ olmak üzere $x_1, x_2 \in X$ iki limit noktası olsun. $x_1 - x_2$ ve $x_1, \dots, x_{n-1}$ lineer bağımsız olmak üzere

$$0 < 2\varepsilon < \|x_1 - x_2, x_1, \dots, x_{n-1}\|$$

koşulunu sağlayan bir ε için

$$A_1 = \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I},$$

$$A_2 = \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_2, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

olsun. Buda $(\mathbb{N} \setminus A_1)$ ve $(\mathbb{N} \setminus A_2)$ kümeleri $\mathcal{I}$ nın filtresine ait olduğundan A_1 ve A_2 komşuluklarının ayrık olması gerçeğiyle çelişir.

(U) nun sağlanmadığını kabul edelim. O zaman her $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in X$ için

$$A(\varepsilon_0) = \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| \geq \varepsilon_0\} \neq \mathcal{I}$$

olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Fakat $\mathcal{I}$ uygun bir ideal olduğundan $A(\varepsilon_0)$ sonsuz bir kümedir. $A(\varepsilon_0) = \{n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots\}$ ve $i \in \mathbb{N}$ için $y_i = x_{n_i}$ olsun. O zaman n -normlu X uzayında $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{x_k\}$ nın x değerine $\mathcal{I}$ -yakınsak olan bir alt kümesi dışında bir alt kümesidir.

ii) $A = \{k_1 < k_2 < \dots < k_i < \dots\} \in \mathcal{I}$ bir sonsuz küme ve $B = \mathbb{N} \setminus A = \{m_1 < m_2 < \dots < m_i < \dots\}$ olsun. $\mathcal{I}$ gerçek ideal olduğundan B kümesi de sonsuzdur. Burada (x_k) dizisini $x_1, x_2 \in X$ ve $x_1 \neq x_2$ olacak şekilde tanımlayalım ve $i \in \mathbb{N}$ için $x_{k_i} = x_1, x_{m_i} = x_2$ olsun. Böylece $\mathcal{I} - \lim_{i \rightarrow \infty} \|x_{k_i}, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| = \|x_1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\|$ ve $\mathcal{I} - \lim_{i \rightarrow \infty} \|x_{m_i}, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| = \|x_2, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\|$ elde edilir.

Örnek 3.12. $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\delta$ olsun. $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu uzayında (x_n) dizisi

$$x_n = \begin{cases} (0, \dots, k) & , k = i^2, i \in \mathbb{N} \\ (0, \dots, 0) & , k \neq i^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın ve $x = (0, \dots, 0)$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in X$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| \geq \varepsilon\} \subset \{1, 4, 9, 16, \dots, k^2, \dots\}$$

dır. Her $\varepsilon > 0$ ve $z \in X$ için $\delta \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| \geq \varepsilon\} = 0$ elde ederiz. Bu da $\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| = \|x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\|$ olduğunu ifade eder. Fakat (x_n) dizisi x e yakınsak değildir.

$(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu uzayında alacağımız bir dizinin $\mathcal{I}$ -limit altında toplama ve skalerle çarpma işlemine göre lineer olduğunu gösterelim.

Teorem 3.13. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. Her $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in X$ için

i) Eğer $\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| = 0$ ve $\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k - y, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| = 0$ ise $\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|(x_k + y_k) - (x + y), x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| = 0$ ve

ii) $a \in \mathbb{R}$ için $\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|a(x_k - x), x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| = 0$ dır.

İspat. (i) $\varepsilon > 0$ olsun. Her $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in X$ için $A_1, A_2 \in \mathcal{I}$ olmak üzere

$$A_1 = A_1(\varepsilon) := \left\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

ve

$$A_2 = A_2(\varepsilon) := \left\{k \in \mathbb{N} : \|y_k - y, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Burada A kümesini

$$A = A(\varepsilon) := \{k \in \mathbb{N} : \|(x_k + y_k) - (x + y), x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| \geq \varepsilon\}$$

biçiminde tanımlarsak $A \subset A_1 \cup A_2$ olur ve ispat tamamlanır.

(ii) $a \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| = 0$ olsun. O zaman

$$\left\{ k \in \mathbb{N} : \|x_k - x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| \geq \frac{\varepsilon}{|a|} \right\} \in \mathcal{I}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & \{k \in \mathbb{N} : \|ax_k - ax, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| \geq \varepsilon\} \\ & \{k \in \mathbb{N} : |a| \|x_k - x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| \geq \varepsilon\} \\ = & \left\{ k \in \mathbb{N} : \|x_k - x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| \geq \frac{\varepsilon}{|a|} \right\} \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in X$ için

$$\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|a(x_k - x), x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| = 0$$

dır.

Yardımcı Teorem 3.14. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_k - x, a_i\| = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul X n -normlu uzayındaki (x_k) dizisinin $x \in X$ değerine $\mathcal{I}$ -yakınsak olmasıdır.

