

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI ÖZEL 1+1- VE 2+1-BOYUTLU EVRİM TİPİ DENKLEMLERDE  
İNTEGRE EDİLEBİLME VE SİMETRİLER**

**DOKTORA TEZİ**

**Cihangir ÖZEMİR**

**Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Matematik Mühendisliği Programı**

**AĞUSTOS 2012**



**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI ÖZEL 1+1- VE 2+1-BOYUTLU EVRİM TİPİ DENKLEMLERDE  
İNTEGRE EDİLEBİLME VE SİMETRİLER**

**DOKTORA TEZİ**

**Cihangir ÖZEMİR  
(509052002)**

**Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Matematik Mühendisliği Programı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Faruk GÜNGÖR**

**AĞUSTOS 2012**



İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509052002 numaralı Doktora Öğrencisi **Cihangir ÖZEMİR**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**BAZI ÖZEL 1+1- VE 2+1-BOYUTLU EVRİM TİPİ DENKLEMLERDE İNTEGRE EDİLEBİLME VE SİMETRİLER**” başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

**Tez Danışmanı :**      **Prof. Dr. Faruk GÜNGÖR** .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri :**        **Prof. Dr. Emanullah HİZEL** .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Prof. Dr. Neşe ÖZDEMİR** .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Prof. Dr. Hüsnü Ata ERBAY** .....  
Özyeğin Üniversitesi

**Prof. Dr. Aynur UYSAL** .....  
Doğuş Üniversitesi

**Teslim Tarihi :**        **30 Mayıs 2012**  
**Savunma Tarihi :**    **1 Ağustos 2012**



*Birsen ve Jan Deniz'e,*



## ÖNSÖZ

Bu çalışmanın yürütülmesinde engin bilgisi ve deneyimiyle bana rehberlik eden değerli hocam Prof. Dr. Faruk Güngör'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme komitesi üyeleri Prof. Dr. Emanullah Hızal ve Prof. Dr. Neşe Özdemir'e verdikleri destek için teşekkür ederim.

Tezin değerlendirmesine katılan diğer jüri üyeleri Prof. Dr. Hüsnü Ata Erbay'a ve Prof. Dr. Aynur Uysal'a teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmanın son bölümü, TÜBİTAK-BİDEB/2214 "Doktora Öğrencileri İçin Yurtdışı Araştırma Bursu" (2011- 1. dönem) kapsamında 01.10.2011-06.04.2012 tarihleri arasında Linköping Üniversitesi Matematik Bölümü'nde (İsveç) gerçekleştirilen "Kac-Moody-Virasoro Simetri Cebirine Sahip 2+1-Boyutlu Evrim Tipi Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması" başlıklı araştırma projesinden üretilmiştir. Çalışma Doç. Dr. Peter Basarab-Horwath'ın rehberliğinde gerçekleştirilmiştir. Kendisine bu ziyaretin gerçekleşebilmesine imkan sağladığı ve üretilen çalışmalar için teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca Linköping Üniversitesi Matematik Bölümü'ne gösterdikleri nazik ev sahipliği için teşekkür ediyorum.

Değerli hocam Prof. Dr. Faruk Güngör, lisans öğrenimimin birinci yılındaki matematik derslerimizin öğretim üyesiydi. Kendisi ile bu vesile ile başlayan tanışmamın sonrasında, onun verdiği destek ile İTÜ Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladım ve danışmanlığında yüksek lisans çalışmamı tamamladım. Doktora gibi uzun bir süreçte hemen herkes çeşitli zorluklar atlattır. Benim yaşadığım en büyük zorluk, sanırım, Tanrı'dan bir mucize dileyerek oğlum Deniz'in kokusunu hafızama kaydedip bir sabah uçağıyla Berlin'e gitmekti. Aynı gün dönüş uçağında koltuğa oturduğumda, dileğimin gerçekleştiğini düşündüm: Sanırım mucizeler, onu dilediğiniz anda zaten gerçekleşmeye başlamış oluyor. Faruk Bey'in dönüşüm sonrası verdiği destek ve sahiplenişi bu süreçteki en önemli köşe taşlarından. Bu şekilde başladığımız tez çalışmasında beni yönelttiği problemler, yol göstermesi ve yardımlarının yanında, gösterdiği anlayış ve sabır için kendisine çok şey borçluyum.

Sevgili eşim Birsen, bu süreçte her türlü yükü omuzlarımdan aldı, "çalışmalıyım" dediğimde bana anında alan yarattı. Kendine ait her şeyi ikinci plana iterek, hayatımızı bana göre organize ederek, yoğun iş temposunun yanında bana sonsuz destek oldu. Ben de kendisine böyle bir konuda destek verebilirim mutlu olacağım. Kanımca eşler, bir 'fahri doktora' ünvanını çok fazlasıyla hak ediyorlar.

Sevgili Deniz, kendisiyle oynayan ama akıllı zaman zaman, hatta çoğu zaman çalışmanın son durumuna takılan, fırsat bulduğunda da kendisini anne veya anneye havale eden, üstüne üstlük bir de altı aylığına ortadan kaybolan bir babaya katlandı. "Göteborg'u sevmedim ama senin için burada kalırım" diyen güzel çocuğumuza, herhalde ancak sarılarak teşekkür edebilirim.

Doğumundan itibaren Deniz'in bakımı için yanımda olan, özellikle rapor zamanlarındaki en büyük yardımcımız, sunum provalarımı dahi ciddiyetle dinleyen

kayınvalidem Fatma Altaylı'ya, eşinden ayrı kalarak bu durumu sabırla uzaktan destekleyen kayınpederim Özdemir Altaylı'ya sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Kendileri ailecek en büyük desteklerimiz. Emeklerinin karşılığını ödemek imkansız.

Atilla Altıntaş ile kahve yudumlarken, bir yandan geçmişi okuyup, bir yandan geleceğimizi yazdığımızı düşünüyorum. Dostluğu için kendimi şanslı hissediyorum.

Hocam ve ağabeyim Mücahit Özel'e, lise yıllarımdan başlayarak bana kattığı her şey için teşekkür etmeliyim. İzlediğim çizgide katkısı çok büyük. Bizlere verdiği emek için Recep Zafer Beşoluk'a, yine ağabeylerim Ali Yıldız, Ali Rıza Eliyörğün ve Fatih Çelikkan'a, ayrıca Kerim Çelikkan'a minnet duygularımı ifade etmek istiyorum.

Prof. Dr. İ. Bedii Özdemir'e verdiği her türlü destek için teşekkür ediyorum.

İsveç'te gerçekleştirdiğim araştırma ziyaretini ilk olarak aklıma düşüren, sevgili hocamız Doç. Dr. Fatma Özdemir. Kendisine, eksik etmediği iyi dilekleri için teşekkür ediyorum.

Birlikte araştırma görevlisi olarak çalıştığım arkadaşlarım Ali Demirci ve Nurettin Cenk Turgay'a, Sevgi Harman ve Selçuk Kayacan'a, paylaştığımız her şey için minnettarım. Özgür Aykanat, Özgür Martin, Tonguç Çağın, Rojbin Özlem Laleoğlu, Muzaffer Ayvaz ve Serkan Karaçuha adını anmak istediğim diğer arkadaşlarım. Bu süreçte geçirdiğim en keyifli zamanlarımı bu insanlara borçluyum.

Ali Demirci'nin "Uygulamalı Matematik Enstitüsü" hayaline önceleri dudak bükerken, bir süre sonra kendimi bu hayale ortak olmaya evrilmiş buldum. Umarım bu ortaklık gerçeğe dönüşür. Paylaştığı arkadaşlık için kendisine minnettarım.

İTÜ Matematik Bölümü ailesindeki tüm elemanlara yürekten sevgilerimi ifade etmek istiyorum.

Tomasz Adamowicz'e Linköping-The Bishop's Arms'ta düzenlediği üç adet 'nonlinear symposium' ve sohbetleri için teşekkür etmek istiyorum.

Beni yetiştiren anne-babam Nurcan Özemir ve Ali Özemir'e, çok istesem de nasıl ağabeylik yapacağımı bilemediğim çok sevdiğim kardeşlerim Alpaslan, Gülcan ve Özlem'e sevgi ve teşekkürlerimi sunuyorum.

Başta Birsen ve Deniz; bu çalışmanın tüm 'fahri' yazarlarına sonsuz teşekkür.

Ağustos 2012

Cihangir ÖZEMİR

## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

|                                                                    |           |
|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| ÖNSÖZ .....                                                        | viii      |
| İÇİNDEKİLER .....                                                  | ix        |
| KISALTMALAR.....                                                   | xiii      |
| ÇİZELGE LİSTESİ.....                                               | xv        |
| ŞEKİL LİSTESİ.....                                                 | xvii      |
| ÖZET .....                                                         | xix       |
| SUMMARY .....                                                      | xxiii     |
| <b>1. GİRİŞ .....</b>                                              | <b>1</b>  |
| 1.1 Tezin Amacı.....                                               | 1         |
| 1.2 Literatür Araştırması .....                                    | 2         |
| 1.2.1 Genel sonuçlar .....                                         | 2         |
| 1.2.2 Değişken katsayılı NLS denklemi alt sınıfları.....           | 6         |
| 1.2.3 İntegre edilebilirliğe ilişkin sonuçlar.....                 | 8         |
| 1.2.4 Evrim tipi 2+1-boyutlu denklemlere ilişkin sonuçlar.....     | 11        |
| 1.3 Tezde İncelenen Problemler .....                               | 12        |
| 1.3.1 NLS denklemi integrallenebilirlik analizi .....              | 12        |
| 1.3.2 NLS denklemi grup-değişmez çözümleri .....                   | 12        |
| 1.3.3 KKS denklemi simetri cebiri sınıfları.....                   | 12        |
| 1.3.4 KP-Burgers denkleminin sonsuz boyutlu simetri cebirleri..... | 13        |
| <b>2. LIE GRUPLARI VE LIE CEBİRLERİ .....</b>                      | <b>15</b> |
| 2.1 Lie Grupları .....                                             | 15        |
| 2.2 Lie Cebirleri.....                                             | 17        |
| <b>3. NLS DENKLEMİ İNTEGRALLENEBİLİRLİK ANALİZİ .....</b>          | <b>27</b> |
| 3.1 Giriş .....                                                    | 27        |
| 3.2 Painlevé Analizi.....                                          | 28        |
| 3.2.1 (3.1) denklemi için Painlevé testi .....                     | 30        |
| 3.2.2 (3.2) denklemi için Painlevé testi .....                     | 35        |
| 3.2.3 (3.3) denklemi için Painlevé testi .....                     | 36        |
| 3.3 NLS Denkleminin Dönüşümü .....                                 | 37        |
| 3.4 Gross-Pitaevskii Denkleminin Uygulama.....                     | 42        |
| 3.5 Tam Çözümler .....                                             | 46        |
| 3.5.1 (3.1) sınıfı .....                                           | 46        |
| 3.5.2 (3.2) sınıfı .....                                           | 47        |
| 3.5.3 (3.3) sınıfı .....                                           | 48        |

|                                                                     |           |
|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4. NLS DENKLEMİ GRUP-DEĞİŞMEZ ÇÖZÜMLERİ .....</b>                | <b>51</b> |
| 4.1 Giriş .....                                                     | 51        |
| 4.2 Optimal Sistemin Bulunması.....                                 | 52        |
| 4.2.1 $L_1$ cebiri için optimal sistem.....                         | 52        |
| 4.2.2 $L_2$ cebiri için optimal sistem.....                         | 55        |
| 4.2.3 $L_3$ cebiri için optimal sistem.....                         | 57        |
| 4.2.4 $L_4$ cebiri için optimal sistem.....                         | 59        |
| 4.2.5 $L_5$ cebiri için optimal sistem.....                         | 60        |
| 4.3 İndirgenmiş Denklemler.....                                     | 61        |
| 4.3.1 $L_1 = \{T, D_1, C_1, W\}$ çözülemez cebiri.....              | 62        |
| 4.3.1.1 $L_{1,1} = \{T + C_1 + aW\}$ alt cebiri .....               | 63        |
| 4.3.1.2 $L_{1,2} = \{D_1 + bW\}$ alt cebiri.....                    | 65        |
| 4.3.1.3 $L_{1,3} = \{T + cW\}$ alt cebiri.....                      | 66        |
| 4.3.2 $L_2 = \{T, P, B, W\}$ nilpotent cebiri .....                 | 67        |
| 4.3.2.1 $L_{2,1} = \{P\}$ alt cebiri.....                           | 68        |
| 4.3.2.2 $L_{2,2} = \{T + aW\}$ alt cebiri.....                      | 68        |
| 4.3.2.3 $L_{2,3} = \{B + bT\}$ alt cebiri.....                      | 69        |
| 4.3.3 $L_3 = \{T, P, D_2, W\}$ çözülebilir cebiri .....             | 70        |
| 4.3.3.1 $L_{3,1} = \{T\}$ alt cebiri .....                          | 70        |
| 4.3.3.2 $L_{3,2} = \{P\}$ alt cebiri.....                           | 71        |
| 4.3.3.3 $L_{3,3} = \{T + \varepsilon_1 W\}$ alt cebiri .....        | 71        |
| 4.3.3.4 $L_{3,4} = \{P + \varepsilon_1 W\}$ alt cebiri .....        | 72        |
| 4.3.3.5 $L_{3,5} = \{D + aW\}$ alt cebiri .....                     | 73        |
| 4.3.3.6 $L_{3,6} = T + \varepsilon_1 P + bW$ alt cebiri .....       | 73        |
| 4.3.4 $L_4 = \{P, B, D_2, W\}$ çözülebilir cebiri .....             | 75        |
| 4.3.4.1 $L_{4,1} = \{P\}$ alt cebiri.....                           | 75        |
| 4.3.4.2 $L_{4,2} = \{B\}$ alt cebiri.....                           | 76        |
| 4.3.4.3 $L_{4,3} = \{P + \varepsilon_1 B\}$ alt cebiri.....         | 76        |
| 4.3.4.4 $L_{4,4} = \{D_2 + aW\}$ alt cebiri.....                    | 77        |
| 4.3.5 $L_5 = \{P, B, C_2, W\}$ çözülebilir cebiri .....             | 78        |
| 4.3.5.1 $L_{5,1} = \{B\}$ alt cebiri.....                           | 78        |
| 4.3.5.2 $L_{5,2} = \{C_2 + aW\}$ alt cebiri .....                   | 79        |
| 4.4 İndirgenmiş Denklemlerin Analizi .....                          | 79        |
| 4.4.1 Üçüncü mertebe denklemler.....                                | 80        |
| 4.4.2 İkinci mertebe denklemler.....                                | 81        |
| 4.4.2.1 (4.98) denkleminin çözümü .....                             | 81        |
| 4.4.2.2 (4.131) denkleminin çözümü .....                            | 83        |
| 4.4.3 İndirgenmiş denklemlerin çözümlerinin bazı alt sınıfları..... | 84        |
| 4.5 Kısmi İntegre Edilebilirliğe İlişkin Sonuçlar .....             | 86        |
| 4.5.1 $L_1$ cebiri için seri kesme yöntemi .....                    | 88        |
| 4.5.2 $L_3$ cebiri için seri kesme yöntemi .....                    | 94        |
| 4.5.3 $L_4$ cebiri için seri kesme yöntemi .....                    | 95        |
| <b>5. KKS DENKLEMİ SİMETRİ CEBİRİ SINIFLARI .....</b>               | <b>97</b> |
| 5.1 Giriş .....                                                     | 97        |

|                                                                                                            |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.2 Denklik Dönüşümleri ve Belirleyici Denklemler .....                                                    | 98         |
| 5.3 Simetri Cebirleri .....                                                                                | 100        |
| 5.3.1 Sabit katsayılı denklem için simetritler .....                                                       | 101        |
| 5.3.2 Bir boyutlu cebirler.....                                                                            | 102        |
| 5.3.3 İki boyutlu cebirler .....                                                                           | 104        |
| 5.3.4 Üç boyutlu cebirler .....                                                                            | 105        |
| 5.3.4.1 Abelyen durum .....                                                                                | 106        |
| 5.3.4.2 Ayrıştırılabilir durum .....                                                                       | 108        |
| 5.3.4.3 Nilpotent cebirler .....                                                                           | 109        |
| 5.3.5 Dört boyutlu cebirler .....                                                                          | 109        |
| 5.3.6 Beş ve altı boyutlu cebirler.....                                                                    | 111        |
| 5.3.6.1 $A_{3,3} \oplus A_1$ cebiri .....                                                                  | 111        |
| 5.3.6.2 $A_{4,1}$ cebiri.....                                                                              | 112        |
| 5.3.6.3 $A_{4,8}$ cebiri.....                                                                              | 113        |
| 5.3.6.4 $A_{4,9}$ cebiri.....                                                                              | 114        |
| 5.4 Sabit Katsayılı Denkleme Dönüşüm .....                                                                 | 115        |
| 5.5 Değişken Katsayılı Radyal Tipte Kübik-Kuintik Schrödinger Denklemi<br>İçin Simetri İndirgemeleri ..... | 117        |
| <b>6. KP-BURGERS DENKLEMİ SONSUZ BOYUTLU SİMETRİ CEBİR-<br/>LERİ.....</b>                                  | <b>121</b> |
| 6.1 Giriş .....                                                                                            | 121        |
| 6.2 Denklik Dönüşümleri ve Belirleyici Denklemler .....                                                    | 122        |
| 6.2.1 Kanonik denklem.....                                                                                 | 123        |
| 6.2.2 Özel durumda kanonik denklem.....                                                                    | 124        |
| 6.2.3 Simetri üretici ve belirleyici denklemler.....                                                       | 124        |
| 6.3 Simetri Cebirleri .....                                                                                | 125        |
| 6.3.1 Virasoro tipinde simetri cebiri .....                                                                | 125        |
| 6.3.2 Kac-Moody tipinde simetri cebiri .....                                                               | 128        |
| 6.3.3 Simetri cebirinde bir fonksiyon.....                                                                 | 130        |
| 6.4 Bazı Uygulamalar.....                                                                                  | 130        |
| 6.4.1 Virasoro durumu için indirgeme.....                                                                  | 130        |
| 6.4.2 Kac-Moody durumu için indirgeme .....                                                                | 131        |
| 6.4.3 Painlevé özelliği ve bir tam çözüm.....                                                              | 132        |
| 6.4.4 Özel bir durumda simetri ve indirgemeler.....                                                        | 133        |
| <b>7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....</b>                                                                        | <b>137</b> |
| 7.1 Sonuçlar .....                                                                                         | 137        |
| 7.2 Öneriler.....                                                                                          | 139        |
| <b>KAYNAKLAR.....</b>                                                                                      | <b>141</b> |
| <b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>                                                                                      | <b>150</b> |



## KISALTMALAR

|              |                                                |
|--------------|------------------------------------------------|
| <b>ADD</b>   | : Adi Diferansiyel Denklem                     |
| <b>DS</b>    | : Davey-Stewartson                             |
| <b>GDS</b>   | : Genelleştirilmiş Davey-Stewartson            |
| <b>KDD</b>   | : Kısmi Diferansiyel Denklem                   |
| <b>KDV</b>   | : Korteweg-de Vries                            |
| <b>KGL</b>   | : Kompleks Ginzburg-Landau                     |
| <b>KKS</b>   | : Kübik-Kuintik Schrödinger                    |
| <b>KKSD</b>  | : Kübik-Kuintik Schrödinger Denklemi           |
| <b>KMV</b>   | : Kac-Moody-Virasoro                           |
| <b>KP</b>    | : Kadomtsev-Petviashvili                       |
| <b>NLS</b>   | : Nonlinear Schrödinger, Nonlinear Schrödinger |
| <b>NLSD</b>  | : Nonlinear Schrödinger Denklemi               |
| <b>ODE</b>   | : Ordinary Differential Equation               |
| <b>PDE</b>   | : Partial Differential Equation                |
| <b>VCNLS</b> | : Variable Coefficient Nonlinear Schrödinger   |
| <b>WTC</b>   | : Weiss-Tabor-Carnevale                        |



## ÇİZELGE LİSTESİ

|                                                                                   | <u>Sayfa</u> |
|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| <b>Çizelge 4.1:</b> Dört boyutlu simetri cebirleri ve (3.1) katsayıları .....     | 51           |
| <b>Çizelge 4.2:</b> 4-boyutlu cebirlerin 1-boyutlu alt cebirleri .....            | 61           |
| <b>Çizelge 4.3:</b> İndirgenmiş denklemler.....                                   | 80           |
| <b>Çizelge 4.4:</b> (4.220) denklemi için katsayılar.....                         | 85           |
| <b>Çizelge 5.1:</b> (5.90) denklemi için dört boyutlu cebire sahip sınıflar ..... | 118          |
| <b>Çizelge 5.2:</b> Sabitler üzerindeki koşullar .....                            | 118          |



## ŞEKİL LİSTESİ

|                                                                                                    | <u>Sayfa</u> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| Şekil 3.1 : (3.106); $-40 \leq x \leq 40$ , $0 \leq t \leq 100$ (a); $0 \leq t \leq 160$ (b). .... | 47           |
| Şekil 3.2 : (3.107); $-40 \leq x \leq 40$ , $0 \leq t \leq 100$ (a); $0 \leq t \leq 160$ (b). .... | 47           |



## BAZI ÖZEL 1+1- VE 2+1-BOYUTLU EVRİM TİPİ DENKLEMLERDE İNTEGRE EDİLEBİLME VE SİMETRİLER

### ÖZET

Evrım tipi denklemler, ısı yayılımı ve dalga hareketi gibi temel fiziksel olayların modelleri olarak ortaya çıkmaktadır. Isı denklemleri, nonlinear Schrödinger (NLS) tipi dalga denklemleri, Davey-Stewartson (DS) ve genelleştirilmiş Davey-Stewartson (GDS) sistemi, Korteweg-de Vries (KdV), Burgers ve Kadomtsev-Petviashvili (KP) denklemleri bu sınıf için en sık karşılaşılan denklemler olarak anılabilir. Bahsedilen denklemler, uygulamalı matematik ve matematiksel fizik alanındaki literatürün oldukça büyük bir kısmına konu olmaktadır.

Sabit katsayılı denklemlerin değişken katsayılı genelleştirmeleri, türetildikleri modellerde homojen olmayan, konum ve/veya zamana göre değişim gösteren koşullar gözönüne alındığında elde edilir. Çoğunlukla bu genelleştirme sonucunda orijinal denklemin simetri cebiri ve integre edilebilirliği gibi özellikleri aynı kalmaz. Ancak değişken katsayılar belli koşulları sağladığında genelleştirilmiş denklem de Lax çifti, Painlevé özelliği gibi integre edilebilirlik özelliklerine sahip olabilir, simetri cebirinin tümünü veya alt cebirlerini taşıyabilir. Bu koşulları elde etmedeki seçeneklerden biri, değişken katsayılı denklemi sabit katsayılı denkleme dönüştüren nokta dönüşümlerinin bulunmasıdır.

Painlevé özelliği, bir denklemin tüm çözümlerinin hareketli tekil noktalar civarında tek değerli olması, yani tüm çözümlerde en fazla kutup türünden tekillik bulunmasıdır. Painlevé özelliği integre edilebilirlik için gerek veya yeter koşul değildir. Ancak literatürde karşılaşılan integre edilebilir denklemlerin büyük bir kısmı aynı zamanda bu özelliğe de sahiptir. Bu özelliği kimi yazarlar, "P-integre edilebilirlik" olarak da adlandırmaktadır. Painlevé özelliğinin araştırılması bazı durumlarda bilgisayar yazılımları ile dahi yapılabilmektedir. Bu kolaylık nedeniyle Painlevé analizi, denklemlerin integre edilebilirlik ve çözüm analizinde iyi bir başlangıç noktası olmaktadır. İntegre edilebilir olmayan denklemler için Painlevé seri temsillerinin sonlu terimde kesilmesinin de tam çözüm elde etmede faydalı yöntemlerden biri olduğunu not etmek gerekir.

Diferansiyel denklemin çözüm uzayını değişmez bırakan dönüşüm gruplarının elde edilmesi, analitik çözüm yöntemleri oldukça kısıtlı olan doğrusal olmayan denklemlerin analizinde en etkin sistematik araçlardan biridir. Lie grupları adını alan bu dönüşüm grupları ve ilişkili simetri cebirlerinin kullanılmasıyla bir kısmi diferansiyel denklemin değişken sayısının azaltılması ve yeterince zengin bir simetri cebiri varsa adi diferansiyel denklemlere indirgenerek tam çözümlerin bulunması mümkündür. Uygulama alanı fark denklemlerine değin uzanmaktadır. Görünüşte farklı olan iki denklemin simetri cebirleri, bir dönüşümle birbirine denk ise bu denklemler de aslında birbirine dönüştürülebilir. Bu açıdan Lie

teorisi, diferansiyel denklemlerin sınıflandırılmasında bir araç olarak ortaya çıkar. Diferansiyel denklemlerin simetri grupları dikkate alınarak sınıflandırılması günümüze değin aktif olarak çalışılan bir konu olmuştur. Matematiksel açıdan, genel bir denklem sınıfına ait, belirli simetri cebirlerine sahip denklem ailelerinin belirlenerek ayırt edilmesi ilginç bir problemdir. Elde edilen cebirler, bu ailelerin temsilci denklemlerinin grup-değişmez çözümleri için de yol göstermektedir. Sonsuz boyutlu simetri cebirleri söz konusu olduğunda, elde edilen denklem ailelerinin integre edilebilirliği için de ışık tutabilmektedir. Fizikçiler için, bu faydalara ek olarak, uygulamada karşılaşılan denklemlerin genel sınıflarının cebirsel özellikleri dikkate alınarak yapılan sınıflandırma çalışmalarında ulaşılan, çok sayıda durumda problemin fiziksel doğasını yansıtan sonuçlar ilginç olmaktadır. Elde edilen denklem aileleri, belirli simetri özelliklerine sahip fiziksel olayları modellemede aday olmaktadır.

Bu tez çalışmasında yukarıda belirtilen çerçevedeki analiz yöntemleriyle dört adet problem ele alınmıştır. İncelenen ilk problem, değişken katsayılı kübik nonlinear Schrödinger denklemi'nin (NLSD) integre edilebilirliği üzerinedir. Değişken katsayılı NLSD ve türevli terimleri içeren genelleştirmeleri için Painlevé testine ilişkin sonuçlar elde edilmiştir. Değişken katsayılı NLSD için sabit katsayılı denkleme dönüşüm formülleri elde edilmiş, elde edilen sonuçların simetri cebirleriyle ilişkisi bir örnek üzerinde ele alınmıştır. Sunulan sonuçlar arasında bazı tam çözümler de bulunmaktadır.

Literatürdeki sonuçlara göre, değişken katsayılı NLS denkleminin Lie simetri cebirlerinin maksimal boyutu beştir ve maksimal cebir, denklem sabit katsayılı denkleme dönüştürülebildiğinde gerçekleşmektedir. Bunun yanında, dört boyutlu simetri cebirlerine sahip NLS denklemleri, birbirine denk olmayan beş farklı sınıfa ait olabilir. İlk problemde elde edilen sonuçlara göre, değişken katsayılı NLSD, Painlevé testini geçtiği koşulda standart NLS denklemine dönüştürülebilir ve beş boyutlu bir simetri cebirine sahiptir. Bu, denklemin integre edilebilir durumu olarak adlandırılır. Eğer bir değişken katsayılı NLS denkleminin simetri cebirinin boyutu dört ise, sabit katsayılı denkleme dönüştürülemez. Dört boyutlu simetri cebirlerinin kanonik denklemleri için, bir boyutlu cebirlerin optimal sistemi kullanılarak adi diferansiyel denklemlere indirgeme yapılabilir. Bu şekilde mümkün tüm indirgemelerin elde edilmesi ve çözümlerinin analizi, ele alınan ikinci problemdir. Bunun yanında, kanonik kısmi diferansiyel denklemlerin Painlevé serilerinin ilk terimde kesilmesi yoluyla oldukça ilginç tam çözümler elde edilmiştir.

Değişken katsayılı kübik-kuintik Schrödinger denklemi (KKSD), özellikle fiber optik uygulamalarında model olarak kullanılan bir denklemdir. Simetri cebirinin maksimal boyutunun belirlenmesi ve denklem ailesinin sahip olabileceği sonlu boyutlu simetri cebirlerinin kanonik sınıflarının bulunması literatürde mevcut kübik durum ile paralellik göstermektedir. Analiz sonuçlarına göre kübik-kuintik denklem için maksimal simetri cebiri dört boyutlu, kübik durumda beş boyutlu, kuintik durumda ise altı boyutludur. Burada elde edilen sonuçlar, ikinci problemdeki analize benzer şekilde, dört boyutlu simetri cebirlerine sahip kübik-kuintik denklemler için grup-değişmez çözümlerin araştırılması imkanını verir.

Son olarak ele alınan problem, değişken katsayılı KP-Burgers denkleminin sonsuz boyutlu Lie simetri cebirlerine sahip sınıflarının belirlenmesidir. Literatürde integre

edilebilirliği bilinen  $2 + 1$ -boyutlu denklemler için Kac-Moody-Virasoro tipinde simetri cebirine sahip olmak tipik bir özelliktir. Ele alınan denklem ailesi için, Virasoro ve Kac-Moody tipinde simetri cebirlerinin denklemin değişmezlik cebiri olarak gereklenebildiği gösterilmiş, bulunan kanonik denklem aileleri için Painlev özelliği, tam çözüm ve indirgenmiş denklemler üzerinde durulmuştur.

İntegre edilebilirlik ve simetri araçlarını kullanarak, değişken katsayılı evrim tipi denklemlerden iki farklı sınıf dalga yayılımı denklemleri üzerine literatürde mevcut sonuçlara katkıda bulunduğumuzu düşünmekteyiz.



## **INTEGRABILITY AND SYMMETRIES OF SOME SPECIAL EVOLUTIONARY TYPE EQUATIONS IN 1+1- AND 2+1-DIMENSIONS**

### **SUMMARY**

Evolutionary type equations tend to arise as models of basic physical phenomena such as heat conduction and wave propagation. Heat equations, wave equations of nonlinear Schrödinger (NLS) type, Davey-Stewartson and the generalized Davey-Stewartson equations, Korteweg-de Vries, Burgers and Kadomtsev-Petviashvili equations can be mentioned as the equations encountered very frequently belonging to this class. It can be said that quite a big portion of the literature on applied mathematics and mathematical physics is devoted to the analysis of these equations.

Variable coefficient extensions of nonlinear evolution type equations mostly arise in cases when less idealized conditions such as inhomogeneities and variable topographies are assumed in their derivation. For example, variable coefficient Korteweg-de Vries and Kadomtsev-Petviashvili equations describe the propagation of waves in a fluid under the more realistic assumptions including non-uniformness of the depth and width, the compressibility of the fluid, the presence of vorticity and others. While these conditions lead to variable coefficient equations, all or some of the integrability properties of their standard counterparts, namely when the coefficients are set equal to constants, are in general destroyed. However, when the coefficients are appropriately related or have some specific form, the generalized equation can still be integrable as evidenced by the presence of Painlevé property, Lax pairs, symmetries and other attributes of integrability. One of the approaches to determine these relations is to transform the variable-coefficient equation to its constant-coefficient counterpart.

A differential equation is said to have the Painlevé property if all of its solutions are single-valued around any movable singular point; that is, they have singularities of at most pole-type. Having the Painlevé property is not a necessary nor a sufficient condition for the integrability of an equation. However, most of the equations known to be integrable in the literature also have this property. Some authors name this property as "P-integrability". Applying the Painlevé test to a differential equation can be made using a computer package in some cases, therefore it is a good starting point for an analysis of integrability and solutions of an equation. If a partial differential equation (PDE) passes this test, it can 'roughly' be said that the equation has a good chance of being integrable. For integrable PDEs it is usually possible to construct auto-Bäcklund transformations which relate equations to themselves via differential substitutions and also Lax pairs, which then ensures the sufficient condition of integrability. Application of the Painlevé series expansion to nonintegrable PDEs can allow particular explicit solutions to be obtained by truncating the expansion at a finite term. This usually requires compatibility of an overdetermined PDE system. Let us mention that the method of truncated expansion has been successfully applied to many nonintegrable PDEs in constructing exact solutions.

Transformation groups which leave the solution space of an equation invariant is one of the most efficient systematic tools for analysis of nonlinear equations, for which methods of finding analytical solutions are very restricted. By the use of these symmetry groups, which are called Lie groups, and the associated symmetry algebras it is possible to lower the number of independent variables of a PDE, and even reduce it to an ordinary differential equation (ODE) if the symmetry algebra is rich enough. Application of the theory is also possible to difference equations. If two equations have symmetry algebras which are equivalent by a point transformation, then the equations are also equivalent to each other by this transformation. From this point of view the theory of Lie appears as a tool for classifying differential equations.

Classifying evolutionary type PDEs has long been an active research area both for mathematicians and physicists. There are various approaches for the classification of PDEs with respect to point or higher symmetries under the action of diffeomorphisms. So far classifications of considerably large classes of equations in (1+1)-dimensions under the low-dimensional abstract finite-dimensional Lie algebras have been done. On the other hand, it is well known that a number of physically significant integrable partial differential equations in 2+1-dimensions typically have infinite-dimensional symmetry algebras with a specific Kac-Moody-Virasoro (KMV) structure. Among them, KP equation, modified KP, cylindrical KP equation, all equations of the KP hierarchy, Davey-Stewartson system and three-wave resonant interaction equations are the most prominent ones.

For the classification of symmetry algebras of an equation having arbitrary function(s) one first needs to find the equivalence transformations of the equation, which means finding the transformations those leave the equation form-invariant (keeping the differential structure the same but changing the arbitrary elements). This can be obtained by trying a direct transformation or by the infinitesimal method. The symmetry generator is found by the algorithm due to Lie, which is a calculation based on solutions of a overdetermined system of linear PDEs. The infinitesimal is determined up to some unknown functions, and these unknowns satisfy a set of PDEs with the arbitrary functions appearing in the equation. Then equivalence transformations are used to obtain non-equivalent forms of the symmetry generator, possibly in a simpler configuration. This is called the linearization of the vector field and these non-equivalent forms are generators for canonical one-dimensional Lie algebras which can be admitted by the equation. The remaining task is to check which of the two and higher dimensional Lie algebras can be realized as the invariance algebra of the equation. This is facilitated by the use of well-known structural results on the classification of low-dimensional Lie algebras. The procedure is carried on till the arbitrary function appearing in the equation is completely determined. The result is a list of representative equations with canonical invariance algebras, classified up to equivalence transformations.

Results concerning symmetry classification of PDEs are drawing interests of both mathematicians and physicists. From the mathematical point of view, classification itself is interesting for the reason that we can distinguish between subclasses of a family of equations regarding their symmetry properties. It serves as an initial guide for the solutions of the equations which arise as representatives of the subclasses. In the case of infinite-dimensional symmetries, classification with respect to Lie symmetries can

turn out to be a way of detecting integrable systems. On the other hand, it is known that fundamental equations of physics have rich symmetry structures. A classification of their generalizations exploiting the possible different symmetry properties allow physicists to choose equations for modeling real phenomena with certain physical properties.

In this thesis we deal with four problems using methods mentioned above. We first analyze the integrability of a variable coefficient nonlinear Schrödinger (VCNLS) equation. We obtain the results concerning the Painlevé tests of the VCNLS equation and its generalizations including some derivative terms. We present the explicit transformation formulae for VCNLS to the standard NLS equation and consider the relations with the NLS symmetry algebra on a specific equation. We complete this analysis by giving some exact solutions.

According to the results already available in the literature, maximal dimension of Lie algebra of a VCNLS equation is five and it is achieved when the equation is transformable to the standard NLS. On the other hand, there are five possible four-dimensional non-equivalent Lie algebra that can be admitted. According to the results obtained in the first problem, if a VCNLS equation passes the Painlevé test it can be transformed to the standard NLS, therefore it has a five-dimensional Lie algebra. This is the integrable case. Transformation to the standard NLS is not possible in the four-dimensional case. The canonical variable coefficient PDEs having four-dimensional Lie algebras can be reduced to ODEs. For a systematic reduction we need an optimal system of one-dimensional subalgebras. Therefore we determine all such reductions in this non-integrable case and work on their solutions. Furthermore, we obtained interesting exact solutions of the canonical PDEs by truncating their Painlevé series at the first term.

Variable coefficient cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation is a typical model equation of fiber optics. Determination of the maximal dimension of the symmetry algebra and the canonical classes of the finite-dimensional symmetry algebras together with the corresponding equations follows by similar lines with the cubic case existing in the literature. According to our results, maximal dimension of the symmetry algebra is four in the genuine cubic-quintic case, five in the cubic case, and it is six in the quintic case. Results obtained in this part can be used to obtain the reduced equations for cubic-quintic equations having four-dimensional symmetry algebras and hence to find the group-invariant solutions, as in the cubic case of the second problem.

The last problem we worked on is the classification of infinite-dimensional Lie symmetry algebras of variable coefficient KP-Burgers equations. As we mentioned, integrable equations in  $2 + 1$ -dimensions typically have symmetry algebras of Kac-Moody-Virasoro type. It is shown that Virasoro and Kac-Moody type Lie algebras can be realized as invariance algebras of specific subclasses of equations and some results on Painlevé property, exact solution and reductions of the canonical equations are presented.

We believe that we have made some contributions to the results existing in the literature on two classes of variable coefficient evolutionary wave propagation equations using the tools of integrability and symmetries.



## 1. GİRİŞ

### 1.1 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasının amacı, doğrusal olmayan evrim tipi denklemlerden iki sınıfın, simetri analizi ve integre edilebilirlik yöntemlerinin araçları kullanılarak irdelenmesidir. Çalışma esas olarak dört bölümden oluşmaktadır. İlk üç bölüm, Schrödinger sınıfı denklemlerin analizi üzerinedir. Ele alınan ilk problem,  $f, g, h$  kompleks fonksiyonlar olmak üzere

$$i\psi_t + f(x, t)\psi_{xx} + g(x, t)|\psi|^2\psi + h(x, t)\psi = 0 \quad (1.1)$$

şeklinde verilen değişken katsayılı NLS dalga yayılımı denkleminin Painlevé testi (P-testi), standart NLS denklemine dönüşümü ve integre edilebilirlik-simetri cebirinin boyutu ilişkisidir. İkinci olarak, (1.1) denkleminin dört boyutlu simetri cebirine sahip, integre edilebilir olmayan alt sınıflarının kanonik denklemleri için grup-değişmez çözümler üzerinde durulmuş, buna ek olarak Painlevé serilerinin sabit terimde kesilmesi yöntemi ile oldukça ilginç tam çözümler elde edilmiştir. Çalışılan üçüncü problem,  $f$  bir reel fonksiyon, diğer katsayılar kompleks fonksiyon olmak üzere ele alınan

$$i\psi_t + f(x, t)\psi_{xx} + k(x, t)\psi_x + g(x, t)|\psi|^2\psi + q(x, t)|\psi|^4\psi + h(x, t)\psi = 0 \quad (1.2)$$

doğrusal olmayan kübik-kuintik Schrödinger (KKS) denkleminin Lie simetri cebirlerinin sınıflandırılmasıdır. Bu denklem sınıfının simetri cebirlerinin boyutu sonludur ve sınıflandırma tam olarak elde edilmiştir. Çalışmada ele alınan son problem, literatürde 2+1-boyutlu denklemler için integre edilebilirliğin kuvvetli bir işareti olarak anılan Kac-Moody-Virasoro tipinde sonsuz boyutlu simetri cebirlerinin

$$(u_t + p(y, t)uu_x + q(y, t)u_{xx} + r(y, t)u_{xxx})_x + \sigma(y, t)u_{yy} \quad (1.3)$$

$$+ a(y, t)u_y + b(y, t)u_{xy} + c(y, t)u_{xx} + e(y, t)u_x + f(y, t)u + h(y, t) = 0$$

şeklinde ele alınacak KP-Burgers denklemi üzerinde gerçekleştirilmeye çalışılmasıdır.

## 1.2 Literatür Araştırması

### 1.2.1 Genel sonuçlar

$\Delta$ ,  $n$  uzay boyutu için Laplace operatörünü göstermek üzere serbest doğrusal Schrödinger denklemi

$$i\psi_t + \Delta\psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.4)$$

için  $2n + 4 + n(n-1)/2$  boyutlu Lie simetri cebiri  $\text{sch}(n)$

$$\begin{aligned} P_0 &= \partial_t, \quad P_k = \partial_k, \quad E = i(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}), \\ J_{kl} &= x_k\partial_l - x_l\partial_k, \quad B_k = t\partial_k + \frac{1}{2}x_kE, \\ D &= 2t\partial_t + x_k\partial_k - \frac{n}{2}(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}), \\ C &= t^2\partial_t + tx_k\partial_k + \frac{|x|^2}{4}E - \frac{n}{2}t(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

vektör alanları tarafından üretilir [1]. Burada  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $k, l = 1, \dots, n$ ,  $\partial_k = \partial/\partial x_k$ ,  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyon ve  $\psi^*$  ise kompleks eşleniği göstermektedir. Tekrarlayan indislerde toplam varsayılmıştır. Cebirin yukarıda verilen bazı  $T$  zaman ötelemesi,  $n$  adet  $P_k$  konum ötelemeleri,  $E$  faz ötelemesi,  $n(n-1)/2$  sayıda  $J_{kl}$  dönme dönüşümü,  $n$  sayıda  $B_k$  Galilei itkisi dönüşümü,  $D$  ölçek dönüşümü ve  $C$  konformal dönüşümlerini temsil eden vektör alanlarından oluşmaktadır.  $\{T, P_k, E, J_{kl}, B_k\}$  alt cebiri genişletilmiş Galilei cebiri,  $\{D, T, P_k, E, J_{kl}, B_k\}$  alt cebiri ise genişletilmiş Galilei benzeşim cebiri  $\text{gs}(n)$  olarak isimlendirilir.

Schrödinger tipi denklemlerin simetri cebirleri ile ilgili ilk çalışmada, (1.4) denklemi  $n = 3$  uzay boyutu için ele alınmış ve  $\text{sch}(3)$  cebiri elde edilmiştir [2]. Harmonik bir potansiyel etkisinin göze alındığı durumda

$$i\psi_t + \frac{1}{2m}\Delta\psi - \frac{m\omega^2}{2}|x|^2\psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.6)$$

denklemi için yine simetri cebiri elde edilmiş ve  $\text{sch}(n)$  cebirine izomorf olduğu gözlenmiştir [3]. Keyfi bir potansiyelin etkisi gözönüne alınarak,

$$i\psi_t + \frac{1}{2m}\Delta\psi - V(x, t)\psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.7)$$

denkleminin değişmezlik cebiri incelenmiş ve fiziksel bazı potansiyel örnekleri için dönüşüm grupları verilmiştir [4]. Serbest parçacık, yerçekimi potansiyeli ve harmonik

potansiyel için Schrödinger grubu, maksimal değişmezlik grubudur. Bunlara ek olarak, ters kare potansiyel için  $SL(2, \mathbb{R}) \oplus O(n)$ , izotrop olmayan harmonik salıncı için  $\mathbb{R}^{2n}$  abelyen grubu, zamana bağlı Kepler potansiyelleri için  $O(n) \oplus \mathbb{R}$  değişmezlik grupları olarak elde edilmiştir. Ayrıca denklem, her statik potansiyel için zaman ötelemesi, küresel simetrik potansiyel için dönme dönüşümleri etkisinde değişmezdir. Eş zamanlı bir çalışmada, (1.7) denklemi zamandan bağımsız potansiyel için ele alınmış ve  $n = 1, 2, 3$  için denklemin bir simetri cebirine sahip olmasına izin veren potansiyel formlarının tam bir listesi elde edilmiştir [5].

$$L\psi = i\psi_t + \frac{1}{2}\Delta\psi - V(x, t)\psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.8)$$

şeklinde verilen denklemin simetri cebiri,

$$\mathbf{v} = Q\partial_\psi + Q^*\partial_{\psi^*}, \quad Q = \chi(x, t) + iX\psi \quad (1.9)$$

şeklinde bir evrim tipi vektör alanı tarafından üretilir [6]. Burada

$$X = i(\tau(t)\partial_t + \xi_k(x, t)\partial_{x_k} - i\phi(x, t)), \quad (1.10)$$

$$\xi_k(x, t) = \frac{1}{2}x_k\tau' - A_{kl}x_l + f_k(t), \quad (1.11)$$

$$\phi(x, t) = \frac{1}{4}\tau''|x|^2 + x_k f'_k + g(t) + i\left(\frac{n}{4}\tau' - B\right) \quad (1.12)$$

şeklindedir.  $\chi(x, t)$  (1.8) denklemini sağlar,  $A_{kl} = -A_{lk}$  ve  $B$  sabitlerdir.  $\tau(t)$ ,  $f_k(t)$ ,  $g(t)$  fonsiyonları ve  $A_{kl}$  sabitleri potansiyele bağlı olup

$$\tau(t)V_t + \xi_k(x, t)V_{x_k} + \tau'V + \frac{1}{4}\tau'''|x|^2 + x_k f''_k + g' = 0 \quad (1.13)$$

denklemini sağlamalıdır. Her  $V(x, t)$  potansiyeli için  $\chi(x, t)$  fonksiyonu,  $B$  sabiti ve bir  $g = g_0$  sabiti, (1.13) denkleminin çözümüdür. Dolayısıyla Schrödinger denkleminin doğrusallığı nedeniyle

$$\begin{aligned} S(\chi) &= \chi(x, t)\partial_\psi + \chi^*(x, t)\partial_{\psi^*}, \quad L\chi = 0, \\ N &= \psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}, \\ E &= i(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) \end{aligned} \quad (1.14)$$

denklemin aşıkâr simetrileridir.  $V = 0$  için  $sch(n)$  yukarıda verilmişti. Bu cebirin  $n \geq 3$  için Levi ayrışımı,  $H_n$   $2n + 1$  boyutlu Heisenberg cebiri olmak üzere

$$[sl(2, \mathbb{R}) \oplus O(n)] \triangleright H_n \quad (1.15)$$

şeklindedir.

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \sim \{P_0, D, C\}, \quad \mathcal{O}(n) \sim \{J_{kl}\}, \quad H_n \sim \{P_k, B_k, E\} \quad (1.16)$$

olduğunu not edelim.  $n = 1$  uzay boyutunda, altı boyutlu  $\mathfrak{sch}(1)$  cebirinin yapısı,  $H_1$  üç boyutlu Heisenberg cebiri olmak üzere

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \supset H_1 \sim \{D, C, T\} \supset \{P, B, E\} \quad (1.17)$$

şeklinde olup sıfırdan farklı komütasyon bağıntıları

$$\begin{aligned} [T, D] &= 2T, & [T, C] &= D, & [D, C] &= 2C, & [P, B] &= \frac{1}{2}E, \\ [T, B] &= P, & [D, B] &= B, & [D, P] &= -P, & [C, P] &= -B \end{aligned} \quad (1.18)$$

eşitliklerini sağlamaktadır [7].  $V = V(x)$  zamandan bağımsız potansiyeli için, (1.14) simetrilere ilaveten  $P_0 = \partial_t$  simetrisi bulunur. Radyal  $V = V(|x|)$  potansiyeli durumunda  $P_0$  ve  $J_{kl}$  simetrisi eklenir.  $V = V(x_n)$  gibi bir potansiyel durumunda aşikar simetrisi

$$\begin{aligned} P_0 &= \partial_t, & P_j &= \partial_j, & B_j &= t\partial_j - x_jE, & 1 \leq j \leq n-1, \\ J_{kl} &= x_k\partial_l - x_l\partial_k, & 1 \leq k \leq l \leq n-1 \end{aligned} \quad (1.19)$$

ile genişler [6].

$\mathfrak{sch}(1)$  cebirinin  $1 \leq \dim L \leq 6$  boyutlu alt cebirleri, beş ve altı boyutlu iç otomorfizma grubunun dönüşümleri kullanılarak sınıflandırılmış, sonra da bu alt cebirlerin

$$i\psi_t + \psi_{xx} = F(t, x, \psi, \psi^*) \quad (1.20)$$

tipinde hangi denklemleri değişmez bıraktığı belirlenmiştir [8]. Belirli bir denklemin simetri cebirinin araştırılması yanında bu yaklaşım, simetri analizinin ters problemi olarak adlandırılabilir.  $\mathfrak{sch}(2)$  cebirinin alt cebirlerinin sınıflandırılması literatürde mevcuttur [9]. Bu alt cebirler altında değişmez kalan

$$i\psi_t + \Delta\psi = F(x, y, t, \psi, \psi^*) \quad (1.21)$$

şeklindeki denklem sınıflarının belirlenmesi de başka bir ters problem örneği olarak verilebilir [10]. Yine bir ters problem örneği olarak

$$\begin{aligned} i\psi_t + h\Delta\psi &= \psi F(|\psi|, |\psi|_a |\psi|_a), \\ i\psi_t + h\Delta\psi &= c\psi \frac{\Delta|\psi|^2}{|\psi|^2} + \psi F(|\psi|) \end{aligned} \quad (1.22)$$

tipinde denklemler, Galilei değişmez Schrödinger tipi denklemler ailesinin birer alt sınıfı olarak elde edilmiştir [11]. Bir dizi çalışmada,  $(3+1)$  boyutlu doğrusal olmayan kübik-kuintik Schrödinger denklemi

$$i\psi_t + \Delta\psi = a_0\psi + a_1|\psi|^2\psi + a_2|\psi|^4\psi, \quad (1.23)$$

$$\psi = \psi(x, y, z, t) \in \mathbb{C}, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (a_1, a_2) \neq (0, 0)$$

için simetri cebirleri ve bu cebirlerin alt cebirleri bulunmuş,  $2 \leq \dim L \leq 4$  boyutlu alt cebirler kullanılarak kısmi diferansiyel denklemler, adi diferansiyel denklemler ve cebirsel denklemlere indirgemeler yapılmış ve adi denklemlerin çözümleri üzerinde durulmuştur [12–14]. (1.23) denklemi için radyal koordinatın fonksiyonu olarak çözüm aranırsa denklem,  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  olmak üzere

$$i\psi_t + \psi_{rr} + \frac{2}{r}\psi_r = a_0\psi + a_1|\psi|^2\psi + a_2|\psi|^4\psi \quad (1.24)$$

$$\psi = \psi(x, y, z, t) \in \mathbb{C}, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (a_1, a_2) \neq (0, 0)$$

şeklini alır. [12]'de elde edilen cebirlerden dönme dönüşümlerini içeren alt cebirler altında indirgemeler yapılarak, bir küre üzerinde başlangıç değeri ile verilen Cauchy probleminin çözümleri elde edilmiştir [15].

$$i\psi_t + \Delta\psi = |\psi|^2\psi, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \psi \in \mathbb{C}^N, \quad N = 2, 3 \quad (1.25)$$

şeklinde dikkate alınan doğrusal olmayan kübik vektör Schrödinger dalga denklemi için simetri cebirleri ve grup-değişmez çözümler elde edilmiştir [16].  $N = 3$  için simetri cebiri  $\mathfrak{sch}(2) \oplus \mathfrak{su}(3)$  yapısındadır.  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$  ve keyfi  $N$  için  $\mathfrak{gs}(n) \oplus \mathfrak{su}(N)$  şeklinde simetri cebiri genelleştirilebilir, konformal dönüşümler daha üst boyutlarda geçerli olmamaktadır.  $N = 1$  dalga durumundaki skaler denklem için, [10]'da elde edilen alt cebirler kullanılarak grup-değişmez çözümler üzerinde çalışılmıştır [17].  $n$  uzay boyutunda

$$i\psi_t + \Delta\psi + F(\psi, \psi^*) = 0 \quad (1.26)$$

tipinde denklemlerin simetri cebirlerine göre sınıflandırması yapılmıştır [18].

$$i\psi_t + \psi_{xx} + F(t, x, \psi, \psi^*, \psi_x, \psi_x^*) = 0 \quad (1.27)$$

şeklindeki genel sınıf denklem için simetri cebirlerine ait sınıflandırmada, denklemi yapısal olarak değişmez bırakan denklik dönüşümleri kullanılarak  $1 \leq \dim L \leq 3$

boyutlu Lie simetri cebirlerinin kanonik formları ve bu simetri cebirlerine sahip temsilci denklemler belirlenmiştir [19].  $\gamma$  bir sabit olmak üzere

$$i\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|^\gamma \psi + V(t, x)\psi = 0 \quad (1.28)$$

şeklindeki denklem için Lie cebirlerinin sınıflandırılması ve  $V$  potansiyelinin kanonik formları elde edilmiştir [20].  $n$  uzay boyutunda

$$i\psi_t + \Delta\psi + k|x|^2\psi - f(|\psi|)\psi = 0 \quad (1.29)$$

denklemini için simetri cebirlerinin sınıflandırılması yapılmıştır [21].

### 1.2.2 Değişken katsayılı NLS denklemi alt sınıfları

Çalışmanın ilk bölümünü oluşturan (1.1) denklemi çok sayıda fiziksel olayı modellemektedir ve bu nedenle zengin bir literatüre sahiptir. Esasen bu denklem, iki temel denklemin genelleştirmesidir. Bu iki denklemden biri,  $f = 1$ ,  $g = \pm 1$  ve diğer katsayı fonksiyonları sıfır olarak alındığında elde edilen standart NLS denklemidir. Burada  $\psi(x, t)$  fonksiyonu fiziğin çeşitli dallarında farklı anlamlara gelir; örneğin elektromanyetik potansiyel olarak tanımlanabilir ve NLS denklemi de bir plazmadaki doğrusal olmayan dalgaların evrimini belirler [22]. Dalga genliği olarak tanımlandığında denklem, zayıf doğrusal olmayan ve zayıf dispersif fiber optik [23] ya da derin su dalgalarının mekaniğini belirler. NLS denkleminin çözümlerinin geniş bir sınıfı doğrusal tekniklerle elde edilir; ters saçınım dönüşümü gibi. Bu çözümlerin bir kısmı soliton yapıda çözümlerdir [24].

(1.1) denkleminin temel aldığı ikinci denklem,  $f, g, h$  sabit alındığında elde edilen kompleks Ginzburg-Landau (KGL) denklemidir (esasen  $f, g, h$  sanal sabitler olarak alındığında Ginzburg-Landau adını alıyor). KGL denklemi de geniş bir uygulama alanı bulmaktadır; örneğin doğrusal olmayan optikte elektrik alan genliğinin modellenmesinde kullanılır [24].

$f, g, h$  fonksiyonlarının değişken olarak (konuma ve zamana bağlı) alınması, denklemin modellemede kullanıldığı fiziksel olaylar sınıfını genişletmektedir. Örneğin doğrusal olmayan optikte homojen olmayan dielektrik ortam için NLS veya KGL değişken katsayılı hale gelmektedir. NLS denkleminin (1.1) genelleştirmesi,

integrallenebilirlik özelliği üzerine soru işareti getirir. Katsayı fonksiyonlarının çeşitli durumları için literatürde yapılmış çok sayıda çalışma mevcuttur.

[25]'te değişken katsayılı kübik-kuintik Schrödinger denklemi (KKSD) olarak

$$i\psi_t + \beta(t)\psi_{zz} + \gamma(t)|\psi|^2\psi + \alpha(t)|\psi|^4\psi = (V_1(z,t) + iV_2(t))\psi \quad (1.30)$$

denklemi ele alınır. Denklem optik fiberlerde dalga iletimini modellemekte olup,  $\psi$  kompleks elektrik alan zarfı,  $V$  harici potansiyeli,  $\alpha$  yüksek mertebeden nonlineerliği,  $\beta$  ikincil dispersif etkileri,  $\gamma$  da yine nonlineerliği temsil etmektedir. Çalışmada çeşitli dönüşümlerle denklem adi diferansiyel denklemlere indirgenip trigonometrik tipte çözümler elde edilmiş olup, bu çözümler,  $\alpha \equiv 0$  için, (1.1) denkleminin bir alt sınıfına ait çözümlere karşılık gelir. Benzer bir denklem

$$i\psi_z + \frac{1}{2}D(z)\psi_{tt} + R(z)|\psi|^2\psi = i\Gamma(z)\psi \quad (1.31)$$

şeklinde verilir ve dağılmış dispersiyon ve nonlineerliğe sahip bir optik fiberde dalgaların büyüme ya da küçülmesini veya stabilitesinin bozulmadan iletimini tanımlar. Burada  $z$  uzay koordinatı,  $t$  zaman koordinatı,  $\psi$  optik dalganın (elektrik alanın) genliği,  $D$  grup hızı dispersiyonu,  $R$  nonlineerlik parametresi,  $\Gamma$  ise büyütme veya küçültme katsayısı olup bu denklemin soliton çözümleri bulunmuştur [26]. [27]'de ise bu denklem, çeşitli dönüşümlerle çözümleri bilinen bir adi diferansiyel denkleme dönüştürülüp, çok sayıda eliptik fonksiyon tipinde çözüm elde edilmiştir. Denklem Hirota metoduyla soliton çözümleri [28]'de elde edilmiş olup, yine soliton çözümleri çift-Wronskian determinantı türünden [29]'da verilmiştir. Kendine-benzeyen (self-similar) çözümlerinin incelendiği bir çalışmaya örnek olarak [30] verilebilir.

(1.1) denkleminin bir alt sınıfı

$$i\psi_t + c(t)\psi_{xx} + b(t)|\psi|^2\psi = a(x,t)\psi \quad (1.32)$$

şeklinde [31]'de ele alınmıştır; burada  $c, b$  reel,  $a(x,t) = k_1(x,t) + ik_2(t)$  ise kompleks değerli bir fonksiyondur. Çeşitli dönüşümlerle denklem bir adi diferansiyel denkleme dönüştürülerek hiperbolik, eliptik ve trigonometrik tipte çözümlere ulaşılmıştır. Burada potansiyelin reel kısmı  $k_1(x,t) = m(t)x^2 + n(t)x + d(t)$  şeklinde seçilmiştir.

Yine bu yapıda katsayı fonksiyonları için doğrudan simetri yöntemiyle eliptik tipte çözümler elde edilmiştir [32].  $c$  ve  $b$ 'nin sabit,  $a(x,t) = \pm k^2 t^2 + i\Gamma$  ( $k, \Gamma$  sabitler) olarak alındığı durumda denklemin soliton çözümü mevcuttur [33].

Periyodik (zamana göre) bir potansiyelle yapılan çalışmalara örnek olarak  $b, c$  sabitler ve  $\varepsilon = \pm 1$  olmak üzere

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} = \varepsilon|\psi|^2\psi + x(b + c \sin \omega t)\psi \quad (1.33)$$

denkleminin ele alındığı [34] verilebilir. Bu çalışmada ters saçınım yöntemi ve uygun dönüşümlerle denklemin soliton çözümleri elde edilmiştir.

$$i\psi_t + \frac{\alpha(t)}{2}\Delta\psi = \frac{1}{2}\Omega(t)r^2\psi + g(t)|\psi|^2\psi - i\gamma(t)\psi \quad (1.34)$$

denklemini  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $r = |x|$  için yazılarak benzerlik dönüşümleri elde edilmiş ve bazı çözümlere ulaşılmıştır [35]. Bu denklemin  $d = 1$  durumu için çeşitli tipte çözüm önerileriyle iki sınıf çözüm ailesi [36]'da geliştirilmiştir. (1.1) denkleminde  $f = 1$  alınarak elde edilen reel potansiyel ve nonlinearlik katsayılı

$$i\psi_t + \psi_{xx} = v(t,x)\psi + g(t,x)|\psi|^2\psi \quad (1.35)$$

denklemini durağan NLS denklemine dönüştüren benzerlik dönüşümleri [37]'de incelenmiş ve soliton tipte çeşitli karakterlerde çözümler elde edilmiştir.

