T.C.
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZAMAN SKALASI ANALİZİNDE DİNAMİK DENKLEMLERİN KARARLILIĞI ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

VEYSEL FUAT HATİPOĞLU

ARALIK 2012
MUĞLA

MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEZ ONAYI

VEYSEL FUAT HATİPOĞLU tarafından hazırlanan **ZAMAN SKALASI ANALİZİNDE DİNAMİK DENKLEMLERİN KARARLILIĞI ÜZERİNE** başlıklı tezinin,18/12/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda doktora derecesi için gerekli şartları sağladığı oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

TEZ SINAV JURİSİ

Prof. Dr. Mehmet SEZER **(Jüri Başkanı)** — İmza

Matematik Anabilim Dalı,
Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK **(Danışman)** — İmza

Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Prof. Dr. Nesrin ÖZSOY **(Üye)** — İmza

OFMA Matematik Eğitimi Anabilim Dalı,
Adnan Menderes Üniversitesi, Aydın

Doç. Dr. Mustafa GÜLSU **(Üye)** — İmza

Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Yrd. Doç. Dr. Sibel PAŞALI ATMACA **(Üye)** — İmza

Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI ONAYI

Doç. Dr. Mustafa GÜLSU — İmza

Matematik Anabilim Dalı Başkan V.,
Muğla Sıktı Koçman Üniversitesi, Muğla

Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK — İmza

Danışman, Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Savunma Tarihi: 18/12/2012

Tez çalışmalarım sırasında elde ettiğim ve sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgelerin tarafımdan bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde edildiğini; akademik ve bilimsel etik kurallarına uygun olduğunu beyan ederim. Ayrıca, akademik ve bilimsel etik kuralları gereği bu tez çalışması sırasında elde edilmemiş başkalarına ait tüm orijinal bilgi ve sonuçlara atıf yapıldığını da beyan ederim.

Veysel Fuat HATİPOĞLU
18/12/2012

ÖZET

ZAMAN SKALASI ANALİZİNDE DİNAMİK DENKLEMLERİN KARARLILIĞI ÜZERİNE

Veysel Fuat HATİPOĞLU

Doktora Tezi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK
Aralık 2012, 44 sayfa

Bu çalışmada, zaman skalasında dinamik denklemlerin üstel ve düzgün üstel kararlılıkları ile ilgili teoremler verilmiştir. Daha sonra zaman skalasında impuls dinamik denklemlerin ψ-üstel, ψ-düzgün üstel ve ψ-global üstel kararlılıkları ile ilgili tanım ve teoremler çalışılmıştır. Ayrıca zaman skalasında ikili dönüşümler tanımlanmış, Lyapunov fonksiyonu seçimine esneklik getiren bu dönüşümler kullanılarak dinamik denklemlerin kararlılığı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kararlılık, Üstel Kararlılık, ψ-Üstel Kararlılık, İkili Dönüşüm, Dinamik Denklemler, İmpuls Dinamik Denklemler, Zaman Skalası

ABSTRACT
ON THE STABILITY OF DYNAMIC EQUATIONS ON TIME SCALES

Veysel Fuat HATİPOĞLU

Doctor of Philosophy (Ph.D.)
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK
December 2012 , 44 pages

In this study, we give some theorems about exponential stability and uniform exponential stability of dynamic equations on time scales. Then we study the definitions and theorems related with ψ-exponential, ψ-uniform exponential, ψ-global exponential stability of impulsive dynamic equations on time scales. Moreover, we define dichotomic maps on time scales and we investigate stability of dynamic equations on time scales by using dichotomic maps which helps us choosing Lyapunov functions.

Keywords: Stability, Exponential Stability, ψ-Exponential Stability, Dichotomic Map, Dynamic Equations, Impulsive Dynamic Equations, Time Scales

Sevgili Aileme

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında, gerek ders gerekse de tez aşamasında bilgisini, ilgisini hiç esirgemeyen, anlayışı ve çalışma azmiyle hepimize örnek olan danışmanım Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK'a, doktora sürecim boyunca maddi ve manevi olarak her türlü yardımda bulunan Yrd. Doç. Dr. Deniz UÇAR'a, tez yazımı sırasında LaTeX programında yardımlarını esirgemeyen Tarkan ÖNER ve Ömer AKGÜLLER'e Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi ve Uşak Üniversitesi Matematik bölümünün tüm değerli öğretim üyeleri ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma, hayatımın her döneminde beni destekleyen aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{T}$	Zaman Skalası
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$C_{rd}(A,B)$	A kümesinden B kümesine sağ yoğun sürekli fonksiyonların kümesi
σ	İleri sıçrama operatörü
ρ	Geri sıçrama operatörü
μ	Tanecik (graininess) fonksiyonu
$\varnothing$	Boş küme
f^{Δ}	Delta türev
$\Re$	Regresif
ξ	Silindir dönüşümü
$[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$	$[t_0,\infty)\cap\mathbb{T}$

1. GİRİŞ

Son yıllarda üzerinde birçok çalışmalar yapılan zaman skalası teorisi Hilger (1988) tarafından sürekli analizi ve ayrık analizi birleştirmek amacıyla kurulmuştur. Sürekli analiz ve ayrık analizde pek çok kavram ve teorem zaman skalasında yeniden kurularak genellenmektedir. Pek çok doğa olayı sadece sürekli ya da sadece ayrık olarak ifade edilemez. Zaman skalası teorisi, hem süreklilik hem de ayrıklık durumlarını içeren doğa olaylarının matematiksel denklem olarak ifade edilmesine olanak sağlamıştır. Zaman skalası üzerinde tanımlanan bu denklemlere dinamik denklemler denir. Dinamik denklemler özel zaman skalalarına göre diferensiyel denklemler, fark denklemleri ve q-fark denklemleri olarak adlandırılabilirler. Hem sürekli hem de süreksiz tanım kümelerinde tanımlı dinamik denklemler üzerine yapılan çalışmalar ile gerçek hayatta ki problemlerin çözümü amaçlanmaktadır. Son yıllarda zaman skalasının ekonomi alanında Atıcı vd. (2006), tıp alanında Jones vd. (2004) gibi çalışmaların yanısıra diğer bilim alanlarında uygulamaları ile ilgili çalışmalar yapılmaktadır. Zaman skalası analizinde Kaymakçalan vd. (1996), Bohner ve Peterson (2001) ve Bohner ve Peterson (2002) kitapları birçok temel tanım ve teoremi içererek pek çok çalışmaya kaynak olmuşlardır.

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov tarafından 1892 yılında hazırlanan doktora tezinde, diferensiyel denklemlerin çözümlerine bakılmaksızın kararlılıklarının incelenebilmesi için genel bir yaklaşım geliştirilmiştir. Bu yaklaşım Lyapunov'un direkt metodu olarak adlandırılmaktadır. Bu yöntemde kullanılan Lyapunov fonksiyonları ile diferensiyel denklemlerin ve fark denklemlerinin çözümleri bulunmadan kararlılıklarının incelenmesi üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Zaman skalasında Lyapunov kararlılık teorisi ilk olarak Kaymakçalan (1992) çalışmasında incelenmiştir. Daha sonra Lyapunov fonksiyonları zaman skalasına Peterson ve Tisdell (2004) çalışması ile "I tipi Lyapunov fonksiyonları" olarak adlandırılarak genişletilmiştir. I tipi Lyapunov fonksiyonları kullanılarak Hoffacker ve Tisdell (2005) çalışmasında dinamik denklemlerin kararlılık ve asimptotik kararlılığı incelenmiştir. Bunların dışında zaman skalasında farklı dinamik denklemlerin kararlılıkları ve çeşitli kararlılık tipleri üzerine DaCunha (2005), Hovhannisyan (2006), Bohner ve Martynyuk (2007) gibi çalışmalar yapılmıştır. Zaman skalasında üstel kararlılık ve düzgün üstel kararlılık daha önce Peterson ve Raffoul (2005), Liu (2006), Li ve Hong (2011) gibi çalışmalarda incelenmiştir.

İkinci bölümde zaman skalası analizinde kullanılan temel tanım ve teoremler verilecektir. Ayrıca zaman skalasında üstel fonksiyonun genellemesi ve özellikleri verildikten sonra Lyapunov fonksiyonlarının genellemesi ve kararlılık ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Üçüncü bölümün ilk kısmında daha önce Peterson ve Raffoul (2005) çalışmasında verilmiş üstel ve düzgün üstel kararlılık şartlarından farklı kararlılık şartları verilecektir. İkinci kısımda ise varlık ve teklikleri Benchohra vd. (2006) kitabında incelenmiş olan impuls dinamik denklemlerin ψ-üstel, ψ-düzgün üstel ve ψ-global üstel kararlılıkları incelenecektir. Üçüncü kısımda ise Lyupanov'un direkt metodunun Carvalho (1991) tarafından difereniyel denklemlerde ve fark denklemlerinde genişletilmesi olan ikili dönüşümlerle (dichotomic maps) kararlılık zaman skalasına genişletilecek, bu dönüşümlerle dinamik denklemlerin kararlılık ve asimptotik kararlılıkları incelenecektir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölümde önce zaman skalasında temel tanımlar verilerek zaman skalası tanıtılıp, ardından zaman skalasında türev ve integral tanımları ve teknikleri verilecektir. Daha sonra da zaman skalasında tanımlanan Lyapunov fonksiyonları tanıtılacak ve bu fonksiyonlar yardımyla dinamik denklemlerin kararlılığı ile ilgili teoremler verilecektir.

2.1. Zaman Skalası Analizi

Zaman skalası; reel sayılar kümesinin boştan farklı kapalı herhangi bir alt kümesidir. Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$, Cantor kümesi, $[0,1] \cup [2,3]$ kapalı aralığı zaman skalası örnekleridir. Fakat, rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$, irrasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}'$, karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}$, $(0,1)$ açık aralığı zaman skalası değildir.

Bu çalışma boyunca bir zaman skalası $\mathbb{T}$ ile gösterilecektir (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.1.1. $\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ öyle ki

$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T}: s > t\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona t noktasının ileri sıçrama operatörü denir. Benzer şekilde; $t \in \mathbb{T}$ için $\rho(t) : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ öyle ki

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} \mid s < t\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona da t noktasının geri sıçrama operatörü denir (Bohner ve Peterson, 2001).

Bu tanımda, $\emptyset$ boş küme olmak üzere, $\sup\emptyset = \inf\mathbb{T}$ ve $\inf\emptyset = \sup\mathbb{T}$ olarak kabul edilmektedir. Eğer $\sigma(t) > t$ ise t noktası sağ yayılmış, $\sigma(t) = t$ ise t sağ yoğun, $\rho(t) < t$

ise t sol yayılmış, $\rho(t) = t$ ise t sol yoğun olarak adlandırılır. Ayrıca $\rho(t) < t < \sigma(t)$ ise t ayrık, $\rho(t) = t = \sigma(t)$ ise t yoğun noktadır denir (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.1.2. $\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ öyle ki

$$\mu(t) = \sigma(t) - t$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona tanecik (graininess) fonksiyonu denir (Bohner ve Peterson, 2001).

Yukarıdaki tanımlarda; $t \in \mathbb{T}$ olduğunda $\sigma(t)$ ve $\rho(t)$ değerleri de $\mathbb{T}$ kümesinin elemanıdır. Bunun sebebi zaman skalalarının $\mathbb{T}$ kümesinin $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin kapalı bir alt kümesi olmasıdır.

Tanım 2.1.3. Eğer $\mathbb{T}$ kümesi sol sıçramalı bir m maksimum noktasına sahip ise $\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T} - m$ dir. Aksi durumda ise $\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T}$ dir. Özet olarak;

$$\mathbb{T}^{\kappa} = \begin{cases} \mathbb{T} \backslash (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}], & \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T}, & \sup \mathbb{T} = \infty \end{cases}$$

(Bohner ve Peterson, 2001).

Örnek 2.1.4. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ durumlarında yukarıda verilen tanımlar incelenirse;

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise, herhangi bir $t \in \mathbb{T}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R} \mid s > t\} = \inf(t, \infty) = t \text{ dir.}$$

Benzer şekilde $\rho(t) = t$ olduğu da görülebilir. O halde $\mathbb{R}$ nin bütün noktaları yoğundur. Tanecik fonksiyonu ise;

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t - t \equiv 0 \text{ dır.}$$

(ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise, herhangi bir $t \in \mathbb{T}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z} \mid s < t\} = \inf(t+1, t+2, t+3, \ldots) = t+1 \text{ dir.}$$

Benzer şekilde $\rho(t) = t - 1$ olduğu da görülebilir. O halde $\mathbb{Z}$ nin bütün noktaları ayrıktır. Tanecik fonksiyonu ise;

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t + 1 - t = 1$$

dir (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.1.5. $t_0 \in \mathbb{T}$ ve $\{S(t) \ : \ t \in [t_0, \infty)\}$ aşağıdaki ifadeleri sağlayan önermeler ailesi olsun;

(i) $S(t_0)$ önermesi doğrudur.

(ii) $t \in [t_0, \infty)$ sağ sıçramalı ve $S(t)$ doğru ise $S(\sigma(t))$ de doğrudur.

(iii) $t \in [t_0, \infty)$ sağ yoğun ve $S(t)$ doğru ise t nin bir U komşuluğu vardır öyle ki her $s \in U \cap (t, \infty)$ için $S(s)$ önermesi doğrudur.