İspat. $(x_k) \in X$ dizisi $\mathcal{I}$ -yakınsak olsun. O zaman her $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in X$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| = 0$ olur. Her $z \in X$ ve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ için $z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ şeklinde yazılabilir. Üçgen eşitsizliğini kullanılarak her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \|x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_k - x, z\| &= |\alpha_1| \|x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_k - x, u_1\| + \dots \\ &+ |\alpha_n| \|x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_k - x, u_n\| \end{aligned}$$

dir. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$A(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : \|x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_k - x, u_i\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

ise üstteki eşitsizlikten

$$\begin{aligned} \{k : \|x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_k - x, z\| \geq \varepsilon\} &\subseteq \{|\alpha_1| \|x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_k - x, u_1\| \geq \varepsilon\} \cup \dots \\ &\cup \{|\alpha_n| \|x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_k - x, u_n\| \geq \varepsilon\} \end{aligned}$$

elde edilir. Üstteki ifadenin sağ tarafı ideale ait olduğundan sol tarafıda ideale aittir.

Bu da yardımcı teoremin ispatını tamamlar.

Yardımcı Teorem 3.14 den ve $\|., \dots, .\|_\infty$ normundan aşağıdaki yardımcı teorem verilebilir.

Yardımcı Teorem 3.15. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. X deki bir (x_k) dizisi $x \in X$ değerine $\mathcal{I}$ -yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_k - x\|_\infty = 0$$

olmasıdır.

$B_u(x, \varepsilon)$ açık yuvarı kullanılarak aşağıdaki yardımcı teorem elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.16. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. X deki bir (x_k) dizisi $x \in X$ değerine $\mathcal{I}$ -yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul

$$A(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : x_k \notin B_u(x, \varepsilon)\}$$

kümesinin $\mathcal{I}$ ya aittir olmasıdır.

Tanım 3.17. $I \subset 2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}$ nin bir gerçek ideali olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $z \in X$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_{N(\varepsilon, z)}, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

koşulunu sağlayan bir $N = N(\varepsilon, z)$ sayısı varsa X in (x_k) dizisine X de $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisi denir.

İdeal ve $\mathcal{I}$ -yakınsaklıkla ilgili bazı örnekler verelim.

- i) $\mathcal{I}_f$, $\mathbb{N}$ nin sonlu alt kümelerinin bir ailesi olsun. O zaman $\mathcal{I}_f$, $\mathbb{N}$ de uygun idealdir ve $\mathcal{I}_f$ Cauchy dizisi n -normlu uzaylardaki Cauchy dizisi ile çakışır.
- ii) $\mathcal{I}_\delta = \{A \subset \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$ olsun. O zaman $\mathcal{I}_\delta$, $\mathbb{N}$ de uygun idealdir ve $\mathcal{I}_\delta$ Cauchy dizisi n -normlu uzaylardaki istatistiksel Cauchy dizisi ile çakışır.

Yardımcı Teorem 3.18. Herhangi bir $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu uzayında her $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisinin $\mathcal{I}$ -yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul her $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisinin $\|\cdot, \dots, \cdot\|_\infty$ normuna göre $\mathcal{I}$ -yakınsak olmasıdır.

İspat. n -norma göre $\mathcal{I}$ -yakınsaklık kavramı $\|\cdot, \dots, \cdot\|_\infty$ normuna göre $\mathcal{I}$ -yakınsak kavramıyla denktir. Yani her $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in X$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_k - x\| &= 0 \\ \Leftrightarrow \mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_k - x\|_\infty & \end{aligned}$$

olmasıdır. (x_k) dizisi $\|\cdot, \dots, \cdot\|_\infty$ normuna göre $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisi ise (x_k) dizisinin n -normuna göre $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisi olduğunu göstermek yeterlidir.

4. LİNEER n -NORMLU UZAYLARIN TAMLAŞTIRILMASININ İDEAL YAKINSAKLIK KARAKTERİZASYONU

Bu bölümde düzgün sürekli n -norm ve ideal denk diziler tanımlanarak, ideal yakınsaklık yardımıyla lineer n -normlu uzayların tamlaştırılması incelenmiştir.

Tanım 4.1. Eğer her $z_1, z_2, \dots, z_{n-1} \in X$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - l, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| = 0$$

limiti mevcut ise n -normlu $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ uzayında bir $\{x_k\}$ dizisi bir $l \in X$ değerine yakınsaktır denir.

Tanım 4.2. Eğer her $z_1, z_2, \dots, z_{n-1} \in X$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x_l, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| = 0$$

ise n -normlu $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ uzayında bir $\{x_k\}$ dizisi Cauchy dizisi olarak adlandırılır.

$\mathcal{I}$, gerçek bir ideal olsun.

Tanım 4.3. $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu uzayında $\{x_k\}$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı $z_1, z_2, \dots, z_{n-1} \in X$ için

$$\{k \in N : \|x_k - L, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

ise o zaman $\{x_k\}$ dizisi L ye ideal yakınsaktır denir ve

$$\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} X_{(x_k)} = L$$

yazılır.

Tanım 4.4. $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ lineer n -normlu uzayında $\{x_k\}$ bir dizi olsun. Eğer her

$\varepsilon > 0$, sıfırdan farklı $z_1, z_2, \dots, z_{n-1} \in X$ ve her $m \geq N$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_m, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon, z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$ sayısı varsa $\{x_k\}$ dizisi X de bir ideal Cauchy dizisidir.