### 1.2.3 İntegre edilebilirliğe ilişkin sonuçlar

$$i\psi_t + \frac{D(t)}{2}\psi_{xx} + \sigma R(t)|\psi|^2\psi - (2\alpha(t)x + \frac{\Omega^2(t)}{2}x^2)\psi = 0 \quad (1.36)$$

denkleminin incelendiği [38]'de, kullanılan yöntem ışığında denklemin integral-lenebilirliği için potansiyel, nonlinearlik ve dispersiyon arasında

$$-\Omega^2 D = (\ln D)'' + R\left(\frac{1}{R}\right)'' - (\ln D)'(\ln R)' \quad (1.37)$$

koşulu verilmiştir. Elde edilen soliton çözümleri (otonom olmayan solitonlar) klasik solitonların temel özelliği olan elastik etkileşim özelliğini korur ancak yayılım sırasında ve etkileşme sonrasında dalga genlikleri ve hızları aynı kalmaz. Genelde bütün otonom olmayan solitonlar  $D(t)$  dispersiyonuna ve  $R(t)$  nonlinearliğine bağlı

olarak değişen hız ve genliklerde hareket eder. Bu çalışmayı referans alan [39], (1.36) denklemini doğrudan NLS denklemine dönüştürmeye çalışarak (1.37) koşuluna ulaşır. (1.1) denkleminin alt sınıflarının integrallenebilirliğine ilişkin başka bir yaklaşım olarak da Painlevé analizi örnek verilebilir. En basit haliyle

$$i\psi_t + \psi_{xx} + a|\psi|^2\psi = 0, \quad a \in \mathbb{R} \quad (1.38)$$

denklemini Painlevé özelliğine sahiptir [40]. Kompleks bir potansiyelin içerildiği

$$i\psi_t + \psi_{xx} - 2|\psi|^2\psi = a(x, t)\psi + b(x, t) \quad (1.39)$$

denklemini,  $\theta_1, \theta_2, \beta$  keyfi fonksiyonlar olmak üzere  $a(x, t) = \frac{1}{2}(\frac{d\beta}{dt} - 2\beta^2(t))x^2 + \theta_1(t)x + \theta_2(t) + i\beta(t)$  ve  $b(x, t) = 0$  koşulu altında Painlevé özelliğine sahiptir [41]. Sıfır potansiyelli, değişken nonlinearliğe sahip

$$i\psi_t + \psi_{xx} + F(t, x)|\psi|^2\psi = 0 \quad (1.40)$$

denklemini, ancak  $F(t, x) = 1/(a + bt)$ ,  $a, b$  sabitler olması durumunda Painlevé özelliğini araştıran WTC testini geçebilmektedir [42].

Bu tez çalışmasının motivasyonunda ilk rolü oynayan

$$i\psi_t + \psi_{xx} + g(x, t)|\psi|^2\psi + kx^2\psi = 0 \quad (1.41)$$

denkleminde  $\psi(x, t)$ , bir Bose-Einstein yoğuşturduğunda makroskopik dalga fonksiyonunu temsil etmektedir [43]. Bu çalışmada denklemin Painlevé özelliğine sahip olması için, WTC testinden,

$$g(x, t) = g(t) = \frac{2g_0 e^{\pm 2\sqrt{k}t}}{A e^{\pm 4\sqrt{k}t} - B} \quad (1.42)$$

olması gerektiği gösterilmiştir. Ardından  $g$ 'nin bu yapısı için denklem, standart NLS denklemine dönüştürülmüş, dönüşüm formülleri yardımıyla denklemin NLS çözümlerine dayanan çözümleri elde edilmiştir. Bu çalışmanın yazarlarından birinin de imzasını taşıyan [44]'te,

$$i\psi_t + \varepsilon f(x, t)\psi_{xx} + \delta g(x, t)|\psi|^2\psi + V(t)x^2\psi = 0 \quad (1.43)$$

denkleminin Painlevé analizinden,  $f = f(t)$ ,  $g = g(t)$  olması gerektiği sonucuna varılmış ve katsayı fonksiyonları arasındaki uygunluk koşulu

$$\frac{\ddot{g}}{g} - 2\frac{\dot{g}^2}{g^2} + \frac{\ddot{f}}{f^2} - \frac{\dot{f}}{f} + \frac{\dot{g}}{g}\frac{\dot{f}}{f} + 4\varepsilon fV = 0 \quad (1.44)$$

şeklinde verilmiş, [39]'da alınana benzer tipte NLS'ye dönüşüm formülleri yazılmıştır. Takip eden çalışmalarında bu denklemin potansiyeline sanal kısım ekleyerek

$$i\psi_t + \varepsilon f(x,t)\psi_{xx} + \delta g(x,t)|\psi|^2\psi - \frac{1}{2}V(t)x^2\psi = i\frac{\gamma(t)}{2}\psi \quad (1.45)$$

için uygunluk koşulunu, yine  $f = f(t)$ ,  $g = g(t)$  olmak üzere,

$$-2\varepsilon fV = \frac{\ddot{f}}{f} - \frac{\dot{f}^2}{f^2} - \frac{\ddot{g}}{g} + 2\frac{\dot{g}^2}{g^2} - \frac{\dot{f}\dot{g}}{fg} - \left(\frac{\dot{f}}{f} - 2\frac{\dot{g}}{g}\right)\gamma - \dot{\gamma} + \gamma^2 \quad (1.46)$$

şeklinde vererek denklemin NLS'ye dönüşümünü gerçekleştirmişlerdir [45]. Burada not edilmesi gereken önemli bir nokta, Painlevé özelliğinin gerektirdiği (1.42), (1.44), (1.46) denklemleriyle verilen uygunluk koşullarının, (1.37) integrallenebilirlik koşulu ile örtüşüyor olmasıdır.

(1.1) denkleminde  $f, g$  reel fonksiyonlar olarak ele alınarak Painlevé testi yapılmıştır [46]. [47]'nin yazarı (1.1) denklemini yine  $f, g$ 'nin reel olması durumunda ele almış, denklemin Lax çiftine sahip olması ve benzerlik dönüşümleriyle durağan Schrödinger denklemine dönüşmesi gibi iki yöntemle integrallenebilirliğini irdelemiş, bulduğu sonuçları [46]'da verilen Painlevé testi sonuçları ile karşılaştırmıştır. [48] ise

$$i\psi_t + f\psi_{xx} + k\psi_x + g|\psi|^2\psi + h\psi = 0 \quad (1.47)$$

denklemini  $f$  reel fonksiyon, diğer katsayılar kompleks fonksiyon olmak üzere ele alır. Painlevé testi sonuçlarının yanı sıra denklemin standart NLS denklemine dönüşümü, Lax çifti, Liouville anlamında integre edilebilirliği, Darboux dönüşümü gibi özelliklerini inceler.

(1.1) denkleminin analizinde başvurulacak önemli bir çalışmada, denklemin denklik dönüşümleri ve bunların kullanımıyla  $1 \leq \dim L \leq 5$  boyutlu simetri cebirleri elde edilmiş ve bu cebirlere karşılık katsayı fonksiyonları  $f, g, h$ 'nin ne yapıda olması gerektiği belirtilmiştir [24]. (1.1) denklemi, ancak ve ancak denklik dönüşümleriyle

$$\tilde{f} = 1; \quad \tilde{g} = \varepsilon_0 + i\tilde{g}_2, \quad \varepsilon_0 = \pm 1, \quad \tilde{g}_2 \in \mathbb{R}; \quad \tilde{h} = 0 \quad (1.48)$$

yapılabiliyorsa beş boyutlu maksimal simetri cebirine sahiptir. Buradan da görülebileceği gibi, denklemin beş boyutlu simetri cebirine sahip olmasıyla standart NLS denklemine dönüşmesi birbirine eşdeğer koşullar olmaktadır.

#### 1.2.4 Evrim tipi 2+1-boyutlu denklemlere ilişkin sonuçlar

Literatürde sonsuz boyutlu simetri cebirlerine sahip olduğu bilinen bazı denklemler ve onların genelleştirmeleri mevcuttur. İlk olarak Davey-Stewartson sistemi

$$\begin{aligned} i\psi_t + \psi_{xx} + \varepsilon_1 \psi_{yy} &= \varepsilon_2 |\psi|^2 \psi + \psi w, \\ w_{xx} + \delta_1 w_{yy} &= \delta_2 (|\psi|^2)_{yy} \end{aligned} \quad (1.49)$$

anılabilir. Bu sistem  $\delta_1 = -\varepsilon_1 = \pm 1$  için sonsuz boyutlu bir simetri cebirine sahiptir [49]. Genelleştirilmiş Davey-Stewartson sistemi

$$\begin{aligned} i\psi_t + \delta \psi_{xx} + \psi_{yy} &= \chi |\psi|^2 \psi + \gamma (w_x + \phi_y) \psi, \\ w_{xx} + n \phi_{xy} + m_2 w_{yy} &= (|\psi|^2)_x, \\ n w_{xy} + \lambda \phi_{xx} + m_1 \phi_{yy} &= (|\psi|^2)_y, \end{aligned} \quad (1.50)$$

$(\lambda - 1)(m_1 - m_2) = n^2$  bağıntısıyla birlikte verilen  $\delta, \chi, \gamma, n, \lambda, m_1, m_2$  sabitleri  $m_2 \delta + n + 1 = 0$ ,  $m_1 \delta + n \delta + \lambda = 0$  koşulunu sağlıyorsa, DS sisteminin cebirine izomorf sonsuz boyutlu bir simetri cebirine sahiptir [50]. İki boyutlu Burgers denklemi

$$(u_t + uu_x)_x - u_{yy} = 0 \quad (1.51)$$

sönümsüz zayıf nonlinear ortamda ses dalgalarının yayılımını modeller. Bu denklemin sönüm etkisini dikkate alan bir genelleştirmesi

$$(u_t + uu_x - u_{xx})_x - u_{yy} = 0 \quad (1.52)$$

şeklinde olup Zabolotskaya-Khoklov-Kuznetsov denklemi adını alır ve simetri cebirinin sonsuz boyutlu olduğu bilinmektedir [51]. Son olarak Kadomtsev-Petviashvili (KP) denklemi (iki boyutlu KdV denklemi)

$$(u_t + \frac{3}{2} uu_x + \frac{1}{4} u_{xxx})_x + \frac{3}{4} \sigma u_{yy} = 0, \quad \sigma = \pm 1 \quad (1.53)$$

sonsuz boyutlu simetri cebirine sahip bir denklem sınıfı olarak not edilebilir [52, 53]. Bu sınıfları içeren (1.3) denklemi,  $q = 0$ ,  $r = r(t)$  için (genelleştirilmiş KP denklemi) [54]'te,  $q = q(t)$ ,  $r = 0$  için (genelleştirilmiş Burgers denklemi) [55]'te incelenmiştir. İlk çalışmada denklemin, katsayıların belli sınıfı için Virasoro tipi sonsuz boyutlu simetri cebirine sahip olduğu gösterilmiştir. İkinci çalışmada ele alınan denklemin bu tipte cebiri yoktur. Her iki durumda Kac-Moody tipinde sonsuz boyutlu simetri cebiri elde edilmiştir. Yakın zamanlı bir çalışmada (1.3) ailesi,  $q(y, t) = 0$  için çeşitli integre edilebilirlik özellikleri ve tam çözümleri açısından [56]'da ele alınmıştır.

### 1.3 Tezde İncelenen Problemler

#### 1.3.1 NLS denklemi integrallenebilirlik analizi

Bu bölümde ele alınan sorular aşağıdaki gibi özetlenebilir.

(i)  $f, g, h, k$  konum ve zamana bağlı kompleks fonksiyonlar,  $l, m, n$  zamana bağlı reel fonksiyonlar olmak üzere, (1.1) denklemi, (1.47) denklemi ve

$$i\psi_t + f\psi_{xx} + g|\psi|^2\psi + h\psi + k\psi_x + il\psi_{xxx} + im(|\psi|^2\psi)_x + in\psi(|\psi|^2)_x = 0 \quad (1.54)$$

denkleminin Painlevé testini geçebilmesi için katsayılarının sağlaması gereken koşullar nelerdir?

(ii) (1.1) denklemi, katsayıları Painlevé testinin koşullarını sağladığı durumda standart NLS denkleme dönüştürülebilir mi ?

(iii) [24]'e göre (1.1) denklemi, standart NLS denkleme dönüştürülebiliyorsa beş boyutlu bir simetri cebirine sahiptir. (1.41) denkleminin standart NLS denkleme dönüşmesi için Painlevé testini geçmesi yeterlidir [43]. Bu aynı zamanda gerek koşul mudur?

#### 1.3.2 NLS denklemi grup-değişmez çözümleri

(1.1) denkleminin [24]'te verilen dört boyutlu simetri cebirine sahip alt sınıflarının temsilci denklemleri, Painlevé testinin koşullarını sağlamamaktadır.

(i) Bu değişken katsayılı denklemler için, dört boyutlu simetri cebirlerinin bir boyutlu alt cebirlerinin optimal sistemi kullanılarak elde edilecek indirgemeleri integre edilebilir midir ?

(ii) Bu değişken katsayılı denklemler için Painlevé serilerinin sonlu terimde kesilmesi yoluyla tam çözümler elde edilebilir mi?

#### 1.3.3 KKS denklemi simetri cebiri sınıfları

(i) Değişken katsayılı KKS denklemi (1.2) için Lie simetri cebirlerinin sınıflandırılması [24]'teki gibi yapılırsa elde edilecek kanonik sınıflar nelerdir?

(ii) Bu denklem sınıfının simetri cebirlerinin maksimal boyutu nedir ? Hangi değişken katsayılı denklemler sabit katsayılı yapılabilir ?

(iii) Sınıflandırma sonucu elde edilen denklemlerin adi diferansiyel denklemlere indirgemeleri nelerdir ?

#### **1.3.4 KP-Burgers denkleminin sonsuz boyutlu simetri cebirleri**

(i) Genelleştirilmiş KP-Burgers denklemi ailesi (1.3), sonsuz boyutlu Kac-Moody-Virasoro tipinde simetri cebirlerine göre sınıflandırılırsa hangi kanonik sınıflar elde edilir ?

(ii) Simetri cebirlerinden elde edilecek indirgemelerden ve Painlevé testi yaklaşımından nasıl sonuçlar elde edilebilir ?



## 2. LIE GRUPLARI VE LIE CEBİRLERİ

### 2.1 Lie Grupları

**Tanım 2.1**  $r$ -boyutlu diferansiyellenebilir manifold yapısındaki  $G$  grubu için,

$$m : G \times G \longrightarrow G, \quad m(g, h) = g \cdot h, \quad g, h \in G \quad (2.1)$$

grup işlemi ve

$$i : G \longrightarrow G, \quad i(g) = g^{-1}, \quad g \in G \quad (2.2)$$

ters eşlemesi düzgün tasvirler ise,  $r$ -parametrelili *Lie grubu* olarak adlandırılır.

Örneğin  $(\mathbb{R}^n, +)$ ,  $(\mathbb{C}^n, +)$ ,  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$  grupları Lie gruplarıdır. Matris grupları en bilinen örnekler arasındadır. Determinantı sıfırdan farklı  $n \times n$  matrislerin kümesi olan *genel lineer grup*  $GL(n, \mathbb{F})$  ( $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  veya  $\mathbb{C}$ ) bir Lie grubudur. Örneğin  $GL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^{n^2}$ 'nin bir açık alt kümesi olduğundan manifold yapısının gösterilmesinde gerekli açık örtü kendisidir. Determinant sıfırdan farklı olduğundan ters eleman mevcuttur. Grup işlemi olan matris çarpımı, matris elemanlarının çarpımını ve bunların toplamını içeren bir formülle hesaplandığından düzgün bir fonksiyondur. Ters eleman bulma işlemi de aynı şekilde düzgün bir fonksiyondur. Dolayısıyla  $GL(n, \mathbb{F})$  bir Lie grubudur.

$GL(n, \mathbb{F})$  alt grupları ile sıkça karşılaşılan başka Lie grubu örnekleri verilebilir. Determinantı 1 olan tersinir matrisler kümesi  $SL(n, \mathbb{F})$  *özel lineer grup* olarak isimlendirilir.  $AA^T = I$  koşulunu sağlayan matrisler grubu  $O(n, \mathbb{F})$  *ortogonal grup*,  $SO(n, \mathbb{F}) = O(n, \mathbb{F}) \cap SL(n, \mathbb{F})$  *özel ortogonal grup* olarak adlandırılır.  $x, y \in \mathbb{F}^n$  için tanımlı  $(x, y) = \sum_k x_k y_k$  bilineer formu  $O(n, \mathbb{F})$  tarafından değişmez bırakılır.  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  ise bu form bir iç çarpımdır,  $O(n, \mathbb{R})$  grup elemanları iç çarpımları dolayısıyla vektörler arasındaki açıları değişmez bıraktığından dönmelere karşılık gelir.  $x, y \in \mathbb{C}^n$  için tanımlanan  $(x, y) = \sum_k \bar{x}_k y_k$  iç çarpımını değişmez bırakan  $A \in GL(n, \mathbb{C})$  matrisleri,

$A^* = \bar{A}^T$  olmak üzere  $A^*A = I$  koşulunu sağlamalıdır ve üniter grup  $U(n)$  olarak isimlendirilir. Benzer şekilde  $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$  *özel üniter grup* adını alır.

**Tanım 2.2** Bir  $M$  manifoldu üzerindeki  $\mathbf{v}$  vektör alanı,  $\forall x \in M$ 'ye karşılık teğet uzayı  $TM|_x$ 'ten bir vektör eşleyen düzgün tasvirdir. Manifoldun  $x = (x^1, \dots, x^m)$  lokal koordinatlarında bu vektör alanı

$$\mathbf{v}|_x = \sum_{i=1}^m \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (2.3)$$

şeklindedir.

**Tanım 2.3** Bir  $\mathbf{v}$  vektör alanının *integral eğrisi*,  $x = \phi(\varepsilon) = (\phi^1(\varepsilon), \dots, \phi^m(\varepsilon))$  şeklinde tanımlanan ve her noktasında teğet vektörü, vektör alanı ile çakışan eğridir. Öyleyse,  $\xi^i(x)$  vektör alanının bileşenleri olmak üzere,

$$\dot{\phi}(\varepsilon) = \mathbf{v}|_{\phi(\varepsilon)}, \quad \phi(0) = x_0 \Leftrightarrow \frac{dx^i}{d\varepsilon} = \xi^i(x), \quad x(0) = x_0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.4)$$

sisteminin çözümünden her  $x_0$  noktası için integral eğrisi tek türlü olarak belirlidir.

**Tanım 2.4**  $\mathbf{v}$  bir vektör alanı olmak üzere,  $x \in M$  noktasından geçen  $\mathbf{v}$ 'nin maksimal integral eğrisi  $\Psi(\varepsilon, x)$ ,  $\mathbf{v}$  tarafından üretilen *akış* olarak isimlendirilir.

Bir vektör alanının akışı aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$\Psi(\delta, \Psi(\varepsilon, x)) = \Psi(\delta + \varepsilon, x), \quad x \in M, \quad (2.5)$$

$$\Psi(0, x) = x, \quad (2.6)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Psi(\varepsilon, x) = \mathbf{v}|_{\Psi(\varepsilon, x)}. \quad (2.7)$$

Bir vektör alanının akışı,  $\mathbb{R}$  Lie grubunun  $M$  manifoldu üzerindeki etkisidir ve *bir-parametrelî dönüşüm grubu* olarak isimlendirilir.

$$\Psi(\varepsilon, x) = x + \varepsilon \xi(x) + O(\varepsilon^2) \quad (2.8)$$

eşitliği dikkate alınır,  $\mathbf{v}$  vektör alanı, grup etkisinin *sonsuz küçük üretici* olarak isimlendirilir.  $\Psi(\varepsilon, x)$   $M$  üzerinde etkiyen bir-parametrelî dönüşüm grubu ise, sonsuz küçük üretici

$$\mathbf{v}|_x = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Psi(\varepsilon, x) \quad (2.9)$$

şeklinde belirlenir. Yerel dönüşüm grubu ile sonsuz küçük üretici arasında birebir ilişki vardır.

Bir vektör alanına karşılık gelen dönüşüm grubunun/akışın (ADD sisteminin çözümünün) bulunması işlemine, vektör alanının *üstelinin hesaplanması* denir:

$$\exp(\varepsilon \mathbf{v})x := \Psi(\varepsilon, x). \quad (2.10)$$

**Tanım 2.5**  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$   $M$  manifoldu üzerinde vektör alanları,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  düzgün bir fonksiyon olsun.  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  için *Lie parantezi*,

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{v}(\mathbf{w}(f)) - \mathbf{w}(\mathbf{v}(f)) \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu bölümde verilen bilgiler [57] referansından derlenmiştir.

## 2.2 Lie Cebirleri

**Tanım 2.6**  $L$  bir vektör uzayı olsun. 'Lie parantezi'

$$[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L$$

ikili işlemine göre  $\forall u, v, v', w, w' \in L$  ve  $\forall c, c' \in \mathbb{R}$  için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa,  $L$ 'ye *Lie cebiri* denir.

$$(a) \text{ Bilineer. } [cv + c'v', w] = c[v, w] + c'[v', w], \quad [v, cw + c'w'] = c[v, w] + c'[v, w'],$$

$$(b) \text{ Anti-simetrik. } [v, w] = -[w, v],$$

$$(c) \text{ Jacobi özdeşliği. } [u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] = 0.$$

Bazı örnekler vermeye çalışalım.  $L = \mathbb{R}^3$  olsun.  $u, v \in \mathbb{R}^3$  için tanımlanan  $(u, v) \rightarrow [u, v] = u \wedge v$  vektörel çarpım işlemine göre  $\mathbb{R}^3$  bir Lie cebiridir. Herhangi bir  $V$  vektör uzayında  $u, v \in V$  için  $[u, v] = 0$  olacak şekilde bir Lie parantezi tanımlanabilir. Bu,  $V$  üzerinde tanımlı abelyen bir Lie cebiridir.  $V$  vektör uzayı  $\mathbb{F}$  cismi üzerinde tanımlı olsun.  $\mathfrak{gl}(V)$  ile  $V$ 'den  $V$ 'ye tanımlı tüm doğrusal tasvirlerin kümesi gösterilirse,

$$[u, v] = u \cdot v - v \cdot u, \quad u, v \in \mathfrak{gl}(V) \quad (2.12)$$

işlemine göre  $\mathfrak{gl}(V)$  bir Lie cebiridir ve *genel lineer cebir* olarak adlandırılır.  $\mathbb{F}$  cisminde tanımlı  $n \times n$  matrisler matrisler kümesi  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ ,  $[u, v] = uv - vu$  parantezi ile bir Lie cebiridir; burada  $uv$  matris çarpımı işlemidir.  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$  ile  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ 'nin sıfır

izli matrislerden oluşan alt uzayı gösterilsin. Keyfi  $u, v$  kare matrisleri için  $uv - vu$  matrisinin izi sıfırdır, dolayısıyla  $[u, v] = uv - vu$  işlemi  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$  için bir Lie cebiri tanımlar. Bu ise özel *lineer cebir* olarak isimlendirilir. *Ortogonal cebir*  $\mathfrak{o}(n, \mathbb{F}) = \{A | A^T + A = 0, A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})\}$ , *üniter cebir*  $\mathfrak{u}(n) = \{A | A^* = -A, A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})\}$ , özel *üniter cebir* ise  $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  olarak tanımlanır.

$G$  bir matris Lie grubu olsun.  $G$ 'nin Lie cebiri  $\mathfrak{g}$ ,

$$\mathfrak{g} = \{A | \exp(tA) \in G, \quad \forall t \in \mathbb{R}\} \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre, yukarıda verilen Lie grupları ile Lie cebirleri arasındaki ilişki belirlenebilir.  $A$  herhangi bir  $n \times n$  matris olsun.  $\exp(tA)$  tersinir bir matris olduğundan  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 'nin elemanıdır. Öyleyse  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 'nin Lie cebiri,  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ 'dir.  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ 'nin Lie cebiri, her  $t \in \mathbb{R}$  için  $1 = \det(\exp(tA)) = \exp(t \operatorname{tr}(A))$  koşulunu sağlayan yani izi sıfır olan  $A$  matrislerinin Lie cebiri  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ 'dir.  $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$  bir matris Lie grubu,  $L = T_e G$  ise birim elemandaki teğet uzayı olsun.  $L, [u, v]$  matris komütasyonu işlemine göre kapalıdır. Dikkat edilirse Tanım 2.6'da Lie cebiri, matris cebirinden daha genel olarak herhangi bir vektör uzayı üzerinde koşullarla verilmiştir.

$L$  Lie cebirinin  $S$  alt vektör uzayı,  $\forall u, v \in S$  için  $[u, v] \in S$  koşulunu sağlıyorsa,  $L$ 'nin bir alt cebiridir denir.  $L$  içinde  $L$ 'den ve sıfırdan farklı olan alt cebirlere aşikar olmayan alt cebir denir.  $I \subset L$  alt cebiri  $\forall u \in L, v \in I$  için  $[u, v] \in I$  koşulunu sağlıyorsa  $L$ 'nin bir idealidir denir.  $\forall u \in L$  için  $[z, u] = 0$  olacak şekilde bir  $z \in L$  varsa,  $z$ 'ye merkezci eleman denir. Tüm  $z$  merkezci elemanların birleşimi olan  $Z(L)$  kümesine  $L$ 'nin merkezi denir ve  $L$ 'nin bir idealidir.

$L_1, L_2$  sırasıyla  $[\cdot, \cdot]_1$  ve  $[\cdot, \cdot]_2$  işlemleri ile Lie cebirleri olsunlar.

$\Gamma : L_1 \longrightarrow L_2$  tasviri,  $\forall u, v \in L$  için

$$\Gamma([u, v]_1) = [\Gamma(u), \Gamma(v)]_2 \quad (2.14)$$

eşitliğini sağlıyorsa bir homomorfizmadır denir. Tersinir homomorfizmaya izomorfizma denir.  $L_1$ 'den  $L_2$  cebirine örten bir izomorfizma var ise  $L_1$  ve  $L_2$  izomorftur denir.  $L$ 'den kendi üzerine olan izomorfizmaya otomorfizma denir.

$S_1$  ve  $S_2$   $L$ 'nin alt uzayları olsun.  $u \in S_1, v \in S_2$  olmak üzere tüm mümkün  $[u, v]$  komütatörlerinin ürettiği alt uzaya,  $S_1, S_2$  uzaylarının Lie çarpımı denir ve  $[S_1, S_2]$  ile gösterilir.  $L$ 'nin iki idealinin çarpımı yine  $L$ 'de idealdir.  $L' = [L, L]$  çarpımına  $L$ 'nin türev cebiri denir.

$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$  için  $\mathfrak{t}_+(n)$  alt kümesi üst üçgensel matrislerin kümesi olarak tanımlansın (köşegenin sıfır olması koşulu yoktur). Böyle elemanların toplamı ve komütasyonu aynı türde olduğundan  $\mathfrak{t}_+(n)$ ,  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ 'nin bir alt cebiridir.

Köşegeni sıfır olan üst üçgen matrislerin Lie cebiri  $\mathfrak{t}_{++}(n)$ ,

$$[\mathfrak{t}_+(n), \mathfrak{t}_+(n)] = \mathfrak{t}_{++}(n) \quad (2.15)$$

olduğundan  $\mathfrak{t}_+(n)$ 'nin türev cebiri ve idealidir.

$d : L \longrightarrow L$  tasviri  $\forall u, v \in L$  için

$$d([u, v]) = [d(u), v] + [u, d(v)] \quad (2.16)$$

eşitliğini sağlıyorsa  $L$ 'nin bir türetiliştir denir.  $d_1, d_2$   $L$ 'nin birer türetilişi ise  $a, b \in \mathbb{R}$  için  $ad_1 + bd_2$  de bir türetiliştir. Öyleyse  $L$  üzerinde tanımlı tüm türetmeler bir vektör uzayı oluşturur ve  $dL$  şeklinde gösterilir.  $d_1, d_2 \in dL$  ise

$$(d_1 \cdot d_2 - d_2 \cdot d_1)[u, v] = [(d_1 \cdot d_2 - d_2 \cdot d_1)(u), v] + [u, (d_1 \cdot d_2 - d_2 \cdot d_1)(v)] \quad (2.17)$$

bulunur. Öyleyse  $[d_1, d_2] = d_1 \cdot d_2 - d_2 \cdot d_1$  işlemi ile  $dL, L \longrightarrow L$  tüm doğrusal tasvirlerin Lie cebiri  $\mathfrak{gl}(L)$ 'nin bir alt cebiridir.  $dL$ 'ye  $L$ 'nin türetilişlerinin Lie cebiri denir.

$\text{ad } u : L \longrightarrow L$  olmak üzere

$$\text{ad } u|_v = [v, u] \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlı tasvir  $\forall u, v \in L$  için tanımlıdır.

$$\text{ad } u|_{[v, w]} = [[v, w], u] = [[v, u], w] + [v, [w, u]] = [\text{ad } u|_v, w] + [v, \text{ad } u|_w] \quad (2.19)$$

olduğundan,  $\text{ad } u$   $L$ 'nin bir türetiliştir ve  $L$ 'nin iç türetilişi olarak isimlendirilir.  $L$ 'nin tüm iç türetilişlerinin kümesi  $\mathcal{D}$ ,  $dL$ 'nin bir idealidir ve  $L$ 'nin eşlenik cebiri olarak adlandırılır.

(2.18) tanımı,  $\text{ad} : L \longrightarrow \mathcal{D}$  şeklinde,  $u \mapsto \text{ad } u$  eşlemesini yapan,  $L'$ 'den eşlenik cebirine bir tasvir tanımlar. Bu tasvir bir homomorfizmadır.

$$\text{ad}[u, v]|_w = [w, [u, v]] = -[v, [w, u]] - [u, [v, w]] = [[w, u], v] - [[w, v], u] \quad (2.20)$$

olduğunu görmek kolaydır.  $k \in \mathbb{R}$  için  $k \text{ad } u|_v = k[v, u] = [v, ku] = \text{ad}(ku)|_v$  olduğu göz önüne alınarak (2.20)'den

$$\begin{aligned} -\text{ad}[u, v]|_w &= -[[w, -u], -v] + [[w, -v], -u] \\ &= -(-\text{ad } v) \cdot (-\text{ad } u)|_w + (-\text{ad } u) \cdot (-\text{ad } v)|_w \\ &= [-\text{ad } u, -\text{ad } v]|_w \end{aligned} \quad (2.21)$$

elde edilir ve homomorfizma için (2.14) eşitliği doğrulanmış olur.  $\text{ad} : L \longrightarrow \mathcal{D}$  homomorfizmasına,  $L'$ 'nin eşlenik cebiri üzerindeki doğal homomorfizması veya adjoint homomorfizma veya adjoint temsil denir. Adjoint temsil, seçilen  $u \in L$  ile değişen,  $\text{ad } u : L \longrightarrow L$  şeklinde  $\mathcal{F}$  vektör alanı ailesini tanımlar.  $a, b \in \mathbb{R}, u, v \in L$  için  $a \text{ad } u|_w + b \text{ad } v|_w = \text{ad}(au + bv)|_w$  şeklinde kapalılık aşıkardır, dolayısıyla  $\mathcal{F}$  bir vektör uzayıdır ( $L$  üzerinde tanımlı vektör alanlarının bir alt uzayıdır.) Diğer yandan,

$$\begin{aligned} [\text{ad } u|_w, \text{ad } v|_w] &= [\text{ad } u|_w, v] - [\text{ad } v|_w, u] \\ &= [[w, u], v] - [[w, v], u] = [w, [u, v]] = \text{ad}[u, v]|_w \end{aligned} \quad (2.22)$$

olduğundan  $[\text{ad } u, \text{ad } v] = \text{ad}[u, v]$  bulunur. Öyleyse  $\mathcal{F}$ , vektör alanlarının bir Lie cebiridir.

Sonlu boyutlu Lie cebirinin bazı  $\{u_i\}_{i=1}^n$  olsun.  $[\cdot, \cdot]$  işlemi  $[u_i, u_j]$  komütatörleri ile tamamen belirlidir.

$$[u_i, u_j] = \sum_{k=1}^n a_{ij}^k u_k \quad (2.23)$$

ifadesindeki  $a_{ij}^k$  skalerlerine seçilen baza göre *yapı sabitleri* denir.

$L$  Lie cebirinin bir ideali  $I$  olsun.  $z \in L$  için  $z + I = \{z + u | u \in I\}$  kosetleri ve

$$L/I = \{z + I | z \in L\} \quad (2.24)$$

bölüm vektör uzayı oluşturulabilir.  $L/I$  üzerinde bir Lie parantezi,  $w, z \in L$  için

$$[w + I, z + I] := [w, z] + I \quad (2.25)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu şekilde  $L$ 'nin  $I$  bölüm cebiri elde edilir.

Lie cebirlerini boyutlarını dikkate alarak izomorfizma farkıyla sınıflandırmak istediğimizi düşünelim. Verilen her  $n$  boyutlu vektör uzayı üzerinde sıfır komütatörü ile abelyen Lie cebiri tanımlanabilir ve boyutu aynı olan iki abelyen cebir izomorftur. Dolayısıyla her sonlu boyutta izomorfizma farkıyla tek bir abelyen Lie cebiri bulunur. Her bir boyutlu Lie cebiri abelyendir. İki boyutlu bir Lie cebiri  $L = \{u, v\}$  abelyen değil ise, türev cebiri  $L'$  en fazla bir boyutlu olabilir çünkü  $[u, v]$  tarafından gerilir. Diğer yandan  $\dim L' = 0$  olamaz aksi halde  $L$  abelyen olur. Öyleyse  $\dim L' = 1$  olmalıdır.  $L' \subset L$  olduğundan  $0 \neq u \in L'$  alınır ve  $\tilde{v} \in L$  ile  $\{u, \tilde{v}\}$  şeklinde  $L$ 'nin bir bazı oluşturulur.  $[u, \tilde{v}] \in L'$  sıfırdan farklıdır (aksi halde  $L$  abelyen olur), o zaman bir  $\alpha$  skaleri için  $[u, \tilde{v}] = \alpha u$  olur.  $\tilde{v} = \alpha v$  şeklinde değiştirilirse, iki boyutlu abelyen olmayan Lie cebiri için komütasyon bağıntısının  $[u, v] = u$  kanonik şekline getirilebileceği görülür.

Üç boyutlu abelyen olmayan Lie cebirinin türev cebirinin boyutu 1, 2, 3 olabilir. Ayrıca  $Z(L)$ 'nin  $L$ 'de ideal olduğunu biliyoruz.  $\dim L' = 1$  ve  $L' \subset Z(L)$  olacak şekilde tek bir Lie cebiri vardır. *Heisenberg cebiri* adı verilen bu cebirin elemanları  $\{u, v, z\}$ ,  $z \in Z(L)$  olacak şekilde  $[u, v] = z$  koşulunu sağlar. Matris temsili,  $e_{ij}$  matrisinin  $ij$  elemanı 1, diğer elemanları sıfır olarak tanımlanmak üzere  $\{e_{12}, e_{23}, e_{13}\} \subset t_{++}(3)$  bazı ile verilebilir.  $\dim L' = 1$  olsun ve  $L'$  cebiri  $Z(L)$ 'de içerilmesin. Bu özellikleri sağlayan Lie cebiri tektir ve iki boyutlu abelyen olmayan Lie cebiri ile bir boyutlu Lie cebirinin direkt toplamıdır.

$L$ 'nin bir ideali  $I$  olsun.  $L/I$  bölüm cebiri, ancak ve ancak  $L' \subset I$  ise abelyendir. Öyleyse  $L'$ ,  $L$ 'nin bölüm cebiri abelyen olan en küçük idealidir.  $L'$  için türev cebirini  $L^2$  ile gösterelim. Benzer şekilde  $L^2$  de  $L'$  ile bölümü abelyen olan en küçük idealidir. Böylelikle  $L$ 'nin *türev serisi*  $L^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$L^0 = L, \quad L^1 = L' = [L, L], \quad L^2 = [L^1, L^1], \dots, L^n = [L^{n-1}, L^{n-1}] \quad (2.26)$$

şeklinde tanımlanır. *Üst merkezci seri* olarak da isimlendirilir.

$$L^0 \supset L^1 \supset L^2 \supset \dots \quad (2.27)$$

ilişkisi mevcuttur ve  $L^0, L^1, L^2, \dots$  alt uzayları  $L$ 'nin idealidir.  $L_n, n = 0, 1, 2, \dots$  alt merkezci serisi

$$L_0 = L, \quad L_1 = [L, L], \quad L_2 = [L, L_1], \dots \quad L_n = [L, L_{n-1}] \quad (2.28)$$

şeklinde tanımlanır. Yine

$$L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset \dots \quad (2.29)$$

ilişkisi mevcuttur ve  $L_0, L_1, L_2, \dots$  alt uzayları  $L$ 'nin idealleridir.

Sonlu boyutlu bir Lie cebiri için her iki dizi belli bir terimden sonra sabit hale gelir.  $L^n = 0$  olacak şekilde bir  $n \in \mathbb{N}$  varsa  $L$  *çözülebilir* cebirdir denir. Örnek olarak Heisenberg cebiri *çözülebilir*dir. Abelyen cebirler, bir boyutlu cebir, ve yukarıdaki sınıflandırma analizine göre her iki boyutlu Lie cebiri *çözülebilir*dir.  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})' = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  olduğundan  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  *çözülebilir* değildir.

$L$ 'nin maksimal *çözülebilir* idealine  $L$ 'nin *radikali* denir ve  $\text{rad } L$  şeklinde gösterilir. Her *çözülebilir*  $L \neq 0$  cebirinin abelyen  $I \neq 0$  ideali mevcuttur. Sıfırdan farklı sonlu boyutlu Lie cebiri  $L$ , sıfırdan farklı *çözülebilir* ideali yoksa yani  $\text{rad } L = 0$  ise *yarı-basit* denir.  $L/\text{rad } L$  yarı-basittir.

$L_n = 0$  olacak şekilde bir  $n \in \mathbb{N}$  varsa  $L$  nilpotent cebirdir denir. Her  $L \neq 0$  nilpotent cebirinin sıfırdan farklı bir abelyen ideali vardır.  $\mathfrak{t}_{++}(n)$  tipik bir nilpotent cebir örneğidir.

$L_i \supset L^i$  olduğundan nilpotent cebirler *çözülebilir*dir. Bunun tersi doğru değildir. Örneğin,  $\mathfrak{t}_+(n)$  tipik bir *çözülebilir* cebirdir.

$$[\mathfrak{t}_+(n), \mathfrak{t}_+(n)] = \mathfrak{t}_{++}(n), \quad [\mathfrak{t}_+(n), \mathfrak{t}_{++}(n)] = \mathfrak{t}_{++}(n) \quad (2.30)$$

bağıntıları gözönüne alınırsa  $\mathfrak{t}_+(n)$ 'nin  $n > 1$  için nilpotent olmadığı görülür.

$L$  abelyen değilse ve aşık olmaya ideali yoksa *basit* cebirdir denir.  $L$  basit cebiri için türetiliş cebiri kendisine eşittir:  $L' = [L, L] = L$ . Basit cebirlerin yarı-basit olduğu açıktır.

*Çözülebilir* bir Lie cebirinin *nilradikali*  $NR(L)$ ,  $L$ 'nin maksimal nilpotent idealidir. Bu nilradikal tektir ve boyutu  $\dim NR(L) \geq \frac{1}{2} \dim L$  bağıntısını sağlar. Herhangi bir *çözülebilir* cebir  $NR(L)$  nilradikali ve tamamlayıcı bir  $F$  lineer uzayının cebirsel toplamı olarak  $L = F \dot{+} NR(L)$  şeklinde yazılabilir.

Bir  $L$  Lie cebiri, bir taban değişimi ile iki (veya daha çok sayıda) alt cebirin direkt toplamına dnştrlebilir ise, ayrıştırılabilir denir. Yani,

$$L = L_1 \oplus L_2, \quad [L_1, L_2] = 0 \quad (2.31)$$

yazılabilir. Aksi halde, ayrıştırılamazdır.

**Levi Teoremi.** Her sonlu boyutlu  $L$  Lie cebiri yarı-basit bir  $S$  Lie cebiri ve çözülebilir bir idealin ( $R$  radikali) yarı-direkt toplamı olarak yazılabilir:

$$L = S \triangleright R, \quad [S, S] = S, \quad [S, R] \subset R, \quad [R, R] \subset R. \quad (2.32)$$

Eğer  $L$  basit ise,  $R = 0$ ,  $L$  çözülebilir ise  $S = 0$  olur.

$u \in L$  ile  $L$  üzerinde üretilen  $\text{ad } u \in \mathcal{F}$  vektör alanı tarafından üretilen bir parametrelili dönüşüm grubu,

$$\frac{d}{d\varepsilon} \tilde{w} = \text{ad } u|_{\tilde{w}} = [\tilde{w}, u], \quad \tilde{w}(0) = w \quad (2.33)$$

sisteminin integrasyonundan

$$\tilde{w}(\varepsilon) = \text{Ad}(\exp(\varepsilon u))w \quad (2.34)$$

şeklinde bulunur.

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\exp(\varepsilon u))w &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} (\text{ad } u)^n w \\ &= w - \varepsilon[u, w] + \frac{\varepsilon^2}{2!}[u, [u, w]] \dots \end{aligned} \quad (2.35)$$

ifadesinden sonsuz seri hesaplanarak da dönüşüm grubu elde edilebilir.

$u_0, w_0 \in T_e G = L$  olsun.  $\exp(\varepsilon u_0)$  bir-parametrelili alt grubunu düşünelim.  $\text{Ad}(\exp(\varepsilon u_0))w_0$ ,  $L$  içinde bir eğridir. Teğet vektörü ile  $[u_0, w_0]$  komütasyonu arasındaki bağıntı

$$[u_0, w_0] = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \text{Ad}(\exp(\varepsilon u_0))w_0 = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \left. \frac{d}{d\delta} \right|_{\delta=0} \exp(\varepsilon u_0) \exp(\delta w_0) \exp(-\varepsilon u_0) \quad (2.36)$$

ile verilir.

$\text{Ad}(\exp(\varepsilon u))$  dönüşümlerine  $L$ 'nin i otomorfizmaları veya adjoint dönüşümleri denir. Tüm  $u \in L$  için bulunan i otomorfizmaların grubuna,  $L$ 'nin iç otomorfizma grubu denir ve  $\text{Inn } L$  ile gösterilir.

$F : L \times L \longrightarrow L$  simetrik bilineer formu,  $\forall A \in \text{Inn } L$  iç otomorfizması ve  $\forall v, w \in L$  için

$$F(A(v), A(w)) = F(v, w) \quad (2.37)$$

koşulunu sağlıyorsa,  $\text{Inn } L$  grubuna göre değişmezdir denir.  $A = \text{Ad}(\exp(\varepsilon u))$  alınır ve (2.37) eşitliğinin  $\varepsilon = 0$ 'da türevi hesaplanırsa,  $F$ 'nin iç otomorfizma grubu altında değişmezliği için bir koşul elde edilir:

$$F([v, u], w) + F([v, w], u) = 0 \quad (2.38)$$

Değişmez formlar yardımıyla bir Lie cebirinin idealleri verilebilir.  $I = \{v \in L \mid F(u, v) = 0, \forall u \in L\}$  kümesi  $L$ 'nin bir idealidir. Çünkü,  $F$ 'nin doğrusallığından,  $v_1, v_2 \in I$  ise  $a, b \in \mathbb{R}$  için  $av_1 + bv_2 \in I$  bulunur, dolayısıyla  $I \subset L$  olur. Diğer yandan,  $F$ 'nin değişmezliği  $v \in I, w \in L$  için  $F([u, [v, w]]) = -F([u, w], v)$  sonucunu verir ki bu da  $[v, w] \in I$  yani  $I$  bir ideal demektir.

$A : L \longrightarrow L$  doğrusal dönüşümünün izi, temsil matrisi için seçilen bazdan bağımsızdır ve  $\forall A, B \in \mathcal{L}(L)$  için

$$\text{tr}(A \cdot B) = \text{tr}(B \cdot A) \quad (2.39)$$

kuralı uyarınca bileşke dönüşümün sırasına bağlı değildir.

$$K(u, v) = \text{tr}(\text{ad } u \cdot \text{ad } v) \quad (2.40)$$

şeklinde tanımlanan simetrik bilineer form, Killing formu olarak isimlendirilir.

Killing formu ile bir Lie cebirinin radikali belirlenebilir. Sonlu boyutlu  $L$  Lie cebirinin radikali yani maksimal çözülebilir ideali,  $\forall v \in L'$  için  $K(u, v) = 0$  koşulunu sağlayan  $u \in L$  elemanlarının kümesidir.

$C_{\beta\gamma}^\alpha$ ,  $r$ -boyutlu Lie cebirinin  $\{x_\alpha\}$  bazında yapı sabitleri olsun. Bu baza göre  $u = u_\alpha x_\alpha$  ise,  $\text{ad } u : L \longrightarrow L$  doğrusal dönüşümünün matrisi

$$(\text{ad } u) = (C_{\beta\gamma}^\alpha u_\gamma) \quad (2.41)$$

şeklinededir. Aynı bazda  $v = v_\alpha x_\alpha$  ise,  $u, v \in L$  vektörleri için Killing formu aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$K(u, v) = K_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta, \quad K_{\alpha\beta} = C_{\sigma\alpha}^\tau C_{\tau\beta}^\sigma, \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, r). \quad (2.42)$$

$\det K_{\alpha\beta} = 0$  ise Killing formu dejeneredir denir. Killing formu ile Cartan'a ait aşığıdaki iki kriter ifade edilebilir.

*Çözülebilirlik kriteri:*  $L$  Lie cebiri ancak ve ancak  $\forall u \in L'$  için  $K(u, u) = 0$  ise çözülebilirdir.

*Yarı-basitlik kriteri:*  $L$  Lie cebiri ancak ve ancak Killing formu dejenere değilse yarı-basittir.

Bu bölümde verilen bilgiler [58–60] referanslarından derlenmiştir.



### 3. NLS DENKLEMİ İNTEGRALLENEBİLİRLİK ANALİZİ

#### 3.1 Giriş

Bu bölümde

$$\begin{aligned} i\psi_t + f(x,t)\psi_{xx} + g(x,t)|\psi|^2\psi + h(x,t)\psi &= 0, \\ f &= f_1 + if_2, \quad g = g_1 + ig_2, \quad h = h_1 + ih_2, \\ f_j, g_j, h_j : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \quad j = 1, 2; \quad f_1 g_1 \neq 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

şeklinde verilen değişken katsayılı doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin integre edilebilir sınıflarının belirlenmesi için Painlevé testi uygulanacaktır. Bu analize ilişkin hesaplar detaylı olarak verildikten sonra, yine  $f = f_1(x,t) + if_2(x,t)$ ,  $g = g_1(x,t) + ig_2(x,t)$ ,  $h = h_1(x,t) + ih_2(x,t)$  ve  $k = k_1(x,t) + ik_2(x,t)$ ,  $l = l(t)$ ,  $m = m(t)$ ,  $n = n(t)$  olmak üzere

$$i\psi_t + f\psi_{xx} + k\psi_x + g|\psi|^2\psi + h\psi = 0 \quad (3.2)$$

ve

$$i\psi_t + f\psi_{xx} + g|\psi|^2\psi + h\psi + k\psi_x + il\psi_{xxx} + im(|\psi|^2\psi)_x + in\psi(|\psi|^2)_x = 0 \quad (3.3)$$

denklemleri için P-testinin sonuçları sunulacaktır. (3.2) için analiz  $f$ 'nin reel olması durumunda [48]'de yapılmıştır. (3.3) denkleminin integre edilebilirliği katsayıların sadece zamana bağlı olması durumunda [61]'de irdelenmiştir, burada katsayılar üzerinde konuma bağıllık da içerilmiştir.

Painlevé analizinden sonra, katsayıların test koşullarını sağladığı durumda (3.1)'in standart NLS denkleminde dönüştüğü, dolayısıyla P-testi koşullarının integre edilebilirlik için yeterli olduğu gösterilecektir. Sonuçlar özel bir sınıf denklem üzerinde uygulandıktan sonra, P-testi koşullarının bu özel sınıf denklem üzerinde integre edilebilirlik için aynı zamanda gerek koşul olduğu gösterilecektir. Bölüm, her üç sınıf denklem için bazı tam çözümlerin verilmesiyle sonlanmaktadır.

### 3.2 Painlevé Analizi

Adi diferansiyel denklemlerin tekil noktaları sabit tekil noktalar ve hareketli tekil noktalar olmak üzere iki sınıfa ayrılabilir. Sabit tekil noktalar, denklemle birlikte belirlenen tekillikler olup denklemin çözümü yapılmadan da saptanabilir. Hareketli tekil noktalar ise doğrusal olmayan deklemlerde ortaya çıkar ve başlangıç koşullarına bağlı olan tekilliklerdir. Örneğin  $A \neq 0$  olmak üzere,

$$y' + y^2 = 0, \quad y(0) = \frac{1}{A} \quad (3.4)$$

başlangıç değer probleminin çözümü  $y(x) = 1/(x + A)$  şeklindedir. Görüldüğü gibi çözümün  $x = 0$ 'da verilen başlangıç koşuluna bağlı olarak  $x = -A$ 'da bir tekilliği vardır ve bunu denklemden belirlemek mümkün değildir. Burada  $x$  kompleks bir değişken olarak düşünüldüğünde, bu çözümde birinci mertebeden kutup türünden bir tekillik bulunmaktadır. Benzer şekilde bir denklemin çözümlerinde dallanma veya esaslı türden tekillikler de mevcut olabilir. Bir diferansiyel denklemin Painlevé özelliğine sahip olması, tüm çözümlerinin tüm hareketli tekil noktalarının en fazla kutup türünden olması demektir. Bu da tüm çözümlerin esaslı veya dallanma türünden hareketli tekillikler içermemesi yani çözümlerin hareketli tekil noktalar civarında tek değerli olması anlamına gelir. Bir diğer ifadeyle tüm çözümlerin meromorf, yani kutup noktalar haricinde analitik yapıda olması demektir.

Kısmi diferansiyel denklemler (KDD) durumunda denklemin çözümü çok değişkenlidir. Yine ele alınan denklemin bağımsız değişkenleri kompleks olarak düşünülecektir. Genelde çok değişkenli bir kompleks fonksiyonun tekil noktaları izole değildir.  $\Theta = \Theta(z_1, \dots, z_n)$  bir meromorf fonksiyon ise,  $\Theta$ 'nın tekillikleri  $(n - 1)$  boyutlu bir (kompleks) manifold üzerindedir. Bu manifoldlar,  $\phi$  (tekil manifoldunun bir civarında) analitik bir fonksiyon olmak üzere,  $\phi(z_1, \dots, z_n) = 0$  şeklinde koşullarla belirlenir. Diğer yandan, bir KDD karakteristik manifoldu boyunca her türden tekilliğe sahip olabilir. Örneğin  $w_{xx} - w_{tt} = 0$  dalga denkleminin genel çözümü  $w_1, w_2$  keyfi fonksiyonları ile

$$w(x, t) = w_1(x - t) + w_2(x + t) \quad (3.5)$$

şeklinde verilir. Bu çözümler keyfi fonksiyonların seçimine bağlı olarak  $x - t = k_1$  ve  $x + t = k_2$  ( $k_1, k_2$  sabitler) karakteristik manifoldları üzerinde her türden tekilliği

taşıyabilir. Bu nedenle kısmi diferansiyel denklemler için Painlevé özelliğinin tanımının şu şekilde yapılması uygun olacaktır: Kısmi diferansiyel denklemin tüm çözümleri, karakteristik olmayan tekillik manifoldları civarında tek değerli ise denklem Painlevé özelliğine sahiptir.

Denklemin Painlevé özelliğinin araştırılması için WTC testi olarak bilinen test geliştirilmiştir [62]. Bu özelliğin sağlanması için, karakteristik olmayan tekillik manifoldu civarında denklemin çözümünün

$$u(z) = \sum_{j \geq 0} u_j(z) \Phi(z)^{j+\alpha}, \quad z \in \mathbb{C}^n \quad (3.6)$$

tipinde bir Laurent serisine sahip olması şartı aranır. Bu Painlevé açılımı denklemde yazıldığında açılımın katsayı fonksiyonları için

$$Q(j)U(j) = F(j) \quad (3.7)$$

şeklinde bir tekrarlama bağıntısı elde edilir, burada  $U(j)$  katsayı fonksiyonlarını içeren matristir.  $\det Q(j) \neq 0$  için katsayı fonksiyonları bu sistemle belirlenir.  $\det Q(j) = 0$  olan  $j$  indislerine rezonans indisleri denir. Rezonans düzeylerinde açılım katsayıları belirlenemez, sistemin sunduğu uygunluk koşullarının sağlanması durumunda bu katsayı fonksiyonları keyfi kalır. Eğer

P1)  $\alpha$  öncül terimi negatif bir tamsayı olarak belirleniyorsa,

P2) Bütün rezonans indisleri tamsayı olarak belirleniyorsa,

P3) Rezonans düzeylerinde (3.7)'nin getireceği uygunluk denklemleri  $\Phi$  tekillik manifoldundan bağımsız olarak sağlanıyorsa

denklem, Painlevé testini geçmektedir denir. Bu özellikleri sağlayan bir açılım P1'den dolayı dallanma noktaları ve esaslı tekillik içeremez. P2 ve P3'ün sağlanmasıyla çözümde Cauchy-Kovalewski teoreminin gerektirdiği sayıda açılım katsayı fonksiyonu keyfi kalır yani çözümde doğru sayıda keyfi fonksiyon mevcut olur ve kısmi diferansiyel denklemin Painlevé özelliğine sahip olması için bir gerek koşul yerine gelmiş olur. Burada  $\Phi(z)$  keyfi fonksiyonlardan biri olmalıdır. Painlevé özelliği ile ilgili olarak [63, 64] incelenebilir.

Bir KDD bu testi geçiyorsa, Painlevé özelliğine sahip olma şansı vardır: (3.6) çözümleri tekillik yüzeyi civarında tek değerlidir ve bir  $z = z_0$  için verilecek keyfi Cauchy başlangıç koşulunu sağlayacak yeterli sayıda keyfi fonksiyon içerir. Painlevé testini geçmek, denklemin Painlevé özelliğine sahip olması için gerek koşuldur ancak yeterli değildir. Bu durumda, integre edilebilir KDDler için denklemleri diferansiyel bağıntılarla kendine eşleyen öz-Bäcklund dönüşümlerinin bulunması veya, integre edilebilirlik için yeter koşul olan Lax çiftinin oluşturulması mümkün olmaktadır. İntegre edilebilir olmayan KDDler için ise, Painlevé açılımı sonlu bir terimde kesilerek,  $\Phi$  tekillik manifoldu ve keyfi fonksiyonlar üzerine bir kısım kısıtlarla birlikte denklemin özel çözümleri bulunabilir. Burada genellikle kısıt denklemlerinin sayısı, keyfi fonksiyonların sayısından fazladır.

### 3.2.1 (3.1) denklemleri için Painlevé testi

(3.1) denklemleri tekillik analizini yapabilmek için, denklem kompleks eşleniğiyle birlikte

$$\begin{aligned} iu_t + f(x,t)u_{xx} + g(x,t)u^2v + h(x,t)u &= 0, \\ -iv_t + p(x,t)v_{xx} + q(x,t)uv^2 + r(x,t)v &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

şeklinde yazılır. Burada  $\psi$  değişkeni yerine  $u$  kullanılmış olup  $v$  ise  $u$ 'nın kompleks eşleniğidir, ancak analizde bağımsız fonksiyonlar olarak ele alınmaktadırlar.  $p, q, r$  fonksiyonları da sırasıyla  $f, g, h$  fonksiyonlarının kompleks eşlenikleridir. Painlevé özelliğinin araştırılmasında sistemin,  $\Phi(x,t) = 0$  şeklinde tanımlanan, karakteristik olmayan hareketli bir tekillik yüzeyi (bu durumda bir eğri) civarında Laurent açılımı yapısında çözümlere sahip olması istenecektir. Dolayısıyla çözümler için şu açılım uygundur:

$$u(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x,t)\Phi^{\alpha+j}(x,t), \quad v(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j(x,t)\Phi^{\beta+j}(x,t); \quad (3.9)$$

burada  $u_0, v_0 \neq 0$  ve  $u_j, v_j, \Phi$  analitik fonksiyonlardır.  $\alpha$  ve  $\beta$  baskın terim davranışından belirlenecek olan negatif tamsayıdır.

$\alpha$  ve  $\beta$  öncül terimlerinin belirlenmesi için (3.8)'de  $u \sim u_0\Phi^\alpha$  ve  $v \sim v_0\Phi^\beta$  yazılır ve en küçük mertebeden terimlerin dengelenmesinden

$$\alpha + \beta = -2 \quad (3.10)$$

olması gerektiği görülür. Bu denklem ancak  $\alpha = -1$  ve  $\beta = -1$  tamsayıları için sağlanır. Bunun yanında,

$$u_0(gu_0v_0 + 2f\Phi_x^2) = 0, \quad (3.11a)$$

$$v_0(qu_0v_0 + 2p\Phi_x^2) = 0 \quad (3.11b)$$

bağıntıları da sağlanmalıdır ve buradan

$$u_0v_0 = -2\Phi_x^2 \frac{f}{g} = -2\Phi_x^2 \frac{p}{q} \quad (3.12)$$

olması gerektiği görülür. Bu eşitliğin sağlanması için  $f/g$ 'nin reel bir sayı olması gerekmektedir, bu ise  $f_1g_2 = f_2g_1$  koşulunu getirir.  $f$  veya  $g$ 'den biri reelse veya sadece sanal kısımdan ibaretse, diğeri de reeldir veya sadece sanal kısımdan ibarettir.

