



T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SÜREKLİ GECİKMELİ YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN
NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN
ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Bekir ÇETİN

Haziran 2012

T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SÜREKLİ GECİKMELİ YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN
NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN
ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

BEKİR ÇETİN

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Tuncay CANDAN

Haziran 2012

Bekir ÇETİN tarafından **Doç. Dr. Tuncay CANDAN** danışmanlığında hazırlanan “**Sürekli Gecikmeli Yüksek Mertebeden Lineer Olmayan Nötral Diferansiyel Denklemlerin Salınım Yapmayan Çözümlerinin Varlığı** ” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : **Doç. Dr. Tuncay CANDAN**
(Niğde Üniversitesi)



Üye : **Yrd. Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL**
(Erciyes Üniversitesi)



Üye : **Yrd. Doç. Dr. Adnan TUNA**
(Niğde Üniversitesi)



ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından/...../20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu’nun/...../20.... tarih ve sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

...../...../20...

Doç. Dr. Osman SİVRİKAYA
MÜDÜR

ÖZET

SÜREKLİ GECİKMELİ YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

ÇETİN, Bekir

Niğde Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman:

Doç. Dr. Tuncay CANDAN

Haziran 2012, 41 sayfa

Bu tezde,

$$\begin{aligned} & [r(t)[x(t) + P(t)x(t - \tau)]^{(n-1)}]' \\ & + (-1)^n \left[\int_a^b q_1(t, \xi) g_1(x(t - \xi)) d\xi - \int_c^d q_2(t, \mu) g_2(x(t - \mu)) d\mu - f(t) \right] = 0 \end{aligned}$$

şeklindeki sürekli gecikmeli yüksek mertebeden lineer olmayan nötral diferansiyel denklemler incelendi ve salınım yapmayan çözümlerinin varlığı için yeterli şartlar verildi.

Anahtar sözcükler: Nötral denklemler, Tek nokta, Yüksek mertebe, salınım yapmayan çözüm.

SUMMARY

EXISTENCE OF NONOSCILLATORY SOLUTION OF HIGHER ORDER NONLINEAR NEUTRAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DISTRUBUTED DEVIATING ARGUMENTS

ÇETİN, Bekir

Nigde University

Gruduate School of Natural and Applied Science

Department of Mathematics

Supervisor: Associate Proffesor Dr. Tuncay CANDAN

June, 41 pages

In this thesis, we consider the higher order neutral equation with distrubuted deviating arguments of the form

$$\begin{aligned} &[r(t)[x(t) + P(t)x(t - \tau)]^{(n-1)}]' \\ &+ (-1)^n \left[\int_a^b q_1(t, \xi) g_1(x(t - \xi)) d\xi - \int_c^d q_2(t, \mu) g_2(x(t - \mu)) d\mu - f(t) \right] = 0 \end{aligned}$$

and we give sufficent conditions to have nonoscillatory solutions.

Keywords: Neutral equation, Fixed point, Higher order, Nonoscillatory solution.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanma sürecinde, Lisans ve Yüksek Lisans eğitimim boyunca hiçbir desteği esirgemeyen, fikirleriyle yolumu aydınlatan değerli hocam Doç. Dr. Tuncay CANDAN' a ve diğer bütün hocalarıma, tüm eğitim öğretim hayatım boyunca maddi manevi hiçbir desteği esirgemeyen aileme, bugünlere gelmemde en büyük paya sahip olan ağabeyim Musa ÇETİN' e ve ABLALARIM' a, en önemlisi de yaşam sebebim olan ANNEM' e yüreğimin bir köşesinde sonsuza kadar yaşayacak olan BABAM' a saygı sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
SUMMARY	iv
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER DİZİNİ	viii
BÖLÜM I GİRİŞ	1
BÖLÜM II TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1 Fonksiyonel Diferansiyel Denklemler	2
2.1.1 Gecikmeli (Delay, Retarded) fonksiyonel diferansiyel denklemler.....	2
2.1.2 İleri (Advanced) fonksiyonel diferansiyel denklemler.....	2
2.1.3 Karma (Mixed) fonksiyonel diferansiyel denklemler	2
2.1.4 Nötral (Neutral) fonksiyonel diferansiyel denklemler	3
2.2 Salınım (Oscillation).....	3
2.3 Fonksiyonların Sınırlılığı	3
2.4 Sabit Nokta.....	4
2.5 Metrik Uzay	4
2.6 Açık ve Kapalı Yuvar	5
2.7 Yakınsaklık	5
2.8 Cauchy Dizisi	5
2.9 Tam Metrik Uzay	6
2.10 Kompaktlık	6
2.11 Kümenin Sınırlılığı ve Çapı	6
2.12 Lineer (vektör) Uzay	6
2.13 Konveks Küme.....	8
2.14 Süreklilik.....	8
2.15 Banach Uzayı.....	8
2.16 Daralma Dönüşümü	9
BÖLÜM III İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER NÖTRAL GECİKME DENKLEMLERİNİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI.....	10

BÖLÜM IV YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI	19
BÖLÜM V SÜREKLİ GECİKMELİ YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SALIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI.....	29
BÖLÜM VI SONUÇLAR	39
KAYNAKLAR	40

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

$\mathbb{R}^+$: Pozitif reel sayılar kümesi

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

$\mathbb{C}$: Kompleks sayılar kümesi

$C([a, b], \mathbb{R})$: $[a, b]$ kapalı aralığında $\mathbb{R}$ ' ye sürekli fonksiyonların kümesi

T : Daralma dönüşümü

τ : Tau

σ : Sigma

ξ : Kısı

μ : Mü

BÖLÜM I

GİRİŞ

Çevremizde gelişen bazı olaylar ve bağlı oldukları sistemler hakkında bilgi sahibi olmak, onları anlamak bilimsel açıdan oldukça önemlidir. Bilindiği gibi adi diferansiyel denklemler ile oluşturulan bir modeldeki değişim oranı geçmişteki durumdan bağımsız olup sadece o andaki zamana bağlıdır. Hâlbuki tutarlı bir matematiksel modelde söz konusu sistemin o andaki değişiminin geçmişteki durumundan bağımsız olmaması gerektiği açıktır. Böyle bir matematiksel modelin kurulmasıyla, şimdi gördüğümüz olayları değerlendirerek daha sonra gelişebilecek olaylar hakkında bilgi sahibi olabiliriz. Yani, birçok uygulama, fiziksel sistemlerdeki değişim oranının sadece bugünkü zaman ve duruma bağlı olmadığını, aynı zamanda geçmişe de bağlı olduğunu göstermektedir. Model kurarken bu tür gecikmeler de hesaba katılırsa oluşturulan yapılar adi diferansiyel denklemden farklı olup gecikmeli (delay), nötral, ileri (advanced) gibi denklemler olarak adlandırılır.

Bu tezin ikinci bölümünde tezle ilgili temel kavramlar verilmiş, üçüncü bölümde yapılan tez çalışmamıza temel teşkil edecek olan M.R.S. Kulenović ve S. Hadžiomerspahić 1998 yılında yayımladıkları ikinci mertebeden nötral gecikme denklemlerinin salınım yapmayan çözümlerinin varlığı üzerine yapmış olduğu çalışmalar incelenmiştir [1].

Tezin dördüncü bölümünde ise T. Candan'ın 2012 yılında yayımlanan yüksek mertebeden lineer olmayan nötral diferansiyel denklemlerin salınım yapmayan çözümlerinin varlığı üzerine yapmış olduğu çalışmalar incelenmiştir [2].

Tezin son bölümünde de T. Candan'ın yüksek mertebeden lineer olmayan nötral diferansiyel denklemlerin salınım yapmayan çözümlerinin varlığı [2] adlı makalesi genişletilerek gecikmeler, sürekli gecikmeli hale getirilmiş ve salınım yapmayan çözümlerin varlığı incelenmiştir.

BÖLÜM II

TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Fonksiyonel Diferansiyel Denklemler

Adi diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve türevleri sadece t anında hesaplanır. Gerçek hayatta bazı olaylar sadece şuan ki zamana değil geçmiş ve gelecek zamana da bağlı olabilir. Bu tür diferansiyel denklemlerde sadece t değil de bilinmeyen fonksiyon ve türevleri $t - \tau$ veya $t + \tau$, $\tau > 0$ anında hesaplanır. Bu tür diferansiyel denklemlere fonksiyonel diferansiyel denklemler denir.

2.1.1 Gecikmeli (Delay, Retarded) fonksiyonel diferansiyel denklemler

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t))), \quad \tau(t) \geq 0$$

şeklindeki diferansiyel denklemlerdir. Burada en yüksek mertebeden türev t anında, diğerleri ise t veya t 'den daha önceki zamanlarda hesaplanır.

Örnek 2.1.1 $x'(t) + px'(t-3) + 2qx(\frac{t}{2}) = 0$ denklemi gecikmeli (delay) fonksiyonel denkleme örnektir

2.1.2 İleri (Advanced) fonksiyonel diferansiyel denklemler

$x'(t) = f(t, x(t), x(t + \tau(t))), \quad \tau(t) \geq 0$ şeklindeki diferansiyel denklemlerdir. Burada en yüksek mertebeden türev t anında, diğerleri t veya t 'den daha sonraki zamanlarda hesaplanır.

Örnek 2.1.2 $x'(t) = -x(t+5) + x(t+\tau) - t + 1$ denklemi ileri (advanced) fonksiyonel diferansiyel denklemlere bir örnektir.

2.1.3 Karma (Mixed) fonksiyonel diferansiyel denklemler

Karma fonksiyonel diferansiyel denklemler hem gecikmeli hem de ileri (advanced) terimlerin bulunduğu denklemlerdir.

Örnek 2.1.3 $x'(t) = 2x(t-1) - 3x(t+1) + 1$ ve $x'(t) = -x(t-1)x(t) - t x(t+1)$

denklemleri karma (mixed) fonksiyonel diferansiyel denklemlere birer örnektir.

2.1.4 Nötral fonksiyonel diferansiyel denklemler

Burada en yüksek mertebeden türev sadece t 'ye bağlı değil de hem gecikmeli hem de ileri (advanced) terimlere bağlı olabilir.

Örnek 2.1.4 $x'(t) = -\frac{1}{t+1} x'(t-1) + x(t-2) + 3 \sin t$ denklemi nötral tipli denklemi

fonksiyonel diferansiyel denklemlere birer örnektir.

2.2 Salınım (Oscillation)

Tanım 2.2.1 $x(t)$ aşıkâr olmayan bir çözüm olsun. Eğer $t > t_0$ için $x(t)$ çözümünün keyfi büyüklükte sıfırı varsa $x(t)$ salınımlıdır denir. Yani bir $\{t_n\}$ dizisi vardır öyle ki $x(t_n) = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ salınım yapmayan çözüm için bir t_1 sayısı vardır öyle ki $t \geq t_1$ olduğunda $x(t) \neq 0$ dır.