Teorem 4.5. $\{x_k\}$ ve $\{y_k\}$ n -normlu bir uzayda iki ideal Cauchy dizisi olsun. λ skaler olmak üzere $\{x_k + y_k\}$ ve $\{\lambda x_k\}$ da ideal Cauchy dizileridir.

İspat. Eğer $\{x_k\}$ ve $\{y_k\}$, $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ normlu uzayında ideal Cauchy dizileri ise her $\varepsilon > 0$, $z_1, z_2, \dots, z_{n-1} \in X$ ve her $m \geq N$ için

$$K_1 = \left\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_m, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in \mathcal{I}$$

ve

$$K_2 = \left\{k \in \mathbb{N} : \|y_k - y_m, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon, z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$ sayısı mevcuttur.

$$K = K(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : \|(x_k + y_k) - (x_m + y_m), z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| \geq \varepsilon\}$$

olduğundan $K \subset K_1 \cup K_2$ elde edilir.

Son olarak $\{x_k\}$ bir $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisi ise $\{\lambda x_k\}$ dizisinin de $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisi olduğu yukarıdakine benzer şekilde gösterilebilir.

Tanım 4.6. Bir lineer $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu uzayında $\{x_k\}$ ve $\{y_k\}$ iki ideal Cauchy dizisi olsun.

$$\{k \in \mathbb{N} : k \geq N(U) \text{ ve } x_k - y_k \notin U\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde sıfırın her U komşuluğunda bir $N(U)$ tamsayısı varsa bu iki dizi

ideal denktir denir. Bu da her $z_1, z_2, \dots, z_{n-1} \in X$ için

$$\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| = 0$$

ifadesine denktir. Eğer $\{x_k\}$ ve $\{y_k\}$ ideal denk ise $\{x_k\} \stackrel{I}{\approx} \{y_k\}$ ile gösterilir.

Sonuç 4.7. $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ lineer n -normlu uzay olsun. Eğer $\{a_k\} \stackrel{\mathcal{I}}{\approx} \{x_k\}$ ve $\{b_k\} \stackrel{\mathcal{I}}{\approx} \{y_k\}$ denk ise $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\{a_k + b_k\} \stackrel{\mathcal{I}}{\approx} \{x_k + y_k\}$ ve $\{\alpha a_k\} \stackrel{\mathcal{I}}{\approx} \{\alpha x_k\}$ dir.

İspat. $\{a_k\} \stackrel{\mathcal{I}}{\approx} \{y_k\}$ ve $\{b_k\} \stackrel{\mathcal{I}}{\approx} \{y_k\}$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve $z_1, z_2, \dots, z_{n-1} \in X$ için

$$K_1 = \left\{ k \in \mathbb{N} : \|a_k - x_k, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

ve

$$K_2 = \left\{ k \in \mathbb{N} : \|b_k - y_k, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

olmak üzere $K_1, K_2 \in \mathcal{I}$ dir.

$$K = K(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : \|(a_k + b_k) - (x_k + y_k), z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| \geq \varepsilon\}$$

olsun. $K \subset K_1 \cup K_2$ ve $\{\alpha a_k\} \stackrel{\mathcal{I}}{\approx} \{\alpha x_k\}$ nin ispatları kolayca gösterilebilir.

X deki ideal dizilerin bütün denklik sınıflarını $\widehat{X}$ ile gösterelim. $\widehat{x}, \widehat{y}$ vb. $\widehat{X}$ nın elemanları olsun. $\widehat{X}$ üzerindeki toplam ve skalerle çarpım şu şekilde gösterilir.

i) $\widehat{x} + \widehat{y} = \{x_k\} \in \widehat{x}$ ve $\{y_k\} \in \widehat{y}$ olmak üzere $\{x_k + y_k\}$ ya ideal denk olan bütün dizilerin kümesidir.

ii) $\alpha \widehat{x} = \{x_k\} \in \widehat{x}$ olmak üzere $\{\alpha x_k\}$ ya ideal denk olan bütün dizilerin kümesidir.

Sonuç 4.7 den bu iki özellik $\widehat{x}$ ve $\widehat{y}$ elemanlarının seçimlerinden bağımsız olduklarından iyi tanımlıdır. Buradan $\widehat{X}$ bir lineer uzaydır.

Sonuç 4.8. $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ lineer n -normlu uzayında $\{x_k\}$ bir ideal Cauchy dizisi

olsun. $z_1, z_2, \dots, z_{n-1} \in X$ için

$$\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \{\|x_k, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\|\}$$

vardır.

Teorem 4.9. $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ lineer n -normlu uzayında $\{x_{1(k)}\}$ ve $\{x_{2(k)}\}$ iki ideal Cauchy dizisi ideal denk ise her $z_1, z_2, \dots, z_{n-1} \in X$ için

$$\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{1(k)}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| = \mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{2(k)}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\|$$

dir.