Öncül terimin belirlenmesinden sonra (3.9) açılımı (3.8)'de yerine yazılır.  $j = 0$  için,  $\Phi^{-3}$ 'ün katsayısının sıfıra eşitlenmesi (3.11) koşullarını verir.  $j \geq 1$  için  $\Phi^{-3+j}$ 'nin katsayısı sıfıra eşitlenirse

$$Q(j) \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (j^2 - 3j - 2)f\Phi_x^2 & gu_0^2 \\ qv_0^2 & (j^2 - 3j - 2)p\Phi_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_j \\ G_j \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

sistemi elde edilir, burada

$$\begin{aligned} F_j &= -iu_{j-2,t} - i(-2+j)\phi_t u_{j-1} - fu_{j-2,xx} - 2(-2+j)f\Phi_x u_{j-1,x} \\ &\quad - (-2+j)f\Phi_{xx}u_{j-1} - hu_{j-2} - gv_0 \sum_{l=1}^{j-1} u_l u_{j-l} - g \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{l=0}^k u_l u_{k-l} v_{j-k}, \\ G_j &= iv_{j-2,t} + i(-2+j)\phi_t v_{j-1} - pv_{j-2,xx} - 2(-2+j)p\Phi_x v_{j-1,x} \\ &\quad - (-2+j)p\Phi_{xx}v_{j-1} - rv_{j-2} - qu_0 \sum_{l=1}^{j-1} v_l v_{j-l} - q \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{l=0}^k v_l v_{k-l} u_{j-k} \end{aligned} \quad (3.14)$$

ile verilir. Burada  $j < 0$  için  $u_j = 0$  ve üst indis alt indisinden küçük olan toplamlar sıfır olarak alınacaktır.  $F_j$  ve  $G_j$ 'den birinde  $i \leftrightarrow -i$ ,  $u \leftrightarrow v$ ,  $f \leftrightarrow p$ ,  $g \leftrightarrow q$ ,  $h \leftrightarrow r$  değişimi yapıldığında diğeri elde edilmektedir.  $u_j$  ve  $v_j$  açılım katsayı fonksiyonları,

$$\det Q(j) = |f|^2 \Phi_x^4 (j+1)j(j-3)(j-4) = 0 \quad (3.15)$$

olmadığı sürece (3.13) sisteminden belirlenir. Rezonans indisleri  $j = -1, 0, 3, 4$ 'tür.  $j = -1$  rezonansı  $\Phi$  tekillik manifoldunun keyfiliğine karşılık gelmektedir ve  $j = 0$  rezonansı, (3.12) denklemiyle doğrulandığı gibi,  $u_0$  ve  $v_0$  fonksiyonlarından birinin keyfi kalması gerektiğini göstermektedir.

$j = 1$  için

$$\begin{pmatrix} -4f\Phi_x^2 & gu_0^2 \\ qv_0^2 & -4p\Phi_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\Phi_t u_0 + 2f\Phi_x u_{0,x} + f\Phi_{xx} u_0 \\ -i\Phi_t v_0 + 2p\Phi_x v_{0,x} + p\Phi_{xx} v_0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

sistemi çözülür ve açılım katsayıları

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{2f\Phi_x v_{0,x}}{gv_0^2} + \frac{4f_x\Phi_x}{3gv_0} - \frac{4fg_x\Phi_x}{3g^2v_0} + \frac{2i\Phi_t}{3gv_0} + \frac{i\Phi_t}{3qv_0} + \frac{3f\Phi_{xx}}{gv_0}, \\ v_1 &= -\frac{v_{0,x}}{\Phi_x} + \frac{f_x v_0}{3f\Phi_x} - \frac{g_x v_0}{3g\Phi_x} + \frac{i\Phi_t v_0}{6f\Phi_x^2} + \frac{ig\Phi_t v_0}{3fq\Phi_x^2} + \frac{\Phi_{xx} v_0}{2\Phi_x^2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

şeklinde bulunur. Bu sonuçlarda  $p = qf/g$  ve  $u_0 = -2\Phi_x^2 f/(gv_0)$  bağıntıları kullanılmıştır, dolayısıyla  $v_0$  rezonans düzeyi fonksiyonu keyfi fonksiyon olarak belirlenmiş,  $u_0$  ise  $v_0$ 'a bağlı olarak ifade edilmiştir.  $j = 2$  için

$$\begin{pmatrix} -4f\Phi_x^2 & gu_0^2 \\ qv_0^2 & -4p\Phi_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -hu_0 - gu_1^2 v_0 - 2gu_0 u_1 v_1 - iu_{0,t} - fu_{0,xx} \\ -rv_0 - qv_1^2 u_0 - 2qv_0 v_1 u_1 + iv_{0,t} - pv_{0,xx} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

sisteminin çözümünden de  $u_2, v_2$  belirlenir. Oldukça uzun sonuçları olduğundan buraya kaydedilmemiştir.

$j = 3$  rezonans düzeyinde,  $u_3, v_3$  arasında doğrusal bir ilişki mevcuttur ve bir tanesi keyfidir.

$$\begin{pmatrix} -2f\Phi_x^2 & gu_0^2 \\ qv_0^2 & -2p\Phi_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_3 \\ G_3 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

sistemi,  $j = 3$ 'teki uygunluk koşulunu

$$qv_0 F_3 = gu_0 G_3 \quad (3.20)$$

şeklinde vermektedir. Uygunluk koşulu  $\Phi$  manifoldunun her seçimi için sağlanması gerektiğinden, (3.20)'de ortaya çıkan  $\Phi_t, \Phi_t^2, \Phi_t^3, \Phi_{tt}$  terimlerinin katsayıları özdeş olarak sıfır olmalıdır.  $\Phi_{tt}$ 'nin katsayısından  $g^2 = q^2$  elde edilir. Buradan  $g = q$  veya  $g = -q$  bulunur. İlki  $g = g_1$  olması durumunda, ikincisi ise  $g = ig_2$  ise mümkündür.  $f$  ve  $g$  aynı anda reel veya sadece sanal kısımdan ibaret olabildiklerinden, ilk durum için  $f = f_1$  ve ikinci durum için  $f = if_2$  olmalıdır.

(i)  $g = ig_2, f = if_2$  durumu. (3.20)'de  $\Phi_t^2$ 'nin katsayısından

$$2\frac{v_{0,x}}{v_0} + \frac{g_{2,x}}{g_2} - \frac{f_{2,x}}{f_2} - 2\frac{\Phi_{xx}}{\Phi_x} = 0 \quad (3.21)$$

olması gerektiği görülür.  $f$  ve  $g$  denklemlerle birlikte verilen fonksiyonlardır.  $j = -1, 0$  rezonanslarına karşılık  $\Phi, v_0$  fonksiyonları iki keyfi fonksiyon olarak ortaya çıkmalıdır,

aralarında (3.21) gibi bir bağıntının olması bu durumla çelişir. Dolayısıyla,  $f$  ve  $g$ 'nin reel kısmının sıfır olduğu durumda denklem, Painlevé testini geçememektedir.

(ii)  $g = g_1$ ,  $f = f_1$  durumu. Buradan itibaren 1 indisi kullanılmayacak ve  $f$  ve  $g$ 'nin reel oldukları varsayılacaktır. (3.20) eşitliğinin sağlanması için

$$\left(\frac{f_x}{f}\right)^2 + \frac{f_x g_x}{fg} + 4\left(\frac{g_x}{g}\right)^2 - \frac{f_{xx}}{f} - 2\frac{g_{xx}}{g} = 0, \quad (3.22a)$$

$$h_2 \frac{f_x}{f} + 2h_2 \frac{g_x}{g} - 3h_{2,x} + \frac{3}{2} \frac{f_t f_x}{f^2} - \frac{1}{2} \frac{f_x g_t}{fg} + \frac{f_t g_x}{fg} - 2 \frac{g_t g_x}{g^2} - \frac{f_{xt}}{f} + \frac{g_{xt}}{g} = 0 \quad (3.22b)$$

olması gerekmektedir.  $j = 4$  rezonans düzeyine gelinirse,

$$\begin{pmatrix} 2f\Phi_x^2 & gu_0^2 \\ qv_0^2 & 2p\Phi_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_4 \\ G_4 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

sisteminden,  $u_4$  ve  $v_4$ 'ten birinin keyfi olabilmesi için

$$v_0 F_4 + u_0 G_4 = 0 \quad (3.24)$$

uygunluk koşulunun sağlanması gerektiği görülür. Bu uygunluk koşulu,  $j = 3$  rezonans düzeyinden gelen  $u_3, v_3$  fonksiyonlarını içerir; (3.19)'dan  $u_3 = (gu_0^2 v_3 - F_3)/(2f\Phi_x^2)$  ifadesi (3.24)'te yazılırsa  $u_3, v_3$  ortadan kalkar. Önceki rezonans düzeyine benzer şekilde,  $\Phi_{tt}$ 'nin katsayısından

$$\frac{f_x}{f} + 2\frac{g_x}{g} = 0 \quad (3.25)$$

elde edilir; bu ifade integre edildiğinde ise, denklemin Painlevé testini geçmesi için  $f$  ve  $g$  arasında

$$f(x,t)g^2(x,t) = K(t) \quad (3.26)$$

ilişkisinin sağlanması gerektiği görülür. Burada  $K(t)$  keyfi bir fonksiyondur. Dikkat edilirse  $f$  ve  $g$ 'nin sadece  $t$ 'ye bağlı olduğu özel durumda bu koşul zaten sağlanmaktadır.  $f(x,t) = K(t)/g^2(x,t)$  yazıldığında,  $j = 3$  rezonansının uygunluk denklemlerinden (3.22a)'nın sağlandığı, (3.22b)'nin ise  $h_{2,x} = (g_t/g)_x$  şeklinde basitleştiği ve bu ifadenin integralinin de

$$h_2(x,t) = \frac{g_t}{g} + \gamma(t) \quad (3.27)$$

şeklinde, potansiyel fonksiyonunun sanal kısmını belirlediği görülür, burada  $\gamma(t)$  keyfi bir fonksiyondur. Dikkat edilirse,  $g$   $x$ 'e bağlı bir fonksiyon ise  $h_2$  de  $x$ 'e bağlı

olabilmektedir. Bundan sonra, (3.24) uygunluk koşulunun sağlanması için tek bir denklem kalır:

$$\begin{aligned} \frac{2K}{g} \left( \frac{h_{1,xx}}{g} - \frac{g_x h_{1,x}}{g^2} \right) = & 4\gamma^2 + 2\dot{\gamma} + 2\gamma \frac{\dot{K}}{K} + \frac{\ddot{K}}{K} - \left( \frac{\dot{K}}{K} \right)^2 + \frac{\dot{K}}{K} \frac{g_t}{g} - \frac{g_{tt}}{g} \\ & + K^2 \left( -36 \frac{g_x^4}{g^8} + 48 \frac{g_x^2 g_{xx}}{g^7} - 6 \frac{g_{xx}^2}{g^6} - 10 \frac{g_x g_{xxx}}{g^6} + \frac{g_{xxxx}}{g^5} \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Bu ifadeyi iki kez integre etmek mümkündür ve potansiyelin gerçel kısmı

$$h_1(x, t) = \frac{\tau_0}{2} \left( \int g dx \right)^2 + \int g \left( \int \tau_1 dx \right) dx + \frac{K}{2} \left( \frac{g_{xx}}{g^3} - \frac{3}{2} \frac{g_x^2}{g^4} \right) + \delta_0 \int g dx + \delta_1 \quad (3.29)$$

şeklinde bulunur; burada  $\tau_0$  ve  $\tau_1$

$$\tau_0 = \tau_0(t) = \frac{2\gamma^2}{K} + \frac{(\gamma K)_t}{K^2} + \frac{(\ln K)_{tt}}{2K}, \quad \tau_1 = \tau_1(x, t) = -\frac{1}{2} \left( \frac{g_t}{K} \right)_t \quad (3.30)$$

şeklinde verilmekte olup  $\delta_0(t)$  ve  $\delta_1(t)$  keyfi fonksiyonlardır. (3.29) formülü verilen bir denklem için kullanılırken hesap edilen integrallere integrasyon sabitleri (keyfi fonksiyonları) eklenmeyecektir.

**Önerme.** (3.1) denklemi ancak ve ancak (3.26), (3.27) ve (3.29) koşulları gerçekleşiyorsa Painlevé testini geçer.

Literatürde sıkça karşılaşılan özel durum için bu sonuçları düzenlemek faydalı olabilir. (3.25)'ten görüldüğü gibi,  $f$  ve  $g$ 'den biri sadece  $t$ 'nin fonksiyonu ise, diğeri de öyle olmalıdır; birbirinden bağımsız  $f = f(t)$ ,  $g = g(t)$  şeklinde iki fonksiyondurlar. Bu durumda (3.22a) denklemi sağlanırken (3.22b)'den  $h_{2,x} = 0$  elde edilir, bu da,  $\beta(t)$  keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$h_2(x, t) = \beta(t) \quad (3.31)$$

demektir. (3.24)'ün sağlanması için geriye tek bir denklem kalır:

$$2fh_{1,xx} = 4\beta^2 + 2\dot{\beta} + 2\beta \frac{\dot{f}}{f} - 4\beta \frac{\dot{g}}{g} - \left( \frac{\dot{f}}{f} \right)^2 - \frac{\dot{f}}{f} \frac{\dot{g}}{g} + 2 \left( \frac{\dot{g}}{g} \right)^2 + \frac{\ddot{f}}{f} - \frac{\ddot{g}}{g}. \quad (3.32)$$

Bu ifadeyi (3.28)'de  $\gamma(t) = \beta(t) - \dot{g}/g$  yazarak doğrudan elde etmek mümkündür. Eşitliğin sağ tarafı

$$2fh_{1,xx} = 4\beta^2 + 2\dot{\beta} + 2\beta \frac{\dot{f}}{f} - 4\beta \frac{\dot{g}}{g} + (\ln f)_{tt} + g \left( \frac{1}{g} \right)_{tt} - (\ln f)_t (\ln g)_t \quad (3.33)$$

şeklinde düzenlenebilir, burada  $t$  indisi zaman türevini göstermektedir; ifade  $x$ 'e göre iki kez integre edildiğinde  $h_1(x, t)$  elde edilir:

$$h_1(x, t) = \frac{1}{4f} \{ 4\beta^2 + 2\dot{\beta} + 2\beta \frac{\dot{f}}{f} - 4\beta \frac{\dot{g}}{g} + (\ln f)_{tt} + g(\frac{1}{g})_{tt} - (\ln f)_t (\ln g)_t \} x^2 + H_1(t)x + H_2(t), \quad (3.34)$$

burada  $H_1(t)$  ve  $H_2(t)$  keyfi fonksiyonlardır. Bu sonuçlar [44]- [46]'da verilen sonuçlar ile çakışmaktadır.  $f = 1$  ve  $g = -2$  için

$$h_1(x, t) = \frac{1}{2} (2\beta^2 + \dot{\beta}) x^2 + H_1(t)x + H_2(t) \quad (3.35)$$

bulunur, bu da [41]'de elde edilen sonuçlar ile uyumludur.

### 3.2.2 (3.2) denklemi için Painlevé testi

Yukarıda detayları verilen analiz, (3.1) denkleminin genelleştirmeleri için de yapılabilir. Fiziksel olarak önem taşıyan genelleştirmelerden biri (3.2) denklemdir. Daha önce belirtildiği gibi  $f, g, h, k$  fonksiyonları konum ve zamana bağlı kompleks fonksiyonlardır. Katsayıların bazı özel durumları için denklem, etkin kütleli NLS denklemi olarak adlandırılmaktadır. Tekillik analizi (3.2) için tekrarlanırsa,  $f, g$  fonksiyonlarının reel olması gerektiği görülerek

$$k_1(x, t) = \frac{1}{2} f_x(x, t) + f(x, t) \frac{g_x(x, t)}{g(x, t)}, \quad (3.36)$$

$$h_2(x, t) = \frac{1}{4} \left( (\ln \frac{g^2}{f})_t + k_2 (\ln \frac{g^2}{f})_x + 2k_{2,x} \right) + \gamma(t), \quad (3.37)$$

ve

$$\begin{aligned} f_x h_{1,x} + 2f h_{1,xx} = & 4\gamma^2 + 2\dot{\gamma} - \frac{3f_t^2}{4f^2} + \frac{f_{tt}}{2f} - \frac{3k_2 f_t f_x}{2f^2} + \frac{k_{2,t} f_x}{2f} - \frac{3k_2^2 f_x^2}{4f^2} \\ & + \frac{k_{2,x} f_t}{f} + \frac{3k_{2,x} f_x}{2f} - k_{2,x}^2 + \frac{k_{2,xt}}{f} - k_{2,xt} + \frac{k_{2,xx}^2}{2f} - k_2 k_{2,xx} \\ & - \frac{f_x^2 g_x^2}{2g^2} + \frac{7f f_x g_x^3}{2g^3} - \frac{3f^2 g_x^4}{g^4} + \frac{f_x g_x f_{xx}}{4g} - \frac{3f f_{xx} g_x^2}{2g^2} + \frac{3f_x^2 g_{xx}}{4g} - \frac{13f f_x g_x g_{xx}}{2g^2} \\ & + \frac{7f^2 g_x^2 g_{xx}}{g^3} + \frac{2f f_{xx} g_{xx}}{g} - \frac{2f^2 g_{xx}^2}{g^2} + \frac{f g_x f_{xxx}}{2g} + \frac{3f f_x g_{xxx}}{g} - \frac{3f^2 g_x g_{xxx}}{g^2} + \frac{f^2 g_{xxxx}}{g} \end{aligned} \quad (3.38)$$

koşulları elde edilir. Burada  $\gamma(t)$  keyfi bir fonksiyondur. (3.38) denkleminin iki kez integrasyonu izin verilen potansiyelin reel kısmını belirler:

$$h_1(x,t) = \int \frac{1}{\sqrt{|f|}} \int F_V(x,t) dx dx + \frac{f_x g_x}{4g} - \frac{f g_x^2}{4g^2} + \frac{f g_{xx}}{2g} \\ + \int \frac{k_2}{2f} \left( (\ln \frac{|f|}{k_2})_t + k_2 (\ln \frac{\sqrt{|f|}}{k_2})_x \right) dx + A(t) \int \frac{dx}{\sqrt{|f|}} + B(t). \quad (3.39)$$

Burada  $A(t)$  ve  $B(t)$  keyfi fonksiyonlar olup  $f > 0$  için  $v = 1$  ve  $f < 0$  için  $v = -1$  olmak üzere

$$F_V(x,t) = \frac{v}{\sqrt{|f|}} \left( 2\gamma^2 + \dot{\gamma} - \frac{3f_t^2}{8f^2} + \frac{f_{tt}}{4f} \right) \quad (3.40)$$

şeklinde verilmektedir.

**Hatırlatma.**  $f_2 = 0$  için (3.1) ve (3.2) denklemleri, yine P-testi sonuçları sunan [48]'de incelenen sınıfın içinde kalır. Buradaki analizde,  $f_2$  fonksiyonu da dikkate alınarak test uygulanmış ve özdeş olarak sıfır olması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır.

### 3.2.3 (3.3) denklemi için Painlevé testi

$l(t)$ ,  $m(t)$ ,  $n(t)$  fonksiyonları sıfırdan farklı olarak ele alınmıştır. Bunun yanında öncül terim analizinden,  $3m(t) + 2n(t) \neq 0$  olması gerektiği görülmüştür çünkü aksi halde  $l(t) \equiv 0$  olması gereklidir. Painlevé seri açılımından, (i)  $n(t) = -m(t)$  veya (ii)  $n(t) = -\frac{1}{2}m(t)$  olması durumunda tamsayı rezonanslar elde edilebilmektedir.

(i) Rezonans indisleri  $j = \{-1, 0, 1, 3, 4, 5\}$  olarak bulunur. Rezonans düzeylerindeki uygunluk koşulları

$$f_1(x,t) = \frac{3l}{m} g_1, \quad f_2(x,t) = 0, \quad g_2(x,t) = 0, \quad (3.41)$$

$$k_1(x,t) = \frac{3l}{m} g_{1,x}, \quad k_2(x,t) = -\frac{3l}{m^2} g_1^2 + x\gamma_1 + \gamma_2, \quad (3.42)$$

$$h_1(x,t) = \int \left( \frac{g_{1,t}}{m} - \frac{\dot{m}g_1}{m^2} \right) dx + (x\gamma_1 + \gamma_2) \frac{g_1}{m} \\ - \frac{l}{m^3} g_1^3 + \frac{l}{m} g_{1,xx} + x\beta_1 + \beta_2, \quad (3.43)$$

$$h_2(x,t) = \frac{\dot{m}}{2m} - \frac{\dot{l}}{2l} - \frac{3l}{m^2} g_1 g_{1,x} + \gamma_1 \quad (3.44)$$

şeklinde elde edilmiştir, burada  $\gamma_i, \beta_i, i = 1, 2$  zamanın keyfi fonksiyonudur.  $g_1(x,t), m(t)$  ve  $l(t)$  üzerinde koşul yoktur.

(ii) Rezonanslar  $j = \{-1, 0, 2, 3, 4, 4\}$  olarak bulunmuştur. (3.43) denkleminde  $\beta_1(t) = 0$  olmak üzere (i) ile aynı koşullar elde edilir.

Buradaki sonuçların, [61]'de verilenler ile uyumlu olduğu not edilmelidir. (i) durumunda yukarıdaki sonuçlar  $\gamma_1(t) = \beta_1(t) = 0$  ile ele alınır ve (3.43) denklemindeki belirsiz integral dikkate alınmazsa, katsayıların sadece zamana bağlı olduğu durumdaki koşulların aynısı elde edilir. Aynı ifadeler (ii) durumu için de geçerlidir, ilaveten  $s_0 \neq 0$  bir sabit olmak üzere  $g_1 = s_0 m$  koşulunu eklemek gereklidir.

### 3.3 NLS Denkleminin Dönüşümü

(3.1) denkleminin denklik dönüşümleri ve bunların kullanımıyla simetri grupları için bir sınıflandırma [24]'te elde edilmiştir. Burada denklik dönüşümleriyle, denklemin yapısını değişmez bırakan (denkleme yeni terim eklemeyen), ancak katsayı fonksiyonlarını değiştirebilen dönüşümler kastedilmektedir. (3.1) için bu dönüşümler

$$\psi(x, t) = Q(x, t) \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{t}), \quad \tilde{x} = X(x, t), \quad \tilde{t} = T(t) \quad (3.45)$$

yapısında olup dönüşüm fonksiyonlarının sağlaması gereken koşul

$$iQX_t + f(x, t)(X_{xx}Q + 2Q_xX_x) = 0 \quad (3.46)$$

şeklinindedir. Dönüşüm sonrasında denklemin katsayı fonksiyonları

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{t}) = f(x, t) \frac{X_x^2}{\tilde{T}}, \quad \tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{t}) = g(x, t) \frac{|Q|^2}{\tilde{T}}, \quad (3.47)$$

$$\tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{1}{Q\tilde{T}}(hQ + iQ_t + fQ_{xx}) \quad (3.48)$$

haline gelir.

[24]'te yer alan önemli sonuçlardan biri şudur: 5 boyutlu bir simetri cebirine sahip (3.1) yapısında bir denklem,

$$\tilde{f} = 1; \quad \tilde{g} = \varepsilon_0 + i\tilde{g}_2, \quad \varepsilon_0 = \pm 1, \quad \tilde{g}_2 \in \mathbb{R}; \quad \tilde{h} = 0 \quad (3.49)$$

durumunda elde edilen NLS denkleminin denktir. Simetri cebiri için bir baz

$$P_0 = \partial_{\tilde{t}}, \quad P_1 = \partial_{\tilde{x}}, \quad W = \partial_{\tilde{\omega}}, \quad B = \tilde{t}\partial_{\tilde{x}} + \frac{1}{2}\tilde{x}\partial_{\tilde{\omega}}, \quad D = \tilde{t}\partial_{\tilde{t}} + \frac{1}{2}\tilde{x}\partial_{\tilde{x}} - \frac{1}{2}\tilde{\rho}\partial_{\tilde{\rho}} \quad (3.50)$$

şeklinde verilir. Burada  $\psi$  fonksiyonu modülü ve argümanı türünden ifade edilmiştir:  $\psi(x, t) = \rho(x, t)e^{i\omega(x, t)}$ . Bu sonuçtan denklemin 5 boyutlu simetri cebirine sahip

olmasıyla standart NLS denkleminin dönüşmesinin birbirine eşdeğer koşullar olduğu anlaşılmaktadır.

$Q(x, t) = R(x, t)e^{i\theta(x, t)}$ ,  $R \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$  yazıldığında katsayı fonksiyonları

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{t}) = f(x, t) \frac{X_x^2}{\tilde{T}}, \quad \tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{t}) = g(x, t) \frac{R^2(x, t)}{\tilde{T}(t)}, \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t}) = & \frac{1}{\tilde{T}} \left\{ h_1(x, t) - \theta_t + f(x, t) \left( \frac{R_{xx}}{R} - \theta_x^2 \right) \right. \\ & \left. + i \left[ h_2(x, t) + \frac{R_t}{R} + f(x, t) \left( \frac{2R_x \theta_x}{R} + \theta_{xx} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.52)$$

şeklini alır. Burada  $f(x, t)$  kompleks değerli bir fonksiyondur ancak takip eden hesaplarda gerçel fonksiyon olarak alınacağından  $\tilde{h}$  formülünde reel ve sanal kısımlarına ayrılmamıştır.

Önceki kısımda denklemin P-özelliğine sahip olması için  $f, g, h$  fonksiyonlarının sağlaması gerekli olduğu koşullar verilmişti. Şimdi cevaplanacak olan soru ise, bu koşullar altında denklemin, integre edilebilirliği bilinen NLS denkleminin dönüşebilirliğidir. Bu, (3.1) denkleminin NLS denkleminin simetri cebirine izomorf 5 boyutlu bir cebire sahip olmasına denktir. Denklik dönüşümleriyle bu dönüşümün gerçekleştirilebilirliği araştırılacaktır.

Önceki kısımda  $f$  ve  $g$  gerçel fonksiyonlar olarak elde edilmişti.  $f$  gerçel bir fonksiyon ise, (3.46)'dan  $R_0(t)$  keyfi olmak üzere

$$R^2(x, t) = \frac{R_0(t)}{X_x}, \quad \theta_x = -\frac{1}{2f} \frac{X_t}{X_x} \quad (3.53)$$

elde edilir. (3.1)'in 5 boyutlu bir simetri cebiri olması için,

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{t}) = f(x, t) \frac{X_x^2}{\tilde{T}} = 1, \quad (3.54a)$$

$$\tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{t}) = g(x, t) \frac{R^2(x, t)}{\tilde{T}} = \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \pm 1, \quad (3.54b)$$

$$\tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t}) = 0 \quad (3.54c)$$

yapılması yeterlidir. (3.54b)'nin sağ tarafında  $i\tilde{g}_2$  sabiti yazılmamıştır çünkü denklemin solunda yer alan büyüklükler reeldir. Bu denklemler ile  $R, \theta, X$  ve  $T$  dönüşüm fonksiyonları bulunacaktır.

Önceki bölümde  $h$  potansiyeli  $f$  ve  $g$  türünden iki (ayrı olmayan) durum için yazılmıştı.

(i)  $f(x,t)g^2(x,t) = K(t)$  durumu.

Bu hesaplarda  $f \rightarrow K/g^2$  ifadesi kullanıldı. (3.54a) çözüldüğünde keyfi  $\xi(t)$  için

$$X_x = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{\dot{T}}{K}} g, \quad X(x,t) = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{\dot{T}}{K}} \int g dx + \xi(t), \quad \varepsilon_1 = \pm 1 \quad (3.55)$$

bulunur. İkinci çözülecek denklem olan (3.54b)'den

$$R(x,t) = \left( \varepsilon_0 \frac{\dot{T}}{g} \right)^{1/2} \quad (3.56)$$

bulunur. (3.53)'teki koşullardan ilkinе göre,  $R^2(x,t)X_x(x,t)$  çarpımı  $t$ 'nin bir fonksiyonu olmalıdır ve bu koşul gerçekten sağlanmaktadır. İkinci koşulun integre edilmesiyle  $\eta$  keyfi fonksiyonu için  $\theta$  belirlenir:

$$\begin{aligned} \theta(x,t) = & -\frac{1}{8K} \left( \ln \frac{\dot{T}}{K} \right)_t \left( \int g dx \right)^2 \\ & - \frac{1}{2K} \int g \left( \int g_t dx \right) dx - \frac{\varepsilon_1 \dot{\xi}}{2\sqrt{\dot{T}K}} \int g dx + \eta(t). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Geriye bir tek (3.54c) denkleminin sağlanması kalır. (3.27), (3.29), (3.56), (3.57) eşitlikleri (3.52) formülünde kullanılarak (3.54c)'nin reel ve sanal kısımlarından, sırasıyla

$$\begin{aligned} & \left( \delta_1 - \dot{\eta} - \frac{\dot{\xi}^2}{4\dot{T}} \right) + \left( \delta_0 + \frac{\varepsilon_1 \ddot{\xi}}{2\sqrt{K\dot{T}}} - \frac{\varepsilon_1 \dot{\xi} \ddot{T}}{2\sqrt{K\dot{T}^3/2}} \right) \int g dx \\ & + \frac{1}{8K} \left( \frac{\ddot{T}}{\dot{T}} - \frac{3}{2} \left( \frac{\ddot{T}}{\dot{T}} \right)^2 + \frac{\ddot{K}}{K} - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{K}}{K} \right)^2 + 4\gamma \frac{\dot{K}}{K} + 8\gamma^2 + 4\dot{\gamma} \right) \left( \int g dx \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$4\gamma(t) + \frac{\dot{K}}{K} + \frac{\ddot{T}}{\dot{T}} = 0 \quad (3.59)$$

bulunur. İkinci denklemin integre edilmesi zaman dönüşümünü verir:

$$T(t) = T_1 \int \frac{e^{-4 \int \gamma dt}}{K(t)} dt + T_2; \quad T_1, T_2 \text{ sabitler.} \quad (3.60)$$

$f, g$  ve  $h$  (3.1) denkleminin özel bir durumu için verildiğinde, önce P-özellіği koşulları kontrol edilebilir ve ardından, ilke olarak,  $T$  dönüşümü bulunabilir. Bu  $T$  için (3.58)'deki son terim sıfırlanır ancak ilk ve ikinci terimlerin varlığı devam eder. Bununla beraber,  $\xi$  ve  $\eta$

$$\delta_0(t) + \frac{\varepsilon_1 \ddot{\xi}}{2\sqrt{K\dot{T}}} - \frac{\varepsilon_1 \dot{\xi} \ddot{T}}{2\sqrt{K\dot{T}^3/2}} = 0, \quad (3.61a)$$

$$\delta_1(t) - \dot{\eta} - \frac{\dot{\xi}^2}{4\dot{T}} = 0 \quad (3.61b)$$

denklemlerinin çözümleri olarak seçilerek bu terimler de sıfırlanabilir.  $T$  daha önce belirlenmiş olduğundan (3.61a) denklemi

$$\delta_0(t) + \frac{\varepsilon_1}{2} \sqrt{\frac{\dot{T}}{K}} \left( \frac{\dot{\xi}}{\dot{T}} \right)_t = 0 \quad (3.62)$$

şeklinde düzenlenebilir ve iki kez integre edildiğinde

$$\xi(t) = -2\varepsilon_1 \int \dot{T} \left( \int \sqrt{\frac{K}{\dot{T}}} \delta_0(t) dt \right) dt + \xi_0 T(t) + \xi_1 \quad (3.63)$$

bulunur, burada  $\xi_0, \xi_1$  sabitlerdir. (3.61b) denkleminde ise kolaylıkla

$$\begin{aligned} \eta(t) = & \int \delta_1(t) dt - \int \dot{T} \left( \int \sqrt{\frac{K}{\dot{T}}} \delta_0 dt \right)^2 dt \\ & + \varepsilon_1 \xi_0 \int \dot{T} \left( \int \sqrt{\frac{K}{\dot{T}}} \delta_0 dt \right) dt - \frac{\xi_0^2}{4} T + \theta_0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

elde edilir, burada  $\theta_0$  bir sabittir. Bu şekilde tüm dönüşüm fonksiyonları bulunmuş olur.  $T$  ve  $R$  sırasıyla (3.60) ve (3.56)'daki gibidir, uzay koordinatı dönüşümü için

$$X(x, t) = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{\dot{T}}{K}} \int g dx - 2\varepsilon_1 \int \dot{T} \left( \int \sqrt{\frac{K}{\dot{T}}} \delta_0(t) dt \right) dt + \xi_0 T(t) + \xi_1, \quad \varepsilon_1 = \pm 1 \quad (3.65)$$

bulunmuştur ve  $Q$ 'nun argümanı

$$\begin{aligned} \theta(x, t) = & -\frac{1}{8K} \left( \ln \frac{\dot{T}}{K} \right)_t \left( \int g dx \right)^2 - \frac{1}{2K} \int g \left( \int g_t dx \right) dx \\ & + \sqrt{\frac{\dot{T}}{K}} \left( \int \sqrt{\frac{K}{\dot{T}}} \delta_0 dt - \frac{\varepsilon_1 \xi_0}{2} \right) \int g dx + \int \delta_1 dt \\ & - \int \dot{T} \left( \int \sqrt{\frac{K}{\dot{T}}} \delta_0 dt \right)^2 dt + \varepsilon_1 \xi_0 \int \dot{T} \left( \int \sqrt{\frac{K}{\dot{T}}} \delta_0 dt \right) dt - \frac{\xi_0^2}{4} T + \theta_0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

şeklinde elde edilmiştir.

$T$  için bulunan formül kullanılırsa, (3.60) ile birlikte dönüşüm fonksiyonları aşağıdaki gibi yazılabilir:  $\Gamma(t) = 2 \int \gamma(t) dt$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} X(x, t) = & \varepsilon_1 \sqrt{T_1} \frac{e^{-\Gamma}}{K} \int g dx - 2\varepsilon_1 \sqrt{T_1} \int \frac{e^{-2\Gamma}}{K} \left( \int e^{\Gamma} K \delta_0 dt \right) dt \\ & + \xi_0 T_1 \int \frac{e^{-2\Gamma}}{K} dt + \xi_1, \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$R(x, t) = e^{-\Gamma} \left( \frac{\varepsilon_0 T_1}{gK} \right)^{1/2}, \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned}
\theta(x,t) = & \frac{1}{4K}(2\gamma + \frac{\dot{K}}{K})(\int g dx)^2 - \frac{1}{2K} \int g (\int g_t dx) dx - \int \frac{e^{-2\Gamma}}{K} (\int e^\Gamma K \delta_0 dt)^2 dt \\
& + \frac{e^{-\Gamma}}{K} (\int e^\Gamma K \delta_0 dt - \frac{\varepsilon_1 \xi_0 \sqrt{T_1}}{2}) \int g dx + \int \delta_1 dt - \frac{\xi_0^2 T_1}{4} \int \frac{e^{-2\Gamma}}{K} dt \\
& + \varepsilon_1 \xi_0 \sqrt{T_1} \int \frac{e^{-2\Gamma}}{K} (\int e^\Gamma K \delta_0 dt) dt + \theta_0
\end{aligned} \tag{3.69}$$

bulunur.

(ii)  $f(x,t) = f(t)$ ,  $g(x,t) = g(t)$  durumu.

Bu durum (i)'de içermektedir ancak katsayıların bu formu için literatürde çokça çalışma bulunduğundan bu özel durum için sonuçların sunulmasının faydalı olacağı düşünülmüştür. Bu durumda hesaplar tekrarlandığında, (3.61) denklemlerinin bir seçim olmayıp gerçekten sağlanması gerektiği görülür. Dönüşüm fonksiyonları (3.60), (3.67)-(3.69) denklemlerinde

$$K(t) = f(t)g^2(t), \quad \gamma(t) = \beta(t) - \frac{\dot{g}(t)}{g(t)}, \quad \delta_0(t) = \frac{H_1(t)}{g(t)}, \quad \delta_1(t) = H_2(t) \tag{3.70}$$

yazılarak elde edilebilir. Bu durumda denklik dönüşümleri,  $B(t) = 2 \int \beta(t) dt$  olmak üzere,

$$T(t) = T_1 \int \frac{g^2}{f} e^{-2B} dt + T_2, \tag{3.71}$$

$$\begin{aligned}
X(x,t) = & \varepsilon_1 \sqrt{T_1} \frac{g}{f} e^{-B} x - 2\varepsilon_1 \sqrt{T_1} \int \frac{g^2}{f} e^{-2B} (\int \frac{f}{g} e^B H_1 dt) dt \\
& + \xi_0 T_1 \int \frac{g^2}{f} e^{-2B} dt + \xi_1,
\end{aligned} \tag{3.72}$$

$$R(x,t) = e^{-B} \left( \varepsilon_0 T_1 \frac{g}{f} \right)^{1/2}, \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned}
\theta(x,t) = & \frac{1}{4f} (2\beta + (\ln \frac{f}{g})_t) x^2 + \frac{g}{f} e^{-B} (\int \frac{f}{g} e^B H_1 dt - \frac{\varepsilon_1 \xi_0 \sqrt{T_1}}{2}) x \\
& - \int \frac{g^2}{f} e^{-2B} (\int \frac{f}{g} e^B H_1 dt)^2 dt - \frac{\xi_0^2 T_1}{4} \int \frac{g^2}{f} e^{-2B} dt \\
& + \varepsilon_1 \xi_0 \sqrt{T_1} \int \frac{g^2}{f} e^{-2B} (\int \frac{f}{g} e^B H_1 dt) dt + \int H_2 dt + \theta_0
\end{aligned} \tag{3.74}$$

şeklinde bulunur.

**Hatırlatma.**  $f = f_1 + if_2$  için, (3.51)'de  $X_x^2 = \dot{T}/f_1$  seçilebilir ve  $f$  fonksiyonu  $\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{t}) = 1 + i\tilde{f}_2(\tilde{x}, \tilde{t})$  şeklinde normalize edilebilir [24]. Dolayısıyla, genellikle yitirmeden, (3.1)'e denk olarak

$$i\psi_t + (1 + if_2)\psi_{xx} + g(x,t)|\psi|^2\psi + h(x,t)\psi = 0 \tag{3.75}$$

denklemini de incelenebilir. Bu durumda 2. bölümdeki Painlevé analizinden hemen  $f_2 = 0$  ve  $g = g(t)$  reel değerli bir fonksiyon olarak elde edilir ve potansiyelin bileşenleri

$$h_1(x, t) = \left(\beta^2 + \frac{\dot{\beta}}{2} - \beta \frac{\dot{g}}{g} + \frac{g}{4} \left(\frac{1}{g}\right)_{tt}\right)x^2 + H_1(t)x + H_2(t), \quad h_2(x, t) = \beta(t) \quad (3.76)$$

olarak bulunur. Dönüşüm fonksiyonları da bu durumda oldukça basitleşecektir. Ancak bu çalışmada elde edilen sonuçlar  $f \neq 1$  ile verilen bir denklem için halen kullanışlı olmaktadır.

### 3.4 Gross-Pitaevskii Denklemine Uygulama

Bu bölümde, önceki bölümlerde elde edilmiş olan sonuçlar

$$i\psi_t + \psi_{xx} + g(x, t)|\psi|^2\psi + kx^2\psi = 0 \quad (3.77)$$

diferansiyel denklemine uygulanacaktır. Burada  $g$  kompleks değerli bir fonksiyon ve  $k$  sıfırdan farklı reel bir sabittir. Denklem bir Bose-Einstein yoğunluğunda makroskopik dalga fonksiyonuna aittir ve integrallenebilirliği Painlevé özelliğine sahip olması açısından [43]'te incelenmiştir. Bu çalışmada denklemin,  $g$  fonksiyonu

$$g\ddot{g} - 2\dot{g}^2 + 4kg^2 = 0 \quad (3.78)$$

denklemini sağladığında yani bu denklemin çözümü olarak  $A, B, g_0$  reel sabitler olmak üzere

$$g(x, t) = g(t) = \frac{2g_0 e^{\pm 2\sqrt{k}t}}{Ae^{\pm 4\sqrt{k}t} - B} \quad (3.79)$$

yapısında olduğunda Painlevé testini geçtiği gösterilmiştir. Bunun ardından denklemi NLS denklemine dönüştürmüşlerdir.

2. bölümün sonuçlarından doğrudan (3.78) denklemi elde edilir. Ardından da 3. bölümde sunulan dönüşüm formüllerinden denklemin NLS denklemine dönüşümü gerçekleştirilebilir. Bunun yerine, Painlevé testinin sonuçlarını dikkate almadan, grup-teorik yaklaşımla (3.77) NLS denklemine dönüştürülmeye çalışılacaktır. Bunun için, denklemin 5 boyutlu bir simetri cebirine sahip olması istenecektir. Bu koşul altında  $g$ 'nin yine, Painlevé testiyle bulunan diferansiyel denklemi sağlaması gerektiği gösterilecek, dolayısıyla integrallenebilirlik için grup-teorik özellik ve Painlevé özelliği birbirine denk bulunacaktır.

(3.77) ile (3.1) karşılaştırılırsa, bu özel denklem için  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = 0$  ve kübik terimin katsayısının aynı  $g(x, t)$  ve  $h_1(x, t) = kx^2$ ,  $h_2 = 0$  olduğu görülür.  $f$  bir sabit olduğundan,  $g$  sadece  $t$ 'nin fonksiyonudur. (3.32) denklemi kullanılır ve  $g$  için (3.78) denklemi bulunur. (3.77) denklemi bu koşul altında Painlevé özelliğine sahip olmaktadır.  $g$  fonksiyonu (3.78)'in bir çözümü olarak alınırsa, (3.71)-(3.74) dönüşümleriyle (3.77)'nin NLS'ye dönüşümü mümkündür.

NLS denkleminin dönüşümünün mümkün olması, (3.77)'nin,  $g$  katsayı fonksiyonunun belli bir yapısı, özellikle de (3.79)'da verilen hali için 5 boyutlu bir simetri cebirine sahip olup olamayacağı sorusunu akla getirir. (3.77) denklemi (3.53) ve (3.54) kullanılarak doğrudan NLS denkleminin dönüştürülmeye çalışılacaktır. (3.54a)'dan

$$X(x, t) = \varepsilon_1 \sqrt{\dot{T}} x + \xi(t) \quad (3.80)$$

bulunur ve (3.53)'ten  $R(x, t) = R(t)$  ve

$$\theta(x, t) = -\frac{1}{8} \frac{\ddot{T}}{\dot{T}} x^2 - \frac{\varepsilon_1 \dot{\xi}(t)}{2\sqrt{\dot{T}}} x + \eta(t) \quad (3.81)$$

elde edilir. (3.54c)'nin sanal kısmı sıfıra eşitlenirse  $\dot{R}/R + \theta_{xx} = 0$  bulunur ve bu ifadenin integraliyle

$$R(t) = R_0 [\dot{T}(t)]^{1/4}, \quad R_0 = \text{sabit} \quad (3.82)$$

elde edilir. Reel kısımdan  $\theta_x^2 + \theta_t - kx^2 = 0$  bulunur, bu ifade ise  $T(t)$ ,  $\xi(t)$  ve  $\eta(t)$  üzerine diferansiyel koşullar sunar:

$$\frac{\ddot{T}}{\dot{T}} - \frac{3}{2} \left( \frac{\ddot{T}}{\dot{T}} \right)^2 + 8k = 0, \quad (3.83a)$$

$$\ddot{\xi} \dot{T} - \dot{\xi} \ddot{T} = 0, \quad \dot{\xi}^2 + 4\dot{\eta} \dot{T} = 0. \quad (3.83b)$$

$\xi_0, \xi_1, \theta_0$  sabitler olmak üzere

$$\xi(t) = \xi_0 T(t) + \xi_1, \quad \eta(t) = -\frac{1}{4} \xi_0^2 T(t) + \theta_0 \quad (3.84)$$

bulunur ve  $\theta$  böylelikle  $T$  türünden belirlenir:

$$\theta(x, t) = -\frac{1}{8} \frac{\ddot{T}(t)}{\dot{T}(t)} x^2 - \frac{\varepsilon_1 \xi_0}{2} \dot{T}^{1/2}(t) x - \frac{\xi_0^2}{4} T(t) + \theta_0. \quad (3.85)$$

Geriye bir tek (3.83a) denkleminin çözümü kalmıştır. Bu denklem Schwarz diferansiyel denklemi olarak bilinir ve

$$\{T, t\} + 8k = 0 \quad (3.86)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $\{T, t\}$ ,  $T$ 'nin  $t$  değişkenine göre Schwarz türevini ifade etmektedir. Bu denklemin çözümü,  $\sigma_1$  ve  $\sigma_2$

$$\ddot{\sigma}(t) - 4k\sigma(t) = 0 \quad (3.87)$$

denkleminin iki lineer bağımsız çözümü olmak üzere  $T(t) = \frac{\sigma_1(t)}{\sigma_2(t)}$  şeklinde verilir [65]. Eğer  $T_1, \dots, T_4$  sabitleri için  $T_2T_3 - T_1T_4 \neq 0$  ise,  $T_1\sigma_1(t) + T_2\sigma_2(t)$  ve  $T_3\sigma_1(t) + T_4\sigma_2(t)$  de lineer bağımsızdır. Dolayısıyla

$$T(t) = \frac{T_1\sigma_1(t) + T_2\sigma_2(t)}{T_3\sigma_1(t) + T_4\sigma_2(t)} \quad (3.88)$$

(3.86) denklemi için bir genel çözümdür. (3.87) denkleminin lineer bağımsız çözümlerinin Wronskian determinantı aynıdır, bu nedenle, genellikle yitirmeden,

$$W[T_1\sigma_1(t) + T_2\sigma_2(t), T_3\sigma_1(t) + T_4\sigma_2(t)] = (T_1T_4 - T_2T_3)W[\sigma_1(t), \sigma_2(t)] = -1 \quad (3.89)$$

seçilebilir ve (3.88) bu şekilde üçüncü mertebeden (3.86) denkleminin üç tane keyfi sabite bağlı genel çözümü olur. Aşağıdaki hesaplarda da görüleceği gibi Wronskian'ın bu şekilde seçilmesi ile  $g(x, t)$  fonksiyonunun en basit haliyle elde edilmesi mümkün olmaktadır.

$k > 0$  olsun. (3.87) denkleminden  $\sigma_1(t) = \cosh 2\sqrt{k}t$  ve  $\sigma_2(t) = \sinh 2\sqrt{k}t$  bulunur. (3.89) seçimi sabitler için  $T_2T_3 - T_1T_4 = \frac{1}{2\sqrt{k}}$  koşulunu getirir. Buradan  $T$  ve hesaplarda kullanılacak olan  $\dot{T}$  en basit haliyle

$$T(t) = \frac{T_1 \cosh 2\sqrt{k}t + T_2 \sinh 2\sqrt{k}t}{T_3 \cosh 2\sqrt{k}t + T_4 \sinh 2\sqrt{k}t} \quad (3.90)$$

ve

$$\dot{T}(t) = [T_3 \cosh 2\sqrt{k}t + T_4 \sinh 2\sqrt{k}t]^{-2} \quad (3.91)$$

şeklinde bulunur.  $k < 0$  için benzer şekilde (3.87)'nin çözümleri  $\sigma_1(t) = \cos 2\sqrt{-k}t$  ve  $\sigma_2(t) = \sin 2\sqrt{-k}t$  olarak alınarak

$$T(t) = \frac{T_1 \cos 2\sqrt{-k}t + T_2 \sin 2\sqrt{-k}t}{T_3 \cos 2\sqrt{-k}t + T_4 \sin 2\sqrt{-k}t} \quad (3.92)$$

ve

$$\dot{T}(t) = [T_3 \cos 2\sqrt{-k}t + T_4 \sin 2\sqrt{-k}t]^{-2} \quad (3.93)$$

elde edilir, burada da sabitler arasında  $T_2T_3 - T_1T_4 = \frac{1}{2\sqrt{-k}}$  koşulu vardır. Artık denklik dönüşümünün tüm bilinmeyen fonksiyonları belirlenmiştir. Ancak dönüşümde

kullanılan denklemlerden (3.54b)'nin de sağlanması gerekir. Amaç (3.77) 5 boyutlu bir simetri cebirine sahip olacak şekilde  $g(x,t)$ 'nin belirlenmesiydi. (3.54b) ve (3.82) eşitliklerinden

$$g(x,t) = g(t) = \frac{\varepsilon_0}{R_0^2} \dot{T}^{1/2} \quad (3.94)$$

elde edilir ve  $\dot{T}$  için daha önce bulunan ifadenin kullanılmasıyla  $g(x,t)$ 'nin mümkün durumları bulunur:

$$g_1(t) = \frac{\varepsilon_0}{R_0^2} [T_3 \cosh 2\sqrt{k}t + T_4 \sinh 2\sqrt{k}t]^{-1}, \quad k > 0, \quad (3.95)$$

$$g_2(t) = \frac{\varepsilon_0}{R_0^2} [T_3 \cos 2\sqrt{-k}t + T_4 \sin 2\sqrt{-k}t]^{-1}, \quad k < 0. \quad (3.96)$$

Simetri yaklaşımıyla bulunan bu sonuçlar ile [43]'te Painlevé testi yardımıyla bulunan sonuçları karşılaştırmak ilginç olacaktır. [43]'ün yazarları  $g(x,t)$  fonksiyonu için (3.78) denklemini elde etmişler ve (3.79)'u bu denklemin çözümü olarak sunmuşlardı. Yukarıda  $T$  ve  $g$  için verilen (3.94) ilişkisi göz önüne alınarak

$$\dot{T} = Lg^2, \quad L = \text{sabit} \quad (3.97)$$

yazılır ve (3.83a) denkleminde yerine konursa,  $g$  için aynı (3.78) denklemine ulaşılır. Öyleyse (3.79) burada bulunan  $g(x,t)$  çözümlerinde içerilmelidir. Gerçekten,

$$T_3 = \frac{R_0^2}{\varepsilon_0} \frac{A - B}{2g_0}, \quad T_4 = \pm \frac{R_0^2}{\varepsilon_0} \frac{A + B}{2g_0}$$

seçilir ve (3.95)'te yazılırsa, (3.79) fonksiyonuna dönüştüğü görülür. Burada (3.79)'un  $k < 0$  durumundaki çözümü ifade etmediğini not etmek gerekir.  $g$ 'nin (3.96) ile verilen hali (3.77) için yeni bir integre edilebilir durum olarak kaydedilmelidir.

Aslında (3.83a) denklemini, (3.58) denkleminde herhangi bir seçim yapmadan sıfırlanan üçüncü terimin özel bir halinden başka bir şey değildir. Bu terimin sıfırlanması 3. bölümün başında denklemin P-özelliğine sahip olduğunun varsayılmasıyla mümkün olmuştu. Ancak burada P-özellliği dikkate alınmadığından, bu terimden sağlanması gereken bir denklem ortaya çıkmakta ve denklemin P-özelliğine sahip olması koşuluna denk olmaktadır.

Ulaşılan sonuçların daha kısa bir ifadesi için

$$U(t) = \begin{cases} T_1 \cosh 2\sqrt{k}t + T_2 \sinh 2\sqrt{k}t, & k > 0, \\ T_1 \cos 2\sqrt{-k}t + T_2 \sin 2\sqrt{-k}t, & k < 0, \end{cases} \quad (3.98)$$

$$V(t) = \begin{cases} T_3 \cosh 2\sqrt{k}t + T_4 \sinh 2\sqrt{k}t, & k > 0, \\ T_3 \cos 2\sqrt{-k}t + T_4 \sin 2\sqrt{-k}t, & k < 0 \end{cases} \quad (3.99)$$

fonksiyonları tanımlansın. Sonuç olarak burada,  $g(x, t)$  fonksiyonu  $g_j(t)$ ,  $j = 1, 2$  fonksiyonlarından biri ise,

$$\begin{aligned} \tilde{t}(t) = T(t) &= \frac{U}{V}, & \tilde{x}(x, t) = X(x, t) &= \frac{\varepsilon_1}{|V|}x + \xi_0 \frac{U}{V} + \xi_1, \\ R(x, t) &= \frac{R_0}{|V|^{1/2}}, & \theta(x, t) &= \frac{\dot{V}}{4V}x^2 - \frac{\varepsilon_1 \xi_0}{|V|}x - \frac{\xi_0^2}{4} \frac{U}{V} + \theta_0 \end{aligned} \quad (3.100)$$

dönüşümü kullanılarak (3.77) denkleminin

$$i\tilde{\psi}_{\tilde{t}} + \tilde{\psi}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \varepsilon_0 |\tilde{\psi}|^2 \tilde{\psi} = 0 \quad (3.101)$$

denklemine dönüştüğü gösterilmiştir. Eğer  $\tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{t})$  (3.101) denkleminin bir çözümü ise  $g_j(t)$ ,  $j = 1, 2$  için

$$\psi(x, t) = R(x, t)e^{i\theta(x, t)} \tilde{\psi}(X(x, t), T(t)) \quad (3.102)$$

(3.77) denkleminin bir çözümüdür.

(3.50) simetri cebiri de denklik dönüşümleri kullanılarak (3.77) denkleminin simetri cebiri için bir baza dönüştürülebilir:

$$\begin{aligned} X_1 &= V^2 \partial_t + (-\xi_0 V + V \dot{V} x) \partial_x - \frac{1}{2} \rho V \dot{V} \partial_\rho + \left( \frac{\xi_0^2}{4} - \frac{\xi_0}{2} \dot{V} x + \frac{1}{4} (\dot{V}^2 + V \ddot{V}) x^2 \right) \partial_\omega, \\ X_2 &= V \partial_x + \frac{1}{2} (-\xi_0 + \dot{V} x) \partial_\omega, \\ X_3 &= \partial_\omega, \\ X_4 &= U \partial_x + \frac{1}{2} \left( \xi_1 + \frac{1 + U \dot{V}}{V} x \right) \partial_\omega, \\ X_5 &= UV \partial_t + \left( -\frac{\xi_0}{2} U + \frac{\xi_1}{2} V + \left( \frac{1}{2} + U \dot{V} \right) x \right) \partial_x - \frac{1}{2} \rho (1 + U \dot{V}) \partial_\rho \\ &\quad + \left( -\frac{\xi_0 \xi_1}{4} + \left( -\frac{\xi_0}{4} \frac{1}{V} + \frac{\xi_1}{4} \dot{V} - \frac{\xi_0}{4} \frac{U \dot{V}}{V} \right) x + \frac{1}{4} \left( \frac{\dot{V}}{V} + \frac{U \dot{V}^2}{V} + U \ddot{V} \right) x^2 \right) \partial_\omega. \end{aligned} \quad (3.103)$$

### 3.5 Tam Çözümler

#### 3.5.1 (3.1) sınıfı

Öncelikle (3.101) denklemini için

$$\psi = \sqrt{2} \operatorname{sech}(x) e^{it}, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad (3.104)$$

$$\psi = \sqrt{2} q_0 \tanh(q_0 x) e^{-i2q_0^2 t}, \quad \varepsilon_0 = -1 \quad (3.105)$$

çözümlerini not edelim [43]. (3.77) denklemi (3.1) sınıfı içinde yer almaktadır ve (3.96) durumu integre edilebilir alt durum olarak kaydedilmiştir. Nonlineerlik katsayısının bu durumu için, (3.102) dönüşümü  $T_1 = T_4 = 1, T_2 = T_3 = 10, q_0 = R_0 = 1, \xi_0 = -1, a = 1/198$  sabitleriyle kullanılırsa,

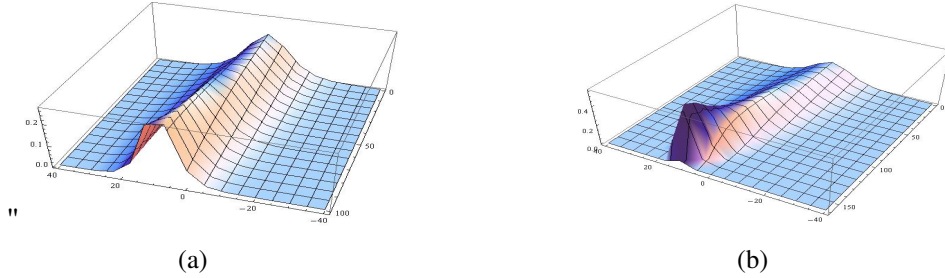
$$|\psi|^2 = 2|V|^{-1} \text{sech}^2(|V|^{-1}x - \frac{U}{V} + \frac{1}{10}), \quad \varepsilon_0 = 1, \quad (3.106)$$

$$|\psi|^2 = 2|V|^{-1} \tanh^2(|V|^{-1}x - \frac{U}{V} + \frac{1}{10}), \quad \varepsilon_0 = -1 \quad (3.107)$$

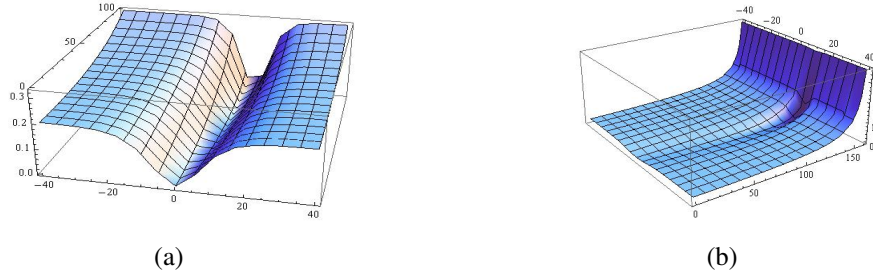
ifadelerinin  $k = -a^2$  olmak üzere (3.77) denkleminin çözümlerinin genliklerinin kareleri olduğu görülür. Burada

$$U(t) = \cos \frac{t}{99} + 10 \sin \frac{t}{99}, \quad V(t) = 10 \cos \frac{t}{99} + \sin \frac{t}{99} \quad (3.108)$$

şeklindedir. Şekil 3.1 ve Şekil 3.2’de genlik kare fonksiyonları resmedilmiştir.



Şekil 3.1: (3.106);  $-40 \leq x \leq 40, 0 \leq t \leq 100$  (a);  $0 \leq t \leq 160$  (b).



Şekil 3.2: (3.107);  $-40 \leq x \leq 40, 0 \leq t \leq 100$  (a);  $0 \leq t \leq 160$  (b).