Bazen salınım yapma ve salınım yapmama kavramları gecikmeli (veya ileri) denklemlerde karşımıza çıkar. Örneğin $x'(t) + x(t) = 0$ ve $x''(t) - x(t) = 0$ denklemlerinin salınım yapan çözümleri olmamasına rağmen $x'(t) + x(t - \frac{\pi}{2}) = 0$ ve $x'(t) - x(t - \pi) = 0$ denklemlerinin çözümleri salınım yapmaktadır. Gerçekten yukarıdaki ilk iki denklemin çözümleri sırasıyla $x(t) = e^{-t}$ ve $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$. ikinci denklem çiftinin çözümleri ise sırasıyla $x(t) = \sin t$ ve $x(t) = \cos t$ dir.

2.3 Fonksiyonun Sınırlılığı

Tanım 2.3.1 $f : X \rightarrow Y$ ve $\forall x \in X$ için $f(x) \leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa f fonksiyonuna üstten sınırlıdır denir. M sayısına da bu fonksiyonun bir üst sınırı adı verilir. $\forall x \in X$ için $f(x) \geq L$ olacak şekilde bir L reel sayısı varsa bu fonksiyona alttan sınırlıdır denir, L sayısına da bu fonksiyonun bir alt sınırı adı verilir.

Tanım 2.3.2 $f : X \rightarrow Y$ için $|f(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa f fonksiyonuna sınırlı fonksiyon denir.

2.4 Sabit Nokta

Tanım 2.4.1 Bir M kümesinin yine M kümesi içine bir fonksiyona M ' nin kendi içine bir dönüşümü denir. f fonksiyonu M ' nin kendi içine sürekli bir dönüşüm olsun. M ' nin $f(x) = x$ koşulunu sağlayan bir x elemanına f ' nin bir sabit noktası denir.

Örnek 2.5.2 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2$ fonksiyonunun 0 ile 1 olmak üzere iki sabit noktası vardır.

2.5 Metrik Uzay

Tanım 2.5.1 X boştan farklı bir küme olsun. $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlar ise d ye X üzerinde bir metrik veya uzaklık fonksiyonu ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

$$(M1) \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) \geq 0$$

$$(M2) x, y \in X \text{ için } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(M3) \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = d(y, x)$$

$$(M4) \forall x, y, z \in X \text{ için } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Örnek 2.5.1 $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = |x - y|$$

fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir.

Çözüm: (M1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için

$$d(x, y) = |x - y| \geq 0$$

(M2) $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$d(x, y) = |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(M3) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için

$$d(x, y) = |x - y| = |(-1)(x - y)| = d(y, x)$$

(M4) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$$

o halde bu dört şart sağlandığından d , $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir

2.6 Açık ve Kapalı Yuvar

Tanım 2.6.1 (X, d) bir metrik uzay $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.

- $B(x_0, r) = \{x \in X: d(x, x_0) < r\}$ kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar veya açık top,
- $\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X: d(x, x_0) \leq r\}$ kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar veya kapalı top denir.

Tanım 2.6.2 X bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için $B(x, r) \subseteq A$ olacak şekilde bir r pozitif sayısı varsa A' ya X' in açık altkümesi veya A , X' de açıktır denir. X' in B altkümesinin X' teki tümleyeni yani $B' = X - B$, X' te açıksa B' ye kapalı küme denir.

2.7 Yakınsaklık

Tanım 2.7.1 (X, d) bir metrik uzay, (x_n) bu uzayda alınan bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer; $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0$ ise, başka bir deyişle $\forall \varepsilon > 0$ için $n > N(\varepsilon)$ olduğunda $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve $x_n \rightarrow x_0$ ya da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ olarak ifade edilir.

2.8 Cauchy Dizisi

Tanım 2.8.1 (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda alınan bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > N(\varepsilon)$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde ε' a bağlı bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir. Bu tanımı daha kısa olarak şöyle yazabiliriz; $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall m, n > N(\varepsilon)$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon \Leftrightarrow (x_n)$ dizisi Cauchy dizisidir.

2.9 Tam Metrik Uzay

Tanım 2.9.1 (X, d) bir metrik uzay olsun. X' te alınan her (x_n) Cauchy dizisi bu uzayda bir limite yakınsıyorsa (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

2.10 Kompaktlık

Tanım 2.10.1 X bir metrik uzay olsun. A' daki her bir dizi X' de yakınsak olan en az bir alt diziye sahipse X' e kompakt denir. X' in A alt kümesi X' in bir alt uzayı olarak kompakt ise (yani A' daki her bir dizi A da yakınsak bir alt diziye sahipse) A' ya kompakt denir.

2.11 Kümenin Sınırlılığı ve Çapı

Tanım 2.11.1 (X, d) bir metrik uzay $A \subset X$ olsun. $d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ sayısına A kümesinin çapı denir. Eğer $d(A)$ sonlu ise A kümesine (X, d) metrik uzayında sınırlı bir kümedir denir. (X, d) metrik uzayında ki (x_n) dizisinin terimlerinden oluşan küme X' de sınırlı ise (x_n) dizisi (X, d) metrik uzayında sınırlıdır denir.

Teorem 2.11.1 Bir metrik uzayın kompakt alt kümesi kapalı ve sınırlıdır.

2.12 Lineer (vektör) Uzay

Tanım 2.12.1 X boş olmayan bir küme ve F cismi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olsun ve toplama ve skalerle çarpma işlemleri

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

$$\bullet : F \times X \rightarrow X$$

$$(a, x) \rightarrow ax$$

şeklinde tanımlansın. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa X' e F üzerinde lineer uzay (veya vektör uzayı) denir.

A) X , + işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1) $\forall x, y \in X$ için $x + y \in F$ dir.

G2) $\forall x, y, z \in X$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.

G3) $\forall x \in X$ için $x + \theta_x = \theta_x + x = x$ olacak şekilde $\theta_x \in X$ vardır

G4) $\forall x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta_x$ olacak şekilde $-x \in X$ vardır.

G5) $\forall x, y \in X$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için

L1) $\alpha x \in X$ dir.

L2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ dir.

L3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ dir.

L4) $(\alpha \beta)x = \alpha(\beta x)$ dir.

L5) $1_F x = x$ dir. (Burada 1_F , F nin birim elemanıdır.)

Tanım 2.12.2 X bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\rightarrow \|x\| \end{aligned}$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için

(N1) $\|x\| \geq 0$

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu (vektör) uzay adı verilir.

Örnek 2.12.1 $C([a, b], \mathbb{R})$ sürekli fonksiyonların kümesini alalım.

$$\forall f, g \in C([a, b], \mathbb{R}) \text{ ve } \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ için}$$

$(f + g), \alpha f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları sırasıyla;

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha(fx)$$

olarak tanımlanırsa;

(a) $C([a, b], \mathbb{R})$ sürekli fonksiyonlar kümesinin $\mathbb{R}$ üzerinde bir lineer uzaydır.

(b) $\forall f \in C([a, b], \mathbb{R})$ için

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$$

olarak tanımlanırsa

$$\|\cdot\|_{\infty} : C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu bir normdur.

2.13 Konveks Küme

Tanım 2.13.1 L bir lineer uzay, $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir

2.14 Süreklilik

Tanım 2.14.1 X ve Y normlu uzaylar $T : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $\|x - x_0\|_X < \delta$ olan $\forall x \in X$ için $\|T(x) - T(x_0)\|_Y < \varepsilon$ ise T 'ye x_0 noktasında süreklidir denir. T, X ' in her noktasında sürekli ise T 'ye X ' te süreklidir denir.

Teorem 2.14.1 X sonlu boyutlu bir normlu uzay ve A, X ' in bir alt kümesi olsun. A ' nın kompakt olması için gerek ve yeter şart A ' nın kapalı ve sınırlı olmasıdır.

2.15 Banach Uzayı

Tanım 2.15.1 Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzaydaki her Cauchy dizisi bu uzayda yakınsak ise, $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir.

Örnek 2.15.1 $\mathbb{R}^n$ uzayı $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$ normuna göre bir reel Banach uzayıdır.

Teorem (Schauder Sabit Nokta Teoremi) 2.15.1 X bir Banach uzayı, A, X ' in boş olmayan herhangi bir kompakt, konveks alt kümesi ve $f : A \rightarrow A$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda, f en az bir sabit noktaya sahiptir.

2.16 Daralma Dönüşümü

Tanım 2.16.1 (M, d) bir metrik uzay ve f fonksiyonu M 'nin kendi içine bir dönüşümü olsun. M 'deki her x, y için $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ ve $0 \leq k < 1$ koşulunu sağlayan bir k sayısı varsa f 'ye bir daralma dönüşümü denir.

BÖLÜM III

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER NÖTRAL GECİKME DENKLEMLERİNİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Bu bölümde, yapılan tez çalışmasına temel teşkil edecek olan M.R.S. Kulenović ve S. Hadžiomerspahić [1] 1998 yılında yayımladıkları ikinci mertebeden nötral gecikme denklemlerinin salınım yapmayan çözümlerinin varlığı üzerine yapmış olduğu çalışmalar incelenmiştir.

$$p \in \mathbb{R} \text{ ve } \tau \in (0, \infty), \sigma_1, \sigma_2 \in [0, \infty) \text{ ve } Q_1, Q_2 \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^+) \quad (3.1)$$

ve

$$\int_{t_0}^{\infty} s Q_i(s) ds < \infty, \quad i = 1, 2. \quad (3.2)$$

olmak üzere, aşağıdaki şekilde pozitif ve negatif katsayılı ikinci mertebeden nötral gecikmeli denklemi

$$\frac{d^2}{dt^2} [x(t) + px(t - \tau)] + Q_1(t)x(t - \sigma_1) - Q_2(t)x(t - \sigma_2) = 0 \quad (3.3)$$

ele alınmıştır.

$m = \max \{ \tau, \sigma_1, \sigma_2 \}$ olmak üzere (3.3) denkleminin, $t_1 > t_0$ için $x \in C([t_1 - m, \infty), \mathbb{R})$ çözümü denilince $x(t) + px(t - \tau)$, $[t_1, \infty)$ aralığında iki kez diferansiyellenebilir ve $t \geq t_1$ için (3.3) denklemi sağlanmalıdır.

Teorem 1 (3.1) ve (3.2) şartları sağlansın. $p \neq \pm 1$ olmak üzere ve yeterince büyük T_1 için $\forall t \geq T_1$ ve $a > 0$ olduğunda

$$\alpha Q_1(s) - Q_2(s) \geq 0 \quad (3.4)$$

oluyorsa (3.3) denkleminin salınım yapmayan çözümü vardır [1].

İspat: Teoremin ispatı p parametresinin dört farklı durumu için dört durumda gerçekleştirilecektir.