İspat. n -norm özelliğinden

$$\begin{aligned} \|x_{1(k)}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| &= \|x_{1(k)} - x_{2(k)} + x_{2(k)}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| \\ &\leq \|x_{1(k)} - x_{2(k)}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| + \|x_{2(k)}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| \end{aligned}$$

olup

$$\|x_{1(k)}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| - \|x_{2(k)}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| \leq \|x_{1(k)} - x_{2(k)}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\|$$

ve

$$\|x_{2(k)}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| - \|x_{1(k)}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| \leq \|x_{2(k)} - x_{1(k)}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\|$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} &\{k \in \mathbb{N} : \|\|x_{2(k)}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| - \|x_{1(k)}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\|\| \geq \varepsilon\} \\ &\subseteq \{k \in \mathbb{N} : \|x_{2(k)} - x_{1(k)}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| \geq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

$\{x_{1(k)}\}$ ve $\{x_{2(k)}\}$ ideal denk olduklarından

$$\{k \in \mathbb{N} : \|x_{2(k)} - x_{1(k)}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

ve sonuç olarak aşağıdaki ifadenin ispatı tamamlanır:

$$\{k \in \mathbb{N} : \|\|x_{2(k)}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\| - \|x_{1(k)}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\|\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}.$$

Lineer n -normlu uzayların tamlaştırılması konusunda çalışırken karşılaşılan önemli problemlerden birisi X deki herhangi n için $\mathcal{I}$ -Cauchy dizilerinin

$$\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{1(k)}, x_{2(k)}, \dots, x_{n(k)}\|$$

limitinin olup olmadığı sorusudur. Bu problem, üzerinde düzgün sürekli n -normlar tanımlanan uzaylar için çözülmüştür.

Bundan sonra en azından bir pseudo n - normlu uzaya tamlanabilen uzaylar gösterilecektir.

Tanım 4.10. Her $\varepsilon > 0$ ve $x_{1i} - x_{1j}, x_{2i} - x_{2j}, \dots, x_{ni} - x_{nj} \in U_\varepsilon$ ($1 \leq i, j \leq n$) özelliğine sahip herhangi $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}, x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : \|\|x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}\| - \|x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}\|\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde 0 ın U_ε komşuluğu mevcut ise X lineer uzay üzerinde tanımlı bir $\|\cdot, \dots, \cdot\|$ n -norma ideal düzgün sürekli adı verilir.

Tanım 4.11. Pseudo n - norm bir n -normun $x_1, x_2, \dots, x_n$ lineer bağımsız olmak üzere

$$\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = 0$$

koşulu dışındaki bütün şartlarını sağlayan reel bir fonksiyondur.

Yardımcı Teorem 4.12. Eğer X bir ideal düzgün sürekli n -norma sahip lineer uzay ise X de $\{x_{1(k)}\}, \{x_{2(k)}\}, \dots, \{x_{n(k)}\}$ herhangi $\mathcal{I}$ -Cauchy dizileri için

$$\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{1(k)}, x_{2(k)}, \dots, x_{n(k)}\|$$

mevcuttur.

Yardımcı Teorem 4.13. Eğer X lineer uzayı bir ideal düzgün sürekli n -norm içeriyorsa

$$\{x_{1(k)}\} \stackrel{\mathcal{I}}{\approx} \{a_{1(k)}\}, \{x_{2(k)}\} \stackrel{\mathcal{I}}{\approx} \{a_{2(k)}\}, \dots, \{x_{n(k)}\} \stackrel{\mathcal{I}}{\approx} \{a_{n(k)}\},$$

ideal Cauchy dizilerinin denklik çiftleri için

$$\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{1(k)}, x_{2(k)}, \dots, x_{n(k)}\| = \mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|a_{1(k)}, a_{2(k)}, \dots, a_{n(k)}\|$$

vardır.

Eğer X düzgün sürekli n -norm içeren bir lineer uzay ise her $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n \in \widehat{X}$ için $\widehat{X}$ uzayında reel değerli bir fonksiyonu

$$\|\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n\| = \mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{1(k)}, x_{2(k)}, \dots, x_{n(k)}\|$$

biçiminde tanımlayabiliriz. Burada $\{x_{1(k)}\} \in \hat{x}_1, \{x_{2(k)}\} \in \hat{x}_2, \dots, \{x_{n(k)}\} \in \hat{x}_n$ dir. Bu fonksiyon $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$ elemanlarının seçiminden bağımsız ve limit var olduğundan iyi tanımlıdır. Üstte tanımlanan fonksiyon $\widehat{X}$ uzayı için bir pseudo n - normdur (Bu fonksiyonun n -norm olup olmadığı halen bir sorudur).

Teorem 4.14. $\{x_{1(k)}\} \in \hat{x}_1, \{x_{2(k)}\} \in \hat{x}_2, \dots, \{x_{n(k)}\} \in \hat{x}_n$ ideal Cauchy dizileri olmak üzere X ideal düzgün sürekli n - normlu lineer uzay ise

$$\|\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n\| = \mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{1(k)}, x_{2(k)}, \dots, x_{n(k)}\|$$

fonksiyonu $\widehat{X}$ uzayında bir pseudo n - normdur.