### 3.5.2 (3.2) sınıfı

$g_0$  ve  $h_0$  kompleks sabitler olmak üzere değişken katsayılı

$$i\psi_t + \Delta\psi + g_0|x|^{N-1}|\psi|^2\psi + h_0|x|^{-2}\psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^{N+1} \quad (3.109)$$

çok boyutlu Schrödinger denkleminin çözümlerini dikkate alalım. Bu denklemin radyal koordinatın fonksiyonu olan çözümleri,  $(1+1)$ -boyutlu

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \frac{N}{x}\psi_x + g_0x^{N-1}|\psi|^2\psi + \frac{h_0}{x^2}\psi = 0 \quad (3.110)$$

denklemini sağlar ( $x > 0$ ). Burada  $x$ ,  $N + 1$  uzay boyutunda radyal koordinatı temsil eder.  $N = 0$  için,

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \frac{\varepsilon_0 + i\gamma}{x} |\psi|^2 \psi + \frac{h_1 + ih_2}{x^2} \psi = 0, \quad \varepsilon_0 = \mp 1 \quad (3.111)$$

denkleminin  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$  cebirine izomorf dört boyutlu bir simetri cebirine sahip denklemler ailesinin temsilci denklemi olduğu bilinmektedir [24]. Sonraki bölümde, bu denklemin Painlevé serisinin ilk terimde kesilmesi suretiyle

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{Ax^{1/6}}{x^{2/3} + k_2(k_4t + k_1)^{2/3}} \\ &\times \exp \left[ i \left( \frac{k_4x^2}{4(k_4t + k_1)} - \delta \ln \left( \frac{x^{2/3}}{(k_4t + k_1)^{2/3}} + k_2 \right) + k_3 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.112)$$

çok parametrelili çözüm ailesine sahip olduğu gösterilecektir; burada

$$h_1 = \frac{5}{36}, \quad h_2 = 0, \quad A = \left(-\frac{4\delta}{3\gamma}\right)^{1/2}, \quad \delta = -\frac{3\varepsilon_0 + \sqrt{8\gamma^2 + 9}}{2\gamma} \quad (3.113)$$

şeklinde olup  $k_1, k_2, k_3, k_4$  keyfi reel sabitlerdir. (3.111) denkleminde

$$\psi(x, t) = x^{N/2} \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{t}), \quad x = \tilde{x}, \quad t = \tilde{t} \quad (3.114)$$

dönüşümü yapılırsa,  $g_0 = \varepsilon_0 + i\gamma$ ,  $h_0 = h_1 + \frac{N(N-2)}{4} + ih_2$  olmak üzere (3.110) denkleminde ulaşılır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{Ax^{(1-3N)/6}}{x^{2/3} + k_2(k_4t + k_1)^{2/3}} \\ &\times \exp \left[ i \left( \frac{k_4x^2}{4(k_4t + k_1)} - \delta \ln \left( \frac{x^{2/3}}{(k_4t + k_1)^{2/3}} + k_2 \right) + k_3 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.115)$$

fonksiyonu (3.110) denkleminin bir çözümüdür, sabitler ise aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned} g_0 &= \varepsilon_0 + i\gamma, \quad h_0 = \frac{5}{36} + \frac{N(N-2)}{4}, \\ A &= \left(-\frac{4\delta}{3\gamma}\right)^{1/2}, \quad \delta = -\frac{3\varepsilon_0 + \sqrt{8\gamma^2 + 9}}{2\gamma}. \end{aligned} \quad (3.116)$$

### 3.5.3 (3.3) sınıfı

(3.3) denkleminin çözümleri için Painlevé serisi

$$\psi(x, t) = \frac{u_0(x, t)}{\Phi(x, t)} \quad (3.117)$$

şeklinde kesilir ve denklemde yazılırsa,  $\Phi^j$ ,  $j = -4, \dots, -1$  katsayıları terimler elde edilir.  $\Phi^j$  katsayıları ayrı ayrı sıfıra eşitlendiğinde,  $a_2$  bir sabit ve  $M(t) = (3m(t) + 2n(t))/l(t)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} f &= f_1(t) + ia_2 l(t), \quad g = \frac{f_1(t)}{3} M(t), \\ h &= \frac{2a_2^2}{9} f_1(t) + i \frac{\dot{M}(t)}{2M(t)}, \quad k = a_2 f_1(t) + i \frac{2a_2^2}{9} l(t) \end{aligned} \quad (3.118)$$

özel durumu için

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{-2}{3M(t)}} \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_0 \exp(\frac{a_2}{3} x)} \quad (3.119)$$

çözümü elde edilir. Dikkat edilirse bu çözüm, Painlevé testinin koşullarının sağlanmasının gerek olmadığı durumda geçerli bir tam çözümdür.



## 4. NLS DENKLEMİ GRUP-DEĞİŞMEZ ÇÖZÜMLERİ

### 4.1 Giriş

(3.1) denkleminin Lie simetri cebirleri için tam bir sınıflandırma yapılmış,  $1 \leq \dim L \leq 5$  boyutlu simetri cebirleri için kanonik denklemler elde edilmiştir [24]. (3.1) denkleminin 5 boyutlu simetri cebirine sahip olması durumunda tek bir kanonik denklem vardır ve bu durumda katsayı fonksiyonları

$$f = 1; \quad g = \varepsilon_0 + i g_2, \quad \varepsilon_0 = \pm 1, \quad g_2 = \text{sabit}; \quad h = 0 \quad (4.1)$$

şeklindedir. Yani (3.1) denklemi, katsayı fonksiyonları [24]'te verilen denklik dönüşümleriyle (4.1)'deki gibi yapılabiliyorsa 5 boyutlu bir simetri cebirine sahiptir. Bu durum önceki bölümde yapılan analizin çerçevesini oluşturmuştur ve integre edilebilir durum olarak adlandırılabilir.

(3.1) denkleminin 4 boyutlu cebirleri ve her cebire ait kanonik denklem için katsayı fonksiyonları aşağıdaki gibi verilmektedir. Tabloda  $\gamma, h_1, h_2$  sabitler olup  $\varepsilon_0 = \pm 1$

**Çizelge 4.1:** Dört boyutlu simetri cebirleri ve (3.1) katsayıları

| No    | Cebir                | $f$        | $g$                                     | $h$                                   | Koşullar     |
|-------|----------------------|------------|-----------------------------------------|---------------------------------------|--------------|
| $L_1$ | $\{T, D_1, C_1, W\}$ | 1          | $(\varepsilon_0 + i\gamma)\frac{1}{x}$  | $(h_1 + ih_2)\frac{1}{x^2}$           |              |
| $L_2$ | $\{T, P, B, W\}$     | 1          | $\varepsilon_0 + i\gamma$               | $ih_2$                                | $h_2 \neq 0$ |
| $L_3$ | $\{T, P, D_2, W\}$   | $1 + if_2$ | $\varepsilon_0 + i\gamma$               | 0                                     | $f_2 \neq 0$ |
| $L_4$ | $\{P, B, D_2, W\}$   | 1          | $\varepsilon_0 + i\gamma$               | $i\frac{h_2}{t}$                      | $h_2 \neq 0$ |
| $L_5$ | $\{P, B, C_2, W\}$   | 1          | $\frac{\varepsilon_0 + i\gamma}{1+t^2}$ | $\frac{2h_1 + i(2h_2 - t)}{2(1+t^2)}$ |              |

olarak verilmektedir. Dalga fonksiyonu  $\psi(x, t) = \rho(x, t)e^{i\omega(x, t)}$  şeklinde kutupsal olarak yazıldığında simetri cebirinin baz vektörleri ise,

$$T = \partial_t, \quad P = \partial_x, \quad W = \partial_\omega, \quad B = t\partial_x + \frac{1}{2}x\partial_\omega \quad (4.2)$$

ve  $L_1$  için

$$C_1 = t^2\partial_t + xt\partial_x - \frac{1}{2}t\rho\partial_\rho + \frac{1}{4}x^2\partial_\omega, \quad D_1 = 2t\partial_t + x\partial_x - \frac{1}{2}\rho\partial_\rho, \quad (4.3)$$

$L_3$  ve  $L_4$  için

$$D_2 = t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x - \frac{1}{2}\rho\partial_\rho, \quad (4.4)$$

$L_5$  için

$$C_2 = (1+t^2)\partial_t + xt\partial_x + \frac{1}{4}x^2\partial_\omega \quad (4.5)$$

şeklindedir.  $L_1$  çözülebilir değildir,  $L_2$  nilpotenttir ve diğer üçü nilpotent olmayan çözülebilirdir. Ayrıca  $L_1$  ve  $L_3$  ayrıştırılabilir cebirlerdir.

Çizelge 4.1'de verilen 4 boyutlu cebirlere ait kanonik denklemlerin katsayı fonksiyonları, Painlevé testinin uygunluk koşullarını sağlamamaktadır, dolayısıyla bu denklemler Painlevé özelliğine sahip değildir. Painlevé testinden elde edilen koşullar aynı zamanda denklemin bir Lax çiftine sahip olması koşullarına da denk olduğundan, bu denklemler integre edilebilir değildir [47]. Değişken katsayılar içeren bu denklemlerin grup-değişmez çözümlerinin araştırılması ilginç olacaktır. Bu açıdan, simetri cebirleri kullanılarak tüm indirgemeler yapılmış ve elde edilen ADD sistemlerinin tam çözümleri üzerinde durulmuştur. Bunun yanında, Painlevé serilerinin ilk terimde kesilmesi yoluyla oldukça ilginç bazı tam çözümler de elde edilmiştir.

## 4.2 Optimal Sistemin Bulunması

Denklemler iki bağımsız değişkene sahip olduğundan, tüm dört boyutlu cebirlerin bir boyutlu alt cebirlerinin optimal sisteminin bulunmasına ihtiyaç vardır.  $L_1$  cebiri için optimal sistem, (2.33) denkleminin integrasyonundan adjoint dönüşümlerin elde edilmesi ve kanonik 1-boyutlu cebirlerin Killing formu yardımı ile bulunmasıyla elde edilecektir. Diğer 4 cebir için adjoint etki, (2.35) serisi hesaplanarak bulunacaktır. Sınıflandırma yöntemine ilişkin referanslar olarak [57, 60, 66] verilebilir.

### 4.2.1 $L_1$ cebiri için optimal sistem

Baz elemanlarının komütasyon işlemi aşağıdaki gibidir.

| $[\cdot, \cdot]$ | $T$    | $D_1$   | $C_1$  | $W$ |
|------------------|--------|---------|--------|-----|
| $T$              | 0      | $2T$    | $D_1$  | 0   |
| $D_1$            | $-2T$  | 0       | $2C_1$ | 0   |
| $C_1$            | $-D_1$ | $-2C_1$ | 0      | 0   |
| $W$              | 0      | 0       | 0      | 0   |

(4.6)

$L_1 = \{T, D_1, C_1\} \oplus \{W\}$  şeklinde ayrıştırılabilir yapıdadır. Simetri grubunun adjoint etkisi ile  $W$  elemanı üzerinde dönüşüm yapmak mümkün değildir. Dolayısıyla her kanonik formda  $W$  elemanı bulunacaktır. Optimal sistem  $\{T, D_1, C_1\}$  cebiri için bulunur ve her elemana  $W$  eklenir. Bu cebir için en genel vektör,  $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $u = u_1T + u_2D_1 + u_3C_1$  şeklinde yazılırsa,  $w = w_1T + w_2D_1 + w_3C_1$  için

$$\text{ad}u|_{\tilde{w}} = 2(\tilde{w}_1u_2 - \tilde{w}_2u_1)T + (\tilde{w}_1u_3 - \tilde{w}_3u_1)D_1 + 2(\tilde{w}_2u_3 - \tilde{w}_3u_2)C_1 \quad (4.7)$$

bulunur. Adjoint temsilin matrisi hesaplanırsa

$$\text{ad}u = \begin{pmatrix} 2u_2 & -2u_1 & 0 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ 0 & 2u_3 & -2u_2 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

bulunur. Buradan Killing formu  $\text{ad}u$  ve  $\text{ad}v$  matrislerinin çarpımının izinden

$$K(u, v) = 4(2u_2v_2 - u_1v_3 - u_3v_1) \quad (4.9)$$

şeklinde hesaplanır.  $\text{Inn}L_1$  iç otomorfizma grubu, (2.33) denkleminin  $u = T, D_1, C_1$  için çözülerek her bir vektöre ait adjoint dönüşümün bulunmasıyla elde edilecektir.  $T$  vektörü tarafından üretilen adjoint dönüşüm için, (4.7) denkleminde  $u_1 = 1, u_2 = u_3 = 0$  alınır ve (2.33) denkleminde yerine konursa

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{w}_1}{d\varepsilon} &= -2\tilde{w}_2, & \tilde{w}_1(0) &= w_1, \\ \frac{d\tilde{w}_2}{d\varepsilon} &= -\tilde{w}_3, & \tilde{w}_2(0) &= w_2, \\ \frac{d\tilde{w}_3}{d\varepsilon} &= 0, & \tilde{w}_3(0) &= w_3 \end{aligned} \quad (4.10)$$

sisteminin çözümünden

$$\begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2\varepsilon & \varepsilon^2 \\ 0 & 1 & -\varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

elde edilir.  $T$  vektörüne ait adjoint temsilin  $w$  vektörü üzerindeki dönüşüm etkisini veren bu matris iç otomorfizmayı temsil eder. Bunu  $A_T$  olarak adlandıralım. Benzer hesaplarla  $A_{D_1}$  ve  $A_{C_1}$  matrisleri de

$$A_{D_1} = \begin{pmatrix} e^{2\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad A_{C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ \varepsilon^2 & 2\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

olarak bulunur. Tüm simetri grubunun adjoint etkisi, bu üç otomorfizmanın bileşkesi olarak bulunacaktır.  $A = A_T(\varepsilon) \circ A_{D_1}(\frac{1}{2} \ln \lambda) \circ A_{C_1}(\mu)$  seçilirse ( $\lambda > 0$ )

$$A = \begin{pmatrix} \lambda - 2\varepsilon\mu + \frac{\varepsilon^2\mu^2}{\lambda} & \frac{2\varepsilon^2\mu}{\lambda} - 2\varepsilon & \frac{\varepsilon^2}{\lambda} \\ \mu - \frac{\varepsilon\mu^2}{\lambda} & 1 - \frac{2\varepsilon\mu}{\lambda} & -\frac{\varepsilon}{\lambda} \\ \frac{\mu^2}{\lambda} & \frac{2\mu}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

bileşke otomorfizma elde edilir.  $w = w_1T + w_2D_1 + w_3C_1$  vektörü  $\tilde{w} = Aw$  şeklinde değişecektir.  $\tilde{w}$  katsayılarını açık olarak yazalım:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1 &= (\lambda - 2\varepsilon\mu + \frac{\varepsilon^2\mu^2}{\lambda})w_1 + (\frac{2\varepsilon^2\mu}{\lambda} - 2\varepsilon)w_2 + \frac{\varepsilon^2}{\lambda}w_3, \\ \tilde{w}_2 &= (\mu - \frac{\varepsilon\mu^2}{\lambda})w_1 + (1 - \frac{2\varepsilon\mu}{\lambda})w_2 - \frac{\varepsilon}{\lambda}w_3, \\ \tilde{w}_3 &= \frac{\mu^2}{\lambda}w_1 + \frac{2\mu}{\lambda}w_2 + \frac{1}{\lambda}w_3. \end{aligned} \quad (4.14)$$

(4.9) formülünden hesaplanan

$$K(w, w) = 8(w_2^2 - w_1w_3) \quad (4.15)$$

formu, bu dönüşümün bir değişmezidir; yani  $K(w, w) = K(\tilde{w}, \tilde{w})$  eşitliği doğrudur. (i)  $K(w, w) > 0$ , (ii)  $K(w, w) < 0$  ve (iii)  $K(w, w) = 0$  durumlarına göre  $\tilde{w}$  vektörü için denk olmayan durumlar bulunacaktır.

(i)  $K(w, w) > 0$  durumu.  $w$  vektörüne yalnızca  $A_T$  dönüşümü uygulanırsa ( $\mu = 0, \lambda = 1$ ),

$$\tilde{w}_1 = w_1 - 2\varepsilon w_2 + \varepsilon^2 w_3, \quad \tilde{w}_2 = w_2 - \varepsilon w_3, \quad \tilde{w}_3 = w_3 \quad (4.16)$$

elde edilir.  $w_3 = 0$  ise,  $w_2 \neq 0$  olduğundan (aksi halde  $K = 0$  olur) hemen  $w_1 = 0$  yapılabilir ve  $\hat{w} = D_1$  kanonik bir boyutlu cebir olarak elde edilir.  $w_3 \neq 0$  ise,  $\tilde{w}_1 = 0$  denkleminin çözümünden  $\varepsilon_{1,2} = (w_2 \mp \sqrt{w_2^2 - w_1w_3})/w_3$  bulunur. Bu,  $K(w, w) > 0$  olduğundan  $\tilde{w}_1 = 0$  yapılabilir demektir. Elde edilen  $\tilde{w} = \tilde{w}_2D_1 + \tilde{w}_3C_1$  vektörüne bu kez  $A_{C_1}$  dönüşümü uygulanırsa ( $\varepsilon = 0, \lambda = 1$ )

$$\tilde{\tilde{w}}_1 = 0, \quad \tilde{\tilde{w}}_2 = \tilde{w}_2, \quad \tilde{\tilde{w}}_3 = 2\mu\tilde{w}_2 + \tilde{w}_3 \quad (4.17)$$

bulunur.  $K(w, w) = K(\tilde{w}, \tilde{w}) = \tilde{w}_2^2 - \tilde{w}_1\tilde{w}_3 > 0$  ve  $\tilde{w}_1 = 0$  olduğundan  $\tilde{w}_2 \neq 0$  olduğunu biliyoruz. Öyleyse  $\mu = -\tilde{w}_3/(2\tilde{w}_2)$  seçilirse  $\tilde{\tilde{w}}_3 = 0$  sıfır yapılabilir ve bu durumda da ilk bir boyutlu cebir  $\hat{w} = D_1$  bulunur.

(ii)  $K(w, w) < 0$  durumu.  $w_1 \neq 0$  ve  $w_3 \neq 0$  olmalıdır. Ayrıca Killing formun değişmezliği nedeniyle  $\tilde{w}_1$  ve  $\tilde{w}_3$  katsayılarını sıfırlamak mümkün değildir.  $A_T$  etkisinde  $w$  vektörü

$$\tilde{w}_1 = w_1 - 2\varepsilon w_2 + \varepsilon^2 w_3, \quad \tilde{w}_2 = w_2 - \varepsilon w_3, \quad \tilde{w}_3 = w_3 \quad (4.18)$$

şeklinde dönüşür.  $\varepsilon = w_2/w_3$  seçilerek  $\tilde{w}_2 = 0$  yapılabilir.  $\tilde{w}$  vektörüne  $A_{D_1}$  dönüşümü uygulanırsa ( $\varepsilon = \mu = 0$ )

$$\tilde{\tilde{w}}_1 = \lambda \frac{w_1 w_3 - w_2^2}{w_3}, \quad \tilde{\tilde{w}}_2 = 0 \quad \tilde{\tilde{w}}_3 = \lambda^{-1} w_3 \quad (4.19)$$

bulunur.  $\lambda^2 = w_3^2/(w_1 w_3 - w_2^2)$  seçilerek  $T$  ve  $C_1$  vektörlerinin katsayıları eşitlenmiş olur. Sonuçta  $\hat{w} = T + C_1$  bir boyutlu cebir olarak elde edilir.

(iii)  $K(w, w) = 0$  durumu.  $w_1 \neq 0$  veya  $w_3 \neq 0$  olmalıdır aksi halde  $w = 0$  bulunur. Öyleyse  $A_T$  veya  $A_{C_1}$  dönüşümü kullanılarak  $\tilde{w}_2 = 0$  yapılabilir. Killing forma göre,  $\tilde{w}_1 = 0$  veya  $\tilde{w}_3 = 0$  olmalıdır.  $\tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 = 0$  ise  $\hat{w} = C_1$  kanonik cebiri,  $\tilde{w}_2 = \tilde{w}_3 = 0$  ise  $\hat{w} = T$  kanonik cebiri elde edilir. Diğer yandan,  $T$  vektörüne (4.14) bileşke dönüşüm  $\lambda = \varepsilon\mu = 1$  için uygulanırsa  $C_1$  vektörü elde edilir. Son kanonik cebir olarak  $\hat{w} = T$  kaydedilecektir.

Bulunan üç cebirin her birine  $W$  elemanı eklenince,  $L_1$  cebiri için bir boyutlu cebirlerin optimal sistemi

$$\{T + C_1 + aW, \quad D_1 + bW, \quad T + cW\} \quad (4.20)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

#### 4.2.2 $L_2$ cebiri için optimal sistem

$L_2$  cebiri baz elemanlarının komütasyon işlemi aşağıdaki gibidir.

| $[\cdot, \cdot]$ | $T$  | $P$             | $B$            | $W$ |
|------------------|------|-----------------|----------------|-----|
| $T$              | 0    | 0               | $P$            | 0   |
| $P$              | 0    | 0               | $\frac{1}{2}W$ | 0   |
| $B$              | $-P$ | $-\frac{1}{2}W$ | 0              | 0   |
| $W$              | 0    | 0               | 0              | 0   |

(4.21)

Baz elemanlarının adjoint dönüşümleri, (2.35) serisi kullanılarak

| $\text{Ad}(\exp(\varepsilon \cdot)) \cdot$ | $T$                                            | $P$                          | $B$                          | $W$ |
|--------------------------------------------|------------------------------------------------|------------------------------|------------------------------|-----|
| $T$                                        | $T$                                            | $P$                          | $B - \varepsilon P$          | $W$ |
| $P$                                        | $T$                                            | $P$                          | $B - \frac{\varepsilon}{2}W$ | $W$ |
| $B$                                        | $T + \varepsilon P + \frac{\varepsilon^2}{4}W$ | $P + \frac{\varepsilon}{2}W$ | $B$                          | $W$ |
| $W$                                        | $T$                                            | $P$                          | $B$                          | $W$ |

(4.22)

şeklinde hesaplanır.  $w = w_1 T + w_2 P + w_3 B + w_4 W \in L_2$  şeklinde en genel vektörü ele alalım.  $T$ 'nin  $w$  üzerindeki adjoint etkisi,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\exp(\varepsilon T))w &= w_1 T + w_2 P + w_3(B - \varepsilon P) + w_4 W \\ &= w_1 T + (w_2 - \varepsilon w_3)P + w_3 B + w_4 W \end{aligned} \quad (4.23)$$

şeklinde dir.  $w_3 \neq 0$  olsun.  $\varepsilon = w_2/w_3$  seçersek  $P$  yok edilmiş olur.  $w_1 T + w_3 B + w_4 W = w'$  diyelim.  $w'$  üzerine  $P$ 'nin adjoint dönüşümü ile etki edilirse,  $\lambda \in \mathbb{R}$  için

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\exp(\lambda P))w' &= w_1 T + w_3(B - \frac{\lambda}{2}W) + w_4 W \\ &= w_1 T + w_3 B + (w_4 - \frac{1}{2}\lambda w_3)W \end{aligned} \quad (4.24)$$

bulunur.  $\lambda = 2w_4/w_3$  seçildiğinde  $W$  yok edilmiş olur.  $w_1 T + w_3 B = w''$  diyelim.  $w_3 \neq 0$  olduğundan,  $w''$  ölçeklenerek bir boyutlu cebirler için ilk kanonik form olan

$$\hat{w} = B + bT \quad (4.25)$$

elde edilir. Burada  $b$  bir reel sabittir.

$w_3 = 0$  olsun.  $w = w_1 T + w_2 P + w_4 W$  vektörü üzerine  $\mu \in \mathbb{R}$  grup parametresi ile  $B$ 'ye ait adjoint dönüşüm ile etki edersek

$$\text{Ad}(\exp(\mu B))w = w_1 T + (\mu w_1 + w_2)P + (\frac{\mu^2}{4}w_1 + \frac{\mu}{2}w_2 + w_4)W \quad (4.26)$$

buluruz.  $w_1 \neq 0$  varsayarak  $\mu = -w_2/w_1$  seçersek  $P$  yok edilmiş olur.  $w_1 \neq 0$  koşulunu kullanarak ölçekleme yapılırsa,  $a \in \mathbb{R}$  olmak üzere ikinci kanonik form elde edilir

$$\hat{w} = T + aW. \quad (4.27)$$

$w_1 = w_3 = 0$  durumunu ele alalım.  $w = w_2 P + w_4 W$  vektörü üzerinde  $B$ 'nin iç otomorfizma dönüşümünün etkisi,  $\delta \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\text{Ad}(\exp(\delta B))w = w_2 P + (\frac{\delta}{2}w_2 + w_4)W \quad (4.28)$$

olarak bulunur.  $w_2 \neq 0$  varsayılır ve  $\delta = -2w_4/w_2$  seçilirse  $W$  yok edilir. Ölçekleme yapılarak üçüncü kanonik form elde edilir

$$\hat{w} = P. \quad (4.29)$$

$w_1 = w_2 = w_3 = 0$  durumunda da son kanonik form olarak  $\hat{w} = W$  vektörü kalır.

#### 4.2.3 $L_3$ cebiri için optimal sistem

$L_3$  cebiri baz elemanlarının komütasyon işlemi aşağıdaki gibidir.

| $[\cdot, \cdot]$ | $T$  | $P$             | $D_2$          | $W$ |
|------------------|------|-----------------|----------------|-----|
| $T$              | 0    | 0               | $T$            | 0   |
| $P$              | 0    | 0               | $\frac{1}{2}P$ | 0   |
| $D_2$            | $-T$ | $-\frac{1}{2}P$ | 0              | 0   |
| $W$              | 0    | 0               | 0              | 0   |

(4.30)

Adjoint dönüşümler ise (2.35) serisinin yardımıyla hesaplanmıştır.

| $\text{Ad}(\exp(\varepsilon \cdot)) \cdot$ | $T$               | $P$                  | $D_2$                          | $W$ |
|--------------------------------------------|-------------------|----------------------|--------------------------------|-----|
| $T$                                        | $T$               | $P$                  | $D_2 - \varepsilon T$          | $W$ |
| $P$                                        | $T$               | $P$                  | $D_2 - \frac{\varepsilon}{2}P$ | $W$ |
| $D_2$                                      | $e^\varepsilon T$ | $e^{\varepsilon/2}P$ | $D_2$                          | $W$ |
| $W$                                        | $T$               | $P$                  | $D_2$                          | $W$ |

(4.31)

$w = w_1T + w_2P + w_3D_2 + w_4W \in L_3$  şeklinde en genel vektör ele alınır ve  $w$  üzerine  $T$ 'ye ait otomorfizma ile etki edilirse

$$w' = \text{Ad}(\exp(\varepsilon T))w = (w_1 - \varepsilon w_3)T + w_2P + w_3D_2 + w_4W \quad (4.32)$$

bulunur.  $w_3 \neq 0$  varsayar ve  $\varepsilon = w_1/w_3$  seçersek  $T$  vektörü elenmiş olur.  $w_3 \rightarrow 1$  ölçeklemesi yapıp  $w'$  üzerine  $P$ 'nin adjoint dönüşümü ile etki edilirse

$$w'' = \text{Ad}(\exp(\lambda P))w' = (w_2 - \frac{\lambda}{2})P + D_2 + w_4W \quad (4.33)$$

bulunur.  $\lambda = 2w_2$  seçilerek  $P$  vektörü elenir ve ilk kanonik form,  $a \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\hat{w} = D_2 + aW \quad (4.34)$$

şeklinde elde edilir.  $w_3 \neq 0$  koşulunu sağlayan tüm  $w$  vektörleri bu forma getirilebilmektedir.

İkinci adım olarak  $w_3 = 0$  durumunu ele alalım.  $w = w_1T + w_2P + w_4W$  genel vektörü üzerine  $D_2$ 'nin adjoint dönüşümünü uygularsak (başka uygulanabilecek dönüşüm yoktur)

$$w' = \text{Ad}(\exp(\mu D_2))w = w_1e^\mu T + w_2e^{\mu/2}P + w_4W \quad (4.35)$$

buluruz.  $w_1 \neq 0$  varsayarak  $T$  vektörünün katsayısı 1 olacak şekilde  $w'$  vektörünü ölçekleyelim:

$$w'' = T + w_2e^{-\mu/2}P + w_4e^{-\mu}W. \quad (4.36)$$

Bu durumda  $w_2 = w_4 = 0$  ise

$$\hat{w} = T \quad (4.37)$$

kanonik formu,  $w_2 = 0, w_4 \neq 0$  ise  $w_4e^{-\mu} = \mp 1 = \varepsilon_1$  seçimiyle

$$\hat{w} = T + \varepsilon_1 W \quad (4.38)$$

kanonik vektörü,  $w_2 \neq 0, w_4 = 0$  ise  $w_2e^{-\mu/2} = \mp 1 = \varepsilon_1$  seçimiyle

$$\hat{w} = T + \varepsilon_1 P \quad (4.39)$$

elde edilir.  $w_2, w_4 \neq 0$  ise  $w_2e^{-\mu/2} = \mp 1 = \varepsilon_1$  seçimiyle,  $b \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\hat{w} = T + \varepsilon_1 P + bW \quad (4.40)$$

formu elde edilir.

$w_1 = w_3 = 0$  olması durumunda genel sonsuz küçük üreteç  $w = w_2P + w_4W$  şeklindedir.  $D_2$ 'nin adjoint dönüşümü kullanılırsa

$$w' = \text{Ad}(\exp(\delta D_2))w = w_2e^{\delta/2}P + w_4W \quad (4.41)$$

elde edilir.  $w_2 \neq 0$  varsayımı ile  $P$ 'nin katsayısı 1 olacak şekilde ölçekleme mümkündür:  $w' = P + e^{-\delta/2}w_4W$ .  $w_4 = 0$  ise  $P$ ,  $w_4 \neq 0$  ise  $P + \varepsilon_1 W$  kanonik cebirler olarak elde edilir. Son olarak  $w_1 = w_2 = w_3 = 0$  durumunda  $W$  bir boyutlu cebir olarak karşımıza çıkar. Böylelikle,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon_1 = \mp 1$  olmak üzere bir boyutlu alt cebirlerin optimal sistemi  $\{T, P, T + \varepsilon_1 W, P + \varepsilon_1 W, D_2 + aW, T + \varepsilon_1 P + bW, W\}$  şeklinde elde edilir.

#### 4.2.4 $L_4$ cebiri için optimal sistem

$L_3$  cebiri baz elemanlarının komütasyon işlemi aşağıdaki gibidir.

| $[\cdot, \cdot]$ | $P$             | $B$            | $D_2$           | $W$ |
|------------------|-----------------|----------------|-----------------|-----|
| $P$              | 0               | $\frac{1}{2}W$ | $\frac{1}{2}P$  | 0   |
| $B$              | $-\frac{1}{2}W$ | 0              | $-\frac{1}{2}B$ | 0   |
| $D_2$            | $-\frac{1}{2}P$ | $\frac{1}{2}B$ | 0               | 0   |
| $W$              | 0               | 0              | 0               | 0   |

(4.42)

Adjoint dönüşümler

| $\text{Ad}(\exp(\varepsilon \cdot))$ | $P$                          | $B$                          | $D_2$                          | $W$ |
|--------------------------------------|------------------------------|------------------------------|--------------------------------|-----|
| $P$                                  | $P$                          | $B - \frac{\varepsilon}{2}W$ | $D_2 - \frac{\varepsilon}{2}P$ | $W$ |
| $B$                                  | $P + \frac{\varepsilon}{2}W$ | $B$                          | $D_2 + \frac{\varepsilon}{2}B$ | $W$ |
| $D_2$                                | $e^{\varepsilon/2}P$         | $e^{-\varepsilon/2}B$        | $D_2$                          | $W$ |
| $W$                                  | $P$                          | $B$                          | $D_2$                          | $W$ |

(4.43)

şeklinde bulunur.  $w = w_1P + w_2B + w_3D_2 + w_4W \in L_4$  şeklinde en genel vektör ele alınır ve  $P$ 'nin otomorfizma dönüşümü kullanılırsa

$$w' = \text{Ad}(\exp(\varepsilon P))w = (w_1 - \frac{\varepsilon}{2}w_3)P + w_2B + w_3D_2 + (w_4 - \frac{\varepsilon}{2}w_2)W \quad (4.44)$$

bulunur.  $w_3 \neq 0$  varsayarak  $w_3 \rightarrow 1$  olacak şekilde  $w'$  ölçeklenir ve  $\varepsilon = 2w_1$  seçilirse  $P$  elenmiş olur. Ardından

$$w'' = \text{Ad}(\exp(\lambda B))w' = (w_2 + \frac{\lambda}{2})B + D_2 + (w_4 - w_1w_2)W \quad (4.45)$$

dönüşümü ve  $\lambda = -2w_2$  seçimi  $B$  vektörünü yok eder. Öyleyse ilk kanonik form

$$\hat{w} = D_2 + aW, \quad a \in \mathbb{R} \quad (4.46)$$

olarak elde edilir. Şimdi  $w_3 = 0$  durumunu ele alalım.  $w = w_1P + w_2B + w_4W$   $B$ 'nin adjoint etkisi altında

$$w' = \text{Ad}(\exp(\mu B))w = w_1P + w_2B + (\frac{\mu}{2}w_1 + w_4)W \quad (4.47)$$

haline gelir.  $w_1 \neq 0$  varsayılır,  $w_1 \rightarrow 1$  olacak şekilde  $w'$  ölçeklenir ve  $\mu = -2w_4$  seçilirse  $w' = P + w_2B$  bulunur.

$$w'' = \text{Ad}(\exp(\delta D_2))w' = e^{\delta/2}P + w_2e^{-\delta/2}B \quad (4.48)$$

dönüşümünde ölçekleme yapılarak  $w'' = P + w_2e^{-\delta}B$  şeklinde düşünülebilir.  $w_2 = 0$  ise  $\hat{w} = P$  bir boyutlu cebiri,  $w_2 \neq 0$  ise  $w_2e^{-\delta} = \varepsilon_1$  seçilerek  $\hat{w} = P + \varepsilon_1B$  alt cebirleri elde edilir.

$w_1 = w_3 = 0$  durumunda  $w = w_2B + w_4W$  vektörü  $P$ 'nin etkisinde

$$w' = \text{Ad}(\exp(\sigma P))w = w_2B + (w_4 - \frac{\sigma}{2}w_2)W \quad (4.49)$$

şeklinde dönüştürülür ve  $w_2 \neq 0$  varsayımıyla  $\sigma = 2w_4/w_2$  seçilerek  $\hat{w} = B$  cebiri elde edilir. Son olarak da  $w_1 = w_2 = w_3 = 0$  durumu için  $\hat{w} = W$  bir boyutlu cebiri aşıkardır.

#### 4.2.5 $L_5$ cebiri için optimal sistem

$L_5$  cebiri baz elemanlarının Lie parantezi işlemi aşağıdaki gibidir.

| $[\cdot, \cdot]$ | $P$             | $B$            | $C_2$ | $W$ |
|------------------|-----------------|----------------|-------|-----|
| $P$              | 0               | $\frac{1}{2}W$ | $B$   | 0   |
| $B$              | $-\frac{1}{2}W$ | 0              | $-P$  | 0   |
| $C_2$            | $-B$            | $P$            | 0     | 0   |
| $W$              | 0               | 0              | 0     | 0   |

(4.50)

Adjoint dönüşümler aşağıdaki gibidir.

| $\text{Ad}(\exp(\varepsilon \cdot))$ | $P$                                         | $B$                                         | $C_2$                                            | $W$ |
|--------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------|--------------------------------------------------|-----|
| $P$                                  | $P$                                         | $B - \frac{\varepsilon}{2}W$                | $C_2 - \varepsilon B + \frac{\varepsilon^2}{4}W$ | $W$ |
| $B$                                  | $P + \frac{\varepsilon}{2}W$                | $B$                                         | $C_2 + \varepsilon P + \frac{\varepsilon^2}{4}W$ | $W$ |
| $C_2$                                | $(\cos \varepsilon)P + (\sin \varepsilon)B$ | $(\cos \varepsilon)B - (\sin \varepsilon)P$ | $C_2$                                            | $W$ |
| $W$                                  | $P$                                         | $B$                                         | $C_2$                                            | $W$ |

(4.51)

$w = w_1P + w_2B + w_3C_2 + w_4W \in L_5$  vektörü için ilk olarak  $P$  ile ilde edilen otomorfizma dönüşümü

$$w' = \text{Ad}(\exp(\varepsilon P))w = w_1P + (w_2 - \varepsilon w_3)B + w_3C_2 + (w_4 - \frac{\varepsilon}{2}w_2 + \frac{\varepsilon^2}{4}w_3)W \quad (4.52)$$

sonucunu verir.  $w_3 \neq 0$  varsayılarak  $w_3 \rightarrow 1$  yapılır ve  $\varepsilon = w_2$  seçilirse,  $B$  elenmiş olur.

Elde edilen  $w' = w_1P + C_2 + (w_4 - \frac{1}{4}w_2^2)W$  vektörüne  $B$  otomorfizması uygulanırsa

$$w'' = \text{Ad}(\exp(\lambda B))w' = (w_1 + \lambda)P + C_2 + (w_4 - \frac{1}{4}w_2^2 + \frac{\lambda}{2}w_1 + \frac{\lambda^2}{4})W \quad (4.53)$$

bulunur.  $\lambda = -w_1$  seçildiğinde  $P$  yok edilerek

$$\hat{w} = C_2 + aW, \quad a \in \mathbb{R} \quad (4.54)$$

bir boyutlu cebiri elde edilmiş olur.  $w_3 = 0$  olsun.  $w = w_1P + w_2B + w_4W$  için

$$w' = \text{Ad}(\exp(\mu P))w = w_1P + w_2B + (w_4 - \frac{\mu}{2}w_2)W \quad (4.55)$$

dönüşümünde  $w_2 \neq 0$  varsayımıyla  $w_2 \rightarrow 1$  yapılır ve  $\mu = 2w_4$  seçilirse  $W$  yok edilebilir.  $w' = w_1P + B$  için tekrardan dönüşüm uygulanırsa

$$w'' = \text{Ad}(\exp(\delta C_2))w' = (w_1 \cos \delta - \sin \delta)P + (w_1 \sin \delta + \cos \delta)B \quad (4.56)$$

bulunur.  $\tan \delta = w_1$  seçilerek  $P$  elenir ve  $\hat{w} = B$  cebirine ulaşılır.

$w_2 = w_3 = 0$  olsun.  $w = w_1P + w_4W$  için

$$w' = \text{Ad}(\exp(\sigma B))w = w_1P + \left(\frac{\sigma}{2}w_1 + w_4\right)W \quad (4.57)$$

dönüşümünde  $w_1 \rightarrow 1$  yapılarak  $\sigma = -2w_4$  seçildiğinde  $W$  yok edilmiş olur. Öyleyse  $\hat{w} = P$  bir boyutlu kanonik cebirlerden biridir. Ancak dikkat edilirse,  $\text{Ad}(\exp(\varepsilon C_2))P = (\cos \varepsilon)P + (\sin \varepsilon)B$  dönüşümünde  $\varepsilon = \pi/2$  seçilerek, önceki adımda elde edilen  $B$  vektörüne dönüşüm yapılabilir;  $P$  optimal sisteme dahil edilmeyecektir. Son olarak  $w_1 = w_2 = w_3 = 0$  durumu için  $\hat{w} = W$  cebirini not ediyoruz.

Dört boyutlu cebirlere ait bir boyutlu cebirlerin optimal sistemi aşağıdaki tabloda özetlenmiştir. Burada elde edilen sonuçlar, [67]'de verilenler ile tam olarak uyumludur.

**Çizelge 4.2:** 4-boyutlu cebirlerin 1-boyutlu alt cebirleri

| Cebir |                                                                               | Alt Cebir                                     | $a, b, c \in \mathbb{R}, \varepsilon_1 = \mp 1$                                 |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| $L_1$ | $L_{1.1} = \{T + C_1 + aW\}$                                                  | $L_{1.2} = \{D_1 + bW\}$                      | $L_{1.3} = \{T + cW\}$                                                          |
| $L_2$ | $L_{2.1} = \{P\}$<br>$L_{2.4} = \{W\}$                                        | $L_{2.2} = \{T + aW\}$                        | $L_{2.3} = \{B + bT\}$                                                          |
| $L_3$ | $L_{3.1} = \{T\}$<br>$L_{3.4} = \{P + \varepsilon_1 W\}$<br>$L_{3.7} = \{W\}$ | $L_{3.2} = \{P\}$<br>$L_{3.5} = \{D_2 + aW\}$ | $L_{3.3} = \{T + \varepsilon_1 W\}$<br>$L_{3.6} = \{T + \varepsilon_1 P + bW\}$ |
| $L_4$ | $L_{4.1} = \{P\}$<br>$L_{4.4} = \{D_2 + aW\}$                                 | $L_{4.2} = \{B\}$<br>$L_{4.5} = \{W\}$        | $L_{4.3} = \{P + \varepsilon_1 B\}$                                             |
| $L_5$ | $L_{5.1} = \{B\}$                                                             | $L_{5.2} = \{C_2 + aW\}$                      | $L_{5.3} = \{W\}$                                                               |

### 4.3 İndirgenmiş Denklemler

Grup-değişmez çözümlerle ilgilendiğimiz için, yalnızca bir boyutlu alt cebirlere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu alt cebirler kullanılarak denklemin adi diferansiyel denklemlere indirgemeleri gerçekleştirilecektir. Dalga fonksiyonu kutupsal formda

ifade edildiğinde (3.1) denklemi bir KDD sistemi haline gelir

$$-\rho \omega_t + f_1(\rho_{xx} - \rho \omega_x^2) - f_2(2\rho_x \omega_x + \rho \omega_{xx}) + g_1 \rho^3 + h_1 \rho = 0, \quad (4.58a)$$

$$\rho_t + f_2(\rho_{xx} - \rho \omega_x^2) + f_1(2\rho_x \omega_x + \rho \omega_{xx}) + g_2 \rho^3 + h_2 \rho = 0. \quad (4.58b)$$

Bu sistemde 1, 2 indisli terimler  $f, g$  ve  $h$ 'ın reel ve sanal kısımlarıdır. Örneğin  $L_1$  cebiri için sistem görülmek istenirse Çizelge 4.1'e bakılarak (4.58a) denkleminde  $h_1(x, t)$  yerine  $h_1/x^2$ ,  $L_5$  cebiri için ise  $h_1/(1+t^2)$  yazılır, yerine konan ifadelerde  $h_1$  sabittir.

Belli bir alt cebir için değişmez yüzey koşulu  $\rho$  ve  $\omega$  için benzerlik değişkenlerini verir. Elde edilen  $\rho$  ve  $\omega$  formüllerinin (4.58) denkleminde kullanılması, sistemdeki bağımsız değişken sayısını ikiden bire indirir, dolayısıyla bir ADD sistemi elde edilmiş olur. Bu ADD sistemleri birinci veya ikinci mertebe sistemler olarak elde edilmiştir.

Aşağıdaki hesaplarda, indirgeme birinci mertebe bir denklem olarak elde edilmişse çözümü hemen yazılmıştır. İndirgeme ikinci mertebe bir denklem sistemi olduğunda, içerilen sabitlerin bazı özel değerleri için denklemler arasındaki bağıllık kaldırılabilmiş ve analizleri sonraki kısma bırakılmıştır.

#### 4.3.1 $L_1 = \{T, D_1, C_1, W\}$ çözülemez cebiri

$L_1$  cebirinin baz elemanlarının komütasyon bağıntıları aşağıdaki gibidir

$$[T, D_1] = 2T, \quad [T, C_1] = D_1, \quad [D_1, C_1] = 2C_1. \quad (4.59)$$

$W$  merkezci elemandır yani diğer elemanlarla komütasyonu sıfırdır. Cebir,  $L_1 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \{W\}$  doğrudan toplam yapısına sahiptir. Temsilci denklemi

$$i\psi_t + \psi_{xx} + (\varepsilon_0 + i\gamma) \frac{1}{x} |\psi|^2 \psi + (h_1 + ih_2) \frac{1}{x^2} \psi = 0 \quad (4.60)$$

olup  $\varepsilon_0 = \mp 1$  ve  $\gamma, h_1, h_2$  reel sabitlerdir. Kutupsal değişkenler türünden

$$-\rho \omega_t + \rho_{xx} - \rho \omega_x^2 + \frac{\varepsilon_0}{x} \rho^3 + \frac{h_1}{x^2} \rho = 0, \quad (4.61a)$$

$$\rho_t + 2\rho_x \omega_x + \rho \omega_{xx} + \frac{\gamma}{x} \rho^3 + \frac{h_2}{x^2} \rho = 0 \quad (4.61b)$$

sistemi sağlanmaktadır.  $L_1$  cebirinin alt cebirleri için indirgenmiş denklemlerin elde edilmesi aşağıdaki gibidir.

#### 4.3.1.1 $L_{1.1} = \{T + C_1 + aW\}$ alt cebiri

Denklemin  $L_{1.1}$  cebiri altında değişmez kalması, çözümün

$$\psi(x, t) = \frac{M(\xi)}{\sqrt{x}} \exp \left[ i \left( a \arctan t + \frac{x^2 t}{4(1+t^2)} + P(\xi) \right) \right], \quad \xi = \frac{x^2}{1+t^2} \quad (4.62)$$

yapısında olmasını gerektirir ve  $M(\xi)$ ,  $P(\xi)$  fonksiyonları

$$\varepsilon_0 M^3 + \left( \frac{3-\xi^2}{4} - a\xi + h_1 \right) M - 4\xi^2 M P'^2 + 4\xi^2 M'' = 0, \quad (4.63a)$$

$$\gamma M^3 + h_2 M + 8\xi^2 M' P' + 4\xi^2 M P'' = 0 \quad (4.63b)$$

denklemlerini sağlar.  $M$  ve  $P$ 'nin bu denklemlerden çözülebilmesi için öncelikle denklemlerin kuplajı kaldırılmalıdır. (4.63b)  $M$  ile çarpılıp

$$\gamma M^4 + h_2 M^2 + 4\xi^2 (M^2 P')' = 0 \quad (4.64)$$

şeklinde yazılırsa, (4.64)'ün bir ilk integralinin sabitlerin üç farklı durumu için elde edilebileceği görülür.

(i)  $\gamma = 0$ ,  $h_2 \neq 0$  durumu. (4.64) kullanılarak  $Y = Y(\xi)$

$$(M^2 P')' = -\frac{h_2 M^2}{4\xi^2} = Y' \quad (4.65)$$

şeklinde tanımlanırsa

$$M^2 P' = Y + C, \quad C = \text{sabit} \quad (4.66)$$

integrali alınabilir ve

$$M^2 = -\frac{4}{h_2} \xi^2 Y' \quad (4.67)$$

bulunur. Dolayısıyla (4.63a)'da yazılmak üzere

$$P' = -\frac{h_2(Y+C)}{4\xi^2 Y'} \quad (4.68)$$

şeklinde tamamen  $Y$  türünden bir ifade elde edilebilir. Ancak, (4.63a)'daki diğer terimler de  $Y$  türünden ifade edilmelidir. (4.67) kullanılırsa bunun mümkün olduğu görülür ve (4.63a)'dan, üçüncü mertebeden bir doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem (ADD) elde edilir:

$$\begin{aligned} & Y' Y''' - \frac{1}{2} Y''^2 + \frac{2}{\xi} Y' Y'' \\ & + \frac{1}{2\xi^2} \left( \frac{3-\xi^2}{4} - a\xi + h_1 \right) Y'^2 - \frac{2\varepsilon_0}{h_2} Y'^3 - \frac{h_2^2}{8\xi^4} (Y+C)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Bu denklemin bir çözümüne karşılık (4.62) çözümünde yazılmak üzere  $M, P$  fonksiyonları

$$M(\xi) = 2\xi \sqrt{-\frac{1}{h_2} Y'}, \quad P(\xi) = -\frac{h_2}{4} \int \frac{Y+C}{\xi^2 Y'} d\xi \quad (4.70)$$

şeklinde hesaplanacaktır.

(ii)  $\gamma \neq 0, h_2 = 0$  durumu.  $Y$  fonksiyonu (4.64)'ten bu kez

$$(M^2 P')' = -\frac{\gamma M^4}{4\xi^2} = Y' \quad (4.71)$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$M^2 P' = Y + C, \quad C = \text{sabit} \quad (4.72)$$

integrali alınabilir ve

$$M^4 = -\frac{4}{\gamma} \xi^2 Y' \quad (4.73)$$

bulunur. (4.63a) denkleminde,  $Y$ 'nin sağladığı denklem olarak

$$Y'Y''' - \frac{3}{4}Y''^2 + \frac{1}{\xi}Y'Y'' - \left(\frac{1-4h_1}{4\xi^2} + \frac{a}{\xi} + \frac{1}{4}\right)Y'^2 + \frac{\gamma}{\xi^2}(Y+C)^2Y' + \frac{2\varepsilon_0}{\xi}Y'^2 \sqrt{-\frac{Y'}{\gamma}} = 0 \quad (4.74)$$

üçüncü mertebeden denklemi elde edilir. Bu denklemin  $Y(\xi)$  çözümüne karşılık  $M, P$  fonksiyonları

$$M(\xi) = \left(-\frac{4}{\gamma} \xi^2 Y'\right)^{1/4}, \quad P(\xi) = \frac{1}{2} \int \sqrt{-\frac{\gamma}{Y'}} \frac{Y+C}{\xi} d\xi \quad (4.75)$$

formülleri ile bulunacaktır.

(iii)  $\gamma = h_2 = 0$  durumu. Bu durumda kuplaj kolaylıkla kaldırılabilir. (4.64) denkleminin integre edilmesiyle

$$M^2 P' = C, \quad P(\xi) = \int \frac{C}{M^2} d\xi; \quad C = \text{sabit} \quad (4.76)$$

bulunur ve (4.63a) denkleminde

$$M'' = -\frac{\varepsilon_0}{4\xi^2} M^3 + \frac{1}{4\xi^2} \left(\frac{\xi^2-3}{4} + a\xi - h_1\right) M + C^2 M^{-3} \quad (4.77)$$

diferansiyel denklemine ulaşılır.

#### 4.3.1.2 $L_{1,2} = \{D_1 + bW\}$ alt cebiri

Denklemin  $L_{1,2}$  cebiri altında değişmez kalması durumunda çözüm

$$\psi(x,t) = \frac{M(\xi)}{\sqrt{x}} \exp \left[ i(b \ln x + P(\xi)) \right], \quad \xi = \frac{x^2}{t} \quad (4.78)$$

yapısında olur ve  $M(\xi)$ ,  $P(\xi)$  fonksiyonları

$$\varepsilon_0 M^3 + \left( \frac{3}{4} - b^2 + h_1 \right) M + \xi(\xi - 4b)MP' - 4\xi^2 MP'^2 + 4\xi^2 M'' = 0, \quad (4.79a)$$

$$\gamma M^3 + (h_2 - 2b)M + \xi(4b - \xi)M' + 8\xi^2 M'P' + 4\xi^2 MP'' = 0 \quad (4.79b)$$

denklemlerini sağlamalıdır.  $M$  ve  $P$ 'nin bu denklemlerden çözülebilmesi için öncelikle denklemlerin kuplajı kaldırılmalıdır. (4.79b)  $M$  ile çarpılırsa,

$$\gamma M^4 + h_2 M^2 + \xi^2 \left[ M^2 \left( \frac{2b}{\xi} - \frac{1}{2} + 4P' \right) \right]' = 0 \quad (4.80)$$

şeklinde düzenlenebilir ve (4.80)'in integralinin sabitlerin üç farklı durumu için elde edilebileceği görülür:

(i)  $\gamma = 0$ ,  $h_2 \neq 0$  durumu. (4.80) denkleminde  $Y(\xi)$  fonksiyonu

$$\left[ M^2 \left( \frac{2b}{\xi} - \frac{1}{2} + 4P' \right) \right]' = -h_2 \frac{M^2}{\xi^2} = Y' \quad (4.81)$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$P' = \frac{1}{8} - \frac{b}{2\xi} - \frac{h_2}{4\xi^2} \frac{Y+C}{Y'} \quad (4.82)$$

ilk integrali yazılabilir ve

$$M^2 = -\frac{1}{h_2} \xi^2 Y' \quad (4.83)$$

eşitliğinden, (4.79a) tümüyle  $Y$  türünden ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} & Y'Y''' - \frac{1}{2}Y''^2 + \frac{2}{\xi}Y'Y'' \\ & + \frac{1}{8} \left( \frac{3+4h_1}{\xi^2} - \frac{2b}{\xi} + \frac{1}{4} \right) Y'^2 - \frac{\varepsilon_0}{2h_2} Y'^3 - \frac{h_2^2}{8\xi^4} (Y+C)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.84)$$

$Y$  bu denklemin bir çözümü olmak üzere  $P$  ve  $M$  (4.82) ve (4.83) denklemleriyle belirlenir.

(ii)  $\gamma \neq 0$ ,  $h_2 = 0$  durumu. (4.80) denkleminde  $Y(\xi)$  fonksiyonu

$$\left[ M^2 \left( \frac{2b}{\xi} - \frac{1}{2} + 4P' \right) \right]' = -\gamma \frac{M^4}{\xi^2} = Y' \quad (4.85)$$

şeklinde tanımlanırsa

$$P' = \frac{1}{8} - \frac{b}{2\xi} + \frac{Y+C}{4\xi} \sqrt{-\frac{\gamma}{Y'}} \quad (4.86)$$

integrali yazılabilir ve

$$M^4 = -\frac{1}{\gamma} \xi^2 Y' \quad (4.87)$$

eşitliği kullanılarak (4.79a) tümüyle  $Y$  türünden bir denkleme dönüştürülür:

$$\begin{aligned} Y'Y''' - \frac{3}{4}Y''^2 + \frac{1}{\xi}Y'Y'' \\ + \left( \frac{4h_1-1}{4\xi^2} - \frac{b}{2\xi} + \frac{1}{16} \right) Y'^2 + \frac{\gamma}{4\xi^2} (Y+C)^2 Y' + \frac{\varepsilon_0}{\xi} Y'^2 \sqrt{-\frac{Y'}{\gamma}} = 0. \end{aligned} \quad (4.88)$$

$Y$  bu denklemin bir çözümü olmak üzere  $P$  ve  $M$  fonksiyonlarını (4.86) ve (4.87) denklemlerinin integrasyonu belirleyecektir.

(iii)  $\gamma = h_2 = 0$  durumu. (4.80) denklemi integre edilirse

$$P' = \frac{C}{M^2} + \frac{1}{8} - \frac{b}{2\xi} \quad (4.89)$$

elde edilir ve bu sonuç (4.79a)'da yazıldığında  $M$  için

$$M'' = C^2 M^{-3} - \frac{\varepsilon_0}{4\xi^2} M^3 - \frac{1}{16\xi^2} (3 + 4h_1 - 2b\xi + \frac{1}{4}\xi^2) M \quad (4.90)$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

#### 4.3.1.3 $L_{1,3} = \{T + cW\}$ alt cebiri

$L_{1,3}$  cebiri altında değişmezlik (3.1) denkleminin çözümünün

$$\psi(x, t) = M(x) \exp \left[ i(ct + P(x)) \right] \quad (4.91)$$

yapısında olmasını gerektirir ve  $M(\xi)$ ,  $P(\xi)$  fonksiyonları

$$\varepsilon_0 x M^3 + (h_1 - cx^2)M - x^2 M P'^2 + x^2 M'' = 0, \quad (4.92a)$$

$$\gamma x M^3 + h_2 M + 2x^2 M' P' + x^2 M P'' = 0 \quad (4.92b)$$

denklemlerini sağlar. Her iki denklem  $M$  ile çarpılırsa

$$\varepsilon_0 x M^4 + (h_1 - cx^2)M^2 - x^2 M^2 P'^2 + x^2 M M'' = 0, \quad (4.93a)$$

$$\gamma x M^4 + h_2 M^2 + x^2 (M^2 P')' = 0 \quad (4.93b)$$

şeklinde düzenlenebilir. Yukarıdaki hesaplara benzer şekilde, şu sonuçlara ulaşılmıştır:

(i)  $\gamma = 0, h_2 \neq 0$  durumu.  $M(x)$  ve  $P(x)$  fonksiyonları

$$M(x) = \left( -\frac{1}{h_2} x^2 Y' \right)^{1/2}, \quad P(x) = -h_2 \int \frac{Y+C}{x^2 Y'} dx \quad (4.94)$$

bağıntılarından bulunur. Burada  $Y(x)$  fonksiyonu,

$$Y'Y''' - \frac{1}{2}Y''^2 + \frac{2}{x}Y'Y'' + 2\left(\frac{h_1}{x^2} - c\right)Y'^2 - \frac{2\varepsilon_0 x}{h_2}Y'^3 - \frac{2h_2^2}{x^4}(Y+C)^2 = 0 \quad (4.95)$$

denkleminin çözümüdür.

(ii)  $\gamma \neq 0, h_2 = 0$  durumu.  $M(x)$  ve  $P(x)$  fonksiyonları

$$M(x) = \left( -\frac{1}{\gamma} x Y' \right)^{1/4}, \quad P(x) = \int (Y+C) \sqrt{-\frac{\gamma}{x Y'}} dx \quad (4.96)$$

eşitliklerinden hesaplanacaktır. Burada  $Y(x)$  fonksiyonu,

$$\begin{aligned} Y'Y''' - \frac{3}{4}Y''^2 + \frac{1}{2x}Y'Y'' \\ + \left( \frac{16h_1 - 3}{4x^2} - 4c \right)Y'^2 + \frac{4\gamma}{x}(Y+C)^2 Y' + \frac{4\varepsilon_0}{x}Y'^2 \sqrt{-\frac{x}{\gamma}Y'} = 0 \end{aligned} \quad (4.97)$$

denklemini sağlar.

(iii)  $\gamma = h_2 = 0$  durumu.  $M(x)$  fonksiyonu

$$M'' = C^2 M^{-3} + \left( c - \frac{h_1}{x^2} \right) M - \frac{\varepsilon_0}{x} M^3 \quad (4.98)$$

denkleminin çözümü olup  $P(x)$  aşağıdaki gibi hesaplanır

$$P(x) = \int \frac{C}{M^2} dx. \quad (4.99)$$

### 4.3.2 $L_2 = \{T, P, B, W\}$ nilpotent cebiri

Sıfırdan farklı komütasyon bağıntısı  $[P, B] = \frac{1}{2}W$  olup cebir, üç boyutlu Abelyen  $\{T, P, W\}$  idealini içermektedir.  $B$  elemanının bu ideal üzerindeki etkisi, aşağıdaki  $N$  nilpotent matrisi ile temsil edilebilir

$$\begin{pmatrix} [P, B] \\ [T, B] \\ [W, B] \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} P \\ T \\ W \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.100)$$

Bu cebire ait kanonik denklem,  $\varepsilon_0 = \mp 1$ ,  $h_2 \neq 0$  ve  $\gamma$  reel sabitler olmak üzere

$$i\psi_t + \psi_{xx} + (\varepsilon_0 + i\gamma)|\psi|^2\psi + ih_2\psi = 0 \quad (4.101)$$

şeklindedir.

#### 4.3.2.1 $L_{2,1} = \{P\}$ alt cebiri

$L_{2,1}$  cebiri altında değişmez kalan çözüm

$$\psi(x, t) = M(t) \exp(iP(t)) \quad (4.102)$$

yapısındadır ve  $M, P$  fonksiyonları

$$\varepsilon_0 M^2 - P' = 0, \quad \gamma M^3 + h_2 M + M' = 0 \quad (4.103)$$

sisteminin çözümünden bulunur:

$$M(t) = \left( M_1 \exp(2h_2 t) - \frac{\gamma}{h_2} \right)^{-1/2}, \quad (4.104a)$$

$$P(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{2\gamma} \ln \left( M_1 - \frac{\gamma}{h_2} \exp(-2h_2 t) \right) + P_1, & \gamma \neq 0, \\ P_1 - \frac{\varepsilon_0}{2h_2 M_1} \exp(2h_2 t), & \gamma = 0. \end{cases} \quad (4.104b)$$

#### 4.3.2.2 $L_{2,2} = \{T + aW\}$ alt cebiri

$L_{2,2}$  cebiri altında değişmez kalan çözüm

$$\psi(x, t) = M(x) \exp \left[ i(at + P(x)) \right] \quad (4.105)$$

yapısındadır ve  $M, P$  fonksiyonlarının sağladığı denklem sistemi

$$\varepsilon_0 M^3 - aM - MP'^2 + M'' = 0, \quad (4.106a)$$

$$\gamma M^3 + h_2 M + 2M'P' + MP'' = 0 \quad (4.106b)$$

şeklindedir.  $\gamma = 0$  durumunda (4.106b)  $M$  ile çarpılır

$$h_2 M^2 + (M^2 P')' = 0 \quad (4.107)$$

ve (4.107) denkleminde  $Y(x)$  fonksiyonu

$$(M^2 P')' = -h_2 M^2 = Y' \quad (4.108)$$

olarak tanımlanırsa,

$$P(x) = -h_2 \int \frac{Y+C}{Y'} dx \quad (4.109)$$

elde edilir. Bu ifade (4.106a)'da yazıldığında sistemdeki kuplaj kaldırılabilir:

$$Y'Y''' - \frac{1}{2}Y''^2 - \frac{2\varepsilon_0}{h_2}Y'^3 - 2aY'^2 - 2h_2^2(Y+C)^2 = 0. \quad (4.110)$$

$P$  fonksiyonu (4.109)'dan,  $M$  ise

$$M(x) = \left(-\frac{1}{h_2}Y'\right)^{1/2} \quad (4.111)$$

eşitliğinden belirlenecektir.