(iv) $t \in (t_0, \infty)$ sol yoğun ve her $s \in [t_0, t)$ için $S(s)$ doğru ise $S(t)$ doğrudur.

O halde $S(t)$ her $t \in [t_0, \infty)$ için doğrudur (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.1.6. $T \in \mathbb{T} \cap [0, \infty)$ olsun. $t \in \mathbb{T}$ için $t + \sigma^2(T) \in \mathbb{T}$ ise, $\mathbb{T}$ zaman skalası periyodiktir denir ve periyodu $\sigma^2(T)$ dir (Bohner ve Peterson, 2001).

2.2. Zaman Skalasında Türev

$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^\kappa$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ değeri için t nin bir U komşuluğu vardır öyle ki

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s| \quad , \forall s \in U$$

özelliğini sağlayan $f^\Delta(t)$ değerine, f fonksiyonunun t noktasındaki Δ-türevi denir.

Örnek 2.2.1. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, α sabit olmak üzere $f(t) = \alpha$ ile tanımlansın. O halde; herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 0 \cdot [\sigma(t) - s]| = |\alpha - \alpha| = 0 \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

her $s \in \mathbb{T}$ değeri için sağlanır ve $f^\Delta(t) = 0$ dır (Bohner ve Peterson, 2001).

Örnek 2.2.2. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t$ olarak tanımlansın. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 1 \cdot [\sigma(t) - s]| = |\sigma(t) - s - (\sigma(t) - s)| = 0 \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

her $s \in \mathbb{T}$ değeri için sağlanır ve $f^\Delta(t) = 1$ dir (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.2.3. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) f fonksiyonu t noktasında diferensiyellenebilir ise f fonksiyonu t noktasında süreklidir.

(ii) f fonksiyonu t noktasında diferensiyellenebilir ve t noktası sağ sıçramalı ise

$$f^{\Delta} = \frac{f(\sigma(t) - f(t)}{\mu(t)}$$

dir.

(iii) t noktası sağ yoğun ise f fonksiyonu t noktasında diferensiyellenebilirdir ancak ve ancak

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

değeri var ve sonludur. Bu durumda

$$f^{\Delta} = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

dir.

(iv) f fonksiyonu t noktasında diferensiyellenebilir ise

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t)$$

dir (Bohner ve Peterson, 2001).

Örnek 2.2.4. Tekrar $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ durumları ele alınırsa;.

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise, Teorem 2.2.3 (iii)'den, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ-diferensiyellenebilirdir ancak ve ancak

$$f'(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limiti vardır, bir başka deyişle ancak ve ancak f fonksiyonu t de diferensiyellenebilirdir. Bu durumda;

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

olur.

(ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise, Teorem 2.2.3 (ii)'den, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, Δ ileri fark operatörü olmak üzere;

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

ile Δ-diferensiyellenebilirdir (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.2.5. $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktalarında diferensiyellenebilir oldukları kabul edilsin.

(i) $(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$

(ii) α sabit bir sayı olmak üzere; $(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha (f)^{\Delta}(t)$

(iii) $(f.g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) g(t) + f(\sigma(t)) g^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) g(\sigma(t)) + f(t) g^{\Delta}(t)$

(iv) $f(t).f(\sigma(t)) \neq 0$ ise;

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t) f(\sigma(t))}$$

(v) $g(t).g(\sigma(t)) \neq 0$ ise;

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t) g(t) - f(t) g^{\Delta}(t)}{g(t).g(\sigma(t))}$$

(Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.2.6. α bir sabit ve $m \in \mathbb{N}$ olsun.

(i) $f(t) = (t-\alpha)^m$ ile tanımlanan f fonksiyonu için;

$$f^{\Delta}(t) = \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - \alpha)^{v} (t-\alpha)^{m-1-v}$$

(ii)

$$g(t) = \frac{1}{(t-\alpha)^m}$$

ile tanımlanan g fonksiyonu için;

$$g^{\Delta}(t) = -\sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{1}{(\sigma(t)-\alpha)^{m-\nu}(t-\alpha)^{\nu+1}}$$

(Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.2.7. $t \in \mathbb{T}$, $\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t))$ ve $\rho^2(t) = \rho(\rho(t))$ olmak üzere; her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma^n(t)$ ve $\rho^n(t)$ tanımlı ise; $f : \mathbb{T}^{\kappa^n} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu n kez diferensiyellenebilirdir denir (Bohner ve Peterson, 2001).

Örnek 2.2.8. Genel olarak f ve g fonksiyonları iki kez diferensiyellenebilir ise fg fonksiyonunun da iki kez diferensiyellenebildiği söylenemez.

$$(fg)^{\Delta} = f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta}$$

incelenirse, f ve g fonksiyonları ikinci mertebeden diferensiyellenebilir ise

$$\begin{aligned} (fg)^{\Delta\Delta} &= (f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta})^{\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta}g + f^{\Delta\sigma}g^{\Delta} + f^{\sigma\Delta}g^{\Delta} + f^{\sigma\sigma}g^{\Delta\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta}g + (f^{\Delta\sigma} + f^{\sigma\Delta})g^{\Delta} + f^{\sigma\sigma}g^{\Delta\Delta} \end{aligned}$$

elde edilir (Bohner ve Peterson, 2001).

Örnek 2.2.9. $h > 0$ olmak üzere $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ olsun. $t \in \mathbb{T}$ için;

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} \ : \ s > t\} = \inf\{t + hn \ : \ n \in \mathbb{N}\} = t + h$$

ve benzer şekilde $\rho(t) = t - h$ bulunur. $\mathbb{T}$ nin her noktası izole nokta olduğu için;

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t + h - t = h$$

elde edilir, yani tanecik fonksiyonu sabittir. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için;

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}\ .$$

f fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi araştırılırsa;

$$\begin{aligned} f^{\Delta\Delta}(t) &= \frac{f^{\Delta}(\sigma(t)) - f^{\Delta}(t)}{\mu(t)} \\ &= \frac{f^{\Delta}(t+h) - f^{\Delta}(t)}{h} \\ &= \frac{\frac{f(t+2h)-f(t+h)}{h} - \frac{f(t+h)-f(t)}{h}}{h} \\ &= \frac{f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)}{h^2} \end{aligned}$$

elde edilir (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.2.10 (Ortalama Değer Teoremi)**.** f, $[a,b]$ aralığında sürekli, $[a,b)$ aralığında $\Delta-$ diferensiyellenebilir ise

$$f^{\Delta}(\tau) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq f^{\Delta}(\xi)$$

olacak şekilde $\xi, \tau \in [a,b)$ vardır (Guseinov, 2003).

2.3. Zaman Skalasında İntegral

Bu kısımda zaman skalasında Δ-integral ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.3.1. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun; $\mathbb{T}$ nin tüm sağ yoğun noktalarında sağ limit var ve $\mathbb{T}$ nin sol yoğun noktalarındaki sol limit değeri var ve bu limit değerleri sonlu ise bu f fonksiyonuna düzenli (regulated) denir (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.3.2. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun; $\mathbb{T}$ nin tüm sağ yoğun noktalarında sürekli ve $\mathbb{T}$ nin sol yoğun noktalarındaki sol limit değeri var ve bu limit değeri sonlu ise bu fonksiyona sağ yoğun sürekli denir. Çalışma boyunca sağ yoğun sürekli fonksiyonların kümesi

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ile gösterilecektir. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının n-inci mertebeden türevleri var ve sürekli iseler, bu fonksiyonların kümesi;

$$C_{rd}^{(n)} = C_{rd}^{(n)}(\mathbb{T}) = C_{rd}^{(n)}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ile gösterilir (Bohner ve Peterson, 2001).

Düzenli ve sağ yoğun sürekli fonksiyonların bazı sonuçları aşağıdaki teoremde ele alınmıştır.

Teorem 2.3.3. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ olsun.

(i) f sürekli ise f sağ yoğun süreklidir.

(ii) f sağ yoğun sürekli ise f düzenlidir.

(iii) İleri sıçrama operatörü $\sigma(t)$ sağ yoğun süreklidir.

(iv) f sağ yoğun sürekli veya düzenli ise f^σ da aynı özelliklidir.

(v) f sürekli olsun. $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu düzenli veya sağ yoğun sürekli ise $f \circ g$ de aynı özelliğe sahiptir (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.3.4. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^\kappa$ üzerinde Δ-türevlenebilir ve her $t \in \mathbb{T}^\kappa$ için $F^\Delta(t) = f(t)$ ise, F fonksiyonuna f nin Δ-antitürevi veya ilkeli denir (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.3.5. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun Δ-antitürevi varsa, f ye Δ-integrallenebilir fonksiyon denir. Bu durumda, $a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere f nin a'dan b'ye Δ-integrali

$$\int_a^b f(t)\, \Delta t = F(b) - F(a)$$

olarak tanımlanır (Bohner ve Peterson, 2001).

Örnek 2.3.6. $a \neq 1$ sabit bir sayı ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için

$$\int a^t \Delta t$$

integrali hesaplanırsa;

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^\Delta = \Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = \frac{a^{t+1} - a^t}{a-1} = a^t$$

olduğundan;

$$\int a^t\, \Delta t = \left(\frac{a^t}{a-1}\right) + C$$

olur (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.3.7. Her sağ yoğun sürekli fonksiyonun antitürevi vardır (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.3.8. $f \in C_{rd}$ ve $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ ise

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\ \Delta\tau = \mu(t) f(t)$$

dir (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.3.9. $f^{\Delta}(t) \geq 0$ ise f artandır (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.3.10. $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{rd}$ olmak üzere;

(i) $\int_a^b [f(t) + g(t)]\ \Delta t = \int_a^b f(t)\ \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t$;

(ii) $\int_a^b (\alpha f(t))\ \Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\ \Delta t$;

(iii) $\int_a^b f(t)\ \Delta t = -\int_b^a f(t)\ \Delta t$;

(iv) $\int_a^b f(t)\ \Delta t = \int_a^c f(t)\ \Delta t + \int_c^b f(t)\ \Delta t$;

(v) $\int_a^b f(\sigma(t)) g^{\Delta}(t)\ \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t) g(t)\ \Delta t$;

(vi) $\int_a^b f(t) g^{\Delta}(t)\ \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t) g(\sigma(t))\ \Delta t$;

(vii) $\int_a^a f(t)\ \Delta t = 0$;

(viii) $[a, b)$ aralığında $|f(t)| \leq g(t)$ ise

$$\left| \int_a^b f(t)\ \Delta t \right| \leq \int_a^b g(t)\ \Delta t;$$

(ix) Her $a \leq t < b$ için $f(t) \geq 0$ ise

$$\int_a^b f(t)\ \Delta t \geq 0$$

dır (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.3.10'un (v) ve (vi) şıkları kısmi integrasyon formülünü vermektedir. Ayrıca Teorem 2.3.10'un bütün şıkları f ve g fonksiyonlarının düzenli olma durumunda da geçerlidir.

Teorem 2.3.11. $a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{rd}$ olsun.

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \int_a^b f(t)\,dt.$$

(ii) $[a,b]$ aralığı sadece izole noktalardan oluşuyorsa

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b)} \mu(t) f(t) & ,a<b \\ 0 & ,a=b \\ -\sum_{t\in[b,a)} \mu(t) f(t) & ,a>b. \end{cases}$$

(iii) $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk:\ k \in \mathbb{Z}\}$, $h>0$ ise

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h & ,a<b \\ 0 & ,a=b \\ -\sum_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh)h & ,a>b. \end{cases}$$

(iv) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t) & ,a<b \\ 0 & ,a=b \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t) & ,a>b. \end{cases}$$

olur (Bohner ve Peterson, 2001).

2.4. Genelleştirilmiş Üstel Fonksiyon

Bu kısımda Hilger karmaşık sayıları üzerinde silindir dönüşümü yaparak üstel fonksiyonların zaman skalasında genelleştirilmesi ve zaman skalasında çok kullanılan bazı eşitsizlikler verilmiştir.