1) $p \in [0, 1)$ durumu. Keyfi büyüklükteki $t_1 > t_0$

$$t_1 \geq \max \{ T_1, t_0 + \sigma \}, \quad \sigma = \max \{ \tau, \sigma_1, \sigma_2 \} \quad (3.5)$$

$$\int_{t_1}^{\infty} s[Q_1(s) + Q_2(s)]ds < 1 - p \quad (3.6)$$

$$0 \leq \int_{t_1}^{\infty} s[M_2 Q_1(s) - M_1 Q_2(s)]ds \leq p - 1 + M_2 \quad (3.7)$$

$$\int_{t_1}^{\infty} s[M_1 Q_1(s) - M_2 Q_2(s)]ds \geq 0 \quad (3.8)$$

sağlanacak şekilde seçilsin. M_1 ve M_2 öyle pozitif sabitlerdir ki,

$$1 - M_2 < p \leq \frac{1 - M_1}{1 + M_2}$$

şartı sağlanır. X , sup normuyla $[t_0, \infty)$ aralığı üzerinde sürekli ve sınırlı fonksiyonların bir kümesi olsun. A kümesi $A = \{x \in X : M_1 \leq x(t) \leq M_2, t \geq t_0\}$ şeklinde ve $T : A \rightarrow X$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$(Tx) = \begin{cases} 1 - p - px(t - \tau) + t \int_t^{\infty} [Q_1(s)x(s - \sigma_1) - Q_2(s)x(s - \sigma_2)]ds \\ + \int_{t_1}^t s[Q_1(s)x(s - \sigma_1) - Q_2(s)x(s - \sigma_2)]ds, & t \geq t_1 \\ (Tx)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Tx dönüşümünün sürekli olduğu açıktır.

$\forall x \in A$ ve $t \geq t_1$ için (3.4) ve (3.7) kullanılarak

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &= 1 - p - px(t - \tau) + t \int_t^{\infty} [Q_1(s)x(s - \sigma_1) - Q_2(s)x(s - \sigma_2)]ds \\ &\quad + \int_{t_1}^t s[Q_1(s)x(s - \sigma_1) - Q_2(s)x(s - \sigma_2)]ds \\ &\leq 1 - p + t \int_t^{\infty} [M_2 Q_1(s) - M_1 Q_2(s)]ds + \int_{t_1}^t s[M_2 Q_1(s) - M_1 Q_2(s)]ds \\ &\leq 1 - p + \int_t^{\infty} s[M_2 Q_1(s) - M_1 Q_2(s)]ds + \int_{t_1}^t s[M_2 Q_1(s) - M_1 Q_2(s)]ds \\ &= 1 - p + \int_{t_1}^{\infty} s[M_2 Q_1(s) - M_1 Q_2(s)]ds \\ &\leq M_2 \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde (3.4) ve (3.8) kullanılarak

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &= 1 - p - px(t - \tau) + t \int_t^{\infty} [Q_1(s)x(s - \sigma_1) - Q_2(s)x(s - \sigma_2)]ds \\ &\quad + \int_{t_1}^t s[Q_1(s)x(s - \sigma_1) - Q_2(s)x(s - \sigma_2)]ds \\ &\geq 1 - p - pM_2 + t \int_t^{\infty} [M_1 Q_1(s) - M_2 Q_2(s)]ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_1}^t s[M_1 Q_1(s) - M_2 Q_2(s)] ds \\
& \geq 1 - p - pM_2 \\
& \geq M_1
\end{aligned}$$

bulunur. Buda $TA \subset A$ olduğunu gösterir. A , X 'nin kapalı sınırlı konveks bir alt kümesi olduğundan daralma prensibine başvurabilmek için T 'nin A kümesi üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$x_1, x_2 \in A$ ve $t \geq t_1$ için

$$\begin{aligned}
|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| & \leq p|x_1(t - \tau) - x_2(t - \tau)| + t \int_t^\infty Q_1(s)|x_1(s - \sigma_1) - x_2(s - \sigma_1)| ds \\
& + t \int_t^\infty Q_2(s)|x_1(s - \sigma_2) - x_2(s - \sigma_2)| ds \\
& + \int_{t_1}^t s Q_1(s)|x_1(s - \sigma_1) - x_2(s - \sigma_1)| ds \\
& + \int_{t_1}^t s Q_2(s)|x_1(s - \sigma_2) - x_2(s - \sigma_2)| ds \\
& \leq p\|x_1 - x_2\| + \|x_1 - x_2\| \\
& \times \left\{ \int_t^\infty s[Q_1(s) + Q_2(s)] ds + \int_{t_1}^t s[Q_1(s) + Q_2(s)] ds \right\} \\
& = \|x_1 - x_2\| \left\{ p + \int_{t_1}^\infty s[Q_1(s) + Q_2(s)] ds \right\} \\
& = q_1 \|x_1 - x_2\|.
\end{aligned}$$

Buradan da $\|Tx_1 - Tx_2\| \leq q_1 \|x_1 - x_2\|$ elde edilir. $q_1 < 1$ olduğundan T 'nin daralma dönüşümü olduğu açıktır. T daralma dönüşümü olduğundan T 'nin tek bir x sabit noktası vardır. Buradan da x 'in (3.3) denkleminin pozitif bir çözümü olduğu açıktır. Buda birinci durumun ispatını tamamlar.

2) $p \in (1, +\infty)$ durumu. Yeterince büyük $t_1 > T_1 > t_0$

$$t_1 + \tau \geq t_0 + \max\{\sigma_1, \sigma_2\} \quad (3.9)$$

$$\int_{t_1}^\infty s[Q_1(s) + Q_2(s)] ds \leq 1 - p \quad (3.10)$$

$$0 \leq \int_{t_1}^\infty s[N_2 Q_1(s) + N_1 Q_2(s)] ds \leq 1 - p + pN_2 \quad (3.11)$$

ve

$$\int_{t_1}^{\infty} s[N_1 Q_1(s) - N_2 Q_2(s)]ds \geq 0 \quad (3.12)$$

sağlanacak şekilde seçilsin. Burada N_1 ve N_2 öyle pozitif sabitlerdir ki

$$(1 - N_1)p \geq 1 + N_2 \text{ ve } p(1 - N_2) < 1$$

şartları sağlanır. Birinci durumdaki X kümesi ele alınsın, $A = \{x \in X : N_1 \leq x(t) \leq N_2, t \geq t_0\}$ kümesi ve $T : A \rightarrow X$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın

$$(Tx)(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p}x(t + \tau) \\ + \frac{t + \tau}{p} \int_{t+\tau}^{\infty} [Q_1(s)x(s - \sigma_1) - Q_2(s)x(s - \sigma_2)]ds \\ + \frac{1}{p} \int_{t_1}^{t+\tau} s[Q_1(s)x(s - \sigma_1) - Q_2(s)x(s - \sigma_2)]ds, & t \geq t_1 \\ (Tx)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Buradan Tx dönüşümünün sürekli olduğu açıktır.

$\forall x \in A$ ve $t \geq t_1$ için (3.4) ve (3.11) kullanılarak

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &= 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p}x(t + \tau) \\ &+ \frac{t + \tau}{p} \int_{t+\tau}^{\infty} [Q_1(s)x(s - \sigma_1) - Q_2(s)x(s - \sigma_2)]ds \\ &+ \frac{1}{p} \int_{t_1}^{t+\tau} s[Q_1(s)x(s - \sigma_1) - Q_2(s)x(s - \sigma_2)]ds \\ &\leq 1 - \frac{1}{p} + \frac{t + \tau}{p} \int_{t+\tau}^{\infty} [N_2 Q_1(s) - N_1 Q_2(s)]ds \\ &+ \frac{1}{p} \int_{t_1}^{t+\tau} s[N_2 Q_1(s) - N_1 Q_2(s)]ds \\ &\leq 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \left\{ \int_{t+\tau}^{\infty} s[N_2 Q_1(s) - N_1 Q_2(s)]ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_1}^{t+\tau} s[N_2 Q_1(s) - N_1 Q_2(s)]ds \right\} \\ &= 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \int_{t_1}^{\infty} s[N_2 Q_1(s) - N_1 Q_2(s)]ds \\ &\leq N_2 \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
(Tx)(t) &= 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p}x(t+\tau) \\
&+ \frac{t+\tau}{p} \int_{t+\tau}^{\infty} [Q_1(s)x(s-\sigma_1) - Q_2(s)x(s-\sigma_2)]ds \\
&+ \frac{1}{p} \int_{t_1}^{t+\tau} s[Q_1(s)x(s-\sigma_1) - Q_2(s)x(s-\sigma_2)]ds \\
&\geq 1 - \frac{1}{p} - \frac{N_2}{p} + \frac{t+\tau}{p} \int_{t+\tau}^{\infty} [N_1Q_1(s) - N_2Q_2(s)]ds \\
&+ \frac{1}{p} \int_{t_1}^{t+\tau} s[N_1Q_1(s) - N_2Q_2(s)]ds \geq 1 - \frac{1}{p} - \frac{N_2}{p} \\
&\geq N_1.
\end{aligned}$$

Böylece $TA \subset A$ olduğu gösterilmiş oldu. Şimdide A , X 'in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesi olduğundan ve T 'nin X 'in A alt kümesi üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$x_1, x_2 \in A$ ve $t \geq t_1$ olduğunda

$$\begin{aligned}
&|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| \\
&\leq \frac{1}{p} |x_1(t+\tau) - x_2(t+\tau)| + \frac{t+\tau}{p} \left[\int_{t+\tau}^{\infty} Q_1(s) |x_1(s-\sigma_1) - x_2(s-\sigma_1)| ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{t+\tau}^{\infty} Q_2(s) |x_1(s-\sigma_2) - x_2(s-\sigma_2)| ds \right] \\
&+ \frac{1}{p} \left[\int_{t_1}^{t+\tau} s Q_1(s) |x_1(s-\sigma_1) - x_2(s-\sigma_1)| ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{t_1}^{t+\tau} s Q_2(s) |x_1(s-\sigma_2) - x_2(s-\sigma_2)| ds \right] \\
&\leq \frac{1}{p} \|x_1 - x_2\| + \frac{1}{p} \|x_1 - x_2\| \\
&\quad \times \left[\int_{t+\tau}^{\infty} s[Q_1(s) + Q_2(s)] ds + \int_{t_1}^{t+\tau} s[Q_1(s) + Q_2(s)] ds \right] \\
&= \frac{1}{p} \|x_1 - x_2\| \left[1 + \int_{t_1}^{\infty} s[Q_1(s) + Q_2(s)] ds \right] = q_2 \|x_1 - x_2\|.
\end{aligned}$$

Buradan da $\|Tx_1 - Tx_2\| \leq q_2 \|x_1 - x_2\|$ elde edilir. $q_2 < 1$ olduğundan T 'nin daralma dönüşümü olduğu açıktır. T daralma dönüşümü olduğundan da T 'nin tek bir x sabit noktası vardır. Buradan da x 'in (3.3) denkleminin pozitif bir çözümü olduğu açıktır. Buda ikinci durumun ispatını tamamlar.

