

Bazı Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin  
Taylor Kolokeyşin-Genişletilmiş Kübik B-spline Fonksiyonlar ile Sayısal Çözümleri

Abdullah Murat Aksoy

**DOKTORA TEZİ**

Matematik Anabilim Dalı

Eylül 2012

Numerical Solutions of Some Partial Differential Equations  
Using the Taylor Collocation-Extended Cubic B-spline Functions

Abdullah Murat Aksoy

**DOCTORAL DISSERTATION**

Department of Mathematics

September 2012

Bazı Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin  
Taylor Kolokeyşin-Genişletilmiş Kübik B-spline Fonksiyonlar ile Sayısal Çözümleri

Abdullah Murat Aksoy

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca  
Matematik Anabilim Dalı  
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında  
DOKTORA TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. İdris Dağ

Eylül 2012

## ONAY

Matematik Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Abdullah Murat Aksoy'un DOKTORA tezi olarak hazırladığı “Bazı Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Taylor Kolokeyşin-Genişletilmiş Kübik B-spline Fonksiyonlar ile Sayısal Çözümleri” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

**Danışman** : Prof. Dr. İdris DAĞ

**İkinci Danışman** : -

**Doktora Tez Savunma Jürisi:**

**Üye** : Prof. Dr. İdris DAĞ

**Üye** : Doç. Dr. Bülent Saka

**Üye** : Yrd. Doç. Dr. Yılmaz Dereli

**Üye** : Yrd. Doç. Dr. Dursun İrk

**Üye** : Yrd. Doç. Dr. Ahmet Boz

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

## ÖZET

Bu tezde, genişletilmiş kübik B-spline Taylor kolokeyşin metodu kullanılarak bazı kısmi türevli diferansiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümleri araştırılmıştır.

İlk bölümde sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri, kolokeyşin metodu, B-spline fonksiyonlar, kübik B-spline fonksiyonlar, genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar, genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yöntemi, lineer olmayan oluşum denklemleri, korunum kanunları ve soliton dalgaları tanıtılmıştır. İlerleyen bölümlerde sayısal çözümleri bulunacak olan denklem sistemleri ve test problemleri hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, NLS denklemi sayısal olarak çözülmüştür. Soliton dalga çözümü, iki soliton dalgasının çarpışması, sabit soliton dalgasının doğuşu, hareketli soliton dalgasının doğuşu ve bağlı durumlu solitonlar incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, KB ve RB denklem sistemleri yaklaşık olarak çözülmüştür. Önerilen yöntemin doğruluğu ilerleyen dalga çözümü ve iki ilerleyen dalganın çarpışması test problemleri ile kontrol edilmiştir.

Dördüncü bölümde, İkili Burgers denklem sistemi için genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yöntemi tanıtılmış ve iki test problemi üzerinde çalışılmıştır.

Beşinci bölümde, reaksiyon-difüzyon denklem sisteminin sayısal çözümü bulunmuş, lineer reaksiyon-difüzyon ve izotermal kimyasal sistem problemleri yaklaşık olarak çözülmüştür

Anahtar Kelimeler: B-spline, Genişletilmiş B-spline, Sonlu elemanlar, Soliton dalgası, Kolokeyşin, İlerleyen dalga, İzotermal

## SUMMARY

This thesis deals with the numerical solutions of some partial differential equation systems by using extended the cubic B-spline Taylor collocation method.

In the first chapter, the finite difference and the finite element methods, collocation method, B-spline functions, cubic B-spline functions, extended cubic B-spline functions, nonlinear evolution equations, conversation laws, soliton waves are described. The partial differential equation systems that will be solved numerically in the next chapters are introduced together with their test problems.

In the second chapter, the NLS equation is solved numerically. Five test problems concerning solitary waves, interaction of two soliton waves, birth of standing soliton, birth of mobile soliton and bound state of solitons are used to show accuracy of numerical solutions.

In the third chapter, the systems of KB and RB equations are solved numerically. The proposed method is tested by studying travelling wave test problem and interaction of two travelling waves test problem.

In the fourth chapter, Coupled Burgers equation is solved numerically and two test problems are used to demonstrate the performance of the method.

In the fifth chapter, system of reaction-diffusion equation is solved numerically. Linear reaction-diffusion problem and isothermal chemical system problem are used to evaluate the method.

**Keywords:** B-spline, Extended B-spline, Finite element, Soliton waves, Collocation, Travelling waves, Isothermal

## TEŞEKKÜR

Çalışmalarımı yöneten, yardımlarını esirgemeyen, her türlü imkanı sağlayan kıymetli hocam Prof. Dr. İdris DAĞ'a, karşılaştığım zorluklar karşısında çözüm yolları üreten ve bilgilerini paylaşmaktan kaçınmayan hocam Yrd. Doç. Dr. Dursun İRK'a, değerli bilgi ve fikirlerine başvurduğum arkadaşlarım Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN ve Yrd. Doç. Dr. Alper KORKMAZ'a, anlayışla ve sabırla daima yanımda olan eşime ve üzerimdeki büyük emeklerinden dolayı aileme teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

|                                                                     | <b><u>Sayfa</u></b> |
|---------------------------------------------------------------------|---------------------|
| ÖZET .....                                                          | v                   |
| SUMMARY .....                                                       | vi                  |
| TEŞEKKÜR.....                                                       | vii                 |
| ŞEKİLLER DİZİNİ .....                                               | xi                  |
| TABLolar DİZİNİ.....                                                | xiii                |
| KISALTMALAR DİZİNİ.....                                             | xvi                 |
| <br>1. TEMEL KAVRAMLAR .....                                        | <br>1               |
| 1.1 Sonlu Farklar Yöntemi.....                                      | 1                   |
| 1.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi.....                                    | 2                   |
| 1.2.1 Kolokeyşin metodu .....                                       | 4                   |
| 1.3 B-spline Fonksiyonlar .....                                     | 5                   |
| 1.3.1 Kübik B-spline kolokeyşin yöntemi .....                       | 6                   |
| 1.3.2 Genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yöntemi.....          | 9                   |
| 1.4 Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri.....                          | 13                  |
| 1.5 Korunum Kanunları .....                                         | 14                  |
| 1.6 Solitonlar.....                                                 | 15                  |
| 1.7 NLS Denklem Sistemi ve Test Problemleri.....                    | 18                  |
| 1.7.1 Soliton dalga çözümü.....                                     | 19                  |
| 1.7.2 İki soliton dalgasının çarpışması.....                        | 20                  |
| 1.7.3 Sabit soliton dalgasının doğuşu .....                         | 20                  |
| 1.7.4 Hareketli soliton dalgasının doğuşu.....                      | 21                  |
| 1.7.5 Bağlı durumlu solitonlar (Bound state of solitons).....       | 21                  |
| 1.8 KB Denklem Sistemi, RB Denklem Sistemi ve Test Problemleri..... | 21                  |
| 1.8.1 İlerleyen dalga çözümü.....                                   | 23                  |
| 1.8.2 İki İlerleyen dalganın çarpışması .....                       | 25                  |
| 1.9 İkili Burgers Denklem Sistemi ve Test Problemleri.....          | 26                  |
| 1.9.1 Problem 1 .....                                               | 27                  |
| 1.9.2 Problem 2 .....                                               | 28                  |
| 1.10 Reaksiyon-Difüzyon Denklem Sistemi ve Test Problemleri .....   | 29                  |



## İÇİNDEKİLER (Devam Ediyor)

### Sayfa

|                                                                                                                               |    |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|-----------|
| 1.10.1 Lineer problem.....                                                                                                    | 31 |           |
| 1.10.2 İzotermal kimyasal sistem .....                                                                                        | 32 |           |
| <b>2. NLS DENKLEMİNİN GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK B-SPLINE TAYLOR<br/>KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMLERİ .....</b>                |    | <b>34</b> |
| 2.1 NLS Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Genişletilmiş Kübik B-spline<br>Taylor Kolokeyşin Metodu .....                        |    | 34        |
| 2.1.1 Zaman ayrışımı .....                                                                                                    | 34 |           |
| 2.1.2 Konum ayrışımı .....                                                                                                    | 35 |           |
| 2.2 Başlangıç Durumu .....                                                                                                    | 39 |           |
| 2.3 Test Problemleri.....                                                                                                     | 41 |           |
| 2.3.1 Soliton dalga çözümü.....                                                                                               | 41 |           |
| 2.3.2 İki soliton dalgasının çarpışması.....                                                                                  | 44 |           |
| 2.3.3 Sabit soliton dalgasının doğuşu .....                                                                                   | 45 |           |
| 2.3.4 Hareketli soliton dalgasının doğuşu.....                                                                                | 47 |           |
| 2.3.5 Bağlı durumlu solitonlar .....                                                                                          | 48 |           |
| 2.4 Sonuç .....                                                                                                               | 51 |           |
| <b>3. KB VE RB DENKLEM SİSTEMLERİNİN GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK B-SPLINE<br/>TAYLOR KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMLERİ .....</b> |    | <b>53</b> |
| 3.1 KB Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü İçin Genişletilmiş Kübik B-spline<br>Taylor Kolokeyşin Metodu .....                  |    | 53        |
| 3.1.1 Zaman ayrışımı .....                                                                                                    | 53 |           |
| 3.1.2 Konum ayrışımı .....                                                                                                    | 54 |           |
| 3.1.3 Başlangıç durumu .....                                                                                                  | 58 |           |
| 3.1.4 Test Problemleri.....                                                                                                   | 60 |           |
| 3.1.4.1 İlerleyen dalga çözümü .....                                                                                          | 60 |           |
| 3.1.4.2 İki ilerleyen dalganın çarpışması .....                                                                               | 63 |           |
| 3.2 RB Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü İçin Genişletilmiş Kübik B-spline                                                    |    |           |

|                                                                                                                              |        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Taylor Kolokeyşin Metodu .....                                                                                               | 65     |
| 3.2.1 Zaman ayrışımı .....                                                                                                   | 65     |
| 3.2.2 Konum ayrışımı .....                                                                                                   | 66     |
| 3.2.3 Başlangıç durumu .....                                                                                                 | 70     |
| 3.2.4 Test Problemleri.....                                                                                                  | 72     |
| 3.2.4.1 İlerleyen dalga çözümü .....                                                                                         | 72     |
| 3.2.4.2 İki ilerleyen dalganın çarpışması .....                                                                              | 75     |
| 3.3 Sonuç .....                                                                                                              | 76     |
| <br>4. İKİLİ BURGERS DENKLEM SİSTEMİNİN GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK B-SPLINE<br>TAYLOR KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMLERİ.....   | <br>78 |
| 4.1 İkili Burgers Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü İçin Genişletilmiş Kübik<br>B-spline Taylor Kolokeyşin Metodu .....      | <br>78 |
| 4.1.1 Zaman ayrışımı .....                                                                                                   | 78     |
| 4.1.2 Konum ayrışımı .....                                                                                                   | 79     |
| 4.2 Başlangıç Durumu .....                                                                                                   | 83     |
| 4.3 Test Problemleri.....                                                                                                    | 85     |
| 4.3.1 Problem 1 .....                                                                                                        | 85     |
| 4.3.2 Problem 2 .....                                                                                                        | 87     |
| 4.4 Sonuç .....                                                                                                              | 89     |
| <br>5. REAKSİYON DİFÜZYON DENKLEM SİSTEMİNİN GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK<br>B-SPLINE TAYLOR KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMLERİ . | <br>91 |
| 5.1 Reaksiyon-Difüzyon Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü İçin Genişletilmiş<br>Kübik B-spline Taylor Kolokeyşin Metodu ..... | <br>91 |
| 5.1.1 Zaman ayrışımı .....                                                                                                   | 91     |
| 5.1.2 Konum ayrışımı .....                                                                                                   | 92     |
| 5.2 Başlangıç Durumu .....                                                                                                   | 97     |
| 5.3 Test Problemleri.....                                                                                                    | 100    |
| 5.3.1 Lineer problem.....                                                                                                    | 100    |
| 5.3.2 İzotermal kimyasal sistem .....                                                                                        | 101    |
| 5.4 Sonuç .....                                                                                                              | 106    |

**İÇİNDEKİLER (Devam Ediyor)****Sayfa**

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER..... | 108 |
| 7. KAYNAKLAR DİZİNİ.....     | 110 |
| ÖZGEÇMİŞ .....               | 121 |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

| <u>Sekil</u>                                                                                                                                                                                 | <u>Sayfa</u> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 1.1 $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanında $\phi_{m-1}, \dots, \phi_{m+2}$ kübik B-spline fonksiyonları .....                                                                                     | 8            |
| 1.2 $\lambda = -10, -5, 0, 5, 10$ için genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar .....                                                                                                       | 12           |
| 1.3 Bir soliton dalgasının hareketi.....                                                                                                                                                     | 17           |
| 2.1 $N = 1334, \Delta t = 0.005, \lambda = -0.00152$ ve $-20 \leq x \leq 20$ için $t = 1$ zamanındaki<br>Mutlak Hata= $ \text{Analitik çözümün modülü}-\text{Sayısal çözümün modülü} $ ..... | 43           |
| 2.2 $N = 1334, \Delta t = 0.005, \lambda = -0.00152$ ve $-20 \leq x \leq 20$ için<br>soliton dalga çözümleri.....                                                                            | 43           |
| 2.3 $N = 1334, \Delta t = 0.005, \lambda = -0.00152$ ve $-20 \leq x \leq 20$ için<br>iki soliton dalgasının çarpışması.....                                                                  | 44           |
| 2.4 $N = 1334, \Delta t = 0.005, \lambda = -0.00152$ ve $-45 \leq x \leq 45$ için<br>sabit soliton dalgasının doğuşu.....                                                                    | 46           |
| 2.5 $N = 1334, \Delta t = 0.005, \lambda = -0.00152$ ve $-45 \leq x \leq 45$ için<br>hareketli soliton dalgasının doğuşu.....                                                                | 47           |
| 2.6 $M = 4, q = 32$ için $ \text{sech}(x) $ .....                                                                                                                                            | 49           |
| 2.7 $M = 5, q = 50$ için $ \text{sech}(x) $ .....                                                                                                                                            | 49           |
| 3.1 $N = 1000, \Delta t = 0.005, \lambda = -0.0017$ ve $-20 \leq x \leq 30$ için $t = 5$ zamanındaki<br>Mutlak Hata= $ \text{Analitik çözümün modülü}-\text{Sayısal çözümün modülü} $ .....  | 62           |
| 3.2 $N = 1000, \Delta t = 0.005, \lambda = -0.0017$ ve $-20 \leq x \leq 30$ için<br>sayısal çözümler.....                                                                                    | 63           |
| 3.3 $t = 0$ anında dalgaların durumu .....                                                                                                                                                   | 63           |
| 3.4 $N = 1000, \Delta t = 0.005, \lambda = -0.0017$ ve $-20 \leq x \leq 30$ için<br>iki solitary dalgasının çarpışması .....                                                                 | 64           |
| 3.5 $N = 1000, \Delta t = 0.005, \lambda = -0.00297$ ve $-20 \leq x \leq 30$ için $t = 5$ zamanındaki<br>Mutlak Hata= $ \text{Analitik çözümün modülü}-\text{Sayısal çözümün modülü} $ ..... | 74           |
| 3.6 $N = 1000, \Delta t = 0.005, \lambda = -0.00297$ ve $-20 \leq x \leq 30$ için<br>$t = 0.0; 5.0; 10.0; 15.0$ zamanlarındaki sayısal çözümler .....                                        | 74           |

### ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam Ediyor)

| <u>Sekil</u> |                                                                                                                                                                          | <u>Sayfa</u> |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 3.7          | $t = 0$ anında dalgaların durumu .....                                                                                                                                   | 75           |
| 3.8          | İki ilerleyen dalganın çarpışması.....                                                                                                                                   | 76           |
| 4.1          | $N = 400, \Delta t = 0.001, \lambda = -4.087 \times 10^{-5}$ ve $-\pi \leq x \leq \pi$ için<br>sayısal çözümler .....                                                    | 87           |
| 4.2          | $N = 10, \Delta t = 0.001, \lambda = -6 \times 10^5$ ve $0 \leq x \leq 1$ için $t = 1$ zamanındaki<br>Mutlak Hata = Analitik çözümün modülü-Sayısal çözümün modülü ..... | 89           |
| 5.1          | $N = 400, k = 0.1, \lambda = 0$ için ilerleyen dalga çözümleri .....                                                                                                     | 102          |
| 5.2          | $N = 400, k = 0.1, \lambda = 1$ için ilerleyen dalga çözümleri .....                                                                                                     | 102          |
| 5.3          | $N = 400, k = 0.5, \lambda = 1$ için ilerleyen dalga çözümleri.....                                                                                                      | 103          |
| 5.4          | $N = 400, k = 0.1, \lambda = 0.16$ için ilerleyen dalga çözümleri .....                                                                                                  | 104          |
| 5.5          | $N = 400, k = 0.9, \lambda = 1$ için ilerleyen dalga çözümleri.....                                                                                                      | 105          |
| 5.6          | $N = 400, k = 0.1, \lambda = -1.93$ için ilerleyen dalga çözümleri .....                                                                                                 | 105          |

## TABLOLAR DİZİNİ

| <b><u>Tablo</u></b> | <b><u>Sayfa</u></b>                                                                                                    |
|---------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.1                 | Bölünme noktalarındaki kübik B-spline değerleri ..... 7                                                                |
| 1.2                 | Bölünme noktalarındaki genişletilmiş kübik B-spline değerleri..... 11                                                  |
| 2.1                 | $h = 0.03, \Delta t = 0.005, N = 1334$ için hata normları ve korunum sabitleri ..... 42                                |
| 2.2                 | İki soliton dalgasının çarpışması..... 45                                                                              |
| 2.3                 | $h = 0.03, \Delta t = 0.005, A = 1.78, N = 1334$ için sabit soliton dalgasının<br>doğuşu ..... 47                      |
| 2.4                 | $h = 0.03, \Delta t = 0.005, A = 1.78, N = 1334$ için hareketli soliton dalgasının<br>doğuşu ..... 48                  |
| 2.5                 | $h = 0.03, \Delta t = 0.005, q = 32$ için korunum sabitleri ..... 50                                                   |
| 2.6                 | $h = 0.03, \Delta t = 0.005, q = 50$ için korunum sabitleri ..... 50                                                   |
| 3.1                 | $v_m$ için $N = 1000$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata<br>normlarının kıyaslanması..... 61 |
| 3.2                 | $u_m$ için $N = 1000$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata<br>normlarının kıyaslanması..... 61 |
| 3.3                 | $v_m$ için $N = 1000$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata<br>normlarının kıyaslanması..... 73 |
| 3.4                 | $u_m$ için $N = 1000$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata<br>normlarının kıyaslanması..... 73 |
| 4.1                 | $t = 0.1, N = 200, N = 400, \Delta t = 0.001$ için hata normları ..... 86                                              |
| 4.2                 | $N = 400, t = 1, \Delta t = 0.01, \Delta t = 0.001$ için hata normları ..... 87                                        |
| 4.3                 | $t = 1, \Delta t = 0.001, N = 10, N = 100$ olmak üzere $u(x, t)$ için hesaplanan hata<br>normları ..... 88             |
| 4.4                 | $t = 1, \Delta t = 0.001, N = 10, N = 100$ olmak üzere $v(x, t)$ için hesaplanan hata<br>normları ..... 88             |
| 5.1                 | $t = 1$ zamanında difüzyon baskın durumu için elde edilen hata normları ..... 100                                      |

### TABLOLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

| <b><u>Tablo</u></b> | <b><u>Sayfa</u></b>                                                              |
|---------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| 5.2                 | $t = 1$ zamanında reaksiyon baskın durumu için elde edilen hata normları.... 101 |
| 5.3                 | $k = 0.1, t = 300$ için hesaplanan bağıl hata değerleri ..... 103                |
| 5.4                 | $k = 0.5, t = 300$ için hesaplanan bağıl hata değerleri ..... 104                |
| 5.5                 | $k = 0.9, t = 300$ için hesaplanan bağıl hata değerleri ..... 106                |

## KISALTMALAR DİZİNİ

| <b><u>Kısaltmalar</u></b> | <b><u>Açıklama</u></b>     |
|---------------------------|----------------------------|
| BST                       | Boussinesq sistemi tipi    |
| KB                        | Klasik Boussinesq          |
| NLS                       | Lineer olmayan Schrödinger |
| RB                        | Regularized Boussinesq     |



## BÖLÜM 1

### TEMEL KAVRAMLAR

Fizik, matematik gibi bilim dallarında ve çeşitli mühendislik alanlarında karşılaşılan birçok problem, kısmi türevli diferansiyel denklemlerle modellenir. Model problemleri analitik yöntemlerle çözmek her zaman mümkün olmadığından dolayı, alternatif olarak yaklaşık çözüm yöntemleri kullanılır. Sonlu farklar yöntemi ve sonlu elemanlar yöntemi yaygın olarak kullanılan yaklaşık çözüm yöntemleridir.