Tanım 2.4.1. $h > 0$ olmak uzere, Hilger karmaşık sayıları, Hilger ekseni, Hilger yedek ekseni ve Hilger sanal çemberi sırasıyla

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}_h &: = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq -\frac{1}{h} \right\}, \\
\mathbb{R}_h &: = \left\{ z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R} \text{ ve } z > -\frac{1}{h} \right\}, \\
\mathbb{A}_h &: = \left\{ z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R} \text{ ve } z < -\frac{1}{h} \right\}, \\
\mathbb{I}_h &: = \left\{ z \in \mathbb{C}_h : \left| z + \frac{1}{h} \right| = \frac{1}{h} \right\}
\end{aligned}
$$

olarak tanımlıdır. $h = 0$ için $\mathbb{C}_0 := \mathbb{C}$, $\mathbb{R}_0 := \mathbb{R}$, $\mathbb{I}_0 := i\mathbb{R}$ ve $\mathbb{A}_0 := \emptyset$ dir (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.4.2. $h \geq 0$ olmak üzere, $\xi_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h := \{z \in \mathbb{C} : -\pi/h < \operatorname{Im}(z) \leq \pi/h\}$ silindir dönüşümü $h > 0$ için

$$\xi_h(z) = \frac{1}{h} \log(1 + zh)$$

$h = 0$ için ise $\xi_0(z) = z$ olarak tanımlıdır. Ters silindir dönüşümü ise $h > 0$ için

$$\xi_h^{-1}(z) = \frac{1}{h}\left(e^{zh} - 1\right)$$

$h = 0$ için $\xi_0^{-1}(z) = z$ şeklindedir (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.4.3. $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna her $t \in \mathbb{T}^\kappa$ için

$$1 + \mu(t) p(t) \neq 0$$

ifadesini sağlıyorsa regresif denir ve sağ yoğun sürekli regresif fonksiyonlarin kümesi

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathbb{T}) = \mathfrak{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}) := \{p \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}) : \ 1 + \mu(t) p(t) \neq 0 \text{ her } t \in \mathbb{T}^\kappa\}$$

olarak tanımlıdır (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.4.4. Pozitif regresif fonksiyonlarin kümesi

$$\mathfrak{R}^+ = \mathfrak{R}^+(\mathbb{T}) = \mathfrak{R}^+(\mathbb{T}, \mathbb{R}) := \{p \in \mathfrak{R} : \ 1 + \mu(t) p(t) > 0 \text{ her } t \in \mathbb{T}^\kappa\}$$

olarak tanımlıdır (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.4.5. $p,r \in \Re$ olmak üzere her $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için

$$(p \oplus q)(t) = p(t) + q(t) + \mu(t)\, p(t)\, q(t)$$

olarak tanımlanan $\oplus$ işlemine göre $\Re$ abel grubudur. Bu grup regresif grup olarak adlandırılır (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.4.6. $\Re$ üzerinde $\ominus$ işlemi her $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için

$$(\ominus p)(t) := \frac{-p(t)}{1 + \mu(t)\, p(t)}$$

olarak tanımlıdır (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.4.7. $p \in \Re(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ olmak üzere $s,t \in \mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde üstel fonksiyon

$$e_p(t,s) = \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(t)}(p(\tau))\, \Delta\tau\right)$$

olarak tanımlıdır (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.4.8. Eğer $p \in \Re$ ise,

$$x^{\Delta} = p(t)x \tag{2.1}$$

birinci dereceden lineer dinamik denklemi regresiftir denir (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.4.9. (2.1) denklemi regresif, $t_0 \in \mathbb{T}$ ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x^{\Delta} = p(t)x, \quad x(t_0) = x_0$$

başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$x(t) = e_p(t,t_0)\, x_0$$

olarak bulunur (Bohner ve Peterson, 2001).

Aşağıdaki teoremde üstel fonksiyonun bazı özellikleri özetlenmiştir.

Teorem 2.4.10. Eğer $p,q \in \Re$ ise, $t,s,r \in \mathbb{T}$ için

(i) $e_0(t,s) \equiv 1$ ve $e_p(t,t) \equiv 1$;

(ii) $e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)\, p(t))\, e_p(t,s)$;

(iii) $1 / e_p(t,s) = e_{\ominus p}(t,s)$;

(iv) $e_p(t,s) = 1 / e_p(s,t) = e_{\ominus p}(s,t)$;

(v) $e_p(t,s)\, e_p(s,r) = e_p(t,r)$;

(vi) $e_p(t,s)\, e_q(t,s) = e_{p \oplus q}(t,s)$;

(vii) $e_p(t,s) / e_q(t,s) = e_{p \ominus q}(t,s), \quad p \ominus q := p \oplus (\ominus q)$
eşitlikleri vardır (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.4.11. $y, f \in C_{rd}$ ve $p \in \mathfrak{R}^+$ olsun. Bu durumda her $t \in \mathbb{T}$ için

$$y^{\Delta}(t) \leq p(t)\, y(t) + f(t)$$

eşitsizliği sağlanırsa her $t \in \mathbb{T}$ için

$$y(t) \leq y(t_0)\, e_p(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} e_p(t, \sigma(t))\, f(\tau)\, \Delta\tau$$

elde edilir (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.4.12 (Bernoulli Eşitsizliği). $\alpha \in \mathfrak{R}^+$ olmak üzere $\alpha \in \mathbb{R}$ ise, her $t \geq s$ için

$$e_{\alpha}(t,s) \geq 1 + \alpha(t-s), \qquad t \geq t_0$$

olur.

Teorem 2.4.13 (Gronwall Eşitsizliği). $y, f \in C_{rd}$ ve $p \in \mathfrak{R}^+$ olmak üzere $p \geq 0$ olsun. Bu durumda her $t \in \mathbb{T}$ için

$$y^{\Delta}(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^{t} y(\tau)\, p(\tau)\, \Delta\tau$$

eşitsizliği sağlanırsa her $t \in \mathbb{T}$ için

$$y(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^{t} e_p(t, \sigma(t))\, f(\tau)\, p(\tau)\, \Delta\tau$$

elde edilir (Bohner ve Peterson, 2001).

2.5. Zaman Skalasında Lyapunov Fonksiyonları ve Kararlılık

Bu kısımda zaman skalasında Lyapunov fonksiyonları ve kararlılık ile ilgili tanımlar verilmiştir. Sonrasında, $t, t_0 \in \mathbb{T}$ ve D kompakt bir küme olmak üzere

$$x^{\Delta} = f(t,x), \quad t \geq t_0, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n \tag{2.2}$$

birinci mertebeden dinamik denkleminin, Hoffacker ve Tisdell (2005) ve Peterson ve Raffoul (2005) çalışmalarında ispatlanmış olan, aşikar çözümünün kararlılık teoremleri ifade edilmiştir.

Tanım 2.5.1. $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, $V_i(0) = 0$ ve her bir $V_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sürekli diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} V_i(x_i) = V_1(x_1) + \ldots + V_n(x_n)$$

fonksiyonuna I tipi Lyapunov fonksiyonu denir (Peterson ve Tisdell, 2004).

Tanım 2.5.2. V Lyapunov fonksiyonunun Δ türevi

$$[V(x(t))]^{\Delta} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{[V_i(x_i + \mu(t) f_i(t,x)) - V_i(x_i)]}{\mu(t)} & \mu(t) \neq 0, \\ \nabla V(x) . f(t,x) & \mu(t) = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır (Peterson ve Tisdell, 2004).

Tanım 2.5.3. $\phi : [0,r] \to [0,\infty)$ fonksiyonu iyi tanımlı, sürekli ve $\phi(0) = 0$ olmak üzere $[0,r]$ üzerinde kesin artan ise ϕ fonksiyonuna κ sınıfı fonksiyon denir (Hoffacker ve Tisdell, 2005).

Tanım 2.5.4. (2.2) denkleminin aşikar çözümü $\varepsilon > 0$ ve $t_0 \in \mathbb{T}$ için $\delta > 0$ sayısı, bütün $t \geq t_0$ lar için verilen denklemin $|x_0| < \delta$ başlangıç şartı altındaki $x(t)$ çözümü $|x(t)| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde ise kararlıdır (Sivasundaram, 2002).

Tanım 2.5.5. (2.2) denkleminin aşikar çözümü kararlı ve $\lim\limits_{t \to \infty} |x(t)| = 0$ ise asimptotik kararlıdır (Sivasundaram, 2002).

Hoffacker ve Tisdell (2005) çalışmasında (2.2) denkleminin kararlılığı ile ilgili aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır.

Teorem 2.5.6. Denge çözümünün sıfir komşuluğunda $[V(x(t))]^{\Delta} \leq 0$ olacak şekilde sürekli türevlenebilir, pozitif tanımlı bir V fonksiyonu varsa (2.2) denkleminin $x = 0$ denge çözümü kararlıdır (Hoffacker ve Tisdell, 2005).

Teorem 2.5.7. Denge çözümünün sıfir komşuluğunda $[V(x(t))]^{\Delta} < 0$ olacak şekilde sürekli türevlenebilir, pozitif tanımlı bir V fonksiyonu varsa (2.2) denkleminin $x = 0$ denge çözümü asimptotik kararlıdır (Hoffacker ve Tisdell, 2005).

(2.2) denkleminin üstel kararlılığı ile ilgili Peterson ve Raffoul (2005) çalışmasında aşağıdaki teoremler verilmiştir.

Teorem 2.5.8. Farz edelim ki $D \subset \mathbb{R}^n$ orijin noktasını içersin ve her $(t,x) \in \mathbb{T}_{t_0}^{+} \times D$ için I tipi Lyapunov fonksiyonu $V : \mathbb{T}_{t_0}^{+} \times D \to [0,\infty)$ var olsun. $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ ve $\lambda_3(t)$ pozitif fonksiyonlar, $\lambda_1(t)$ azalmayan fonksiyon, p,q,r pozitif sabitler, L negatif olmayan bir sabit ve $\delta > M := \inf_{t \geq 0} \lambda_3(t) \big/ [\lambda_2(t)]^{r/q} > 0$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(t)\|x(t)\|^p &\leq V(t,x) \leq \lambda_2(t)\|x(t)\|^q, \\
V^{\Delta}(t,x) &\leq \frac{-\lambda_3(t)\|x(t)\|^r - L(M \ominus \delta)\, e_{\ominus\delta}(t,0)}{1 + M\mu(t)}, \\
V(t,x) - V^{r/q}(t,x) &\leq 0
\end{aligned}
$$

ise (2.2) sisteminin aşikar çözümü $[0,\infty)$ da üstel kararlıdır (Peterson ve Raffoul, 2005).

Not 2.5.9. Teorem 2.5.8 te $\lambda_i(t) = \lambda_i$, $i = 1,2,3$ pozitif sabitler ise (2.2) sisteminin aşikar çözümü $[0,\infty)$ da düzgün üstel kararlıdır (Peterson ve Raffoul, 2005).

Teorem 2.5.10. Farz edelim ki $D \subset \mathbb{R}^n$ orijin noktasını içersin ve her $(t,x) \in \mathbb{T}_{t_0}^{+} \times D$ için I tipi Lyapunov fonksiyonu $V : \mathbb{T}_{t_0}^{+} \times D \to [0,\infty)$ var olsun. $\lambda_1, \lambda_2, p, \delta$ pozitif sabitler, L negatif olmayan bir sabit ve $0 < \varepsilon < \min\{\lambda_3, \delta\}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\lambda_1\|x(t)\|^p &\leq V(x), \\
V^{\Delta}(t,x) &\leq \frac{-\lambda_3 V(x) - L(\varepsilon \ominus \delta)(t)\, e_{\ominus\delta}(t,0)}{1 + \varepsilon\mu(t)}
\end{aligned}
$$

ise (2.2) sisteminin aşikar çözümü $[0,\infty)$ da düzgün üstel kararlıdır (Peterson ve Raffoul, 2005).

3. BULGULAR

Bu bölümde zaman skalasında verilen dinamik denklemin üstel ve düzgün üstel kararlılık şartlları ile ilgili teoremler ifade ve ispat edilecektir. Daha sonra zaman skalasında verilen impuls dinamik denklem sisteminin aşikar çözümünün ψ-üstel kararlılığı, ψ-düzgün üstel kararlılığı ve ψ-global üstel kararlılığı incelenecektir. Son olarak da zaman skalasında ikili dönüşümler tanımlanarak Lyapunov'un direkt metodunun genişletilmesi yapılacak ve bu metotla verilen dinamik denklemin kararlılığı ve asimptotik kararlılığı üzerine teoremler ifade ve ispat edilecektir.

3.1. Üstel Kararlılık

Zaman skalasında üstel kararlılığı inceleyen geçmiş çalışmalarda dinamik denklemlerin aşikar çözümlerinin üstel kararlılıkları için koşullar verilmiştir. Bu kısımda (2.2) birinci mertebeden dinamik denkleminin aşikar çözümünün kararlılığı incelenmiş ve kararlılık koşulları ile ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir. (2.2) denklemi başlangıç koşulu eklenerek $t, t_0 \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$$x^{\Delta} = f(t,x), \quad t \geq t_0 \tag{3.1}$$

ve

$$x(t_0) = x_0, \quad t_0 \geq 0, \ x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{3.2}$$

olarak tekrar yazılsın. Ayrıca her $t \in \mathbb{T}$, $t \geq t_0$ için $f(t,0) = 0$ ve $0 \in \mathbb{T}$ olduğu kabul edilecektir.

Tanım 3.1.1. $[0,\infty)$ üzerinde, $\|.\|$, $\mathbb{R}^n$ de Öklid normunu belirtmek üzere, (3.1)-(3.2) başlangıç değer probleminin herhangi bir $x(t,t_0,x_0)$ çözümü için $t_0 \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x(t,t_0,x_0)\| \leq C(\|x_0\|,t_0)\,(e_{\ominus M}(t,t_0))^d, \qquad \forall t \in [t_0,\infty) \tag{3.3}$$

olacak şekilde bir pozitif d sabit sayısı, $C \in \mathbb{R}^+$ sabiti, ve $M > 0$ varsa (3.1) sisteminin aşikar çözümü üstel kararlıdır. $[0,\infty)$ üzerinde, C, t_0'a bağlı değilse (3.1) sisteminin aşikar çözümü düzgün üstel kararlıdır (Peterson ve Raffoul, 2005).

Teorem 3.1.2. Farz edelim ki her $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ için I tipi Lyapunov fonksiyonu $V : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ var olsun. $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ ve $\lambda_3(t)$ pozitif fonksiyonlar, $\lambda_1(t)$ azalmayan fonksiyon, p,q ve M pozitif sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} \lambda_1(t)\|x\|^p &\leq V(x) \leq \lambda_2(t)\|x\|^q, && (3.4)\\ V^{\Delta}(t,x) &\leq -\lambda_3(t)\|x\|^q, && (3.5)\\ -\frac{\lambda_3(t)}{\lambda_2(t)} &\leq \ominus M && (3.6) \end{aligned}$$

ise (3.1) sisteminin aşikar çözümü $[0,\infty)$ da üstel kararlıdır.