İspat. i) $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$ lineer bağımlı ise

$$\begin{aligned} \|\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n\| &= \mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{1(k)}, x_{2(k)}, \dots, x_{n(k)}\| \\ &= 0 \end{aligned}$$

yazabiliriz.

ii)

$$\|\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_n\| = \mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{1(k)}, x_{2(k)}, \dots, x_{n(k)}\|$$

olduğundan ve $\|x_{1(k)}, x_{2(k)}, \dots, x_{n(k)}\|$ permutasyon altında değişmeli olduğundan $\|\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_n\|$ da bu koşulu sağlar.

iii)

$$\begin{aligned} \|\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \alpha \widehat{x}_n\| &= \mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{1(k)}, x_{2(k)}, \dots, \alpha x_{n(k)}\| \\ &= \mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} |\alpha| \|x_{1(k)}, x_{2(k)}, \dots, x_{n(k)}\| \\ &= |\alpha| \|\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \alpha \widehat{x}_n\| \end{aligned}$$

dir.

iv)

$$\begin{aligned} \|\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_{n-1}, \widehat{y} + \widehat{z}\| &= \mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{1(k)}, x_{2(k)}, \dots, x_{(n-1)(k)}, (y + z)_{(k)}\| \\ &\leq \mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{1(k)}, x_{2(k)}, \dots, x_{(n-1)(k)}, y_{(k)}\| \\ &\quad + \mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{1(k)}, x_{2(k)}, \dots, x_{(n-1)(k)}, z_{(k)}\| \\ &= \|\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_{n-1}, \widehat{y}\| + \|\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_{n-1}, \widehat{z}\| \end{aligned}$$

olur. $x_1 = x_2 = \dots = x_k = \dots$ olmak üzere $\widehat{X}_0$ ideal Cauchy dizisi $\{x_k\}$ yı içeren denklik sınıflarından oluşan $\widehat{X}$ nın bir alt kümesidir. Bu şekilde bir dizi ideal denklik sınıfı olabilir. Eğer $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_n \in \widehat{X}_0$ ve eğer her k için $x_{1(k)} = x_1, x_{2(k)} = x_2, \dots, x_{n(k)} = x_n$ olmak üzere $\{x_{1(k)}\}, \{x_{2(k)}\}, \dots, \{x_{n(k)}\}$ uygun Cauchy dizileri ise

$$\begin{aligned} \|\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_n\| &= \mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{1(k)}, x_{2(k)}, \dots, x_{n(k)}\| \\ &= \mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_1, x_2, \dots, x_n\| \\ &= \|x_1, x_2, \dots, x_n\| \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan $\widehat{X}_0$ ve X izometriktir.

Her $\widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \dots, \widehat{z}_{n-1} \in \widehat{X}$ ve her $\widehat{x} \in \widehat{X} \setminus Y$ için

$$\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|\widehat{x}^k - \widehat{x}, \widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \dots, \widehat{z}_{n-1}\| = 0$$

olacak şekilde bir $\{\widehat{x}^k\} \subseteq Y$ dizisi varsa $Y \subset \widehat{X}$ ideal yoğundur.

Teorem 4.15. Eğer X ideal düzgün sürekli n -normlu lineer bir uzay ise $\widehat{X}_0, \widehat{X}$ da ideal yoğundur.

İspat. $\widehat{x}, \widehat{X} - \widehat{X}_0$ in herhangi bir elemanı ve $\{x_k\} \in \widehat{x}$ olacak şekilde $\{x_k\}$, X de bir ideal Cauchy dizisi olsun. Her k için tekrar eden $x_k, x_k, \dots$ dizisini içeren $\widehat{x}^k, \widehat{X}_0$ in bir elemanıdır. $\widehat{X}$ daki her $\widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \dots, \widehat{z}_{n-1}$ elemanı için ve her bir $\{z_{(1)k}\} \in \widehat{z}_1, \{z_{(2)k}\} \in \widehat{z}_2, \dots, \{z_{(n-1)k}\} \in \widehat{z}_{n-1}$ için n -norm ideal düzgün sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} & \{k \in \mathbb{N} : \|(x^k)_m - x_m, z_{1(m)}, \dots, z_{(n-1)(m)}\| \geq \varepsilon\} \\ &= \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_m, z_{1(m)}, \dots, z_{(n-1)(m)}\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $(x^k)_m$, tekrar eden dizi $\widehat{x}^k$ nin m . bileşenidir. Her $k \geq N(\varepsilon, z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : \|(\widehat{x}^k) - \widehat{x}, \widehat{z}_1, \dots, \widehat{z}_{n-1}\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

ve her $\widehat{z}_1, \dots, \widehat{z}_{n-1} \in \widehat{X}$ için $\mathcal{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \|\widehat{x}^k - \widehat{x}, \widehat{z}_1, \dots, \widehat{z}_{n-1}\| = 0$ dir. Buradan $\widehat{X}$ da $\widehat{X}_0$ ideal yoğundur.

Eğer her ideal Cauchy dizisi X de ideal yakınsak ise pseudo n - normlu X uzayı tamdır denir.

Teorem 4.16. Eğer X bir ideal düzgün sürekli n - norma sahip lineer uzay ise $\widehat{X}$ ideal tamdır.