#### 4.3.2.3 $L_{2,3} = \{B + bT\}$ alt cebiri

(i)  $b \neq 0$  durumu.  $L_{2,3}$  cebiri altında değişmez kalan çözüm

$$\psi(x,t) = M(\xi) \exp \left[ i \left( \frac{1}{2b}xt - \frac{1}{6b^2}t^3 + P(\xi) \right) \right], \quad \xi = bx - \frac{t^2}{2} \quad (4.112)$$

şeklindedir.  $M, P$  fonksiyonları aşağıdaki denklem sisteminin çözümleridir.

$$\frac{\varepsilon_0}{b^2}M^3 - \frac{\xi}{2b^4}M - MP'^2 + M'' = 0, \quad (4.113a)$$

$$\gamma M^3 + h_2M + 2b^2M'P' + b^2MP'' = 0. \quad (4.113b)$$

(4.113b)  $M$  ile çarpıldığında

$$\gamma M^4 + h_2M^2 + b^2(M^2P')' = 0 \quad (4.114)$$

şeklinde düzenlenebilir.  $\gamma = 0$  için  $Y(\xi)$  fonksiyonu (4.114) denkleminde

$$(M^2P')' = -\frac{h_2}{b^2}M^2 = Y' \quad (4.115)$$

gibi tanımlanırsa,

$$P(\xi) = -\frac{h_2}{b^2} \int \frac{Y+C}{Y'} d\xi \quad (4.116)$$

elde edilir. Bu (4.113a)'da yazıldığında sistemdeki kuplaj kaldırılabilir:

$$Y'Y''' - \frac{1}{2}Y''^2 - \frac{2\varepsilon_0}{h_2}Y'^3 - \frac{x}{b^4}Y'^2 - \frac{2h_2^2}{b^4}(Y+C)^2 = 0. \quad (4.117)$$

$P$  fonksiyonu (4.116)'dan,  $M$  ise

$$M(\xi) = \left(-\frac{b^2}{h_2}Y'\right)^{1/2} \quad (4.118)$$

formülünden belirlenecektir.

(ii)  $b = 0$  durumu.  $L_{2,3}$  cebiri altında değişmez kalan çözüm

$$\psi(x,t) = M(t) \exp \left[ i \left( \frac{x^2}{4t} + P(t) \right) \right] \quad (4.119)$$

yapısındadır.  $M, P$  fonksiyonlarının sağladığı denklem sistemi

$$\varepsilon_0 M^2 - P' = 0, \quad \gamma M^3 + \left(h_2 + \frac{1}{2t}\right)M + M' = 0 \quad (4.120)$$

şeklindedir. Bu sistemin çözümü ise aşağıdaki gibidir

$$M(t) = \left[ t \exp(2h_2 t) \left( M_1 + 2\gamma \int \frac{\exp(-2h_2 t)}{t} dt \right) \right]^{-1/2}, \quad (4.121)$$

$$P(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{2\gamma} \ln \left( 2\gamma \int \frac{\exp(-2h_2 t)}{t} dt + M_1 \right) + P_1, & \gamma \neq 0 \\ \frac{\varepsilon_0}{M_1} \int \frac{\exp(-2h_2 t)}{t} dt + P_1, & \gamma = 0 \end{cases} \quad (4.122)$$

### 4.3.3 $L_3 = \{T, P, D_2, W\}$ çözülebilir cebiri

Cebir  $\{T, P, W\}$  abelyen ideale sahiptir. Sıfırdan farklı komütasyon bağıntıları

$$[D_2, T] = T, \quad [D_2, P] = \frac{1}{2}P \quad (4.123)$$

şeklindedir ve cebir  $L_3 = \{T, P, D_2\} \oplus \{W\}$  ayrıştırılabilir yapısındadır.  $\varepsilon_0 = \mp 1$ ,  $f_2 \neq 0$ ,  $\gamma$  reel sabitler olmak üzere bu simetri cebirine sahip kanonik denklem

$$i\psi_t + (1 + if_2)\psi_{xx} + (\varepsilon_0 + i\gamma)|\psi|^2\psi = 0 \quad (4.124)$$

şeklindedir.

#### 4.3.3.1 $L_{3,1} = \{T\}$ alt cebiri

$L_{3,1}$  cebiri altında (3.1) denklemi değişmez kaldığında çözüm

$$\psi(x, t) = M(x) \exp(iP(x)) \quad (4.125)$$

yapısında olmaktadır.  $M, P$  aşağıdaki denklem sistemini sağlar:

$$\varepsilon_0 M^3 - 2f_2 M' P' - M(P'^2 + f_2 P'') + M'' = 0, \quad (4.126a)$$

$$\gamma M^3 + 2M' P' + f_2 M'' + M(-f_2 P'^2 + P'') = 0. \quad (4.126b)$$

Bu denklemlerin,

$$\frac{\varepsilon_0 + \gamma f_2}{1 + f_2^2} M^3 - M P'^2 + M'' = 0, \quad (4.127a)$$

$$\frac{\gamma - \varepsilon_0 f_2}{1 + f_2^2} M^4 + (M^2 P')' = 0 \quad (4.127b)$$

şeklinde düzenlenmesi mümkündür.

(i)  $\gamma \neq \varepsilon_0 f_2$  durumu.

$$(M^2 P')' = \frac{\varepsilon_0 f_2 - \gamma}{1 + f_2^2} M^4 = Y' \quad (4.128)$$

şeklinde tanımlanan  $Y(x)$  fonksiyonu yardımıyla bulunan

$$P' = \frac{Y + C}{M^2}, \quad M = \left( \frac{1 + f_2^2}{\varepsilon_0 f_2 - \gamma} Y' \right)^{1/4} \quad (4.129)$$

ifadeleri (4.127a)'da yazıldığında,  $Y(x)$  için üçüncü mertebeden bir denklem elde edilir:

$$Y' Y''' - \frac{3}{4} Y''^2 + \frac{4(\varepsilon_0 + \gamma f_2)}{\sqrt{1 + f_2^2}} \sqrt{\frac{Y'}{\varepsilon_0 f_2 - \gamma}} Y'^2 + \frac{4(\gamma - \varepsilon_0 f_2)}{1 + f_2^2} (Y + C)^2 Y' = 0. \quad (4.130)$$

Bu denklemin bir çözümü için  $M, P$  fonksiyonları (4.129) denklemlerinden hesaplanabilir.

(ii)  $\gamma = \varepsilon_0 f_2$  durumu.  $M(x)$  fonksiyonu

$$M'' = \frac{C^2}{M^3} - \varepsilon_0 M^3 \quad (4.131)$$

denkleminin çözümüdür.  $P(x)$  fonksiyonu aşağıdaki gibidir

$$P(x) = \int \frac{C}{M^2} dx. \quad (4.132)$$

#### 4.3.3.2 $L_{3,2} = \{P\}$ alt cebiri

$L_{3,2}$  cebiri altında değişmez kalan çözüm  $\psi(x, t) = M(t) \exp(iP(t))$  yapısında olup

$$\varepsilon_0 M^2 - P' = 0, \quad \gamma M^3 + M' = 0 \quad (4.133)$$

sisteminin çözümünden aşağıdaki gibi elde edilir

$$M(t) = \sqrt{2\gamma t + M_1}, \quad P(t) = \varepsilon_0(\gamma t^2 + M_1 t) + P_1. \quad (4.134)$$

#### 4.3.3.3 $L_{3,3} = \{T + \varepsilon_1 W\}$ alt cebiri

Grup-değişmez çözüm

$$\psi(x, t) = M(x) \exp \left[ i(\varepsilon_1 t + P(x)) \right] \quad (4.135)$$

yapısındadır.  $M, P$  fonksiyonları

$$\varepsilon_0 M^3 - 2f_2 M' P' - (\varepsilon_1 + P'^2 + f_2 P'')M + M'' = 0, \quad (4.136a)$$

$$\gamma M^3 + 2M' P' + (-f_2 P'^2 + P'')M + f_2 M'' = 0 \quad (4.136b)$$

denklemlerinden çözülecektir. Denklemler kuplajın kaldırılabilmesi için

$$\frac{\varepsilon_0 + \gamma f_2}{1 + f_2^2} M^3 - M P'^2 + M'' = 0, \quad (4.137a)$$

$$(\gamma - \varepsilon_0 f_2) M^4 + \varepsilon_1 f_2 M^2 + (1 + f_2^2)(M^2 P')' = 0 \quad (4.137b)$$

şeklinde düzenlenirse,  $f_2 \neq 0$  olduğundan (4.137b) denkleminin ilk integralinin  $\gamma = \varepsilon_0 f_2$  durumunda bulunabileceği görülür:  $Y(x)$  fonksiyonu

$$(M^2 P')' = -\frac{\varepsilon_1 f_2}{1 + f_2^2} M^2 = Y' \quad (4.138)$$

şeklinde tanımlansın. Buradan elde edilen

$$M^2 = -\frac{1 + f_2^2}{\varepsilon_1 f_2} Y', \quad P' = -\frac{\varepsilon_1 f_2}{1 + f_2^2} \frac{Y + C}{Y'} \quad (4.139)$$

eşitlikleri (4.137a) denkleminde yerine yazılırsa  $Y(x)$  fonksiyonu için

$$Y' Y''' - \frac{1}{2} Y''^2 - \frac{2\varepsilon_0(1 + f_2^2)}{\varepsilon_1 f_2} Y'^3 - \frac{2f_2^2}{1 + f_2^2} (Y + C)^2 = 0 \quad (4.140)$$

denkleminde ulaşılır.

#### 4.3.3.4 $L_{3,4} = \{P + \varepsilon_1 W\}$ alt cebiri

Grup-değişmez çözüm

$$\psi(x, t) = M(t) \exp \left[ i(\varepsilon_1 x + P(t)) \right] \quad (4.141)$$

yapısındadır ve çözümün bu şekli için (3.1)'den elde edilen

$$1 - \varepsilon_0 M^2 + P' = 0, \quad \gamma M^3 - f_2 M + M' = 0 \quad (4.142)$$

denklemler sisteminin çözümünden

$$M(t) = \left( M_1 \exp(-2f_2 t) + \frac{\gamma}{f_2} \right)^{-1/2}, \quad (4.143a)$$

$$P(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{2\gamma} \ln \left( M_1 + \frac{\gamma}{f_2} \exp(2f_2 t) \right) - t + P_1, & \gamma \neq 0, \\ \frac{\varepsilon_0}{2f_2 M_1} \exp(2f_2 t) - t + P_1, & \gamma = 0 \end{cases} \quad (4.143b)$$

elde edilir.

#### 4.3.3.5 $L_{3,5} = \{D + aW\}$ alt cebiri

$L_{3,5}$  cebiri için grup-değişmez çözüm

$$\psi(x, t) = \frac{1}{x} M(\xi) \exp \left[ i \left( 2a \ln x + P(\xi) \right) \right], \quad \xi = \frac{x^2}{t} \quad (4.144)$$

şeklinde olacaktır. Burada  $M, P$  fonksiyonları

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 M^3 + (2 + 6af_2 - 4a^2)M - 2(1 + 4af_2)\xi M' + (\xi^2 + 2(f_2 - 4a)\xi)MP' \\ - 8f_2\xi^2 M'P' - 4\xi^2 MP'^2 + 4\xi^2 M'' - 4f_2\xi^2 MP'' = 0, \end{aligned} \quad (4.145a)$$

$$\begin{aligned} \gamma M^3 + (2f_2 - 6a - 4a^2 f_2)M + (8a - 2f_2 - \xi)\xi M' - 2(1 + 4af_2)\xi MP' \\ + 8\xi^2 M'P' - 4f_2\xi^2 MP'^2 + 4f_2\xi^2 M'' + 4\xi^2 MP'' = 0 \end{aligned} \quad (4.145b)$$

denklemlerini sağlar. Bu denklemleri

$$\begin{aligned} (\varepsilon_0 + \gamma f_2)M^3 + 2(1 - 2a^2)(1 + f_2^2)M - (2(1 + f_2^2)\xi + f_2\xi^2)M' \\ + (\xi^2 - 8a(1 + f_2^2)\xi)MP' + 4(1 + f_2^2)\xi^2(M'' - MP'^2) = 0, \end{aligned} \quad (4.146a)$$

$$\begin{aligned} (\gamma - \varepsilon_0 f_2)M^4 - 6a(1 + f_2^2)M^2 + (4a(1 + f_2^2)\xi - \frac{\xi^2}{2})(M^2)' \\ - (2(1 + f_2^2)\xi + f_2\xi^2)M^2P' + 4(1 + f_2^2)\xi^2(M^2P')' = 0 \end{aligned} \quad (4.146b)$$

şeklinde, ikinci mertebeden türevli terim sadece  $P$  veya  $M$  olacak şekilde düzenlemek mümkündür. Ancak yine de, bu denklemlerin kuplajının kaldırılması başırlanamamıştır.

#### 4.3.3.6 $L_{3,6} = T + \varepsilon_1 P + bW$ alt cebiri

Grup-değişmez çözüm

$$\psi(x, t) = M(\xi) \exp \left[ i(bt + P(\xi)) \right], \quad \xi = x - \varepsilon_1 t \quad (4.147)$$

şeklinde aranır ve  $M, P$  fonksiyonları

$$\begin{aligned} (\varepsilon_0 + \gamma f_2)M^3 - bM - \varepsilon_1 f_2 M' + \varepsilon_1 MP' - (1 + f_2^2)MP'^2 \\ + (1 + f_2^2)M'' = 0, \end{aligned} \quad (4.148a)$$

$$\begin{aligned} (\gamma - \varepsilon_0 f_2)M^4 + bf_2 M^2 - \frac{\varepsilon_1}{2}(M^2)' - \varepsilon_1 f_2 M^2 P' \\ + (1 + f_2^2)(M^2 P')' = 0 \end{aligned} \quad (4.148b)$$

sistemini sağlar. (4.148b) denklemini  $M^2 P'$  terimi dikkate alınarak düzenlenirse

$$(M^2 P')' - \frac{\varepsilon_1 f_2}{1 + f_2^2}(M^2 P') = \frac{1}{1 + f_2^2} \left( \frac{\varepsilon_1}{2}(M^2)' - bf_2 M^2 + (\varepsilon_0 f_2 - \gamma)M^4 \right) \quad (4.149)$$

bulunur. Bu denklem  $\exp\left(\frac{-\varepsilon_1 f_2}{1+f_2^2} \xi\right)$  ile çarpılır ve  $Y(\xi)$  fonksiyonu

$$\left[ \exp\left(\frac{-\varepsilon_1 f_2}{1+f_2^2} \xi\right) M^2 P' \right]' = \frac{1}{1+f_2^2} \exp\left(\frac{-\varepsilon_1 f_2}{1+f_2^2} \xi\right) \times \left[ \frac{\varepsilon_1}{2} (M^2)' - b f_2 M^2 + (\varepsilon_0 f_2 - \gamma) M^4 \right] = Y' \quad (4.150)$$

şeklinde tanımlanırsa

$$M^2 P' = \exp\left(\frac{\varepsilon_1 f_2}{1+f_2^2} \xi\right) (Y + C) \quad (4.151)$$

eşitliğine ulaşılır. Diğer yandan,

$$(M^2)' - 2\varepsilon_1 b f_2 M^2 + 2\varepsilon_1 (\varepsilon_0 f_2 - \gamma) (M^2)^2 = 2\varepsilon_1 (1 + f_2^2) \exp\left(\frac{\varepsilon_1 f_2}{1+f_2^2} \xi\right) Y' \quad (4.152)$$

denkleminden  $M^2$  çözülmelidir.  $M^2$  terimine göre Riccati tipinde olan bu denklemin genel çözümü için bir özel çözümünün bilinmesine gerek vardır.  $M^2 = \frac{1}{2\varepsilon_1(\varepsilon_0 f_2 - \gamma)} \frac{U'}{U}$  dönüşümüyle bu denklemin mertebesi yükseltilerek doğrusallaştırılması da mümkündür:

$$U'' - 2\varepsilon_1 b f_2 U' + 4(\gamma - \varepsilon_0 f_2)(1 + f_2^2) \exp\left(\frac{\varepsilon_1 f_2}{1+f_2^2} \xi\right) Y' U = 0. \quad (4.153)$$

Ancak bu denklem de çözüm için ilerleme şansı sunmamaktadır.

(4.152) denkleminde doğrusal olmayan terim  $\gamma = \varepsilon_0 f_2$  seçimiyle ortadan kaldırılırsa çözüm kolaylaşacaktır. (4.152) denklemi

$$\left( \exp\left(-2\varepsilon_1 b f_2 \xi\right) M^2 \right)' = 2\varepsilon_1 (1 + f_2^2) \exp\left(\varepsilon_1 f_2 \left(\frac{1}{1+f_2^2} - 2b\right) \xi\right) Y' \quad (4.154)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $b = \frac{1}{2(1+f_2^2)}$  seçilirse

$$M^2(\xi) = 2\varepsilon_1 (1 + f_2^2) \exp\left(\frac{\varepsilon_1 f_2}{1+f_2^2} \xi\right) (Y(\xi) + C) \quad (4.155)$$

bulunur. Bu ifade (4.151) ile karşılaştırılırsa

$$P' = \frac{1}{2\varepsilon_1 (1 + f_2^2)} \quad (4.156)$$

olması gerektiği görülür ve (4.148a) denklemi

$$M'' = \frac{\varepsilon_1 f_2}{1+f_2^2} M' + \frac{1}{4(1+f_2^2)^2} M - \varepsilon_0 M^3 \quad (4.157)$$

şeklini alır.

Farklı bir yoldan (4.157) denkleminin daha genel bir halini elde etmek de mümkündür. Şöyle ki,  $\gamma = \varepsilon_0 f_2$  için (4.148b) denklemi

$$\left( (1 + f_2^2) M^2 P' - \frac{\varepsilon_1}{2} M^2 \right)' = \varepsilon_1 f_2 M^2 P' - b f_2 M^2 \quad (4.158)$$

şeklinde düzenlensin.  $U(\xi) = (1 + f_2^2) M^2 P' - \frac{\varepsilon_1}{2} M^2$  ve  $\lambda = \frac{\varepsilon_1 f_2}{1 + f_2^2}$  olmak üzere,  $b = \frac{1}{2(1 + f_2^2)}$  için

$$U' = \lambda U \quad (4.159)$$

denklemine ulaşılır.  $U(\xi) = \lambda_0 \exp(\lambda \xi)$  olarak çözülür. Öyleyse bu denklemden,  $\lambda_0$  keyfi bir sabit olmak üzere  $P'$  şöyle bulunabilir:

$$P' = \frac{1}{2\varepsilon_1(1 + f_2^2)} + \frac{\lambda_0 \exp(\lambda \xi)}{1 + f_2^2} M^{-2}. \quad (4.160)$$

Bu ifade (4.148a)'da yazıldığında ise  $M$  için şu denklem elde edilir:

$$M'' = \frac{\varepsilon_1 f_2}{1 + f_2^2} M' + \frac{1}{4(1 + f_2^2)^2} M - \varepsilon_0 M^3 + \frac{\lambda_0^2 \exp(2\lambda \xi)}{(1 + f_2^2)^2} M^{-3}. \quad (4.161)$$

#### 4.3.4 $L_4 = \{P, B, D_2, W\}$ çözülebilir cebiri

Bu çözülebilir nilpotent olmayan cebir, üç boyutlu nilpotent  $\{W, P, B\}$  Lie cebirinin genişlemesidir.  $D_2$  elemanının bu ideal üzerindeki etkisi aşağıda verilen  $M$  matrisi ile temsil edilebilir

$$\begin{pmatrix} [W, D_2] \\ [P, D_2] \\ [B, D_2] \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} W \\ P \\ B \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}. \quad (4.162)$$

Cebir ayrıştırılabilir yapıda değildir ve kanonik denklemi

$$i\psi_t + \psi_{xx} + (\varepsilon_0 + i\gamma)|\psi|^2\psi + i\frac{h_2}{t}\psi = 0 \quad (4.163)$$

şeklindedir, burada yine  $\varepsilon_0 = \mp 1$ ,  $h_2 \neq 0$  ve  $\gamma$  reel sabitlerdir.

##### 4.3.4.1 $L_{4,1} = \{P\}$ alt cebiri

Grup-değişmez çözüm

$$\psi(x, t) = M(t) \exp(iP(t)) \quad (4.164)$$

yapısındadır.

$$\varepsilon_0 M^2 - P' = 0, \quad M' + \frac{h_2}{t} M + \gamma M^3 = 0 \quad (4.165)$$

indirgenmiş denklem sisteminin çözümü,  $h_2 = 1/2$  için

$$M(t) = (2\gamma t \ln t + M_1 t)^{-1/2} \quad (4.166a)$$

$$P(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{2\gamma} \ln(2\gamma t \ln t + M_1) + P_1, & \gamma \neq 0, \\ \frac{\varepsilon_0}{M_1} \ln t + P_1, & \gamma = 0 \end{cases} \quad (4.166b)$$

ve  $h_2 \neq 1/2$  için

$$M(t) = \left( \frac{2\gamma}{1-2h_2} t + M_1 t^{2h_2} \right)^{-1/2}, \quad (4.167a)$$

$$P(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{2\gamma} \ln(M_1 + \frac{2\gamma}{1-2h_2} t^{1-2h_2}) + P_1, & \gamma \neq 0, \\ \frac{\varepsilon_0}{M_1(1-2h_2)} t^{1-2h_2} + P_1, & \gamma = 0 \end{cases} \quad (4.167b)$$

şeklinde olacaktır.

#### 4.3.4.2 $L_{4,2} = \{B\}$ alt cebiri

Grup-değişmez çözüm

$$\psi(x, t) = M(t) \exp \left[ i \left( \frac{x^2}{4t} + P(t) \right) \right] \quad (4.168)$$

yapısındadır. İndirgenmiş denklem sistemi

$$\varepsilon_0 M^2 - P' = 0, \quad M' + \frac{1+2h_2}{2t} M + \gamma M^3 = 0, \quad (4.169)$$

çözümü ise

$$M(t) = \left( M_1 t^{1+2h_2} - \frac{\gamma}{h_2} t \right)^{-1/2}, \quad (4.170a)$$

$$P(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{2\gamma} \ln(M_1 - \frac{\gamma}{h_2} t^{-2h_2}) + P_1, & \gamma \neq 0, \\ -\frac{\varepsilon_0}{2h_2 M_1} t^{-2h_2} + P_1, & \gamma = 0 \end{cases} \quad (4.170b)$$

olarak bulunur.

#### 4.3.4.3 $L_{4,3} = \{P + \varepsilon_1 B\}$ alt cebiri

$L_{4,3}$  cebiri altında değişmez kalan çözüm

$$\psi(x, t) = M(t) \exp \left[ i \left( \frac{\varepsilon_1 x^2}{4(1 + \varepsilon_1 t)} + P(t) \right) \right] \quad (4.171)$$

şeklindedir. İndirgenmiş denklem sistemi

$$\varepsilon_0 M^2 - P' = 0, \quad (4.172a)$$

$$M' + \left( \frac{h_2}{t} + \frac{\varepsilon_1}{2(1 + \varepsilon_1 t)} \right) M + \gamma M^3 = 0 \quad (4.172b)$$

olarak bulunmaktadır.  $h_2 = 1/2$  olması durumunda çözüm

$$M(t) = \left( t(1 + \varepsilon_1 t) \left( 2\gamma \ln\left(\frac{t}{1 + \varepsilon_1 t}\right) + M_1 \right) \right)^{-1/2}, \quad (4.173a)$$

$$P(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{2\gamma} \ln\left( 2\gamma \ln\left(\frac{t}{1 + \varepsilon_1 t}\right) + M_1 \right) + P_1, & \gamma \neq 0, \\ \frac{\varepsilon_0}{M_1} \ln\left(\frac{t}{1 + \varepsilon_1 t}\right) + P_1, & \gamma = 0 \end{cases} \quad (4.173b)$$

ve  $h_2 \neq 1/2$  durumunda çözüm

$$M(t) = \left( M_1 t^{2h_2} (1 + \varepsilon_1 t) + \frac{2\gamma}{1 - 2h_2} t(1 + \varepsilon_1 t) {}_2F_1(1 - 2h_2, 1, 2 - 2h_2; -\varepsilon_1 t) \right)^{-1/2},$$

$$P(t) = \int \varepsilon_0 M^2 dt \quad (4.174)$$

şeklinde  ${}_2F_1(a, b, c; t)$  Gauss hipergeometrik fonksiyonu türünden bulunmaktadır.  $2h_2$ 'nin tamsayı değerleri için hipergeometrik fonksiyon elementer fonksiyonlar türünden ifade edilebilmektedir.

#### 4.3.4.4 $L_{4.4} = \{D_2 + aW\}$ alt cebiri

Grup-değişmez çözüm

$$\psi(x, t) = \frac{1}{x} M(\xi) \exp \left[ i(2a \ln x + P(\xi)) \right], \quad \xi = \frac{x^2}{t} \quad (4.175)$$

şeklindedir ve  $M, P$  fonksiyonları

$$\varepsilon_0 M^3 + 2(1 - 2a^2)M - 2\xi M' + (\xi^2 - 8a\xi)MP' - 4\xi^2 MP'^2 + 4\xi^2 M'' = 0, \quad (4.176a)$$

$$\gamma M^4 + (h_2 \xi - 6a)M^2 + \left(4a\xi - \frac{\xi^2}{2}\right)(M^2)' - 2\xi M^2 P' + 4\xi^2 (M^2 P')' = 0 \quad (4.176b)$$

denklemlerini sağlar.  $\gamma = 0$  için (4.176b) denkleminde  $Y(\xi)$  fonksiyonu

$$4\xi^2 (M^2 P')' - 2\xi M^2 P' = \left(\frac{\xi^2}{2} - 4a\xi\right)(M^2)' + (6a - h_2 \xi)M^2 = Y' \quad (4.177)$$

şeklinde tanımlansın. Bu eşitliklerden

$$M^2 P' = \frac{\xi^{1/2}}{4} \left( \int \xi^{-5/2} Y' d\xi + C \right) \quad (4.178)$$

ve  $h_2 = 1/4$  için,

$$M^2 = \frac{2\xi^{3/2}}{\xi - 8a} \left( \int \xi^{-5/2} Y' d\xi + C \right) \quad (4.179)$$

sonuçlarına varılır. Bu durum için (4.178) ve (4.179) denklemlerinden,

$$P(\xi) = \frac{\xi}{8} - a \ln \xi + P_1 \quad (4.180)$$

olması gerektiği görülür ve (4.176b) denklemi sağlanırken, (4.176a)  $M$  fonksiyonu için

$$M'' = \frac{1}{2\xi}M' - \left(\frac{1}{64} - \frac{a}{4\xi} + \frac{1}{2\xi^2}\right)M - \frac{\varepsilon_0}{4\xi^2}M^3 \quad (4.181)$$

koşulunu vermektedir.

#### 4.3.5 $L_5 = \{P, B, C_2, W\}$ çözülebilir cebiri

$L_5$  cebiri,  $\{W, P, B\}$  nilpotent cebirinin, çözülebilir nilpotent olmayan ve ayrıştırılamayan dört boyutlu bir cebire genişletilmesinden elde edilmiş kanonik bir sınıftır.  $C_2$  elemanı  $\{W, P, B\}$  ideali üzerinde  $M$  matrisi ile

$$\begin{pmatrix} [W, C_2] \\ [P, C_2] \\ [B, C_2] \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} W \\ P \\ B \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.182)$$

şeklinde etkir. İncelenecek son dört boyutlu simetri cebirine sahip denklem sınıfı,  $\varepsilon_0 = \mp 1$ ,  $h_1, h_2$  ve  $\gamma$  reel sabitler olmak üzere

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \frac{\varepsilon_0 + i\gamma}{1+t^2} |\psi|^2 \psi + \frac{2h_1 + i(2h_2 - t)}{2(1+t^2)} \psi = 0 \quad (4.183)$$

şeklinde dir.

##### 4.3.5.1 $L_{5,1} = \{B\}$ alt cebiri

Grup-değişmez çözüm

$$\psi(x, t) = M(t) \exp \left[ i \left( \frac{x^2}{4t} + P(t) \right) \right] \quad (4.184)$$

yapısında olup  $M, P$  fonksiyonları

$$\frac{\varepsilon_0}{1+t^2} M^2 + \frac{h_1}{1+t^2} - P' = 0, \quad (4.185a)$$

$$M' + \left( \frac{2h_2 - t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2t} \right) M + \frac{\gamma}{1+t^2} M^3 = 0 \quad (4.185b)$$

sisteminin çözümüdür. (4.185b) denkleminde  $M = W^{-1/2}$  dönüşümü yapılırsa

$$\left( \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} \exp(-2h_2 \arctan t) W \right)' = \frac{2\gamma}{t\sqrt{1+t^2}} \exp(-2h_2 \arctan t) \quad (4.186)$$

bulunur. Buradan  $M, P$  fonksiyonları

$$M(t) = \left( \frac{t \exp(2h_2 \arctan t)}{\sqrt{1+t^2}} \left( M_1 + 2\gamma \int \frac{\exp(-2h_2 \arctan t)}{t\sqrt{1+t^2}} dt \right) \right)^{-1/2} \quad (4.187a)$$

$$P(t) = \begin{cases} h_1 \arctan t + \frac{\varepsilon_0}{2\gamma} \ln \left( M_1 + 2\gamma \int \frac{\exp(-2h_2 \arctan t)}{t\sqrt{1+t^2}} dt \right) + P_1, & \gamma \neq 0 \\ h_1 \arctan t + \frac{\varepsilon_0}{M_1} \int \frac{\exp(-2h_2 \arctan t)}{t\sqrt{1+t^2}} dt + P_1, & \gamma = 0 \end{cases} \quad (4.187b)$$

olarak bulunmaktadır.  $M, P$  fonksiyonlarının içerdiği integraller  $t = \tan z$  dönüşümüyle hipergeometrik fonksiyon türünden çözülebilmektedir.

#### 4.3.5.2 $L_{5.2} = \{C_2 + aW\}$ alt cebiri

Grup-değişmez çözüm

$$\psi(x, t) = M(\xi) \exp \left[ i \left( a \arctan t + \frac{x^2 t}{4(1+t^2)} + P(\xi) \right) \right], \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{1+t^2}} \quad (4.188)$$

şeklindedir. İndirgenmiş denklem sistemi ise aşağıdaki gibidir

$$\varepsilon_0 M^3 + (h_1 - a - \frac{\xi^2}{4})M - MP'^2 + M'' = 0, \quad (4.189a)$$

$$\gamma M^4 + h_2 M^2 + (M^2 P')' = 0. \quad (4.189b)$$

$\gamma = 0, h_2 \neq 0$  olması durumunda

$$Y'Y''' - \frac{1}{2}Y''^2 - \frac{2\varepsilon_0}{h_2}Y'^3 + (2h_1 - 2a - \frac{\xi^2}{2})Y'^2 - 2h_2^2(Y+C)^2 = 0, \quad (4.190)$$

$$M = (-\frac{1}{h_2}Y')^{1/2}, \quad P' = -h_2 \frac{Y+C}{Y'} \quad (4.191)$$

şeklinde kuplajın kaldırılması mümkündür.  $\gamma = h_2 = 0$  durumunda ise

$$M'' = C^2 M^{-3} + \left( \frac{\xi^2}{4} + a - h_1 \right) M - \varepsilon_0 M^3, \quad (4.192a)$$

$$P' = CM^{-2} \quad (4.192b)$$

denklem sistemi elde edilir.

#### 4.4 İndirgenmiş Denklemlerin Analizi

Bir boyutlu cebirlerden elde edilen indirgenmiş denklemler Çizelge 4.3'te özetlenmiştir. Üçüncü mertebeden denklemlerden,  $Y'$  türevine göre polinom olanlar tabloda verilmiş,  $Y'^{1/2}$  terimini içerenler tabloya dahil edilmemiştir. Birinci mertebeden

**Çizelge 4.3:** İndirgenmiş denklemler

| Mertebe    | Denklem Numarası                                                      |
|------------|-----------------------------------------------------------------------|
| 1. mertebe | (4.103), (4.120), (4.133), (4.142), (4.165), (4.169), (4.172), (5.70) |
| 2. mertebe | (4.77), (4.90), (4.98), (4.131), (4.161), (4.181), (4.192)            |
| 3. mertebe | (4.69), (4.84), (4.95), (4.110), (4.117), (4.140), (4.190)            |

denklemlerin çözümleri, önceki bölümde denklemin hemen ardından yazılmıştı. Bu bölümde, ikinci ve üçüncü mertebeden denklemlerin çözümleri elde edilmeye çalışılacaktır.

#### 4.4.1 Üçüncü mertebe denklemler

Çizelge 4.3'te verilen 7 adet denklemden hiçbirisi Painlevé testini geçmemektedir. (4.110) ve (4.140) denklemleri bağımsız değişkeni içermediğinden,  $Y' = W(Y)$  dönüşümüyle mertebeleri indirilebilir. Elde edilen ikinci mertebe denklemler aşağıdaki gibidir:

(i) (4.110) denklemi için,  $\dot{W} = \frac{dW}{dY}$  olmak üzere,

$$\ddot{W} = -\frac{1}{2W}\dot{W}^2 + \frac{2\varepsilon_0}{h_2} + \frac{2a}{W} + \frac{2h_2^2(Y+C)^2}{W^3}. \quad (4.193)$$

(ii) (4.140) denklemi için:

$$\ddot{W} = -\frac{1}{2W}\dot{W}^2 + \frac{2\varepsilon_0(1+f_2^2)}{\varepsilon_1 f_2} + \frac{2f_2^2}{1+f_2^2} \frac{(Y+C)^2}{W^3}. \quad (4.194)$$

Bu denklemlere,  $I$  bir sabit olmak üzere

$$A(Y, W)\dot{W}^3 + B(Y, W)\dot{W}^2 + F(Y, W)\dot{W} + G(Y, W) = I \quad (4.195)$$

şeklinde bir ilk integral arandığında mümkün olmadığı görülmektedir. (4.110) ve (4.140) dahil tüm üçüncü mertebe denklemler için,  $Y = Y(\xi)$  ve  $I$  bir sabit olmak üzere

$$A(\xi, Y, Y')Y''^2 + B(\xi, Y, Y')Y'' + F(\xi, Y, Y') = I \quad (4.196)$$

yapısında bir ilk integral arandığında, bunun yalnızca (4.95) denklemi için mümkün olduğu görülür. Bulunan ilk integral,  $c = 0$ ,  $h_1 = (5 + 81h_2^2)/36$  koşuluyla

$$\begin{aligned} Y''^2 + \frac{10}{3x}Y'Y'' - \frac{2\varepsilon_0 x}{h_2}Y'^3 + \frac{25 + 81h_2^2}{9x^2}Y'^2 + \frac{12h_2^2}{x^3}YY' \\ + \left( \frac{12h_2^2 C}{x^3} - \frac{I}{x^{7/3}} \right)Y' + \frac{4h_2^2}{x^4}(Y+C)^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.197)$$

şeklindedir. İntegrasyona devam etmek maksadıyla bu denklem için de

$$A(x, Y)Y'^3 + B(x, Y)Y'^2 + F(x, Y)Y' + G(x, Y) = I \quad (4.198)$$

şeklinde bir ilk integral denenmiş ancak başarılı olmamıştır.

#### 4.4.2 İkinci mertebe denklemler

İndirgeme sonucu elde edilen 7 adet ikinci mertebe denklemden (4.98) denklemi  $h_1 = 5/36$  değeri için, (4.131) ise koşulsuz olarak Painlevé testini geçmektedir. Diğer 5 denklem için,  $M = M(\xi)$  ve  $I$  bir sabit olmak üzere

$$A(\xi, M)M'^3 + B(\xi, M)M'^2 + F(\xi, M)M' + G(\xi, M) = I \quad (4.199)$$

şeklinde bir ilk integral arandığında, hiçbirisi için böyle bir integralin olmadığı görülür.

(4.161) denkleminde  $\lambda_0 = 0$  seçilirse denklem bağımsız değişkeni içermez ve mertebesi düşürülebilir. Gerçekten,  $a_1 = \frac{\varepsilon_1 f_2}{1+f_2^2}$ ,  $a_2 = \frac{1}{4(1+f_2^2)}$  olmak üzere  $M' = a_1 W(M)$  dönüşümü yapıldığında denklem ikinci türden Abel denklemine indirgenmektedir:

$$W(\dot{W} - 1) = \frac{a_2}{a_1^2} M - \frac{\varepsilon_0}{a_1} M^3. \quad (4.200)$$

Bu denkleme,  $n = \frac{\varepsilon_2 |f_2|}{\sqrt{1+2f_2^2}} - 3$ ,  $\varepsilon_2 = \mp 1$ ,  $w = w(z)$  olmak üzere

$$M = z^{\frac{n+2}{2}} w, \quad W = \frac{1}{n+3} z^{\frac{n+2}{2}} (zw' + \frac{n+2}{2} w) \quad (4.201)$$

dönüşümü yapıldığında,  $A = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 f_2 (1+f_2^2)}{1+2f_2^2}$  olmak üzere

$$w'' = Az^n w^3 \quad (4.202)$$

şeklinde Emden-Fowler tipinde bir denklem elde edilmektedir [68]. Ancak bu denklemin hiç bir tam çözümü yoktur.

##### 4.4.2.1 (4.98) denkleminin çözümü

Bu denklemin analizi [17]'de verilen hesap yöntemleriyle yapılabilir.  $M = \sqrt{H(x)}$ ,  $H > 0$  dönüşümü ile (4.98),

$$H'' = \frac{1}{2H} H'^2 + 2(c - \frac{h_1}{x^2})H - \frac{2\varepsilon_0}{x} H^2 + \frac{2C^2}{H} \quad (4.203)$$

denkleme dönüşür. Bu denklemi, Painlevé sınıflandırmasındaki 50 denklemden birine dönüştürebilmek için,  $H(x) = \lambda(x)W(\eta(x))$  dönüşümü yapılsa,

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W}\dot{W}^2 - \frac{1}{\dot{\eta}}\left(\frac{\ddot{\eta}}{\dot{\eta}} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}\right)\dot{W} + \frac{1}{\dot{\eta}^2}\left(2\left(c - \frac{h_1}{x^2}\right) + \frac{\dot{\lambda}^2}{2\lambda^2} - \frac{\ddot{\lambda}}{\lambda}\right)W - \frac{2\varepsilon_0\lambda}{\dot{\eta}^2x}W^2 + \frac{2C^2}{\lambda^2\dot{\eta}^2}W^{-1} \quad (4.204)$$

elde edilir.

(a)  $C \neq 0$  durumu. Dönüşüm fonksiyonları ve sabitler

$$\eta = \eta_0 x^{2/3}, \quad \lambda = \lambda_0 x^{1/3}, \quad c < 0, \quad \eta_0 = -\left(\frac{9c}{2}\right)^{1/3}, \quad h_1 = \frac{5}{36} \quad (4.205)$$

şeklinde seçildiğinde, PXXXIV denklemi ile bir sabit farkı ile aynı olan

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W}\dot{W}^2 + 4\alpha W^2 - \eta W + 2\delta^2 W^{-1} \quad (4.206)$$

denkleme ulaşılır. Burada  $\alpha = -\frac{\varepsilon_0\lambda_0}{4}\left(\frac{9}{2c^2}\right)^{1/3}$  ve  $\delta = \frac{3C}{2\lambda_0}\left(\frac{-2}{9c}\right)^{1/6}$  olup  $\lambda_0$  keyfidir. (4.206) denkleminde

$$2\alpha W = \dot{V} + V^2 + \frac{\eta}{2} \quad (4.207)$$

yazılırsa  $V$ 'nin

$$\ddot{V} = 2V^3 + \eta V + k, \quad k = -\frac{1}{2} \pm 4\alpha\delta i \quad (4.208)$$

denklemini sağladığı görülür. (4.208), ikinci Painlevé transandanı tarafından sağlanan denklemdir ve çözümü  $V = P_{II}(\eta_0 x^{2/3})$  şeklinde gösterilir.  $W$  karmaşık sayı değerli olduğundan,  $\lambda_0, \lambda_0 W$  çarpımını reel yapacak şekilde seçilmesi gereken bir karmaşık sabit sayıdır.

(b)  $C = 0$  durumu. Dönüşüm fonksiyonları ve sabitler

$$\eta = \eta_0 x^{2/3}, \quad \lambda = \lambda_0 x^{1/3}, \quad \eta_0 = \left(\frac{9c}{4}\right)^{1/3}, \quad \lambda_0 = -\varepsilon_0 \left(\frac{32c^2}{9}\right)^{1/3}, \quad h_1 = \frac{5}{36} \quad (4.209)$$

seçildiğinde PXX denkleme ulaşılır:

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W}\dot{W}^2 + 4W^2 + 2\eta W. \quad (4.210)$$

$U^2 = W$  dönüşümüyle yine Painlevé transandanı  $P_{II}$  elde edilir:

$$\ddot{U} = 2U^3 + \eta U. \quad (4.211)$$

Sonuç olarak, çözüm aşağıdaki şekildedir:

$$\psi = \lambda_0^{1/2} x^{1/6} P_{II}(\eta_0 x^{2/3}) \exp(i(ct + P_0)). \quad (4.212)$$

#### 4.4.2.2 (4.131) denkleminin çözümü

Bu denklemin, ikinci mertebeden denklemlerin Painlevé sınıflandırmasındaki PXVIII ve PXXXIII denklemlerine dönüşümü, ilk integralleri ve elementer ve eliptik fonksiyonlar türünden çeşitli durumlar için çözümleri [17]'te verilmiştir.  $M = \sqrt{H(x)}$  dönüşümü ile (4.131)

$$H'' = \frac{1}{2H} H'^2 - 2\varepsilon_0 H^2 + \frac{2C^2}{H} \quad (4.213)$$

şeklinde yazıldıktan sonra  $H(x) = \lambda(x)W(\eta(x))$  dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} \ddot{W} = & \frac{1}{2W} \dot{W}^2 - \frac{1}{\dot{\eta}} \left( \frac{\ddot{\eta}}{\dot{\eta}} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right) \dot{W} + \frac{1}{\dot{\eta}^2} \left( \frac{\dot{\lambda}^2}{2\lambda^2} - \frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} \right) W \\ & - \frac{2\varepsilon_0 \lambda}{\dot{\eta}^2} W^2 + \frac{2C^2}{\lambda^2 \dot{\eta}^2} W^{-1} \end{aligned} \quad (4.214)$$

bulunur. Bu denklem  $\lambda$  ve  $\eta$ 'nin uygun bir seçimiyle birinci mertebeden türevi içermeyen ve ikinci dereceden terimin katsayısı sabit olan standart denkleme dönüştürülebilir.  $\lambda$  ve  $\eta$ 'nin seçimi ve (4.214)'e göre denklemin dönüşümü

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0, \quad \eta = \eta_0 x, \\ \ddot{W} &= \frac{1}{2W} \dot{W}^2 - \left( \frac{2\varepsilon_0 \lambda_0}{\eta_0^2} \right) W^2 + 2 \left( \frac{C}{\lambda_0 \eta_0} \right)^2 W^{-1} \end{aligned} \quad (4.215)$$

şeklinde ve  $\eta_0^2 = -\varepsilon_0 \lambda_0 / 2$  seçilirse, PXXXIII deklemiyle sabit farkı ile aynı olan

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W} \dot{W}^2 + 4W^2 + 2\delta^2 W^{-1} \quad (4.216)$$

denklemini haline gelir. Burada  $\delta^2 = -\frac{2C^2}{\varepsilon_0 \lambda_0^3}$  olarak verilmektedir.

(a)  $C \neq 0$  durumu. (4.216) bir kez integre edilirse

$$\dot{W}^2 = 4(W^3 + C_0 W - \delta^2), \quad C_0 = \text{sabit} \quad (4.217)$$

denklemini elde edilir ki, bu denklemin çözümü Weierstrass  $\wp(\xi)$  fonksiyonu ya da Jacobi eliptik fonksiyonları türünden yazılabilir.  $\lambda W$ 'nin pozitif olması gerekmektedir.  $W_1, W_2, W_3$ ; (4.217) denkleminin sağ tarafının kökleri olmak üzere,

$$P(W) = 4(W^3 + C_0 W - \delta^2) = 4(W - W_1)(W - W_2)(W - W_3) \quad (4.218)$$

yazılırsa,  $P(W)$ 'nin köklerine ve işaretine göre (4.217) denkleminin çözümleri [17]'de detaylı olarak incelenmiştir.

#### 4.4.3 İndirgenmiş denklemlerin çözümlerinin bazı alt sınıfları

İndirgeme sonucu elde edilen denklem sistemlerinin çözümünde izlenen yol, bilinmeyen fonksiyonlar olan  $M$  ve  $P$ 'den  $P$  fonksiyonunun denklemlerden birinden çözülerek diğerinde yazılması ve böylelikle kuplajın kaldırılarak  $M$  için bir denklemin elde edilmesi olmuştur. Ancak bu, sabitlerin bazı özel durumları için yapılabildi. Sabitler üzerine bir koşul getirmeden, ancak bu kez  $P$  fonksiyonunun özel durumları için denklemlerin bazı aşikar olmayan çözümleri üretilebilir. Örneğin  $L_{1,1}$  cebirine ait indirgenmiş denklemler olan (4.63) sisteminde  $P(\xi)$  fonksiyonu verilen bir fonksiyon olarak ele alınırsa, (4.63b) denkleminde kübik terim çekilerek (4.63a)'da yazılabilir ve  $M(\xi)$  için, ikinci mertebeden değişken katsayılı doğrusal bir denklem elde edilir:

$$M'' - \left(\frac{2\varepsilon_0}{\gamma}P'\right)M' + \left(\left(\frac{3}{16} + \frac{h_1}{4} - \frac{\varepsilon_0 h_2}{4\gamma}\right)\frac{1}{\xi^2} - \frac{a}{\xi} - \frac{1}{16} - P'^2 - \frac{\varepsilon_0}{\gamma}P''\right)M = 0. \quad (4.219)$$

Bu denklemin çözümü,  $P_0$  bir sabit olmak üzere  $P' = P_0$ ,  $P'' = P_0$ ,  $P' = \frac{P_0}{\xi}$  gibi durumlar için incelendiğinde  $\xi = 0$  bir düzgün tekil nokta olur ve özel fonksiyonlar türünden ilginç seri çözümleri elde edilebilir. İndirgenmiş denklem sistemi ikinci mertebeden olan tüm cebirler için (4.219) tipinde bir denklem elde etmek mümkün olmaktadır.

$$M'' + A_0(\xi)M' + A_1(\xi)M = 0 \quad (4.220)$$

yapısında olan bu denklemler için  $A_0, A_1$  katsayı fonksiyonları Çizelge 4.4'te özetlenmiştir.

Bu tipte denklemlerden elde edilen çözümlere örnek olarak  $L_{3,1}$  cebiri için elde edilen denklem, yani

$$M'' - \frac{2a_1}{a_2}P'M' - \left(P'^2 + \frac{a_1}{a_2}P''\right)M = 0 \quad (4.221)$$

incelenecektir. Öncelikle  $P'(x) = \frac{P_0}{x}$  durumunu dikkate alalım. Bu durumda,

$$x^2M'' - \frac{2a_1P_0}{a_2}xM' + P_0\left(\frac{a_1}{a_2} - P_0\right)M = 0 \quad (4.222)$$

şeklinde Euler diferansiyel denklemi elde edilir ve  $\psi$  çözümü de

$$\psi(x, t) = (M_1 x^{r_1} + M_2 x^{r_2}) \exp(i(P_0 \ln x + P_1)) \quad (4.223)$$

**Çizelge 4.4:** (4.220) denklemi için katsayılar

| Cebir                          | Sabitler: $a_1 = \varepsilon_0 + \gamma f_2$ , $a_2 = \gamma - \varepsilon_0 f_2$ , $b_1 = 1 + f_2^2$                                                                                                                                                                           |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $L_{1.1}$                      | $A_0 - \frac{2\varepsilon_0}{\gamma} P'$                                                                                                                                                                                                                                        |
| $\xi = \frac{x^2}{1+t^2}$      | $A_1 \left( \left( \frac{3}{16} + \frac{h_1}{4} - \frac{\varepsilon_0 h_2}{4\gamma} \right) \frac{1}{\xi^2} - \frac{a}{\xi} - \frac{1}{16} - P'^2 - \frac{\varepsilon_0}{\gamma} P'' \right)$                                                                                   |
| $L_{1.2}$                      | $A_0 \frac{\varepsilon_0}{4\gamma} - \frac{\varepsilon_0 b}{\gamma \xi} - \frac{2\varepsilon_0}{\gamma} P'$                                                                                                                                                                     |
| $\xi = \frac{x^2}{t}$          | $A_1 \left( \left( \frac{3}{16} - \frac{b^2}{4} + \frac{\varepsilon_0 b}{2\gamma} + \frac{h_1}{4} - \frac{\varepsilon_0 h_2}{4\gamma} \right) \frac{1}{\xi^2} - \frac{b}{\xi} P' + \frac{P'}{4} - P'^2 - \frac{\varepsilon_0}{\gamma} P'' \right)$                              |
| $L_{1.3}$                      | $A_0 - \frac{2\varepsilon_0}{\gamma} P'$                                                                                                                                                                                                                                        |
| $\xi = x$                      | $A_1 \left( \left( h_1 - \frac{\varepsilon_0 h_2}{\gamma} \right) \frac{1}{\xi^2} - c - P'^2 - \frac{\varepsilon_0}{\gamma} P'' \right)$                                                                                                                                        |
| $L_{2.2}$                      | $A_0 - \frac{2\varepsilon_0}{\gamma} P'$                                                                                                                                                                                                                                        |
| $\xi = x$                      | $A_1 - \left( a + \frac{\varepsilon_0 h_2}{\gamma} + P'^2 + \frac{\varepsilon_0}{\gamma} P'' \right)$                                                                                                                                                                           |
| $L_{2.3}$                      | $A_0 - \frac{2\varepsilon_0}{\gamma} P'$                                                                                                                                                                                                                                        |
| $\xi = bx - \frac{t^2}{2}$     | $A_1 - \left( \frac{\xi}{2b^4} + \frac{\varepsilon_0 h_2}{\gamma b^2} + P'^2 + \frac{\varepsilon_0}{\gamma} P'' \right)$                                                                                                                                                        |
| $L_{3.1}$                      | $A_0 - \frac{2a_1}{a_2} P'$                                                                                                                                                                                                                                                     |
| $\xi = x$                      | $A_1 - \left( P'^2 + \frac{a_1}{a_2} P'' \right)$                                                                                                                                                                                                                               |
| $L_{3.3}$                      | $A_0 - \frac{2a_1}{a_2} P'$                                                                                                                                                                                                                                                     |
| $\xi = x$                      | $A_1 - \left( P'^2 + \frac{a_1}{a_2} P'' + \frac{\varepsilon_1 a_1 f_2}{b_1 a_2} \right)$                                                                                                                                                                                       |
| $L_{3.5}$                      | $A_0 \frac{a_1}{4a_2 b_1} - \frac{f_2}{4b_1} - \left( \frac{1}{2} + \frac{2aa_1}{a_2} \right) \frac{1}{\xi} - \frac{2a_1}{a_2} P'$                                                                                                                                              |
| $\xi = \frac{x^2}{t}$          | $A_1 \left( \left( \frac{1}{2} - a^2 + \frac{3aa_1}{2a_2} \right) \frac{1}{\xi^2} + \left( \frac{a_1}{2a_2} - 2a \right) \frac{P'}{\xi} + \left( 1 + \frac{a_1 f_2}{a_2} \right) \frac{P'}{4b_1} - \left( 1 + \frac{a_1}{a_2} \right) P'' \right)$                              |
| $L_{3.6}$                      | $A_0 \frac{\varepsilon_1 a_1}{a_2} - \varepsilon_1 f_2 - \frac{2a_1 b_1}{a_2} P'$                                                                                                                                                                                               |
| $\xi = x - \varepsilon_1 t$    | $A_1 \left( \left( 1 + \frac{a_1 f_2}{a_2} \right) \varepsilon_1 P' - \left( 1 + \frac{a_1 f_2}{a_2} \right) b - b_1 P'^2 - \frac{a_1 b_1}{a_2} P'' \right)$                                                                                                                    |
| $L_{4.4}$                      | $A_0 \frac{\varepsilon_0}{4\gamma} - \left( \frac{1}{2} + \frac{2\varepsilon_0 a}{\gamma} \right) \frac{1}{\xi} - \frac{2\varepsilon_0}{\gamma} P'$                                                                                                                             |
| $\xi = \frac{x^2}{t}$          | $A_1 \left( \left( \frac{1}{2} - a^2 + \frac{3\varepsilon_0 a}{2\gamma} \right) \frac{1}{\xi^2} - \frac{\varepsilon_0 h_2}{4\gamma \xi} + \left( \frac{1}{4} - \frac{2a}{\xi} + \frac{\varepsilon_0}{2\gamma \xi} \right) P' - P'^2 - \frac{\varepsilon_0}{\gamma} P'' \right)$ |
| $L_{5.3}$                      | $A_0 - \frac{2\varepsilon_0}{\gamma} P'$                                                                                                                                                                                                                                        |
| $\xi = \frac{x}{\sqrt{1+t^2}}$ | $A_1 \left( h_1 - \frac{\varepsilon_0 h_2}{\gamma} - a - \frac{\xi^2}{4} - P'^2 - \frac{\varepsilon_0}{\gamma} P'' \right)$                                                                                                                                                     |

şeklinde yazılabilir.

(4.221) denkleminin çözümünü, bahsedildiği gibi özel fonksiyonlar türünden de elde etmek mümkündür. (4.220) denkleminde  $M(x) = \sigma(x)y(x)$  şeklinde bir dönüşüm yapılır ve  $y(x)$  fonksiyonu yeni bağımlı değişken olarak seçilirse,

$$\sigma y'' + (2\sigma' + A_0 \sigma) y' + (\sigma'' + A_0 \sigma' + A_1 \sigma) y = 0 \quad (4.224)$$

denklemini elde edilir. Burada  $2\sigma' + A_0 \sigma = 0$  seçilerek  $y'$  terimi yok edilebilir. Öyleyse,  $\sigma(x) = \sigma_0 e^{\frac{a_1}{a_2} P}$  için (4.221) denklemi,  $\lambda^2 = \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^2 + 1$  olmak üzere

$$y'' - \lambda^2 P'^2 y = 0 \quad (4.225)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemin çözümlerini, değiştirilmiş Bessel denklemi olarak adlandırılan ve çözümleri bilinen

$$t^2 \frac{d^2 v}{dt^2} + t \frac{dv}{dt} - (t^2 + v^2)v = 0 \quad (4.226)$$

denkleminin çözümleri türünden yazmak mümkündür. (4.226) denkleminde dönüştürülebilecek diferansiyel denklemler ailesini belirlemek üzere,  $t = p(x)$ ,  $v(t) = q(x)y(x)$  gibi bir dönüşüm düşünelim ve  $y(x)$  yeni bağımlı değişkenimiz olsun. Dikkat edilirse (4.226) denklemindeki ilk iki terim  $t \frac{d}{dt} \left( t \frac{dv}{dt} \right)$  olarak yazılabilir.  $p(x) = ax^r$  ve  $q(x) = x^s$  seçimiyle,

$$y'' + \frac{2s+1}{x} y' - \frac{1}{x^2} \left( (rax^r)^2 + v^2 r^2 - s^2 \right) y = 0 \quad (4.227)$$

denklemini elde edilir. Yani, (4.227) tipinde bir denklemin çözümü,  $y(x) = x^{-s} v(t) = x^{-s} v(ax^r)$  şeklinde (4.226) denkleminin çözümleri türünden ifade edilebilir. (4.225) ve (4.227) karşılaştırıldığında,

$$s = -1/2, \quad v^2 r^2 = s^2 = 1/4, \quad (ar)^2 = \lambda^2, \quad P(x) = P_0 x^r + P_1, \quad r \neq 0 \quad (4.228)$$

olması durumunda uyumlu oldukları görülür. Değiştirilmiş Bessel denkleminin herhangi bir çözümü  $K_v(t)$  olsun. Öyleyse, (4.225) denkleminin çözümü

$$y(x) = x^{1/2} K_{\frac{1}{2r}}(P_0 \lambda x^r) \quad (4.229)$$

şeklinde elde edilmiş olur. Sonuç olarak,  $M$  fonksiyonu da

$$M(x) = \sigma_0 x^{1/2} \exp\left(\frac{a_1}{a_2}(P_0 x^r + P_1)\right) K_{\frac{1}{2r}}(P_0 \lambda x^r) \quad (4.230)$$

olarak bulunur.

#### 4.5 Kısmi İntegre Edilebilirliğe İlişkin Sonuçlar

Üçüncü bölümde (3.1) denkleminin tekillik analizi için denklem

$$\begin{aligned} iu_t + f(x,t)u_{xx} + g(x,t)u^2v + h(x,t)u &= 0, \\ -iv_t + p(x,t)v_{xx} + q(x,t)uv^2 + r(x,t)v &= 0 \end{aligned} \quad (4.231)$$

şeklinde kompleks eşleniği ile birlikte yazılmış,  $u, v$  fonksiyonları için

$$u(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x,t) \Phi^{\alpha+j}(x,t), \quad v(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j(x,t) \Phi^{\beta+j}(x,t) \quad (4.232)$$

şeklinde bir seri temsili önerilerek, denklemin tüm çözümlerinin bu yapıda olabilmesi için katsayı fonksiyonlarının sağlaması gereken denklemler elde edilmişti. Bir örnek üzerinde de, bu koşulların, denklemin 5 boyutlu bir simetri cebirine sahip olması koşuluna denk olduğu gösterilmişti. Daha önce bahsedildiği gibi, Çizelge 4.1’de verilen 4 boyutlu cebirlere ait kanonik denklemlerin katsayı fonksiyonları, Painlevé testinin uygunluk koşullarını sağlamamaktadır, dolayısıyla bu denklemler Painlevé özelliğine sahip değildir ve integre edilebilir değildir. Böyle bir durumda, çözüm için önerilen (4.232) serisi bir  $j = N$  indisinde kesilerek denklemde yazılırsa,  $u_j$ ,  $j \leq N$  indisleri ve  $\Phi$  fonksiyonu için bir denklem takımı elde edilir. Bu denklemler çözülebilirse, denklemin bir tam çözümü elde edilmiş olur. Buna denklemin kısmi integre edilebilirliği denmektedir. Denklem takımında  $j = -\alpha$  ve  $j = -\beta$  düzeylerinde elde edilen denklemler,  $u_{-\alpha}$  ve  $v_{-\beta}$  katsayılarının (3.1) denklemini sağlaması gerektiğini söyler. Bu da,  $j = N$  indisinde kesilmiş seriyi denklem için bir Bäcklund dönüşümü haline getirmektedir.