3) $p \in (-1, 0)$ durumu. $t_1 > T_1 > t_0$ yeterince büyük seçilsin ki (3.5) ve

$$\int_{t_1}^{\infty} s[Q_1(s) + Q_2(s)]ds < 1 + p \quad (3.13)$$

$$0 \leq \int_{t_1}^{\infty} s[M_4 Q_1(s) - M_3 Q_2(s)]ds \leq (p+1)(M_4 - 1) \quad (3.14)$$

sağlansın. M_3 ve M_4 öyle pozitif sabitlerdir ki

$$0 < M_3 \leq 1 \leq M_4$$

şartı sağlanır. X , birinci durumda tanımlanan küme ve $A = \{x \in X : M_3 \leq x(t) \leq M_4, t \geq t_0\}$ şeklinde, $T : A \rightarrow X$ dönüşümü de aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(Tx)(t) = \begin{cases} 1 + p - px(t - \tau) \\ \quad + t \int_t^{\infty} [Q_1(s)x(s - \sigma_1) - Q_2(s)x(s - \sigma_2)]ds \\ \quad + \int_{t_1}^t s[Q_1(s)x(s - \sigma_1) - Q_2(s)x(s - \sigma_2)]ds, & t \geq t_1 \\ (Tx)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Tx dönüşümünün sürekli olduğu açıktır. $\forall x \in A$ ve $t \geq t_1$ için (3.4) ve (3.14) kullanılarak

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &= 1 + p - px(t - \tau) + t \int_t^{\infty} s[Q_1(s)x(s - \sigma_1) - Q_2(s)x(s - \sigma_2)]ds \\ &\quad + \int_{t_1}^t s[Q_1(s)x(s - \sigma_1) - Q_2(s)x(s - \sigma_2)]ds \leq 1 + p - pM_4 \\ &\quad + t \int_t^{\infty} [M_4 Q_1(s) - M_3 Q_2(s)]ds + \int_{t_1}^t s[M_4 Q_1(s) - M_3 Q_2(s)]ds \\ &\leq 1 + p - pM_4 + \int_{t_1}^{\infty} s[M_4 Q_1(s) - M_3 Q_2(s)]ds \\ &\leq 1 + p - pM_4 + (p+1)(M_4 - 1) \\ &= M_4 \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de (3.4) ve (3.13) kullanılarak

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &= 1 + p - px(t - \tau) + t \int_t^{\infty} [Q_1(s)x(s - \sigma_1) - Q_2(s)x(s - \sigma_2)]ds \\ &\quad + \int_{t_1}^t [Q_1(s)x(s - \sigma_1) - Q_2(s)x(s - \sigma_2)]ds \\ &\geq 1 + p - pM_3 + t \int_t^{\infty} [M_3 Q_1(s) - M_4 Q_2(s)]ds + \int_{t_1}^t s[M_3 Q_1(s) - M_4 Q_2(s)]ds \end{aligned}$$

$$\geq 1 + p - pM_3$$

$$\geq M_3$$

bulunur. Buda $TA \subset A$ olduğunu gösterir. A , X ' in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesi olduğundan daralma prensibine başvurabilmek için T ' nin X ' in A alt kümesi üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$x_1, x_2 \in A$ ve $t \geq t_1$ için

$$\begin{aligned} |(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| &\leq -p|x_1(t - \tau) - x_2(t - \tau)| + t \int_t^\infty Q_1(s)|x_1(s - \sigma_1) - x_2(s - \sigma_1)|ds \\ &\quad + t \int_t^\infty Q_2(s)|x_1(s - \sigma_2) - x_2(s - \sigma_2)|ds \\ &\quad + \int_{t_1}^t sQ_1(s)|x_1(s - \sigma_1) - x_2(s - \sigma_1)|ds \\ &\quad + \int_{t_1}^t sQ_2(s)|x_1(s - \sigma_2) - x_2(s - \sigma_2)|ds \\ &\leq -p\|x_1 - x_2\| + \|x_1 - x_2\| \left(\int_t^\infty s[Q_1(s) + Q_2(s)]ds \right) \\ &= \|x_1 - x_2\| \left\{ -p + \int_{t_1}^\infty s[Q_1(s) + Q_2(s)]ds \right\} = q_3 \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Buradan da $\|Tx_1 - Tx_2\| \leq q_3 \|x_1 - x_2\|$ elde edilir. $q_3 < 1$ olduğundan T ' nin daralma dönüşümü olduğu açıktır. T de daralma dönüşümü olduğundan T ' nin bir tek x sabit noktası vardır. Buradan da x ' in (3.3) denkleminin pozitif bir çözümü olduğu açıktır. Buda üçüncü durumun ispatını tamamlar.

4) $p \in (-\infty, -1)$ durumu. Yeterince büyük $t_1 > T_1 > t_0$ seçilsin ki (3.9) ve

$$\int_{t_1}^\infty s[Q_1(s) + Q_2(s)]ds \leq -p - 1 \quad (3.15)$$

$$0 \leq \int_{t_1}^\infty [N_4 Q_1(s) + N_3 Q_2(s)]ds \leq (p + 1)(N_3 - 1) \quad (3.16)$$

sağlansın. Burada N_3 ve N_4 öyle pozitif sabitlerdir ki

$$0 < N_3 < 1 \leq N_4$$

şartı sağlanır. Birinci durumdaki X kümesi ele alınsın, $A = \{x \in X : N_3 \leq x(t) \leq N_4, t \geq t_0\}$ kümesi ve $T : A \rightarrow X$ dönüşümü de aşağıdaki şekilde tanımlansın

$$(Tx)(t) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{p}x(t + \tau) \\ + \frac{t + \tau}{p} \int_{t+\tau}^{\infty} [Q_1(s)x(s - \sigma_1) - Q_2(s)x(s - \sigma_2)]ds \\ + \frac{1}{p} \int_{t_1}^{t+\tau} s[Q_1(s)x(s - \sigma_1) - Q_2(s)x(s - \sigma_2)]ds, & t \geq t_1 \\ (Tx)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Buradan Tx 'in sürekli olduğu açıktır. $\forall x \in A$ ve $t \geq t_1$ için (3.4) kullanılarak

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &= 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{p}x(t + \tau) + \frac{t + \tau}{p} \int_{t+\tau}^{\infty} [Q_1(s)x(s - \sigma_1) - Q_2(s)x(s - \sigma_2)]ds \\ &\quad + \frac{1}{p} \int_{t_1}^{t+\tau} s[Q_1(s)x(s - \sigma_1) - Q_2(s)x(s - \sigma_2)]ds \\ &\leq 1 + \frac{1}{p} - \frac{N_4}{p} + \frac{t + \tau}{p} \int_{t+\tau}^{\infty} [N_3Q_1(s) - N_4Q_2(s)]ds + \frac{1}{p} \int_{t_1}^{t+\tau} s[N_3Q_1(s) - N_4Q_2(s)]ds \\ &\leq 1 + \frac{1}{p} - \frac{N_4}{p} \\ &\leq N_4 \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde (3.16) kullanılarak

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &= 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{p}x(t + \tau) \\ &\quad + \frac{t + \tau}{p} \int_{t+\tau}^{\infty} [Q_1(s)x(s - \sigma_1) - Q_2(s)x(s - \sigma_2)]ds \\ &\quad + \frac{1}{p} \int_{t_1}^{t+\tau} s[Q_1(s)x(s - \sigma_1) - Q_2(s)x(s - \sigma_2)]ds \\ &\geq 1 + \frac{1}{p} - \frac{N_3}{p} + \frac{t + \tau}{p} \int_{t+\tau}^{\infty} [N_4Q_1(s) - N_3Q_2(s)]ds \\ &\quad + \frac{1}{p} \int_{t_1}^{t+\tau} s[N_4Q_1(s) - N_3Q_2(s)]ds \\ &\geq 1 + \frac{1}{p} - \frac{N_3}{p} + \frac{1}{p} \int_{t_1}^{\infty} s[N_4Q_1(s) - N_3Q_2(s)]ds \\ &\geq 1 + \frac{1}{p} - \frac{N_3}{p} + \frac{1}{p}(p+1)(N_3-1) \\ &= N_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Buda $TA \subset A$ olduğunu gösterir. A , X 'in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesi olduğundan daralma prensibine başvurabilmek için T 'nin X 'in A alt kümesi üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$x_1, x_2 \in A$ ve $t \geq t_1$ olduğunda

$$\begin{aligned}
|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| &\leq -\frac{1}{p} |x_1(t + \tau) - x_2(t + \tau)| - \frac{t + \tau}{p} \left[\int_{t+\tau}^{\infty} Q_1(s) |x_1(s - \sigma_1) - x_2(s - \sigma_1)| ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{t+\tau}^{\infty} Q_2(s) |x_1(s - \sigma_2) - x_2(s - \sigma_2)| ds \right] \\
&\quad - \frac{1}{p} \left[\int_{t_1}^{t+\tau} s Q_1(s) |x_1(s - \sigma_1) - x_2(s - \sigma_1)| ds + \int_{t_1}^{t+\tau} s Q_2(s) |x_1(s - \sigma_2) - x_2(s - \sigma_2)| ds \right] \\
&\leq -\frac{1}{p} \|x_1 - x_2\| - \frac{1}{p} \|x_1 - x_2\| \left\{ \int_{t+\tau}^{\infty} s [Q_1(s) + Q_2(s)] ds + \int_{t_1}^{t+\tau} s [Q_1(s) + Q_2(s)] ds \right\} \\
&= -\frac{1}{p} \|x_1 - x_2\| \left\{ 1 + \int_{t_1}^{\infty} s [Q_1(s) + Q_2(s)] ds \right\} = q_4 \|x_1 - x_2\|.
\end{aligned}$$

Buradan da $\|Tx_1 - Tx_2\| \leq q_4 \|x_1 - x_2\|$ elde edilir. $q_4 < 1$ olduğundan T 'nin daralma dönüşümü olduğu açıktır. T daralma dönüşümü olduğundan T 'nin tek bir x sabit noktası vardır. Buradan da x 'in (3.3) denkleminin pozitif bir çözümü olduğu açıktır. Buda dördüncü durumun ispatını tamamlar. Buradan da teoremin ispatı da tamamlanmış olur.

BÖLÜM IV

YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Bu bölümde, T. Candan'ın [2] 2012 yılında yayımlanan yüksek mertebeden lineer olmayan nötral diferansiyel denklemlerin salınım yapmayan çözümlerinin varlığı üzerine yapmış olduğu çalışma incelenmiştir.

$$[r(t)[x(t) + P(t)x(t - \tau)]^{(n-1)'} + (-1)^n [Q_1(t)g_1(x(t - \sigma_1)) - Q_2(t)g_2(x(t - \sigma_2)) - f(t)] = 0 \quad (4.1)$$

şeklindeki yüksek mertebeden lineer olmayan nötral diferansiyel denklemi ele alınsın.

Burada, $n \geq 2$ pozitif tam sayı $P \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$, $r \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$ $Q_i \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2$, $f \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$ ve $g_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $i = 1, 2$ için $g_i(x)$ yerel Lipschitz şartını $x \neq 0$ için $g_i(x)x > 0$, $i = 1, 2$ şartları altında sağlasın.

$m = \max \{ \tau, \sigma_1, \sigma_2 \}$ olsun. (4.1) denkleminin $t_1 \geq t_0$ olmak üzere $x \in C([t_1 - m, \infty), \mathbb{R})$ çözümü denilince $[t_1, \infty)$ aralığında $x(t) + P(t)x(t - \tau)$, $(n-1)$ defa sürekli diferansiyellenebilir ve $r(t)[x(t) + P(t)x(t - \tau)]^{(n-1)}$ bir kez sürekli diferansiyellenebilir ve $t \geq t_1$ için (4.1) denklemi sağlanmalıdır.