#### 1.1 Sonlu Farklar Yöntemi

Sonlu farklar yönteminde diferansiyel denklemin tanım aralığı sonlu sayıda bölünme noktalarına ayrılır ve her bir bölünme noktasındaki türev değerleri yerine Taylor seri açılımları yardımıyla elde edilen, sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece diferansiyel denklem bir cebirsel denkleme dönüşür.

Bir değişken içeren ifadeler için sonlu fark yaklaşımları, Taylor serisi yardımıyla aşağıdaki şekilde elde edilir.

$[a, b]$  tanım aralığı için,  $N$  bir pozitif tamsayı,  $h = \frac{b-a}{N}$  ve bölünme noktaları

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

olsun. Bu durumda,  $U(x)$  fonksiyonu ve türevleri tanım aralığı üzerinde sürekli olmak üzere,  $U(x_i+h)$  ve  $U(x_i-h)$  ifadelerinin  $x_i$  noktasındaki Taylor seri açılımları

$$U(x_i+h) = U(x_i) + hU_x(x_i) + \frac{h^2}{2!}U_{xx}(x_i) + \frac{h^3}{3!}U_{xxx}(x_i) + \dots, \quad (1.1)$$

$$U(x_i-h) = U(x_i) - hU_x(x_i) + \frac{h^2}{2!}U_{xx}(x_i) - \frac{h^3}{3!}U_{xxx}(x_i) + \dots \quad (1.2)$$

olarak bulunabilir. (1.1-1.2) eşitlikleri

$$U_x(x_i) = \frac{U(x_i+h) - U(x_i)}{h} - \frac{h}{2!}U_{xx}(x_i) - \frac{h^2}{3!}U_{xxx}(x_i) - \dots, \quad (1.3)$$

$$U_x(x_i) = \frac{U(x_i) - U(x_i-h)}{h} + \frac{h}{2!}U_{xx}(x_i) - \frac{h^2}{3!}U_{xxx}(x_i) + \dots \quad (1.4)$$

şeklinde düzenlenirse,  $U$  ifadesinin  $x_i$  noktasındaki birinci türevi

$$U_x(x_i) = \frac{U(x_i+h) - U(x_i)}{h} + \mathcal{O}(h) = \frac{U_{i+1} - U_i}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (1.5)$$

$$U_x(x_i) = \frac{U(x_i) - U(x_i-h)}{h} + \mathcal{O}(h) = \frac{U_i - U_{i-1}}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (1.6)$$

formunda yaklaşık olarak bulunabilir. (1.5-1.6) ile bulunan yaklaşımlar sırasıyla ileri ve geri fark yaklaşımları olarak adlandırılır. Her iki yaklaşımda da görüldüğü gibi, seri belli bir yerden kesildiği için bir hata oluşacaktır. Oluşan hatalar, serinin kesildiği yerden sonraki ilk terime göre değerlendirilir ve  $\mathcal{O}(\cdot)$  ile gösterilir.

(1.2) eşitliği, (1.1) eşitliğinden çıkarılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} U_x(x_i) &= \frac{U(x_i + h) - U(x_i - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \\ U_x(x_i) &= \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (1.7)$$

formunda birinci türev için merkezi fark yaklaşımı bulunur. Ayrıca, (1.1) ve (1.2) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} U_{xx}(x_i) &= \frac{U(x_i + h) - 2U(x_i) + U(x_i - h))}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \\ U_{xx}(x_i) &= \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (1.8)$$

formunda ikinci türev için sonlu fark yaklaşımı da bulunabilir.

Ayrıntılı bilgi için (Lapidus and Pinder, 1982; Smith, 1978; Thomas, 1995; Irk, 2007) referansları incelenebilir.

## 1.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Fiziksel sürecin matematiksel formülasyonu ve matematisel modelin nümerik olarak analizi, fiziksel olaylar üzerinde çalışan birçok mühendis ve bilim adamının ilgilendiği iki temel konudur. Fiziksel sürecin matematiksel formülasyonu, ilgili konu (örneğin fizik yasaları) hakkında ve kullanılacak matematiksel yöntem hakkında deneyim gerektirir. Formülasyon sonucunda genellikle bir diferansiyel denklem ortaya çıkar. Matematiksel modelin elde edilmesi ve fiziksel sürecin karakteristik özelliklerinin tahmin edilmesi için kullanılan nümerik yöntemlerden birisi sonlu elemanlar yöntemidir.

Sonlu elemanlar yöntemi, varyasyonel yöntemlerdendir. Fakat geleneksel varyasyonel yöntemlerin bazı dezavantajlı yönlerinin üstesinden gelmiştir. Sonlu elemanlar yöntemini diğer sayısal yöntemlerden üstün kılan üç temel özellik vardır. Bunlardan birincisi, geometrik olarak karmaşık olan çözüm bölgesinin, sonlu eleman olarak

adlandırılan, geometrik alt bölgelerin bir koleksiyonu olarak yeniden gösterilmesidir. İkincisi, herhangi bir sürekli fonksiyon, cebirsel polinomların bir lineer kombinasyonu olarak gösterilebilir düşüncesinden hareketle, herbir sonlu eleman üzerinde, çözüm fonksiyonları için yaklaşım fonksiyonları oluşturulmasıdır. Üçüncüsü, diferansiyel denklem kullanılarak, bilinmeyen katsayılar arasında cebirsel bağıntılar elde edilmesidir (Reddy, 1993).

Sonlu elemanlar metodu hem düzgün, hem de düzgün olmayan karmaşık geometrik bölgelerde iyi sonuçlar vermektedir. Pratik, uygulanması kolay ve bilgisayar programlama mantığına uygun bir yöntemdir (Logan, 2007).

Problemin çözüm bölgesinin, alt bölgelerin bir koleksiyonu olarak gösterilmesi sadece sonlu elemanlar yöntemine ait bir yaklaşım değildir. Antik matematikçiler, bu yaklaşımı  $\pi$  sayısının değerini hesaplamak için kullanmışlar ve  $\pi$  sayısının yaklaşık 40 basamağını doğru olarak hesaplamışlardır. Hesaplamaları yaparken bir çemberi sonlu sayıda kenarları olan bir çokgen olarak ele almışlardır. Burada çokgenin herbir kenarı bir sonlu eleman olarak ele alınmıştır. Hrenikoff (1941), bir elastik düzlemi kolonlar ve kirişlerin bir koleksiyonu olarak yapısal analizde kullanmıştır. Courant (1943), bilinmeyen bir fonksiyona yaklaşım yapmak için alt bölgelerde tanımlı, parçalı ve sürekli fonksiyonları kullanmıştır. Yöntemin formal gösterimi ise virtuel iş prensibi kullanılarak Argyris and Kelsey (1960) ve bir üçgen matris için rijitlik matrisi oluşturularak Turner, et al. (1956) referanslarında ortaya konmuştur. Sonlu eleman terimi ilk olarak 1960 da Clough tarafından kullanılmıştır (Reddy, 1993).

Aşağıda sonlu elemanlar yönteminin bir diferansiyel denkleme nasıl uygulandığı gösterilmiştir.  $L$  bir diferansiyel operatör ve  $v(x)$  bilinen fonksiyon olmak üzere,

$$Lu(x) = v(x) \quad (1.9)$$

şeklinde bir diferansiyel denklem alalım.  $u(x)$  çözümüne

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) \quad (1.10)$$

yaklaşımı yapalım. (1.10) eşitliğinde verilen  $\phi_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, N$  fonksiyonları, tüm sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilen taban fonksiyonları ve  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, N$

bilinmeyen katsayılarıdır.  $u_N(x)$  yaklaşık çözümü denklemde yerine yazılırsa,

$$R(x) = Lu_N(x) - v(x) = Lu_N(x) - Lu(x) \quad (1.11)$$

rezidüsü elde edilir. Rezidüyü küçültmek için,  $\Omega$  tanım bölgesi üzerindeki ağırlıklı integral sifra eşitlenir. Böylece

$$\int_{\Omega} W_j(x) R(x) dx = 0, j = 1, \dots, N \quad (1.12)$$

formunda,  $N$  bilinmeyen ve  $N$  denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilir (Irk, 2007). Burada  $W_j, j = 1, \dots, N$  ağırlık fonksiyonlarıdır. (1.12) denklem sisteminin çözülebilir olması için,  $\{W_j\}$  kümesi lineer bağımsız olmalıdır (Reddy, 1993). (1.12) sistemi çözülerek  $a_j$  katsayıları bulunur. Bulunan katsayılar (1.10) eşitliğinde yerlerine yazıldığında da  $u_N(x)$  yaklaşık çözümüne ulaşılır .

### 1.2.1 Kolokeyşin metodu

Kolokeyşin metodunda (1.9) için bir  $u_N$  yaklaşık çözümü bulunmaya çalışılır. Bu yöntemde  $W_j$  ağırlık fonksiyonları olarak,

$$W_j = \delta(x - x_j) \quad (1.13)$$

Dirac Delta fonksiyonları seçilir. Burada  $x_j$  ler keyfi olarak seçilen kolokeyşin noktalarıdır. Kolokeyşin noktaları genelde birbirlerine eşit uzaklıkta olacak şekilde seçilmektedir. (1.12) denkleminde  $W_j$  ağırlık fonksiyonları yerine  $\delta(x - x_j)$  yazılırsa

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_j) R(x) dx = 0, j = 1, \dots, N \quad (1.14)$$

elde edilir. Kolokeyşin yönteminde rezidü,  $\Omega$  tanım bölgesi üzerindeki  $x_j$  noktalarında sıfır olmalıdır (Reddy, 1993). Buradan

$$\begin{aligned} R(x) &= 0 \\ Lu_N - v(x) &= 0 \\ L \left( \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) \right) - v(x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

eşitliği bulunur. (1.15) den  $a_j$  katsayıları hesaplanır ve böylece yaklaşık çözüm elde edilmiş olur.

### 1.3 B-spline Fonksiyonlar

Aranılan fonksiyon için eğri yaklaşımı yapmak her zaman iyi sonuçlar vermeyebilir. Ayrıca kullanılan Lagrange ve Newton interpolasyon polinomlarının dereceleri, bölünme noktalarının sayısı arttıkça artacağından, bu tür polinomlarla yapılacak işlemler zorlaşır. Bu gibi durumlarda, ardarda gelen iki veri arasında birinci, ikinci, üçüncü ya da daha yüksek dereceden fonksiyonlarla yaklaşımın yapıldığı spline interpolasyon yöntemi önerilmektedir. Spline interpolasyonu; tanımlanan aralık üzerinde, birbirlerini örtmeyen alt aralıklarda, daha küçük dereceden polinom bulma esasına dayanmaktadır (Davies, 1980).

Spline fonksiyonlar, aşağıdaki özellikleri sağlayan parçalı polinom fonksiyonlardır (Dağ, 1994).

- Düzgün fonksiyonlardır.
- Uygun baza sahip olan sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
- Hesaplanması kolay olan fonksiyonlardır.
- Türevleri ve integralleri de spline fonksiyondur.
- Küçük dereceden spline fonksiyonlar çok esnektir ve polinomlarda olduğu gibi salınım yapmazlar.
- Çözüm bölgesi üzerinde sürekli olan her fonksiyon, bir spline fonksiyon cinsinden gösterilebilir.

Belirli derecede ve düzgünlükteki her spline fonksiyon, B-spline fonksiyonların lineer kombinasyonu olarak yazılabilir (Boor, 1978).

$$\dots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots \text{ ve } \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \infty, \lim_{i \rightarrow \infty} x_{-i} = -\infty \quad (1.16)$$

olmak üzere, 0. dereceden B-spline fonksiyon,

$$B_i^0 = \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.17)$$

olarak tanımlanır (Boor, 1978). Görüldüğü gibi  $B_i^0$ , B-spline fonksiyonu süreksizdir.

Yüksek dereceden B-spline fonksiyonlar ise

$$\begin{aligned} B_i^k &= \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x) \\ k &= 1, 2, \dots \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (1.18)$$

bağıntısı yardımıyla hesaplanır (Höllig, 2003). B-spline fonksiyonlar geometrik olarak farklı uzunluklara sahip alt aralıklar üzerinde de tanımlanabilirler (Dağ, 1994).

### 1.3.1 Kübik B-spline kolokeysin yöntemi

$[a, b]$  aralığı

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \quad (1.19)$$

olacak şekilde düzgün aralıklara bölünsün ve  $\phi_m$  fonksiyonları  $x_m$  noktalarındaki kübik B-spline fonksiyonları gösterebilir. Bu durumda  $\phi_{-1}, \dots, \phi_{N+1}$  fonksiyonları  $[a, b]$  üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar için bir tabandır (Prenter, 1975). Bundan dolayı  $w(x, t)$  çözümü için

$$w_m(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (1.20)$$

formunda bir  $w_m(x, t)$  yaklaşık çözümü alınabilir.

$\phi_m$  kübik B-spline fonksiyonları,  $m = -1, 0, \dots, N + 1$  için  $h = (x_{m+1} - x_m)$  olmak üzere aşağıda verilen bağıntı ile verilir (Prenter, 1975):

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar.} \end{cases} \quad (1.21)$$

$\phi_m(x)$  B-spline fonksiyonları,  $[x_{m-2}, x_{m+2}]$  aralığının dışında sıfırdır. ' ve ' ',  $x$ 'e göre birinci ve ikinci türevi göstermek üzere,  $[x_{m-2}, x_{m+2}]$  aralığında  $\phi_m(x), \phi'_m(x)$  ve  $\phi''_m(x)$  fonksiyonlarının bölünme noktalarındaki değerleri sırasıyla

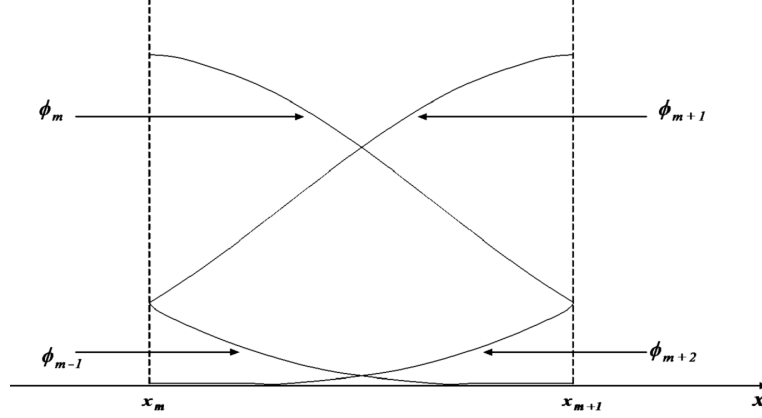
$$\begin{aligned}
\phi_m(x_{m-2}) &= \frac{1}{h^3}(x_{m-2} - x_{m-2})^3 = 0, \\
\phi_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2(x_{m-1} - x_{m-1}) + 3h(x_{m-1} - x_{m-1})^2 - 3(x_{m-1} - x_{m-1})^3] = 1, \\
\phi_m(x_m) &= \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x_m) + 3h(x_{m+1} - x_m)^2 - 3(x_{m+1} - x_m)^3] = 4, \\
\phi_m(x_{m+1}) &= \frac{1}{h^3}(x_{m+2} - x_{m+1})^3 = 1, \\
\phi_m(x_{m+2}) &= 0, \\
\phi'_m(x_{m-2}) &= \frac{3}{h^3}(x_{m-2} - x_{m-2})^2 = 0, \\
\phi'_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^3} [3h^2 + 6h(x_{m-1} - x_{m-1}) - 9(x_{m-1} - x_{m-1})^2] = \frac{3}{h}, \\
\phi'_m(x_m) &= \frac{1}{h^3} [-3h^2 - 6h(x_{m+1} - x_m) + 9(x_{m+1} - x_m)^2] = 0, \\
\phi'_m(x_{m+1}) &= -\frac{3}{h^3}(x_{m+2} - x_{m+1})^2 = -\frac{3}{h}, \\
\phi'_m(x_{m+2}) &= 0, \\
\phi''_m(x_{m-2}) &= \frac{6}{h^3}(x_{m-2} - x_{m-2}) = 0, \\
\phi''_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^3} [6h - 18(x_{m-1} - x_{m-1})] = \frac{6}{h^2}, \\
\phi''_m(x_m) &= \frac{1}{h^3} [6h - 18(x_{m+1} - x_m)] = -\frac{12}{h^2}, \\
\phi''_m(x_{m+1}) &= \frac{6}{h^3}(x_{m+2} - x_{m+1}) = \frac{6}{h^2}, \\
\phi''_m(x_{m+2}) &= 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Tablo 1.1'de, bölünme noktalarındaki kübik B-spline değerleri görülmektedir.

Tablo 1.1: Bölünme noktalarındaki kübik B-spline değerleri

| $x$              | $x_{m-2}$ | $x_{m-1}$ | $x_m$ | $x_{m+1}$ | $x_{m+2}$ |
|------------------|-----------|-----------|-------|-----------|-----------|
| $\phi_m(x)$      | 0         | 1         | 4     | 1         | 0         |
| $h\phi'_m(x)$    | 0         | 3         | 0     | -3        | 0         |
| $h^2\phi''_m(x)$ | 0         | 6         | -12   | 6         | 0         |

$[x_m, x_{m+1}]$  aralığı,  $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$  kübik B-spline fonksiyonları tarafından örtülür. Bu durum Şekil 1.1'de gösterilmiştir.



Şekil 1.1:  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanında  $\phi_{m-1}, \dots, \phi_{m+2}$  kübik B-spline fonksiyonları

Ayrıca  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerinde,  $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$  dışındaki diğer tüm kübik B-spline fonksiyonları sıfır olacağından, bu aralık üzerindeki  $w$  için yaklaşım ifadesi

$$w_m(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(x) \delta_j(t) \quad (1.22)$$

formunda yazılabilir.

Tablo 1.1 ve (1.22) yaklaşık çözümünün kullanılması ile bölünme noktalarında  $w_m$  ve ilk iki türevi

$$\begin{aligned} w_m(x_m, t) &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(x) \delta_j(t), \\ w_m &= \delta_{m-1} \phi_{m-1}(x_m) + \delta_m \phi_m(x_m) + \delta_{m+1} \phi_{m+1}(x_m) + \delta_{m+2} \phi_{m+2}(x_m), \\ w_m &= \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\ w'_m(x_m, t) &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi'_j(x) \delta_j(t), \\ w'_m &= \delta_{m-1} \phi'_{m-1}(x_m) + \delta_m \phi'_m(x_m) + \delta_{m+1} \phi'_{m+1}(x_m) + \delta_{m+2} \phi'_{m+2}(x_m), \\ w'_m &= \frac{3}{h} (\delta_{m+1} - \delta_{m-1}), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
w_m''(x_m, t) &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j''(x) \delta_j(t), \\
w_m'' &= \delta_{m-1} \phi_{m-1}''(x_m) + \delta_m \phi_m''(x_m) + \delta_{m+1} \phi_{m+1}''(x_m) + \delta_{m+2} \phi_{m+2}''(x_m), \\
w_m'' &= \frac{6}{h^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak  $w_m, w_m'$  ve  $w_m''$  yaklaşımlarının bölünme noktalarındaki değerleri  $\delta_m$  parametresine göre,

$$w_m = w_m(x_m, t) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \quad (1.23)$$

$$w_m' = w_m'(x_m, t) = \frac{3}{h} (\delta_{m+1} - \delta_{m-1}), \quad (1.24)$$

$$w_m'' = w_m''(x_m, t) = \frac{6}{h^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \quad (1.25)$$

şeklinde yazılır.