İspat. $\{\widehat{y}_k\}, \widehat{X}$ da bir ideal Cauchy dizisi ve $\widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \dots, \widehat{z}_{n-1}, \widehat{X}$ nin keyfi elemanları

olsun. Her k için $\widehat{X}_0$ nın $\widehat{X}$ da ideal yoğun olduğu gerçeğinden

$$\left\{ k \in \mathbb{N} : \|\widehat{y}_k - \widehat{w}_k, \widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \dots, \widehat{z}_{n-1}\| \geq \frac{1}{k} \right\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde $\{\widehat{w}_k\} \in \widehat{X}_0$ seçebiliriz. $\varepsilon > 0$ olsun. $\|\cdot, \dots, \cdot\|$ n - normun (*iv*) özelliğini kullanarak $N \geq \frac{\varepsilon}{3}$ olmak üzere $k, m \geq N = N(\varepsilon, z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$ için

$$\begin{aligned} K & : = \{k \in \mathbb{N} : \|\widehat{w}_k - \widehat{w}_m, \widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \dots, \widehat{z}_{n-1}\| \geq \varepsilon\} \\ & \subseteq \left\{ k \in \mathbb{N} : \|\widehat{w}_k - \widehat{y}_k, \widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \dots, \widehat{z}_{n-1}\| \geq \frac{1}{k} \right\} \\ & \quad \cup \left\{ k \in \mathbb{N} : \|\widehat{y}_k - \widehat{y}_m, \widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \dots, \widehat{z}_{n-1}\| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \\ & \quad \cup \left\{ m \in \mathbb{N} : \|\widehat{y}_m - \widehat{w}_m, \widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \dots, \widehat{z}_{n-1}\| \geq \frac{1}{m} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\left\{ k \in \mathbb{N} : \|\widehat{w}_k - \widehat{y}_k, \widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \dots, \widehat{z}_{n-1}\| \geq \frac{1}{k} \right\}$$

ve

$$\left\{ m \in \mathbb{N} : \|\widehat{y}_m - \widehat{w}_m, \widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \dots, \widehat{z}_{n-1}\| \geq \frac{1}{m} \right\}$$

kümeleri $\mathcal{I}$ ya aittir. $\widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \dots, \widehat{z}_{n-1}$ elemanları keyfi elemanlar ve $\widehat{y}_k$ da $\widehat{X}$ in bir ideal Cauchy dizisidir. $\{\widehat{w}_k\}$, $\widehat{X}_0$ da ideal Cauchy dizisi olduğundan $\{w_k\}$, X de $\widehat{X}$ ve $\widehat{X}_0$ arasındaki izometri altında $\{\widehat{w}_k\}$ ya karşılık gelen bir dizi olsun. O zaman $\{w_k\}$, X de ideal Cauchy dizisidir. Böylece $\widehat{X}$ da $\{w_k\} \in \widehat{y}$ olacak şekilde bir $\widehat{y}$ elemanı vardır öyleki, $N \geq \frac{\varepsilon}{3}$ olmak üzere $k \geq N = N(\varepsilon, z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$ için

$$\begin{aligned} K_1 & : = \{k \in \mathbb{N} : \|\widehat{y}_k - \widehat{y}, \widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \dots, \widehat{z}_{n-1}\| \geq \varepsilon\} \\ & \subseteq \left\{ k \in \mathbb{N} : \|\widehat{y}_k - \widehat{w}_k, \widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \dots, \widehat{z}_{n-1}\| \geq \frac{1}{k} \right\} \\ & \quad \cup \left\{ k \in \mathbb{N} : \|\widehat{w}_k - \widehat{y}, \widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \dots, \widehat{z}_{n-1}\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 4.15 in ispatındaki gibi $k \geq N(\varepsilon, z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : \|\widehat{w}_k - \widehat{y}, \widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \dots, \widehat{z}_{n-1}\| \geq \varepsilon\}$$

kümesi $k, m \geq N(\varepsilon, z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : \|w_k - w_m, z_{1(m)}, z_{2(m)}, \dots, z_{n-1(m)}\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

kümesini sağlar. Böylece $K_1 \in \mathcal{I}$ olduğu gösterilmiş olur. $\{\hat{y}_k\}$, X in herhangi bir elemanı olduğundan $\hat{X}$ ideal tamdır.

İdeal düzgün sürekli n -norma bir örnek olarak $\{e_i\}_{i=1}^n$ bazın elemanları ve $j = 1, 2, \dots, n$ için $x_j = \sum_{i=1}^n x_{ji}e_i$ olmak üzere

$$\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = \frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leq i < j < n}^d \left| \begin{array}{cccc} x_{1i} & x_{1(i+1)} & \cdots & x_{1j} \\ x_{2i} & x_{2(i+1)} & \cdots & x_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{ni} & x_{n(i+1)} & \cdots & x_{nj} \end{array} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

normu verilebilir.