Painlevé testinde  $j = -1, 0, 3, 4$  rezonans indislerine karşılık gelen  $\Phi$  ve  $u_j, v_j$  fonksiyonlarının keyfi kalması beklenmekteydi. Öncelikle, bu düzeylerdeki denklemler, bu fonksiyonların belli halleri için sağlatılmaya çalışılmıştır. Ancak, rezonans denklemlerinden, ya  $\Phi$  için koşul elde edilememekte, P-testinin sonuçlarına denk koşullar elde edilmekte veya rezonans düzeyinden elde edilen katsayı fonksiyonları ve  $\Phi$ , diğer düzeylerdeki denklemleri sağlamamaktadır. Dolayısıyla 4 boyutlu cebirlere sahip denklemler için bu yöntemle tam çözüm ve bir Bäcklund dönüşümü elde edilememiştir. Ancak, yöntem [69] referansında verildiği gibi uygulandığında seri kesme yöntemi başarılı sonuç vermiştir.

Painlevé testine ilişkin hesaplar hatırlanacak olursa,  $\alpha$  ve  $\beta$  öncül üslerinin belirlenmesi için, (4.231) denkleminde  $u \sim u_0 \Phi^\alpha$  ve  $v \sim v_0 \Phi^\beta$  yazılır ve en küçük mertebeden terimlerin dengelenmesi için

$$\alpha + \beta = -2 \quad (4.233)$$

ve

$$u_0 v_0 = -\alpha(\alpha - 1) \frac{f}{g} \Phi_x^2 = -\beta(\beta - 1) \frac{p}{q} \Phi_x^2 \quad (4.234)$$

olması gerektiği görülür. Denklemin Painlevé özelliğine sahip olması için öncül üslerin tam sayılar olması gerektiğinden, (4.233) denkleminde  $\alpha = -1$  ve  $\beta = -1$  bulunur. Bu aşamada, ele alınacak denklemler zaten Painlevé testini geçmeyeceğinden,  $\alpha$  ve  $\beta$ 'nin negatif tamsayı olma koşulu kaldırılıp (4.233) ve (4.234) denklemleri birlikte ele alınarak öncül üsler belirlendikten sonra seri kesme yöntemi uygulandığında tam çözüm elde edilebilmektedir.

Seri kesme yöntemi  $L_1, L_3, L_4$  cebirlerine ait kanonik denklemlere başarıyla uygulanmıştır.  $L_2, L_5$  cebirlerinde elde edilen aşırı belirli denklem takımları uyumlu değildir, tam çözümün elde edilmesinde yöntem sonuç vermemiştir.

#### 4.5.1 $L_1$ cebiri için seri kesme yöntemi

$L_1$  dört boyutlu cebiri için katsayı fonksiyonları  $f = 1$ ,  $g = (\epsilon_0 + i\gamma)/x$ ,  $h = (h_1 + ih_2)/x^2$  şeklindedir. Seri kesme yöntemi, bu fonksiyonları kapsayacak şekilde

$$f = 1, \quad g = (\epsilon_0 + i\gamma)\frac{1}{x^a}, \quad h = (h_1 + ih_2)\frac{1}{x^b}, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (4.235)$$

katsayıları için uygulanacaktır.  $a \neq 1$ ,  $b = 2$  ise denklem

$$T = \partial_t, \quad D = t\partial_t + \frac{x}{2}\partial_x + \frac{a-2}{4}\rho\partial_\rho, \quad W = \partial_\omega \quad (4.236)$$

bazı ile verilen üç boyutlu çözülebilir Lie cebiri etkisinde değişmez kalır.  $a = 1$  durumunda cebir dört boyuta genişler.

(4.233) ve (4.234) denklemleri birlikte çözülrse,  $\gamma \neq 0$  için

$$\alpha = -1 - i\delta, \quad \beta = -1 + i\delta; \quad \delta = \frac{-3\epsilon_0 \pm \sqrt{8\gamma^2 + 9}}{2\gamma} \quad (4.237)$$

bulunur ve (4.234) denklemi

$$u_0 v_0 = -\frac{3\delta}{\gamma} x^a \Phi_x^2 \quad (4.238)$$

koşuluna denk olur. Painlevé açılımı ilk terimde kesilerek ( $j = 0$ ),

$$u(x, t) = u_0(x, t) \Phi(x, t)^{-1-i\delta}, \quad v(x, t) = v_0(x, t) \Phi(x, t)^{-1+i\delta} \quad (4.239)$$

yapısında bir çözüm önerilecektir.  $u$  ve  $v$  için bu ifade (4.231) sisteminde yazıldığında ortaya çıkan  $\Phi^{-3\pm i\delta}, \Phi^{-2\pm i\delta}, \Phi^{-1\pm i\delta}$  terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse,  $u_0$ ,  $v_0$  ve  $\Phi$  için her biri iki denklemden oluşan 3 adet denklem sistemi elde edilir.  $\Phi^{-3\pm i\delta}$

mertebeinde elde edilen koşul (4.238) denkleminde denktir.  $\Phi^{-2\pm i\delta}$  katsayısının sıfır seçilmesinden

$$i\frac{\Phi_t}{2\Phi_x} + \frac{u_{0,x}}{u_0} + \frac{\Phi_{xx}}{2\Phi_x} = 0, \quad -i\frac{\Phi_t}{2\Phi_x} + \frac{v_{0,x}}{v_0} + \frac{\Phi_{xx}}{2\Phi_x} = 0 \quad (4.240)$$

denklemleri elde edilir. Bu iki denklemin farkı alınır ve (4.238) kullanılırsa,  $\phi_0(t)$  ve  $\phi_1(t)$  keyfi fonksiyonlar olmak üzere

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} \phi_0(t)x^{1-\frac{a}{3}} + \phi_1(t), & a \neq 3, \\ \phi_0(t) \ln|x| + \phi_1(t), & a = 3 \end{cases} \quad (4.241)$$

bulunur.  $\Phi$  için bulunan bu ifade (4.240) denklemlerinde kullanılarak  $u_0$ ,  $v_0$  fonksiyonları çözülebilir:

$$u_0(x, t) = C_1(t)x^{a/6} \exp\left(-\int \frac{i\Phi_t}{2\Phi_x} dx\right), \quad (4.242a)$$

$$v_0(x, t) = C_2(t)x^{a/6} \exp\left(\int \frac{i\Phi_t}{2\Phi_x} dx\right). \quad (4.242b)$$

Burada  $C_1(t)$  ve  $C_2(t)$  integrasyonun keyfi fonksiyonlarıdır ve üstel fonksiyonun içinde kapalı formda bırakılan integral şu şekilde ifade edilebilir:

$$\int \frac{i\Phi_t}{2\Phi_x} dx = \begin{cases} \frac{ix^2}{4} \left[ \frac{\dot{\phi}_0}{\phi_0} (\ln|x| - \frac{1}{2}) + \frac{\dot{\phi}_1}{\phi_0} \right], & a = 3, \\ i\left( \frac{\dot{\phi}_0}{\phi_0} \frac{x^2}{8} + \frac{\dot{\phi}_1}{\phi_0} \frac{\ln|x|}{4} \right), & a = -3, \\ i\left[ \frac{\dot{\phi}_0}{\phi_0} \frac{x^2}{4(1-\frac{a}{3})} + \frac{\dot{\phi}_1}{\phi_0} \frac{x^{1+\frac{a}{3}}}{2(1-\frac{a^2}{9})} \right], & a \neq \mp 3. \end{cases} \quad (4.243)$$

Painlevé testi uygulanırken,  $u$  ve  $v$  fonksiyonlarına birbirinden bağımsız gibi davranılır. Ancak bu problemde,  $u, v$  çözümleri aranan (4.231) sisteminin (3.1) denkleminde karşılık gelmesi için gerçekten  $v^* = u$  olmalıdır. Bu da  $C_2(t)^* = C_1(t)$  olmasını gerektirir. Bu aşamada,  $\Phi^{-3\pm i\delta}$  düzeyinden elde edilen (4.238) denkleminde (4.241) eşitlikleri kullanılırsa, bulunan keyfi fonksiyonlar üzerinde

$$|C_1(t)|^2 = \begin{cases} -\frac{3\delta}{\gamma} (1 - \frac{a}{3})^2 \phi_0^2(t), & a \neq 3, \\ -\frac{3\delta}{\gamma} \phi_0^2(t), & a = 3 \end{cases} \quad (4.244)$$

koşulu elde edilir.  $\Phi(x, t)$  reel fonksiyon olarak düşünüldüğünde,  $\frac{\delta}{\gamma} < 0$  olması gereklidir. Öyleyse (4.237)'de verilen  $\delta$  formülünde, köklü ifadenin işareti negatif olarak seçilmelidir:

$$\delta = \frac{-3\varepsilon_0 - \sqrt{8\gamma^2 + 9}}{2\gamma}. \quad (4.245)$$

$\Phi^{-1 \pm i\delta}$  terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesinden elde edilen denklemler,  $a, b$  sayılarının seçimine göre farklı durumlarda çözülebilmektedir.

**(i)  $a = 3$  durumu.** Mertebe denklemleri  $b = 2$ ,  $h_1 = 1/4$ ,  $h_2 = 0$  olmasını gerektirmektedir. Analiz sonucunda

$$u_0(x, t) = c\sqrt{x}, \quad \Phi(x, t) = k_0 \ln |x| + k_1 \quad (4.246)$$

bulunmaktadır. Burada  $k_0, k_1$  reel sabitlerdir ve  $c \in \mathbb{C}$  için  $|c| = k_0 \sqrt{-\frac{3\delta}{\gamma}}$  koşulu vardır. Dolayısıyla kesme yöntemi ile bulunan çözüm,

$$u(x, t) = \frac{c\sqrt{x}}{k_0 \ln |x| + k_1} \exp(-i\delta \ln(k_0 \ln |x| + k_1)) \quad (4.247)$$

şeklinde yazılabilir.

**(ii)  $a = -3$  durumu.** Sabitler üzerinde  $b = 2$ ,  $h_2^2 = 3 + 4h_1$  koşulu vardır. Mertebe denklemleri çözüldüğünde

$$u_0(x, t) = cx^{-\frac{1}{2} + i\frac{h_2}{2}}, \quad \Phi(x, t) = k_0 x^2 - 2h_2 k_0 t + k_1 \quad (4.248)$$

bulunur.  $k_0, k_1$  reel sabitler olup  $c \in \mathbb{C}$  için  $|c| = 2k_0 \sqrt{-\frac{3\delta}{\gamma}}$  koşulu vardır. Denklemin çözümü

$$u(x, t) = \frac{c}{x^{1/2} (k_0 x^2 - 2h_2 k_0 t + k_1)} \exp\left(i \ln \frac{x^{h_2/2}}{(k_0 x^2 - 2h_2 k_0 t + k_1)^\delta}\right) \quad (4.249)$$

şeklinde olacaktır.

**(iii)  $a \neq \mp 3$  durumu.** Oldukça karışık olan iki mertebe denkleminin taraf tarafa toplanması ve farkının alınmasıyla, bir tanesi nispeten irdelenebilir duruma gelmektedir. Analizi gerçekleştirebilmek için, bu denklemi yani

$$2h_2 + \left(\frac{\dot{C}_1}{C_1} + \frac{\dot{C}_2}{C_2} + \frac{a+3}{a-3} \frac{\dot{\phi}_0}{\phi_0}\right) x^b + \frac{2a}{a-3} \frac{\dot{\phi}_1}{\phi_0} x^{-1+\frac{a}{3}+b} = 0 \quad (4.250)$$

koşulunu,  $a, b$ 'nin farklı durumları için gerçekleyecek  $C_1, \phi_0, \phi_1$  fonksiyonları diğer mertebe denklemi olan

$$\begin{aligned} & 2h_1 + \frac{a(a-6)}{18} x^{-2+b} + \left(\frac{\dot{C}_1}{C_1} - \frac{\dot{C}_2}{C_2}\right) i x^b - \frac{9}{2(a-3)^2} \frac{\dot{\phi}_1^2}{\phi_0^2} x^{\frac{2a}{3}+b} \\ & + \left(\frac{3(a-6)}{2(a-3)^2} \frac{\dot{\phi}_0^2}{\phi_0^2} - \frac{3}{2(a-3)} \frac{\ddot{\phi}_0}{\phi_0}\right) x^{2+b} \\ & - \frac{18}{(a+3)(a-3)^2} \left(6 \frac{\dot{\phi}_0 \dot{\phi}_1}{\phi_0^2} + (a-3) \frac{\ddot{\phi}_1}{\phi_0}\right) x^{-1+\frac{a}{3}+b} = 0 \end{aligned} \quad (4.251)$$

koşulunu da sağlamalıdır.

(iii.i)  $0 = b = -1 + \frac{a}{3} + b$  durumu.  $a = 3$  olmalıdır.  $a$ 'nın bu değeri için (i)'de  $b = 2$  durumunda çözüm bulunabilmişti.

(iii.ii)  $0 \neq b = -1 + \frac{a}{3} + b$  durumu.  $a = 3$  olmasını gerektirdiğinden, (i) durumuna karşılık gelir.

(iii.iii)  $0 = b \neq -1 + \frac{a}{3} + b$  durumu. (4.250) denkleminde,  $a = 0$  veya  $\dot{\phi}_1 = 0$  olması gerektiği görülür.

(A)  $a \neq 0$  durumu.  $\phi_1(t) = k_1$  şeklinde sabit olarak elde edilir. (4.251) denkleminde  $x^{-2}$  teriminin katsayısı dikkate alınırsa  $a = 6$  olarak belirlenir. (4.251) ve (4.250) tekrar ifade edilirse, sırasıyla

$$2h_1 + i\left(\frac{\dot{C}_1}{C_1} - \frac{\dot{C}_2}{C_2}\right) - \frac{\ddot{\phi}_0}{2\phi_0}x^2 = 0 \quad (4.252)$$

$$2h_2 + \frac{\dot{C}_1}{C_1} + \frac{\dot{C}_2}{C_2} + 3\frac{\dot{\phi}_0}{\phi_0} = 0 \quad (4.253)$$

yazılır. (4.252) denkleminde  $x^2$ 'nin katsayısından  $k_0, k_3$  sabit olmak üzere

$$\phi_0(t) = k_3t + k_0 \quad (4.254)$$

ve (4.253) denkleminin integre edilmesinden

$$\exp(2h_2t)C_1C_2\phi_0^3 = s, \quad s = \text{sabit} \quad (4.255)$$

bulunur.  $C_2 = C_1^*$  olduğu hatırlanarak (4.244)'ten elde edilen  $|C_1|^2 = -\frac{3\delta}{\gamma}\phi_0^2$  dikkate alındığında, (4.254) ve (4.255) denklemlerinin birlikte gerçekleşmesi  $h_2 = k_3 = 0$  ise mümkün olur.  $C_1(t) = k_0\sqrt{-\frac{3\delta}{\gamma}}\exp(iK(t))$  şeklinde ifade edilirse, (4.252) denklemini  $K(t) = h_1t + k_2$  olması gerektiğini söylemektedir. Özetlenirse,

$$u_0(x,t) = k_0\sqrt{-\frac{3\delta}{\gamma}}x\exp(i(h_1t + k_2)), \quad \Phi(x,t) = k_0x^{-1} + k_1 \quad (4.256)$$

ve denklemin çözümü

$$u(x,t) = k_0\sqrt{-\frac{3\delta}{\gamma}}\frac{x^2}{k_0 + k_1x}\exp\left(i\left(h_1t - \delta\ln(k_0x^{-1} + k_1) + k_2\right)\right) \quad (4.257)$$

olacaktır.

(B)  $a = 0$  durumu. Benzer şekilde analiz yapılırsa,  $h_2 = 0$  koşuluyla  $\phi_0(t) = k_0$ ,  $\phi_1(t) = k_1 t + k_2$ ,  $C_1(t) = k_0 \sqrt{-\frac{3\delta}{\gamma}} \exp(iK(t))$ ,  $K(t) = (h_1 - \frac{k_1^2}{4k_0^2})t + k_3$  bulunur.

$$u_0(x, t) = k_0 \sqrt{-\frac{3\delta}{\gamma}} \exp \left[ i \left( \left( h_1 - \frac{k_1^2}{4k_0^2} \right) t - \frac{k_1}{2k_0} x + k_3 \right) \right], \quad \Phi(x, t) = k_0 x + k_1 t + k_2 \quad (4.258)$$

şeklinde belirlenmiş olur ve denklemin çözümü

$$u(x, t) = \frac{k_0 \sqrt{-\frac{3\delta}{\gamma}}}{k_0 x + k_1 t + k_2} \exp \left[ i \left( \left( h_1 - \frac{k_1^2}{4k_0^2} \right) t - \frac{k_1}{2k_0} x - \delta \ln(k_0 x + k_1 t + k_2) + k_3 \right) \right] \quad (4.259)$$

olarak ifade edilir.

(iii.iv)  $b \neq 0 = -1 + \frac{a}{3} + b$  durumu. Bu durum için çözüm elde edilememektedir.

(iii.v)  $b \neq 0$ ,  $-1 + \frac{a}{3} + b \neq 0$ ,  $b \neq -1 + \frac{a}{3} + b$  durumu.

(4.250) denkleminde her katsayı sıfır olmalıdır:

$$h_2 = 0, \quad (4.260a)$$

$$C_1 C_2 \phi_0^{\frac{a+3}{a-3}} = s, \quad (4.260b)$$

$$a \dot{\phi}_1 = 0. \quad (4.260c)$$

$C_2 = C_1^*$  ve (4.244) koşulundan,  $|C_1|^2 = -\frac{3\delta}{\gamma} (1 - \frac{a}{3})^2 \phi_0^2$  olduğu hatırlanarak (4.260b) tekrar ifade edilirse

$$-\frac{3\delta}{\gamma} (1 - \frac{a}{3})^2 \phi_0^{2 + \frac{a+3}{a-3}} = s \quad (4.261)$$

olması gerektiği görülür. Çözümleme (4.260c) ve (4.261) dikkate alınarak  $a$  sabitine göre üç farklı durum için yapılmalıdır.

(A)  $a = 0$  ( $b \neq \{0, 1\}$ ) durumu. (4.250) ve (4.251) denklemlerinin birlikte çözümünden  $h_1 = h_2 = 0$ ,  $\phi_0(t) = k_0$ ,  $\phi_1(t) = k_1 t + k_2$ ,  $C_1(t) = c \exp(-\frac{ik_1^2}{4k_0^2} t)$ ,  $|c|^2 = -\frac{3\delta}{\gamma} k_0^2$ ,  $c \in \mathbb{C}$  bulunur.  $u_0$ ,  $\phi$  fonksiyonları

$$u_0(x, t) = c \exp \left( -i \left( \frac{k_1}{2k_0} x + \frac{k_1^2}{4k_0^2} t \right) \right), \quad \Phi(x, t) = k_0 x + k_1 t + k_2 \quad (4.262)$$

şeklinde, denklemin çözümü de

$$u(x, t) = \frac{c}{k_0 x + k_1 t + k_2} \exp \left[ -i \left( \frac{k_1}{2k_0} x + \frac{k_1^2}{4k_0^2} t + \delta \ln(k_0 x + k_1 t + k_2) \right) \right] \quad (4.263)$$

olarak belirlenir.

(B)  $a \neq \{0, 1\}$  durumu. (4.250) ve (4.251) denklemlerinin birlikte çözümünden  $\phi_0(t) = k_0$ ,  $\phi_1(t) = k_1$ ,  $h_1 = h_2 = 0$ ,  $a = 6$ ,  $C_1(t) = c$  ve  $|c|^2 = -\frac{3\delta}{\gamma}k_0^2$  bulunur.

$$u_0(x, t) = cx, \quad \Phi(x, t) = k_0x^{-1} + k_1 \quad (4.264)$$

olarak bulunmakta ve denklemin çözümü

$$u(x, t) = \frac{cx^2}{k_0 + k_1x} \exp\left(-i\delta \ln(k_0x^{-1} + k_1)\right) \quad (4.265)$$

olarak elde edilmektedir.

(C)  $a = 1$  ( $b \neq 2/3$ ) durumu. İncelenen bu son durum,  $L_1$  cebirinin grup değişmez denklemini yani  $a = 1$  ve  $b = 2$  için seri kesme probleminin başarılı sonucunu verecektir.

(4.250) denkleminin sağlanması için,  $h_2 = 0$  ve  $\phi_1 = k_1$  gereklidir. (4.251) denkleminin sağlanması ise ancak  $b = 2$  ve  $h_1 = 5/36$  olması durumunda mümkündür. Bu değerler için (4.251) ve (4.250) tekrar ifade edilirse,

$$\left(\frac{\dot{C}_1}{C_1} - \frac{\dot{C}_2}{C_2}\right)ix^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{\ddot{\phi}_0}{\phi_0} - \frac{5}{2}\frac{\dot{\phi}_0^2}{\phi_0^2}\right)x^4 = 0, \quad \left(\frac{\dot{C}_1}{C_1} - \frac{\dot{C}_2}{C_2} - 2\frac{\dot{\phi}_0}{\phi_0}\right)x^2 = 0 \quad (4.266)$$

bulunur. Ortak çözümünden  $\phi_0(t) = (k_0t + k_2)^{-2/3}$ ,  $C_1(t) = c_1\phi_0(t)$  ve  $C_2(t) = c_2\phi_0(t)$  sonuçlarına ulaşılır. (4.244) koşulu,  $|c_1|^2 = \frac{-4\delta}{3\gamma}$ ,  $c_1 \in \mathbb{C}$  olmasını gerekli kılar. Bulunan fonksiyonlar özetlenirse,

$$u_0(x, t) = \frac{c_1x^{1/6}}{(k_0t + k_2)^{2/3}} \exp\left(i\frac{k_0x^2}{4(k_0t + k_2)}\right), \quad (4.267)$$

$$\Phi(x, t) = (k_0t + k_2)^{-2/3}x^{2/3} + k_1 \quad (4.268)$$

ve denklemin çözümü de

$$u(x, t) = \frac{c_1x^{1/6}}{x^{2/3} + k_1(k_0t + k_2)^{2/3}} \exp\left[i\left(\frac{k_0x^2}{4(k_0t + k_2)} - \delta \ln\left(\frac{x^{2/3}}{(k_0t + k_2)^{2/3}} + k_1\right)\right)\right] \quad (4.269)$$

şeklindedir.

**Hatırlatma.**  $L_1$  cebirinin kanonik denklemi,  $SL(2, \mathbb{R})$  grup dönüşümleri etkisinde değişmez kalmaktadır. Grup dönüşümü,  $T$  zaman ötelemesi,  $D_1$  ölçek dönüşümü ve  $C_1$  konformal dönüşümün bileşkesidir. Bu grup etkisinde (4.269), yine kanonik denklemin bir çözümüne dönüşür.  $C_1$  tarafından üretilen konformal dönüşümden

dolayı bu yeni çözüm, sonlu zamanda bir tekilliğe sahiptir ve patlama problemi örneği olarak incelenmiştir. Bu tekil çözümün  $L_p$ ,  $L_\infty$  ve distribüsyon anlamında patlama karakterinin gösterilmesi mümkün olmuştur [70].

#### 4.5.2 $L_3$ cebiri için seri kesme yöntemi

$L_3$  dört boyutlu cebiri için katsayı fonksiyonları

$$f = 1 + if_2, \quad g = (\varepsilon_0 + i\gamma), \quad h = 0 \quad (4.270)$$

şeklinde. Aslında bu durum [69]'da içerilmiştir ancak burada elde edilen sonuçlar [69] sonuçlarından elde edilememiştir.  $f$  önceki cebirden farklı olarak sanal kısım içermektedir.

(4.233) ve (4.234) denklemleri birlikte çözülürse,  $\gamma \neq \varepsilon_0 f_2$  için

$$\begin{aligned} \alpha &= -1 - i\delta, \quad \beta = -1 + i\delta, \\ \delta &= \frac{-3(\varepsilon_0 + \gamma f_2) \pm \sqrt{9(\varepsilon_0 + \gamma f_2)^2 + 8(\gamma - \varepsilon_0 f_2)^2}}{2(\gamma - \varepsilon_0 f_2)} \end{aligned} \quad (4.271)$$

bulunur ve (4.234) denklemi

$$u_0 v_0 = -\frac{3(1 + f_2^2)}{\gamma - \varepsilon_0 f_2} \delta \Phi_x^2 \quad (4.272)$$

koşuluna denk olur. Painlevé açılımı yine ilk terimde kesilerek (4.239) yapısında bir çözüm önerilir.  $u$  ve  $v$  için bu ifade (4.231) sisteminde yazıldığında ortaya çıkan  $\Phi^{-3 \pm i\delta}$ ,  $\Phi^{-2 \pm i\delta}$ ,  $\Phi^{-1 \pm i\delta}$  terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi yolu izlenecektir.  $\Phi^{-3 \pm i\delta}$  mertebesinde elde edilen denklem (4.272) denklemine denktir.  $\Phi^{-2 \pm i\delta}$  katsayısının sıfır seçilmesinden

$$i \frac{\Phi_t}{\Phi_x} + 2(1 + if_2) \frac{u_{0,x}}{u_0} + (1 + if_2) \frac{\Phi_{xx}}{\Phi_x} = 0, \quad (4.273a)$$

$$-i \frac{\Phi_t}{\Phi_x} + 2(1 - if_2) \frac{v_{0,x}}{v_0} + (1 - if_2) \frac{\Phi_{xx}}{\Phi_x} = 0 \quad (4.273b)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler

$$\frac{i + f_2}{2(1 + f_2^2)} \frac{\Phi_t}{\Phi_x} + \frac{u_{0,x}}{u_0} + \frac{\Phi_{xx}}{2\Phi_x} = 0, \quad (4.274a)$$

$$\frac{-i + f_2}{2(1 + f_2^2)} \frac{\Phi_t}{\Phi_x} + \frac{v_{0,x}}{v_0} + \frac{\Phi_{xx}}{2\Phi_x} = 0 \quad (4.274b)$$

şeklinde de ifade edilebilir. (4.273) taraf tarafa toplanarak integre edilirse ve aynı işlem (4.274) için de yapılırsa,  $F_1$  ve  $F_2$  keyfi fonksiyonlar olmak üzere sırasıyla aşağıdaki denklemler bulunur:

$$u_0 v_0 \left( \frac{u_0}{v_0} \right)^{if_2} \Phi_x = F_1(t), \quad (4.275a)$$

$$\exp \left( \frac{f_2}{1+f_2^2} \int \frac{\Phi_t}{\Phi_x} dx \right) u_0 v_0 \Phi_x = F_2(t). \quad (4.275b)$$

$v_0 = u_0^*$  koşulu altında (4.272) denklemi

$$|u_0|^2 = -\frac{3(1+f_2^2)}{\gamma - \varepsilon_0 f_2} \delta \Phi_x^2 \quad (4.276)$$

olacaktır. Bu ifade (4.275a) denkleminin modülünde yerine konduğunda,  $\Phi(x, t) = \phi_0(t)x + \phi_1(t)$  yapısında olması gerektiği görülür. Diğer yandan  $\Phi$  bu yapıda olduğunda, (4.275b) denkleminde üstel terim  $x$  türünden olmamalıdır. Öyleyse  $\Phi_t = 0$  yani  $\Phi(x, t) = k_0 x + k_1$  olmalıdır. Oldukça basitleşen merteye denklemleri çözüldüğünde,  $u_0(x, t) = c \in \mathbb{C}$ ,  $|c|^2 = -\frac{3(1+f_2^2)}{\gamma - \varepsilon_0 f_2} \delta k_0^2$  bulunur. (4.271)'de verilen  $\delta$  formülünde karekökün işareti negatif olarak tercih edilmelidir.  $L_2$  cebirinin grup-değişmez denkleminin çözümü de

$$u(x, t) = \frac{c}{k_0 x + k_1} \exp \left( -i \delta \ln(k_0 x + k_1) \right) \quad (4.277)$$

şeklinde elde edilir.

### 4.5.3 $L_4$ cebiri için seri kesme yöntemi

$L_1$  cebiri için yapılan analiz  $h(x, t) = \frac{h_2}{t}$  için tekrarlanırsa,  $h_2 = 1/2$  için

$$u(x, t) = \frac{c}{x + k_0 k_1 t} \exp \left[ i \left( \frac{x^2}{4t} - \delta \ln \left( \frac{x}{k_0 t} + k_1 \right) \right) \right] \quad (4.278)$$

bulunur. Burada  $|c|^2 = -\frac{3\delta}{\gamma}$  koşulu mevcuttur ve  $\delta = \frac{-3\varepsilon_0 - \sqrt{8\gamma^2 + 9}}{2\gamma}$  olarak verilmektedir.



## 5. KKS DENKLEMİ SİMETRİ CEBİRİ SINIFLARI

### 5.1 Giriş

Tez çalışmasının bu bölümünde,

$$i\psi_t + f(x,t)\psi_{xx} + k(x,t)\psi_x + g(x,t)|\psi|^2\psi + q(x,t)|\psi|^4\psi + h(x,t)\psi = 0 \quad (5.1)$$

şeklinde ele alınacak kübik-kuintik doğrusal olmayan Schrödinger denklemi için, sonlu boyutlu Lie cebirlerinin sınıflandırmasına ilişkin sonuçlar sunulacaktır.

Burada  $\psi$  kompleks değerli bir fonksiyon,  $f$  reel fonksiyon ve  $k, g, q, h$  fonksiyonları da  $k = k_1(x,t) + ik_2(x,t)$ ,  $g(x,t) = g_1(x,t) + ig_2(x,t)$ ,  $q(x,t) = q_1(x,t) + iq_2(x,t)$  ve  $h(x,t) = h_1(x,t) + ih_2(x,t)$  yapısında kompleks değerli fonksiyonlardır. Katsayılarla ilişkin  $g \neq 0$  veya  $q \neq 0$  varsayımı kullanılacak, yani  $g_1, g_2, q_1, q_2$  fonksiyonlarından en az biri sıfırdan farklı olarak düşünülecektir.

(5.1) denklemi, fiziksel olarak önem taşıyan, tek uzay boyutunda iki denklemi içerir:  $k = q = 0$  durumu için kübik Schrödinger denklemi,  $k = g = 0$  için kuintik Schrödinger denklemi. Özel olarak  $f = 1$ ,  $k = (N - 1)/x$  olması durumunda (5.1) denklemi,  $N$  uzay boyutunda

$$i\psi_t + \Delta\psi + g(x,t)|\psi|^2\psi + q(x,t)|\psi|^4\psi + h(x,t)\psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (5.2)$$

kübik-kuintik Schrödinger denkleminde radyal koordinatın fonksiyonu olarak çözüm arandığında elde edilir ve bu durumda  $x$  değişkeni radyal koordinatı temsil eder ( $N \geq 2$ ).

Kübik NLS denklemi nonlinear optik modellerinde sık karşılaşılan bir denklemdir. Yüksek yoğunluklu optik malzeme özellikleri dikkate alındığında, daha yüksek mertebeden nonlinear terimler denkleme ilave olur [71, 72]. Sadece kuintik tipte nonlinearliğin ortaya çıktığı örnekler olarak [73] ve [74] gösterilebilir. Denklemdaki katsayıların zamana bağlı olduğu durumla ilgili olarak [75, 76] incelenebilir. Kübik

nonlineerlik katsayısının sadece konuma bağılı olarak ortaya çıktığı bir durum da [77]'de irdelenmiştir.

## 5.2 Denklik Dönüşümleri ve Belirleyici Denklemler

(5.1) denkleminin denklik dönüşümü grubu  $\mathcal{E}$ , (5.1) denklemini yapısal olarak değişmez bırakan, ancak katsayıları değiştirebilen dönüşümlerdir.

**Tanım 5.1** (5.1) denkleminin *denklik dönüşümü* grubu  $\mathcal{E}$ , diferansiyel yapıyı koruyan  $(t, x, \psi) \rightarrow (\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{\psi})$  düzgün dönüşümleridir.  $\mathcal{E}$  dönüşümü (5.1) denklemini

$$i\tilde{\psi}_{\tilde{t}} + \tilde{f}\tilde{\psi}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{k}\tilde{\psi}_{\tilde{x}} + \tilde{g}|\tilde{\psi}|^2\tilde{\psi} + \tilde{q}|\tilde{\psi}|^4\tilde{\psi} + \tilde{h}\tilde{\psi} = 0 \quad (5.3)$$

haline getirir. Denklik dönüşümü türev terimlerini değişmez bırakırken, katsayı fonksiyonlarını değiştirebilir yani denklemi yapısal olarak değişmez bırakır. Nokta dönüşümleri simetri grubu,  $\mathcal{E}$  grubunun denklemin katsayılarını değişmez bırakan alt grubudur. Bu dönüşümlere *izin verilen dönüşümler* de denmektedir. Denklik dönüşümlerini bulmak için iki ayrı yöntem izlenebilir. İnfinitezimal yöntem, simetri analizine benzer şekilde aşırı belirli bir doğrusal KDD sisteminin çözümünü gerektirir. Dezavantajı, ayrık dönüşümlerin elde edilememesidir. Doğrudan dönüşümün araştırılması ikinci yöntemdir ve burada da uygulanacaktır. Bu dönüşümler

$$\psi(x, t) = \Psi(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{t})), \quad \tilde{x} = X(x, t) \quad \tilde{t} = T(x, t) \quad (5.4)$$

şeklinde araştırılırsa,  $X_x \dot{T} Q \neq 0$  olmak üzere

$$\mathcal{E}: \quad \tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X(x, t), \quad \psi = Q(x, t) \tilde{\psi} \quad (5.5)$$

seçilmesi durumunda denkleme terim ilave olmaz. Katsayı fonksiyonları

$$\tilde{f} = \frac{fX_x^2}{\dot{T}}, \quad (5.6a)$$

$$\tilde{g} = \frac{g|Q|^2}{\dot{T}}, \quad (5.6b)$$

$$\tilde{q} = \frac{q|Q|^4}{\dot{T}}, \quad (5.6c)$$

$$\tilde{h} = \frac{1}{\dot{T}} \left( h + i \frac{Q_t}{Q} + f \frac{Q_{xx}}{Q} + k \frac{Q_x}{Q} \right), \quad (5.6d)$$

$$\tilde{k} = \frac{1}{\dot{T}} \left( iX_t + fX_{xx} + 2fX_x \frac{Q_x}{Q} + kX_x \right) \quad (5.6e)$$

şeklinde dönüşür. Hesaplarımızı  $Q$ ,  $\psi$  ve  $\tilde{\psi}$  için tanımlayacağımız

$$Q(x, t) = R(x, t)e^{i\theta(x, t)}, \quad \psi = \rho(x, t)e^{i\omega(x, t)}, \quad \tilde{\psi} = \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t})e^{i\tilde{\omega}(\tilde{x}, \tilde{t})} \quad (5.7)$$

şeklindeki kutupsal değişkenler üzerinden gerçekleştireceğiz.

Burada fonksiyonlar üzerinde önemli miktarda basitleştirme yapmak mümkündür.  $X_x^2 = \frac{\dot{T}}{f(x, t)}$  seçilirse,  $\tilde{f} = 1$  yapılabileceği açıktır [24]. Öyleyse (5.1) denkleminde genellikle yitirmeden  $f = 1$  varsayılabilir. Bu durumda uzay koordinatı dönüşümü için,  $\xi(t)$  keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$X(x, t) = \varepsilon \sqrt{\dot{T}}x + \xi(t), \quad \varepsilon = \mp 1 \quad (5.8)$$

seçilmesi gerektiği açıktır. Diğer yandan, (5.1) denkleminde yine genellikle yitirmeden  $k = 0$  varsayılabilir. Bunun için, (5.1) denklemindeki katsayıların her seçimi için  $\tilde{k} \rightarrow 0$  yapılabildiği gösterilmelidir. (5.6e) denkleminin reel ve sanal kısımları sıfıra eşitlenirse,

$$\begin{aligned} 2\frac{R_x}{R} + k_1 &= 0, \\ 2X_x\theta_x + X_t + k_2X_x &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

bulunur.  $R$  ve  $\theta$  bu iki denklemden çözülebilir. Dolayısıyla, (5.1) denklemi yerine eşdeğer olarak

$$i\psi_t + \psi_{xx} + g(x, t)|\psi|^2\psi + q(x, t)|\psi|^4u + h(x, t)\psi = 0 \quad (5.10)$$

şeklinde kanonik formdaki denklemi incelemek mümkündür. Denklik dönüşümleri simetri cebirlerinin analizinde büyük rol oynayacaktır. (5.10) denklemi için denklik dönüşümü grubu  $\mathcal{E}$ , (5.6a)-(5.6e) denklemlerinde  $\tilde{f} = f = 1$ ,  $\tilde{k} = k = 0$  yazılarak dönüşüm fonksiyonlarının elde edilmesiyle bulunur:

$$\mathcal{E}: \quad \tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = \varepsilon \sqrt{\dot{T}}x + \xi(t), \quad \varepsilon = \mp 1, \quad \psi = R_0(t)e^{i\theta(x, t)}\tilde{\psi}. \quad (5.11)$$

Burada  $R_0(t)$ ,  $\eta(t)$  keyfi fonksiyonlar olup

$$\dot{T} \neq 0, \quad R_0(t) \neq 0, \quad \theta(x, t) = -\frac{\ddot{T}}{8\dot{T}}x^2 - \frac{\dot{\xi}}{2\varepsilon\sqrt{\dot{T}}}x + \eta(t)$$

olarak verilmektedir ve katsayıların dönüşmüş hali

$$\tilde{g} = \frac{gR_0^2}{\dot{T}}, \quad \tilde{q} = \frac{qR_0^4}{\dot{T}}, \quad \tilde{h} = \frac{1}{\dot{T}} \left[ (h_1 - \theta_t - \theta_x^2 + i \left( h_2 + \frac{\dot{R}_0}{R_0} + \theta_{xx} \right)) \right] \quad (5.12)$$

şeklindedir.  $R_0$  fonksiyonu  $t$ 'ye bağlı olduğundan,  $\theta$  ise  $x$ 'e göre ikinci dereceden bir polinom olduğundan, bu dönüşümlerle bir potansiyeli özdeş olarak sıfır yapmak her zaman mümkün değildir. Dönüşüm öncesi ve sonrası koordinatlara ilişkin

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{\rho(x, t)}{R_0(t)}, \quad \tilde{\omega}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \omega(x, t) - \theta(x, t) \quad (5.13)$$

bağıntıları mevcuttur.

**Hatırlatma.**  $g$  ve  $q$  fonksiyonlarında  $x$  bağıllığı yoksa  $g_1 \rightarrow 1$  ve  $q_1 \rightarrow 1$  yapılabilir.

Bilinen yöntemler kullanılarak, (5.10) denkleminin simetri cebirinin

$$V = \chi(x, t) \partial_x + \tau(t) \partial_t + A(t) \rho \partial_\rho + D(x, t) \partial_\omega \quad (5.14)$$

yapısındaki vektör alanı tarafından üretildiği bulunur.  $\chi$  ve  $D$  fonksiyonları

$$\chi(x, t) = \frac{\dot{t}}{2} x + \alpha(t), \quad D(x, t) = \frac{\ddot{t}}{8} x^2 + \frac{\dot{\alpha}}{2} x + n(t) \quad (5.15)$$

olarak verilmektedir ve bu fonksiyonlar

$$\tau g_{1,t} + \chi g_{1,x} + (2A + \dot{t}) g_1 = 0, \quad (5.16a)$$

$$\tau g_{2,t} + \chi g_{2,x} + (2A + \dot{t}) g_2 = 0, \quad (5.16b)$$

$$\tau q_{1,t} + \chi q_{1,x} + (4A + \dot{t}) q_1 = 0, \quad (5.16c)$$

$$\tau q_{2,t} + \chi q_{2,x} + (4A + \dot{t}) q_2 = 0, \quad (5.16d)$$

$$\tau h_{1,t} + \chi h_{1,x} + \dot{t} h_1 - D_t = 0, \quad (5.16e)$$

$$\tau h_{2,t} + \chi h_{2,x} + \dot{t} h_2 + \dot{A} + \frac{\ddot{t}}{4} = 0 \quad (5.16f)$$

belirleyici denklem takımını sağlamalıdır.

### 5.3 Simetri Cebirleri

(5.10) denkleminin Lie cebirlerini belirlemek için, öncelikle  $V$  vektör alanı denklik dönüşümleri kullanılarak mümkün olduğu kadar basitleştirilmeye çalışılacaktır. Vektör alanındaki bilinmeyen fonksiyonlar bazı durumlarda bu yolla yok edilebilmekte, bunun mümkün olmadığı durumda da belirleyici denklemlerden çözülmektedir. Sonsuz küçük üretecin bu şekilde elde edilen birbirine denk olmayan durumları, bir boyutlu simetri cebirlerinin kanonik formlarını verecektir. Aynı basitleştirme yolu takip

edilerek, düşük boyutlu Lie cebirleri için literatürde mevcut sınıflandırma kullanılacak ve denklemin kabul edeceği maksimal simetri cebiri boyutuna kadar ilerlemeye devam edilecektir. Düşük boyutlu Lie cebirlerinin kanonik sınıfları için [78] referans alınmıştır.

### 5.3.1 Sabit katsayılı denklem için simetriler

(5.16) denklemleri bütün katsayılar

$$g(x, t) = g_1 + ig_2, \quad q(x, t) = q_1 + iq_2, \quad h(x, t) = h_1 \quad (5.17)$$

şeklinde sabit olduğunda kolaylıkla çözülebilir.

1.)  $g \neq 0, q \neq 0$  (kübik-kuintik durum): Simetri cebiri dört boyutludur ve

$$Q_1 = \partial_t, \quad Q_2 = \partial_x, \quad Q_3 = t\partial_x + \frac{x}{2}\partial_\omega, \quad Q_4 = \partial_\omega \quad (5.18)$$

bazı ile üretilir. Çözülebilir bir cebirdir ve bir boyutlu Galilei cebiri  $gal(1)$ 'e izomorftur.

2.)  $q = 0, g \neq 0$  (kübik durum): Simetri cebiri beş boyutludur ve bazı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} Q_1 &= \partial_t + h_1\partial_\omega, \quad Q_2 = \partial_x, \quad Q_3 = t\partial_x + \frac{x}{2}\partial_\omega, \quad Q_4 = \partial_\omega, \\ Q_5 &= \frac{x}{2}\partial_x + t\partial_t - \frac{1}{2}\rho\partial_\rho + h_1t\partial_\omega. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Çözülebilir bir cebirdir ve bir boyutlu Galilei benzeşim cebiri  $gs(1) \simeq H_1 \triangleright \{Q_1, Q_5\}$ 'e izomorftur, burada  $H_1 = \{Q_2, Q_3, Q_4\}$  Heisenberg cebiri nilpotent idealdir.

3.)  $q \neq 0, g = 0$  (kuintik durum): Simetri cebiri altı boyutludur ve

$$\begin{aligned} Q_1 &= \partial_t + h_1\partial_\omega, \quad Q_2 = \partial_x, \quad Q_3 = t\partial_x + \frac{x}{2}\partial_\omega, \quad Q_4 = \partial_\omega, \\ Q_5 &= \frac{x}{2}\partial_x + t\partial_t - \frac{1}{4}\rho\partial_\rho + h_1t\partial_\omega, \quad Q_6 = xt\partial_x + t^2\partial_t - \frac{1}{2}t\rho\partial_\rho + \left(\frac{x^2}{4} + h_1t^2\right)\partial_\omega \end{aligned} \quad (5.20)$$

bazına sahiptir. Çözülebilir değildir ve

$$sch(1) \simeq \{Q_1, Q_5, Q_6\} \triangleright H_1 \quad (5.21)$$

Levi ayrışımı ile verilen bir boyutlu Schrödinger cebiri  $sch(1)$ 'e izomorftur.  $\{Q_1, Q_5, Q_6\}$  basit cebiri  $sl(2, \mathbb{R})$ 'ye izomorftur.

$h = h_1 + ih_2, h_2 \neq 0$  durumunda elde edilen simetri cebiri, dört boyutludur ve her  $g, q$  için (5.18)'e izomorftur.

### 5.3.2 Bir boyutlu cebirler

Bir boyutlu Lie cebirini  $A_1 = \{Q_1\}$  şeklinde gösterelim. (5.1) denkleminin üç farklı bir boyutlu simetri cebiri vardır. Bu cebirler üreteç bilinmeyen fonksiyonlarının değişik durumlarına göre aşağıdaki gibi ele edilmiştir.

(i)  $\tau(t) = \alpha(t) = 0$ . Sonsuz küçük üreteç  $V = A(t)\rho\partial_\rho + n(t)\partial_\omega$  yapısındadır.  $g_1, g_2, q_1, q_2$  fonksiyonlarından en az biri sıfırdan farklı olduğundan, dört adet (5.16a)-(5.16d) denklemlerinin birinden  $A(t) = 0$  bulunur ve diğer üç denklem de sağlanmış olur. (5.16e) denklemi  $n(t)$  bir sabit ise sağlanır, (5.16f) ise zaten gerçekleşmektedir. Öyleyse  $V$

$$A_1^1: Q_1 = \partial_\omega \quad (5.22)$$

şeklinde basitleşir ve bir boyutlu cebirlerin kanonik formlarından biri elde edilmiş olur. Bu durumda  $g(x, t)$ ,  $q(x, t)$  ve  $h(x, t)$  fonksiyonları üzerinde herhangi bir kısıt yoktur.

(ii)  $\tau(t) \neq 0$ .  $\mathcal{E}$  denklik dönüşümünü  $V$  vektör alanına uygulayalım.

$$\tilde{V} = (V\tilde{x})\partial_{\tilde{x}} + (V\tilde{t})\partial_{\tilde{t}} + (V\tilde{\rho})\partial_{\tilde{\rho}} + (V\tilde{\omega})\partial_{\tilde{\omega}}. \quad (5.23)$$

Parantez içindeki terimler  $V$  vektörünün dönüşüm fonksiyonları üzerindeki etkisidir. Şimdi  $\tilde{V}$  üretecini nasıl basitleştirebileceğimizi gösterelim.  $V\tilde{t} = \tau(t)\dot{T}(t)$  olduğundan,  $\partial_{\tilde{t}}$  teriminin katsayısı  $\dot{T} = \tau^{-1}$  seçimiyle 1 yapılabilir. Bu seçim sonrasında  $V\tilde{x} = \varepsilon\alpha\tau^{-1/2} + \tau\dot{\xi}$  bulunur, öyleyse  $\dot{\xi} = -\varepsilon\alpha\tau^{-3/2}$  seçilirse  $\partial_{\tilde{x}}$  teriminin katsayısı sıfırlanır.  $T$  ve  $\xi$  bu şekilde belirlendikten sonra

$$V\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(A - \tau\frac{\dot{R}_0}{R_0}), \quad V\tilde{\omega} = n - \frac{\alpha^2}{2\tau} - \tau\dot{\eta} \quad (5.24)$$

şeklinde hesaplanır. Öyleyse,  $r_0$  bir sabit olmak üzere  $R_0(t) = r_0 \exp\left(\int \frac{A}{\tau} dt\right)$  seçilirse  $\partial_{\tilde{\rho}}$  terimi elenir.  $\partial_{\tilde{\omega}}$  vektörünün katsayısı da  $\dot{\eta} = \frac{n}{\tau} - \frac{\alpha^2}{2\tau^2}$  seçimiyle sıfırlanır. Eski koordinatlara dönersek, bir boyutlu cebirler için ikinci kanonik form

$$A_1^2: Q_1 = \partial_t \quad (5.25)$$

olacaktır. (5.16) belirleyici denklemlerin,  $g(x, t) = g_1(x) + ig_2(x)$ ,  $q(x, t) = q_1(x) + iq_2(x)$  ve  $h(x, t) = h_1(x) + ih_2(x)$  şeklindeki katsayı fonksiyonları için sağlanacağı açıktır.

Şimdi  $Q_1$  üreticini değişmez bırakan denklik dönüşümünü bulalım.  $Q_1, \mathcal{E}$  etkisinde

$$\tilde{Q}_1 = (Q_1 \tilde{x}) \partial_{\tilde{x}} + (Q_1 \tilde{t}) \partial_{\tilde{t}} + (Q_1 \tilde{\rho}) \partial_{\tilde{\rho}} + (Q_1 \tilde{\omega}) \partial_{\tilde{\omega}} \quad (5.26)$$

biçiminde hesaplanır. İlk olarak

$$Q_1 \tilde{x} = \dot{\xi} + \frac{\varepsilon x \ddot{T}}{2\sqrt{\dot{T}}}, \quad Q_1 \tilde{t} = \dot{T} \quad (5.27)$$

katsayılarına bakalım.  $T(t) = t + T_0$  ve  $\xi(t) = \xi_0$  olması gerektiği açıktır. Bu seçimle

$$Q_1 \tilde{\rho} = -\tilde{\rho} \frac{\dot{R}_0}{R_0}, \quad Q_1 \tilde{\omega} = -\dot{\eta} \quad (5.28)$$

bulunur, öyleyse  $R_0(t) = r_0$  ve  $\eta(t) = \eta_0$  (sabitler) olmalıdır. Sonuç olarak,

$$\mathcal{E}(Q_1): \quad \tilde{x} = \varepsilon x + \xi_0, \quad \tilde{t} = t + T_0, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{r_0} \quad \tilde{\omega} = \omega - \eta_0 \quad (5.29)$$

bulunmuş olur.

(iii)  $\tau(t) = 0, \alpha(t) \neq 0$ . Bu durumda üretic

$$V = \alpha(t) \partial_x + A(t) \rho \partial_\rho + \left( \frac{\dot{\alpha}}{2} x + n(t) \right) \partial_\omega \quad (5.30)$$

yapısındadır. Bir denklik dönüşümü uygulanırsa

$$V \tilde{x} = \varepsilon \alpha(t) \sqrt{\dot{T}} \quad (5.31)$$

bulunur. Bu durumda  $\varepsilon = 1$  ve  $\dot{T} = \alpha^{-2}$  seçilirse  $\partial_{\tilde{x}}$  teriminin katsayısı  $V \tilde{x} = 1$  yapılmış olur. Bu ise (5.30) vektöründe  $\alpha(t) \rightarrow 1$  yazmak gibidir, öyleyse eşdeğer olarak

$$V = \partial_x + A(t) \rho \partial_\rho + n(t) \partial_\omega \quad (5.32)$$

vektörü elde edilir. Tekrar denklik dönüşümü uygulanırsa,  $T(t) = t + T_0$  bulunur.  $\partial_{\tilde{\rho}}$  vektörünün katsayısı

$$V \tilde{\rho} = A(t) \tilde{\rho} \quad (5.33)$$

şeklinde değişmez olarak kalmaktadır. Buraya kadar yapılan seçimlerle  $\partial_{\tilde{\omega}}$  teriminin katsayısı

$$V \tilde{\omega} = n(t) + \frac{\dot{\xi}}{2} \quad (5.34)$$

bulunur ve  $\dot{\xi} = -2n(t)$  seçilerek  $V \tilde{\omega} = 0$  yapılmış olur. Sonuç olarak, denklik dönüşümleri kullanılarak  $\alpha(t) \rightarrow 1$  ve  $n(t) \rightarrow 0$  yapılmış olur ve bir boyutlu cebirler için üçüncü kanonik form

$$V = \partial_x + m(t) \rho \partial_\rho \quad (5.35)$$

elde edilmiş olur ( $A(t)$  keyfi fonksiyonu yerine  $m(t)$  kullandık). (5.16) denklemlerinden

$$g(x, t) = (g_1(t) + ig_2(t))e^{-2xm(t)}, \quad (5.36a)$$

$$q(x, t) = (q_1(t) + iq_2(t))e^{-4xm(t)}, \quad (5.36b)$$

$$h(x, t) = h_1(t) + i(h_2(t) - x\dot{m}(t)) \quad (5.36c)$$

şeklinde  $g, q$  ve  $h$  fonksiyonları belirlenir. Bununla birlikte, (5.36c) fonksiyonunu daha da basitleştirmek mümkündür.  $\tilde{x} = x + \xi_0$ ,  $\tilde{t} = t$ ,  $\tilde{\rho} = \rho/R_0(t)$ ,  $\tilde{\omega} = \omega - \eta(t)$  dönüşümü etkisinde (5.35) değişmez kalır. Bunun yanında (5.12) formülüne göre (5.36c) denkleminde verilen  $h$

$$\tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t}) = h_1(t) - \dot{\eta}(t) + i\left(h_2(t) - x\dot{m}(t) + \frac{\dot{R}_0}{R_0}\right) \quad (5.37)$$

şeklinde dönüşür. Öyleyse  $\xi_0 = 0$ ,  $\dot{\eta} = h_1$  ve  $\frac{\dot{R}_0}{R_0} = -h_2$  seçilirse

$$\begin{aligned} A_1^3: \quad Q_1 &= \partial_x + m(t)\rho\partial_\rho, \\ g(x, t) &= (g_1(t) + ig_2(t))e^{-2xm(t)}, \\ q(x, t) &= (q_1(t) + iq_2(t))e^{-4xm(t)}, \\ h(x, t) &= -ix\dot{m}(t) \end{aligned} \quad (5.38)$$

cebiri elde edilmiş olur.  $Q_1$  için denklik dönüşümü not edilmelidir

$$\mathcal{E}(Q_1): \quad \tilde{x} = x + \xi_0, \quad \tilde{t} = t, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{r_0}, \quad \tilde{\omega} = \omega - \eta_0. \quad (5.39)$$

**Hatırlatma.**  $Q_1 = \partial_\omega$  tarafından üretilen faz değişmezliği katsayıların her durumu için denklemin bir simetrisidir, yani bir boyutlu maksimal simetri cebiridir. Dolayısıyla daha büyük boyutlu simetri cebirleri,  $\{Q_1 = \partial_\omega\}$  cebirinin daha büyük boyutlara genişlemesi olacak, elde edilecek tüm sınıflarda bu üreteç bulunacaktır.

### 5.3.3 İki boyutlu cebirler

İki boyutlu Lie cebiri  $\{Q_1, Q_2\}$ , ya  $[Q_1, Q_2] = 0$  koşulunu sağlayan  $A_{2.1} = A_1 \oplus A_1 = 2A_1$  abelyen cebirdir veya  $[Q_1, Q_2] = Q_1$  komütasyon bağıntısını sağlayan abelyen olmayan  $A_{2.2}$  cebirine denktir. İki boyutlu cebirlerin oluşturulmasında, önce elemanlardan birinin (örneğin  $Q_1$ ) yukarıda elde edilen kanonik formlardan birinde ( $A_1^1, A_1^2$  veya  $A_1^3$ ) olduğu varsayılacaktır. İkinci eleman  $V$  genel formunda kabul

edilecektir. Komütasyon bağıntıları, belirleyici denklemler ve denklik dönüşümleri bu ikinci elemanın kanonik formunu belirleyecektir.

$Q_1 = \partial_\omega$ ,  $Q_2 = V$  seçer ( $V$  üretici (5.14) yapısındadır) ve  $[Q_1, V] = 0$  koşulunu kullanırsak, bu koşulun  $V$ 'nin yapısı üzerine kısıt getirmeden sağlandığını görürüz. Hatırlarsak  $Q_1 = \partial_\omega$ , katsayıların her durumu için denklemin bir simetrisiydi. Dolayısıyla geriye,  $Q_2 = V$ 'nin denklik dönüşümleriyle basitleştirilmesi ve sonrasında belirleyici denklemlerin çözülmesi kalır. Bu ise tam olarak bir boyutlu cebirleri elde ederken yaptığımız şeydir.  $A_1^2$  ve  $A_1^3$  cebirlerinin üreticileri,  $Q_2$ 'nin kanonik formları olacaktır.

$$\begin{aligned} A_{2,1}^1 : \quad Q_1 &= \partial_\omega, \quad Q_2 = \partial_t, \\ g(x,t) &= g_1(x) + ig_2(x), \\ q(x,t) &= q_1(x) + iq_2(x), \quad h(x,t) = h_1(x) + ih_2(x). \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} A_{2,1}^2 : \quad Q_1 &= \partial_\omega, \quad Q_2 = \partial_x + m(t)\rho\partial_\rho, \\ g(x,t) &= (g_1(t) + ig_2(t))e^{-2xm(t)}, \\ q(x,t) &= (q_1(t) + iq_2(t))e^{-4xm(t)}, \quad h(x,t) = -ix\dot{m}(t). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Bu cebirlerin  $\mathcal{E}$  grupları sırasıyla  $A_1^2$  ve  $A_1^3$  ile aynıdır.

$Q_1 = \partial_\omega$  üreticinin  $V$  genel elemanı ile komütasyonu sıfır olduğundan iki boyutlu abelyen olmayan cebirin gerçekleşmesi mümkün değildir.

### 5.3.4 Üç boyutlu cebirler

Birbirine izomorf olmayan 11 tane üç boyutlu Lie cebiri mevcuttur. Bu cebirler  $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$  şeklinde gösterilirse, sıfırdan farklı olmayan komütasyon bağıntıları aşağıdaki gibidir.

Çözülemez cebirler (Yarı-basit durum)

$$A_{3,3} : \quad [Q_1, Q_2] = Q_1, [Q_2, Q_3] = Q_3, [Q_1, Q_3] = 2Q_2.$$

$$A_{3,4} : \quad [Q_1, Q_2] = Q_3, [Q_2, Q_3] = Q_1, [Q_3, Q_1] = Q_2.$$

Çözülebilir cebirler

$$A_{3,1} = A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 = 3A_1 \quad (\text{ayrıştırılabilir}).$$

$$A_{3,2} = A_{2,2} \oplus A_1 : \quad [Q_1, Q_2] = Q_1 \quad (\text{ayrıştırılabilir}).$$

$$A_{3,5} : \quad [Q_2, Q_3] = Q_1 \quad (\text{nilpotent}).$$

$$A_{3.6} : [Q_1, Q_3] = Q_1, [Q_2, Q_3] = Q_1 + Q_2.$$

$$A_{3.7} : [Q_1, Q_3] = Q_1, [Q_2, Q_3] = Q_2.$$

$$A_{3.8} : [Q_1, Q_3] = Q_1, [Q_2, Q_3] = -Q_2.$$

$$A_{3.9} : [Q_2, Q_3] = Q_2, [Q_1, Q_3] = q_0 Q_1 \quad (0 < |q_0| < 1).$$

$$A_{3.10} : [Q_1, Q_3] = -Q_2, [Q_2, Q_3] = Q_1.$$

$$A_{3.11} : [Q_1, Q_3] = q_0 Q_1 - Q_2, [Q_2, Q_3] = Q_1 + q_0 Q_2, \quad q_0 > 0.$$

Üç boyutlu cebirlerin inşa edilmesi iki boyutlu durumda yapıldığı gibi gerçekleştirilecektir. Öncelikle  $\{Q_1, Q_2\}$  çiftinin, iki boyutlu durumda elde edilen kanonik forma getirilmiş olduğunu varsayacağız.  $Q_3$  vektörü  $V$  genel formunda kabul edilecektir. İlgili cebirin komütasyon bağıntıları, denklik dönüşümleri ve belirleyici denklemler, (mümkünse) üçüncü eleman  $V$ 'nin yapısını belirleyecektir.