Ayrıntılı bilgi için, (Dağ et al., 2005 a, 2005 b ; Gardner et al., 1996, Saka and Dağ, 2005) referansları incelenebilir.

### 1.3.2 Genişletilmiş kübik B-spline kolokeysin yöntemi

$[a, b]$  aralığı (1.19) da olduğu gibi düzgün aralıklara bölünstün ve  $E_m$  fonksiyonları  $x_m$  noktalarındaki genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları gösterebilir. Bu durumda  $E_{-1}, \dots, E_{N+1}$  fonksiyonları  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar için bir tabandır. Bundan dolayı  $w(x, t)$  çözümü için,

$$w_m(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} E_m(x) \delta_m(t) \quad (1.26)$$

formunda bir  $w_m(x, t)$  yaklaşık çözümü alınabilir.

$E_m$  genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları,  $m = -1, 0, \dots, N + 1$  için  $h = (x_{m+1} - x_m)$  olmak üzere

$$E_m(x) = \frac{1}{24h^4} \begin{cases} 4h(1-\lambda)(x-x_{m-2})^3 + 3\lambda(x-x_{m-2})^4, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (4-\lambda)h^4 + 12h^3(x-x_{m-1}) + 6h^2(2+\lambda)(x-x_{m-1})^2 \\ -12h(x-x_{m-1})^3 - 3\lambda(x-x_{m-1})^4, & [x_{m-1}, x_m] \\ (4-\lambda)h^4 - 12h^3(x-x_{m+1}) + 6h^2(2+\lambda)(x-x_{m+1})^2 \\ +12h(x-x_{m+1})^3 - 3\lambda(x-x_{m+1})^4, & [x_m, x_{m+1}] \\ 4h(\lambda-1)(x-x_{m+2})^3 + 3\lambda(x-x_{m+2})^4, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar.} \end{cases} \quad (1.27)$$

bağıntısıyla verilir (Gang, 2008). Bu bağıntının katsayılarında, kübik B-spline fonksiyonların katsayılarından farklı olarak  $\lambda$  bağımsız değişkeni kullanılmaktadır. En doğru sonuç elde edilene kadar, üzerinde çalışılan denklemlerin sayısal çözümleri  $\lambda$  nın farklı değerleri için yeniden hesaplanır.  $\lambda = 0$  alınması durumunda bulunan sonuçlar kübik B-spline kolokeyşin yönteminin sonuçlarına karşılık gelmektedir. Böylece  $\lambda$  nın sıfır olduğu kübik B-spline kolokeyşin yöntemi ile  $\lambda$  nın sıfırdan farklı değerler aldığı genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yöntemi arasında karşılaştırma yapılabilmektedir.

$E_m(x)$  B-spline fonksiyonları,  $[x_{m-2}, x_{m+2}]$  aralığının dışında sıfırdır. ' ve ' ',  $x$ 'e göre birinci ve ikinci türevi göstermek üzere,  $[x_{m-2}, x_{m+2}]$  aralığında,  $E_m(x)$ ,  $E'_m(x)$  ve  $E''_m(x)$  fonksiyonlarının bölünme noktalarındaki değerleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} E_m(x_{m-2}) &= \frac{1}{24h^4} [4h(1-\lambda)(x-x_{m-2})^3 + 3\lambda(x-x_{m-2})^4] = 0, \\ E_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{24h^4} [(4-\lambda)h^4 + 12h^3(x-x_{m-1}) + 6h^2(2+\lambda)(x-x_{m-1})^2 \\ &\quad -12h(x-x_{m-1})^3 - 3\lambda(x-x_{m-1})^4], \\ E_m(x_{m-1}) &= \frac{4-\lambda}{24}, \\ E_m(x_m) &= \frac{1}{24h^4} [(4-\lambda)h^4 - 12h^3(x-x_{m+1}) + 6h^2(2+\lambda)(x-x_{m+1})^2 \\ &\quad +12h(x-x_{m+1})^3 - 3\lambda(x-x_{m+1})^4], \\ E_m(x_m) &= \frac{8+\lambda}{12}, \\ E_m(x_{m+1}) &= -\frac{1}{24h^4} [4h(\lambda-1)(x-x_{m+2})^3 + 3\lambda(x-x_{m+2})^4] = \frac{4-\lambda}{24}, \\ E_m(x_{m+2}) &= 0, \end{aligned}$$

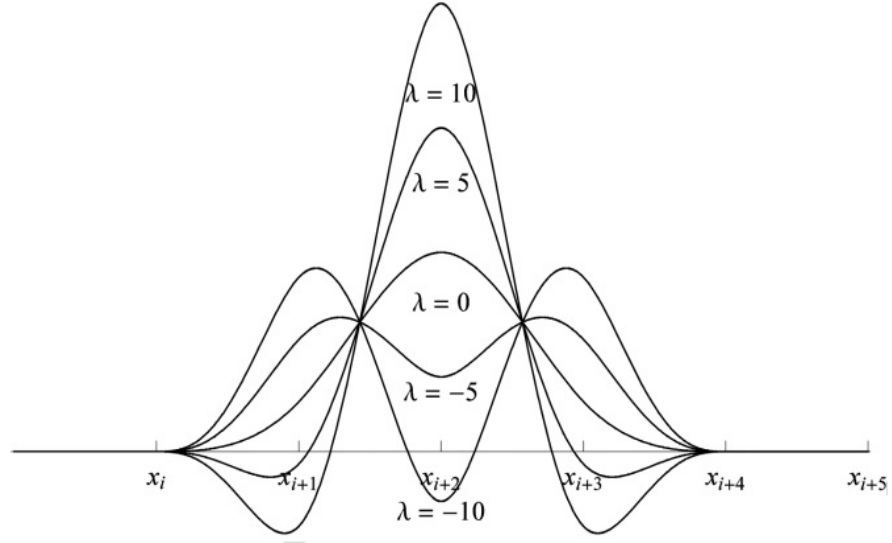
$$\begin{aligned}
E'_m(x_{m-2}) &= \frac{1}{24h^4} [12h(1-\lambda)(x-x_{m-2})^2 + 12\lambda(x-x_{m-2})^3] = 0, \\
E'_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{24h^4} [12h^3 + 12h^2(2+\lambda)(x-x_{m-1}) - 36h(x-x_{m-1})^2 \\
&\quad - 12\lambda(x-x_{m-1})^3], \\
E'_m(x_m) &= \frac{1}{2h}, \\
E'_m(x_{m+1}) &= \frac{1}{24h^4} [-12h^3 + 12h^2(2+\lambda)(x-x_{m+1}) + 36h(x-x_{m+1})^2 \\
&\quad - 12\lambda(x-x_{m+1})^3], \\
E'_m(x_{m+2}) &= 0, \\
E'_m(x_{m+3}) &= -\frac{1}{24h^4} [4h(\lambda-1)(x-x_{m+2})^3 + 3\lambda(x-x_{m+2})^4] = -\frac{1}{2h}, \\
E'_m(x_{m+4}) &= 0, \\
E''_m(x_{m-2}) &= \frac{1}{24h^4} [24h(1-\lambda)(x-x_{m-2}) + 36\lambda(x-x_{m-2})^2] = 0, \\
E''_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{24h^4} [12h^2(2+\lambda) - 72h(x-x_{m-1}) - 36\lambda(x-x_{m-1})^2] = \frac{2+\lambda}{2h^2}, \\
E''_m(x_m) &= \frac{1}{h^3} [6h - 18(x_{m+1} - x_m)] = -\frac{2+\lambda}{h^2}, \\
E''_m(x_{m+1}) &= \frac{6}{h^3}(x_{m+2} - x_{m+1}) = \frac{2+\lambda}{2h^2}, \\
E''_m(x_{m+2}) &= 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Tablo 1.2'de, bölünme noktalarındaki genişletilmiş kübik B-spline değerleri görülmektedir.

Tablo 1.2: Bölünme noktalarındaki genişletilmiş kübik B-spline değerleri

| $x$            | $x_{m-2}$ | $x_{m-1}$     | $x_m$           | $x_{m+1}$     | $x_{m+2}$ |
|----------------|-----------|---------------|-----------------|---------------|-----------|
| $24E_m(x)$     | 0         | $4 - \lambda$ | $16 + 2\lambda$ | $4 - \lambda$ | 0         |
| $2hE'_m(x)$    | 0         | -1            | 0               | 1             | 0         |
| $2h^2E''_m(x)$ | 0         | $2 + \lambda$ | $-4 - 2\lambda$ | $2 + \lambda$ | 0         |

Şekil 1.2 de genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar görülmektedir (Hamid et al., 2011).



Şekil 1.2 :  $\lambda = -10, -5, 0, 5, 10$  için genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar

Ayrıca  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerinde,  $E_{m-1}, E_m, E_{m+1}, E_{m+2}$  dışındaki diğer tüm genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları sıfır olacağından, bu aralık üzerindeki  $w$  için yaklaşım ifadesi

$$w_m(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} E_j(x) \delta_j(t) \quad (1.28)$$

eşitliği ile bulunur.

Tablo 1.2 ve (1.28) yaklaşık çözümünün kullanılması ile bölünme noktalarında  $w_m$  ve ilk iki türevi

$$\begin{aligned} w_m(x_m, t) &= \sum_{j=m-1}^{m+2} E_j(x) \delta_j(t), \\ w_m &= \delta_{m-1} E_{m-1}(x_m) + \delta_m E_m(x_m) + \delta_{m+1} E_{m+1}(x_m) + \delta_{m+2} E_{m+2}(x_m), \\ w_m &= \frac{4-\lambda}{24} \delta_{m-1} + \frac{8+\lambda}{12} 4\delta_m + \frac{4-\lambda}{24} \delta_{m+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w'_m(x_m, t) &= \sum_{j=m-1}^{m+2} E'_j(x) \delta_j(t), \\ w'_m &= \delta_{m-1} E'_{m-1}(x_m) + \delta_m E'_m(x_m) + \delta_{m+1} E'_{m+1}(x_m) + \delta_{m+2} E'_{m+2}(x_m), \\ w'_m &= -\frac{1}{2h} (\delta_{m-1} - \delta_{m+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_m''(x_m, t) &= \sum_{j=m-1}^{m+2} E_j''(x) \delta_j(t), \\
w_m'' &= \delta_{m-1} E_{m-1}''(x_m) + \delta_m E_m''(x_m) + \delta_{m+1} E_{m+1}''(x_m) + \delta_{m+2} E_{m+2}''(x_m), \\
w_m'' &= \frac{2+\lambda}{2h^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Sonuç olarak  $w_m, w_m'$  ve  $w_m''$  yaklaşımlarının bölünme noktalarındaki değerleri  $\delta_m$  parametresine göre

$$w_m = w_m(x_m, t) = \frac{4-\lambda}{24} \delta_{m-1} + \frac{8+\lambda}{12} 4\delta_m + \frac{4-\lambda}{24} \delta_{m+1}, \quad (1.29)$$

$$w_m' = w_m'(x_m, t) = -\frac{1}{2h} (\delta_{m-1} - \delta_{m+1}), \quad (1.30)$$

$$w_m'' = w_m''(x_m, t) = \frac{2+\lambda}{2h^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \quad (1.31)$$

şeklinde ifade edilir.

#### 1.4 Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri

Oluşum denklemleri,

$$u_t = K[u] \quad (1.32)$$

formundadır. Burada  $K[u]$ ;  $u$  fonksiyonu ve  $u$  fonksiyonunun  $x$  değişkenine göre türevlerini içeren bir fonksiyonu,  $t$  alt indisi zamana göre türevi,  $u(x, t)$  ise çözüm fonksiyonunu göstermektedir.

Fizik, kimya, biyoloji gibi bir çok bilim dalında ve çeşitli mühendislik alanlarında geniş uygulama alanına sahip olan, lineer olmayan oluşum denklemlerinden bazıları aşağıda verilmiştir.

(i) Kimyasal reaksiyonlar ve popülasyon biyolojisinde model problem olan,

$$u_t = \Delta u + f(u) \quad (1.33)$$

formundaki Reaksiyon-Difüzyon denklemi.

(ii) Bulaşıcıların taşınmasını ve yoğun akışkan akışını modelleyen

$$u_t + f(u)_x = \Delta u \quad (1.34)$$

formunda verilen adveksiyon-difüzyon denklemi.

(iii) Gözenekli ortamlarda madde geçişi gibi olayların modellenmesinde ortaya çıkan

$$u_t = \nabla \cdot [D(u) \nabla u] \quad (1.35)$$

şeklindeki lineer olmayan difüzyon matrisi denklemi.

(iv) Lineer olmayan klasik alan teorisinde basit bir model denklem olan

$$u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0 \quad (1.36)$$

formundaki hiperbolik dalga denklemi.

(v) Akışkanlar mekaniğinde, plazma fiziğinde ve lineer olmayan optik problemlerinde model denklem olarak kullanılan

$$iu_t + u_{xx} + q|u|^2 u = 0 \quad (1.37)$$

lineer olmayan kübik Schrödinger denklemi.

(vi) Yüzey dalgalarının yayılımı için bir model olan

$$v_t + u_x + (vu)_x = 0, \quad (1.38)$$

$$u_t + v_x + uu_x - \frac{1}{3}u_{xxt} = 0 \quad (1.39)$$

formundaki Klasik Boussinesq denklemi.

(vii) Lineer olmayan plazma dalgalarının oluşumunu modelleyen

$$w_t(x, t) + w_{xxx}(x, t) + \alpha(|w(x, t)| w(x, t))_x = 0 \quad (1.40)$$

formundaki CMKdV denklemi.

Detaylı bilgi için (Hunter, 1996) ve (Irk, 2007) referansları incelenebilir.

## 1.5 Korunum Kanunları

Lineer olmayan oluşum denklemleri için korunum kanunu

$$\mathcal{T}_t + \mathcal{X}_x = 0 \quad (1.41)$$

formundadır. Burada  $\mathcal{T}[u]$  ve  $\mathcal{X}[u]$  sırasıyla,  $u$  ve  $u$  fonksiyonunun  $x$  değişkenine göre türevlerini içeren korunumlu yoğunluk ve ilgili akıdır.  $\mathcal{T}_t$  ve  $\mathcal{X}_x$  sırasıyla  $t$  ve

$x$  değişkenlerine göre tam türevi gösterir ve

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_t &= \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial u} u_t + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial u_x} u_{tx} + \dots, \\ \mathcal{X}_x &= \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial u} u_t + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial u_x} u_{xx} + \dots\end{aligned}\tag{1.42}$$

şeklinde tanımlıdır.

(1.41) denkleminin  $x$  değişkenine göre, bir  $(A, B)$  aralığında integrali alındığında

$$\int_A^B \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{T} dx + \mathcal{X}|_A^B = \frac{\partial}{\partial t} \int_A^B \mathcal{T} dx + \mathcal{X}|_A^B = 0\tag{1.43}$$

elde edilir.  $(B - A)$ 'nın periyodun tam katı olduğu veya  $u(x, t)$ 'nin  $x \rightarrow \mp\infty$  ve  $(A, B) = (-\infty, \infty)$  iken sıfıra gittiği uygun periyodik sınır koşulları altında, (1.43) eşitliğinden

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A^B \mathcal{T} dx = 0\tag{1.44}$$

olup buradan  $t$  değişkenine göre integral alındığında ise

$$\int_A^B \mathcal{T} dx = \text{sabit}\tag{1.45}$$

hareket sabiti elde edilir (Fordy, 1990; Taşcan, 2002).

Bu çalışmada NLS denklemi için korunum sabitlerinin sayısal değerleri hesaplanmış ve ifadeleri ilgili bölümde verilmiştir.

## 1.6 Solitonlar

Solitonlar ilk kez, 1834 yılında, J. Scott Russell tarafından, Edinburgh kentindeki Union kanalında gözlemlenmiştir. Russell birçok kaynakta da yer alan gözlemini aşağıdaki şekilde ifade etmiştir (İrk, 2007).

*"İki çift at tarafından dar bir kanal boyunca hızla çekilen bir botun hareketini gözlemliyordum. Bot aniden durduğunda, bota hareket sağlayan kanaldaki su kütlesi durmadı ve su kütlesi şiddetli bir çalkalanma şeklinde botun uç kısmı etrafında toplandı ve aniden botu arkasında bırakarak, büyük bir hızla harekete geçti. Büyük bir*

*solitary dalga yüksekliğine sahip olarak düşündüğüm formdaki, dairesel ve düzgün bir su kütlelerinin kanal boyunca şekil veya hızını bozmadan yoluna devam ettiğini gördüm. Bu dalga formunu, at üzerinde takip ettim ve yaklaşık 30 feet mesafe sonunda 8 veya 9 mil/saat hızında, ilk baştaki orijinal şeklinde ve yarı yüksekliğinde yuvarlanır halde gördüm. Yüksekliği kademeli olarak azaldı ve yaklaşık 1 veya 2 mil takip sonunda, kanalın kenarlarında kaybolduğunu gördüm. İşte 1834 yılının Ağustos ayı, ilk kez ötelenme dalgası olarak adlandırdığım bu ilginç ve güzel olayı gözleme şansı bulduğum zamandı."*

Russell, başlangıçta *ötelenme dalgası* olarak adlandırdığı dalgaya, daha sonra *büyük solitary dalgası* ismini vermiştir. Bu isim literatürde kısaltılarak *solitary dalgası* olarak da kullanılmıştır. Günümüzde ise sıklıkla *solitary dalgası* yerine *soliton* terimi kullanılmaktadır (Infeld and Rowlands, 1990).

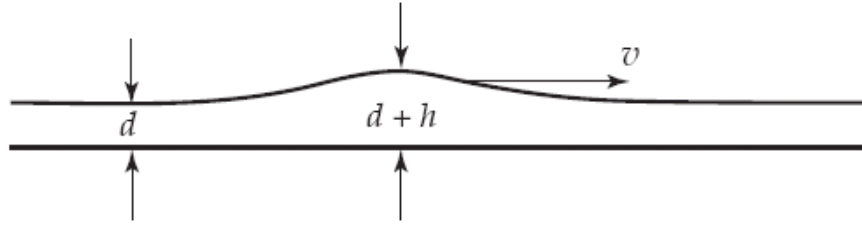
Daha sonra Russel, soliton dalgalarını daha dikkatli inceleyebilmek için, laboratuvarında oluşturduğu dalga tanklarında birçok deneyler yapmış ve aşağıdaki sonuçlara ulaşmıştır (Falkovich, 2007):

- (i) Solitary dalgaları  $h \text{sech}^2(k(x - vt))$  formuna sahiptir.
- (ii) Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, iki veya daha fazla bağımsız solitary dalgası üretir.
- (iii) Normal dalgaların aksine solitary dalgaları asla birleşmezler. Bu sebeple küçük genliğe sahip bir solitary dalgası ile büyük genliğe sahip bir solitary dalgası birbirleri ile çarpıştıktan sonra, iki solitary dalgası birbirlerinden ayrılarak şekillerinde bir bozulma olmadan yollarına devam edebilirler.
- (iv)  $g$  yerçekimi ivmesi olmak üzere,  $h$  yüksekliğine sahip olan ve  $d$  derinliğindeki bir kanalda hareket eden bir solitary dalgasının hızı

$$v = \sqrt{g(d + h)} \quad (1.46)$$

bağıntısı ile ifade edilir.