Teorem 1: Kabul edelim ki $0 \leq P(t) \leq p < 1$ ve

$$\int_{t_0}^{\infty} \int_{t_0}^s \frac{s^{n-2}}{r(s)} Q_i(u) du ds < \infty, \quad i = 1, 2. \quad \text{ve} \quad \int_{t_0}^{\infty} \int_{t_0}^s \frac{s^{n-2}}{r(s)} |f(u)| du ds < \infty \quad (4.2)$$

olsun. Bu takdir de (4.1) denkleminin sınırlı salınım yapmayan çözümü vardır [2].

İspat: $\Lambda, [t_0, \infty)$ aralığı üzerinde sup normuyla tanımlanan bütün sürekli ve sınırlı fonksiyonların kümesi olsun. M_1 ve M_2 ,

$$pM_2 + M_1 < \alpha < M_2$$

şartını sağlayan pozitif sabitler olmak üzere $A = \{x \in \Lambda : M_1 \leq x(t) \leq M_2, t \geq t_0\}$ şeklinde tanımlansın. $L_i, i = 1, 2$, $g_i(x), i = 1, 2$, fonksiyonlarının A kümesi üzerinde

Lipschitz sabitleri, $L = \max\{L_1, L_2\}$ ve $\beta_i = \max_{x \in A} \{g_i(x)\}$, $i = 1, 2$, olsun. (4.2) den dolayı $t_1 \geq t_0 + \max\{\tau, \sigma_1, \sigma_2\}$ olmak üzere $t_1 > t_0$ yeterince büyük seçilebilir öyle ki

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u)\beta_1 + |f(u)|] duds \leq M_2 - \alpha, \quad t \geq t_1, \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_2(u)\beta_2 + |f(u)|] duds \leq \alpha - M_1 - pM_2, \quad t \geq t_1 \quad (4.4)$$

ve

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u) + Q_2(u)] duds < \frac{1-p}{L}, \quad t \geq t_1 \quad (4.5)$$

sağlanır.

$T : A \rightarrow \Lambda$ operatörü aşağıdaki gibi tanımlansın

$$(Tx)(t) = \begin{cases} \alpha - P(t)x(t-\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u)g_1(x(u-\sigma_1)) \\ - Q_2(u)g_2(x(u-\sigma_2)) - f(u)] duds, & t \geq t_1 \\ (Tx)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Tx operatörünün sürekli olduğu açıktır. $t \geq t_1$ ve $x \in A$ için (4.3) kullanılarak

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &\leq \alpha + \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u)g_1(x(u-\sigma_1)) - f(u)] duds \\ &\leq \alpha + \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u)\beta_1 + |f(u)|] duds \\ &\leq M_2 \end{aligned}$$

bulunur ve (4.4) kullanılarak

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &\geq \alpha - P(t)x(t-\tau) - \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_2(u)g_2(x(u-\sigma_2)) + f(u)] duds \\ &\geq \alpha - pM_2 - \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_2(u)\beta_2 + |f(u)|] duds \\ &\geq M_1 \end{aligned}$$

bulunur. Buda $TA \subset A$ olduğunu gösterir. A , Λ 'nin kapalı sınırlı konveks bir alt kümesi olduğundan daralma prensibine başvurabilmek için T 'nin A kümesi üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$x_1, x_2 \in A$ ve $t \geq t_1$ için

$$\begin{aligned} |(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| &= \left| \alpha - P(t)x_1(t - \tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u)g_1(x_1(u - \sigma_1)) \right. \\ &\quad \left. - Q_2(u)g_2(x_1(u - \sigma_2)) - f(u)] duds - \alpha + P(t)x_2(t - \tau) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u)g_1(x_2(u - \sigma_1)) - Q_2(u)g_2(x_2(u - \sigma_2)) + f(u)] duds \right| \\ &\leq P(t)|x_1(t - \tau) - x_2(t - \tau)| + \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s Q_1(u)|g_1(x_1(u - \sigma_1)) - g_1(x_2(u - \sigma_1))| \\ &\quad + Q_2(u)|g_2(x_1(u - \sigma_2)) - g_2(x_2(u - \sigma_2))| duds \end{aligned}$$

yada (4.5) kullanılarak

$$\begin{aligned} |(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| &\leq \|x_1 - x_2\| \left(p + L \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u) + Q_2(u)] duds \right) \\ &< \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

buradan sup normuna geçilirse $\|Tx_1 - Tx_2\| < \|x_1 - x_2\|$ olur ki buda T 'nin A üzerinde daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Buda (4.1) denkleminin tek bir pozitif çözümü olduğunu ispatlar.

Teorem 2: Kabul edelim ki $1 < p \leq P(t) \leq p_0 < \infty$ ve (4.2) sağlansın. Bu durumda (4.1) denkleminin sınırlı salınım yapmayan çözümü vardır [2].

İspat: Λ , $[t_0, \infty)$ aralığı üzerinde sup normuyla tanımlanan bütün sürekli ve sınırlı fonksiyonların kümesi olsun. M_3 ve M_4 ,

$$p_0 M_3 + M_4 < \alpha < p M_4$$

şartını sağlayan pozitif sabitler olmak üzere $A = \{x \in \Lambda : M_3 \leq x(t) \leq M_4, t \geq t_0\}$ şeklinde tanımlansın. $L_i, i=1,2$., $g_i(x), i=1,2$., fonksiyonlarının A kümesi üzerinde Lipschitz sabitleri, $L = \max\{L_1, L_2\}$ ve $\beta_i = \max_{x \in A} \{g_i(x)\}$, $i=1,2$ olsun. (4.2) den dolayı $t_1 + \tau \geq t_0 + \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ olmak üzere $t_1 > t_0$ yeterince büyük seçilebilir öyle ki

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u)\beta_1 + |f(u)|] duds \leq pM_4 - \alpha, \quad t \geq t_1 \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_2(u)\beta_2 + |f(u)|] duds \leq \alpha - M_4 - p_0M_3, \quad t \geq t_1 \quad (4.7)$$

ve

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u) + Q_2(u)] duds < \frac{p-1}{L}, \quad t \geq t_1 \quad (4.8)$$

sağlanır.

$T : A \rightarrow \Lambda$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın

$$(Tx)(t) = \begin{cases} \frac{1}{P(t+\tau)} \left\{ \alpha - x(t+\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^\infty \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s [Q_1(u)g_1(x(u-\sigma_1)) \right. \\ \left. - Q_2(u)g_2(x(u-\sigma_2)) - f(u)] duds \right\}, & t \geq t_1 \\ (Tx)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Tx operatörünün sürekli olduğu açıktır. $t \geq t_1$ ve $x \in A$ için (4.6) kullanılarak

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &\leq \frac{1}{p} \left[\alpha + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^\infty \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s [Q_1(u)g_1(x(u-\sigma_1)) - f(u)] duds \right] \\ &\leq \frac{1}{p} \left[\alpha + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^\infty \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s [Q_1(u)\beta_1 + |f(u)|] duds \right] \\ &\leq M_4 \end{aligned}$$

bulunur ve (4.7) kullanılarak

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &\geq \frac{1}{p_0} \left[\alpha - x(t+\tau) - \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^\infty \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s [Q_2(u)g_2(x(u-\sigma_2)) + f(u)] duds \right] \\ &\geq \frac{1}{p_0} \left[\alpha - M_4 - \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^\infty \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s [Q_2(u)\beta_2 + |f(u)|] duds \right] \end{aligned}$$

$$\geq M_3$$

bulunur. Buda $TA \subset A$ olduğunu gösterir. A , Λ 'nin kapalı sınırlı konveks bir alt kümesi olduğundan daralma prensibine başvurabilmek için T 'nin A kümesi üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$x_1, x_2 \in A$ ve $t \geq t_1$ için

$$\begin{aligned} |(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| &= \left| \frac{1}{P(t+\tau)} \left\{ \alpha - x_1(t+\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \int_{t_1+\tau}^s [Q_1(u)g_1(x_1(u-\sigma_1)) - Q_2(u)g_2(x_1(u-\sigma_2)) - f(u)] duds \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{P(t+\tau)} \left\{ \alpha - x_2(t+\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \int_{t_1+\tau}^s [Q_1(u)g_1(x_2(u-\sigma_1)) - Q_2(u)g_2(x_2(u-\sigma_2)) - f(u)] duds \right\} \right| \\ &\leq \frac{1}{P(t+\tau)} \left\{ |x_1(t+\tau) - x_2(t+\tau)| + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \right. \\ &\quad \left. \int_{t_1+\tau}^s [Q_1(u)|g_1(x_1(u-\sigma_1)) - g_1(x_2(u-\sigma_1))| - Q_2(u)|g_2(x_1(u-\sigma_2)) - g_2(x_2(u-\sigma_2))|] duds \right\} \end{aligned}$$

yada (4.8) kullanılarak

$$\begin{aligned} |(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| &\leq \frac{\|x_1 - x_2\|}{p} \left(1 + L \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s [Q_1(u) + Q_2(u)] duds \right) \\ &< \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

buradan da sup normuna geçilirse $\|Tx_1 - Tx_2\| < \|x_1 - x_2\|$ olur ki buda T 'nin A kümesi üzerinde daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Buda (4.1) denkleminin tekbir pozitif çözüme sahip olduğunu gösterir.

Teorem 3: Kabul edelim ki $-1 < p \leq P(t) \leq 0$ ve (4.2) sağlansın. Bu durumda (4.1) denkleminin sınırlı salınım yapamayan çözümü vardır [2].

İspat: $\Lambda, [t_0, \infty)$ aralığı üzerinde sup normuyla tanımlanan bütün sürekli ve sınırlı fonksiyonların kümesi olsun. M_5 ve M_6 ,

$$M_5 < \alpha < (1+p)M_6$$

şartını sağlayan pozitif sabitler olmak üzere $A = \{x \in \Lambda : M_5 \leq x(t) \leq M_6, \quad t \geq t_0\}$ şeklinde tanımlansın $L_i, i = 1, 2$., $g_i(x), i = 1, 2$., fonksiyonlarının A kümesi üzerinde Lipschitz sabitleri, $L = \max\{L_1, L_2\}$ ve $\beta_i = \max_{x \in A} \{g_i(x)\}, i = 1, 2$. olsun (4.2)'den dolayı $t_1 + \tau \geq t_0 + \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ olmak üzere $t_1 > t_0$ yeterince büyük seçilebilir öyle ki

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u)\beta_1 + |f(u)|] duds \leq (1+p)M_6 - \alpha, \quad t \geq t_1, \quad (4.9)$$

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_2(u)\beta_2 + |f(u)|] duds \leq \alpha - M_5, \quad t \geq t_1 \quad (4.10)$$

ve

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u) + Q_2(u)] duds < \frac{1+p}{L}, \quad t \geq t_1 \quad (4.11)$$

sağlanır.