5. KAYNAKLAR

- Balcerzak, M., Dems, K., Komisarski, A., 2007. Statistical convergence and ideal convergence for sequences of functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 328(1), 715-729.
- Buck, R.C., 1953, Generalized asymptotic density. *American Journal of Mathematics*, 75, 335-346.
- Brown, T.C., Freedman, A.R., 1990. The uniform density of sets of integers and Fermat's last theorem. *Comptes Rendus Mathematiques des l'Academie des Sciences*, 11, 1-6.
- Chen, X., Y., Song, M., M., 2010. Characterizations on isometries in linear n -normed spaces. *Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications*, 72, 1895-1901.
- Chu, H., Y., Lee, K. and Park, C., K., 2004. On the Aleksandrov problem in linear n -normed spaces. *Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications*, 59, 1001-1011.
- Chu, H., Y., Park, C.,K. and Park, W.,K., 2004. The Aleksandrov problem in linear 2-normed spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 289, 666-672.
- Connor, J., S., 1988. The statistical and strong p -cesaro convergence of sequences. *Analysis*, 8, 47-63.
- Das, P., Malik, P., 2008. On the statistical and $\mathcal{I}$ variation of double sequences. *Real Analysis Exchange*, 33, 351-363.
- Das, P., Kostyrko, P., Wilczynski, W., Malik, P., 2008. $\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^*$ -convergence of double sequences. *Mathematica Slovaca*, 58, 605-620.
- Das, P., Malik, P., Savaş, E., 2009. On statistical limit points of double sequences. *Applied Mathematics and Computation*, 215, 1030-1034.

- Dems, K., 2004. On $\mathcal{I}$ -Cauchy sequences. *Real Analysis Exchange*, 30(1), 123-128.
- Diminnie, C., Gähler, S., White, A., 1973. 2-Inner product spaces. *Demonstratio Mathematica*, 6, 525-536.
- Diminnie, C., R., Gähler, S., White, A., 1974. Strictly convex linear 2-normed spaces. *Mathematische Nachrichten*, 59, 319-324.
- Diminnie, C., R., Gähler, S., White, A., 1976. Remarks on generalizations of 2-inner products. *Mathematische Nachrichten*, 74, 269-278.
- Diminnie, C., Gähler, S., White, A., 1977. 2-Inner product space. *II. Demonstratio Mathematica*, 10, 169-188.
- Diminnie, C. and White, A., 1982. 2-Norms generated by seminorms on the space of bivectors. *Mathematische Nachrichten*, 106, 341-346.
- Elumalai, S., Asha, P., J., 2000. Some results on linear 2-normed spaces. *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*, 92 (6) , 441-454.
- Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum*, 2, 241-244.
- Freedman, A.R., Sember, J.J., 1981. Densities and summability. *Pacific Journal of Mathematics*, 95 (2) , 293-305.
- Freese, W., R., Cho, Y., 1994. Characterization of linear 2-normed spaces. *Mathematica Japonica*, 40(1), 115-122.
- Fridy, J.A., 1985. On statistical convergence. *Analysis*, vol. 5, no. 4, pp. 301-313.
- Fridy, J.A., 1993. Statistical limit points. *Proceedings American Mathematical Society*, 118 (4) , 1187-1192.
- Fridy, J., A. and Orhan, C., 1997. Statistical limit superior and limit inferior. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125 (12) , 3625-3631.

- Gähler, S., 1963. 2-metrische räume und ihre topologische struktur. Mathematische Nachrichten, 26 (1-4) , 115-148.
- Gähler, S., 1964. Lineare 2-normierte raume. Mathematische Nachrichten, 28, 1-43.
- Gähler, S., 1965. Über der uniformisierbarkeit 2-metrische Räume. Mathematische Nachrichten, 28, 235-244.
- Gähler, S., 1969. Über 2-banach-räume. Mathematische Nachrichten, 42, 335-347.
- Gähler, S., Siddiqui, A., H., Gupta, S., C., 1975. Contribution to non-archimedian functional analysis. Mathematische Nachrichten, 69, 163-171.
- Golet, I., 2005. On probabilistic 2-normed spaces. Novi Sad Journal of Mathematics, 35(1), 95-102.
- Gunawan, H., Mashadi, 2001. On finite dimensional 2-normed spaces. Soochow Journal of Mathematics, 27 (3) , 321-329.
- Gunawan, H., Mashadi, 2001. On n -normed spaces. The International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 27(10), 631-639.
- Gürdal, M., 2004. Bazı Yakınsaklık Tipleri. Doktora Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 62 sayfa, Isparta.
- Gürdal, M., Pehlivan, S., 2004. The statistical convergence in 2-banach spaces. Thai Journal of Mathematics, 2(1), 107-113.
- Gürdal, M., 2006. On ideal convergent sequences in 2-normed spaces. Thai Journal of Mathematics, 4(1), 85-91.
- Gürdal, M., Açık, I., 2008. On $\mathcal{I}$ -Cauchy sequences in 2-normed spaces. Mathematical Inequalities and Applications, 11 (2) , 349-354.
- Gürdal, M. and Şahiner, A., 2008. Extremal $\mathcal{I}$ -limit points of double sequences.