Şekil 1.3 Bir soliton dalgasının hareketi

1895 yılında Korteweg de Vries, lineer olmayan sığ su dalgalarının hareketini modelleyen

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + \gamma u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.47)$$

(1.47) denkleminin

$$u(x, t) = \tilde{u}(x - vt) \quad (1.48)$$

formunda bir solitary dalga çözümüne sahip olduğunu gösterdiler. (Korteweg and de Vries, 1895). Denklemden  $u(x, t)$ , dalganın genliğini;  $c = \sqrt{gd}$ , küçük genlikli dalganın hızını;  $\varepsilon = c(d^2/6 - T/2\rho g)$ , dağılma parametresini;  $\gamma$ , lineer olmayan parametreyi;  $T$ , yüzey gerilimini;  $\rho$ , suyun yoğunluğunu göstermektedir. 1965 yılında Kruskal and Zabusky, KdV denklemini sonlu farklar metodu ile çözmüş, solitary dalgalarının çarpışma sonrasında şekillerini değiştirmediklerini gözlemlemiş ve bu özelliğin parçacıkların çarpışmasına benzediğini bularak bu tip dalgalara soliton adını vermişlerdir (Zabusky and Kruskal, 1965). 1967 yılında Gardner, Greene, Kruskal ve Miura tarafından ters saçılma dönüşüm metodu kullanılarak, KdV denkleminin soliton çözümleri analitik olarak da verilmiştir (Gardner et.al., 1967).

Günümüzde solitonlar; akışkanlar mekaniği, temel parçacıklar fiziği, lazer fiziği, süper iletkenlik fiziği, biyofizik gibi bir çok fizik alanlarında kullanılmaktadır (Chao-hao, 1995). 2006 yılında Harvard üniversitesi elektrik mühendisliğinde görevli olan Donhee Ham ve iki doktora öğrencisi David Ricketts ve Xiaofen Li tarafından geliştirilen elektronik bir aygıt sayesinde, soliton dalgaları elde edilmiştir. Bu buluş ile normal dalgalar yerine soliton dalgalarının kullanılmasının yolu açılmıştır ve

yakın gelecekte radar, iletişim sektörü gibi bir çok yerde solitonlar kullanılacaktır (Harvard Gazette archives, 2006).

Detaylı bilgi için (Irk, 2007) referansı incelenebilir.

### 1.7 Lineer Olmayan Schrödinger Denklemleri (NLS) ve Test Problemleri

$i = \sqrt{-1}$ ,  $u(x, t)$ ,  $x$  ve  $t$  ye bağlı kompleks değerli bir fonksiyon,  $q$  reel bir sabit,  $x$  ve  $t$  alt indisleri ise sırayla konum ve zamana göre türevi göstermek üzere NLS denklemi

$$iu_t + u_{xx} + q|u|^2 u = 0 \quad (1.49)$$

formundadır. NLS denklemi için başlangıç ve sınır şartları ise sırasıyla,

$$u(x, 0) = g(x), \quad (1.50)$$

$$u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0, \quad (1.51)$$

olarak tanımlanabilir. Burada  $g(x)$  ilerleyen bölümlerde tanımlanacaktır.

Fizikte önemli uygulama alanlarına sahip olan (1.49) denklemi, kübik Schrödinger denklemi olarak da adlandırılır ve akışkanlar mekaniğinde (Hasimoto and Ono, 1972), lineer olmayan optik problemlerinde (Strauss, 1978) ve plazma fiziğinde (Lamb, 1980) model olarak kullanılmaktadır.

(1.49) denkleminin analitik çözümü V.I. Karpman and E.M. Krushkal (1969), V.E. Zakharov and A.B. Shabat (1972), A.C. Scott, F.Y.F. Chu and D.W. McLaughlin (1973) çalışmalarında verilmiştir. NLS denkleminin daha genel başlangıç şartları için analitik çözümü bilinmediğinden dolayı, denklemin nümerik çözümünü bulma adına günümüze kadar pek çok çalışma yapılmıştır. Çalışmalar arasında; sonlu elemanlar yöntemleri (Löhner et.al.,1984), (Herbst et.al.,1985), (Argyris and Haase,1987), (Tourigny and Morris, 1988), kübik spline sonlu elemanlar yöntemi (Gardner et al.,1991), ortogonal spline kolokeyşin yöntemi (M.P. Robinson and G. Fairweather, 1994), Galerkin yöntemi (Ismail, 2007), yapay sinir ağları kullanılarak uygulanan nümerik çözüm yöntemi (Shirvany et al., 2007), diferansiyel quadrature yöntemi

(Korkmaz and Dağ, 2008), radyal taban fonksiyonları kullanılarak kolokeyşin yöntemi (Dereli, Irk and Dağ, 2009), Pseudo-Spectral yöntem (Denghan and Taleei, 2010), diferansiyel dönüşüm yöntemi ve indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi (Abazari, 2011), diferansiyel quadrature yöntemi (Mokhtari, 2011 a) örnek verilebilir.

(1.49) denkleminin çözümü olan  $u(x, t)$  fonksiyonu

$$u(x, t) = r(x, t) + is(x, t) \quad (1.52)$$

olacak şekilde reel ve sanal kısımlarına ayrılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} r_t &= -s_{xx} - q(r^2 + s^2)s, \\ s_t &= r_{xx} + q(r^2 + s^2)r. \end{aligned} \quad (1.53)$$

denklem sistemi elde edilir ki burada  $r(x, t)$  ve  $s(x, t)$  reel değerli fonksiyonlardır.

NLS denklemi aşağıdaki korunum kanunlarını sağlamaktadır. İlerleyen bölümlerde nümerik değerleri hesaplanan  $C_1$  ve  $C_2$  korunum sabitleri,

$$C_1 = \int_a^b |u|^2 dx, \quad (1.54)$$

$$C_2 = \int_a^b \left[ |u_x|^2 - \frac{1}{2}q|u|^4 \right] dx. \quad (1.55)$$

şeklinde dir.

NLS denklem sisteminin nümerik çözümlerin doğruluğunu incelemek için aşağıda ifadeleri verilen  $L_\infty$  ve  $L_2$  hata normları kullanılmıştır.

$$L_\infty = \|u^{tam} - u^{nüm}\|_\infty = \max_j |u_j^{tam} - u_j^{nüm}|, \quad (1.56)$$

$$L_2 = \|u^{tam} - u^{nüm}\|_2 = \left[ h \sum_j^N |u_j^{tam} - u_j^{nüm}|^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.57)$$

Burada  $u^{nüm}$  ile  $u(x, t)$  fonksiyonunun sayısal çözümü gösterilmektedir.

### 1.7.1 Soliton dalga çözümü

NLS denkleminin çarpışma sonrasında da çarpışma öncesindeki şekillerini ve hızlarını koruyan soliton dalga çözümleri vardır (Calogero and Eckhaus, 1987). Soliton

dalga çözümü aşağıdaki formdadır.

$$u(x, t) = \alpha \left( \frac{2}{q} \right)^{\frac{1}{2}} \exp i \left\{ \frac{1}{2} S x - \frac{1}{4} (S^2 - \alpha^2) t \right\} \operatorname{sech} [\alpha (x - St)] \quad (1.58)$$

Burada  $S$ , büyüklüğü  $\alpha$  ya bağlı olan soliton dalgasının hızıdır. Hesaplamalarda  $-20 \leq x \leq 20$  aralığı ve  $q = 2$ ,  $S = 4$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $\Delta t = 0.005$  parametreleri kullanılmıştır (Taha and Ablowitz, 1984), (Tourigny and Morris, 1988).  $\alpha = 1$ , olarak alındığında sayısal çözümün modülü

$$|u| = \operatorname{sech} (x - 4t) \quad (1.59)$$

olarak bulunur. (1.58) ifadesi genliği 1, hızı 4 olan soliton dalgasının soldan sağa doğru sabit hızla ilerlemesini modellemektedir.

### 1.7.2 İki soliton dalgasının çarpışması

NLS denklemi aşağıdaki formda bir çarpışan dalga çözümüne sahiptir (Gardner et al., 1991).

$$u(x, 0) = u_1(x, 0) + u_2(x, 0), \quad (1.60)$$

$$u_j(x, t) = \alpha_j \left( \frac{2}{q} \right)^{\frac{1}{2}} \exp i \left\{ \frac{1}{2} S (x - x_j) \right\} \operatorname{sech} (\alpha_j x), j = 1, 2 \quad (1.61)$$

Burada parametreler  $q = 2$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.005$ ,  $\alpha_1 = 1.0$ ,  $S_1 = -4.0$ ,  $x_1 = -10$ ,  $\alpha_2 = 1.0$ ,  $S_2 = 4.0$ ,  $x_2 = 10$  ve aralık  $-20 \leq x \leq 20$  olarak seçilmiştir. (1.60) başlangıç şartı, büyüklükleri eşit ve aralarındaki uzaklık 20 birim olan iki soliton dalgası tanımlar. Dalgalardan birincisinin tepe noktası  $x = -10$ , ikincisinin tepe noktası  $x = 10$  da konumlanmıştır. Her iki dalgaının hızı da 4 birimdir.

### 1.7.3 Sabit soliton dalgasının doğuşu

Eğer

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) dx \geq \pi \quad (1.62)$$

şartı sağlanıyorsa,  $u(x, 0)$  başlangıç şartı bir soliton dalgası üretir (Gardner et al., 1991). Bu test probleminde başlangıç şartı,

$$u(x, 0) = A \exp(-x^2), \quad (1.63)$$

parametreler,  $h = 0.03$ ,  $\Delta t = 0.005$ ,  $N = 1334$ ,  $A = 1.78$ ,  $q = 2$  ve bölge  $-45 \leq x \leq 45$  şeklinde seçilmiştir.

#### 1.7.4 Hareketli soliton dalgasının doğuşu

Burada başlangıç şartı

$$u(x, 0) = A \exp(-x^2 + 2ix) \quad (1.64)$$

şeklinde (Gardner et al., 1991), parametreler  $h = 0.03$ ,  $\Delta t = 0.005$ ,  $q = 2$ ,  $A = 1.78$  ve bölge  $-45 \leq x \leq 45$  olarak seçilmiştir.

#### 1.7.5 Bağlı durumlu solitonlar (Bound state of solitons)

Başlangıç şartı

$$u(x, 0) = \text{sech}(x) \quad (1.65)$$

alındığında eğer

$$q = 2M^2, M = 1, 2, \dots \quad (1.66)$$

ise  $M$  tane soliton dalgası oluşur (Gardner et al., 1991). Bu problemde parametreler  $h = 0.03$ ,  $\Delta t = 0.005$ ,  $N = 1334$  ve  $q = 32, 50$ , konum aralığı ise  $-20 \leq x \leq 20$  olarak seçilmiştir. Bu test problemi için analitik çözüm (Miles, 1981) tarafından verilmiştir. Fakat analitik çözüm  $M \geq 3$  olması durumunda kullanışlı değildir.  $q = 2, 8, 16$  için hesaplanan nümerik çözümler Herbst (1985), Gardner (1991) referaslarında geniş çaplı olarak ele alınmıştır.

### 1.8 KB Denklem Sistemi, RB Denklem Sistemi ve Test Problemleri

Bu bölümde ilk olarak BST denklem sistemi tanıtılacaktır.

BST denklem sistemi,

$$v_t + u_x + (vu)_x + \alpha_1 u_{xxx} - \alpha_2 v_{xxt} = 0, \quad (1.67)$$

$$u_t + v_x + uu_x + \alpha_3 v_{xxx} - \alpha_4 u_{xxt} = 0 \quad (1.68)$$

formundadır (Bona et al., 1997, Bona, et al., 2002). Burada  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  reel sabitleri,  $x$  ve  $t$  alt indisleri ise sırasıyla konum ve zamana göre türevi göstermektedir.

BST denklem sistemi

$$v_t + u_x + (vu)_x = 0, \quad (1.69)$$

$$u_t + v_x + uv_x - \frac{1}{3}u_{xxt} = 0 \quad (1.70)$$

formundaki KB denklem sisteminden türetilmiştir (Bona, et al., 2002). KB sistemi, Boussinesq (1871) tarafından yüzey dalgalarının yayılımı için bir model olarak verilmiştir (Amick, 1984; Schonbek, 1981; Whitham, 1974). BST denklem sistemi, bir su tünelineki yüzey su dalgalarını modellemektedir (Bona and Chen, 1998; Chen, 1998 a, 1998 b; Pelloni and Dougalis, 2001). Pelloni and Dougalis (2001), spectral metot ile; Al-Khaled and Nusier (2008), Adomian ayrışım yöntemi ile; Mohyud-Din (2010), Adomian ayrışım ve Homotopy perturbasyon yöntemleri ile BST denklem sisteminin sayısal çözümleri üzerinde çalışmalar yapmışlardır.

(1.67-1.68) denklem sistemindeki terimler,

- $h$ , durgun suyun yüksekliği,
- $g$ , yerçekimi ivmesi,
- $x$ ,  $h$  ile ölçeklendirilmiş kanal boyunun uzunluğu,
- $t$ ,  $(h/g)^{1/2}$  ile ölçülen geçen zaman,
- $v(x, t)$ , ilk durağan duruma göre  $h$  ile ölçülen su yüzeyinin boyutsuz sapması,
- $u(x, t)$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$  olmak üzere, kanalın dibinden yukarı doğru  $\theta h$  yüksekliğinde  $\sqrt{gh}$  ile ölçülen boyutsuz yatay hız,

olarak ifade edilmiştir (Chen, 1998 b).  $\lambda$  ve  $\mu$  reel sabitler olmak üzere denklemde bulunan  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$  reel sabitleri

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left( \theta^2 - \frac{1}{3} \right) \lambda, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \left( \theta^2 - \frac{1}{3} \right) (1 - \lambda), \quad (1.71)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2} (1 - \theta^2) \mu, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2} (1 - \theta^2) (1 - \mu),$$

eşitlikleriyle verilirler (Chen, 1998 b).

(1.67-1.68) denklem sisteminden,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  reel parametrelerinin farklı değerleri için, farklı isimlerde denklem sistemleri türetilir (Chen, 1998 a). Bu sistemlerden biri de Regularized Boussinesq (RB) denklem sistemidir.  $\theta^2 = \frac{2}{3}, \lambda = 0, \mu = 0$  olarak seçilirse, (1.71) eşitliklerindeki katsayılar

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{1}{6}, \alpha_3 = 0 \text{ ve } \alpha_4 = \frac{1}{6}$$

olarak elde edilir. Bu katsayıların (1.67-1.68) denklemlerinde yerlerine yazılması sonucunda

$$v_t + u_x + (vu)_x - \frac{1}{6}v_{xxt} = 0, \quad (1.72)$$

$$u_t + v_x + uu_x - \frac{1}{6}u_{xxt} = 0. \quad (1.73)$$

RB denklem sistemine ulaşılır (Bona and Chen, 1998).

KB ve RB denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri araştırılırken,

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t > 0 \quad (1.74)$$

$$u'(a, t) = u'(b, t) = 0, \quad t > 0 \quad (1.75)$$

$$v(a, t) = v(b, t) = 0, \quad t > 0 \quad (1.76)$$

$$v'(a, t) = v'(b, t) = 0, \quad t > 0 \quad (1.77)$$

sınır şartları ve  $f_1(x), f_2(x)$  sonradan belirlenmek üzere

$$v(x, 0) = f_1(x), \quad (1.78)$$

$$u(x, 0) = f_2(x) \quad (1.79)$$

başlangıç şartları kullanılacaktır.

KB ve RB denklem sistemlerinin nümerik çözümlerin doğruluğunu incelemek için, (1.56-1.57) referanslarıyla verilen  $L_\infty$  ve  $L_2$  hata normları kullanılmıştır.

### 1.8.1 İlerleyen dalga çözümü

(1.69-1.70) eşitlikleri ile verilen KB denklem sisteminin;  $g, x_0$  ve  $c$  reel sabitler olmak üzere

$$v(x, t) = -1, \quad (1.80)$$

$$u(x, t) = \left(1 - \frac{g}{3}\right)c + cg \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{g}}{2}(x + x_0 - ct) \right) \quad (1.81)$$

şeklinde bir ilerleyen dalga çözümü vardır (Chen, 1998a). (1.80-1.81) eşitliklerinde

$$x_0 = 0, \quad g = 3 \text{ ve } c = \frac{1}{3}$$

seçimleri yapıldığında, KB sisteminin ilerleyen dalga çözümü

$$v(x, t) = -1 \quad (1.82)$$

$$u(x, t) = \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \left( x - \frac{t}{3} \right) \right) \quad (1.83)$$

olarak bulunur ve (1.82-1.83) eşitliklerinde  $t = 0$  alınır

$$v(x, 0) = -1 \quad (1.84)$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \quad (1.85)$$

başlangıç şartları elde edilir.

(1.72-1.73) denklemlerinden oluşan RB sisteminin ilerleyen dalga çözümü ise;  $g$ ,  $x_0$  ve  $c$  reel sabitler olmak üzere

$$v(x, t) = -1, \quad (1.86)$$

$$u(x, t) = \left( 1 - \frac{g}{6} \right) c + \frac{cg}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{g}}{2} (x + x_0 - ct) \right) \quad (1.87)$$

formunda verilmiştir.(Chen, 1998a).

(1.86-1.87) eşitliklerinde

$$x_0 = 0, \quad g = 6, \quad c = \frac{1}{3}$$

seçimleri yapılırsa, RB sisteminin

$$v(x, t) = -1, \quad (1.88)$$

$$u(x, t) = \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{6}}{2} \left( x - \frac{t}{3} \right) \right) \quad (1.89)$$

ilerleyen dalga çözümü elde edilir. (1.88-1.89) eşitliklerinde  $t = 0$  alındığında ise, RB sisteminin başlangıç şartları

$$v(x, 0) = -1, \quad (1.90)$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{6}}{2} x \right) \quad (1.91)$$



olarak bulunur.

### 1.8.2 İki ilerleyen dalganın çarpışması

(1.80-1.81) ilerleyen dalga çözümünün kullanılmasıyla  $x_1, x_2, g_1, g_2, c_1$  ve  $c_2$  reel sabitler olmak üzere, iki ilerleyen dalganın çarpışması test problemi için ,

$$v(x, 0) = -1, \quad (1.92)$$

$$u(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \left[ \left(1 - \frac{g_i}{3}\right) c_i + c_i g_i \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{g_i}}{2} (x + x_i) \right) \right] \quad (1.93)$$

formundaki başlangıç şartı elde edilir.

(1.92-1.93) eşitliklerinde

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & c_1 &= 1, & g_1 &= 3, \\ x_2 &= -10, & c_2 &= \frac{1}{2}, & g_2 &= 2, \end{aligned}$$

seçimleri yapılırsa, KB sisteminin iki ilerleyen dalga çözümü

$$v(x, 0) = -1 \quad (1.94)$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{6} + 3 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} (x - 10) \right) \quad (1.95)$$

olur. (1.95) eşitliği; genlikleri 3, 1, hızları 1, 1/2 olan ve tepe noktaları  $x = 0$ ,  $x = 10$  konumlarına karşılık gelen iki ilerleyen dalganın hareketini modellemektedir.

RB sistemi için ise, (1.86-1.87) ilerleyen dalga çözümünün kullanılmasıyla  $x_1, x_2, g_1, g_2, c_1$  ve  $c_2$  reel sabitler olmak üzere,

$$v(x, 0) = -1, \quad (1.96)$$

$$u(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \left[ \left(1 - \frac{g_i}{6}\right) c_i + 2 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{g_i}}{2} (x + x_i) \right) \right] \quad (1.97)$$

başlangıç şartı elde edilir.

(1.96-1.97) eşitliklerinde

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & c_1 &= 1, & g_1 &= 6, \\ x_2 &= -10, & c_2 &= \frac{1}{3}, & g_2 &= 6, \end{aligned}$$

seçimleri yapılırsa, RB sisteminin iki ilerleyen dalga çözümü

$$v(x, 0) = -1, \quad (1.98)$$

$$u(x, 0) = 3\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) + \text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}(x - 10)\right) \quad (1.99)$$

olarak bulunur. (1.99) eşitliği; genlikleri 3, 1, hızları 1, 1/3 olan ve tepe noktaları  $x = 0$ ,  $x = 10$  konumlarına karşılık gelen iki ilerleyen dalganın hareketini modellemektedir.

Detaylı bilgi için (Irk, 2007) referansı incelenebilir.