Kanıt. x, (3.1)-(3.2) sisteminin çözümü olsun. (3.4) eşitsizliğinden

$$V(x) \leq \lambda_2(t)\|x\|^q,$$

$$\frac{1}{\lambda_2(t)}V(x) \leq \|x\|^q \tag{3.7}$$

yazılabilir ve (3.5)

$$V^{\Delta}(t,x) \leq -\lambda_3(t)\|x\|^q,$$

eşitsizliği (3.7) eşitsizliğinden yararlanarak

$$V^{\Delta}(t,x) \leq -\lambda_3(t)\|x\|^q \leq -\frac{\lambda_3(t)}{\lambda_2(t)}V(x) \tag{3.8}$$

olarak yazılabilir. (3.8) eşitsizliği, (3.6) şartı kullanılarak

$$V^{\Delta}(t,x) \leq (\ominus M)V(x) \tag{3.9}$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 2.4.11 kullanılarak, (3.9) eşitsizliği,

$$V(x(t)) \leq V(x_0)\, e_{\ominus M}(t,t_0) \tag{3.10}$$

eşitsizliğine dönecektir. (3.4) eşitsizliği kullanılarak, (3.10) eşitsizliği yeniden yazılırsa,

$$\lambda_1(t)\|x\|^p \leq V(x(t)) \leq V(x_0)\, e_{\ominus M}(t,t_0) \tag{3.11}$$

elde edilir. Her $t \geq t_0$ için (3.11) eşitsizliğinin iki tarafi da $\lambda_1^{-1}(t)$ ile çarpılırsa,

$$\|x\|^p \leq \lambda_1^{-1}(t)\, V(x_0)\, e_{\ominus M}(t,t_0) \tag{3.12}$$

ve eşitsizliğin her iki tarafının da p. dereceden kökü alınırsa,

$$\|x\| \leq \lambda_1^{-1/p}(t)\left(V(x_0)\, e_{\ominus M}(t,t_0)\right)^{1/p} \tag{3.13}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylelikle Tanım 3.1.1 e göre (3.1)-(3.2) sisteminin üstel kararlılığı gösterilmiş olur. □

Teorem 3.1.3. Farz edelim ki her $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ için I tipi Lyapunov fonksiyonu $V : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ var olsun. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, p, q$ ve M pozitif sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} \lambda_1\|x\|^p &\leq V(x) \leq \lambda_2\|x\|^q, && (3.14)\\ V^{\Delta}(t,x) &\leq -\lambda_3\|x\|^q, && (3.15)\\ -\frac{\lambda_3}{\lambda_2} &\leq \ominus M && (3.16) \end{aligned}$$

ise (3.1) sisteminin aşikar çözümü $[0,\infty)$ da düzgün üstel kararlıdır.

Kanıt. x, (3.1)-(3.2) sisteminin çözümü olsun. (3.14) eşitsizliğinden

$$V(x) \leq \lambda_2\|x\|^q,$$

$$\frac{1}{\lambda_2}V(x) \leq \|x\|^q \tag{3.17}$$

yazılabilir ve (3.15)

$$V^{\Delta}(t,x) \leq -\lambda_3\|x\|^q,$$

eşitsizliği (3.17) eşitsizliğinden yararlanarak

$$V^{\Delta}(t,x) \leq -\lambda_3\|x\|^q \leq -\frac{\lambda_3}{\lambda_2}V(x) \tag{3.18}$$

olarak yazılabilir. (3.18) eşitsizliği, (3.16) şartı kullanılarak

$$V^{\Delta}(t,x) \leq (\ominus M)V(x) \tag{3.19}$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 2.4.11 kullanılarak, (3.19) eşitsizliği,

$$V(x(t)) \leq V(x_0)\, e_{\ominus M}(t,t_0) \tag{3.20}$$

eşitsizliğine dönecektir. (3.14) eşitsizliği kullanılarak (3.20) eşitsizliği yeniden yazılırsa,

$$\lambda_1 \|x\|^p \leq V(x(t)) \leq V(x_0)\, e_{\ominus M}(t,t_0) \tag{3.21}$$

bulunur. Her $t \geq t_0$ için (3.21) eşitsizliğinin iki tarafi da λ_1^{-1} ile çarpılırsa,

$$\|x\|^p \leq \lambda_1^{-1} V(x_0)\, e_{\ominus M}(t,t_0) \tag{3.22}$$

ve eşitsizliğin her iki tarafının da p. dereceden kökü alınırsa,

$$\|x\| \leq \lambda_1^{-1/p} \left(V(x_0)\, e_{\ominus M}(t,t_0)\right)^{1/p} \tag{3.23}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylelikle Tanım 3.1.1 e göre (3.1)-(3.2) sisteminin düzgün üstel kararlılığı gösterilmiş olur. □

Teorem 3.1.4. Farz edelim ki her $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ için I tipi Lyapunov fonksiyonu $V : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ var olsun. λ_1, λ_2, p pozitif sabitler olmak üzere

$$\lambda_1 \|x\|^p \leq V(x), \tag{3.24}$$

$$V^{\Delta}(t,x) \leq (\ominus\lambda_2) V(x) \tag{3.25}$$

ise (3.1) sisteminin aşikar çözümü $[0,\infty)$ da düzgün üstel kararlıdır.

Kanıt. x, (3.1)-(3.2) sisteminin çözümü olsun. (3.25) eşitsizliğine Teorem 2.4.11 uygulanırsa,

$$V(x(t)) \leq V(x_0)\, e_{\ominus\lambda_2}(t,t_0) \tag{3.26}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.24) eşitsizliği kullanarak (3.26) eşitsizliği yeniden yazılırsa,

$$\lambda_1 \|x\|^p \leq V(x(t)) \leq V(x_0)\, e_{\ominus\lambda_2}(t,t_0) \tag{3.27}$$

bulunur. Her $t \geq t_0$ için (3.27) eşitsizliğinin iki tarafı da λ_1^{-1} ile çarpılırsa,

$$\|x\|^p \leq \lambda_1^{-1} V(x_0)\, e_{\ominus\lambda_2}(t,t_0) \tag{3.28}$$

ve eşitsizliğin her iki tarafının da p. dereceden kökü alınırsa,

$$\|x\| \leq \lambda_1^{-1/p} \left(V(x_0)\, e_{\ominus\lambda_2}(t,t_0)\right)^{1/p} \tag{3.29}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylelikle Tanım 3.1.1 e göre (3.1)-(3.2) sisteminin düzgün üstel kararlılığı gösterilmiş olur. □

Örnek 3.1.5. $a > 0$ sabit sayı, $x_0 \in \mathbb{R}$ ve $t_0 \in [0,\infty)$ olmak üzere,

$$x^\Delta = -ax, \quad x(t_0) = x_0 \tag{3.30}$$

başlangıç değer problemi incelensin. Eğer her $t \in [0,\infty)$ için

$$a(a\mu(t) - 2) \leq -K \tag{3.31}$$

olacak şekilde $K > 0$ sabiti varsa (3.30) denklemi düzgün üstel kararlıdır.

Kanıt. Örnek 3.1.5 de ki varsayımlar altında Teorem 3.1.4 ün şartlarının sağlandığı gösterilecektir. $D = \mathbb{R}$ ve I tipi Lyapunov fonksiyonu $V(x) = x^2$ olarak seçilsin. Bu durumda (3.14) koşulları $p = q = 2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ için sağlanır.
Zaman skalasında çarpım kuralı $(fg)^\Delta = f^\Delta g + f^\sigma g^\Delta$ kullanılarak V^Δ hesaplanırsa,

$$V^\Delta(t,x) = \left(x^2\right)^\Delta = x(t)x^\Delta(t) + x^\Delta(t)x(\sigma(t)) \tag{3.32}$$

bulunur. $f(\sigma(t)) = \mu(t) f^\Delta(t) + f(t)$ formülü kullanılarak,

$$V^\Delta(t,x) = x^\Delta(t)\Big(2x(t) + \mu(t)x^\Delta(t)\Big) \tag{3.33}$$

elde edilir. x^Δ yerine yazılırsa,

$$V^\Delta(t,x) = -ax(2x - \mu(t)ax) \tag{3.34}$$

buradan da,

$$V^\Delta(t,x) = -x^2 a(2 - a\mu(t)) \tag{3.35}$$

sonucu bulunur. (3.31) eşitsizliğinden faydalanarak,

$$V^{\Delta}(t,x) = -a(2-a\mu(t))x^2 \leq -Kx^2 = -K\|x\|^2 \tag{3.36}$$

bulunur. Buna göre $p=q=2$, $\lambda_1=\lambda_2=1$ için (3.14) ve (3.15) hipotezleri sağlanır ve (3.30) denkleminin aşikar çözümü düzgün üstel kararlıdır. (3.30) denkleminin $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ve $\mathbb{T}=h\mathbb{N}_0=\{0,h,2h,\ldots\}$ özel durumları incelenirse;

Durum 1: $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ için $\mu(t)=0$ olur ve (3.31) eşitsizliği $-2a \leq -K$ eşitsizliğine indirgenir. Buna göre $0<K\leq 2a$ için (3.30) denkleminin aşikar çözümü düzgün üstel kararlıdır.

Durum 2: $\mathbb{T}=h\mathbb{N}_0=\{0,h,2h,\ldots\}$ için $\mu(t)=h$ olur ve (3.31) eşitsizliği $ha^2-2a\leq -K$ eşitsizliğine indirgenir. $\frac{2}{h}>a>0$ olarak kabul edilirse $ha^2-2a\leq -K$ koşulunu sağlayan $K>0$ bulunabilir. Bu durumda (3.30) denkleminin aşikar çözümü düzgün üstel kararlıdır. □

Örnek 3.1.6. $a,b>0$ sabit sayı, $x_0,y_0\in\mathbb{R}$ ve $t_0\in[0,\infty)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x^{\Delta} &= -ax+by, \\ y^{\Delta} &= -bx-ay, \\ (x(t_0),y(t_0)) &= (x_0,y_0) \end{aligned} \tag{3.37}$$

başlangıç değer problemi incelensin. Eğer her $t\in[0,\infty)$ için

$$\left(\left(a^2+b^2\right)\mu(t)-2a\right) \leq -K \tag{3.38}$$

olacak şekilde $K>0$ sabiti varsa (3.37) sistemi düzgün üstel kararlıdır.

Kanıt. Örnek 3.1.6 da ki varsayımlar altında Teorem 3.1.4 ün şartlarının sağlandığı gösterilecektir. $D=\mathbb{R}$ ve I tipi Lyapunov fonksiyonu $V(x)=x^2+y^2$ olarak seçilsin. Bu durumda (3.24) koşulları $p=2$, $\lambda_1=1$ için sağlanır.

Zaman skalasında çarpım kuralı kullanılarak V^{Δ} hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} V^{\Delta}(t,x,y) &= \left(x^2+y^2\right)^{\Delta} \\ &= x(t)x^{\Delta}(t)+x^{\Delta}(t)x(\sigma(t))+y^{\Delta}(t)y(\sigma(t))+y(t)y^{\Delta}(t) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$V^{\Delta}(t,x,y) = x^{\Delta}(t)\left(2x(t)+\mu(t)x^{\Delta}(t)\right)+y^{\Delta}(t)\left(2y(t)+\mu(t)y^{\Delta}(t)\right) \tag{3.39}$$

elde edilir. x^{Δ} ve y^{Δ} yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
V^{\Delta}(t,x,y) &= (-ax+by)(2x+\mu(t)(-ax+by)) \\
&\quad +(-bx-ay)(2y+\mu(t)(-bx-ay)) \\
&= -2ax^2+2bxy+\mu(t)\left(a^2x^2+b^2y^2-2axby\right) \\
&\quad -2ay^2-2bxy+\mu(t)\left(a^2y^2+b^2x^2-2axby\right) \\
&= -2a\left(x^2+y^2\right)+\mu(t)\left(a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2\right) \\
&= -2a\left(x^2+y^2\right)+\mu(t)\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right). \qquad (3.40)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$V^{\Delta}(t,x,y) = -\left(x^2+y^2\right)\left(2a-\mu(t)\left(a^2+b^2\right)\right) \qquad (3.41)$$

bulunur. (3.38) eşitsizliğinden faydalanarak,

$$V^{\Delta}(t,x,y) = -\left(x^2+y^2\right)\left(2a-\mu(t)\left(a^2+b^2\right)\right) \leq -\left(x^2+y^2\right)K \qquad (3.42)$$

elde edilir. Buradan,

$$V^{\Delta}(t,x,y) \leq -KV(t,x,y) \qquad (3.43)$$

bulunur. Buna göre $p=2$, $\lambda_1=1$ durumunda Teorem 3.1.4 için (3.24) ve (3.25) hipotezleri sağlanır ve (3.37) sisteminin aşikar çözümü düzgün üstel kararlıdır. (3.37) sisteminin $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ve $\mathbb{T}=h\mathbb{N}_0=\{0,h,2h,\ldots\}$ özel durumları incelenirse;

Durum 1: $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ için $\mu(t)=0$ olur ve (3.38) eşitsizliği $-2a \leq -K$ eşitsizliğine indirgenir. Buna göre $0<K\leq 2a$ için (3.37) sisteminin aşikar çözümü düzgün üstel kararlıdır.