$T : A \rightarrow \Lambda$ dönüşümü

$$(Tx)(t) = \begin{cases} \alpha - P(t)x(t-\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u)g_1(x(u-\sigma_1)) \\ - Q_2(u)g_2(x(u-\sigma_2)) - f(u)] duds, & t \geq t_1 \\ (Tx)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa Tx 'in sürekli olduğu açıktır. $t \geq t_1$ ve $x \in A$ için (4.9) kullanılarak

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &\leq \alpha - P(t)x(t-\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u)g_1(x(u-\sigma_1)) - |f(u)|] duds \\ &\leq \alpha - pM_6 + \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u)\beta_1 + |f(u)|] duds \\ &\leq M_6 \end{aligned}$$

bulunur ve (4.10) kullanılarak

$$(Tx)(t) \geq \alpha - P(t)x(t-\tau) - \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_2(u)g_2(x(u-\sigma_2)) + f(u)] duds$$

$$\geq \alpha - \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_2(u)\beta_2 + |f(u)|] duds$$

$$\geq M_5$$

bulunr. Buda $TA \subset A$ olduğunu gösterir. A , Λ 'nin kapalı sınırlı konveks bir alt kümesi olduğunda daralma prensibine başvurabilmek için T 'nin A kümesi üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$x_1, x_2 \in A$ ve $t \geq t_1$ için

$$\begin{aligned} |(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| &= \left| \alpha - P(t)x_1(t-\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u)g_1(x_1(u-\sigma_1)) \right. \\ &\quad \left. - Q_2(u)g_2(x_1(u-\sigma_2)) - f(u)] duds - \alpha + P(t)x_2(t-\tau) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u)g_1(x_2(u-\sigma_1)) - Q_2(u)g_2(x_2(u-\sigma_2)) + f(u)] duds \right| \\ &\leq -P(t)|x_1(t-\tau) - x_2(t-\tau)| + \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s Q_1(u) |g_1(x_1(u-\sigma_1)) - g_1(x_2(u-\sigma_1))| \\ &\quad + Q_2(u) |g_2(x_1(u-\sigma_2)) - g_2(x_2(u-\sigma_2))| duds \end{aligned}$$

yada (4.11) kullanılarak

$$\begin{aligned} |(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| &\leq \|x_1 - x_2\| \left(-p + L \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u) + Q_2(u)] duds \right) \\ &< \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

buradan sup normuna geçilirse $\|Tx_1 - Tx_2\| < \|x_1 - x_2\|$ olur ki buda T 'nin A üzerinde daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Buda (4.1) denkleminin tek bir pozitif çözüme sahip olduğunu ispatlar.

Teorem 4: Kabul edelim ki $-\infty < p_0 \leq P(t) \leq p < -1$ ve (4.2) sağlansın. Bu durumda (4.1) denkleminin sınırlı salınım yapmayan çözümü vardır [2].

İspat: $\Lambda, [t_0, \infty)$ aralığı üzerinde sup normuyla tanımlanan bütün sürekli ve sınırlı fonksiyonların kümesi olsun. M_7 ve M_8

$$(-p_0 - 1)M_7 < \alpha < (-p - 1)M_8$$

şartını sağlayan pozitif sabitler olmak üzere $A = \{x \in \Lambda : M_7 \leq x(t) \leq M_8, t \geq t_0\}$ şeklinde tanımlansın. $L_i, i=1,2, \dots, g_i(x), i=1,2$ fonksiyonlarının A kümesi üzerinde Lipschitz

sabiti, $L = \max\{L_1, L_2\}$ ve $\beta_i = \max_{x \in A} \{g_i(x)\}, i = 1, 2$, olsun. (4.2)'den dolayı

$t_1 + \tau \geq t_0 + \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ olmak üzere $t_1 > t_0$ yeterince büyük seçilebilir öyle ki

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_2(u)\beta_2 + |f(u)|] duds \leq (-p-1)M_8 - \alpha, \quad t \geq t_1, \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u)\beta_1 + |f(u)|] duds \leq \alpha + (p_0+1)M_7, \quad t \geq t_1 \quad (4.13)$$

ve

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u) + Q_2(u)] duds < \frac{-p-1}{L}, \quad t \geq t_1 \quad (4.14)$$

sağlanır.

$T : A \rightarrow \Lambda$ dönüşümü aşağıda ki gibi tanımlansın

$$(Tx)(t) = \begin{cases} \frac{1}{P(t+\tau)} \left\{ -\alpha - x(t+\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^\infty \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s [Q_1(u)g_1(x(u-\sigma_1)) \right. \\ \left. - Q_2(u)g_2(x(u-\sigma_2)) - f(u)] duds \right\}, & t \geq t_1 \\ (Tx)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Tx dönüşümünün sürekli olduğu açıktır. $t \geq t_1$ ve $x \in A$ için (4.12) kullanılarak

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &\leq -\frac{1}{p} \left[\alpha + x(t+\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^\infty \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s [Q_2(u)g_2(x(u-\sigma_2)) - f(u)] duds \right] \\ &\leq -\frac{1}{p} \left[\alpha + M_8 + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^\infty \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s [Q_2(u)\beta_2 + |f(u)|] duds \right] \\ &\leq M_8 \end{aligned}$$

bulunur. (4.13) kullanılarak;

$$(Tx)(t) \geq -\frac{1}{p_0} \left[\alpha + x(t+\tau) - \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^\infty \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s [Q_1(u)g_1(x(t-\sigma_1)) + f(u)] duds \right]$$

$$\geq -\frac{1}{p_0} \left[\alpha + M_7 - \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s [Q_1(u)\beta_1 + |f(u)|] duds \right] \\ \geq M_7$$

bulunur. Buda $TA \subset A$ olduğunu gösterir. A , Λ 'nin kapalı sınırlı konveks bir alt kümesi olduğunda daralma prensibine başvurabilmek için T 'nin A kümesi üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$x_1, x_2 \in A$ ve $t \geq t_1$ için

$$\begin{aligned} |(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| &= \left| \frac{1}{P(t+\tau)} \left\{ \alpha - x_1(t+\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \int_{t_1+\tau}^s [Q_1(u)g_1(x_1(u-\sigma_1)) - Q_2(u)g_2(x_1(u-\sigma_2)) - f(u)] duds \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{P(t+\tau)} \left\{ \alpha - x_2(t+\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \int_{t_1+\tau}^s [Q_1(u)g_1(x_2(u-\sigma_1)) - Q_2(u)g_2(x_2(u-\sigma_2)) - f(u)] duds \right\} \right| \\ &\leq -\frac{1}{P(t+\tau)} \left\{ |x_1(t+\tau) - x_2(t+\tau)| + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \right. \\ &\quad \left. \int_{t_1+\tau}^s [Q_1(u)|g_1(x_1(u-\sigma_1)) - g_1(x_2(u-\sigma_1))| - Q_2(u)|g_2(x_1(u-\sigma_2)) - g_2(x_2(u-\sigma_2))|] duds \right\} \end{aligned}$$

yada (4.14) kullanılarak

$$\begin{aligned} |(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| &\leq -\frac{\|x_1 - x_2\|}{p} \left(1 + L \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s [Q_1(u) + Q_2(u)] duds \right) \\ &< \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

Buradan sup normuna geçilirse $\|Tx_1 - Tx_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$ olur ki buda T 'nin A üzerinde daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Buda (4.1) denkleminin tekbir pozitif çözüme sahip olduğunu gösterir.

Örnek: $\left[e^t \left[x(t) + \left(\frac{e^{-t} - 1}{e^3} \right) x(t-3) \right]^{(4)} \right]' - \left[\frac{e^{-t}}{e^3} x^3(t-1) - \frac{e^{-2t}}{e^2} x(t-2) - 16e^{-t} + e^{-3t} - e^{-4t} \right] = 0$

denklemini ele alalım. Burada $n=5$, $r(t)=e^t$, $P(t)=\frac{e^{-t}-1}{e^3}$, $Q_1(t)=\frac{e^{-t}}{e^3}$ ve $Q_2(t)=\frac{e^{-2t}}{e^2}$,

$g_1(x)=x^3$, $g_2(x)=x$ ve $f(t)=16e^{-t}-e^{-3t}+e^{-4t}$ dır. Teorem 3' ün şartlarının direk olarak sağlandığı gösterilebilir. $x(t)=e^{-t}$ (4.1) denkleminin salınım yapmayan çözümüdür.

BÖLÜM V

SÜREKLİ GECİKMELİ YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Bu bölümde, dördüncü bölümde verilen T. Candan [2] tarafından çalışılan (4.1) denkleminde daha genel olan

$$\begin{aligned} & [r(t)[x(t) + P(t)x(t - \tau)]^{(n-1)}]' \\ & + (-1)^n \left[\int_a^b q_1(t, \xi) g_1(x(t - \xi)) d\xi - \int_c^d q_2(t, \mu) g_2(x(t - \mu)) d\mu - f(t) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

şeklindeki sürekli gecikmeli yüksek mertebeden lineer olmayan nötral diferansiyel denklemini çalışılmış ve dördüncü bölümde incelenen durumlar (5.1) denklemini için genelleştirilmiştir.

Burada, $n \geq 2$ pozitif sabit $P \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$, $r \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$, $q_1 \in [t_0, \infty) \times [a, b], \mathbb{R}^+$, $q_2 \in [t_0, \infty) \times [c, d], \mathbb{R}^+$, $f \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$, $0 < a < b$, $0 < c < d$, $g_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $i = 1, 2$ için $g_i(x)$ yerel Lipschitz şartını $x \neq 0$ için $g_i(x)x > 0$, $i = 1, 2$ şartları altında sağlasın.

$m = \max \{ \tau, b, d \}$ olsun. (5.1) denkleminin $t_1 \geq t_0$ olmak üzere $x \in C([t_1 - m, \infty), \mathbb{R})$ çözümü denilince $[t_1, \infty)$ aralığında $x(t) + P(t)x(t - \tau)$, $(n-1)$ defa sürekli diferansiyellenebilir, $r(t)[x(t) + P(t)x(t - \tau)]^{(n-1)}$ bir kez sürekli diferansiyellenebilir ve $t \geq t_1$ için (5.1) denklemini sağlanmalıdır.

Teorem: $Q_1(s) = \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi$, $Q_2(s) = \int_c^d q_2(s, \mu) d\mu$ olmak üzere,

$$\int_{t_0}^{\infty} \int_{t_0}^s \frac{s^{n-2}}{r(s)} Q_i(u) du ds < \infty, \quad i = 1, 2 \text{ ve } \int_{t_0}^{\infty} \int_{t_0}^s \frac{s^{n-2}}{r(s)} |f(u)| du ds < \infty, \quad (5.2)$$

olsun bu durumda (5.1) denklemin sınırlı salınım yapmayan çözümü vardır.

İspat: Teoremin ispatı p parametresinin dört farklı durumuna göre dört durumda gerçekleştirilecektir.