### 1.9 İkili Burger Denklem Sistemi ve Test Problemleri

Bu bölümde

$$u_t - u_{xx} + \eta uu_x + \alpha (uv)_x = 0 \quad (1.100)$$

$$v_t - v_{xx} + \eta vv_x + \beta (uv)_x = 0 \quad (1.101)$$

formundaki İkili Burgers denkleminin sayısal çözümleri araştırılacaktır. (1.100-1.101) denklem sisteminin başlangıç şartları,  $a \leq x \leq b$  olmak üzere

$$u(x, 0) = \phi_1(x) \quad (1.102)$$

$$v(x, 0) = \phi_2(x) \quad (1.103)$$

ve sınır şartları,  $t > 0$  olmak üzere

$$u(a, t) = f_1(a, t) \quad (1.104)$$

$$u(b, t) = f_2(a, t) \quad (1.105)$$

$$v(a, t) = g_1(a, t) \quad (1.106)$$

$$v(b, t) = g_2(a, t) \quad (1.107)$$

şeklindedir. Burada  $\phi_1(x), \phi_2(x), f_1(x, t), f_2(x, t), g_1(x, t), g_2(x, t)$  önceden tanımlı fonksiyonlar,  $\eta$  bir reel sabit,  $\alpha$  ve  $\beta$  ise sistem parametrelerine bağlı sabitlerdir (Nee and Duan, 1998).

İlk olarak Esipov (1995) tarafından ortaya atılan İkili Burgers denklem sisteminin nümerik çözümlerinin bulunması için çeşitli yöntemler uygulanmıştır. Bu

yöntemler arasında bir yakınsak kuvvet serisi formunda Adomian ayrışım yöntemi (Kaya, 2001), Adomian-Páde tekniği (Denghan et al., 2007), Chebyshev spectral kolokeyşin yöntemi (Khater et al., 2008), homotopi perturbasyon yöntemi (Ghotbi et al., 2008), Fourier pseudospectral yöntemi (Rashid and Ismail, 2009), diferansiyel dönüşüm yöntemi (Abazari and Borhanifar, 2010), kübik B-spline kolokeyşin yöntemi (Mittal and Arora, 2011), basit klasik radyal bazlar yardımıyla kolokeyşin yöntemi (Islam et al., 2012), Bäcklund dönüşüm ve benzerlik uygulaması yöntemi (Inan et al., 2010), homotopy perturbasyon ve Páde teknikleri (Yıldırım and Kelleci, 2011), genelleştirilmiş iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi (Liu and Hou, 2011), homotopy perturbasyon yöntemi (Ghoreishi et al., 2011), genelleştirilmiş diferansiyel quadrature yöntemi (Mokhtari, et al., 2011 b), Adomian ayrıştırma yöntemi (Chen and An, 2008), varyasyonel iterasyon yöntemi (Soliman, 2007), tekrarlı operatör yöntemi (Lian and Lou, 2006) sayılabilir.

Abdou and Soliman (2005) referansında, Adomian ayrışım yöntemi; Soliman (2006) referansında, genişletilmiş tanh-fonksiyon yöntemi kullanılarak İkili Burgers denklem sisteminin tam çözümü bulunmuştur.

Abassy, El-Tawil and El-Zoheiry.(2007), Páde tekniği ile birleştirilmiş varyasyonel iterasyon yöntemini kullanarak, Sweilam and Khader (2009) ise homotopy perturbasyon yöntemini kullanarak (1.100-1.101) denklem sisteminin kapalı formda çözümlerini elde etmişlerdir.

Liu (2010) uyumluluk yöntemiyle (1.100-1.101) denkleminin simetrisini elde etmiş, Jin-Ming ve Yao-Ming (2011) Hirota bilineer yöntemiyle (1.100-1.101) denklem sisteminin tamamen integrallenebilir olduğunu göstermişlerdir (Uçar, 2011).

İkili Burger denklem sisteminin nümerik çözümlerin doğrulunu incelemek için, (1.56-1.57) referanslarıyla verilen  $L_\infty$  ve  $L_2$  hata normları kullanılmıştır.

### 1.9.1 Problem 1

İlk test problemi için  $\alpha = 1, \beta = 1$  seçimleriyle

$$u_t - u_{xx} - 2uu_x + (uv)_x = 0 \quad (1.108)$$

$$v_t - v_{xx} - 2vv_x + (uv)_x = 0 \quad (1.109)$$

İkili Burger denklem sisteminin başlangıç şartları,

$$u(x, 0) = \sin(x) \quad (1.110)$$

$$v(x, 0) = \sin(x) \quad (1.111)$$

sınır şartları,

$$u(a, t) = e^{-t} \sin(a) \quad (1.112)$$

$$u(b, t) = e^{-t} \sin(b) \quad (1.113)$$

$$v(a, t) = e^{-t} \sin(a) \quad (1.114)$$

$$v(b, t) = e^{-t} \sin(b) \quad (1.115)$$

için tam çözümü

$$u(x, t) = v(x, t) = e^{-t} \sin(x) \quad (1.116)$$

olarak alınmıştır (Kaya, 2001).

### 1.9.2 Problem 2

İkinci test problemi için

$$u_t - u_{xx} + 2uu_x + \alpha (uv)_x = 0 \quad (1.117)$$

$$v_t - v_{xx} + 2vv_x + \beta (uv)_x = 0 \quad (1.118)$$

İkili Burger denklem sisteminin başlangıç şartları,

$$u(x, 0) = a_0 - 2A \left( \frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \tanh(Ax) \quad (1.119)$$

$$v(x, 0) = a_0 \left( \frac{2\beta - 1}{2\alpha - 1} \right) - 2A \left( \frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \tanh(Ax) \quad (1.120)$$

sınır şartları,

$$u(a, t) = a_0 - 2A \left( \frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \tanh[A(a - 2At)] \quad (1.121)$$

$$v(a, t) = a_0 \left( \frac{2\beta - 1}{2\alpha - 1} \right) - 2A \left( \frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \tanh[A(a - 2At)] \quad (1.122)$$

$$u(b, t) = a_0 - 2A \left( \frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \tanh[A(b - 2At)] \quad (1.123)$$

$$v(b, t) = a_0 \left( \frac{2\beta - 1}{2\alpha - 1} \right) - 2A \left( \frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \tanh[A(b - 2At)] \quad (1.124)$$

tam çözümü,  $a_0 = 0.05$  ve  $A = \frac{1}{2} \left( \frac{a_0 (4\alpha\beta - 1)}{2\alpha - 1} \right)$  olmak üzere

$$u(x, t) = a_0 - 2A \left( \frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \tanh [A (x - 2At)] \quad (1.125)$$

$$v(x, t) = a_0 \left( \frac{2\beta - 1}{2\alpha - 1} \right) - 2A \left( \frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \tanh [A (x - 2At)] \quad (1.126)$$

olarak alınmıştır (Soliman, 2006).

Detaylı bilgi için (Uçar, 2011) referansı incelenebilir.

### 1.10 Reaksiyon-Difüzyon Denklem Sistemi ve Test Problemleri

Reaksiyon-Difüzyon denklemi

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \alpha \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \phi(u) \quad (1.127)$$

formundadır. Burada  $u(x, t)$  reel değerli bir fonksiyon,  $\alpha \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$  difüzyon terimi,  $\alpha \neq 0$  difüzyon katsayısı,  $\phi(u)$  fonksiyonu sistemin reaksiyonudur.

Reaksiyon-Difüzyon denklem sistemi, biyoloji ve kimyada birçok olayın model problemi olarak kullanılmaktadır. Örneğin bir bölgedeki bakterilerin hareketleri veya salgın hastalıkların yayılımı, reaksiyon difüzyon denklem sistemi ile modelenebilir.

Birden fazla bağımlı değişken bulunduran, Reaksiyon-Difüzyon denklem sistemi aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \frac{\delta u}{\delta t} &= D_u \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + F(u, v) \\ \frac{\delta v}{\delta t} &= D_v \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + G(u, v) \end{aligned} \quad (1.128)$$

Burada  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  doğadaki iki türün popülasyon yoğunluk fonksiyonları ya da iki farklı kimyasal maddenin konsantrasyonu,  $D_u$  ile  $D_v$  sırasıyla  $u$  ve  $v$  nin difüzyon katsayıları,  $F$  ile  $G$  de sistemin reaksiyonunu temsil eden lineer olmayan fonksiyonlardır.

(1.128) sisteminin sınır koşulu olarak

$$u(x_0, t) = u(x_N, t) = 0,$$

$$v(x_0, t) = v(x_N, t) = 0,$$

bağıntıları ile verilen, Dirichlet sınır koşulları veya

$$\begin{aligned} u_x(x_0, t) &= u_x(x_N, t) = 0, \\ v_x(x_0, t) &= v_x(x_N, t) = 0, \end{aligned}$$

bağıntıları ile verilen, Neumann sınır koşulları kullanılabilir.

Reaksiyon-Difüzyon denklem sisteminin modellediği bazı problemler aşağıda verilmiştir (Şahin, 2009).

#### i. Thomas Mekanizması

Bu model, ürik asit ayrışmasının ilk aşamasını kataliz eden enzim içerisinde reaksiyona giren oksijen ve ürik asitin etkileşimine dayanır. Reaksiyona giren ürik asit ve oksijenin yoğunlukları sırasıyla  $u$  ve  $v$  ile temsil edilir. Problem

$$\begin{aligned} \frac{\delta u}{\delta t} &= \nabla^2 u + \gamma(a - u - h(u, v)), \\ \frac{\delta v}{\delta t} &= d\nabla^2 v + \gamma(ab - \alpha v - h(u, v)). \end{aligned}$$

şeklinde gösterilir (Thomas, 1975). Burada  $a, b, d, \gamma, \alpha, \rho, k$  pozitif parametreler ve  $h(u, v)$  terimi de

$$h(u, v) = \frac{\rho uv}{1 + u + kKu^2}$$

şeklinde tanımlanan ve  $u$  ve  $v$  nin tükenme oranlarını gösteren bir fonksiyondur.

#### ii. Gierer-Meinhardt Mekanizması

Bir kimyasalın (aktivatör) harekete geçirdiği bir diğer kimyasala (inhibitör) ait ürünün, aktivatörün ürününü engellemesini modellemektedir.  $u$  fonksiyonu aktivatörün yoğunluğunu,  $v$  fonksiyonu inhibitörün yoğunluğunu göstermek üzere, boyutsuzlaştırılmış formuyla Gierer-Meinhardt reaksiyonu

$$\begin{aligned} \frac{\delta u}{\delta t} &= \nabla^2 u + \gamma \left( a - bu + \frac{u^2}{v(1 + ku^2)} \right), \\ \frac{\delta v}{\delta t} &= d\nabla^2 v + \gamma(u^2 - v). \end{aligned}$$

şeklinde gösterilir (Gierer and Meinhardt, 1972). Burada  $a, b, d, \gamma$  pozitif parametreler,  $k$  ise saturasyon yoğunluğunun ölçüsüdür.

### iii. CIMA Reaksiyonu

Klor dioksit, iyot ve malonik asit reaksiyonunu modeller.  $a, b, d$  pozitif parametreler olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{\delta u}{\delta t} &= \nabla^2 u + a - u - \frac{4uv}{1+u^2}, \\ \frac{\delta v}{\delta t} &= d\nabla^2 v + b \left( u - \frac{uv}{1+u^2} \right).\end{aligned}$$

şeklinde gösterilir. Bu modelde, aktivatör olan ( $I^-$ ) iyot ve inhibitör olan da ( $CIO_2^-$ ) klor dioksittir.  $u$  fonksiyonu aktivatörün yoğunluğunu,  $v$  fonksiyonu inhibitörün yoğunluğunu gösterir (Epstein and Pojman, 1998; Maini, et al., 1997).

Reaksiyon-Difüzyon denkleminin nümerik çözümlerini bulmaya yönelik çalışmalar arasında, Gear's yöntemi ve Crank-Nicolson yöntemi (Sherratt, 1997), sonlu farklar yöntemi (Twizell et al., 1994), Crank-Nicholson yöntemi (Chou et al., 2007), sonlu farklar yöntemi (Liu and Sun, 2007), sonlu farklar yöntemi (Somathilake, 2009), varyasyonel iterasyon yöntemi (Barari, et al. 2010) sayılabilir.

Reaksiyon-Difüzyon denkleminin genel formu

$$u_t = a_1 u_{xx} + b_1 u + c_1 v + d_1 u^2 v + e_1 uv + m_1 uv^2 + n_1 \quad (1.129)$$

$$v_t = a_2 v_{xx} + b_2 u + c_2 v + d_2 u^2 v + e_2 uv + m_2 uv^2 + n_2 \quad (1.130)$$

şeklinde. Burada  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2, m_1, m_2, n_1, n_2$  reel sabitlerdir.

#### 1.10.1 Linear problem

İlk test problemimiz olan linear problem, (1.129-1.130) denklem sisteminde  $a, b, d$  reel sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned}a_1 &= d, & a_2 &= d, & b_1 &= -a, & b_2 &= 0, & c_1 &= 1, & c_2 &= -b, & d_1 &= 0, \\ d_2 &= 0, & e_1 &= 0, & e_2 &= 0, & m_1 &= 0, & m_2 &= 0, & n_1 &= 0, & n_2 &= 0.\end{aligned}$$

seçimleri yapılarak

$$\frac{\delta u}{\delta t} = d \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} - au + v, \quad (1.131)$$

$$\frac{\delta v}{\delta t} = d \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} - bv. \quad (1.132)$$

olarak elde edilir. Denklem sisteminin analitik çözümleri,

$$u(x, t) = (e^{-(a+d)t} + e^{-(b+d)t}) \cos(x) \quad (1.133)$$

$$v(x, t) = (a - b) e^{-(b+d)t} \cos(x) \quad (1.134)$$

şeklindedir. (1.131-1.132) sisteminin başlangıç şartları, (1.133-1.134) analitik çözümlerinde  $t = 0$  alınmasıyla elde edilmiştir. Sınır şartları ise  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  olmak üzere

$$u_x(0, t) = 0, \quad (1.135)$$

$$v_x(0, t) = 0, \quad (1.136)$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad (1.137)$$

$$v\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad (1.138)$$

olarak verilir (Chou et al., 2007).

(1.131-1.132) sisteminin nümerik çözümlerin doğrulunu incelemek için, (1.56-1.57) referanslarıyla verilen  $L_\infty$  ve  $L_2$  hata normları kullanılmıştır.

### 1.10.2 İzotermal kimyasal sistem

(1.129-1.130) denklem sisteminde  $k$  reel bir sabit olmak üzere,

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = -k, \quad d_1 = 0,$$

$$d_2 = 0, \quad e_1 = -1, \quad e_2 = 1, \quad m_1 = 0, \quad m_2 = 0, \quad n_1 = 0, \quad n_2 = 0.$$

seçimleri yapılarak elde edilen

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} - uv, \quad (1.139)$$

$$\frac{\delta v}{\delta t} = \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} - kv + uv. \quad (1.140)$$

formundaki lineer olmayan denklem sistemidir (Merkin et al., 1989). Buradaki  $u(x, t)$  fonksiyonu  $A$  reaktantının,  $v(x, t)$  fonksiyonu  $B$  reaktantının boyutsuzlaştırılmış yoğunluğu,  $k$  ise boyutsuzlaştırma parametresidir. (1.139-1.140) sisteminde  $uv$  terimi kuadratik otokatalizi,  $-kv$  terimi  $B$  reaktantındaki lineer azalmayı gösterir. (1.139-1.140) sisteminin ilerleyen dalga çözümünün varlığı için gerekli şart  $k < 1$  olmasıdır ve bu çözümlerin asimptotik hızı  $2(1 - k)^{\frac{1}{2}}$  şeklindedir (Merkin et



al., 1989). Asimptotik hız kavramı ilk olarak Aronson ve Weinberger tarafından 1975 de ortaya atılmıştır. Bu kavram,  $c^*$  hızıyla yayılan bir salgın modeli üzerinde, şu şekilde açıklanmaktadır:  $c > c^*$  olacak şekilde  $c$  hızıyla hareket eden birey salgını geride bırakacak,  $c < c^*$  olacak şekilde  $c$  hızıyla hareket eden birey ise salgının içinde kalacaktır (Wu and Liu, 2009).

(1.139-1.140) sisteminin başlangıç şartları ,

$$u(x, 0) = 1, \quad (1.141)$$

$$v(x, 0) = \begin{cases} \exp(-x^2), & |x| \leq L \\ 0, & |x| > L \end{cases} \quad (1.142)$$

sınır şartları,

$$u_x(x_0, t) = 0, \quad (1.143)$$

$$v_x(x_0, t) = 0, \quad (1.144)$$

$$u(x_N, t) = 1, \quad (1.145)$$

$$v(x_N, t) = 0, \quad (1.146)$$

şeklinde alınmıştır.

Bu test probleminin analitik çözümü olmadığından dolayı, nümerik çözümlerin doğruluğunu incelemek için aşağıda ifadesi verilen bağıl hata kullanılmıştır.

$$\text{Bağıl Hata} = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^N |u_j^{n+1} - u_j^n|^2}{\sum_{j=0}^N |u_j^{n+1}|^2}} \quad (1.147)$$

Detaylı bilgi için (Şahin, 2009) referansı incelenebilir.

## BÖLÜM 2

### NLS DENKLEMİNİN GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK B-SPLINE TAYLOR KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde NLS denkleminin, B-spline kolokeyşin metoduyla sayısal çözümleri araştırılmış, bulunan çözümlerin doğruluğu, beş test problemi için  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile  $C_1$  ve  $C_2$  korunum sabitleri hesaplanarak kontrol edilmiştir.

#### 2.1 NLS Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Genişletilmiş Kübik B-spline Taylor Kolokeyşin Metodu

##### 2.1.1 Zaman ayrışımı

(1.53) denklem sisteminin zaman ayrışımı için  $r^{n+1}$  ve  $s^{n+1}$  terimleri aşağıdaki şekilde Taylor serisine açılırsa

$$r^{n+1} = r^n + \Delta t (r_t)^n + \frac{\Delta t^2}{2} (r_{tt})^n + \mathcal{O}(\Delta t^3), \quad (2.1)$$

$$s^{n+1} = s^n + \Delta t (s_t)^n + \frac{\Delta t^2}{2} (s_{tt})^n + \mathcal{O}(\Delta t^3), \quad (2.2)$$

elde edilir. Burada  $\mathcal{O}(\Delta t^3)$  daha yüksek mertebeden olan terimleri temsil eder ve ihmal edilecektir.

$r_{tt}^n$  ve  $s_{tt}^n$  ifadelerinin

$$r_{tt}^n \approx \frac{(r_t)^{n+1} - (r_t)^n}{\Delta t}, \quad (2.3)$$

$$s_{tt}^n \approx \frac{(s_t)^{n+1} - (s_t)^n}{\Delta t} \quad (2.4)$$

formundaki yaklaşık değerleri, (2.1) ve (2.2) de yerlerine yazılırsa

$$r^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} (r_t)^{n+1} = r^n + \frac{\Delta t}{2} (r_t)^n, \quad (2.5)$$

$$s^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} (s_t)^{n+1} = s^n + \frac{\Delta t}{2} (s_t)^n, \quad (2.6)$$

elde edilir. (1.53), (2.5) ve (2.6) da yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & -\frac{\Delta t}{2} q (r^2 + s^2)^{n+1} r^{n+1} + s^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} r_{xx}^{n+1} \\ & = \frac{\Delta t}{2} q (r^2 + s^2)^n r^n + s^n + \frac{\Delta t}{2} r_{xx}^n, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta t}{2} q (r^2 + s^2)^{n+1} s^{n+1} + r^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} s_{xx}^{n+1} \\
& = -\frac{\Delta t}{2} q (r^2 + s^2)^n s^n + r^n - \frac{\Delta t}{2} s_{xx}^n
\end{aligned} \tag{2.8}$$

formundaki, zaman ayrışımı yapılmış olan NLS denklem sistemi elde edilir.