Durum 2: $T=h\mathbb{N}_0=\{0,h,2h,\ldots\}$ için $\mu(t)=h$ olur ve (3.38) eşitsizliği $\left(h\left(a^2+b^2\right)-2a\right)\leq -K$ eşitsizliğine indirgenir. $a(2-ha)>hb^2$ olarak kabul edilirse $\left(h\left(a^2+b^2\right)-2a\right)\leq -K$ koşulunu sağlayan $K>0$ bulunabilir. Bu durumda (3.37) sisteminin aşikar çözümü düzgün üstel kararlıdır. □

3.2. İmpuls Dinamik Denklemlerde ψ- Üstel Kararlılık

Son yıllarda zaman skalasında impuls dinamik denklemler üzerine pek çok çalışma Lakshmikantham (2002), Benchohra vd. (2004), Benchohra vd. (2006), Kaufmann (2008), Lupescu (2010) yapılmıştır. Zaman skalasında impuls dinamik sistemlerin kararlılığı teorisi üzerine yapılan yayınlarda Ma (2008) çalışmasında impuls sistemler için kararlılık kriterleri verilmiş ve Yaşar (2007) çalışmasında impuls dinamik sistemlerin ψ-düzgün kararlılığı üzerine çalışılmıştır.

Bu bölümde $\mathbb{T}$ sonlu sayıda sağ yoğun t_k impuls noktalarını içeren zaman skalası, $f:[0,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ lineer olmayan ve $(t_{k-1},t_k]\times\mathbb{R}^n$ de sağ yoğun sürekli fonksiyon, $0\le t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n<t$ impuls etkisinin sabitlenmiş anları olmak üzere

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) &= f(t,x(t)),t\in\mathbb{T}^{+}_{t_0},t\neq t_k, \qquad (3.44)\\ x\left(t_k^{+}\right)-x\left(t_k^{-}\right) &= I_k\left(x\left(t_k^{-}\right)\right),t=t_k,k=1,2,...,n,\\ x\left(t_0^{+}\right) &= x_0 \end{aligned}$$

birinci mertebeden lineer olmayan impuls dinamik sistemlerin aşikar çözümünün ψ-üstel kararlılığı, ψ-düzgün üstel kararlılığı, ψ-global üstel kararlılığı incelenecektir. $\psi_i:\mathbb{T}\to(0,\infty)$, $i=1,2,\ldots,n$, sağ yoğun sürekli fonksiyonlar ve $\psi=diag[\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n]$ olsun. Bu bölüm boyunca $[0,\infty)$ zaman skalası aralığında ki her t için $f(t,0)=0$ olduğu kabul edilecektir. $\mathbb{T}^{+}_{t_0}=\{t\in\mathbb{T}:t\ge t_0\}$ olarak düşünülsün. (3.44) impuls dinamik sisteminin çözümlerinin varlık ve tekliği Benchohra vd. (2006) çalışmasında gösterilmiştir. n- boyutlu Öklid uzayında $x=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}^T$ vektörünün normu $\|x\|=\max\{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|\}$dir ve $n\times n$ lik A matrisinin indirgenmiş normu $|A|=\sup\limits_{\|x\|\le1}\|Ax\|$ olarak tanımlanmıştır.

ψ-üstel kararlılık, ψ-düzgün üstel kararlılık, ψ-global üstel kararlılık tanımları ve lineer olmayan (3.44) impuls dinamik sisteminin çözümü için kararlılık koşulları verilecektir.

Tanım 3.2.1. (3.44) başlangıç değer probleminin herhangi bir $x(t,t_0,x_0)$ çözümü için

$$\|\psi(t)x(t,t_0,x_0)\|\le C(\|x_0\|,t_0)\left(e_{\ominus M}(t,t_0)\right)^d, \qquad \forall t\in[t_{k-1},t_k),\ k=1,2,\ldots,n$$

olacak şekilde bir d pozitif sabit sayısı, $C(h,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{T}^{+}_{t_0}\to\mathbb{R}^+$ negatif olmayan artan bir fonksiyon ve $M>0$ varsa (3.44) sisteminin aşikar çözümü $[0,\infty)$ da ψ-üstel kararlıdır. Eğer C fonksiyonu t_0'a bağlı değilse (3.44) sisteminin aşikar çözümü ψ-

düzgün üstel kararlıdır.

Tanım 3.2.2. (3.44) başlangıç değer probleminin herhangi bir $x(t,t_0,x_0)$ çözümü için

$$\|\psi(t)x(t,t_0,x_0)\| \leq Me_{\ominus\delta}(t,t_0), \qquad \forall t \in [t_{k-1},t_k)\,,\ k=1,2,\ldots,n$$

olacak şekilde $\delta > 0$ ve $M \geq 1$ sabit sayıları varsa (3.44) sisteminin aşikar çözümü $[0,\infty)$ da ψ- global üstel kararlıdır.

Teorem 3.2.3. Farz edelim ki $D \subset \mathbb{R}^n$ orijin noktasını içersin ve her $(t,x) \in \mathbb{T}^+_{t_0} \times D$ için I tipi Lyapunov fonksiyonu $V : \mathbb{T}^+_{t_0} \times D \to [0,\infty)$ var olsun. $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ ve $\lambda_3(t)$ pozitif fonksiyonlar, $\lambda_1(t)$ azalmayan fonksiyon, p,q,r pozitif sabitler, L negatif olmayan bir sabit ve $\delta > M := \inf_{t\geq 0} \lambda_3(t) \diagup [\lambda_2(t)]^{r\diagup q} > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\lambda_1(t)\|\psi(t)x(t)\|^p &\leq V(t,x) \leq \lambda_2(t)\|\psi(t)x(t)\|^q\,, && (3.45)\\
V^{\Delta}(t,x) &\leq \frac{-\lambda_3(t)\|\psi(t)x(t)\|^r - L(M\ominus\delta)e_{\ominus\delta}(t,t_0)}{1+M\mu(t)}, && (3.46)\\
V(t,x) - V^{r\diagup q}(t,x) &\leq \gamma e_{\ominus\delta}(t,t_0), \qquad \forall t\in[t_{k-1},t_k)\,,\ k=1,2,\ldots,n && (3.47)
\end{aligned}$$

ise (3.44) sisteminin aşikar çözümü $[0,\infty)$ da ψ- üstel kararlıdır.

Kanıt. x her $t \geq t_0$ için D bölgesinde (3.44) sisteminin çözümü olsun. $M := \inf_{t\geq 0}\lambda_3(t)\diagup[\lambda_2(t)]^{r\diagup q} > 0$, $e_M(t,t_0)$ iyi tanımlı ve pozitiftir. $\lambda_3(t)\diagup[\lambda_2(t)]^{r\diagup q} \geq M$ ve her $t \in [t_{k-1},t_k)\,,\ k=1,2,\ldots,n$ için

$$\begin{aligned}
[V(t,x(t))e_M(t,t_0)]^{\Delta} &= V^{\Delta}(t,x(t))e^{\sigma}_M(t,t_0) + V(t,x(t))e^{\Delta}_M(t,t_0)\\
&\leq (-\lambda_3(t)\|\psi(t)x(t)\|^r - L(M\ominus\delta)e_{\ominus\delta}(t,t_0))e_M(t,t_0)\\
&\quad +MV(t,x(t))e_M(t,t_0)\\
&= \begin{pmatrix} -\lambda_3(t)\|\psi(t)x(t)\|^r + MV(t,x(t))\\ -L(M\ominus\delta)e_{\ominus\delta}(t,t_0)\end{pmatrix} e_M(t,t_0)\\
&\leq \begin{pmatrix} \frac{-\lambda_3(t)}{[\lambda_2(t)]^{r\diagup q}}V^{r\diagup q}(t,x(t)) + MV(t,x(t))\\ -L(M\ominus\delta)e_{\ominus\delta}(t,t_0)\end{pmatrix} e_M(t,t_0)\\
&\leq \begin{pmatrix} M\left(V(t,x(t)) - V^{r\diagup q}(t,x(t))\right)\\ -L(M\ominus\delta)e_{\ominus\delta}(t,t_0)\end{pmatrix} e_M(t,t_0)\\
&\leq (M\gamma - L(M\ominus\delta))e_{M\ominus\delta}(t,t_0) && (3.48)
\end{aligned}$$

olacaktır. (3.48) eşitsizliğin her iki tarafi $x_0 = x(t_0)$ için t_0 dan t ye integre edilirse,

$t \in [t_{k-1}, t_k)$ için

$$\begin{aligned} V(t,x)\, e_M(t,t_0) &\leq V(t_0,x_0) + \int_{t_0}^{t} (M\gamma - L(M \ominus \delta))\, e_{M\ominus\delta}(\tau,t_0)\Delta\tau \\ &= V(t_0,x_0) + \left(\frac{M\gamma}{M\ominus\delta} - L\right) e_{M\ominus\delta}(t,t_0) + \frac{M\gamma}{\delta\ominus M} + L \\ &\leq V(t_0,x_0) + \frac{M\gamma}{\delta\ominus M} + L \end{aligned} \tag{3.49}$$

bulunur. $V(t_0,x_0) \leq \lambda_2(t_0)\,\|\psi(t_0)x_0\|^q$ olduğundan,

$$V(t,x)\, e_M(t,t_0) \leq \lambda_2(t_0)\,\|\psi(t_0)x_0\|^q + \frac{M\gamma}{\delta\ominus M} + L$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\lambda_2(t_0)\,\|\psi(t_0)x_0\|^q + \frac{M\gamma}{\delta\ominus M} + L = C(\|x_0\|, t_0) > 0$$

olduğundan,

$$V(t,x)\, e_M(t,t_0) \leq C(\|x_0\|, t_0) \quad \forall t \in [t_{k-1}, t_k), k = 1,2,\ldots,n \tag{3.50}$$

eşitsizliğine ulaşılır. (3.45) koşulundan

$$\begin{aligned} \lambda_1(t)\,\|\psi(t)x(t)\|^p &\leq (V(t,x)), \\ \|\psi(t)x(t)\| &\leq \lambda_1^{-1/p}(t)\,(V(t,x))^{1/p} \end{aligned}$$

bulunur. $\lambda_1(t)$ azalmayan fonksiyon olduğundan $\lambda_1(t) \geq \lambda_1(t_0)$ dır. Buradan,

$$\|\psi(t)x(t)\| \leq \lambda_1^{-1/p}(t_0)\,(V(t,x))^{1/p} \tag{3.51}$$

bulunur. (3.50) ve (3.51) eşitsizliklerinden, her $t \in [t_{k-1}, t_k)$, $k = 1,2,\ldots,n$ için

$$\|\psi(t)x(t)\| \leq \lambda_1^{-1/p}(t)\,(C(\|x_0\|, t_0))^{1/p}\, e_{\ominus M}(t,t_0)^{1/p}$$

olduğu görülür. Böylelikle Tanım 3.2.1 e göre (3.44) sistemi ψ- üstel kararlıdır. □

ψ fonksiyonunu t den bağımsız skaler bir fonksiyon olarak düşünürsek aşağıda belirtilen şartlar ψ- düzgün üstel kararlılık için yeterlidir.

Teorem 3.2.4. Farz edelim ki $D \subset \mathbb{R}^n$ orijin noktasını içersin ve her $(t,x) \in \mathbb{T}_{t_0}^{+} \times D$ için I tipi Lyapunov fonksiyonu $V : \mathbb{T}_{t_0}^{+} \times D \to [0,\infty)$ var olsun. ψ, t ’den bağımsız sabit bir fonksiyon, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, p, q, r$ pozitif sabitler, L negatif olmayan bir sabit ve $\delta > M := \lambda_3 \diagup [\lambda_2]^{r \diagup q} > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \lambda_1 \|\psi x(t)\|^p &\leq V(t,x) \leq \lambda_2 \|\psi x(t)\|^q, &(3.52)\\ V^{\Delta}(t,x) &\leq \frac{-\lambda_3 \|\psi x(t)\|^r - L(M \ominus \delta) e_{\ominus\delta}(t,t_0)}{1+M\mu(t)}, &(3.53)\\ V(t,x) - V^{r \diagup q}(t,x) &\leq \gamma e_{\ominus\delta}(t,t_0), \qquad \forall t \in [t_{k-1}, t_k),\ k = 1,2,\ldots,n &(3.54) \end{aligned}$$

ise (3.44) sisteminin aşikar çözümü $[0,\infty)$ da ψ- düzgün üstel kararlıdır.