1) $0 \leq P(t) \leq p < 1$ durumu. Λ , $[t_0, \infty)$ aralığı üzerinde sup normuyla tanımlanan bütün sürekli ve sınırlı fonksiyonların kümesi olsun. M_1 ve M_2 ,

$$pM_2 + M_1 < \alpha < M_2$$

şartını sağlayan pozitif sabitler olmak üzere $A = \{x \in \Lambda : M_1 \leq x(t) \leq M_2, t \geq t_0\}$ şeklinde tanımlansın. $L_i, i = 1, 2$, $g_i(x), i = 1, 2$, fonksiyonlarının A kümesi üzerinde Lipschitz sabitleri, $L = \max\{L_1, L_2\}$ ve $\beta_i = \max_{x \in A} \{g_i(x)\}, i = 1, 2$, olsun. (5.2) den dolayı $t_1 \geq t_0 + \max\{b, d, \tau\}$ olmak üzere $t_1 > t_0$ yeterince büyük seçilebilir öyle ki

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u)\beta_1 + |f(u)|] duds \leq M_2 - \alpha, \quad t \geq t_1, \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_2(u)\beta_2 + |f(u)|] duds \leq \alpha - M_1 - pM_2, \quad t \geq t_1, \quad (5.4)$$

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s (Q_1(u) + Q_2(u)) duds < \frac{1-p}{L}, \quad t \geq t_1 \quad (5.5)$$

sağlanır.

$T : A \rightarrow \Lambda$ operatörü aşağıdaki gibi tanımlansın

$$(Tx)(t) = \begin{cases} \alpha - P(t)x(t-\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s \left[\int_a^b q_1(u, \xi) g_1(x(u-\xi)) d\xi \right. \\ \left. - \int_c^d q_2(u, \mu) g_2(x(u-\mu)) d\mu - f(u) \right] duds, & t \geq t_1 \\ (Tx)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Tx operatörünün sürekli olduğu açıktır. $t \geq t_1$ ve $x \in A$ için (5.3) kullanılarak

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &\leq \alpha + \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s \left[\int_a^b q_1(u, \xi) g_1(x(u-\xi)) d\xi - f(u) \right] duds \\ &\leq \alpha + \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u)\beta_1 + |f(u)|] duds \\ &\leq M_2 \end{aligned}$$

bulunur ve (5.4) kullanılarak

$$\begin{aligned}
(Tx)(t) &\geq \alpha - P(t)x(t-\tau) - \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s \left[\int_c^d q_2(u, \mu) g_2(x(u-\mu)) d\mu + f(u) \right] duds \\
&\geq \alpha - pM_2 - \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_2(u)\beta_2 + |f(u)|] duds \\
&\geq M_1
\end{aligned}$$

bulunur. Buda $TA \subset A$ olduğunu gösterir. A , Λ 'nin kapalı sınırlı konveks bir alt kümesi olduğundan daralma prensibine başvurabilmek için T 'nin A kümesi üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$x_1, x_2 \in A$ ve $t \geq t_1$ için

$$\begin{aligned}
|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| &= \left| \alpha - P(t)x_1(t-\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s \left[\int_a^b q_1(u, \xi) g_1(x_1(u-\xi)) d\xi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_c^d q_2(u, \mu) g_2(x_1(u-\mu)) d\mu - f(u) \right] duds - \alpha + P(t)x_2(t-\tau) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s \left[\int_a^b q_1(u, \xi) g_1(x_2(u-\xi)) d\xi - \int_c^d q_2(u, \mu) g_2(x_2(u-\mu)) d\mu - f(u) \right] duds \right| \\
&\leq P(t) |x_1(t-\tau) - x_2(t-\tau)| + \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s \left[\int_a^b q_1(u, \xi) |g_1(x_1(u-\xi)) - g_1(x_2(u-\xi))| d\xi \right. \\
&\quad \left. + \int_c^d q_2(u, \mu) |g_2(x_1(u-\mu)) - g_2(x_2(u-\mu))| d\mu \right] duds
\end{aligned}$$

yada (5.5) kullanılarak

$$\begin{aligned}
|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| &\leq \|x_1 - x_2\| \left(p + L \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u) + Q_2(u)] duds \right) \\
&< \|x_1 - x_2\|
\end{aligned}$$

buradan sup normuna geçilirse $\|Tx_1 - Tx_2\| < \|x_1 - x_2\|$ olur ki buda T 'nin A kümesi üzerinde daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Bu ise (5.1) denkleminin tek bir çözümünü olduğunu ispatlar.

2) $1 < p \leq P(t) \leq p_0 < \infty$ durumu. Λ , $[t_0, \infty)$ aralığı üzerinde sup normuyla tanımlanan bütün sürekli ve sınırlı fonksiyonların kümesi olsun. M_3 ve M_4

$$p_0 M_3 + M_4 < \alpha < p M_4$$

şartının sağlayan pozitif sabitler olmak üzere $A = \{x \in \Lambda : M_3 \leq x(t) \leq M_4, t \geq t_0\}$ şeklinde tanımlansın. $L_i, i = 1, 2$., $g_i(x), i = 1, 2$., fonksiyonlarının A kümesi üzerinde Lipschitz sabitleri, $L = \max\{L_1, L_2\}$ ve $\beta_i = \max_{x \in A} \{g_i(x)\}, i = 1, 2$. olsun. (5.2)'den dolayı $t_1 + \tau \geq t_0 + \max\{b, d\}$ olmak üzere $t_1 > t_0$ yeterince büyük seçilebilir öyle ki

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u)\beta + |f(u)|] duds \leq p M_4 - \alpha, \quad t \geq t_1, \quad (5.6)$$

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_2(u)\beta_1 + |f(u)|] duds \leq \alpha - M_4 - p_0 M_3, \quad t \geq t_1 \quad (5.7)$$

ve

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_0}^s (Q_1(u) + Q_2(u)) duds < \frac{p-1}{L}, \quad t \geq t_1 \quad (5.8)$$

sağlanır.

$T : A \rightarrow \Lambda$ dönüşümü aşağıda ki gibi tanımlansın

$$(Tx)(t) = \begin{cases} \frac{1}{P(t+\tau)} \left\{ \alpha - x(t+\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^\infty \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s \left[\int_a^b q_1(u, \xi) g_1(x(u-\xi)) d\xi \right. \right. \\ \left. \left. - \int_c^d q_2(u, \mu) g_2(x(u-\mu)) d\mu - f(u) \right] duds \right\}, & t \geq t_1 \\ (Tx)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Tx operatörünün sürekli olduğu açıktır. $t \geq t_1$ ve $x \in A$ için (5.6) kullanılarak

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &\leq \frac{1}{p} \left[\alpha + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^\infty \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s \left[\int_a^b q_1(u, \xi) g_1(x(u-\xi)) d\xi - f(u) \right] duds \right] \\ &\leq \frac{1}{p} \left(\alpha + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^\infty \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s [Q_1(u)\beta_1 + |f(u)|] duds \right) \\ &\leq M_4 \end{aligned}$$

bulunur ve (5.7) kullanılarak

$$\begin{aligned}
(Tx)(t) &\geq \frac{1}{p_0} \left[\alpha - x(t+\tau) - \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \right. \\
&\quad \left. \int_{t_1+\tau}^s \left(\int_c^d q_2(u, \mu) g_2(x(t-\mu)) d\mu - f(u) \right) duds \right] \\
&\geq \frac{1}{p_0} \left[\alpha - M_4 - \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s (Q_2(u) \beta_2 + |f(u)|) duds \right] \\
&\geq M_3
\end{aligned}$$

elde edilir. Buda $TA \subset A$ olduğunu gösterir. A , Λ 'nin kapalı sınırlı konveks bir alt kümesi olduğundan daralma prensibine başvurabilmek için T 'nin A kümesi üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$x_1, x_2 \in A$ ve $t \geq t_1$ için

$$\begin{aligned}
|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| &= \left| \frac{1}{P(t+\tau)} \left\{ \alpha - x_1(t+\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s \left[\int_a^b q_1(u, \xi) g_1(x_1(u-\xi)) d\xi \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \int_c^d q_2(u, \mu) g_2(x_1(u-\mu)) d\mu - f(u) \right] duds \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{P(t+\tau)} \left\{ \alpha - x_2(t+\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s \left[\int_a^b q_1(u, \xi) g_1(x_2(u-\xi)) d\xi \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \int_c^d q_2(u, \mu) g_2(x_2(u-\mu)) d\mu - f(u) \right] duds \right\} \right| \\
&\leq \frac{1}{P(t+\tau)} \left\{ |x_1(t+\tau) - x_2(t+\tau)| + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \right. \\
&\quad \int_{t_1+\tau}^s \left[\int_a^b q_1(u, \xi) |g_1(x_1(u-\xi)) - g_1(x_2(u-\xi))| d\xi \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_c^d q_2(u, \mu) |g_2(x_1(u-\mu)) - g_2(x_2(u-\mu))| d\mu \right] duds \right\}
\end{aligned}$$

yada (5.8) den

$$\begin{aligned}
|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| &\leq \frac{\|x_1 - x_2\|}{p} \left(1 + L \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s [Q_1(u) + Q_2(u)] duds \right) \\
&< \|x_1 - x_2\|
\end{aligned}$$

buradan sup normuna geçilirse $\|Tx_1 - Tx_2\| < \|x_1 - x_2\|$ olur ki buda T 'nin A kümesi

üzerinde daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Buda (5.1) denkleminin tek bir pozitif çözüme sahip olduğunu gösterir.

3) $-1 < p \leq P(t) \leq 0$ durumu. Λ , $[t_0, \infty)$ aralığı üzerinde sup normuyla tanımlanan bütün sürekli ve sınırlı fonksiyonların kümesi olsun. M_5 ve M_6

$$M_5 < \alpha < (1+p)M_6$$

şartını sağlayan pozitif sabitler olmak üzere $A = \{x \in \Lambda : M_5 \leq x(t) \leq M_6 \ t \geq t_0\}$ şeklinde tanımlasın L_i , $i=1,2$., $g_i(x)$, $i=1,2$., fonksiyonlarının A kümesi üzerinde Lipschitz sabitleri, $L = \max\{L_1, L_2\}$ ve $\beta_i = \max_{x \in A} \{g_i(x)\}$, $i=1,2$ olsun. (5.2)'den dolayı $t_1 \geq t_0 + \max\{b, d, \tau\}$ olmak üzere $t_1 > t_0$ yeterince büyük seçilebilir öyle ki

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u)\beta_1 + |f(u)|] duds \leq (1+p)M_6 - \alpha, \quad t \geq t_1, \quad (5.9)$$

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_2(u)\beta_2 + |f(u)|] duds \leq \alpha - M_5, \quad t \geq t_1 \quad (5.10)$$

ve

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u) + Q_2(u)] duds < \frac{1+p}{L}, \quad t \geq t_1 \quad (5.11)$$

sağlanır.

$T : A \rightarrow \Lambda$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın

$$(Tx)(t) = \begin{cases} \alpha - P(t)x(t-\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s \left[\int_a^b q_1(u, \xi) g_1(x(u-\xi)) d\xi \right. \\ \left. - \int_c^d q_2(u, \mu) g_2(x(u-\mu)) d\mu - f(u) \right] duds, & t \geq t_1 \\ (Tx)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Tx 'in sürekli olduğu açıktır. $t \geq t_1$ ve $x \in A$ için (5.9) kullanılarak

$$\begin{aligned}
(Tx)(t) &\leq \alpha - P(t)x(t-\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s \left[\int_a^b q_1(u, \xi) g_1(x(u-\xi)) d\xi - f(u) \right] duds \\
&\leq \alpha - pM_6 + \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u)\beta_1 + |f(u)|] duds \\
&\leq M_6
\end{aligned}$$

bulunur ve (5.10) kullanılarak

$$\begin{aligned}
(Tx)(t) &\geq \alpha - P(t)x(t-\tau) - \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s \left[\int_c^d q_2(u, \mu) g_2(x(u-\mu)) d\mu + f(u) \right] duds \\
&\geq \alpha - \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_2(u)\beta_2 + |f(u)|] duds \\
&\geq M_5
\end{aligned}$$

bulunur. Buda $TA \subset A$ olduğunu gösterir. A , Λ 'nin kapalı sınırlı konveks bir alt kümesi olduğunda daralma prensibine başvurabilmek için T 'nin A kümesi üzerinde daralma dönüşümü olduğunu gösterilmelidir.