### 2.1.2 Konum ayrışımı

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{4 - \lambda}{24}, & a_2 &= \frac{8 + \lambda}{12}, & a_3 &= a_1, & b_1 &= -\frac{1}{2h}, \\
b_3 &= \frac{1}{2h}, & c_1 &= \frac{2 + \lambda}{2h^2}, & c_2 &= -\frac{2 + \lambda}{h^2}, & c_3 &= c_3.
\end{aligned}$$

olmak üzere,  $r(x, t)$  ve  $s(x, t)$  fonksiyonları sırasıyla  $\rho_m$  ve  $\sigma_m$  parametreleri cinsinden yazılırsa

$$\begin{aligned}
r_m^{n+1} &= a_1 \rho_{m-1}^{n+1} + a_2 \rho_m^{n+1} + a_3 \rho_{m+1}^{n+1}, \\
s_m^{n+1} &= a_1 \sigma_{m-1}^{n+1} + a_2 \sigma_m^{n+1} + a_3 \sigma_{m+1}^{n+1}, \\
(r_x)_m^{n+1} &= b_1 \rho_{m-1}^{n+1} + b_3 \rho_{m+1}^{n+1}, \\
(s_x)_m^{n+1} &= b_1 \sigma_{m-1}^{n+1} + b_3 \sigma_{m+1}^{n+1}, \\
(r_{xx})_m^{n+1} &= c_1 \rho_{m-1}^{n+1} + c_2 \rho_m^{n+1} + c_3 \rho_{m+1}^{n+1}, \\
(s_{xx})_m^{n+1} &= c_1 \sigma_{m-1}^{n+1} + c_2 \sigma_m^{n+1} + c_3 \sigma_{m+1}^{n+1},
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $\delta_m = \rho_m + i\sigma_m$  şeklinde seçilmiştir. Elde edilen değerler (2.7)

- (2.8) denklem sisteminde yerlerine yazılır ve düzenlemeler yapılrısa

$$\begin{aligned}
\xi_{m1} &= \frac{\Delta t}{2} q (r^2 + s^2)^n r^n + s^n + \frac{\Delta t}{2} r_{xx}^n \\
\xi_{m2} &= -\frac{\Delta t}{2} q (r^2 + s^2)^n s^n + r^n - \frac{\Delta t}{2} s_{xx}^n
\end{aligned} \tag{2.9}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \rho_{m-1}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t q (r^2 + s^2)^{n+1} (4 - \lambda)}{48} - \frac{\Delta t (2 + \lambda)}{4h^2} \right) + \sigma_{m-1}^{n+1} \left( \frac{4 - \lambda}{24} \right) + \\
& \rho_m^{n+1} \left( -\frac{\Delta t q (r^2 + s^2)^{n+1} (8 + \lambda)}{24} + \frac{\Delta t (2 + \lambda)}{2h^2} \right) + \sigma_m^{n+1} \left( \frac{8 + \lambda}{12} \right) + \\
& \rho_{m+1}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t q (r^2 + s^2)^{n+1} (4 - \lambda)}{48} - \frac{\Delta t (2 + \lambda)}{4h^2} \right) + \sigma_{m+1}^{n+1} \left( \frac{4 - \lambda}{24} \right) = \xi_{m1}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
& \rho_{m-1}^{n+1} \left( \frac{4-\lambda}{24} \right) + \sigma_{m-1}^{n+1} \left( \frac{\Delta t q (r^2 + s^2)^{n+1} (4-\lambda)}{48} + \frac{\Delta t (2+\lambda)}{4h^2} \right) + \\
& \rho_m^{n+1} \left( \frac{8+\lambda}{12} \right) + \sigma_m^{n+1} \left( \frac{\Delta t q (r^2 + s^2)^{n+1} (8+\lambda)}{24} - \frac{\Delta t (2+\lambda)}{2h^2} \right) + \\
& \rho_{m+1}^{n+1} \left( \frac{4-\lambda}{24} \right) + \sigma_{m+1}^{n+1} \left( \frac{\Delta t q (r^2 + s^2)^{n+1} (4-\lambda)}{48} + \frac{\Delta t (2+\lambda)}{4h^2} \right) = \xi_{m2}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

elde edilir. (2.10) - (2.11) denklem sistemi  $2N + 2$  denklem  $2N + 6$  bilinmeyen-  
den oluşmaktadır. Sistemin çözülebilmesi için, denklem sayısı ve bilinmeyen sayısı  
eşit olmalıdır. Bunun için,  $\rho_{-1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-1}^{n+1}$ ,  $\rho_{N+1}^{n+1}$  ve  $\sigma_{N+1}^{n+1}$  parametreleri sınır şartları  
kullanılarak yok edilmelidir. (1.51) de verilen sınır şartlarından

$$u(x_0, t) = u_0 = a_1 \rho_{-1}^{n+1} + a_2 \rho_0^{n+1} + a_3 \rho_1^{n+1}, \tag{2.12}$$

$$v(x_0, t) = v_0 = a_1 \sigma_{-1}^{n+1} + a_2 \sigma_0^{n+1} + a_3 \sigma_1^{n+1}, \tag{2.13}$$

$$u(x_N, t) = u_N = a_1 \rho_{N-1}^{n+1} + a_2 \rho_N^{n+1} + a_3 \rho_{N+1}^{n+1}, \tag{2.14}$$

$$v(x_N, t) = v_N = a_1 \sigma_{N-1}^{n+1} + a_2 \sigma_N^{n+1} + a_3 \sigma_{N+1}^{n+1} \tag{2.15}$$

yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\rho_{-1}^{n+1} = \frac{1}{a_1} (u_0 - a_2 \rho_0^{n+1} - a_3 \rho_1^{n+1}), \tag{2.16}$$

$$\sigma_{-1}^{n+1} = \frac{1}{a_1} (v_0 - a_2 \sigma_0^{n+1} - a_3 \sigma_1^{n+1}), \tag{2.17}$$

$$\rho_{N+1}^{n+1} = \frac{1}{a_3} (u_N - a_2 \rho_N^{n+1} - a_1 \rho_{N-1}^{n+1}), \tag{2.18}$$

$$\sigma_{N+1}^{n+1} = \frac{1}{a_3} (v_N - a_2 \sigma_N^{n+1} - a_1 \sigma_{N-1}^{n+1}) \tag{2.19}$$

eşitlikleri elde edilir. (2.10) - (2.11) denklem sisteminde  $\rho_{-1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-1}^{n+1}$ ,  $\rho_{N+1}^{n+1}$  ve  $\sigma_{N+1}^{n+1}$   
parametreleri yerine, (2.16-2.19) eşitlikleri kullanıldığında denklem ve bilinmeyen  
sayıları  $2N + 2$  olur. Böylece (1.53) denklem sistemi  $x_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$  bölünme  
noktalarında

$$\begin{aligned}
a_{00} &= -\frac{\Delta t q (r^2 + s^2)^{n+1} (4-\lambda)}{48} - \frac{\Delta t (2+\lambda)}{4h^2}, \\
a_{01} &= \frac{4-\lambda}{24}, \\
a_{02} &= -\frac{\Delta t q (r^2 + s^2)^{n+1} (8+\lambda)}{24} + \frac{\Delta t (2+\lambda)}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{03} &= \frac{8 + \lambda}{12}, \\
a_{04} &= a_{00}, \\
a_{05} &= a_{01}, \\
a_{10} &= a_{01}, \\
a_{11} &= -a_{00}, \\
a_{12} &= a_{03}, \\
a_{13} &= -a_{02}, \\
a_{14} &= a_{05}, \\
a_{15} &= -a_{04}
\end{aligned}$$

olmak üzere ,

$m = 0$  için

$$\begin{aligned}
&\left(a_{02} - a_{00}\frac{a_2}{a_1}\right)\rho_0^{n+1} + \left(a_{04} - a_{00}\frac{a_3}{a_1}\right)\rho_1^{n+1} + \left(a_{03} - a_{01}\frac{a_2}{a_1}\right)\sigma_0^{n+1} \\
&+ \left(a_{05} - a_{01}\frac{a_3}{a_1}\right)\sigma_1^{n+1} = \xi_{m1} - a_{00}\frac{1}{a_1}r_0^n - a_{01}\frac{1}{a_1}s_0^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(a_{12} - a_{10}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\rho_0^{n+1} + \left(a_{14} - a_{10}\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)\rho_1^{n+1} + \left(a_{13} - a_{11}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\sigma_0^{n+1} \\
&+ \left(a_{15} - a_{11}\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)\sigma_1^{n+1} = \xi_{m2} - a_{10}\frac{1}{\alpha_1}r_0^n - a_{11}\frac{1}{\alpha_1}s_0^n
\end{aligned}$$

$m = 1$  için

$$a_{00}\rho_0^{n+1} + a_{01}\sigma_0^{n+1} + a_{02}\rho_1^{n+1} + a_{03}\sigma_1 + a_{04}\rho_2 + a_{05}\sigma_2 = \xi_{m1},$$

$$a_{10}\rho_0^{n+1} + a_{11}\sigma_0^{n+1} + a_{12}\rho_1^{n+1} + a_{13}\sigma_1^{n+1} + a_{14}\rho_2^{n+1} + a_{15}\sigma_2^{n+1} = \xi_{m2},$$

$\vdots$

(2.20)

$m = N - 1$  için

$$a_{00}\rho_{N-2}^{n+1} + a_{01}\sigma_{N-2}^{n+1} + a_{02}\rho_{N-1}^{n+1} + a_{03}\sigma_{N-1}^{n+1} + a_{04}\rho_N^{n+1} + a_{05}\sigma_N^{n+1} = \xi_{m1},$$

$$a_{10}\rho_{N-2}^{n+1} + a_{11}\sigma_{N-2}^{n+1} + a_{12}\rho_{N-1}^{n+1} + a_{13}\sigma_{N-1}^{n+1} + a_{14}\rho_N^{n+1} + a_{15}\sigma_N^{n+1} = \xi_{m2}$$

$m = N$  için

$$\begin{aligned} & \left( a_{N-1,0} - a_{N-1,4} \frac{a_1}{a_3} \right) \rho_{N-1}^{n+1} + \left( a_{N-1,1} - a_{N-1,5} \frac{a_1}{a_3} \right) \sigma_{N-1}^{n+1} + \\ & \left( a_{N-1,2} - a_{N-1,4} \frac{a_2}{a_3} \right) \rho_N^{n+1} + \left( a_{N-1,3} - a_{N-1,5} \frac{a_2}{a_3} \right) \sigma_N^{n+1} \\ & = \xi_{m1} - a_{N-1,4} \frac{1}{\alpha_3} r_N^n - a_{N-1,5} \frac{1}{\alpha_3} s_N^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( a_{N0} - a_{N4} \frac{a_1}{a_3} \right) \rho_{N-1}^{n+1} + \left( a_{N1} - a_{N5} \frac{a_1}{a_3} \right) \sigma_{N-1}^{n+1} + \\ & \left( a_{N2} - a_{N4} \frac{a_2}{a_3} \right) \rho_N^{n+1} + \left( a_{N3} - a_{N5} \frac{a_2}{a_3} \right) \sigma_N^{n+1} \\ & = \xi_{m2} - a_{N4} \frac{1}{a_3} r_N^n - a_{N5} \frac{1}{a_3} s_N^n \end{aligned}$$

formunda açık olarak yazılabilir. (2.20) denklem sistemi  $2N + 2$  denklem,  $2N + 2$  bilinmeyenden oluşan 6 sütun elemanlı bir sistemdir ve Thomas algoritması kullanılarak çözülebilir. Thomas algoritmasının kullanılabilmesi için sistem lineer olmalıdır. Lineerleştirme için

$$(\delta_i^*)^{n+1} = \delta_i^n + \frac{1}{2}(\delta_i^{n+1} - \delta_i^n) \quad (2.21)$$

formundaki iterasyon bağıntısı kullanılmıştır. (2.21) bağıntısı her zaman adımında iki kez uygulanarak  $(\delta_i^*)^{n+1}$  parametresi hesaplanmış ve  $\delta^{n+1}$  parametresinin  $n + 1$ . zaman adımıdaki değeri için yeni bir yaklaşım yapılmıştır. Bu işlem programın çalışması bitene kadar tekrarlanmıştır.

(2.20) denklem sisteminin çözümüne,

$$(\rho_{-1}^0, \rho_0^0, \dots, \rho_N^0, \rho_{N+1}^0) \text{ ve } (\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \dots, \sigma_N^0, \sigma_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörlerinin hesaplanması ile başlanır.

## 2.2 Başlangıç Durumu

Başlangıç vektörleri, (1.50) başlangıç şartı ile bulunabilir. Bunun için (1.26) yaklaşık çözümü,  $t = 0$  zamanında reel ve sanal kısımlarına ayrılırsa

$$r_m(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} E_m(x) \rho_m^0, \quad (2.22)$$

$$s_m(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} E_m(x) \sigma_m^0 \quad (2.23)$$

bulunur. (2.22-2.23) eşitliklerinde,  $r_m(x, 0)$  ve  $s_m(x, 0)$  değerleri, (1.50) başlangıç şartından dolayı bilinmektedir. Bu değerlere göre de  $\rho_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  vektörleri hesaplanır.

(2.22) eşitliği açık olarak yazılırsa  $N + 3$  bilinmeyen ve  $N + 1$  denklemden oluşan

$$\begin{aligned} \rho_{-1}^0 + 4\rho_0^0 + \rho_1^0 &= r_0, \\ \rho_0^0 + 4\rho_1^0 + \rho_2^0 &= r_1, \\ \vdots \\ \rho_{N-1}^0 + 4\rho_N^0 + \rho_{N+1}^0 &= r_N \end{aligned} \quad (2.24)$$

sistemine ulaşılır. (1.51) sınır şartlarından

$$\begin{aligned} r'(x_0, 0) &= r'_0 = b_1 \rho_{-1}^0 + b_3 \rho_1^0, \\ \rho_{-1}^0 &= \frac{1}{b_1} (r'_0 - b_3 \rho_1^0) \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} r'(x_N, 0) &= r'_N = b_1 \rho_{N-1}^0 + b_3 \rho_{N+1}^0, \\ \rho_{N+1}^0 &= \frac{1}{b_3} (r'_N - b_1 \rho_{N-1}^0) \end{aligned} \quad (2.26)$$

yazılarak,  $\rho_{-1}^0$  ve  $\rho_{N+1}^0$  bilinmeyenleri (2.24) sisteminden yok edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{bmatrix}
a_2 & \left(a_3 - a_1 \frac{b_3}{b_1}\right) & & & & \\
a_1 & a_2 & a_3 & & & \\
& a_1 & a_2 & a_3 & & \\
& & \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & & a_1 & a_2 & a_3 \\
& & & & a_1 & a_2 & a_3 \\
& & & & & \left(a_1 - a_3 \frac{b_1}{b_3}\right) & a_2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\rho_0^0 \\
\rho_1^0 \\
\rho_2^0 \\
\vdots \\
\rho_{N-2}^0 \\
\rho_{N-1}^0 \\
\rho_N^0
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
r_0 - \frac{a_1}{b_1} r_0' \\
r_1 \\
r_2 \\
\vdots \\
r_{N-2} \\
r_{N-1} \\
r_N - \frac{a_3}{b_3} r_N'
\end{bmatrix}
\quad (2.27)$$

matris sistemine ulaşılır. Bu sistem Thomas algoritması ile çözüldüğünde

$$\rho_0^0, \rho_1^0, \dots, \rho_{N-1}^0, \rho_N^0$$

bilinmeyenleri ve bu değerlerin (2.25-2.26) eşitliklerinde kullanılması ile de  $\rho_{-1}^0$  ve  $\rho_{N+1}^0$  bilinmeyenleri hesaplanmış olur. Böylece  $\rho$  parametresi için

$$(\rho_{-1}^0, \rho_0^0, \dots, \rho_N^0, \rho_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörü elde edilir.

Benzer şekilde, (2.23) eşitliği açık olarak

$$\begin{aligned}
\sigma_{-1}^0 + 4\sigma_0^0 + \sigma_1^0 &= s_0, \\
\sigma_0^0 + 4\sigma_1^0 + \sigma_2^0 &= s_1, \\
&\vdots \\
\sigma_{N-1}^0 + 4\sigma_N^0 + \sigma_{N+1}^0 &= s_N
\end{aligned}
\quad (2.28)$$

şeklinde yazıldığında  $N + 3$  bilinmeyen ve  $N + 1$  denklemden oluşan bir sistem elde edilir.  $\sigma_{-1}^0$  ve  $\sigma_{N+1}^0$  bilinmeyenleri, (1.51) sınır şartlarından

$$\begin{aligned}
s'(x_0, 0) &= s'_0 = b_1 \sigma_{-1}^0 + b_3 \sigma_1^0, \\
\sigma_{-1}^0 &= \frac{1}{b_1} \left( s'_0 - b_3 \sigma_1^0 \right)
\end{aligned}
\quad (2.29)$$

$$\begin{aligned}
s'(x_N, 0) &= s'_N = b_1 \sigma_{N-1}^0 + b_3 \sigma_{N+1}^0, \\
\sigma_{N+1}^0 &= \frac{1}{b_3} \left( s'_N - b_1 \sigma_{N-1}^0 \right)
\end{aligned}
\quad (2.30)$$



şeklinde hesaplanır ve (2.28) sisteminde yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{bmatrix} a_2 & \left(a_3 - a_1 \frac{b_3}{b_1}\right) & & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & & & \\ & a_1 & a_2 & a_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_1 & a_2 & a_3 \\ & & & & a_1 & a_2 & a_3 \\ & & & & & \left(a_1 - a_3 \frac{b_1}{b_3}\right) & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0^0 \\ \sigma_1^0 \\ \sigma_2^0 \\ \vdots \\ \sigma_{N-2}^0 \\ \sigma_{N-1}^0 \\ \sigma_N^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 - \frac{a_1}{b_1} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{N-2} \\ s_{N-1} \\ s_N - \frac{a_3}{b_3} s_N \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

matris sistemine ulaşılır. Bu sistem Thomas algoritması ile çözülürse

$$\sigma_0^0, \sigma_1^0, \dots, \sigma_{N-1}^0, \sigma_N^0$$

bilinmeyenleri ve (2.29-2.30) eşitliklerinin kullanılmasıyla da  $\sigma$  parametresi için

$$(\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \dots, \sigma_N^0, \sigma_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörü hesaplanmış olur.

Başlangıç şartının kullanılmasıyla elde edilen başlangıç vektörleri sayesinde,  $n = 0$  için (2.20) denklem sisteminin sağ tarafındaki tüm değerler artık bilinmektedir. Sol kısımdaki bilinmeyenler ise, Thomas algoritması ile hesaplanabilir. Sonraki zaman adımlarında, bir önceki zamanda bulunan değerlerin kullanılmasıyla, istenilen zamandaki NLS denkleminin sayısal çözümüne ulaşılan kadar iterasyona devam edilir.

## 2.3 Test Problemleri

### 2.3.1 Soliton dalga çözümü

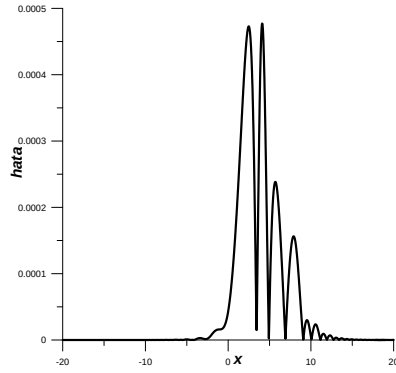
Seçilen parametrelere göre (1.54)-(1.55) korunum sabitlerinin tam değerleri  $C_1 = 2$  ve  $C_2 = 7.333333$  olarak hesaplanır.  $C_1$  ve  $C_2$  sabitlerinin yamuklar kuralıyla hesaplanan yaklaşık değerleri ve (1.56)-(1.57) hata normlarının yaklaşık değerleri Tablo 2.1'de verilmiştir. Yaklaşık değerler  $\lambda = 0$  ve  $\lambda = -0.00152$  durumları için ayrı ayrı hesaplanmıştır. Çünkü,  $\lambda$  nın çeşitli değerleri için yaklaşık

değerler hesaplanmış ve  $\lambda = -0.00152$  için en doğru sonucun bulunduğu gözlemlenmiştir. Tablo 2.1'den de görüldüğü gibi  $C_1$ ,  $\lambda = 0$  ve  $\lambda = -0.00152$  durumları için sabit kalmakta,  $C_2$  ise genelde 6. basamağa kadar doğru sonuç vermektedir.  $\lambda = -0.00152$  alınması halinde yani genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yöntemi uygulandığında hata normlarının değerlerinin küçüldüğü gözlemlenmektedir.