Kanıt. x her $t \geq t_0$ için D bölgesinde (3.44) sisteminin çözümü olsun. $M = \lambda_3 \diagup [\lambda_2]^{r \diagup q} > 0$, $e_M(t,t_0)$ iyi tanımlı ve pozitiftir. $M = \lambda_3 \diagup [\lambda_2]^{r \diagup q}$ ve her $t \in [t_{k-1}, t_k)$, $k = 1,2,\ldots,n$ için

$$\begin{aligned} [V(t,x(t))\, e_M(t,t_0)]^{\Delta} &= V^{\Delta}(t,x(t))\, e_M^{\sigma}(t,t_0) + V(t,x(t))\, e_M^{\Delta}(t,t_0)\\ &\leq (-\lambda_3 \|\psi x(t)\|^r - L(M \ominus \delta) e_{\ominus\delta}(t,t_0))\, e_M(t,t_0)\\ &\quad + MV(t,x(t))\, e_M(t,t_0)\\ &= \begin{pmatrix} -\lambda_3 \|\psi x(t)\|^r + MV(t,x(t))\\ -L(M \ominus \delta) e_{\ominus\delta}(t,t_0) \end{pmatrix} e_M(t,t_0)\\ &\leq \begin{pmatrix} \frac{-\lambda_3}{[\lambda_2]^{r \diagup q}} V^{r \diagup q}(t,x(t)) + MV(t,x(t))\\ -L(M \ominus \delta) e_{\ominus\delta}(t,t_0) \end{pmatrix} e_M(t,t_0)\\ &\leq \begin{pmatrix} M\left(V(t,x(t)) - V^{r \diagup q}(t,x(t))\right)\\ -L(M \ominus \delta) e_{\ominus\delta}(t,t_0) \end{pmatrix} e_M(t,t_0)\\ &\leq (M\gamma - L(M \ominus \delta))\, e_{M\ominus\delta}(t,t_0) \end{aligned} \tag{3.55}$$

olacaktır. (3.55) eşitsizliğin her iki tarafı $x_0 = x(t_0)$ için t_0 dan t ye integre edilirse, $t \in [t_{k-1}, t_k)$ için

$$\begin{aligned} V(t,x)\, e_M(t,t_0) &\leq V(t_0,x_0) + \int_{t_0}^{t} (M\gamma - L(M \ominus \delta))\, e_{M\ominus\delta}(\tau,t_0) \Delta\tau\\ &= V(t_0,x_0) + \left(\frac{M\gamma}{M \ominus \delta} - L\right) e_{M\ominus\delta}(t,t_0) + \frac{M\gamma}{\delta \ominus M} + L\\ &\leq V(t_0,x_0) + \frac{M\gamma}{\delta \ominus M} + L \end{aligned} \tag{3.56}$$

bulunur. $V(t_0,x_0) \leq \lambda_2 \|\psi x_0\|^q$ şartından,

$$V(t,x)\,e_M(t,t_0) \leq \lambda_2 \|\psi x_0\|^q + \frac{M\gamma}{\delta \ominus M} + L$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\lambda_2 \|\psi x_0\|^q + \frac{M\gamma}{\delta \ominus M} + L = C(\|x_0\|, t_0) > 0$$

olduğundan,

$$V(t,x)\,e_M(t,t_0) \leq C(\|x_0\|, t_0) \quad \forall t \in [t_{k-1}, t_k),\ k = 1,2,\ldots,n \tag{3.57}$$

eşitsizliği bulunur. (3.52) şartından,

$$\begin{aligned} \lambda_1 \|\psi x(t)\|^p &\leq (V(t,x)), \\ \|\psi x(t)\| &\leq \lambda_1{}^{-1/p} (V(t,x))^{1/p} \end{aligned} \tag{3.58}$$

eşitszligine ulaşılır. (3.57) ve (3.58) eşitsizliğinden, her $t \in [t_{k-1}, t_k)$, $k = 1,2,\ldots,n$ için

$$\|\psi(t)x(t)\| \leq \lambda_1{}^{-1/p}(t)\,(C(\|x_0\|, t_0))^{1/p}\, e_{\ominus M}(t,t_0)^{1/p}$$

olduğu görülür. Böylelikle Tanım 3.2.1 e göre (3.44) sistemi ψ- düzgün üstel kararlıdır. □

Teorem 3.2.5. Farz edelim ki $D \subset \mathbb{R}^n$ orijin noktasını içersin ve her $(t,x) \in \mathbb{T}_{t_0}^+ \times D$ için I tipi Lyapunov fonksiyonu $V : \mathbb{T}_{t_0}^+ \times D \to [0,\infty)$ var olsun. ψ, t 'den bağımsız sabit bir fonksiyon, $\lambda_1, \lambda_2, p, \delta$ pozitif sabitler, L negatif olmayan bir sabit ve $0 < M < \min\{\lambda_2, \delta\}$ olmak üzere, her $t \in [t_{k-1}, t_k)$, $k = 1,2,\ldots,n$ için

$$\lambda_1 \|\psi x(t)\|^p \leq V(x), \tag{3.59}$$

$$V^{\Delta}(t,x) \leq \frac{-\lambda_2 V(x) - L(M \ominus \delta)\, e_{\ominus\delta}(t,0)}{1 + M\mu(t)} \tag{3.60}$$

ise (3.44) sisteminin aşikar çözümü $[0,\infty)$ da ψ- düzgün üstel kararlıdır.

Kanıt. x her $t \geq t_0$ için D bölgesinde (3.44) sisteminin çözümü olsun. $M \in \mathfrak{R}^+$, $e_M(t,0)$

iyi tanımlı ve pozitiftir. Her $t \in [t_{k-1}, t_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ için

$$\begin{aligned}
[V(x(t))e_M(t,0)]^{\Delta} &= V^{\Delta}(t, x(t))e_M^{\sigma}(t,0) + MV(x(t))e_M(t,0) \\
&\leq (-\lambda_2(t)V(x(t)) - L(M \ominus \delta)e_{\ominus\delta}(t,0))e_M(t,0) \\
&\quad + MV(x(t))e_M(t,0) \\
&= \begin{pmatrix} -\lambda_2(t)V(x(t)) + MV(x(t)) \\ -L(M \ominus \delta)e_{\ominus\delta}(t,0) \end{pmatrix} e_M(t,0) \\
&\leq ((M - \lambda_2)V(x(t)) - L(M \ominus \delta)e_{\ominus\delta}(t,0))e_M(t,0) \\
&\leq -L(M \ominus \delta)e_{\ominus\delta}(t,0)e_M(t,0) \\
&= -L(M \ominus \delta)e_{M\ominus\delta}(t,0) \qquad (3.61)
\end{aligned}$$

olacaktır. (3.61) eşitsizliğin her iki tarafı $x_0 = x(t_0)$ için t_0 dan t ye integre edilirse, $t \in [t_{k-1}, t_k)$ için

$$\begin{aligned}
V(x(t))e_M(t,0) &\leq V(x_0)e_M(t_0,0) - Le_{M\ominus\delta}(t,0) + Le_{M\ominus\delta}(t_0,0) \\
&\leq V(x_0)e_M(t_0,0) + Le_{M\ominus\delta}(t_0,0) \\
&\leq (V(x_0) + L)e_M(t_0,0).
\end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
V(x(t)) &\leq ((V(x_0) + L)e_M(t_0,0))e_{\ominus M}(t,0) \\
&= (V(x_0) + L)e_{\ominus M}(t,t_0) \qquad (3.62)
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. (3.59) ve (3.62) eşitsizliklerinden,

$$\|\psi x(t)\| \leq \lambda_1{}^{-1/p}((V(x_0) + L)e_{\ominus M}(t,t_0))^{1/p} \qquad \forall t \in [t_{k-1}, t_k),\ k = 1, 2, \ldots, n$$

eşitsizliği elde edilir. Böylelikle Tanım 3.2.1 e göre (3.44) sistemi ψ- düzgün üstel kararlıdır. □

Teorem 3.2.6. Farz edelim ki $D \subset \mathbb{R}^n$ orijin noktasını içersin ve her $(t,x) \in \mathbb{T}_{t_0}^+ \times D$ için I tipi Lyapunov fonksiyonu $V : \mathbb{T}_{t_0}^+ \times D \to [0, \infty)$ var olsun. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, p, q, r$ pozitif sabitler $K = \lambda_3/\lambda_2$, $L \geq \lambda_1$ negatif olmayan sabitler ve $\delta > \lambda_3/\lambda_2$ olmak üzere, her $t \in [t_{k-1}, t_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ için

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \|\psi(t)x(t)\|^p &\leq V(x) \leq \lambda_2 \|\psi(t)x(t)\|^p, \qquad (3.63) \\
V^{\Delta}(t,x) &\leq \frac{-\lambda_3 \|\psi(t)x(t)\|^p - L(K \ominus \delta)e_{\ominus\delta}(t,0)}{1 + K\mu(t)} \qquad (3.64)
\end{aligned}$$

ise (3.44) sisteminin aşikar çözümü $[0,\infty)$ da ψ- global üstel kararlıdır.

Kanıt. x her $t \geq t_0$ için D bölgesinde (3.44) sisteminin çözümü olsun. $K = \lambda_3/\lambda_2$, $e_K(t,0)$ iyi tanımlı ve pozitiftir. Her $t \in [t_{k-1}, t_k)$, $k = 1,2,\ldots,n$ için

$$\begin{aligned}
[V(x(t))\, e_K(t,0)]^{\Delta} &= V^{\Delta}(t,x(t))\, e_K^{\sigma}(t,0) + V(x(t))\, e_K^{\Delta}(t,0) \\
&\leq (-\lambda_3 \|\psi(t)x(t)\|^p - L(K \ominus \delta)\, e_{\ominus\delta}(t,0))\, e_K(t,0) \\
&\quad + KV(x(t))\, e_K(t,0) \qquad (3.65) \\
&= \begin{pmatrix} -\lambda_3 \|\psi(t)x(t)\|^p + KV(x(t)) \\ -L(K \ominus \delta)\, e_{\ominus\delta}(t,0) \end{pmatrix} e_K(t,0) \\
&\leq \begin{pmatrix} \frac{-\lambda_3}{\lambda_2} V(x(t)) + KV(x(t)) \\ -L(K \ominus \delta)\, e_{\ominus\delta}(t,0) \end{pmatrix} e_K(t,0) \\
&= (-L(K \ominus \delta)\, e_{\ominus\delta}(t,0))\, e_K(t,0) \\
&= -L(K \ominus \delta)\, e_{K\ominus\delta}(t,0) \qquad (3.66)
\end{aligned}$$

olacaktır. (3.66) eşitsizliğin her iki tarafi $x_0 = x(t_0)$ için t_0 dan t ye integre edilirse, $t \in [t_{k-1}, t_k)$ için

$$\begin{aligned}
V(x(t))\, e_K(t,0) &\leq V(x_0)\, e_K(t_0,0) + L(e_{K\ominus\delta}(t_0,0) - e_{K\ominus\delta}(t,0)) \\
&\leq V(x_0)\, e_K(t_0,0) + L \\
&\leq (V(x_0) + L)\, e_K(t_0,0).
\end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
V(x(t)) &\leq ((V(x_0) + L)\, e_K(t_0,0))\, e_{\ominus K}(t,0) \\
&= (V(x_0) + L)\, e_{\ominus K}(t,t_0) \qquad (3.67)
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. (3.63) ve (3.67) eşitsizliklerinden, her $t \in [t_{k-1}, t_k)$, $k = 1,2,\ldots,n$ için

$$\begin{aligned}
\|\psi(t)x(t)\| &\leq \lambda_1^{-1/p} ((V(x_0) + L)\, e_K(t,t_0))^{1/p} \\
&\leq \lambda_1^{-1/p} ((V(x_0) + L)\, e_K(t,t_0))^{1/p} \\
&= M(e_{\ominus K}(t,t_0))^{1/p}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $M = \frac{(V(x_0)+L)}{\lambda_1} \geq 1$ olduğundan. Tanım 3.2.2 ye göre (3.44) sistemi ψ- global üstel kararlıdır. □

3.3. İkili Dönüşümleri Kullanarak Kararlılık

Ayrık denklemler için Lyapunov'un direkt metodunun genişlemesi Carvalho ve Ferreira (1988) çalışmasında verilmiştir. Bu yöntemin adi diferensiyel denklemlere geliştirilmesi Carvalho (1991), Carvalho ve Cooke (1991) çalışmalarında yapılmıştır. Bu çalışmalardan sonra Carvalho ve Marconato (1997), Bená ve Dos Reis (1998), Marconato (2005) gibi pek çok çalışma yapılmıştır.

Bu bölümde ikili dönüşümleri kullanarak, $t, t_0 \in \mathbb{T}$ ve D kompakt bir küme olmak üzere

$$x(t_0) = x_0, \quad t_0 \geq 0, \ \ x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{3.68}$$

başlangıç koşulu ile (2.2),

$$x^{\Delta} = f(t,x), t \geq t_0, x \in D \subset \mathbb{R}^n$$

birinci mertebeden dinamik denkleminin aşikar çözümünün kararlılığı incelenecektir. Ayrıca her $t \in \mathbb{T}$, $t \geq t_0$, için $f(t,0) = 0 \in D$ olduğunu kabul edersek, $x = 0$ 'ın (2.2) denkleminin bir çözümü olduğu garantilenir. Tanım 2.5.4 ve Tanım 2.5.5 ü tekrar hatırlanırsa;

Tanım 3.3.1. (2.2) denkleminin aşikar çözümü $\varepsilon > 0$ ve $t_0 \in \mathbb{T}$ için $\delta > 0$ sayısı, bütün $t \geq t_0$ lar için verilen denklemin $|x_0| < \delta$ başlangıç şartı altındaki $x(t)$ çözümü $|x(t)| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde ise kararlıdır. Eğer (2.2) denklemi kararlı ve $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ ise asimptotik kararlıdır.