$A_{2.1}^1$  ve  $A_{2.1}^2$  iki boyutlu cebirleri daha yüksek boyutlu cebirlerin yapıtaşları olacaktır. Yukarıdaki listeden görüldüğü gibi üç boyutlu bir cebir basit bir cebirdir veya çözülebilir bir cebirdir.  $Q_1 = \partial_\omega$  her zaman cebirde bulunacağından ve  $V$  ile komütasyonu sıfır olduğundan, elde edilen iki boyutlu cebirden basit cebirlerin gerçekleşmesi mümkün değildir. Çözülebilir cebirlerin tümünün iki boyutlu abelyen bir ideali vardır.  $Q_1 = \partial_\omega$ ,  $Q_2$  (5.40) veya (5.41)'de verildiği şekliyle ve  $Q_3 = V$  genel eleman olmak üzere üç boyutlu bir cebiri  $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$  şeklinde gösterelim. Burada  $\{Q_1, Q_2\}$  abelyen idealdir. Öyleyse komütasyon bağıntıları

$$[Q_1, Q_3] = 0, \quad [Q_2, Q_3] = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 \quad (5.42)$$

şeklinde olacaktır.  $a_2 \neq 0$  ise bir baz değişimi ile her zaman  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$  yapılabilir. Bu  $A_{3.2}$  ayrıştırılabilir cebiridir (elemanların numaralanışı farklıdır).  $a_2 = 0$  ise,  $a_1 = 0$  durumunda  $A_{3.1}$  abelyen cebiri,  $a_1 = 1$  kanonik durumunda da  $A_{3.5}$  nilpotent cebiri mümkün olacaktır.

Şimdi  $A_{2.1}^1$  ve  $A_{2.1}^2$  iki boyutlu abelyen ideallerinden bu cebirlerin nasıl gerçekleştirileceği gösterilecektir.

#### 5.3.4.1 Abelyen durum

$A_{2.1}^1$  ile başlayalım.  $Q_1 = \partial_\omega$ ,  $Q_2 = \partial_t$ ,  $Q_3 = V$  olsun.

$$[Q_2, V] = (\dot{\alpha} + \frac{x}{2} \ddot{\tau}) \partial_x + \dot{\tau} \partial_t + \dot{A} \rho \partial_\rho + (\dot{n} + \frac{x}{2} \ddot{\alpha} + \frac{x^2}{8} \ddot{\tau}) \partial_\omega = 0 \quad (5.43)$$

koşulundan, üreteç fonksiyonları  $\tau(t) = \tau_0$ ,  $\alpha(t) = \alpha_0$ ,  $n(t) = n_0$  şeklinde sabitler olarak elde edilir. Öyleyse  $V = \alpha_0 \partial_x + \tau_0 \partial_t + A_0 \rho \partial_\rho + n_0 \partial_\omega$  şeklindedir. Bir baz değişimi ile  $\tau_0 \rightarrow 0$  yapılabilir.  $\alpha_0 = 0$  ise, (5.16a)-(5.16d) denklemlerinden birinden  $A_0 = 0$  bulunur ve  $V = \partial_\omega$  elde edilir, ama bu  $Q_1$  ile aynıdır.  $\alpha_0 \neq 0$  varsayalım.  $V$ 'yi ölçekleyerek  $\alpha_0 \rightarrow 1$  yapabiliriz, bu durumda  $V = \partial_x + A_0 \rho \partial_\rho + n_0 \partial_\omega$  olur. Bu vektörün katsayıları için belirleyici denklemler çözüldüğünde,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \partial_\omega, \quad Q_2 = \partial_t, \quad Q_3 = \partial_x + a \rho \partial_\rho, \\ g(x, t) &= (g_1 + i g_2) \exp(-2ax), \\ q(x, t) &= (q_1 + i q_2) \exp(-4ax), \\ h(x, t) &= h_1 + i h_2, \quad a, g_1, g_2, q_1, q_2, h_1, h_2 \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5.44)$$

bulunur (sabitler farklı isimlendirildi). Burada  $h_1$  ve  $h_2$  sabitlerini,  $Q_1$  ve  $Q_2$ 'yi değişmez bırakarak denklik dönüşümleriyle yok etmek mümkün değildir.

Şimdi ideal olarak  $A_{2,1}^2$ 'i alalım.  $Q_1 = \partial_\omega$ ,  $Q_2 = \partial_x + m(t) \rho \partial_\rho$ ,  $Q_3 = V$  diyelim. Komütasyon koşulu

$$[Q_1, V] = \frac{\dot{t}}{2} \partial_x - \tau \dot{m} \rho \partial_\rho + \left( \frac{\dot{\alpha}}{2} + \frac{x}{4} \ddot{t} \right) \partial_\omega = 0 \quad (5.45)$$

olarak elde edilir. (i)  $\tau(t) = 0$  ise,  $\alpha(t) = \alpha_0$  olmalıdır ve  $V = \alpha_0 \partial_x + A(t) \rho \partial_\rho + n(t) \partial_\omega$  bulunur. Baz değişimi ile  $V$  vektörü  $\hat{V} = V - \alpha_0 Q_1 = A(t) \rho \partial_\rho + n(t) \partial_\omega$  şekline getirilebilir ( $A(t)$  keyfi fonksiyon). Belirleyici denklemler çözümlerse  $\hat{V} = \partial_\omega$  bulunur ancak bu durum da  $A_{2,1}^2$  cebiri ile aynıdır. (ii)  $\tau(t) \neq 0$  olsun.  $m(t) = m_0$ ,  $\alpha(t) = \alpha_0$ ,  $\tau(t) = \tau_0$  bulunur. O zaman vektörler  $Q_2 = \partial_x + m_0 \rho \partial_\rho$ ,  $V = \alpha_0 \partial_x + \tau_0 \partial_t + A(t) \rho \partial_\rho + n(t) \partial_\omega$  şeklindedir.  $V$  ölçeklenerek  $\tau_0 \rightarrow 1$  yapılabilir ve bir baz değişimi ile  $\hat{V} = V - \alpha_0 Q_2 = \partial_t + A(t) \rho \partial_\rho + n(t) \partial_\omega$  bulunur ( $A(t)$  yeniden adlandırıldı). Belirleyici denklemler çözümlünce,  $A(t)$  ve  $n(t)$ 'nin sabitler olması gerektiği görülür. Böylelikle  $A_1^3$ 'e ait genişleme aşağıdaki gibi elde edilir

$$\begin{aligned} A_{3,1}^1: \quad Q_1 &= \partial_\omega, \quad Q_2 = \partial_x + a \rho \partial_\rho, \quad Q_3 = \partial_t + b \rho \partial_\rho, \\ g(x, t) &= (g_1 + i g_2) \exp(-2(ax + bt)), \\ q(x, t) &= (q_1 + i q_2) \exp(-4(ax + bt)), \\ h(x, t) &= 0, \quad a, b, g_1, g_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Denklik dönüşümü (5.39) gibidir.

(5.44) cebirini abelyen cebir olarak listelemedik. Bunun sebebi

$$\tilde{x} = x + \xi_0, \quad \tilde{t} = t + T_0, \quad \tilde{\rho} = \rho \exp(h_2 t), \quad \tilde{\omega} = \omega - h_1 t + \eta_0. \quad (5.47)$$

dönüşümü uyarınca  $A_{3,1}^3$  cebirine denk olmasıdır ve iki boyutlu abelyen cebirlerin listesinde içermemiştir.

### 5.3.4.2 Ayırıştırılabilir durum

$A_{2,1}^1$  ile başlayalım ve  $Q_1 = \partial_\omega$ ,  $Q_2 = \partial_t$ ,  $Q_3 = V$  diyelim. Komütasyon koşulu

$$[Q_2, V] = (\dot{\alpha} + \frac{x}{2}\ddot{\tau})\partial_x + \dot{\tau}\partial_t + \dot{A}\rho\partial_\rho + (\dot{n} + \frac{x}{2}\ddot{\alpha} + \frac{x^2}{8}\ddot{\tau})\partial_\omega = Q_2 \quad (5.48)$$

gerektirir. Vektör alanı

$$V = (\alpha_0 + \frac{x}{2})\partial_x + (t + \tau_0)\partial_t + A_0\rho\partial_\rho + n_0\partial_\omega \quad (5.49)$$

olarak bulunur, tüm indisli terimler sabittir.  $V \rightarrow V - \tau_0 Q_2$  baz değişimi düşünülerek  $\tau_0 = 0$  varsayılabilir. (5.29) denklik dönüşümü uygulanırsa ( $\varepsilon = 1$ )

$$\tilde{V} = (\alpha_0 + \frac{\tilde{x} - \xi_0}{2})\partial_{\tilde{x}} + (\tilde{t} - T_0)\partial_{\tilde{t}} + A_0\tilde{\rho}\partial_{\tilde{\rho}} + n_0\partial_{\tilde{\omega}} \quad (5.50)$$

bulunur. O zaman  $\xi_0 = 2\alpha_0$ ,  $T_0 = 0$  seçilerek ve belirleyici denklemler çözülerek

$$A_{3,2}^1: \quad Q_1 = \partial_\omega, \quad Q_2 = \partial_t, \quad Q_3 = \frac{x}{2}\partial_x + t\partial_t + a\rho\partial_\rho, \quad (5.51)$$

$$g(x, t) = \frac{g_1 + ig_2}{x^{2(2a+1)}}, \quad q(x, t) = \frac{q_1 + iq_2}{x^{2(4a+1)}}, \quad h(x, t) = \frac{h_1 + ih_2}{x^2}$$

bulunur, burada  $a, g_1, g_2, q_1, q_2, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$  sabitlerdir.

$A_{2,1}^2$  cebirinin genişlemesini elde edelim.  $Q_1 = \partial_\omega$ ,  $Q_2 = \partial_x + m(t)\rho\partial_\rho$  ve  $Q_3 = V$  için

$$[Q_2, V] = \frac{\dot{\tau}}{2}\partial_x - \tau\dot{m}\rho\partial_\rho + (\frac{\dot{\alpha}}{2} + \frac{x}{4}\ddot{\tau})\partial_\omega = Q_2 \quad (5.52)$$

koşulundan  $\tau(t) = 2(t + \tau_0)$ ,  $m(t) = \frac{m_0}{\sqrt{t + \tau_0}}$ ,  $\alpha(t) = \alpha_0$  bulunur, öyleyse

$$Q_2 = \partial_x + \frac{m_0}{\sqrt{t + \tau_0}}\rho\partial_\rho, \quad V = (x + \alpha_0)\partial_x + 2(t + \tau_0)\partial_t + A(t)\rho\partial_\rho + n(t)\partial_\omega \quad (5.53)$$

olmalıdır. (5.39) dönüşümü ile  $\alpha_0 = 0$  yapılır. Belirleyici denklemlerden  $A(t)$  ve  $n(t)$  sabit olarak bulunur:

$$A_{3,2}^2: \quad Q_1 = \partial_\omega, \quad Q_2 = \partial_x + \frac{a}{\sqrt{t+b}}\rho\partial_\rho, \quad Q_3 = x\partial_x + 2(t+b)\partial_t + c\rho\partial_\rho, \quad (5.54)$$

$$g(x, t) = \frac{g_1 + ig_2}{(t+b)^{1+c}} \exp\left(\frac{-2ax}{\sqrt{t+b}}\right)$$

$$q(x, t) = \frac{q_1 + iq_2}{(t+b)^{1+2c}} \exp\left(\frac{-4ax}{\sqrt{t+b}}\right), \quad h(x, t) = i\frac{ax}{2(t+b)^{3/2}}.$$

### 5.3.4.3 Nilpotent cebirler

$A_{2,1} = \{Q_1, Q_2\}$  abelyen cebirlerini  $[Q_2, Q_3] = Q_1$  koşulunu sağlayacak  $Q_3 = V$  üreticiyle genişleterek  $A_{3,5}$  cebirini gerçeklemeye çalışacağız.  $A_{2,1}^1$  cebirinden

$$\begin{aligned} A_{3,5}^1: \quad Q_1 &= \partial_\omega, \quad Q_2 = \partial_t, \quad Q_3 = \partial_x + a\rho\partial_\rho + t\partial_\omega, \\ g(x,t) &= (g_1 + ig_2)\exp(-2ax), \quad q(x,t) = (q_1 + iq_2)\exp(-4ax), \quad (5.55) \\ h(x,t) &= x + h_1 + ih_2, \quad a, g_1, g_2, q_1, q_2, h_1, h_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

nilpotent cebirini elde etmek mümkündür.  $A_{2,1}^2$ 'den aşağıdaki iki farklı cebir elde edilebilmektedir.

$$\begin{aligned} A_{3,5}^2: \quad Q_1 &= \partial_\omega, \quad Q_2 = \partial_x + a\rho\partial_\rho, \quad Q_3 = 2t\partial_x + \tau_0\partial_t + b\rho\partial_\rho + x\partial_\omega, \\ g(x,t) &= (g_1 + ig_2)\exp\left(-2ax + \frac{2}{\tau_0}(at^2 - bt)\right), \quad (5.56) \\ q(x,t) &= (q_1 + iq_2)\exp\left(-4ax + \frac{4}{\tau_0}(at^2 - bt)\right), \quad h(x,t) = 0. \end{aligned}$$

Burada  $\tau_0 \neq 0, a, b, g_1, g_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}$  sabitlerdir.  $\tau_0 = 0$  olması durumunda

$$\begin{aligned} A_{3,5}^3: \quad Q_1 &= \partial_\omega, \quad Q_2 = \partial_x, \quad Q_3 = 2t\partial_x + x\partial_\omega, \quad (5.57) \\ g(x,t) &= g_1(t) + ig_2(t), \quad q(x,t) = q_1(t) + iq_2(t), \quad h(x,t) = 0 \end{aligned}$$

cebiri ortaya çıkmaktadır.

Böylelikle üç boyutlu cebirlerin sınıflandırması tamamlanmış olur.

### 5.3.5 Dört boyutlu cebirler

Dört boyutlu Lie cebirlerinin bir listesi ve ilgili komütasyon bağıntıları için [78] incelenebilir. Dört boyutlu durumda birbirine denk olmayan dört adet cebir elde edilmiştir.

Çözülemez cebirler için,  $A_{3,3}$  cebiri aşikar olarak

$$\begin{aligned} A_{3,3} \oplus A_1: \quad Q_1 &= \partial_t, \quad Q_2 = \frac{x}{2}\partial_x + t\partial_t - \frac{1}{4}\rho\partial_\rho, \\ Q_3 &= xt\partial_x + t^2\partial_t - \frac{1}{2}t\rho\partial_\rho + \frac{x^2}{4}\partial_\omega, \quad Q_4 = \partial_\omega, \quad (5.58) \\ g(x,t) &= (g_1 + ig_2)x^{-1}, \quad q(x,t) = q_1 + iq_2, \quad h(x,t) = (h_1 + ih_2)x^{-2} \end{aligned}$$

genişlemesini verir. Çözülebilir cebirler ayrıştırılabilir veya ayrıştırılmaz şeklinde iki gruptadır. Ayrıştırılabilir cebirler gerçekleştirilememektedir. Geriye ayrıştırılmayan

cebirlerin analizi kalır. Öncelikle,  $A_{3,1}$  cebirinin Galilei itkisini üreten vektörle yarı-direkt toplamı olan

$$\begin{aligned} Q_1 &= \partial_x, \quad Q_2 = \partial_t + b\rho\partial_\rho, \quad Q_3 = \partial_\omega, \quad Q_4 = t\partial_x + \frac{x}{2}\partial_\omega, \\ g(x,t) &= (g_1 + ig_2)\exp(-2bt), \quad q(x,t) = (q_1 + iq_2)\exp(-4bt), \\ h(x,t) &= 0, \quad b, g_1, g_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5.59)$$

nilpotent cebirini not edelim. Eğer  $\tilde{t} = t$ ,  $\tilde{x} = x$ ,  $\tilde{\rho} = \rho \exp(-bt)$ ,  $\tilde{\omega} = \omega$  dönüşümü uygulanırsa bu sınıf

$$\begin{aligned} A_{4,1}: \quad Q_1 &= \partial_\omega, \quad Q_2 = \partial_x, \quad Q_3 = \partial_t, \quad Q_4 = t\partial_x + \frac{x}{2}\partial_\omega, \\ g(x,t) &= (g_1 + ig_2), \quad q(x,t) = (q_1 + iq_2), \\ h(x,t) &= ih_2, \quad h_2, g_1, g_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

şeklinde basitleştirilebilir.  $A_{3,5}^3$  nilpotent idealinden ise iki tane ayrıştırılamayan cebir elde edilmiştir. İlki, bu nilpotent idealin ölçek dönüşümünü üreten bir boyutlu cebir ile yarı-direkt toplamıdır

$$\begin{aligned} Q_1 &= \partial_\omega, \quad Q_2 = \partial_x, \quad Q_3 = 2t\partial_x + x\partial_\omega, \quad Q_4 = x\partial_x + 2t\partial_t + a\rho\partial_\rho, \\ g(x,t) &= \frac{g_1 + ig_2}{t^{1+a}}, \quad q(x,t) = \frac{q_1 + iq_2}{t^{1+2a}}, \quad h(x,t) = 0. \end{aligned} \quad (5.61)$$

$\tilde{t} = t$ ,  $\tilde{x} = x$ ,  $\tilde{\rho} = \rho t^{-(1+a)/2}$ ,  $\tilde{\omega} = \omega$  dönüşümü ile

$$\begin{aligned} A_{4,8}: \quad Q_1 &= \partial_\omega, \quad Q_2 = \partial_x, \quad Q_3 = 2t\partial_x + x\partial_\omega, \quad Q_4 = x\partial_x + 2t\partial_t - \rho\partial_\rho, \\ g(x,t) &= g_1 + ig_2, \quad q(x,t) = (q_1 + iq_2)t, \quad h(x,t) = i\frac{h_2}{t} \end{aligned} \quad (5.62)$$

kanonik formu seçilecektir, burada  $h_2$  bir sabittir. Diğeri ise konformal dönüşümü üreten bir boyutlu cebir ile yarı-direkt toplam yapısındadır

$$\begin{aligned} Q_1 &= \partial_\omega, \quad Q_2 = \partial_x, \quad Q_3 = 2t\partial_x + x\partial_\omega, \\ Q_4 &= xt\partial_x + (1+t^2)\partial_t - \frac{1}{2}(b+t)\rho\partial_\rho + \frac{x^2}{4}\partial_\omega, \\ g(x,t) &= \frac{g_1 + ig_2}{\sqrt{1+t^2}} \exp(b \arctan t), \\ q(x,t) &= (q_1 + iq_2) \exp(2b \arctan t), \quad h(x,t) = 0 \end{aligned} \quad (5.63)$$

ve  $\tilde{t} = t$ ,  $\tilde{x} = x$ ,  $\tilde{\rho} = \rho(1+t^2)^{-1/4} \exp(\frac{b}{2} \arctan t)$ ,  $\tilde{\omega} = \omega$  dönüşümü ile

$$\begin{aligned} A_{4,9}: \quad Q_1 &= \partial_\omega, \quad Q_2 = \partial_x, \quad Q_3 = 2t\partial_x + x\partial_\omega, \\ Q_4 &= xt\partial_x + (1+t^2)\partial_t - t\rho\partial_\rho + \frac{x^2}{4}\partial_\omega, \\ g(x,t) &= (g_1 + ig_2), \quad q(x,t) = (q_1 + iq_2)(1+t^2), \quad h(x,t) = i\frac{t+h_2}{2(1+t^2)} \end{aligned} \quad (5.64)$$

şeklinde basitleştirilecektir.

### 5.3.6 Beş ve altı boyutlu cebirler

(5.10) denkleminin daha yüksek boyutlu cebirlerini bulmak için, doğrudan belirleyici denklemleri (5.58), (5.60), (5.62), (5.64) sınıfları için çözeceğiz.

#### 5.3.6.1 $A_{3,3} \oplus A_1$ cebiri

(5.16a)-(5.16f) denklemlerinden

$$((4A + \dot{\tau})x - 2\alpha)g_1 = 0, \quad (5.65a)$$

$$((4A + \dot{\tau})x - 2\alpha)g_2 = 0, \quad (5.65b)$$

$$(4A + \dot{\tau})q_1 = 0, \quad (5.65c)$$

$$(4A + \dot{\tau})q_2 = 0, \quad (5.65d)$$

$$\frac{2\alpha}{x^3}h_1 + \dot{n} + \frac{\ddot{\alpha}}{2}x + \frac{\ddot{\tau}}{8}x^2 = 0, \quad (5.65e)$$

$$\frac{2\alpha}{x^3}h_2 - \dot{A} - \frac{\ddot{\tau}}{4} = 0 \quad (5.65f)$$

elde edilir. İki farklı durumu dikkate alalım:

(i)  $\alpha(t) \neq 0$  olsun.  $g_1 = g_2 = h_1 = h_2 = 0$  olmalıdır. Bu, sıfır potansiyele sahip sabit katsayılı kuintik durumdur. (5.65e) denkleminde

$$\tau(t) = c_1 + c_2t + c_3t^2, \quad \alpha(t) = c_4t + c_5, \quad n(t) = c_6 \quad (5.66)$$

elde edilir, burada  $c_i, i = 1, \dots, 6$  sabitlerdir.  $q_1$  ve  $q_2$  aynı anda sıfır olamayacağından, (5.65c) veya (5.65d)  $A(t) = -\dot{\tau}/4 = -(c_2 + 2c_3t)/4$  olmasını gerektirir ve bu sayede (5.65f) de sağlanır. (5.14)  $V$  vektör alanı altı adet sabit içerir, öyleyse Lie cebiri aşağıdaki gibi altı boyutludur

$$\begin{aligned} Q_1 &= \partial_t, \quad Q_2 = \frac{x}{2}\partial_x + t\partial_t - \frac{1}{4}\rho\partial_\rho, \quad Q_3 = xt\partial_x + t^2\partial_t - \frac{1}{2}t\rho\partial_\rho + \frac{x^2}{4}\partial_\omega, \\ Q_4 &= \partial_\omega, \quad Q_5 = t\partial_x + \frac{x}{2}\partial_\omega, \quad Q_6 = \partial_x, \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$g(x, t) = 0, \quad q(x, t) = q_1 + iq_2, \quad h(x, t) = 0, \quad q_1, q_2 \in \mathbb{R}.$$

(ii)  $\alpha(t) = 0$  ise  $g_1, g_2, q_1, q_2$  sabitlerinden birinin sıfır olmaması durumunda  $4A + \dot{\tau} = 0$  olmalıdır ve analizin devamı (i) ile aynıdır ancak bu durumda  $c_4 = c_5 = 0$  olduğundan  $V$  vektör alanında  $c_1, c_2, c_3, c_6$  sabitleri yaşamaya devam eder. Bu nedenle dört boyutlu cebiri genişletmek mümkün değildir,  $A_{3,3} \oplus A_1$  cebirinin kendisi elde edilir.

### 5.3.6.2 $A_{4,1}$ cebiri

Belirleyici denklem takımı

$$(2A + \dot{\tau})g_1 = 0, \quad (5.68a)$$

$$(2A + \dot{\tau})g_2 = 0, \quad (5.68b)$$

$$(4A + \dot{\tau})q_1 = 0, \quad (5.68c)$$

$$(4A + \dot{\tau})q_2 = 0, \quad (5.68d)$$

$$\dot{n} + \frac{\ddot{\alpha}}{2}x + \frac{\ddot{\tau}}{8}x^2 = 0, \quad (5.68e)$$

$$h_2\dot{\tau} + \dot{A} + \frac{\ddot{\tau}}{4} = 0 \quad (5.68f)$$

şeklinde bulunur. (5.68e)'den  $\tau(t) = c_1 + c_2t + c_3t^2$ ,  $\alpha(t) = c_4t + c_5$ ,  $n(t) = c_6$  bulunur.

Üç ayrı durum için inceleme yapılacaktır.

(i)  $q_1 = q_2 = 0$ ,  $g_1^2 + g_2^2 \neq 0$ . (5.68a) ve (5.68b) denklemlerinin birinden  $A = -\dot{\tau}/2$  bulunur. (5.68f) kullanılırsa

$$2h_2c_3t + h_2c_2 - \frac{c_3}{2} = 0 \quad (5.69)$$

koşulu elde edilir.  $h_2 = 0$  ise yalnızca  $c_3 = 0$  koşulu vardır, dolayısıyla vektör alanında beş tane keyfi sabit bulunur ve Lie simetri cebiri

$$\begin{aligned} Q_1 &= \partial_\omega, \quad Q_2 = \partial_x, \quad Q_3 = \partial_t, \\ Q_4 &= t\partial_x + \frac{x}{2}\partial_\omega, \quad Q_5 = \frac{x}{2}\partial_x + t\partial_t - \frac{1}{2}\rho\partial_\rho, \\ g(x,t) &= g_1 + ig_2, \quad q(x,t) = 0, \quad h(x,t) = 0, \quad g_1, g_2 \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5.70)$$

şeklinde beş boyutlu olarak elde edilir.  $h_2 \neq 0$  ise (5.69) denklemi  $c_2 = c_3 = 0$  gerektirir ve cebir dört boyutta kalır.

(ii)  $g_1 = g_2 = 0$ ,  $q_1^2 + q_2^2 \neq 0$ . (5.68c) ve (5.68d) denklemlerinin birinden  $A = -\dot{\tau}/4$  elde edilir, (5.68f)'den ise

$$h_2(c_2 + 2c_3t) = 0 \quad (5.71)$$

koşulu gelir.  $h_2 = 0$  durumu (5.67)'de verilen altı boyutlu cebire karşılık gelir.  $h_2 \neq 0$  ise (5.71) gereğince  $c_2 = c_3 = 0$  olması gerekir ve dört boyutlu cebir genişletilemez.

(iii)  $g_1^2 + g_2^2 \neq 0$ ,  $q_1^2 + q_2^2 \neq 0$ . (5.68a)-(5.68d) denklemlerinden  $c_2 = c_3 = 0$  ve  $A(t) = 0$  elde edilir. Dolayısıyla kübik-kuintik durumda da cebir genişlememektedir.

### 5.3.6.3 $A_{4,8}$ cebiri

Belirleyici denklemler

$$(2A + \dot{\tau})g_1 = 0, \quad (5.72a)$$

$$(2A + \dot{\tau})g_2 = 0, \quad (5.72b)$$

$$(\tau + (4A + \dot{\tau})t)q_1 = 0, \quad (5.72c)$$

$$(\tau + (4A + \dot{\tau})t)q_2 = 0, \quad (5.72d)$$

$$\dot{n} + \frac{\ddot{\alpha}}{2}x + \frac{\ddot{\tau}}{8}x^2 = 0, \quad (5.72e)$$

$$-\tau \frac{h_2}{t^2} + \dot{\tau} \frac{h_2}{t} + \dot{A} + \frac{\ddot{\tau}}{4} = 0 \quad (5.72f)$$

şeklindeir.  $\tau(t) = c_1 + c_2t + c_3t^2$ ,  $\alpha(t) = c_4t + c_5$ ,  $n(t) = c_6$  bulunur.

(i)  $q_1 = q_2 = 0$ ,  $g_1^2 + g_2^2 \neq 0$ . (5.72a) veya (5.72b) denkleminde  $A = -\dot{\tau}/2$  bulunur ve (5.72f)

$$(2h_2 - 1)c_3t^2 - 2h_2c_1 = 0 \quad (5.73)$$

koşulunu verir.

(A)  $h_2 = 1/2$  durumu.  $c_1 = 0$  olmalıdır. Vektör alanında beş tane keyfi sabit bulunur. Bu durumda elde edilen denklem, denklik dönüşümleriyle (5.70)'te verilen denkleme dönüştürülebilir.

(B)  $h_2 \neq 1/2$  durumu.  $h_2 \neq 0$  ise  $c_1 = c_3 = 0$  olmalıdır ve cebir dört boyutta kalır.  $h_2 = 0$  ise (5.70) durumu olduğu aşikardır.

(ii)  $g_1 = g_2 = 0$ ,  $q_1^2 + q_2^2 \neq 0$ .  $A(t)$  fonksiyonu (5.72c) veya (5.72d)'den çözülerek (5.72f)'de yazıldığında

$$(1 - 4h_2)(c_1 - c_3t^2) = 0 \quad (5.74)$$

olması gerektiği görülür.  $h_2 = 1/4$  ise  $c_1, \dots, c_6$  sabitleri üzerinde bir koşul yoktur ve altı boyutlu bir cebir elde edilir. Elde edilen denklemin (5.67)'de verilene denkliği bir dönüşüm ile gösterilebilir.  $h_2 \neq 1/4$  ise  $c_1 = c_3 = 0$  olmalıdır ve cebirde genişleme mümkün olmaz.

(iii)  $g_1^2 + g_2^2 \neq 0$ ,  $q_1^2 + q_2^2 \neq 0$ . (5.72a)-(5.72d) denklemlerinden  $c_1 = c_3 = 0$  bulunur, (5.72f) sağlanır ve dört boyutlu cebir elde edilir.

#### 5.3.6.4 $A_{4,9}$ cebiri

$$(2A + \dot{\tau})g_1 = 0, \quad (5.75a)$$

$$(2A + \dot{\tau})g_2 = 0, \quad (5.75b)$$

$$\left(2t\tau + (4A + \dot{\tau})(1+t^2)\right)q_1 = 0, \quad (5.75c)$$

$$\left(2t\tau + (4A + \dot{\tau})(1+t^2)\right)q_2 = 0, \quad (5.75d)$$

$$\dot{n} + \frac{\ddot{\alpha}}{2}x + \frac{\ddot{\tau}}{8}x^2 = 0, \quad (5.75e)$$

$$\tau \left[ \frac{t+h_2}{2(1+t^2)} \right]_t + \dot{\tau} \left[ \frac{t+h_2}{2(1+t^2)} \right] + \dot{A} + \frac{\ddot{\tau}}{4} = 0 \quad (5.75f)$$

belirleyici denklemlerinden hemen  $\tau(t) = c_1 + c_2t + c_3t^2$ ,  $\alpha(t) = c_4t + c_5$ ,  $n(t) = c_6$  bulunur.

(i)  $q_1 = q_2 = 0$ ,  $g_1^2 + g_2^2 \neq 0$ .  $A(t)$  fonksiyonu (5.75a) veya (5.75b)'den çözülerek (5.75f)'de kullanılırsa

$$-(c_3 - c_1 - h_2c_2) + 2(h_2c_3 - h_2c_1 + c_2)t + (c_3 - c_1 - h_2c_2)t^2 = 0 \quad (5.76)$$

bulunur.  $c_2 = 0$  ve  $c_1 = c_3$  olmalıdır. Dört tane keyfi sabit elde edildiğinden cebirin boyutu dört olarak kalır.

(ii)  $g_1 = g_2 = 0$ ,  $q_1^2 + q_2^2 \neq 0$ . Benzer hesaplarla (5.75f)'den

$$h_2(c_2t^2 + 2(c_1 - c_3)t - c_2) = 0 \quad (5.77)$$

elde edilir.  $h_2 \neq 0$  ise yine  $c_2 = 0$  ve  $c_1 = c_3$  olmalıdır, cebirin boyutu dördttür.  $h_2 = 0$ , ise  $c_1, \dots, c_6$  sabitleri üzerinde kısıt yoktur ve altı boyutlu cebire genişler. Elde edilen denklemin (5.67) durumuna denk olduğu gösterilebilir.

(iii) Kübik-kuintik durumda da daha geniş bir cebir elde edilememektedir.

Bu bölümde elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

**Teorem 5.1** Değişken katsayılı kübik-kuintik durumda simetri cebirinin boyutu en fazla 4 olabilir. Bu durumda elde edilen, birbirine denk olmayan dört adet denklem sınıfı mevcuttur ve (5.58), (5.60), (5.62), (5.64)'te özetlenmiştir.

Kübik denklem durumunda  $A_{4.1}$  cebiri  $h_2 = 0$  için,  $A_{4.8}$  cebiri  $h_2 = \{0, 1/2\}$  için 5-boyutlu cebire genişler. Kuintik durumda,  $A_{3.3} \oplus A_1$  cebiri  $g = h = 0$ ,  $A_{4.1}$  cebiri  $h_2 = 0$ ,  $A_{4.8}$  cebiri  $h_2 = 1/4$ ,  $A_{4.9}$  cebiri  $h_2 = 0$  için 6-boyutlu cebire genişler.

**Teorem 5.2** Beş veya altı boyutlu simetri cebirine sahip değişken katsayılı kübik veya kuintik bir Schrödinger denklemi, sırasıyla

$$g(x, t) = g_1 + ig_2, \quad q(x, t) = 0, \quad h(x, t) = 0, \quad g_1, g_2 \in \mathbb{R} \quad (5.78)$$

veya

$$g(x, t) = 0, \quad q(x, t) = q_1 + iq_2, \quad h(x, t) = 0, \quad q_1, q_2 \in \mathbb{R} \quad (5.79)$$

standart kübik veya kuintik sabit katsayılı denklemlere dönüştürülebilir. Simetri cebiri ilk durumda Galilei benzeşim cebiri  $gs(1)$ 'e, ikinci durumda Schrödinger cebiri  $sch(1)$ 'e izomorftur.

#### 5.4 Sabit Katsayılı Denkleme Dönüşüm

Bu bölümde  $f = 1$  için (5.1) denkleminin sabit katsayılı kübik-kuintik denkleme dönüşümünü gerçekleştireceğiz. Bunun için denklik dönüşümlerini kullanarak, (5.3)'te

$$\tilde{f} = 1, \quad \tilde{g} = a_1 + ia_2 \neq 0, \quad \tilde{q} = b_1 + ib_2 \neq 0, \quad \tilde{k} = \tilde{h} = 0 \quad (5.80)$$

olması durumunu elde etmeye çalışacağız. Burada  $a_1, a_2, b_1, b_2$  reel sabitlerdir.  $\tilde{f} = 1$

$$X(x, t) = \varepsilon \sqrt{T}x + \xi(t), \quad \varepsilon = \mp 1 \quad (5.81)$$

olmasını gerektirir. (5.6b) ve (5.6c)'ye göre

$$\tilde{g} = (g_1 + ig_2) \frac{R^2}{T} = a_1 + ia_2, \quad \tilde{q} = (q_1 + iq_2) \frac{R^4}{T} = b_1 + ib_2 \quad (5.82)$$

olmalıdır.  $g_1(x, t) \neq 0$  varsayalım, bu  $a_1 \neq 0$  olmasını gerektirir. (5.82) koşullarından, dönüşümün mümkün olması için  $g$  ve  $q$ 'nin yapısına dair

$$g(x, t) = g_1(x, t) \left(1 + i \frac{a_2}{a_1}\right), \quad q(x, t) = \frac{b_1 + ib_2}{a_1^2} \frac{g_1^2(x, t)}{\gamma(t)} \quad (5.83)$$

bağıntıları elde edilir.  $g_2$  fonksiyonu  $g_1$ 'in bir sabit katı olmalı,  $q$  ile  $g_1^2$ 'nin oranı zamanın bir fonksiyonu olmalıdır. Bu koşullar sağlanıyorsa, dönüşüm fonksiyonları

$$T(t) = \int \gamma(t) dt, \quad R(x, t) = \left( \frac{a_1 \gamma(t)}{g_1(x, t)} \right)^{1/2} \quad (5.84)$$

şeklinde elde edilir.  $\tilde{k} = 0$  koşulundan

$$X_x(2\frac{R_x}{R} + k_1) + i(X_t + 2X_x\theta_x + k_2X_x) = 0 \quad (5.85)$$

bulunur. Reel kısmının sıfıra eşitlenmesinden

$$k_1(x, t) = \frac{g_{1,x}}{g_1} \quad (5.86)$$

koşulu elde edilir. Sanal kısımdan ise  $\theta$  çözülebilir:

$$\theta(x, t) = -\frac{\dot{\gamma}}{8\gamma}x^2 - \frac{\dot{\xi}}{2\varepsilon\sqrt{\gamma}}x - \frac{1}{2}\int k_2(x, t)dx + \eta(t). \quad (5.87)$$

Bundan sonra,  $\tilde{h} = 0$  koşulundan dönüşümü mümkün kılan potansiyel bileşenlerini aşağıdaki gibi elde ederiz

$$\begin{aligned} h_1(x, t) &= \left(\frac{3}{16}\left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)^2 - \frac{\ddot{\gamma}}{8\gamma}\right)x^2 + \left(\frac{\dot{\xi}\dot{\gamma} - \ddot{\xi}\gamma}{2\varepsilon\gamma^{3/2}}\right)x \\ &+ \frac{g_{1,xx}}{2g_1} - \frac{g_{1,x}^2}{4g_1^2} - \frac{k_2^2}{4} - \frac{1}{2}\int k_{2,t}dx + \frac{\dot{\xi}^2}{4\gamma} + \dot{\eta}, \end{aligned} \quad (5.88a)$$

$$h_2(x, t) = \frac{g_{1,t}}{2g_1} + \frac{k_2g_{1,x}}{2g_1} + \frac{1}{2}k_{2,x} - \frac{\dot{\gamma}}{4\gamma}. \quad (5.88b)$$

Sonuç olarak, (5.83), (5.86), (5.88) koşulları sağlanıyorsa, (5.1) denkleminin ( $f = 1$ ) standart sabit katsayılı denkleme dönüşümü (5.81), (5.84), (5.87) formüllerinde verilen  $X, T, R, \theta$  fonksiyonları ile mümkün olmaktadır.

**Hatırlatma.**  $k(x, t) = \frac{N}{x}$  olması durumunda (5.86) denkleminde, keyfi bir  $G$  için  $g_1(x, t) = G(t)x^N$  olması gerektiği görülür. (5.83) koşulu sağlanıyorsa, sabit katsayılı denkleme dönüşüme izin veren potansiyelin reel ve sanal kısımları

$$\begin{aligned} h_1(x, t) &= \left(\frac{3}{16}\left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)^2 - \frac{\ddot{\gamma}}{8\gamma}\right)x^2 + \left(\frac{\dot{\xi}\dot{\gamma} - \ddot{\xi}\gamma}{2\varepsilon\gamma^{3/2}}\right)x \\ &+ \frac{N(N-2)}{4x^2} + \frac{\dot{\xi}^2}{4\gamma} + \dot{\eta}, \end{aligned} \quad (5.89a)$$

$$h_2(x, t) = \frac{\dot{G}}{2G} - \frac{\dot{\gamma}}{4\gamma} \quad (5.89b)$$

olarak elde edilir.

$h_1$  fonksiyonundaki  $x^2$  teriminin katsayısı,  $T(t)$  fonksiyonunun Schwarz türevi cinsinden  $-\{T; t\}/8$  şeklinde ifade edilebilir. Bu demektir ki, eğer potansiyelde kuadratik terim yoksa, zaman dönüşümü üç parametreye bağlı Möbius dönüşümü

olmalıdır. Bunun,  $\gamma = \dot{T}(t)$  eşitliği ve (5.83) bağıntısı nedeniyle  $q$  üzerine bir koşul getireceği not edilmelidir.

**Hatırlatma.** Kübik-kuintik durumda dört boyutlu  $A_{3,3} \oplus A_1$ ,  $A_{4,8}$  ve  $A_{4,9}$  cebirleri (5.83), (5.86), (5.88) koşullarının tamamını sağlayamaz, ve bu sınıftaki denklemler sabit katsayılı kübik-kuintik denkleme dönüştürülemez.  $A_{4,1}$  sınıfındaki kanonik denklem bu koşulları yalnızca  $h_2 = 0$  için sağlayabilmektedir, bu ise aşık bir durumdur.

### 5.5 Değişken Katsayılı Radyal Tipte Kübik-Kuintik Schrödinger Denklemi İçin Simetri İndirgemeleri

Yukarıda yapılan sınıflandırmada elde edilen sonuçlara göre, (5.1) denklem ailesinin simetri cebirlerinin mümkün en büyük boyutu altıdır. Bu sınıftan bir denklemin simetri cebirinin boyutu beş veya altı ise, sırasıyla sabit katsayılı kübik veya kuintik denkleme dönüştürülebilir. Literatürde sabit katsayılı denklemlere ilişkin çalışmalar kullanılarak bu sınıf denklemler için çözümler elde edilebilir [79]. Dört boyutlu cebirler dört farklı durumda gerçekleşmiştir; bunlardan birinde kanonik denklem sabit katsayılı kübik-kuintik Schrödinger denklemidir, diğer üçü değişken katsayılı denklem aileleridir. Bu değişken katsayılı kanonik denklem sınıflarını bir dönüşümle sabit katsayılı hale getirmek mümkün değildir. Dört boyutlu simetri cebirlerine sahip denklemlerin adi diferansiyel denklemlere indirgemelerinin yapılması çözümlerinin irdelenmesi açısından ilginç olacaktır.

Simetri cebirleri, (5.10) esas alınarak belirlenmişti. (5.10) denkleminde  $\psi = x^{N/2} \tilde{\psi}(x, t)$  dönüşümü yapılırsa,

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \frac{N}{x}\psi_x + g|\psi|^2\psi + q|\psi|^4\psi + h\psi = 0 \quad (5.90)$$

radyal kübik-kuintik Schrödinger denklemi elde edilir ( $g, q, h$  farklıdır). Bu tipte bir denklem,

$$i\psi_t + \Delta\psi + g|\psi|^2\psi + q|\psi|^4\psi + h\psi = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R} \quad (5.91)$$

denklemine radyal koordinatın fonksiyonu olan çözümler arandığında elde edilir. (5.90) denkleminin indirgemeleri yapılırsa, (5.10) yanında çok boyutlu problemin

radyal çözümlerini de kapsayacak şekilde sonuçlar elde edilmiş olur. (5.90) denklemi için dört boyutlu simetri cebirlerine sahip kanonik sınıflar, bahsedilen dönüşümle Çizelge 5.1'deki gibi elde edilebilir. Çizelgede  $g_0 = g_1 + ig_2$ ,  $q_0 = q_1 + iq_2$ ,  $h_0 = h_1 + ih_2$  şeklinde sabitler gösterilmektedir.

**Çizelge 5.1:** (5.90) denklemi için dört boyutlu cebire sahip sınıflar

| Cebir                      | $f$           | $g$                    | $h$                                              |
|----------------------------|---------------|------------------------|--------------------------------------------------|
| $L_1 = \{T, D_1, C_1, W\}$ | $g_0 x^{N-1}$ | $q_0 x^{2N}$           | $\frac{1}{x^2} (h_0 + \frac{N(N-2)}{4})$         |
| $L_2 = \{T, P, B, W\}$     | $g_0 x^N$     | $q_0 x^{2N}$           | $\frac{N(N-2)}{4x^2} + ih_2$                     |
| $L_3 = \{P, B, D_2, W\}$   | $g_0 x^N$     | $q_0 t x^{2N}$         | $\frac{N(N-2)}{4x^2} + i \frac{h_2}{t}$          |
| $L_4 = \{P, B, C_2, W\}$   | $g_0 x^N$     | $q_0 (1 + t^2) x^{2N}$ | $\frac{N(N-2)}{4x^2} + i \frac{t+h_2}{2(1+t^2)}$ |

Simetri cebirlerindeki baz elemanlarını aşağıdaki gibi not edebiliriz:

$$T = \partial_t, \quad W = \partial_\omega, \quad P = \partial_x - \frac{N}{2x} \rho \partial_\rho, \quad B = t \partial_x - \frac{N}{2x} t \rho \partial_\rho + \frac{x}{2} \partial_\omega, \quad (5.92)$$

$$D_1 = x \partial_x + 2t \partial_t - \frac{N+1}{2} \rho \partial_\rho, \quad D_2 = \frac{x}{2} \partial_x + t \partial_t - \frac{N+2}{4} \rho \partial_\rho, \quad (5.93)$$

$$C_1 = xt \partial_x + t^2 \partial_t - \frac{N+1}{2} t \rho \partial_\rho + \frac{x^2}{4} \partial_\omega, \quad (5.94)$$

$$C_2 = xt \partial_x + (1 + t^2) \partial_t - \frac{N+2}{2} t \rho \partial_\rho + \frac{x^2}{4} \partial_\omega. \quad (5.95)$$

Sabitler üzerinde Bölüm 5.3.6'da elde edilen koşullar aşağıdaki Çizelge 5.2'de özetlenmiştir.

**Çizelge 5.2:** Sabitler üzerindeki koşullar

| Cebir | Koşullar                                                                          |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| $L_1$ | $(g_0, h_0) \neq (0, 0)$                                                          |
| $L_2$ | $(g_0, h_2) \neq (0, 0), \quad (q_0, h_2) \neq (0, 0)$                            |
| $L_3$ | $(g_0, h_2) \neq (0, \frac{1}{4}), \quad (q_0, h_2) \neq (0, \{0, \frac{1}{2}\})$ |
| $L_4$ | $(g_0, h_2) \neq (0, 0)$                                                          |

Bu dört denklem sınıfının Çizelge 4.2'de verilen bir boyutlu cebirlerin optimal sistemi altında indirgemeleri elde edilebilir. Yapılan analiz ve elde edilen indirgemeler, Bölüm 4.3 ile paralellik gösterdiğinden burada tekrar edilmeyecektir. Ulaşılan

sonuçlara kısaca değınmek gerekirse, incelenen denklemlerin indirgemeleri birinci ve ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımları olarak bulunmuştur. İerilen sabitlerin özel durumlarında ikinci mertebe denklemlerin bağlılığının kaldırılması mümkün olmuştur. Ancak tek bir denklem dışında Painlevé özelliğine sahip denkleme rastlanmamıştır. Ulaşılan denklemler için sayısal analiz önerilebilir.

Bu kısımda yapılan analiz bu tez çalışmasından İTÜ Dergisi için hazırlanan makalede detaylı olarak sunulmuştur.



## 6. KP-BURGERS DENKLEMİ SONSUZ BOYUTLU SİMETRİ CEBİRLERİ

### 6.1 Giriş

Bu bölümde,  $p(y,t) \neq 0$ ,  $q(y,t) \neq 0$ ,  $r(y,t) \neq 0$ ,  $\sigma(y,t) \neq 0$  olmak üzere değişken katsayılı

$$\begin{aligned} & (u_t + p(y,t)uu_x + q(y,t)u_{xx} + r(y,t)u_{xxx})_x + \sigma(y,t)u_{yy} \\ & + a(y,t)u_y + b(y,t)u_{xy} + c(y,t)u_{xx} + e(y,t)u_x + f(y,t)u + h(y,t) = 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

denkleminin grup-teorik özellikleri, sonsuz boyutlu simetri cebirlerine sahip olması açısından incelenecektir. Daha önce bahsedildiği gibi (6.1) denklemi,  $q = 0$ ,  $r = r(t)$  için (genelleştirilmiş KP denklemi) [54]'te,  $q = q(t)$ ,  $r = 0$  için (genelleştirilmiş Burgers denklemi) [55]'te incelenmiştir.  $q$  sönüm ve  $r$  dispersiyon terimlerinin sabitler olarak birlikte ortaya çıktığı modellere ilişkin [80] ve [81] örnek verilebilir.

Literatürde integre edilebilirliği bilinen  $2 + 1$ -boyutlu denklemler için zamana bağlı keyfi fonksiyonlar içeren Kac-Moody-Virasoro türünde simetri cebirleri tipik bir özelliktir. Özel olarak denklemin, bu tipte bir simetri cebirine sahip olup olamayacağı belirlenmeye çalışılacaktır. Denklemin simetri cebirinde Virasoro cebirinin bir alt cebir olarak ortaya çıkması, integre edilebilirliğin bir işareti olarak düşünülmektedir. Denklem bu tipte bir cebire sahip olmasa bile, sonsuz boyutlu bir simetri cebirinin bulunması, Lie teorisinin araçları kullanılarak geniş çözüm sınıflarının elde edilmesine imkan vermektedir [55].

Aşağıdaki analizde denklem önce nokta dönüşümleriyle kanonik forma getirilecek, ardından Lie cebirini belirleyen simetri üretici, denklemin katsayılarından bağımsız olarak keyfi fonksiyonlar taşıyacak şekilde belirlenmeye çalışılacaktır. Bu şekilde, sonsuz boyutlu simetri cebirlerinin tipleri ve karşılık gelen denklem sınıfları belirlenmiştir. Denklemi değişmez bırakan dönüşümlerde keyfi fonksiyon bulunduğunda, elde edilecek indirgemelerden bulunan çözümler de bu keyfi fonksiyonlara bağlı olarak

zenginlik kazanır. Elde edilen sınıflar için Painlevé testi sonuçları, indirgemeler ve tam çözümler sunularak sonuçlar zenginleştirilmeye çalışılmıştır.

## 6.2 Denklik Dönüşümleri ve Belirleyici Denklemler

(6.1) için denklik dönüşümleri

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= R(y, t) \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha p} x + S_0(y, t), \\ \tilde{x} &= \alpha(t)x + \beta(y, t), \quad \tilde{y} = Y(y, t), \quad \tilde{t} = T(t), \\ \alpha &\neq 0, \quad R \neq 0 \quad Y_y \neq 0, \quad \dot{T} \neq 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

şeklinde,

$$\left( \frac{ap_y}{p} + \frac{\sigma p_{yy}}{p} - \frac{2\sigma p_y^2}{p^2} - f \right) \dot{\alpha} = 0 \quad (6.3)$$

koşulu ile birlikte bulunur. Katsayı fonksiyonlarının dönüşmüş şekli aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\tilde{y}, \tilde{t}) &= p(y, t) \frac{R\alpha}{\dot{T}}, \quad \tilde{q}(\tilde{y}, \tilde{t}) = q(y, t) \frac{\alpha^2}{\dot{T}}, \quad \tilde{r}(\tilde{y}, \tilde{t}) = r(y, t) \frac{\alpha^3}{\dot{T}}, \\ \tilde{\sigma}(y, t) &= \sigma(y, t) \frac{Y_y^2}{\alpha \dot{T}}, \\ \tilde{a}(\tilde{y}, \tilde{t}) &= \frac{1}{\alpha \dot{T}} \{ aY_y + \sigma Y_{yy} + 2\sigma Y_y \frac{R_y}{R} \}, \\ \tilde{b}(\tilde{y}, \tilde{t}) &= \frac{1}{\alpha \dot{T}} \{ (b\alpha + 2\sigma\beta_y)Y_y + \alpha Y_t \}, \\ \tilde{c}(\tilde{y}, \tilde{t}) &= \frac{1}{\alpha \dot{T}} \{ c\alpha^2 + \beta_t \alpha + pS_0\alpha^2 + \sigma\beta_y^2 + b\alpha\beta_y \}, \\ \tilde{e}(\tilde{y}, \tilde{t}) &= \frac{1}{\alpha R \dot{T}} \{ R\alpha e - R\dot{\alpha} + R_t \alpha + aR\beta_y + \sigma R\beta_{yy} + b\alpha R_y + 2\sigma R_y \beta_y \}, \\ \tilde{f}(\tilde{y}, \tilde{t}) &= \frac{1}{\alpha R \dot{T}} (fR + aR_y + \sigma R_{yy}), \\ \tilde{h}(\tilde{y}, \tilde{t}) &= \frac{1}{\alpha R \dot{T}} \left\{ h - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{\alpha}}{\alpha p} \right) + \frac{1}{p} \left( \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right)^2 + \sigma S_{0,yy} + aS_{0,y} + fS_0 - e \frac{\dot{\alpha}}{\alpha p} + b \frac{\dot{\alpha} p_y}{\alpha p^2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Katsayı fonksiyonları üzerinde bir miktar basitleştirme mümkündür.

$$R(y, t) = \frac{\dot{T}}{p\alpha} \quad (6.5)$$

seçilirse

$$\tilde{p}(\tilde{y}, \tilde{t}) = 1 \quad (6.6)$$

yapılabilir. Öyleyse her zaman eşdeğer olarak  $p(y, t) = 1$  özel durumu ele alınabilir (tüm denklik dönüşümleri yerine (6.1)'de  $u \rightarrow R(y, t)u$  yazılarak da bunu görmek

mümkündür). Bu basitleştirme ile (6.3) koşulu

$$\dot{\alpha}f = 0 \quad (6.7)$$

haline gelir.

$$Y_y^2 = \left| \frac{\alpha \dot{T}}{\sigma} \right| \quad (6.8)$$

seçildiğinde ise

$$\tilde{\sigma}(\tilde{y}, \tilde{t}) = \varepsilon = \mp 1 \quad (6.9)$$

yapmak mümkündür. Dahası,  $\beta(y, t)$  ve  $S_0(y, t)$  uygun şekilde seçilerek

$$\tilde{e}(\tilde{y}, \tilde{t}) = \tilde{h}(\tilde{y}, \tilde{t}) = 0 \quad (6.10)$$

şeklinde yok edilebilir. Sonuç olarak, (6.1) denklemi nokta dönüşümleriyle

$$\begin{aligned} (u_t + uu_x + q(y, t)u_{xx} + r(y, t)u_{xxx})_x + \varepsilon u_{yy} \\ + a(y, t)u_y + b(y, t)u_{xy} + c(y, t)u_{xx} + f(y, t)u = 0, \quad \varepsilon = \mp 1 \end{aligned} \quad (6.11)$$

denklemine denktir. Bu sınıf için denklik dönüşümleri

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \alpha(t)x + \beta(y, t), & \tilde{y} &= \varepsilon_0 \sqrt{\alpha \dot{T}} y + \gamma(t), & \varepsilon_0 &= \mp 1, \\ \tilde{t} &= T(t), & u &= \frac{\dot{T}}{\alpha} \tilde{u} - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} x + S_0(y, t) \end{aligned} \quad (6.12)$$

şeklinde bulunur,

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}f &= 0, & \varepsilon \beta_{yy} + a\beta_y + \alpha \frac{\ddot{T}}{\dot{T}} - 2\dot{\alpha} &= 0, \\ \varepsilon S_{0,yy} + aS_{0,y} + fS_0 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right) - \left( \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.13)$$

koşulları not edilmelidir.

### 6.2.1 Kanonik denklem

(6.11) denklem sınıfının belirleyici denklem takımının, sonsuz boyutlu simetrilerin incelenmesi için oldukça zor olduğu görülmüştür. Bunun yerine  $r = r(t)$  olması durumunu ele alacağız. Bu durum için (6.4)'te  $\dot{T} = \alpha^3(t) r(t)$  seçilerek

$$\tilde{r}(\tilde{t}) = 1 \quad (6.14)$$

şeklinde bir basitleştirme daha yapılabilir ve belirleyici denklem takımı görece çok basitleşir. Öyleyse inceleyeceğimiz kanonik denklem sınıfı

$$\begin{aligned} (u_t + uu_x + q(y, t)u_{xx} + u_{xxx})_x + \varepsilon u_{yy} \\ + a(y, t)u_y + b(y, t)u_{xy} + c(y, t)u_{xx} + f(y, t)u = 0, \quad \varepsilon = \mp 1 \end{aligned} \quad (6.15)$$

olur ve denklik dönüşümleri

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \alpha(t)x + \beta(y,t), & \tilde{y} &= \varepsilon_0 \alpha^2 y + \gamma(t), & \varepsilon_0 &= \mp 1, \\ \tilde{t} &= \int \alpha^3(t) dt, & u &= \alpha^2 \tilde{u} - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} x + S_0(y,t)\end{aligned}\quad (6.16)$$

aşağıdaki koşulları sağlar

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}f &= 0, & \varepsilon\beta_{yy} + a\beta_y + \dot{\alpha} &= 0, \\ \varepsilon S_{0,yy} + aS_{0,y} + fS_0 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right) - \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2.\end{aligned}\quad (6.17)$$

### 6.2.2 Özel durumda kanonik denklem

Daha sonraki hesaplarda kullanılmak üzere (6.15) için  $q = q(t)$  ve  $a = f = 0$  özel durumunda başka bir basitleştirmeyi not edelim.  $f$  özdeş olarak sıfır olduğundan  $\alpha(t)$  üzerinde bir koşul yoktur ve  $\alpha(t) := q(t)$  seçilerek (6.4)'te  $\tilde{q} = q\alpha^2/\dot{T} = q/\alpha = 1$  yapılabilir.  $a = 0$  varsayılır ise kanonik denklem

$$(u_t + uu_x + u_{xx} + u_{xxx})_x + \varepsilon u_{yy} + b(y,t)u_{xy} + c(y,t)u_{xx} = 0, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (6.18)$$

şeklini alır ve denklik dönüşümleri

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x + \beta_1(t)y + \beta_2(t), & \tilde{y} &= \varepsilon_0 y + \gamma(t), \\ \tilde{t} &= t + T_0, & u &= \tilde{u} + S_1(t)y + S_2(t)\end{aligned}\quad (6.19)$$

olur.

### 6.2.3 Simetri üretici ve belirleyici denklemler

Denklik dönüşümleriyle elde edilen kanonik denklem (6.15) için simetri üreticini

$$V = \tau \partial_t + \xi \partial_x + \eta \partial_y + \phi \partial_u \quad (6.20)$$

şeklinde gösterelim.  $\tau, \xi, \eta, \phi$  katsayıları  $t, x, y, u$  değişkenlerinin fonksiyonudur. Denklemden mevcut katsayıları içermeyen belirleyici denklemler çözüldüğünde,  $V$ 'nin yapısının

$$V = \tau(t)\partial_t + \left(\frac{\dot{\tau}}{3}x + \xi_0(y,t)\right)\partial_x + \left(\frac{2}{3}\dot{\tau}y + \eta_0(t)\right)\partial_y + \left(-\frac{2}{3}\dot{\tau}u + \frac{\ddot{\tau}}{3}x + S(y,t)\right)\partial_u \quad (6.21)$$

şeklinde olması gerektiği görülür, burada

$$S(y,t) = -\tau c_t - \left(\frac{2}{3}\dot{\tau}y + \eta_0\right)c_y + \xi_{0,t} + b\xi_{0,y} - \frac{2}{3}c\dot{\tau} \quad (6.22)$$

olarak bulunmuştur. Geriye kalan belirleyici denklemler aşağıdaki gibidir

$$\dot{\tau}(q + 2yq_y) + 3\tau q_t + 3\eta_0 q_y = 0, \quad (6.23)$$

$$3\tau a_t + (2\dot{\tau}y + 3\eta_0)a_y + 2a\dot{\tau} = 0, \quad (6.24)$$

$$-3\dot{\eta}_0 - 2y\ddot{\tau} + 3\tau b_t + (2\dot{\tau}y + 3\eta_0)b_y + b\dot{\tau} - 6\varepsilon\xi_{0,y} = 0, \quad (6.25)$$

$$\ddot{\tau} + 3a\xi_{0,y} + 3\varepsilon\xi_{0,yy} = 0, \quad (6.26)$$

$$f\ddot{\tau} = 0, \quad (6.27)$$

$$4f\dot{\tau} + 3f_t\tau + f_y(2\dot{\tau}y + 3\eta_0) = 0, \quad (6.28)$$

$$\ddot{\tau} + 3fS + 3aS_y + 3\varepsilon S_{yy} = 0. \quad (6.29)$$

### 6.3 Simetri Cebirleri

#### 6.3.1 Virasoro tipinde simetri cebiri

Yukarıda verilen belirleyici denklemlerden (6.24)-(6.29),  $q = 0$  durumunda [54]'te elde edilen denklem sistemi ile aynıdır. Denkleme dahil edilen  $q(y,t)u_{xx}$  terimi için ek olarak (6.23) koşulu bulunmuştur. [54]'te yapılan analiz takip edilecek ve elde ettikleri sonuçlar (6.23) koşulu ile birlikte sağlanmaya çalışılacaktır. Virasoro tipinde sonsuz boyutlu bir simetri cebirinin gerçekleşmesi için (6.23)-(6.29) denklemleri  $\tau(t)$  üzerinde herhangi bir koşul olmadan sağlanmalı, yani  $V$  tarafından üretilen zaman dönüşümü keyfi bir fonksiyon olmalıdır.