Tablo 2.1:  $h = 0.03, \Delta t = 0.005, N = 1334$  için hata normları ve korunum sabitleri

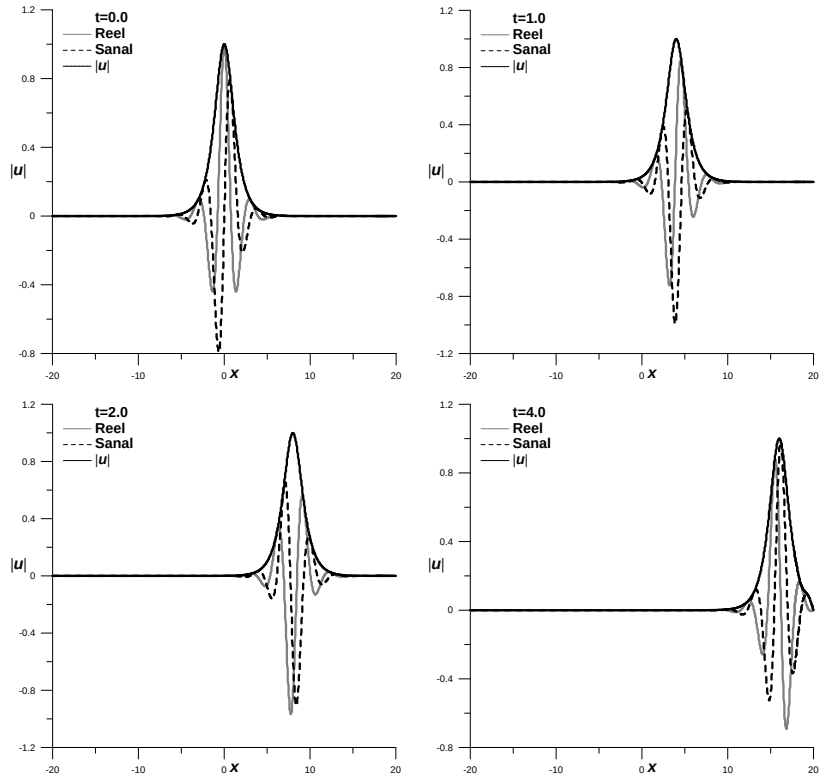
| $\lambda = 0$        |       |           |         |            |
|----------------------|-------|-----------|---------|------------|
| Zaman                | $C_1$ | $C_2$     | $L_2$   | $L_\infty$ |
| 0.0                  | 2.0   | 7.3333297 | 0.00000 | 0.00000    |
| 0.5                  | 2.0   | 7.3333302 | 0.00124 | 0.00096    |
| 1.0                  | 2.0   | 7.3333321 | 0.00250 | 0.00176    |
| 1.5                  | 2.0   | 7.3333359 | 0.00373 | 0.00245    |
| 2.0                  | 2.0   | 7.3333340 | 0.00486 | 0.00309    |
| 2.5                  | 2.0   | 7.3333364 | 0.00587 | 0.00366    |
| $\lambda = -0,00152$ |       |           |         |            |
| Zaman                | $C_1$ | $C_2$     | $L_2$   | $L_\infty$ |
| 0.0                  | 2.0   | 7.3333340 | 0.00000 | 0.00000    |
| 0.5                  | 2.0   | 7.3333340 | 0.00035 | 0.00024    |
| 1.0                  | 2.0   | 7.3333368 | 0.00075 | 0.00048    |
| 1.5                  | 2.0   | 7.3333340 | 0.00112 | 0.00067    |
| 2.0                  | 2.0   | 7.3333349 | 0.00141 | 0.00081    |
| 2.5                  | 2.0   | 7.3333364 | 0.00160 | 0.00092    |

Şekil 2.1 analitik ve nümerik çözümler arasındaki farkın mutlak değerinin grafiğidir. Grafik incelendiğinde en büyük hatanın  $x = 4$  civarında olduğu görülmektedir.



Şekil 2.1:  $t = 1$ ,  $N = 1334$ ,  $\Delta t = 0.005$ ,  $\lambda = -0.00152$  için,

$$\text{Mutlak Hata} = |\text{Analitik çözümün modülü} - \text{Sayısal çözümün modülü}|$$



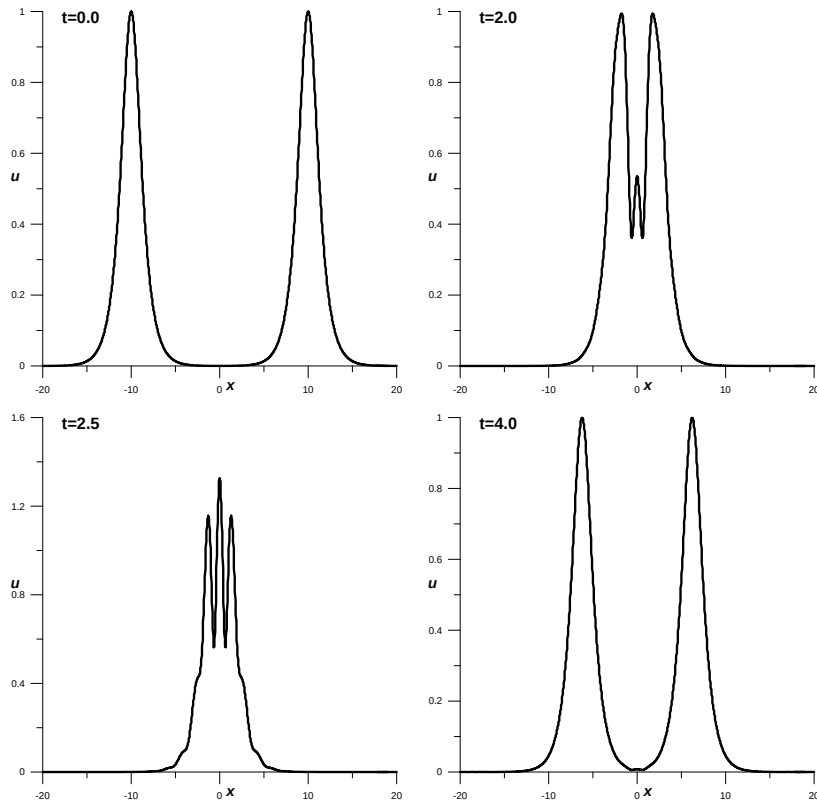
Şekil 2.2:  $\alpha = 1$ ,  $q = 2$ ,  $N = 1334$ ,  $\Delta t = 0.005$ ,  $\lambda = -0.00152$  için soliton dalga çözümleri

Şekil 2.2’de, aynı parametreler için program farklı zamanlarda çalıştırılarak sayısal çözümün modülü, reel ve sanal kısımları grafiklerle gösterilmiştir. Grafiklerden görüldüğü gibi  $t = 0$  zamanında tepe noktası  $x = 0$  konumunda olan dalga,  $t = 4$  aına kadar soldan sağa doğru şekli bozulmadan ilerlemekte ve tepe noktası  $x = 16$

civarına kadar gelmektedir. Ayrıca dalgaların genlikleri de 1 civarında kalmış, gözle görülür bir değişme olmamıştır. Dolayısıyla genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yönteminin, genliği 1 olan orijinal dalgayı iyi şekilde modellediği söylenebilir.

### 2.3.2 İki soliton dalgasının çarpışması

Şekil 2.3’de dalgaların birbirine karşı hareketleri, çarpışmaları ve orijinal şekillerini koruyarak ayrılmaları gösterilmiştir. Grafiklerden, soldaki dalganın sağa doğru, sağdaki dalganın sola doğru ilerlemekte oldukları,  $t = 2$  civarında başlayan çarpışmanın yaklaşık  $t = 4$  zamanına kadar devam ettiği, çarpışmadan sonra dalgaların birbirlerine zıt yönlerde ve başlangıçtaki şekilleri bozulmadan ilerlemeye devam ettikleri görülmektedir.



Şekil 2.3.  $\alpha = 1, q = 2, \lambda = -0.00152$ . için iki soliton dalgasının çarpışması

Tablo 2.2’de korunum sabitlerinin seçilen zamanlardaki değerleri gösterilmiştir. Mevcut parametre seçimlerine göre korunum sabitlerinin analitik değerleri  $C_1 = 4$ ,

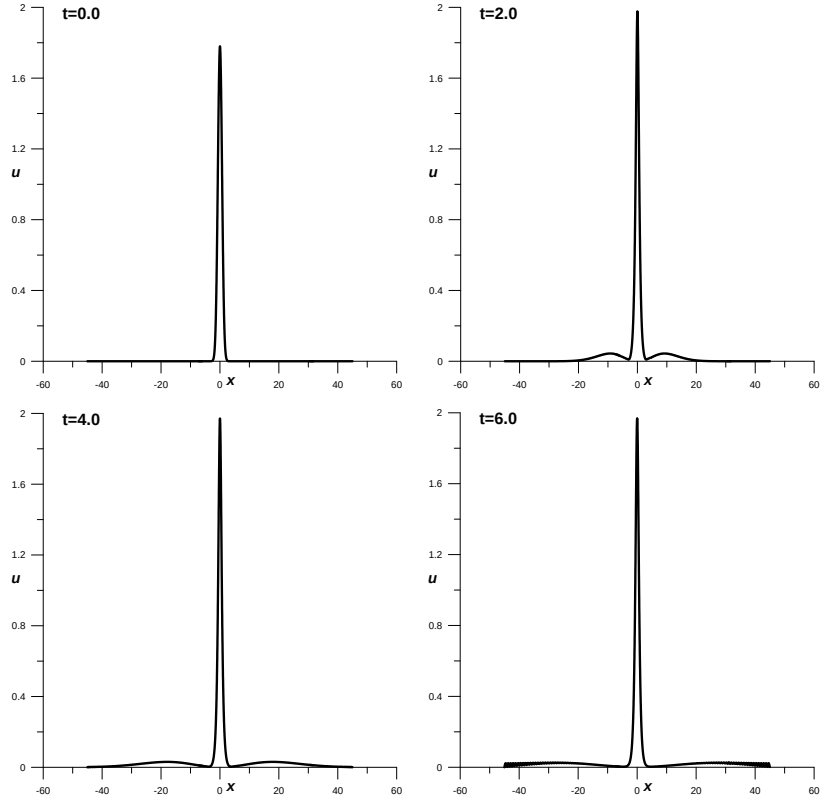
$C_2 = 14.66666$  olarak hesaplanmıştır. Tablo 2.2'den de görüldüğü gibi  $C_1$ ,  $\lambda = 0$  ve  $\lambda = -0.00152$  durumları için,  $t = 2.5$  zamanı dışında, sabit kalmakta;  $C_2$  ise genelde analitik değerine yakın sonuçlar vermektedir.

Tablo 2.2 : İki soliton dalgasının çarpışması

| $\lambda = 0$        |         |          |       |         |          |
|----------------------|---------|----------|-------|---------|----------|
| Zaman                | $C_1$   | $C_2$    | Zaman | $C_1$   | $C_2$    |
| 0.0                  | 4.00000 | 14.66669 | 3.5   | 4.00000 | 14.66667 |
| 0.5                  | 4.00000 | 14.66667 | 4.0   | 4.00000 | 14.66667 |
| 1.0                  | 4.00000 | 14.66665 | 4.5   | 4.00000 | 14.66666 |
| 1.5                  | 4.00000 | 14.66667 | 5.0   | 4.00000 | 14.66666 |
| 2.0                  | 4.00000 | 14.66665 | 5.5   | 4.00000 | 14.66664 |
| 2.5                  | 4.00000 | 14.66180 | 6.0   | 4.00000 | 14.66669 |
| 3.0                  | 4.00000 | 14.66667 |       |         |          |
| $\lambda = -0.00152$ |         |          |       |         |          |
| Zaman                | $C_1$   | $C_2$    | Zaman | $C_1$   | $C_2$    |
| 0.0                  | 4.00000 | 14.66666 | 3.5   | 4.00000 | 14.66668 |
| 0.5                  | 4.00000 | 14.66667 | 4.0   | 4.00000 | 14.66668 |
| 1.0                  | 4.00000 | 14.66666 | 4.5   | 4.00000 | 14.66667 |
| 1.5                  | 4.00000 | 14.66667 | 5.0   | 4.00000 | 14.66666 |
| 2.0                  | 4.00000 | 14.66671 | 5.5   | 4.00000 | 14.66666 |
| 2.5                  | 4.00000 | 14.66572 | 6.0   | 4.00000 | 14.66674 |
| 3.0                  | 4.00000 | 14.66670 |       |         |          |

### 2.3.3 Sabit soliton dalgasının doğuşu

$A = 1.78 > \sqrt{\pi} = 1.7725$  için, üretilen soliton dalgaları Şekil 2.4 de görülmektedir.  $A = 1.78$  seçimiyle genliği 2 değerini alan soliton dalgasının, farklı zamanlarda çizilen grafikleri incelendiğinde şeklinde bir miktar bozulma olduğu, genliğinde ise  $t = 0$  zamanı dışında gözle görülür bir bozulma olmadığı söylenebilir.



Şekil 2.4  $\alpha = 1, q = 2, A = 1.78, N = 1334, \lambda = -0.00152$ . için sabit soliton dalgasının doğuşu

Analitik değerleri aşağıda verilen korunum sabitlerinin sayısal değerleri Tablo 2.3’de verilmiştir. Tablo 2.3’den de görüldüğü gibi  $C_1$ ,  $\lambda = 0$  ve  $\lambda = -0.00152$  durumları için birbirlerine ve analitik çözüme yakın değerler vermekte,  $C_2$  ise  $\lambda = -0.00152$  olması durumunda,  $\lambda = 0$  durumundaki değerlere göre analitik çözüme daha yakın sonuçlar vermektedir.

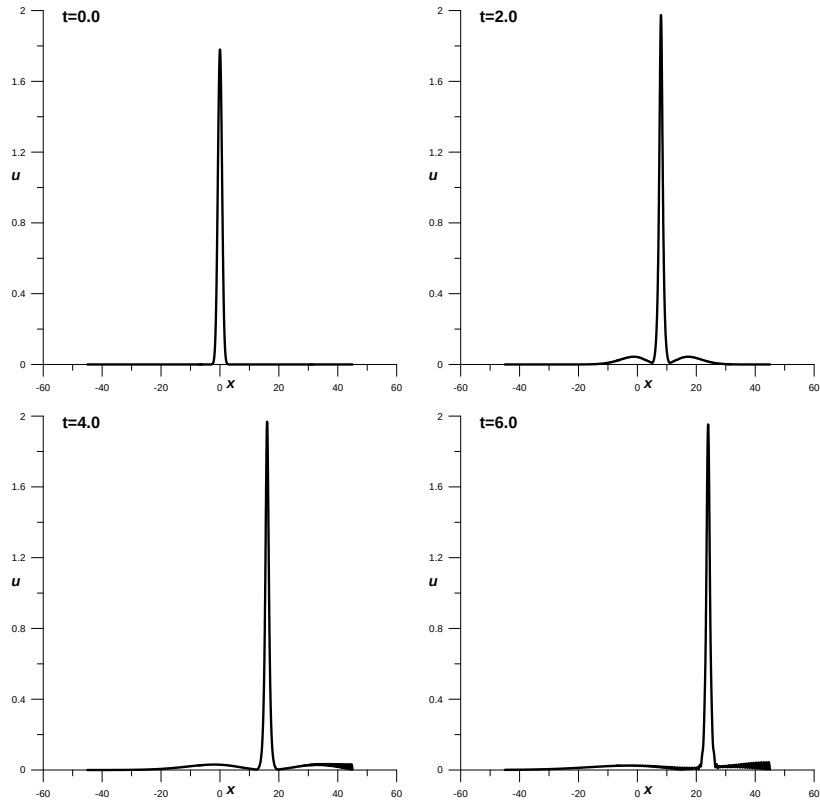
$$C_1 = (1.78)^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 3.97100,$$

$$C_2 = \frac{1}{4} A^2 (2\sqrt{2} - qA^2) \sqrt{\pi} = -4.92562$$

Tablo 2.3 :  $h = 0.03$ ,  $\Delta t = 0.005$ ,  $A = 1.78$ ,  $N = 1334$  için sabit soliton dalgasının doğuşu

| $\lambda = 0$        |         |          |       |         |          |
|----------------------|---------|----------|-------|---------|----------|
| Zaman                | $C_1$   | $C_2$    | Zaman | $C_1$   | $C_2$    |
| 0.0                  | 3.97100 | -4.92562 | 4.0   | 3.97094 | -4.92596 |
| 2.0                  | 3.97093 | -4.92662 | 6.0   | 3.97093 | -4.92672 |
| $\lambda = -0.00152$ |         |          |       |         |          |
| Zaman                | $C_1$   | $C_2$    | Zaman | $C_1$   | $C_2$    |
| 0.0                  | 3.97100 | -4.92562 | 4.0   | 3.97093 | -4.92566 |
| 2.0                  | 3.97093 | -4.92557 | 6.0   | 3.97093 | -4.92566 |

### 2.3.4 Hareketli soliton dalgasının doğuşu



Şekil 2.5  $\alpha = 1$ ,  $q = 2$ ,  $A = 1.78$ ,  $\lambda = -0.00152$ ,  $N = 1334$  için hareketli soliton dalgasının doğuşu

Hareketli soliton dalgasının  $t = 0.0, 2.0, 4.0, 6.0$  zamanlarında çizilen grafikleri Şekil 2.5’de verilmiştir. Grafikler incelendiğinde soliton dalgasının  $t = 0$  anında tepe noktasının  $x = 0$ ’da olduğu, zaman arttıkça dalganın sağa doğru ilerlediği,  $t = 6$  zamanına gelindiğinde dalganın tepe noktasının  $x = 23$  civarına geldiği, dalganın genliğinin ve şeklinin çok fazla bozulmadığı görülecektir.

Korunum sabitlerinin değerleri Tablo 2.4’de verilmiştir. Tabloya göre  $\lambda = 0$  durumunda ve  $\lambda = -0.00152$  seçilmesi durumunda  $C_1$  değerinin sabit kaldığı, buna karşın  $C_2$  değerlerinin değişiklik gösterdiği söylenebilir.