İkili dönüşümler tanımlanmadan önce ilk olarak kullanılacak kümeler tanımlanacaktır. $T \in \mathbb{T}$, $T>0$, verilen bir sabit, $t \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$, $\eta(t) : [t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \to [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$, $\eta(t) < t$ ve $y \in \Omega$ olmak üzere $x(t,y)$ orijininin bir komşuluğu Ω ,

$$\begin{aligned}
\Omega_-(T) &= \{y \in \Omega : V(x(T,y)) < V(x(\eta(T),y))\}, \\
\Omega_0(T) &= \{y \in \Omega : V(x(T,y)) = V(x(\eta(T),y))\}, \\
\Omega_-^{\Delta} &= \left\{y \in \Omega : V^{\Delta}(x(.,y)) > 0\right\}, \\
\Omega_0^{\Delta} &= \left\{y \in \Omega : V^{\Delta}(x(.,y)) = 0\right\}
\end{aligned}$$

ve $\Omega_-^0(T) = \Omega_-(T) \cup \Omega_0(T)$ olarak tanımlansın.

Tanım 3.3.2. (2.2) denklemine bağlı Δ türevlenebilir bir $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\overline{\Omega}_{+}^{\Delta} \subset \Omega_{+}^{0}(T)$ olacak şekilde $T>0$ ve $\mathbb{R}^n$ de orijinin Ω komşuluğu varsa V fonksiyonuna ikili dönüşüm denir.

Tanım 3.3.3. Δ türevlenebilir bir $V:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, (2.2) denklemine bağlı bir ikili dönüşüm ve ayrıca $\left(\overline{\Omega}_{+}^{\Delta}\right)^{*} \subset \Omega_{-}(T)$ ve $\Omega_0(T) \cap \Omega_0^{\Delta} = \{0\}$ ek koşullarını sağlıyorsa verilen V fonksiyonuna kesin ikili dönüşüm denir.

Lyapunov fonksiyonlarının (2.2) denklemine göre ikili dönüşüm olduğu görülmektedir.

Verilen $y \in \mathbb{R}^n$ ve ϕ_i , $i = 0,1,2,...$ fonksiyonları, κ sınıfi fonksiyonlar olmak üzere,

$$c_j = \max\left\{V(x(t,y)) : \phi_{j-1}(T) \le t \le \phi_j(T)\right\} \qquad j = 0,1,2,...$$

ve

$$t_j = \min\left\{t : \phi_{j-1}(T) \le t \le \phi_j(T), c_j = V(x(t,y))\right\}$$

olarak tanımlansın. Kararlılık ile ilgili teoremleri ispatlamak için aşağıdaki yardımcı teoremlere ihtiyaç duyulacaktır.

Lemma 3.3.4. V pozitif tanımlı ve $c_j = 0$ ise, $t > t_j$ olmak üzere $x(t,y) = 0$ dır.

Kanıt. $V\left(x\left(t_j,y\right)\right) = 0$ olduğundan ve $V(x) = 0$ olduğu sürece $x = 0$ dır, buradan $x(t,y) = 0$ sonucuna ulaşılabilir. □

Lemma 3.3.5. V, (2.2) denklemine göre ikili dönüşüm ve $x(t,y)$, $0 \le t \le \phi_j(T)$ üzerinde tanımlanmış (2.2) denkleminin bir çözümü ise, $c_{j-1} \ge c_j$ dir.

Kanıt. $t_j = \phi_{j-1}(T)$ ise, c_{j-1} 'in tanımından,

$$c_j = V\left(x\left(t_j,y\right)\right) \le c_{j-1}$$

dir. $t_j > \phi_{j-1}(T)$ durumunda $\phi_{j-1}(T) \le t \le \phi_j(T)$ için

$$V(x(t,y)) < V\left(x\left(t_j,y\right)\right)$$

bulunur. Ortalama değer teoreminden

$$V^{\Delta}\left(x\left(\widetilde{t},y\right)\right) = \frac{V\left(x\left(t_j,y\right)\right) - V(x(t,y))}{t_j - t}$$

olacak şekilde $\widetilde{t} \in \left(t, t_j\right)$ vardır ve buradan

$$V^{\Delta}\left(x\left(\widetilde{t}, y\right)\right) > 0$$

sonucu elde edilir. $t \longrightarrow t_j$ iken $x\left(\widetilde{t}, y\right) \longrightarrow x\left(t_j, y\right)$ denilebilir. Bu da $x\left(t_j, y\right) \in \overline{\Omega}_{+}^{\Delta}$ anlamına gelir. V ikili dönüşüm olduğundan,

$$V\left(x\left(t_j, y\right)\right) \leq V\left(x\left(\eta\left(t_j\right), y\right)\right)$$

dir. Buradan da,

$$c_j = V\left(x\left(t_j, y\right)\right) \leq V\left(x\left(\eta\left(t_j\right), y\right)\right) \leq c_{j-1}$$

dir. □

Lemma 3.3.6. V, (2.2) ya göre kesin ikili dönüşüm, $t_j > \phi_{j-1}(T)$ ve $x(t,y)$, $0 \leq t \leq \phi_j(T)$ için tanımlanmış (2.2) denkleminin bir çözümü ise, $c_{j-1} > c_j$ dir.

Kanıt. Bu durumda $x\left(t_j, y\right) \in \Omega_{+}^{\Delta}$ olması ayrıca $x\left(t_j, y\right) \in \Omega_{-}$ olmasını gerektirir. Böylece

$$c_j = V\left(x\left(t_j, y\right)\right) < V\left(x\left(\eta\left(t_j\right), y\right)\right) \leq c_{j-1}$$

dir. □

Teorem 3.3.7. V, (2.2) ya göre kesin ikili dönüşüm, $c_{j-1} \neq 0$ ve $x(t,y)$, $0 \leq t \leq \phi_j(T)$ için tanımlanmış (2.2) denkleminin bir çözümü ise, $c_{j-2} > c_j$ dir.

Kanıt. Yukarıdaki hipotezlere göre, Lemma *3.3.5* den

$$c_{j-2} \geq c_{j-1} \geq c_j$$

olduğunu bilinmektedir. Bununla birlikte, Lemma *3.3.6* den $t_j > \phi_{j-1}(T)$ ise, $c_{j-1} > c_j$ olduğunu, buradan da $c_{j-2} > c_j$ olduğunu bilinmektedir.
$t_j = \phi_{j-1}(T)$ durumunda, ya $c_{j-1} > c_j$ ya da $c_{j-1} = c_j$ olacaktır. $c_{j-1} > c$ durumunda tekrar

$$c_{j-2} \geq c_{j-1} > c_j$$

olacaktır. $c_{j-1} = c_j$ durumunda,

$$\Omega_0(T) \cap \Omega_0^{\Delta} = \{0\}$$

ve $c_{j-1} \neq 0$ olacaktır.
$t_{j-1} = \phi_{j-2}(T)$ durumunda ise

$$V^{\Delta}(x(t,y)) = 0$$

olamayacaktır. $t_{j-1} = \phi_{j-2}(T)$ durumu

$$V^{\Delta}(x(t,y)) < 0$$

ile çelişeceğinden $t_{j-1} = \phi_{j-2}(T)$ durumunda

$$V^{\Delta}(x(t,y)) < 0$$

olamayacaktır. Ayrıca

$$V^{\Delta}(x(t,y)) > 0$$

$t_{j-1} = \phi_{j-1}(T)$ durumu ile çelişmektedir. Buradan $c_{j-1} = c_j$ iken $t_{j-1} > \phi_{j-2}(T)$ sonucuna ulaşılır, böylece $c_{j-2} > c_{j-1} = c_j$ bulunur. □

Teorem 3.3.8. V pozitif tanımlı (2.2) ya göre ikili dönüşüm ise (2.2) sisteminin aşikar çözümü kararlıdır.

Kanıt. $\Omega \subset \{|y| \leq R\}$ olacak şekilde $R > 0$ alınsın, ve $\sup\{|x(t,y)| : |y| \leq r, 0 \leq t \leq T\} \leq R$ olacak şekilde $r > 0$ alınsın. $\delta = \inf\{V(y) : r \leq |y| \leq R\}$ olsun, $\delta > 0$ olduğu açıktır. Eğer $|y| \leq R$ ve $V(y) < \delta$ ise, $|y| < r$ dir. V'nin ve $(t,y) \longrightarrow x(t,y)$ dönüşümünün sürekliliğinden, $0 \leq t < T$ ve $|y| \leq a$ olacak şekilde $a \in (0,r)$ alırsak, $V(x(t,y)) < \delta/2$, $|x(t,y)| \leq R$ dir. Bu şekilde ki t ve y için $|x(t,y)| \leq r$ dir. $j \geq 1$ iken, $\phi_{j-1}(T) \leq t < \phi_j(T)$ için $|x(t,y)| \leq r$ ise, $\phi_j(T) \leq t < \phi_{j+1}(T)$,için $|x(t,y)| \leq R$ dir. $c_1(y) < \delta$ iken, $c_{j+1}(y) < \delta$ dir. Buradan $\phi_j(T) \leq t < \phi_{j+1}(T)$ için $V(x(t,y)) < \delta$ ve $|x(t,y)| \leq r$ olduğu bulunur. $j \geq 1$ için tümevarımsal yaklaşımdan her $t \geq 0$ için $|x(t,y)| \leq r$ olduğu görülür. □

Teorem 3.3.9. V pozitif tanımlı (2.2) ya göre kesin ikili dönüşüm ise (2.2) sisteminin aşikar çözümü asimptotik kararlıdır.

Kanıt. V kesin ikili dönüşüm olsun ve $|y| \leq d,\ d \in (0,r)$ olacak şekilde y alınsın. Theorem 3.3.8 den $x(t,y)$ nin kararlı olduğu bilinmektedir ve Lemma 3.3.6 dan $c_j > c_{j+1}$ dir. Bu yüzden $j \to \infty$ iken $c_j \to \infty$ olduğunu göstermek yeterlidir. Farzedelim, $c < c_j$ bir pozitif sabit olsun öyle ki $j \to \infty$ iken $c_j \to c$ olsun. Ω_+^Δ ve $\Omega_-(T)$ nin aynı anda $y = 0$ da sıfırlandığı bölgede bulunan y noktası için $|y| \leq d$ ve $c < d$ olduğu durumda, hipotez pozitif sabit bir $h(c)$ 'nin varlığını garanti eder, öyle ki her y, $c < |y| < d$ için ya $\Omega_+^\Delta < -h(c)$ ya da $\Omega_-(T) < -h(c)$ dir. Sonuç olarak,

$$c_{j+1} - c_j < -h(c), \qquad j = 0, 1, 2, ...$$

olacaktır. Bu durum $c_j \to -\infty$ sonucuna ulaştırır, bu da çelişkidir. Böylece $c = 0$ dır. $\square$

Örnek 3.3.10. $p > 0$ ve $t_0 \in \mathbb{T}^\kappa$ olmak üzere,

$$x^{\Delta\Delta} + p^2 x = 0 \tag{3.69}$$

dinamik denklemi ele alınsın. Bu denklem $x(0) = x_0$ ve $y(0) = y_0$ koşulu ile,

$$\begin{aligned} x^\Delta &= py \\ y^\Delta &= -px \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $V(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ olarak seçilsin. V pozitif tanımlıdır. Çarpım kuralı kullanılarak V^Δ hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} V^\Delta(t,x,y) &= \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)^\Delta \\ &= x(t)x^\Delta(t) + x^\Delta(t)x(\sigma(t)) + \frac{1}{2}\left(y^\Delta(t)y(\sigma(t)) + y(t)y^\Delta(t)\right) \\ &= x^\Delta(t)\left(2x(t) + \mu(t)x^\Delta(t)\right) + \frac{1}{2}y^\Delta(t)\left(2y(t) + \mu(t)y^\Delta(t)\right) \\ &= (py)(2x + \mu(t)(py)) + \frac{1}{2}(-px)(2y + \mu(t)(-px)) \\ &= 2pxy + \mu(t)\left(p^2y^2\right) - pxy + \mu(t)\left(\frac{1}{2}p^2x^2\right) \\ &= pxy + p^2\mu(t)\left(\frac{1}{2}x^2 + y^2\right) \end{aligned}$$

bulunur. V^Δ negatif tanımlı olmadığından bu denklem için Lyapunov fonksiyonu değildir. (3.69) denkleminin çözümü Bohner ve Peterson (2001) çalışmasında;

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos_p(t,t_0) + y_0 \sin_p(t,t_0) \\ y(t) &= -x_0 \sin_p(t,t_0) + y_0 \cos_p(t,t_0) \end{aligned}$$

olarak verilmiştir. Eğer $\sigma^2(a)$ periyotlu $\mathbb{T}$ zaman skalasında $T = a$ alınırsa, $V(x(a), y(a)) = V(x_0, y_0)$ olacağı için

$$V(x(a), y(a)) - V(x_0, y_0) = 0$$

elde edilir. Bu yüzden $\Omega = B$ komşuluğu vardır. Örneğin,

$$\begin{aligned} \overline{\Omega}_+^{\Delta} &= \{(x,y) \in \Omega : pxy \geq 0\} \\ \Omega_-^0(a) &= B. \end{aligned}$$

Buradan $\overline{\Omega}_+^{\Delta} \subset \Omega_-^0(a)$ olduğu görülür. Teorem 3.3.8 gereğince (3.69) sistemi pozitif tanımlı ve ikili dönüşüm olduğundan kararlıdır.