(6.27) denklemi  $f$ 'nin özdeş olarak sıfır olmasını gerektirir, aksi halde  $\tau(t)$  doğrusal bir fonksiyon olmalıdır.  $f(y,t) \equiv 0$  için (6.28) sağlanmaktadır. (6.24) denklemi  $a(y,t) = 0$  veya  $a_0 \neq 0$  ve  $\lambda(t)$  keyfi bir fonksiyon olmak üzere  $a(y,t) = a_0/(y + \lambda(t))$  ise sağlanır. Öncelikle

$$a(y,t) = \frac{a_0}{y + \lambda(t)}, \quad a_0 \neq 0 \quad (6.30)$$

durumunu ele alalım. (6.24) denkleminden

$$\eta_0(t) = \frac{1}{3}(2\dot{\tau}\lambda - 3\tau\dot{\lambda}) \quad (6.31)$$

bulunur.  $a(y,t)$  ve  $\eta_0(t)$  (6.26) denkleminde kullanılırsa  $\xi_0(y,t)$  üç farklı şekilde elde edilir. Ancak her üç durumda da (6.25)'te  $\tau(t)$  fonksiyonunun keyfi kalması mümkün değildir ( [54] referansında verilmiş olan hesap detaylarını burada tekrarlamıyoruz).

Dolayısıyla  $a(y,t)$ 'nin bu durumu için Virasoro tipinde bir simetri cebiri elde edilemez;  $a(y,t) \equiv 0$  olmalıdır. Bu kez (6.26)'dan

$$\xi_0(y,t) = -\frac{\varepsilon}{6}\ddot{t}y^2 + \mu(t)y + \xi(t) \quad (6.32)$$

bulunur ve (6.25) denklemini

$$-6\varepsilon\mu - 3\dot{\eta}_0 + b\dot{t} + 3\eta_0b_y + 2y\dot{t}b_y + 3\tau b_t = 0 \quad (6.33)$$

haline gelir. En çok  $b_y = b_1(t)$  olabilir, ancak bu  $(\tau b_1)' = 0$  gerektirir ki  $b_1 \neq 0$  ise  $\tau$  keyfi kalamaz. Dolayısıyla  $b_y = 0$ , yani  $b = b(t)$  olmalıdır. Buradan

$$\mu(t) = \frac{\varepsilon}{6}(b\dot{t} + 3\tau\dot{b} - 3\dot{\eta}_0) \quad (6.34)$$

bulunur. Bu sonuçlar (6.22) ile birlikte (6.29)'da kullanılırsa

$$2\dot{t}(3c_{yy} + yc_{yyy}) + 3\eta_0c_{yyy} + 3\tau c_{t yy} = 0 \quad (6.35)$$

koşuluna ulaşılır.

(i)  $c_{t yy} = 0$  durumunda,  $k_0$  bir sabit olmak üzere

$$c(y,t) = k_0y^2 + c_1(t)y + c_0(t) \quad (6.36)$$

yapısındadır ve (6.35) denklemini  $\tau$  keyfi olacak şekilde ancak  $k_0 = 0$  ise sağlanır. Bu durumda [54]'te bulunan  $c(t)$  fonksiyonu elde edilmiş olur.

(ii)  $3c_{yy} + yc_{yyy} = 0$  durumu. Bu kez

$$c(y,t) = \frac{c_2(t)}{y} + c_1(t)y + c_0(t) \quad (6.37)$$

elde edilir. (6.35) kullanıldığında görülür ki

$$3c_2\eta_0 - y\tau\dot{c}_2 = 0 \quad (6.38)$$

olmalıdır.  $c_2 = 0$  önceki durum ile aynıdır.  $c_2 \neq 0$  ise  $\eta_0(t) = 0$  ve  $c_2(t) = l_0$  yani bir sabit olmalıdır. Sonuçta

$$c(y,t) = \frac{l_0}{y} + c_1(t)y + c_0(t) \quad (6.39)$$

bulunmuş olur. Burada

$$\eta_0(t) = \begin{cases} \text{keyfi} & \Leftrightarrow l_0 = 0, \\ 0 & \Leftarrow l_0 \neq 0 \end{cases} \quad (6.40)$$

olduğunu not edelim. Son olarak (6.23) denkleminin sağlanması kalır:

$$\dot{\tau}(q + 2yq_y) + 3\tau q_t + 3\eta_0 q_y = 0. \quad (6.41)$$

$q + 2yq_y = 0$  ve  $q_t = 0$  olmalıdır. Öyleyse  $q_0$  bir sabit olmak üzere  $q(y, t) = q_0/\sqrt{y}$  olmalıdır ve bir tek

$$q_0\eta_0(t) = 0 \quad (6.42)$$

koşulu kalır.  $q(y, t) \neq 0$  varsayıldığından,  $\eta_0(t) = 0$  olmalıdır. Bu bölümün sonucu aşağıdaki iki teoremle özetlenmiştir.

**Teorem 6.1** Kanonik genelleştirilmiş KP-Burgers denklemi (6.15) ancak ve ancak

$$a = f = 0, \quad q(y, t) = \frac{q_0}{\sqrt{y}}, \quad b = b(t), \quad c = c_0(t) + c_1(t)y + \frac{l_0}{y} \quad (6.43)$$

ise Virasoro tipinde bir simetri cebirine sahiptir.

**Teorem 6.2** Kanonik genelleştirilmiş KP-Burgers denklemi

$$(u_t + uu_x + \frac{q_0}{\sqrt{y}}u_{xx} + u_{xxx})_x + \varepsilon u_{yy} + b(t)u_{xy} + (c_0(t) + c_1(t)y + \frac{l_0}{y})u_{xx} = 0, \quad (6.44)$$

$\varepsilon = \pm 1$ ,  $l_0 \in \mathbb{R}$  ve  $b(t)$ ,  $c_0(t)$  ve  $c_1(t)$  keyfi düzgün fonksiyonlar olmak üzere, sonsuz boyutlu bir Lie nokta dönüşümleri simetri grubu altında değişmezdir. Lie cebiri,  $\tau(t)$  ve  $\xi(t)$  keyfi düzgün fonksiyonlar olmak üzere

$$\hat{V} = T(\tau) + X(\xi) \quad (6.45)$$

şeklindeki bir vektör alanı ile temsil edilir, burada

$$\begin{aligned} T(\tau) = & \tau(t)\partial_t + \frac{1}{6}[3\varepsilon\dot{b}y\tau + (2x + \varepsilon by)\dot{\tau} - \varepsilon\ddot{\tau}y^2]\partial_x \\ & + \frac{2}{3}\dot{\tau}y\partial_y + \frac{1}{6}\{[-6\dot{c}_0 + 3\varepsilon b\dot{b} + (-6\dot{c}_1 + 3\varepsilon\ddot{b})y]\tau \\ & + [-4u + \varepsilon b^2 - 4c_0 + 4(\varepsilon\dot{b} - 2c_1)y]\dot{\tau} + (2x - \varepsilon by)\ddot{\tau} - \varepsilon y^2\ddot{\tau}\}\partial_u, \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$X(\xi) = \xi(t)\partial_x + \dot{\xi}(t)\partial_u \quad (6.47)$$

olarak verilmektedir.

**Hatırlatma.** Teorem 6.1 ve Teorem 6.2  $q_0 = 0$  için de geçerlidir, dolayısıyla [54]'te ele alınan durum için farklı kanonik sınıflar olarak not edilmelidir. [54]'te incelenen  $q_0 = 0$  durumunda, vektör alanında üç tane keyfi fonksiyon bulunmaktadır.

Bunların iki tanesi burada elde edilen  $T(\tau)$  ve  $X(\xi)$  ile aynıdır. Üçüncü keyfi fonksiyon  $\eta_0(t)$ 'den başka bir şey değildir, ve yukarıdaki analiz göstermektedir ki  $\eta_0(t) = 0$  şeklinde kısıtlanması (6.44) denkleminde  $q_0 u_{xxx}/\sqrt{y}$  ve  $l_0 u_{xx}/y$  terimlerinin yaşamasına izin vermektedir.

(6.44) denkleminin (6.16) denklik dönüşümleriyle daha da basitleştirilmesi mümkündür.  $a = f = 0$  olduğundan (6.17) koşulları  $\chi(t) = \frac{d}{dt}(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}) - (\frac{\dot{\alpha}}{\alpha})^2$  olmak üzere

$$\beta(y, t) = -\frac{\varepsilon \dot{\alpha}}{2} y^2 + \beta_1(t)y + \beta_2(t), \quad S_0(y, t) = \frac{\varepsilon}{2} \chi(t) y^2 + S_1(t)y + S_2(t) \quad (6.48)$$

şeklinde formüle edilebilir. (6.4) kullanılarak

$$\tilde{b}(\tilde{t}) = \frac{1}{\alpha^3} (\varepsilon_0 b \alpha^2 + 2\varepsilon_0 \varepsilon \alpha \beta_1 + \dot{\gamma}), \quad (6.49)$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}(\tilde{y}, \tilde{t}) = & \frac{l_0 \alpha^{-2}}{y} + \alpha^{-4} (c_0 \alpha^2 + \alpha \dot{\beta}_2 + S_2 \alpha^2 + \varepsilon \beta_1^2 + b \alpha \beta_1) \\ & + \alpha^{-4} (c_1 \alpha^2 + \alpha \dot{\beta}_1 + S_1 \alpha^2 - 2\dot{\alpha} \beta_1 - \varepsilon b \alpha \dot{\alpha}) y \\ & + \alpha^{-4} \varepsilon \left( -\frac{1}{2} \alpha \ddot{\alpha} + \frac{1}{2} \alpha^2 \chi + \dot{\alpha}^2 \right) y^2 \end{aligned} \quad (6.50)$$

olduğu görülür.  $\gamma$  uygun şekilde seçilerek  $\tilde{b}(\tilde{t}) = 0$  yapılabilir.  $l_0 \neq 0$  ise  $\alpha^2(t) = |l_0|$  seçilir ve  $\tilde{l}_0 = \mp 1$  yapılır. Bu halde  $y^2$  katsayısı sıfır olur ve  $y^0, y$  çarpanlı terimleri yok edecek şekilde  $S_1(t)$  ve  $S_2(t)$  fonksiyonları bulunur.  $l_0 = 0$  durumunda da  $\alpha(t)$  sabit olarak seçilir ve aynı ifadeler geçerlidir. Sonuç olarak (6.44) denkleminde eşdeğer olarak

$$b(t) = c_0(t) = c_1(t) = 0 \quad (6.51)$$

varsayılabilir.

### 6.3.2 Kac-Moody tipinde simetri cebiri

(6.23) denkleminden görülür ki  $\eta_0(t)$  fonksiyonu ancak ve ancak  $q_y = 0$  yani  $q = q(t)$  ise keyfidir. Bu durumda (6.23) kolaylıkla çözülebilir. Ancak bu denklemi bir kenara bırakalım ve analize diğer denklemlerden başlayalım. (6.24)-(6.29) denklemleri [54]'te verilenler ile aynı olduğundan, hesaplamaların detaylarına girilmeden analiz sonucunu ifade etmek gerekirse söylenebilir ki (6.24)-(6.28) denklemleri  $\eta_0(t)$  keyfi olacak şekilde ancak

$$\xi_0(y, t) = -\frac{\varepsilon}{6} \ddot{\tau} y^2 + v(t)y + \xi(t), \quad v(t) = \frac{\varepsilon}{6} (-3\dot{\eta}_0 + 3\tau \dot{b}_0 + 3\eta_0 b_1 + b_0 \dot{\tau}), \quad (6.52)$$

$$b(y, t) = b_1(t)y + b_0(t), \quad (\tau b_1)' = 0, \quad a(y, t) = f(y, t) \equiv 0 \quad (6.53)$$

ise çözülebilir.  $a = f = 0$  bulunduğundan, analiz edilecek kanonik sınıf (6.15) yerine (6.18) denklemdir. Denklik dönüşümlerinin (6.19) ile verilmiş olduğunu not edelim. (6.23) denkleminde  $q(t) = 1$  yazılırsa  $\tau(t) = \tau_0$  sabit olarak bulunur. (6.29) denklemi

$$\eta_0 c_{yyy} + \tau_0 c_{t yy} = 0 \quad (6.54)$$

şeklinde basitleşir.  $c(y, t) = c_0(t) + c_1(t)y + c_2(t)y^2$  olması gerektiği açıktır. Sağlanması gereken bağıntılar olarak geriye

$$\tau_0 \dot{b}_1 = 0, \quad \tau_0 \dot{c}_2 = 0 \quad (6.55)$$

kalır.

(i)  $\tau_0 = 0$  ise, [54]'te bulunan simetri cebirinin aynısı elde edilir. Sonucu bir teorem olarak aşağıdaki gibi ifade ediyoruz.

**Teorem 6.3**

$$\begin{aligned} & (u_t + uu_x + u_{xx} + u_{xxx})_x + \varepsilon u_{yy} + (b_1(t)y + b_0(t))u_{xy} \\ & + (c_2(t)y^2 + c_1(t)y + c_0(t))u_{xx} = 0 \end{aligned} \quad (6.56)$$

denklem ailesi,  $\varepsilon = \pm 1$  ve  $b_0, b_1, c_0, c_1, c_2$  zamanın keyfi fonksiyonları olmak üzere, iki keyfi fonksiyona bağlı sonsuz boyutlu bir Lie nokta dönüşümleri grubu altında değişmezdir. Lie cebiri Kac-Moody yapısındadır ve  $\xi(t)$  ve  $\eta(t)$  düzgün fonksiyonlar olmak üzere

$$\hat{V} = X(\xi) + Y(\eta), \quad (6.57)$$

$$X(\xi) = \xi \partial_x + \dot{\xi} \partial_u, \quad (6.58)$$

$$\begin{aligned} Y(\eta) = & \frac{\varepsilon}{2} y(-\dot{\eta} + b_1 \eta) \partial_x + \eta \partial_y + \{[-2c_2 \eta \\ & + \frac{\varepsilon}{2}(-\ddot{\eta} + \dot{b}_1 \eta + b_1^2 \eta)]y - c_1 \eta + \frac{\varepsilon}{2} b_0(-\dot{\eta} + b_1 \eta)\} \partial_u \end{aligned} \quad (6.59)$$

şeklindeki bir vektör alanı ile temsil edilir.

(6.19) dönüşümleriyle

$$b_0(t) = c_0(t) = c_1(t) = 0 \quad (6.60)$$

yapılması mümkündür.

**Hatırlatma.** Bu sonuç göstermektedir ki, genelleştirilmiş KP denklemi [54] ve genelleştirilmiş Burgers denkleminin [55] Kac-Moody simetri cebiri (6.58)-(6.59), esasında bu iki denklemi kapsayan KP-Burgers denkleminin de değişmezlik cebiridir.

(ii)  $\tau_0 \neq 0$  için (6.60) basitleştirmesi dikkate alındığında  $b_1(t) = k_1$ ,  $c_2(t) = k_2$  şeklinde sabitler olarak bulunur. Dolayısıyla

$$(u_t + uu_x + u_{xx} + u_{xxx})_x + \varepsilon u_{yy} + k_1 y u_{xy} + k_2 y^2 u_{xx} = 0 \quad (6.61)$$

denkleminin, (6.58) ve (6.59)'a ilaveten aşık  $T = \partial_t$  simetrisi olduğu not edilir.

### 6.3.3 Simetri cebirinde bir fonksiyon

Son olarak  $\tau(t)$  ve  $\eta_0(t)$  fonksiyonlarının belirleyici denklemlerce kısıtlandığı,  $\xi_0(y, t)$ 'nin ise keyfi olduğu durum incelenecektir.

$$\tau = 0, \quad \eta_0 = 0, \quad \xi_0(y, t) = \xi(t) \quad (6.62)$$

olması durumunda (6.23)-(6.28) denklemleri sağlanır ve (6.29)

$$f\xi = 0 \quad (6.63)$$

şeklini alır. Öyleyse  $\xi(t)$  keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$X(\xi) = \xi(t)\partial_x + \dot{\xi}(t)\partial_u \quad (6.64)$$

vektör alanı,  $f(y, t) = 0$  ve her  $a(y, t)$ ,  $b(y, t)$  ve  $c(y, t)$  fonksiyonu için (6.15) denkleminin Lie simetrilerini üretir (bu ifade  $u_{xxx}$  teriminde bir  $r(y, t)$  katsayısı bulunduğunda da doğrudur).

$f \neq 0$  olması durumunda (6.25), (6.28) ve (6.29) denklemleri keyfi fonksiyon şansı bırakmamaktadır [54].

**Teorem 6.4.** (6.11) denklemi  $f(y, t) = 0$  ve keyfi  $a, b, c, q, r$  için (6.64) tarafından üretilen sonsuz boyutlu bir abelyen grup altında değişmez kalmaktadır.

## 6.4 Bazı Uygulamalar

### 6.4.1 Virasoro durumu için indirgeme

(6.44) denklemi için (6.51) varsayımı ile indirgenmiş denklem elde edilecektir.  $\exp(T(\tau) + X(\xi))$  grubu etkisinde değişmez kalan çözüm

$$\begin{aligned} \rho &= x\tau^{-1/3} + \frac{\varepsilon}{6}\dot{\tau}\tau^{-4/3}y^2 - \int_0^t \xi(s)\tau(s)^{-4/3}ds, \quad \theta = y^{-3/2}\tau, \\ u &= \tau^{-2/3}w(\rho, \theta) - \frac{\varepsilon}{18}\tau^{-2}y^2(3\tau\ddot{\tau} - 2\dot{\tau}^2) + \frac{x}{3}\frac{\dot{\tau}}{\tau} + \frac{\xi}{\tau} \end{aligned} \quad (6.65)$$

şeklindedir, burada  $w$  fonksiyonu

$$w_{\rho\rho\rho\rho} + q_0\theta^{1/3}w_{\rho\rho\rho} + l_0\theta^{2/3}w_{\rho\rho} + ww_{\rho\rho} + w_\rho^2 + \frac{15\varepsilon}{4}\theta^{7/3}w_\theta + \frac{9\varepsilon}{4}\theta^{10/3}w_{\theta\theta} = 0 \quad (6.66)$$

denklemini sağlar. Bu denklem  $X_1 = \partial_\rho$ ,  $X_2 = \rho\partial_\rho - 3\theta\partial_\theta - 2w\partial_w$  tarafından üretilen iki boyutlu bir simetri cebirine sahiptir.  $X_1$  etkisinde değişmez kalan çözümlerin elde edilmesi kolaydır.

$$w(\theta) = w_0 + w_1\theta^{-2/3} \quad (6.67)$$

bulunur ve  $u(x, y, t)$  iki keyfi fonksiyona bağlıdır.  $X_2$  etkisinde değişmez kalan çözüm

$$w(\rho, \theta) = \theta^{2/3}F(z), \quad z = \rho\theta^{1/3} \quad (6.68)$$

yapısındadır, burada  $F(z)$  fonksiyonu

$$F'''' + q_0F''' + (l_0 + \frac{\varepsilon}{4}z^2)F'' + \frac{7\varepsilon}{4}zF' + (FF')' + 2\varepsilon F = 0 \quad (6.69)$$

denklemini sağlar. Ne yazık ki, genel durumda bu denklemin tam çözümlerini bulamadık.

Şunu da not etmek gerekir ki  $u$  çözümü üzerinde

$$C = T(t^2) = t^2\partial_t + \frac{1}{6}(4xt - 2\varepsilon y^2)\partial_x + \frac{4}{3}ty\partial_y + \frac{1}{6}(4x - ut)\partial_u \quad (6.70)$$

tarafından üretilen alt grubun projektif etkisi  $\lambda$  grup parametresi olmak üzere

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t(1 - \lambda t)^{-1}, \\ \tilde{y} &= (1 - \lambda t)^{-4/3}y, \\ \tilde{x} &= (1 - \lambda t)^{-2/3}\left(x + \frac{\varepsilon y^2}{3t}\right) - \frac{\varepsilon y^2}{3t}(1 - \lambda t)^{-5/3}, \\ \tilde{u} &= (1 - \lambda t)^{4/3}\left\{u + \frac{2}{3}\left(x + \frac{\varepsilon y^2}{3t}\right)\frac{\lambda}{1 - \lambda t} + \frac{\varepsilon}{6}\frac{\lambda y^2 t}{(1 - \lambda t)^2}(\lambda t - 2)\right\} \end{aligned} \quad (6.71)$$

şeklindedir. Yani,  $u(x, y, t)$  bir çözüm ise (6.71) de denklemin diğer bir çözümü olur.

#### 6.4.2 Kac-Moody durumu için indirgeme

$\exp(X(\xi) + Y(\eta))$  simetri grubu etkisinde değişmez kalan çözüm

$$\begin{aligned} u &= \left[\frac{\varepsilon}{4}\left(\dot{b} + b^2 - \frac{\ddot{\eta}}{\eta}\right) - c\right]y^2 + \frac{\dot{\xi}}{\eta}y + F(z, t), \\ z &= x + \frac{\varepsilon}{4}\left(-b + \frac{\dot{\eta}}{\eta}\right)y^2 - \frac{\xi}{\eta}y \end{aligned} \quad (6.72)$$

yapısında. Burada (6.60) basitleştirmesi kullanılmış ve  $b_1(t) = b(t)$ ,  $c_2(t) = c(t)$  şeklinde yeniden adlandırılmıştır. İndirgenmiş denklem

$$(F_t + FF_z + F_{zz} + F_{zzz})_z + \varepsilon \frac{\xi^2}{\eta^2} F_{zz} + \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\eta}}{\eta} - b \right) F_z - 2\varepsilon c + \frac{1}{2} \left( \dot{b} + b^2 - \frac{\ddot{\eta}}{\eta} \right) = 0 \quad (6.73)$$

olarak bulunur.  $F_{zz}$  terimi

$$F(z, t) = \tilde{F}(\tilde{z}, \tilde{t}), \quad \tilde{z} = z + \beta(t), \quad \tilde{t} = t, \quad \dot{\beta}(t) = -\varepsilon \frac{\xi^2}{\eta^2} \quad (6.74)$$

dönüşümü ile elenebilir.  $\dot{\eta}/\eta = b$  seçildiğinde de

$$(F_t + FF_z + F_{zz} + F_{zzz})_z = 2\varepsilon c(t) \quad (6.75)$$

denkleme ulaşılır.

#### 6.4.3 Painlevé özelliği ve bir tam çözüm

PainleveTestV2.m [82] paketi kullanılarak (6.11) denkleminde Painlevé testi uygulanmış, denklemin

$$\begin{aligned} q(y, t) = a(y, t) = f(y, t) = 0, \quad b(y, t) = b_0(t) + b_1(t)y, \\ r(y, t) = r_0 \exp\left(\frac{2}{3} \int b_1(t) dt\right), \quad c(y, t) = \frac{\varepsilon}{3} \left(\frac{2}{3} b_1^2 + \dot{b}_1\right) y^2 + c_1(t)y + c_0(t) \end{aligned} \quad (6.76)$$

olması durumunda testi geçtiği görülmüştür.  $r$  yalnızca  $t$ 'nin fonksiyonu olduğundan 1 yapılabilir, bu ise  $b_1(t) \rightarrow 0$  anlamına gelir. Öyleyse bu katsayılarla sahip denklemler, [54]'te incelenen Kac-Moody-Virasoro simetri cebirine sahip denklem sınıfına denktir.

Bu sonuçlara göre bu bölümde incelenen Virasoro cebirine sahip kanonik denklem (6.44) Painlevé özelliğine sahip olamaz ( $q_0 \neq 0$ ).

İkinci sonucumuzdaki denklem ailesi (6.56), basitleştirilmiş hali (6.60) ile düşünüldüğünde

$$(u_t + uu_x + u_{xx} + u_{xxx})_x + \varepsilon u_{yy} + b(t)yu_{xy} + c(t)y^2u_{xx} = 0, \quad (6.77)$$

yine Painlevé özelliğine sahip olamaz. Bu denklem için Painlevé serisi ilk terimde kesilerek

$$u(x, y, t) = \frac{u_0(x, y, t)}{\Phi^2(x, y, t)} \quad (6.78)$$

şeklinde bir çözüm önerilsin. (6.78) ifadesi (6.77)'de yazılır ve ortaya çıkan  $\Phi^j$ ,  $j = -6, -5, \dots, -1$  terimlerinin katsayılarının özdeş olarak sıfır olması istenirse, elde edilen denklem takımı  $c(t) = 0$  için çözülebilir ve

$$u_0 = -\frac{12k_1^2}{25} \exp \left[ -\frac{2x}{5} - \frac{12t}{125} + 2k_2 y e^{-\int b(t)dt} + 10\epsilon k_2^2 \int e^{-2\int b(t)dt} dt \right], \quad (6.79)$$

$$\Phi = k_1 \exp \left[ -\frac{x}{5} - \frac{6t}{125} + k_2 y e^{-\int b(t)dt} + 5\epsilon k_2^2 \int e^{-2\int b(t)dt} dt \right] + k_3$$

elde edilir. Aynı yöntem (6.44) için (6.51) durumunda denenmiş ancak sonuç elde edilememiştir. Diğer yandan, [83] oldukça benzer bir sınıf denklemi çalışmakta ve Painlevé serisini

$$u = \frac{u_0}{\Phi^2} + \frac{u_1}{\Phi} + u_2 \quad (6.80)$$

şeklinde sabit terimde keserek çözüm aramaktadır. (6.80) denklemde yazıldığında elde edilen koşullar doğrudan çözülemediğinden,  $\Phi$  fonksiyonunun bazı özel seçimlerini deneyerek çok sayıda tam çözüm üretmektedirler. Benzer fikir kanonik denklemlerimiz (6.44) ve (6.56) için de sonuç verebilir.

#### 6.4.4 Özel bir durumda simetri ve indirgemeler

Son olarak,  $a = b = c = e = f = h = 0$  durumunda, bütün katsayıları sıfırdan farklı olarak kabul edilen

$$(u_t + p(t)uu_x + q(t)u_{xx} + r(t)u_{xxx})_x + \sigma(t)u_{yy} = 0 \quad (6.81)$$

denklemini ele alınacaktır. Denklik dönüşümleri yine (6.2) şeklindedir, katsayıların dönüşümü

$$\tilde{p}(\tilde{t}) = p(t) \frac{R\alpha}{\tilde{t}}, \quad \tilde{q}(\tilde{t}) = q(t) \frac{\alpha^2}{\tilde{t}}, \quad \tilde{r}(\tilde{t}) = r(t) \frac{\alpha^3}{\tilde{t}}, \quad \tilde{\sigma}(\tilde{t}) = \sigma(t) \frac{Y_y^2}{\alpha \tilde{t}} \quad (6.82)$$

gibidir. Denkleme başka terim ilave olmaması için

$$\sigma Y_{yy} = 0, \quad (6.83)$$

$$2\sigma \beta_y Y_y + \alpha Y_t = 0, \quad (6.84)$$

$$\beta_t \alpha + p S \alpha^2 + \sigma \beta_y^2 = 0, \quad (6.85)$$

$$-R\dot{\alpha} + \dot{R}\alpha + \sigma R \beta_{yy} = 0, \quad (6.86)$$

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\alpha}}{\alpha p} \right) + \frac{1}{p} \left( \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right)^2 + \sigma S_{yy} = 0 \quad (6.87)$$

koşulları sağlanmalıdır.  $\dot{T} = \alpha^3 r$  ve  $R = \alpha^2 r/p$  seçilerek yine  $\tilde{p}(\tilde{t}) = \tilde{r}(\tilde{t}) = 1$  yapılabilir. Ayrıca  $Y(y, t) = \mu(t)y + v(t)$  olduğundan  $\tilde{\sigma}$  katsayısında  $y$ 'ye bağıllık olmamalıdır. (6.84)'ten

$$\beta(y, t) = -\frac{\alpha \dot{\mu}}{4\sigma\mu}y^2 - \frac{\alpha \dot{v}}{2\sigma\mu}y + \beta_1(t) \quad (6.88)$$

ve (6.85)'ten

$$S(y, t) = -\frac{1}{p\alpha^2}(\alpha\beta_t + \sigma\beta_y^2) \quad (6.89)$$

çözülür. (6.86) bağıntısı  $\mu(t) = \mu_0 \left(\frac{\alpha r}{p}\right)^2$  ise sağlanır. Geriye kalan (6.87) koşulu

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \left( 4\frac{\dot{p}}{p} - 3\frac{\dot{r}}{r} - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right) = \frac{\ddot{p}}{p} - \frac{\ddot{r}}{r} + \frac{\dot{p}^2}{p^2} + 3\frac{\dot{r}^2}{r^2} - 4\frac{\dot{p}\dot{r}}{pr} - \frac{\dot{p}\dot{\sigma}}{p\sigma} + \frac{\dot{r}\dot{\sigma}}{r\sigma} \quad (6.90)$$

şeklini alır.

(i)  $\sigma \neq \sigma_0 \frac{p^4}{r^3}$  durumu ( $\sigma_0$  sabit).  $\alpha(t)$  (6.90)'dan çözülür ve katsayıların normalizasyonu tamamlanarak

$$(u_t + uu_x + q(t)u_{xx} + u_{xxx})_x + \sigma(t)u_{yy} = 0 \quad (6.91)$$

kanonik denklemi elde edilmiş olur.

(ii)  $\sigma = \sigma_0 \frac{p^4}{r^3}$  ise, (6.90) denkleminin sol tarafı sıfır olduğundan koşul

$$\frac{\ddot{r}}{r} - \frac{\ddot{p}}{p} + 3\frac{\dot{p}^2}{p^2} - 3\frac{\dot{p}\dot{r}}{pr} = 0 \quad (6.92)$$

şeklini alır. Burada (6.91) denklemini analiz etmeye çalışacağız. Simetri üretici

$$\begin{aligned} V = (c_1 t + c_2) \partial_t + \left( \frac{c_1}{3} x - \frac{\dot{\eta}_0}{2\sigma} y + \xi_0 \right) \partial_x + \left( \frac{2c_1}{3} y + \eta_0 \right) \partial_y \\ - \left( \frac{2c_1}{3} u + y \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\eta}_0}{2\sigma} \right) - \dot{\xi}_0 \right) \partial_u \end{aligned} \quad (6.93)$$

yapısındadır.  $\xi_0(t)$  ve  $\eta_0(t)$  keyfi fonksiyonlar olup belirleyici denklemler,  $q_0$  bir sabit olmak üzere

$$(c_1 t + c_2) \sigma_t = 0, \quad (c_1 t + c_2) q^3 = q_0 \quad (6.94)$$

sistemini verir.  $c_1 = c_2 = 0$  olması durumunda,  $q(t)$  ve  $\sigma(t)$  üzerinde koşul olmaz. Simetri cebiri,

$$V = X(\xi) + Y(\eta) \quad (6.95)$$

vektör alanları tarafından üretilen sonsuz boyutlu bir Lie cebiridir;  $X(\xi)$  ve  $Y(\eta)$  aşağıdaki gibidir

$$X(\xi) = \xi \partial_x + \dot{\xi} \partial_u, \quad (6.96)$$

$$Y(\eta) = -\frac{\dot{\eta}}{2\sigma} y \partial_x + \eta \partial_y - y \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\eta}}{2\sigma} \right) \partial_u. \quad (6.97)$$

$\exp Y(\eta)$  etkisinde değişmezlik kullanılarak (6.91) denklemi için

$$u = -\frac{y^2}{2\eta} \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\eta}}{2\sigma} \right) + F(z, t), \quad z = x + \frac{\dot{\eta}}{4\sigma\eta} y^2 \quad (6.98)$$

yapısında çözüm aranır ve indirgenmiş denklem

$$(F_t + FF_z + qF_{zz} + F_{zzz})_z + \frac{\dot{\eta}}{2\eta} F_z + \frac{\dot{\eta}\dot{\sigma}}{2\eta\sigma} - \frac{\ddot{\eta}}{2\eta} = 0 \quad (6.99)$$

biçiminde elde edilir.  $\dot{\eta}(t) = \sigma(t)$  seçilerek,  $\hat{\sigma}(t) = \frac{\sigma(t)}{2 \int \sigma(t) dt}$  olmak üzere

$$(F_t + FF_z + qF_{zz} + F_{zzz})_z + \hat{\sigma} F_z = 0 \quad (6.100)$$

homojen olmayan terim yok edilebilir. Bir kez integre edildiğinde de

$$F_t + FF_z + qF_{zz} + F_{zzz} + \hat{\sigma} F = f(t) \quad (6.101)$$

homojen olmayan denklemi elde edilir.



## 7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

### 7.1 Sonuçlar

Bu tez çalışmasında, integre edilebilirlik ve simetri araçları kullanılarak evrim tipi  $1 + 1$ - ve  $2 + 1$ -boyutlu denklemlerin analizi yapılmıştır. İncelenen denklem sınıfları doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin değişken katsayılı ve türevsel terimleri içeren genelleştirmeleri ile, genelleştirilmiş KP-Burgers denklemdir.

İlk olarak değişken katsayılı NLSD ve genelleştirmeleri için Painlevé integre edilebilirlik analizi uygulanmıştır. İncelenen sınıflardan değişken katsayılı kübik denklem için, Painlevé testinin sağlandığı koşulda sabit katsayılı denkleme dönüşümü gerçekleştirilmiştir. Buradaki sonuçlar literatürde mevcut sonuçlar ile uyumludur, bunun yanında literatürde mevcut sonuçlar genişletilmiştir. Özel bir örnek üzerinde simetri cebirinin boyutu-integre edilebilirlik ilişkisi incelenmiş, Painlevé yaklaşımı ile simetri yaklaşımının katsayı fonksiyonları üzerine aynı koşulları getirdikleri gösterilmiştir. Bu örnekte literatüre ek olarak elde edilen integre edilebilir durum için, bulunan dönüşüm formülleri ile sabit katsayılı NLS denkleminin bilinen çözümlerinden çözümler üretilmiştir. Diğer sınıf denklemler için de tam çözümler verilmiştir. Literatürde mevcut pek çok çalışmada gösterildiği gibi, genellikle Painlevé özelliğine sahip bir denklemin Lax çifti de mevcuttur. Painlevé özelliğinden elde edilen kısıtlamalar altında denklemin bir Lax çiftine de sahip olmasını beklemek doğaldır. Literatürde de bu denkliği gösteren çalışmalar mevcuttur.

Değişken katsayılı bir kübik NLS denkleminin simetri cebirinin boyutunun dört olması durumunda elde edilen kanonik denklemler, Painlevé özelliğinin gerektirdiği koşulları sağlamaz. Bu koşullar, literatürde mevcut sonuçlara göre, denklemin bir Lax çiftine sahip olması için gerekli koşullara denktir. Dolayısıyla bu denklemler integre edilebilir değildir. Değişken katsayılı NLS denkleminin dört boyutlu simetri cebirlerine sahip aileleri denk olmayan beş sınıfta toplanır. Bu ailelerin değişken katsayılı

temsilci denklemlerinin tam çözümlerinin elde edilmesi için, simetri cebirlerinin bir boyutlu optimal sistemi kullanılarak adi diferansiyel denklem sistemlerine indirgemeleri yapılmış ve tüm indirgemeler analiz edilmiştir. İndirgemelerden bir kısmı içerdikleri sabitlerin özel değerleri için, Painlevé özelliğine sahiptir. Bu denklemler, ikinci mertebeden adi denklemlerin Painlevé sınıflandırmasındaki denklemlere dönüştürüldüğünde eliptik fonksiyonlar ve Painlevé transandanları türünden çözümler bulunmaktadır. İndirgeme analizi bu şekilde tamamlandıktan sonra, dört boyutlu simetri cebirlerinin kanonik denklemleri için Painlevé serilerinin ilk terimde kesilmesi yoluyla tam çözümler araştırılmıştır. Cebirlerden üçü için bu yöntem başarı ile sonuç vermiştir. Elde edilen sonuçlardan biri, başka bir çalışmada sonlu zamanda patlama problemi olarak incelenme imkanı sunmuştur.

Değişken katsayılı kübik ve kuintik nonlinear terimleri içeren Schrödinger denklemi için literatürde, simetri cebirlerinin sınıflandırılmasına ilişkin bir sonuç bulunmamaktadır. En genel katsayılı denklem nokta dönüşümleriyle kanonik forma getirilmiş ve düşük boyutlu Lie cebirleri bu denklem ailesinin değişmezlik cebiri olarak gerçekleşmiştir. Sınıflandırma sonucunda mümkün Lie simetri cebirleri ile, bu cebirlere sahip kanonik denklemlerin bir listesi elde edilmiştir. Simetri cebirlerinin maksimal boyutu altıdır ve sabit katsayılı kuintik denklem durumunda gerçekleşir. Sabit katsayılı kübik durumda bilindiği gibi simetri cebirinin boyutu beştir. Ele alınan genel denklemin sabit katsayılı denkleme dönüşüm koşulları ve formülleri verilmiştir. Bu, literatürde mevcut sonuçlardan değişken katsayılı denklemler için çözümler türetme imkanı tanır. Dört boyutlu simetri cebirleri ise sabit katsayılı kübik-kuintik denklemi de içeren dört farklı sınıfta elde edilmiştir. Bu sınıftaki değişken katsayılı denklemler, sabit katsayılı denkleme dönüştürülemez. Bu nedenle dört boyutlu simetri cebirlerine sahip kanonik denklemlerin grup-değişmez çözümlerinin araştırılması, sınıflandırma probleminin devamı niteliğinde yapılabilir. Bu analiz, detayları kübik durum ile paralellik gösterdiğinden burada içerilmemiş, tez çalışmasından İTÜ dergisi için hazırlanan makalede ayrıntılarıyla sunulmuştur.

Son olarak ele alınan problem, sonsuz boyutlu Lie simetri cebirlerine sahip denklem aileleri için bir sınıflandırma çalışmasıdır. Literatürde inetegre edilebilirliği bilinen  $2 + 1$ -boyutlu denklemlerin tipik bir özelliği, Kac-Moody-Virasoro tipinde Lie simetri

cebirlerine sahip olmalarıdır. Bilinen bir takım sonuçları kapsayan genelleştirilmiş KP-Burgers denklemi ele alınarak, katsayılarının belli durumları için Virasoro tipinde ve Kac-Moody tipinde simetri cebirlerine sahip denklem aileleri belirlenmiştir. Elde edilen sınıflar integre edilebilir değildir. Painlevé testi, seri kesme yöntemi ile tam çözüm ve indirgenmiş denklemlerin elde edilmesi gibi yaklaşımlarla çözümler hakkında bazı sonuçlar elde edilmeye çalışılmıştır.

## 7.2 Öneriler

Son olarak bazı açık problemler üzerinde durmak istiyoruz.

Schrödinger sınıfı  $1 + 1$ -boyutlu denklemler için yapılan analizlerin benzerleri, yine değişken katsayılı  $2 + 1$ - ve  $3 + 1$ - boyutlu denklemler için yapılabilir. Örneğin [84]'te ele alınan manyetik alan varlığında Schrödinger denklemi için, fiziksel olarak anlamlı potansiyeller durumunda simetri analizi ve grup-değişmez çözümler incelenebilir. Ayrıca bu sınıftaki en genel değişken katsayılı denklem için sınıflandırma çalışması yapılabilir.

Sabit katsayılı GDS sistemi için Kac-Moody-Virasoro tipinde simetri cebirinin varlığı bilinmektedir [50]. Bu denklem için, integre edilebilirliği gösteren bir Lax çiftinin bulunması açık bir problemdir. Ayrıca DS ve GDS sistemlerinin değişken katsayılı genelleştirilmeleri için Painlevé testi, sonlu ve sonsuz boyutlu simetri analizleri, Lax çifti bulunması integre edilebilirlik yönünden ilginç problemler olarak düşünülebilir.

Isı ve dalga denklemlerinin genel sınıfları için literatürde  $1 + 1$ -boyutta yapılmış simetri cebiri sınıflandırma çalışmaları mevcuttur [85, 86]. Ancak  $2 + 1$ - ve  $3 + 1$ -boyutlu denklemler için genel sınıfların analizi incelenmeyi bekleyen bir problemdir. Bu doğrultuda yapılacak kapsamlı çalışmalar ilgi çekici olacaktır.



## KAYNAKLAR

- [1] **Fushchich, W.I., Shtelen, W.M. ve Serov, N.I.** (1993). *Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- [2] **Niederer, U.** (1972). The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation, *Helvetica Physica Acta*, **45(5)**, 802–810.
- [3] **Niederer, U.** (1973). The maximal kinematical invariance group of the harmonic oscillator, *Helvetica Physica Acta*, **46(2)**, 191–200.
- [4] **Niederer, U.** (1974). The maximal kinematical invariance groups of Schrödinger equations with arbitrary potentials, *Helvetica Physica Acta*, **47(2)**, 167–172.
- [5] **Boyer, C.P.** (1974). The maximal 'kinematical' invariance group for an arbitrary potential, *Helvetica Physica Acta*, **47(5)**, 589–605.
- [6] **Levi, D., Tempesta, P. ve Winternitz, P.** (2004). Umbral calculus, difference equations and the discrete Schrödinger equation, *J. Math. Phys.*, **45(11)**, 4077–4105.
- [7] **Rideau, G. ve Winternitz, P.** (1993). Evolution equations invariant under two-dimensional space-time Schrödinger group, *J. Math. Phys.*, **34(2)**, 558–570.
- [8] **Boyer, C.P., Sharp, R.T. ve Winternitz, P.** (1976). Symmetry breaking interactions for the time dependent Schrödinger equation, *J. Math. Phys.*, **17(8)**, 1439–1451.
- [9] **Burdet, G., Patera, J., Perrin, M. ve Winternitz, P.** (1978). Sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Schrödinger, *Ann. Sci. Math. Quebec*, **2(1)**, 81–108.
- [10] **Güngör, F.** (2000). Symmetry breaking interactions for the Schrödinger equation in three-dimensional space-time, *Phys. Lett. A*, **270**, 164–170.
- [11] **Fushchych, W.I. ve Cherniha, R.M.** (1995). Galilei-invariant nonlinear systems of evolution equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **28**, 5569–5579.
- [12] **Gagnon, L. ve Winternitz, P.** (1988). Lie symmetries of a generalized nonlinear Schrödinger equation: I. The symmetry group and its subgroups, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **21**, 5569–5579.

- [13] **Gagnon, L. ve Winternitz, P.** (1989). Lie symmetries of a generalized nonlinear Schrödinger equation: II. Exact solutions, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**, 469–497.
- [14] **Gagnon, L. ve Winternitz, P.** (1989). Lie symmetries of a generalized nonlinear Schrödinger equation: III. Reductions to third-order ordinary differential equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**, 499–509.
- [15] **Gagnon, L. ve Winternitz, P.** (1989). Exact solutions of the spherical quintic nonlinear Schrödinger equation, *Phys. Lett. A*, **134(5)**, 276–285.
- [16] **Sciarrino, A. ve Winternitz, P.** (1997). Symmetries and solutions of the vector nonlinear Schrödinger equation, *Nuovo Cimento*, **112**, 853–871.
- [17] **Özemir, C. ve Güngör, F.** (2006). Group-invariant solutions of the (2+1)-dimensional cubic Schrödinger equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**, 2973–2993.
- [18] **Nikitin, A.B. ve Popovych, R.O.** (2001). Group classification of the nonlinear Schrödinger equations, *Ukr. Math. Jour.*, **53(8)**, 1255–1265.
- [19] **Zhdanov, R. ve Roman, O.** (2000). On preliminary group classification of nonlinear Schrödinger equations with some applications to Doebner-Goldin models, *Rep. Math. Phys.*, **45(2)**, 273–291.
- [20] **Popovych, R.O., Ivanova, N.M. ve Eshraghi, H.** (2004). Group classification of (1+1)-dimensional Schrödinger equations with potentials and power nonlinearities, *J. Math. Phys.*, **45(8)**, 3049–3057.
- [21] **Ivanova, N.** (2002). Symmetry of nonlinear Schrödinger equations with harmonic oscillator type potential, *Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*, **43(1)**, 149–150.
- [22] **Yajima, N. ve Oikawa, M.** (1975). A class of exactly solvable nonlinear evolution equations, *Progr. Theoret. Phys.*, **54(5)**, 1576–1577.
- [23] **Hasegawa, A. ve Tappert, F.** (1973). Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion, *App. Phys. Lett.*, **23(4)**, 171–172.
- [24] **Gagnon, L. ve Winternitz, P.** (1993). Symmetry classes of variable coefficient nonlinear Schrödinger equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **26**, 7061–7076.
- [25] **Zhu, J.M. ve Liu, Y.L.** (2009). Some exact solutions of variable coefficient cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with an external potential, *Commun. Theor. Phys.*, **51(3)**, 391–394.
- [26] **Hao, R., Li, L., Li, Z., Xue, W. ve Zhou, G.** (2004). A new approach to exact soliton solutions and soliton interaction for the nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients, *Opt. Commun.*, **236**, 79–86.

- [27] **Zhang, J.L., Li, B.A. ve Wang, M.L.** (2007). The exact solutions and the relevant constraint conditions for two nonlinear Schrödinger equations with variable coefficients, *Chaos, Solitons & Fractals*, **39**, 858–865.
- [28] **Lü, X., Zhu, H.W., Meng, X.H., Yang, Z.C. ve Tian, B.** (2007). Soliton solutions and a Bäcklund transformation for a generalized nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients from optical fiber communications, *J. Math. Anal. Appl.*, **336**, 1305–1315.
- [29] **Lü, X., Zhu, H.W., Yao, Z.Z., Meng, X.H., Zhang, C., Zhang, C.Y. ve Tian, B.** (2008). Multisoliton solutions in terms of double Wronskian determinant for a generalized variable-coefficient nonlinear Schrödinger equation from plasma physics, arterial mechanics, fluid dynamics and optical communications, *Annals of Physics*, **323**, 1947–1955.
- [30] **Kruglov, V.I., Peacock, A.C. ve Harvey, C.D.** (2003). Exact self-similar solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with distributed coefficients, *Phys. Rev. Let.*, **90(11)**, 113902.
- [31] **Liu, X.Q. ve Yan, Z.L.** (2007). Some exact solutions of the variable coefficient Schrödinger equation, *Comm. in N. Sci. and Num. Sim.*, **12**, 1355–1359.
- [32] **Yan, Z., Liu, X. ve Wang, L.** (2007). The direct symmetry method and its application in variable coefficients Schrödinger equation, *Applied Mathematics and Computation*, **187**, 701–707.
- [33] **Grimshaw, R., Nakkerean, K., Poon, C.K. ve Chow, K.W.** (2007). Solitary wave solution for a non-integrable, variable coefficient nonlinear Schrödinger equation, *Physica Scripta*, **75**, 620–623.
- [34] **Liu, X.Q., Jiang, S., Fan, W.B. ve Liu, W.M.** (2004). Soliton solutions in linear magnetic field and time-dependent laser field, *Comm. in N. Sci. and Num. Sim.*, **9**, 361–365.
- [35] **Perez-Garcia, V.M., Torres, P.J. ve Konotop, V.V.** (2006). Similarity transformations for nonlinear Schrödinger equations with time-dependent coefficients, *Physica D*, **9**, 31–36.
- [36] **Li, B., Zhang, X.F., Li, Y.Q., Chen, Y. ve Liu, W.M.** (2008). Solitons in Bose-Einstein condensates with time-dependent atomic scattering length in an expulsive parabolic and complex potential, *arXiv e-print*, 0806.3608v1 [cond-mat.other].
- [37] **Belmonte-Beitia, J. ve Perez-Garcia, V.M.** (2008). Localized nonlinear waves in systems with time- and space-modulated nonlinearities, *Phys. Rev. Let.*, **100**, 164102.
- [38] **Serkin, V.N., Hasegawa, A. ve Belyaeva, T.L.** (2007). Nonautonomous solitons in external potentials, *Phys. Rev. Let.*, **98**, 074102.
- [39] **Gürses, M.** (2008). Integrable nonautonomous nonlinear Schrödinger equations, *arXiv e-print*, 0704.2435v2 [nlin.SI].

- [40] **Steeb, W.H., Kloeke, M. ve Spieker, B.M.** (1984). Nonlinear Schrödinger equation, Painlevé test, Bäcklund transformation and solutions, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **17**, L825–L829.
- [41] **Ablowitz, M.J. ve Clarkson, P.A.** (1991). *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- [42] **Horváthy, P.A. ve Yera, J.C.** (1998). An integrable time-dependent Schrödinger equation, *arXiv e-print*, math-ph/9806011v1.
- [43] **Zhao, D., Luo, H. ve Chai, H.Y.** (2008). Integrability of the Gross-Pitaevskii equation with Feshbach resonance management, *Phys. Lett. A*, **372**, 5644–5650.
- [44] **Zhao, D., He, X.G. ve Luo, H.G.** (2008). From canonical to nonautonomous solitons, *arXiv e-print*, 0807.1192v1 [nlin.PS].
- [45] **Luo, H.G., Zhao, D., He, X.G. ve Li, L.** (2008). Dissipative solitons stabilized by a quantum Zeno-like effect, *arXiv e-print*, 0808.3437v2 [nlin.PS].
- [46] **He, X.G., Zhao, D., Li, L. ve Luo, H.G.** (2009). Engineering integrable nonautonomous nonlinear Schrödinger equations, *Phys. Rev. E*, **79**, 056610.
- [47] **Al Khawaja, U.** (2010). A comparative analysis of Painlevé, Lax pair, and similarity transformation methods in obtaining the integrability conditions of nonlinear Schrödinger equations, *J. Math. Phys.*, **51**, 053506.
- [48] **Brugarino, T. ve Sciacca, M.** (2010). Integrability of an inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation in Bose-Einstein condensates and fiber optics, *J. Math. Phys.*, **51**, 093503.
- [49] **Champagne, B. ve Winternitz, P.** (1988). On the infinite-dimensional symmetry group of the Davey-Stewartson equations, *J. Math. Phys.*, **29**, 1–8.
- [50] **Güngör, F. ve Aykanat, Ö.** (2006). The generalized Davey-Stewartson equations, its Kac-Moody-Virasoro symmetry algebra and relation to Davey-Stewartson equations, *J. Math. Phys.*, **47**, 013510.
- [51] **Schwarz, F.** (1987). Symmetries of the Khoklov-Zabolotskaya equation. Comment on: "Towards the conservation laws and Lie symmetries for the Khoklov-Zabolotskaya equation in three dimensions", *J. Phys. A*, **20**, 1613.
- [52] **David, D., Kamran, N., Levi, D. ve Winternitz, P.** (1985). Subalgebras of loop algebras and symmetries of the Kadomtsev-Petviashvili equation, *Phys. Rev. Lett.*, **55**(20), 2111–2113.
- [53] **Schwarz, F.** (1982). Symmetries of the two-dimensional Korteweg-deVries equation, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **51**, 2387–238.

- [54] **Güngör, F. ve Winternitz, P.** (2002). Generalized Kadomtsev-Petviashvili equation with an infinite dimensional symmetry algebra, *J. Math. Anal. App.*, **1**, 314–328.
- [55] **Güngör, F.** (2010). Infinite-dimensional symmetries of two-dimensional generalized Burgers equations, *J. Math. Phys.*, **51**, 073505.
- [56] **Tian, S.F. ve Zhang, G.Q.** (2011). On the integrability of a generalized variable-coefficient Kadomtsev-Petviashvili equation, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45(5)**, 055203.
- [57] **Olver, P.J.** (1986). *Applications of Lie groups to differential equations*. New York: Springer-Verlag.
- [58] **Erdmann, K. ve Wildon, M.J.** (2006). *Introduction to Lie algebras*. London: Springer.
- [59] **Bäuerle, G.G.A. ve de Kerf, E.A.** (1990). *Lie algebras-Finite and infinite dimensionl Lie algebras and applications in physics*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V.
- [60] **Ovsiannikov, L.V.** (1982). *Group analysis of differential equations*. New York: Academic Press.
- [61] **Li, J., Zhang, H.Q., Xu, T., Zhang, Y.X. ve Tian, B.** (2007). Soliton-like solutions of a generalized variable coefficient higher order nonlinear Schrödinger equation from inhomogeneous optical fibers with symbolic computation, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**, 13299–13309.
- [62] **Weiss, J., Tabor, M. ve Carnevale, G.** (1983). The Painlevé property for partial differential equations, *J. Math. Phys.*, **24**, 522–526.
- [63] **Hone, A.N.W.** (2008). Painlevé tests, singularity structure and integrability, *arXiv e-print*, nlin/0502017v2.
- [64] **Kruskal, M.D., Joshi, N. ve Halburd, R.** (1996). Analytic and asymptotic methods for nonlinear singularity analysis: a review and extensions of tests for the Painlevé property. Integrability of nonlinear systems, Springer, Berlin.
- [65] **Hille, E.** (1997). *Ordinary differential equations in the complex plane*. Mineola, N.Y.: Dover Publications.
- [66] **Winternitz, P.** (1992). Lie groups and solutions of nonlinear partial differential equations. Ibort, L. A. ve Rodriguez, M. A. (Ed.), *Integrable systems, quantum fields, and quantum field theories*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- [67] **Patera, J. ve Winternitz, P.** (1977). Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras, *J. Math. Phys.*, **18(7)**, 1449.

- [68] **Polyanin, A.D. ve Zaitsev, V.F.** (1995). *Handbook of exact solutions for ordinary differential equations*. Boca Raton, USA: CRC Press.
- [69] **Yomba, E. ve Kofané, T.C.** (1996). On exact solutions of the generalized modified Ginzburg-Landau equation using the Weiss-Tabor-Carnevale method, *Phys. Scr.*, **54**, 576–580.
- [70] **Güngör, F., Hasanov, M. ve Özemir, C.** (2012). A variable coefficient nonlinear Schrödinger equation with a four-dimensional symmetry group and blow-up of its solutions, *Applicable Analysis, iFirst*.
- [71] **Tanev, S. ve Pushkarov, D.I.** (1997). Solitary wave propagation and bistability in the normal dispersion region of highly nonlinear optical fibres and waveguides, *Opt. Commun.*, **141(5-6)**, 322–328.
- [72] **Serkin, V.N., Chapela, V.M., Percino, J. ve Belyaeva, T.L.** (2001). Nonlinear tunneling of temporal and spatial optical solitons through organic thin films and polymeric waveguides, *Opt. Commun.*, **192(3-6)**, 237–244.
- [73] **Kolomeisky, E.B., Newman, T.J., Straley, J.P. ve Qi, X.** (2000). Low-dimensional Bose liquids: Beyond the Gross-Pitaevskii approximation, *Phys. Rev. Lett.*, **85(6)**, 153903.
- [74] **Chen, T. ve Pavlović, N.** (2011). The quintic NLS as the mean field limit of a boson gas with three-body interactions, *J. Func. Anal.*, **260**, 959–997.
- [75] **Serkin, V.N., Matsumoto, M. ve Belyaeva, T.L.** (2001). Bright and dark solitary nonlinear Bloch waves in dispersion managed fiber systems and soliton lasers, *Opt. Commun.*, **196(1-6)**, 159–171.
- [76] **Hao, R., Li, L., Li, Z., Yang, R. ve Zhou, G.** (2005). A new way to exact quasi-soliton solutions and soliton interaction for the cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients, *Opt. Commun.*, **245**, 383–390.
- [77] **Rodas-Verde, M.I., Michinel, H. ve Pérez-García, V.M.** (2005). Controllable soliton emission from a Bose-Einstein condensate, *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 153903.
- [78] **Basarab-Horwath, P., Lahno, V. ve Zhdanov, R.** (2001). The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations, *Acta Appl. Math.*, **69**, 43–94.
- [79] **Gagnon, L.** (1989). Exact traveling-wave solutions for optical models based on the nonlinear cubic-quintic Schrödinger equation, *J. Opt. Society of America A*, **6(9)**, 1477–1483.
- [80] **Xue, J.K.** (2003). Kadomtsev-Petviashvili (KP)-Burgers equation in a dusty plasmas with non-adiabatic dust charge fluctuation, *Eur. Phys. J. D*, **26**, 211–214.

- [81] **Leblond, H.** (2002). KP lumps in ferromagnets: a three dimensional KdV-Burgers model, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**, 10149–10161.
- [82] **Baldwin, D. ve Hereman, W.** (2009). A Mathematica package for the Painlevé test of systems of nonlinear ordinary and partial differential equations, <http://inside.mines.edu/whereman/>.
- [83] **Li, X.N., Wei, G.M. ve Liang, Y.Q.** (2010). Painlevé analysis and new analytic solutions for variable-coefficient Kadomtsev-Petviashvili equation with symbolic computation, *App. Math. Comp.*, **216**, 3568–3577.
- [84] **Li, G., Peng, S. ve Wang, C.** (2011). Infinitely many solutions for nonlinear Schrödinger equations with electromagnetic fields, *J. Diff. Eqs.*, **251**, 3500–3521.
- [85] **Lahno, V., Zhdanov, R. ve Magda, O.**, (2006). Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations, *Acta Appl. Math.*, **91**, 253–313.
- [86] **Basarab-Horwath, P., Güngör, F. ve Lahno, V.** (2012). Symmetry classification of third-order nonlinear evolution equations. Part I: Semi-simple algebras, *Acta Appl. Math., Online First*.



## ÖZGEÇMİŞ

**Ad Soyad:** Cihangir ÖZEMİR

**Doğum Yeri ve Tarihi:** Hendek 09.10.1979

**Adres:** İTÜ Fen-Ed. Fak. Matematik Bölümü

**E-Posta:** ozemir@itu.edu.tr

**Lisans:** İTÜ İnşaat Mühendisliği

**Y. Lisans:** İTÜ Matematik Mühendisliği

**Mesleki Deneyim ve Ödüller:** Ekim 2002-.... Araştırma Görevlisi, İTÜ Matematik Bölümü

### Yayın ve Patent Listesi:

- **Güngör, F., Hasanov, M. ve Özemir, C.** (2012). A variable coefficient nonlinear Schrödinger equation with a four-dimensional symmetry group and blow-up, *Applicable Analysis, iFirst*.
- **Özemir, C. ve Güngör, F.** (2006). Group-invariant solutions of the 2+1-dimensional cubic Schrödinger equation *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**, 2973-2993.

### TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

#### Yayınlar:

- **Özemir, C. ve Güngör, F.** (2012). Symmetry classification of variable coefficient cubic-quintic nonlinear Schrödinger equations, *arXiv:1201.4033v1 [nlin.SI]* (Yayın için gönderildi, revizyon).
- **Özemir, C. ve Güngör, F.** (2012). On integrability of variable coefficient nonlinear Schrödinger equations, *Rev. Math. Phys.*, **24**, 7, 1250015.
- **Özemir, C. ve Güngör, F.** (2011). Variable coefficient nonlinear Schrödinger equations with four-dimensional symmetry groups and analysis of their solutions, *J. Math. Phys.*, **52**, 093702.

**Sunumlar:**

- Exact solutions and classification of symmetry algebras for variable coefficient nonlinear Schrödinger equations, *5th Workshop on D.E. and App.*, Eylül 2011, İzmir Ekonomi Üniversitesi, İzmir.
- Variable coefficient nonlinear Schrödinger equations with four-dimensional symmetry groups and analysis of their solutions, *Symmetry and Perturbation Theory 2011*, Haziran 2011, Otranto, İtalya.
- On integrability of variable coefficient nonlinear Schrödinger equations, *4th Workshop on Differential Equations and Applications*, Mayıs 2010, İstanbul.