$x_1, x_2 \in A$ ve $t \geq t_1$ için

$$\begin{aligned}
|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| &= \left| \alpha - P(t)x_1(t-\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s \left[\int_a^b q_1(u, \xi) g_1(x_1(u-\xi)) d\xi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_c^d q_2(u, \mu) g_2(x_1(u-\mu)) d\mu - f(u) \right] duds \right. \\
&\quad \left. - \alpha + P(t)x_2(t-\tau) - \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s \left[\int_a^b q_1(u, \xi) g_1(x_2(u-\xi)) d\xi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_c^d q_2(u, \mu) g_2(x_2(u-\mu)) d\mu - f(u) \right] duds \right| \\
&\leq -P(t)|x_1(t-\tau) - x_2(t-\tau)| \\
&\quad + \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s \left[\int_a^b q_1(u, \xi) |g_1(x_1(u-\xi)) - g_1(x_2(u-\xi))| d\xi \right. \\
&\quad \left. + \int_c^d q_2(u, \mu) |g_2(x_1(u-\mu)) - g_2(x_2(u-\mu))| d\mu \right] duds
\end{aligned}$$

yada (5.11) kullanılarak

$$\begin{aligned} |(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| &\leq \|x_1 - x_2\| \left(-p + L \frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u) + Q_2(u)] duds \right) \\ &< \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

buradan sup normuna geçilirse $\|Tx_1 - Tx_2\| < \|x_1 - x_2\|$ olur ki buda T 'nin A kümesi üzerinde daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Buda (5.1) denkleminin tek bir pozitif çözüme sahip olduğunu ispatlar.

4) $-\infty < p_0 \leq P(t) \leq p < -1$ durumu. $\Lambda, [t_0, \infty)$ aralığı üzerinde sup normuyla tanımlanan bütün sürekli ve sınırlı fonksiyonların kümesi olsun. M_7 ve M_8 ,

$$(-p_0 - 1)M_7 < \alpha < (-p - 1)M_8$$

şartını sağlayan pozitif sabitler olmak üzere $A = \{x \in \Lambda : M_7 \leq x(t) \leq M_8, t \geq t_0\}$ şeklinde tanımlansın. $L_i, i = 1, 2, \dots, g_i(x), i = 1, 2, \dots$, fonksiyonlarının A kümesi üzerinde Lipschitz sabitleri, $L = \max\{L_1, L_2\}$ ve $\beta_i = \max_{x \in A} \{g_i(x)\}, i = 1, 2, \dots$ olsun. (5.2) denkleminde dolayı $t_1 + \tau \geq t_0 + \max\{b, d\}$ olmak üzere $t_1 > t_0$ yeterince büyük seçilebilir öyle ki

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_2(u)\beta_2 + |f(u)|] duds \leq (-p-1)M_8 - \alpha, \quad t \geq t_1, \quad (5.12)$$

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u)\beta_1 + |f(u)|] duds \leq \alpha + (p_0+1)M_7, \quad t \geq t_1 \quad (5.13)$$

ve

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^s [Q_1(u) + Q_2(u)] duds < \frac{-p-1}{L}, \quad t \geq t_1 \quad (5.14)$$

sağlanır.

$T : A \rightarrow \Lambda$ dönüşümü aşağıda ki gibi tanımlansın

$$(Tx)(t) = \begin{cases} \frac{1}{P(t+\tau)} \left\{ -\alpha - x(t+\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^\infty \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s \right. \\ \left. \left[\int_a^b q_1(u, \xi) g_1(x(u-\xi)) d\xi - \int_c^d q_2(u, \mu) g_2(x(u-\mu)) d\mu - f(u) \right] duds \right\}, & t \geq t_1 \\ (Tx)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Tx 'in sürekli olduğu açıktır. $t \geq t_1$ ve $x \in A$ için (5.12) kullanılarak

$$\begin{aligned}
(Tx)(t) &\leq -\frac{1}{p} \left[\alpha + x(t+\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \right. \\
&\quad \left. \int_{t_1+\tau}^s \left(\int_c^d q_2(u, \mu) g_2(x(u-\mu)) d\mu - f(u) \right) duds \right] \\
&\leq -\frac{1}{p} \left(\alpha + M_8 + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s [Q_2(u)\beta_2 + |f(u)|] duds \right) \\
&\leq M_8
\end{aligned}$$

bulunur ve (5.13) kullanılarak

$$\begin{aligned}
(Tx)(t) &\geq \frac{1}{p_0} \left[-\alpha - x(t+\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \right. \\
&\quad \left. \int_{t_1+\tau}^s \left(\int_a^b q_1(u, \xi) g_1(x(t-\xi)) d\xi + f(u) \right) duds \right] \\
&\geq \frac{1}{p_0} \left[-\alpha - M_7 + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s (Q_1(u)\beta_1 + |f(u)|) duds \right] \\
&\geq M_7
\end{aligned}$$

elde edilir. Buda $TA \subset A$ olduğunu gösterir. A , Λ 'nin kapalı sınırlı konveks bir alt kümesi olduğunda daralma prensibine başvurabilmek için T 'nin A kümesi üzerinde daralma dönüşümü olduğunu gösterilmelidir.

$x_1, x_2 \in A$ ve $t \geq t_1$ için

$$\begin{aligned}
|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| &= \left| \frac{1}{P(t+\tau)} \left\{ \alpha - x_1(t+\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \right. \right. \\
&\quad \left. \int_{t_1+\tau}^s \left[\int_a^b q_1(u, \xi) g_1(x_1(u-\xi)) d\xi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_c^d q_2(u, \mu) g_2(x_2(u-\mu)) d\mu - f(u) \right] duds \right\} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{P(t+\tau)} \left\{ \alpha - x_2(t+\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s \left[\int_a^b q_1(u, \xi) g_1(x_2(u-\xi)) d\xi \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_c^d q_2(u, \mu) g_2(x_2(u-\mu)) d\mu - f(u) \right] duds \right\} \\
& \leq -\frac{1}{P(t+\tau)} \left\{ |x_1(t+\tau) - x_2(t+\tau)| + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \right. \\
& \quad \left. \int_{t_1+\tau}^s \left[\int_a^b q_1(u, \xi) |g_1(x_1(u-\xi)) - g_1(x_2(u-\xi))| d\xi \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \int_c^d q_2(u, \mu) |g_2(x_1(u-\mu)) - g_2(x_2(u-\mu))| d\mu \right] duds \right\}
\end{aligned}$$

yada (5.14) den

$$\begin{aligned}
|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| & \leq -\frac{\|x_1 - x_2\|}{p} \left(1 + L \frac{1}{(n-2)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^s [Q_1(u) + Q_2(u)] duds \right) \\
& < \|x_1 - x_2\|
\end{aligned}$$

buradan sup normuna geçilirse $\|Tx_1 - Tx_2\| < \|x_1 - x_2\|$ olur ki buda T 'nin A üzerinde daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Buda (5.1) denkleminin tek bir pozitif çözüme sahip olduğunu gösterir.

Örnek:

$$\begin{aligned}
& \left[e^t \left[x(t) + \left(\frac{e^{-2t} + 2}{e^{2\tau}} \right) x(t-2\tau) \right]^{(2)} \right]' \\
& - \left[\int_1^2 e^{-t-\xi} d\xi + \int_2^3 e^{-t-2\mu} d\mu - \frac{1}{2} e^{-t} (2e^{-1} + e^{-4} - 2e^{-2} - e^{-6}) + e^{-2t} \right] = 0 \quad (5.15)
\end{aligned}$$

denkleme ele alınsın. Burada $n = 3$, $r(t) = e^t$, $P(t) = \left(\frac{e^{-2t} + 2}{e^{2\tau}} \right)$, $q_1(t, \xi) = e^{-t-\xi}$,

$q_2(t, \mu) = e^{-t-2\mu}$, $g_1(x) = g_2(x) = 1$ ve $f(t) = -\frac{1}{2} e^{-t} (2e^{-1} + e^{-4} - 2e^{-2} - e^{-6}) + 18e^{-2t}$ dir.

(5.15) denkleme (5.2) şartlarını sağladığı açıktır dolayısıyla $x(t) = e^{-t}$ (5.1) denkleminin salınım yapmayan çözümüdür.

BÖLÜM VI

SONUÇLAR

Bu çalışmada daha önce çalışılmamış olan (5.1) denkleminin salınım yapmayan çözümlerinin varlığı için yeterli şartlar verildi $P(t)$ fonksiyonunun dört farklı durumu için salınım yapmayan çözümlerin varlığı incelendi.

KAYNAKLAR

- [1] Kulenović, M.R.S. and Hadžiomerspahić, S., Existence of Nonoscillatory Solution of Second Order Linear Neutral Delay Equation, J. Math. Anal. Appl., 228, 436-448, 1998.
- [2] Candan, T., The Existence of Nonoscillatory Solution of Higher Order Nonlinear Neutral Equations., Appl. Math. Lett. 25, 412-426, 2012.
- [3] Candan, T. and Dahiya, R. S., Existence of Nonoscillation Solutions of First and Second Order Neutral Differential Equations with Distributed Deviating Arguments. J. Franklin Inst, 347, 1309-1316, 2010.
- [4] Zhou, Y. and Zang, B.G., Existence of Nonoscillation Solutions of Higher- Order Neutral Differential Equations with Positive and Negative Coefficients. App. Math. Let. 15, 867-874, 2002.
- [5] Zhang, W., Feng, W., Yan J., Song, J., Existence of Nonoscillation Solutions of First Order Linear Neutral Delay Differential Equations. Comput. Math. Appl. 49, 1021-1027, 2005.
- [6] Yu, Y. and Wang H., Nonoscillatory Solution of Second Order Nonlinear Neutral Delay Equation. J. Math. Anal. Appl., 311, 445-456, 2005.
- [7] Agarwal, R.P., Grace, S.R. and O'Regan, D., Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equation, Kluwer Academic, 2000.
- [8] Bainov, D.D., Mishev, D.P., Oscillation Theory for Functional Differential Equation with Delay, Adam Hilger, 1991.
- [9] Erbe, L.H., Kong, Q.K. and Zang, B. G., Oscillation Theory for Functional Differential Equation, Marcel Dekker, Inc. New York, 1995.
- [10] Györi, I. and Ladas, G., Oscillation Theory of Delay Differential with Application, Clarendon Press, Oxford, 1991.

11] Ladde, G.S., Lakshmikantham, V. and Zang, B.G., Oscillation Theory of Differential Equation with Deviating Arguments, Marcel Dekker, Inc., New York, 1987.