4. SONUÇ

Çalışmanın bulgular bölümünün ilk kısmında zaman skalasında dinamik denklemlerin üstel ve düzgün üstel kararlılıkları üzerine daha önceden yapılmış Peterson ve Raffoul (2005) çalışmasında ki;

$$\begin{aligned} x^{\Delta} &= f(t,x), \quad t \geq t_0 \geq 0, \\ x(t_0) &= x_0, \quad t_0 \geq 0, \; x_0 \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{4.1}$$

başlangıç değer problemi için farklı kararlılık şartları belirlenmiştir. Peterson ve Raffoul (2005) çalışmasında; $V : D \to [0,\infty)$, I tipi Lyapunov fonksiyonu, $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ ve $\lambda_3(t)$ pozitif fonksiyonlar, $\lambda_1(t)$ azalmayan fonksiyon, p,q,r ve M pozitif sabitler, L negatif olmayan bir sabit ve $\delta > M := \lambda_3 \big/ [\lambda_2]^{r/q} > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \lambda_1(t)\|x\|^p &\leq V(t,x) \leq \lambda_2(t)\|x\|^q, \\ V^{\Delta}(t,x) &\leq \frac{-\lambda_3(t)\|x\|^r - L(M \ominus \delta)(t)\, e_{\ominus\delta}(t,0)}{1+M\mu(t)}, \\ V(t,x) - V^{r/q}(t,x) &\leq 0 \end{aligned}$$

olarak ifade edilmiştir. Bu çalışmada bulunmuş üstel kararlılık şartlarından farklı olarak, her $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ için $V : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ I tipi Lyapunov fonksiyonu, $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ ve $\lambda_3(t)$ pozitif fonksiyonlar, $\lambda_1(t)$ azalmayan fonksiyon, p,q ve M pozitif sabitler olmak üzere

$$\lambda_1(t)\|x\|^p \leq V(x) \leq \lambda_2(t)\|x\|^q, \tag{4.2}$$

$$V^{\Delta}(t,x) \leq -\lambda_3(t)\|x\|^q, \tag{4.3}$$

$$-\frac{\lambda_3(t)}{\lambda_2(t)} \leq \ominus M \tag{4.4}$$

olarak (4.1) sisteminin aşikar çözümünün üstel kararlılığı için.yeni kararlılık şartları ifade ve ispat edilmiştir. Bununla birlikte (4.2) ve (4.3) şartlarında kullanılan $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ ve $\lambda_3(t)$ pozitif fonksiyonlarını, λ_1, λ_2 ve λ_3 pozitif sabitleri alarak (4.1) sisteminin aşikar çözümünün düzgün üstel kararlılığı şartları verilmiştir ve ispat edilmiştir. Sonrasında λ_1, λ_2, p pozitif sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} \lambda_1 \|x\|^p &\leq V(x), \\ V^{\Delta}(t,x) &\leq (\ominus\lambda_2) V(x) \end{aligned}$$

şartları ile (4.1) sisteminin aşikar çözümünün düzgün üstel kararlılığı olduğu ifade ve ispat edilmiştir.

Daha sonra zaman skalasında $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$ impuls etkisinin sabitlenmiş anları olmak üzere

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) &= f(t, x(t)), t \in \mathbb{T}^{+}_{t_0}, t \neq t_k, \\ x\left(t_k^+\right) - x\left(t_k^-\right) &= I_k\left(x\left(t_k^-\right)\right), t = t_k, k = 1, 2, ..., n, \\ x\left(t_0^+\right) &= x_0 \end{aligned}$$

impuls dinamik denklemleminin ψ-üstel kararlılık şartları $\forall t \in [t_{k-1}, t_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ için $V : \mathbb{T}^{+}_{t_0} \times D \to [0, \infty)$ I tipi Lyapunov fonksiyonu, $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ ve $\lambda_3(t)$ pozitif fonksiyonlar, $\lambda_1(t)$ azalmayan fonksiyon, p, q, r pozitif sabitler, L negatif olmayan bir sabit ve $\delta > M := \inf_{t \geq 0} \lambda_3(t) \big/ [\lambda_2(t)]^{r/q} > 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) \|\psi(t) x(t)\|^p &\leq V(t,x) \leq \lambda_2(t) \|\psi(t) x(t)\|^q, \\ V^{\Delta}(t,x) &\leq \frac{-\lambda_3(t) \|\psi(t) x(t)\|^r - L(M \ominus \delta) e_{\ominus\delta}(t, t_0)}{1 + M\mu(t)}, \\ V(t,x) - V^{r/q}(t,x) &\leq \gamma e_{\ominus\delta}(t, t_0) \end{aligned}$$

olarak bulunmuştur. ψ-düzgün üstel kararlılık şartlarının $\forall t \in [t_{k-1}, t_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ için ψ, t 'den bağımsız sabit bir fonksiyon, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, p, q, r$ pozitif sabitler, L negatif olmayan bir sabit ve $\delta > M := \lambda_3 \big/ [\lambda_2]^{r/q} > 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \lambda_1 \|\psi x(t)\|^p &\leq V(t,x) \leq \lambda_2 \|\psi x(t)\|^q, \\ V^{\Delta}(t,x) &\leq \frac{-\lambda_3 \|\psi x(t)\|^r - L(M \ominus \delta) e_{\ominus\delta}(t, t_0)}{1 + M\mu(t)}, \\ V(t,x) - V^{r/q}(t,x) &\leq \gamma e_{\ominus\delta}(t, t_0) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \lambda_1 \|\psi x(t)\|^p &\leq V(x), \\ V^{\Delta}(t,x) &\leq \frac{-\lambda_2 V(x) - L(M \ominus \delta) e_{\ominus\delta}(t, 0)}{1 + M\mu(t)} \end{aligned}$$

olduğu gösterilmiştir. ψ-global üstel kararlılık şartları ise $\forall t \in [t_{k-1}, t_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ için $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, p, q, r$ pozitif sabitler $K = \lambda_3/\lambda_2$, $L \geq \lambda_1$ negatif olmayan sabitler ve $\delta > \lambda_3/\lambda_2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \lambda_1 \|\psi(t)x(t)\|^p &\leq V(x) \leq \lambda_2 \|\psi(t)x(t)\|^p, \\ V^{\Delta}(t,x) &\leq \frac{-\lambda_3 \|\psi(t)x(t)\|^p - L(K \ominus \delta) e_{\ominus\delta}(t,0)}{1 + K\mu(t)} \end{aligned}$$

olarak ifade ve ispat edilmiştir.

Son olarak da zaman skalasında $x(t,y)$ nin Ω komşuluğu üzerinden $\Omega_-(T), \Omega_0(T), \Omega_-^{\Delta}, \Omega_0^{\Delta}$ ve $\Omega_-^0(T)$ tanımlanmıştır. Bun tanımlar kullanılarak $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\overline{\Omega}_+^{\Delta} \subset \Omega_+^0(T)$ olacak şekilde $T>0$ ve $\mathbb{R}^n$ de orijinin Ω komşuluğu varlığında V fonksiyonu ikili dönüşüm olarak tanımlanmıştır. İkili dönüşüm olan V, Lyapunov fonksiyonu seçiminde gerekli olan V^{Δ} nin negatif tanımlılık şartını gerektirmediği için V fonksiyonu seçiminde esneklik sağlamaktadır. Lyapunov fonksiyonu bulunamadığı durumlarda kullanılabilecek bu dönüşümler ile (4.1) dinamik sisteminin kararlılığı incelenmiştir. Daha sonra da V ikili dönüşümü, ayrıca $\left(\overline{\Omega}_+^{\Delta}\right)^* \subset \Omega_-(T)$ ve $\Omega_0(T) \cap \Omega_0^{\Delta} = \{0\}$ ek koşullarını sağlaması durumunda kesin ikili dönüşüm olarak tanımlanmış ve kesin ikili dönüşümler kullanılarak (4.1) dinamik sisteminin asimptotik kararlılığı incelenmiştir.

KAYNAKLAR

Atici, F.M., Biles, D.C., ve Lebedinsky, A. (2006) An Application of Time Scales to Economics, *Mathematical and Computer Modelling*, 43: 718–726.

Benchohra, M., Henderson, J. ve Ntouyas, S. (2004) On first order impulsive dynamic equations on time scales, *Journal of Difference Equations and Applications*, 10 (6): 541–548.

Benchohra, M., Henderson, J. ve Ntouyas, S. (2006) *Impulsive Differential Equations and Inclusions*, 2. Baskı, Hindawi Publishing Company, ABD, 370s.

Bená, M.A. ve Dos Reis, J.G. (1998) Some results on stability of retarded functional differential equations using dichotomic map techniques, *Positivity*, 2(3), 229–238.

Bohner, M. ve Martynyuk, A.A. (2007) Elements of Lyapunov stability theory for dynamic equations on time scale, *International Applied Mechanics*, 43(9), 3–27.

Bohner, M. ve Peterson, A.C. (2001) *Dynamic Equations on Time Scales an Introduction With Applications*, Birkhauser, ABD, 368s.

Bohner, M. ve Peterson, A.C. (2002) *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*, Birkhauser, ABD, 368s.

Carvalho, L.A.V. (1991) On the stability of discrete equations and ordinary differential equations, 89-97, Busenberg, S. ve Martelli, M. (editörler), *Delay Differential Equations and Dynamical Systems Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 249s.

Carvalho, L.A.V. ve Cooke, K. (1991) On dichotomic maps for a class of differential-difference equations, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 117A, 317–328.

Carvalho, L.A.V. ve Ferreira, R. (1988) On a new extension of Liapunov's direct method to discrete equations, *Quart. Appl. Math.*, 66, 779–788.

Carvalho, L.A.V. ve Marconato, S.A.S. (1997) On dichotomic maps for differential equations with piecewise continuous argument, *Communications in Applied Analysis*, 1(1), 103–112.

DaCunha, J. (2005), Journal of computational and applied mathematics, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 176, 381–410.

Guseinov, G.S. (2003) Integration on time scales, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 285, 107–127.

Hilger, S. (1988) *Ein MaBkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten*, Ph. D. thesis, Universtat Würzburg.

Hoffacker, J. ve Tisdell, C.C. (2005) Stability and instability for dynamic equations on time scales, *Computers and Mathematics with Applications*, 49, 1327–1334.

Hovhannisyan, G. (2006) Asymptotic stability for dynamic equations on time scales, *Advances in Difference Equations*, 2006, 1–17.

Jones, M.A., Song, B. ve Thomas, D.M. (2004) Controlling wound healing through debridement, *Mathematical and Computer Modelling*, 40(9-10), 1057–1064.

Kaymakcalan, B. (1992) Lyapunov stability theory for dynamic systems on time scales, *J. Appl. Math. Stochastic. Anal.*, 5(5), 275–281.

Kaufmann, E.R., Kosmatov, N. ve Raffoul, Y.N. (2008) Impulsive dynamic equations on a time scale, *Electronic Journal of Differential Equations*, 67, 1–9.

Kaymakcalan, B., Laksmikatham, V. ve Sivasundaram, S. (1996) *Dynamical Systems on Measure Chains*, Kluwer Acedemic Publishers, Hollanda, 296s.

Lakshmikantham, V. ve Vatsala, A. (2002) Hybrid systems on time scales, *J. Comput. Appl. Math.*, 141, 227–235.

Li, L. ve Hong, S.H. (2011) Exponential stability for set dynamic equations on time scales, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235, 4916–4924.

Liu, A.L. (2006) Boundedness and exponential stability of solutions to dynamic equations on time scales, *Electronic Journal of Differential Equations*, 12, 1–14.

Lupulescu, V. ve Zada, A. (2010) Linear impulsive dynamic systems on time scales, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 11, 1–30.

Ma, Y. ve Sun, J. (2008) Stability criteria for impulsive systems on time scales, *J. Comput. Appl. Math.*, 213, 400–407.

Peterson, A.C. ve Raffoul, Y.N. (2005) Exponential stability of dynamic equations on time scales, *Adv. Difference Equ.*, 2, 133–144.

Peterson, A.C. ve Tisdell, C.C. (2004) Boundedness and uniqueness of solutions to dynamic equations on time scales, *J. Difference Equ. Appl.*, 10 (13-15), 1295–1306.

Marconato, S.A.S. (2005) The relationship between differential equations with piecewise constant argument and the associated discrete equations via dichotomic maps, *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems*, 12, 755–768.

Sivasundaram, S. (2002) Stability of dynamic systems on the time scales. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 2 (2), 185–202.

Yaşar, İ.B. ve Tuna A. (2007) ψ-uniformly stability for time varying linear dynamic systems on time scales, *International Mathematical Forum*, 2 (20), 963–972.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Ad Soyad	:	Veysel Fuat Hatipoğlu
Uyruk	:	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Muğla 24/10/1980
Medeni Hali	:	Bekar
Telefon	:	0 252 211 5107
E-posta	:	veyselfuat.hatipoglu@mu.edu.tr

Eğitim

Alınan Derece	Aldığı Kurum/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lise	İzmir Şemikler Lisesi	1998
Lisans	Yeditepe Üniversitesi	2003
Tezsiz Yüksek Lisans	Ege Üniversitesi	2005
Yüksek Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi	2007

İş Tecrübesi

Yıl	Yer	Pozisyon/görev
2007-2011	Uşak Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2011-	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	Araştırma Görevlisi