- Applied Mathematics, 8, 131-137.
- Gürdal, M., Şahiner, A., Açıık, I., 2009. Approximation theory in 2-banach spaces. Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications, 71 (5-6) , 1654-1661.
- Gürdal, M., Pehlivan, S., 2009. Statistical convergence in 2-normed spaces. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 33, 257-264.
- Halberstam, H., Roth, K.F., 1966. Sequences *I*. Oxford, Clarendon Press, 290s., London.
- Kim, S., S., 1990. Linear 2-Normed Spaces. Doctoral Diss., Gyeongsang Natl. Univ.
- Kim, S., S., Cho, Y., J. and White, A. , 1992. Linear operators on linear 2-normed spaces. Glasnik Matematicki, 27(47), 63-70.
- Kostyrko, P., Wilczyeski, W., Salat, T., 2000. $\mathcal{I}$ -Convergence. Real Analysis Exchange, 26 (2) , 669-685.
- Kostyrko, P., Macaj, M., Salat, T., Sleziak, M., 2005. $\mathcal{I}$ -convergence and extremal $\mathcal{I}$ -limit points. Mathematica Slovaca, 55 (4) , 443-464.
- Kreyszig, E., 1989. Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons. Inc., Canada.
- Kuratowski, C., 1966. Topologie, Volume *I*, *PWN* Warszawa.
- Lewandowska, Z., 1999. Linear operators on generalized 2-normed spaces. Bulletin Mathematique, 42, 353-368.
- Lewandowska, Z., 2001. Generalized 2-normed spaces. Slupskie Prace Matematyczno-Fizyczne, 1, 33-40.
- Maddox, I., J., 1988. Statistical convergence in a locally convex space. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 104,

141-145.

Misiak, A., 1989. n -Inner product spaces. *Mathematische Nachrichten*, 140, 299-319.

Misiak, A., 1989. Orthogonality and orthogonormality in n -inner product spaces. *Mathematische Nachrichten*, 143, 249-261.

Mursaleen, M., Edely, O.H.H., 2003. Statistical convergence of double sequences. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 288, no. 1, pp. 223-231.

Nabiev, A., Pehlivan, S., Gürdal, M., 2007. On $\mathcal{I}$ -Cauchy sequences. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 11(2), 569-576.

Nagata, J., 1974. *Modern general topology*. North-Holland Publication Company, Amsterdam-London.

Niven, I., Zuckerman, H.S., Montgomery, H.L., 1991, *An Introduction to The Theory of Numbers*. Fifth Edition John Wiley and Sons, Inc., 529p. New York.

Rath, D. ve Tripathy, B.C., 1994. On statistically convergent and statistically Cauchy sequences. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 25, 381.

Raymond, W., Freese, R.W., Cho, J., 2001. *Geometry of Linear 2-Normed Spaces*. Nova Science Publishers, 301 s. Huntington, N.Y.

Salát, T., 1980. On statistically convergent sequences of real numbers. *Mathematica Slovaca*, 30, 139-150.

Šalát, T., Tripathy, B.C., Ziman, M., 2004. On some properties of $\mathcal{I}$ -convergence. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 28, 279-286.

Savaş, E., 2010. Δ^m -Strongly summable sequences spaces in 2-normed spaces

- defined by ideal convergence and an Orlicz function. *Applied Mathematics and Computation*, 217(1), 271-276.
- Schoenberg, I.J., 1959, The integrability of certain functions and related summability methods. *American Mathematical Monthly*, 66, 361-375.
- Siddiqi, A., H., 1980. 2-normed spaces. *Aligarh Bulletin of Mathematics*, 53-70.
- Steinhaus, H., 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. *Colloquium Mathematicum*, 2, 73-74.
- Şahiner, A., Gürdal, M., Saltan, S., Gunawan, H., 2007. Ideal convergence in 2-normed Spaces. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 11 (4) , 1477-1484.
- Tripathy, B., C., 2003. Statistically convergent double sequences. *Tamkang Journal of Mathematics*, 34, 231-237.
- Tripathy, B.C., 2005. On $\mathcal{I}$ -convergent double sequences. *Soochow Journal of Mathematics*, 31 (4) , 549-560.
- White, A.G., 1968. 2-Banach spaces, *Doktoral Diss.*, St. Louis Univ.
- White, A.G., 1969. 2-Banach spaces. *Mathematische Nachrichten*, 42, 43-60.
- White, A.G., Cho, Y., J., 1984. Linear mappings on linear 2-normed spaces. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 21(1), 1-6.
- Zygmund, A., 1979. *Trigonometric Series (Vol. II)*. Cambridge University Press. Cambridge.

ÖZGEÇMİŞ



Adı Soyadı : Tuba YİĞİT
Doğum Yeri ve Yılı : Batman, 1977
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu :

Lise : Antalya Anadolu Lisesi, 1992-1996
Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi, 1996-2000
Yüksek Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi, 2000-2004

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Denizli-Bozkurt Cumalı İlköğretim Okulu (2000 – 2003)
Isparta-Senirkent İ.H.Ö. İşitme Engelliler Meslek Lisesi (2003 – 2004)
Isparta-Senirkent Çok Programlı Lise (2004 – 2006)
Isparta-Anadolu Öğretmen Lisesi (2006 – 2008)
Isparta-Mustafa Kaçıkçı Anadolu Lisesi (2008 – ...)

Yayınları (SCI ve diğer makaleler):

- 1) Şahiner, A., Gürdal, M., Yigit, T., Ideal Convergence Characterization of Completion of Linear n-Normed Spaces, Computers and Mathematics with Applications, 61(3), 683 – 689, 2011.