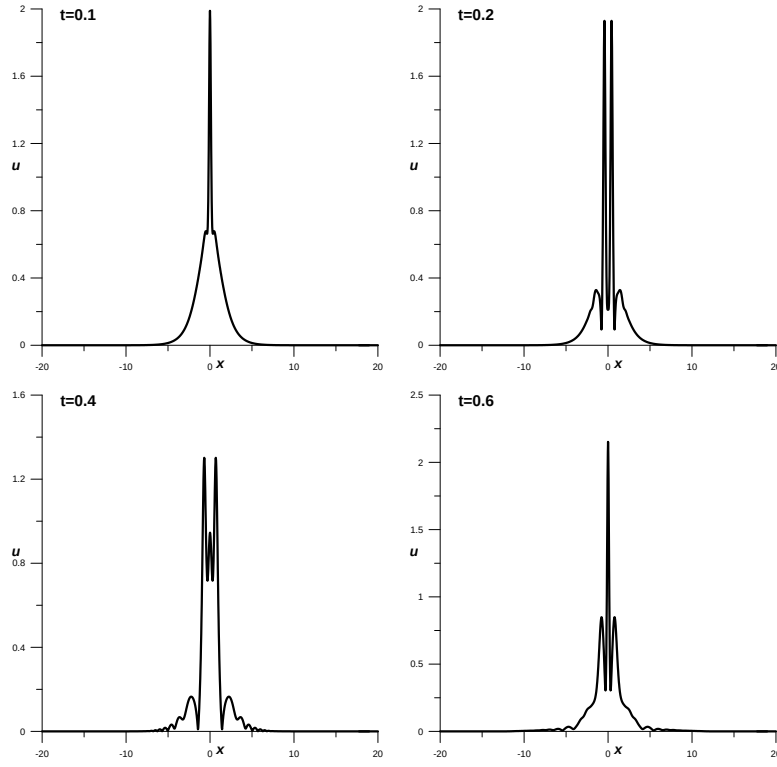
Tablo 2.4:  $h = 0.03$ ,  $\Delta t = 0.005$ ,  $A = 1.78$  için hareketli soliton dalgasının doğuşu

| $\lambda = 0$ |         |          | $\lambda = -0.00152$ |         |          |
|---------------|---------|----------|----------------------|---------|----------|
| Zaman         | $C_1$   | $C_2$    | Zaman                | $C_1$   | $C_2$    |
| 0             | 3.97100 | 10.95837 | 0                    | 3.97100 | 10.95338 |
| 2             | 3.97086 | 10.95611 | 2                    | 3.97086 | 10.95716 |
| 4             | 3.97087 | 10.95432 | 4                    | 3.97087 | 10.95534 |
| 6             | 3.97087 | 10.95524 | 6                    | 3.97087 | 10.95625 |

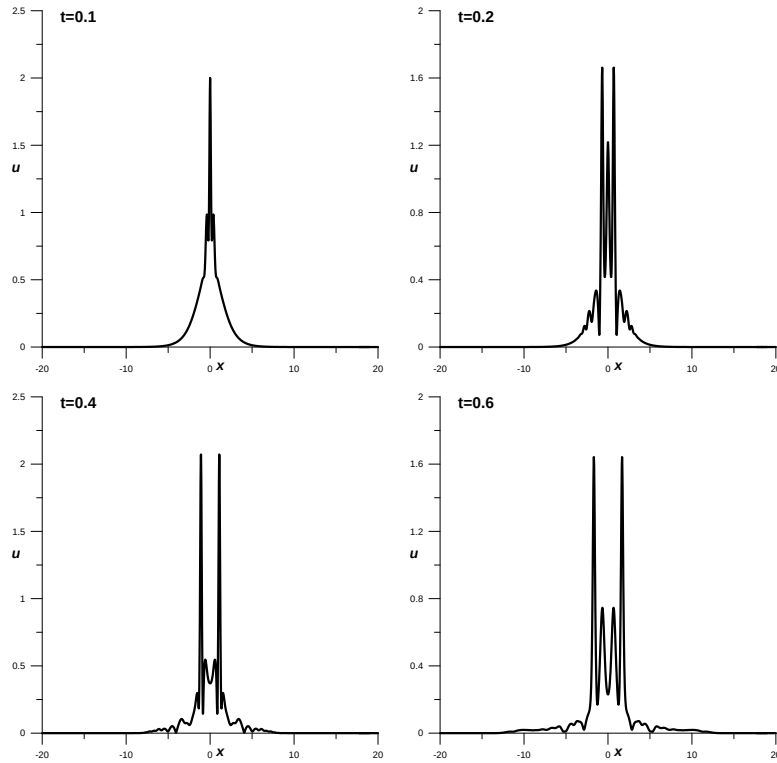
### 2.3.5 Bağlı durumlu solitonlar

$M = 4$  olması durumunda oluşan grafikler Şekil 2.6’da,  $M = 5$  olması durumunda oluşan grafikler Şekil 2.7’de gösterilmiştir.





Şekil 2.6  $M = 4, q = 32$  için  $|\text{sech}(x)|$



Şekil 2.7  $M = 5, q = 50$  için  $|\text{sech}(x)|$

(1.65) başlangıç şartı seçimiyle analitik değerleri  $C_1 = 2, C_2 = \frac{2}{3}(1 - q)$  olarak hesaplanan korunum sabitlerinin sayısal değerleri Tablo 2.5 ve Tablo 2.6'da verilmiştir. Tablolara göre  $C_1$  değerleri sabit kalmakta,  $C_2$  değerleri ise zaman arttıkça değişiklik göstermektedir.

Tablo 2.5:  $h = 0.03, \Delta t = 0.005, q = 32$  için korunum sabitleri

| $\lambda = 0$  |       |         | $\lambda = 0.0123$ |       |         |
|----------------|-------|---------|--------------------|-------|---------|
| Zaman          | $C_1$ | $C_2$   | Zaman              | $C_1$ | $C_2$   |
| 0              | 2     | -20.667 | 0                  | 2     | -20.667 |
| 1              | 2     | -20.612 | 1                  | 2     | -20.667 |
| 2              | 2     | -20.631 | 2                  | 2     | -20.664 |
| 3              | 2     | -20.536 | 3                  | 2     | -20.475 |
| 4              | 2     | -20.531 | 4                  | 2     | -20.369 |
| 5              | 2     | -20.503 | 5                  | 2     | -20.486 |
| Analitik değer | 2     | -20.667 | Analitik değer     | 2     | -20.667 |

Tablo 2.6:  $h = 0.03, \Delta t = 0.005, q = 50$  için korunum sabitleri

| $\lambda = 0$  |       |         | $\lambda = 0.07654$ |       |         |
|----------------|-------|---------|---------------------|-------|---------|
| Zaman          | $C_1$ | $C_2$   | Zaman               | $C_1$ | $C_2$   |
| 0              | 2     | -32.667 | 0                   | 2     | -32.667 |
| 1              | 2     | -31.160 | 1                   | 2     | -32.667 |
| 2              | 2     | -31.457 | 2                   | 2     | -32.738 |
| 3              | 2     | -31.401 | 3                   | 2     | -32.769 |
| 4              | 2     | -31.390 | 4                   | 2     | -32.780 |
| 5              | 2     | -31.452 | 5                   | 2     | -32.748 |
| Analitik değer | 2     | -32.667 | Analitik değer      | 2     | -32.667 |

## 2.4 Sonuç

Bu bölümde, NLS denkleminin sayısal çözümünü araştırmak için, genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yöntemi kullanılmıştır. NLS denklemi reel ve sanal kısımlarına ayrıldıktan sonra iki denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilmiştir. Zaman ayrışımı için Taylor seri açılımı, konum ayrışımı içinse genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin metodu kullanılmıştır. Elde edilen denklem sistemi  $2N + 2$  denklem,  $2N + 6$  bilinmeyenden oluşmaktadır. Denklemin çözülebilmesi için denklem sayısı ile bilinmeyen sayısının eşit olması gerektiğinden, NLS denkleminin sınır şartları kullanılarak bazı bilinmeyenler elimine edilerek sistem çözülebilir hale getirilmiştir. Daha sonra da Thomas algoritması kullanılarak çözüme gidilmiştir.

Nümerik çözümlerin doğruluğu test problemleriyle kontrol edilmiştir. Nümerik çözümler, serbest parametre olan  $\lambda$  nın sıfıra eşit olduğu ve sıfırdan farklı olduğu değerler için ayrı ayrı hesaplanmış ve bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır.  $\lambda$  değeri sıfıra eşit alındığında yöntemimiz kübik B-spline kolokeyşin yöntemiyle aynı sonuçları vermektedir. Dolayısıyla farklı test problemleri ve farklı parametreler için kübik B-spline kolokeyşin yöntemiyle, genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yöntemi arasında karşılaştırma yapma imkanına kavuşulmuştur.

İlk test problemi olan solitary dalga çözümünde,  $\lambda = -0.00152$  için elde edilen hata normlarının değerlerinde,  $\lambda = 0$  durumundakine göre küçülme olduğu, dolayısıyla genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yönteminin, kübik B-spline kolokeyşin yöntemine göre biraz daha doğru sonuçlar verdiği söylenebilir. Analitik ve nümerik çözümleri daha iyi kıyaslayabilmek için çizilen hata grafiklerine bakıldığında, oluşan maksimum hatanın o anda oluşan dalganın tepe noktasına karşılık gelen konum değeri civarında olduğu gözlemlenmiştir. Grafiklere bakıldığında, soliton dalgasının zaman içerisinde şeklinde ciddi bir bozulma olmadan ilerlediği, yani genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yönteminin, dalganın hareketini iyi modellediği görülmüştür. Korunum sabitlerinin sayısal değerleri incelendiğinde ise genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yönteminin, kübik B-spline kolokeyşin yöntemi ile birbirine yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.

İkinci test problemi olarak, iki soliton dalgasının çarpışması problemi alınmıştır.

Çizilen grafikler incelendiğinde, dalgaların çarpışma öncesindeki şekillerini çarpışma sonrasında da büyük oranda korudukları görülmüştür. Yani yöntemimizin bu test problemini de iyi bir şekilde modellediği söylenebilir. Korunum sabitlerinin değerleri incelendiğinde ise, genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yönteminin, kübik B-spline kolokeyşin yöntemine göre analitik değerlere biraz daha yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.

Üçüncü test problemi olarak soliton dalgasının doğuşu incelenmiştir. Grafikler incelendiğinde zaman ilerledikçe dalganın şeklini büyük oranda koruduğu, korunum sabitlerinin değerleri incelendiğinde ise, genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yönteminin, kübik B-spline kolokeyşin yöntemine göre,  $C_2$  sabiti için, analitik değere daha yakın sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

Dördüncü test problemi olarak alınan, hareketli soliton dalgasının doğuşu problemine ait olan grafikler incelendiğinde, zaman ilerledikçe dalganın şeklini büyük oranda koruduğu; korunum sabitlerinin değerleri incelendiğinde ise, her iki yöntemde de  $C_1$  değerinin zaman ilerledikçe, analitik çözüme yakın olan değerini koruduğu,  $C_2$  değerlerinin ise değişkenlik gösterdiği tespit edilmiştir.

Beşinci test problemi olarak, bağlı durumlu solitonlar alınmıştır.  $\lambda$  nın sıfırdan farklı olduğu hallerde korunum sabitlerinin, analitik değerlerine daha yakın değerler aldığı, yani genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yönteminin, kübik B-spline kolokeyşin yöntemine göre, problemi daha iyi modellediği söylenebilir.

## BÖLÜM 3

### KB VE RB DENKLEM SİSTEMLERİNİN GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK B-SPLİNE TAYLOR KOLOKEYŞİN YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde KB ve RB denklem sistemlerinin, B-spline kolokeyşin metoduyla sayısal çözümleri araştırılmış, bulunan çözümlerin doğruluğu, ikişer adet test problemi için  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları hesaplanarak kontrol edilmiştir.

#### 3.1 KB Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü İçin Genişletilmiş Kübik B-spline Taylor Kolokeyşin Metodu

##### 3.1.1 Zaman ayrışımı

(1.69-1.70) denklem sistemi

$$v_t + u_x + (vu)_x = 0, \quad (3.1)$$

$$\left(u - \frac{1}{3}u_{xx}\right)_t + v_x + uu_x = 0. \quad (3.2)$$

şeklinde düzenlenir ve

$$p = u - \frac{1}{3}u_{xx} \quad (3.3)$$

seçilirse

$$v_t + u_x + (vu)_x = 0, \quad (3.4)$$

$$p_t + v_x + uu_x = 0. \quad (3.5)$$

şeklinde bir sisteme dönüştür.  $v^{n+1}$  ve  $p^{n+1}$  terimleri aşağıdaki şekilde Taylor serisine açılırsa

$$v^{n+1} = v^n + \Delta t (v_t)^n + \frac{\Delta t^2}{2} (v_{tt})^n + O(\Delta t^3) \quad (3.6)$$

$$p^{n+1} = p^n + \Delta t (p_t)^n + \frac{\Delta t^2}{2} (p_{tt})^n + O(\Delta t^3) \quad (3.7)$$

elde edilir. (3.6-3.7) eşitliklerinde  $v_{tt}^n$  ve  $p_{tt}^n$  ifadelerinin yerine

$$v_{tt}^n \approx \frac{(v_t)^{n+1} - (v_t)^n}{\Delta t}, \quad (3.8)$$

$$p_{tt}^n \approx \frac{(p_t)^{n+1} - (p_t)^n}{\Delta t} \quad (3.9)$$

yaklaşımları yazılıp gerekli düzenlemeler yapılır ve  $O(\Delta t^3)$  terimi ihmal edilirse

$$v^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} (v_t)^{n+1} = v^n + \frac{\Delta t}{2} (v_t)^n \quad (3.10)$$

$$p^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} (p_t)^{n+1} = p^n + \frac{\Delta t}{2} (p_t)^n \quad (3.11)$$

eşitliklerine ulaşılır. (3.10-3.11) eşitliklerinde sırasıyla  $p$  yerine (3.3) ifadesindeki eşiti,  $v_t$  ve  $p_t$  yerine de (3.4-3.5) ifadelerindeki eşitleri yazılıp gereken düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} & v^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} (1 + v^{n+1}) u_x^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} u^{n+1} v_x^{n+1} \\ &= v^n - \frac{\Delta t}{2} (1 + v^n) u_x^n - \frac{\Delta t}{2} u^n v_x^n \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} & u^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} u^{n+1} u_x^{n+1} - \frac{1}{3} u_{xx}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} v_x^{n+1} \\ &= u^n - \frac{\Delta t}{2} u u_x^n - \frac{1}{3} u_{xx}^n - \frac{\Delta t}{2} v_x^n \end{aligned} \quad (3.13)$$

şeklinde zaman ayrışımı yapılmış olan KB denklem sistemi elde edilir.

### 3.1.2 Konum ayrışımı

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{4 - \lambda}{24}, & a_2 &= \frac{8 + \lambda}{12}, & a_3 &= a_1, & b_1 &= -\frac{1}{2h}, \\ b_3 &= \frac{1}{2h}, & c_1 &= \frac{2 + \lambda}{2h^2}, & c_2 &= -\frac{2 + \lambda}{h^2}, & c_3 &= c_3. \end{aligned}$$

ve  $\delta_m = \rho_m + i\sigma_m$  olmak üzere,  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  fonksiyonları sırasıyla  $\rho_m$  ve  $\sigma_m$  parametreleri cinsinden yazılırsa

$$\begin{aligned} u_m^n &= a_1 \rho_{m-1}^n + a_2 \rho_m^n + a_3 \rho_{m+1}^n, \\ v_m^n &= a_1 \sigma_{m-1}^n + a_2 \sigma_m^n + a_3 \sigma_{m+1}^n, \\ (u_x)_m^n &= b_1 \rho_{m-1}^n + b_3 \rho_{m+1}^n, \\ (v_x)_m^n &= b_1 \sigma_{m-1}^n + b_3 \sigma_{m+1}^n, \\ (u_{xx})_m^n &= c_1 \rho_{m-1}^n + c_2 \rho_m^n + c_3 \rho_{m+1}^n, \\ (v_{xx})_m^n &= c_1 \sigma_{m-1}^n + c_2 \sigma_m^n + c_3 \sigma_{m+1}^n, \end{aligned} \quad (3.14)$$

elde edilir. (3.12-3.13) denklem sisteminde (3.14) değerleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \xi_{m1} &= v^n - \frac{\Delta t}{2} (1 + v^n) u_x^n - \frac{\Delta t}{2} u^n v_x^n \\ \xi_{m2} &= u^n - \frac{\Delta t}{2} u u_x^n - \frac{1}{3} u_{xx}^n - \frac{\Delta t}{2} v_x^n \end{aligned} \quad (3.15)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \rho_{m-1}^{n+1} \left( b_1 \frac{\Delta t}{2} (1 + v^{n+1}) \right) + \sigma_{m-1}^{n+1} \left( a_1 + b_1 \frac{\Delta t}{2} u^{n+1} \right) + \\ & \rho_m^{n+1} (0) + \sigma_m^{n+1} (a_2) + \\ & \rho_{m+1}^{n+1} \left( b_3 \frac{\Delta t}{2} (1 + v^{n+1}) \right) + \sigma_{m+1}^{n+1} \left( a_3 + b_3 \frac{\Delta t}{2} u^{n+1} \right) = \xi_{m1} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} & \rho_{m-1}^{n+1} \left( a_1 + b_1 \frac{\Delta t}{2} u^{n+1} - \frac{1}{3} c_1 \right) + \sigma_{m-1}^{n+1} \left( b_1 \frac{\Delta t}{2} \right) + \\ & \rho_m^{n+1} \left( a_2 - \frac{1}{3} c_2 \right) + \sigma_m^{n+1} (0) + \\ & \rho_{m+1}^{n+1} \left( a_3 + b_3 \frac{\Delta t}{2} u^{n+1} - \frac{1}{3} c_3 \right) + \sigma_{m+1}^{n+1} \left( b_3 \frac{\Delta t}{2} \right) = \xi_{m2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

denklem sistemi elde edilir. (3.16-3.17) denklem sistemi  $2N + 2$  denklem  $2N + 6$  bilinmeyenden oluşmaktadır. Sistemin çözülebilir olması için, denklem sayısı ve bilinmeyen sayısının eşit olması gerektiğinden,  $\rho_{-1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-1}^{n+1}$ ,  $\rho_{N+1}^{n+1}$  ve  $\sigma_{N+1}^{n+1}$  parametreleri sınır şartları kullanılarak yok edilmelidir. Buna göre, (1.74-1.76) sınır şartlarından

$$\begin{aligned} u(x_0, t) &= u_0 = a_1 \rho_{-1}^{n+1} + a_2 \rho_0^{n+1} + a_3 \rho_1^{n+1}, \\ v(x_0, t) &= v_0 = a_1 \sigma_{-1}^{n+1} + a_2 \sigma_0^{n+1} + a_3 \sigma_1^{n+1}, \\ u(x_N, t) &= u_N = a_1 \rho_{N-1}^{n+1} + a_2 \rho_N^{n+1} + a_3 \rho_{N+1}^{n+1}, \\ v(x_N, t) &= v_N = a_1 \sigma_{N-1}^{n+1} + a_2 \sigma_N^{n+1} + a_3 \sigma_{N+1}^{n+1} \end{aligned}$$

yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\rho_{-1}^{n+1} = \frac{1}{a_1} (u_0 - a_2 \rho_0^{n+1} - a_3 \rho_1^{n+1}), \quad (3.18)$$

$$\sigma_{-1}^{n+1} = \frac{1}{a_1} (v_0 - a_2 \sigma_0^{n+1} - a_3 \sigma_1^{n+1}), \quad (3.19)$$

$$\rho_{N+1}^{n+1} = \frac{1}{a_3} (u_N - a_2 \rho_N^{n+1} - a_1 \rho_{N-1}^{n+1}), \quad (3.20)$$

$$\sigma_{N+1}^{n+1} = \frac{1}{a_3} (v_N - a_2 \sigma_N^{n+1} - a_1 \sigma_{N-1}^{n+1}) \quad (3.21)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.16-3.17) denklem sisteminde  $\rho_{-1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-1}^{n+1}$ ,  $\rho_{N+1}^{n+1}$  ve  $\sigma_{N+1}^{n+1}$  parametreleri yerine, (3.18-3.21) eşitlikleri kullanıldığında denklem ve bilinmeyen sayıları

$2N + 2$  olur. Böylece (3.16-3.17) denklemleri  $x_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$  bölünme noktalarında

$$\begin{aligned}
a_{00} &= b_1 \frac{\Delta t}{2} (1 + v^{n+1}), \\
a_{01} &= a_1 + b_1 \frac{\Delta t}{2} u^{n+1}, \\
a_{02} &= 0, \\
a_{03} &= a_2, \\
a_{04} &= b_3 \frac{\Delta t}{2} (1 + v^{n+1}), \\
a_{05} &= a_3 + b_3 \frac{\Delta t}{2} u^{n+1}, \\
a_{10} &= a_1 + b_1 \frac{\Delta t}{2} u^{n+1} - \frac{1}{3} c_1, \\
a_{11} &= b_1 \frac{\Delta t}{2}, \\
a_{12} &= a_2 - \frac{1}{3} c_2, \\
a_{13} &= 0, \\
a_{14} &= a_3 + b_3 \frac{\Delta t}{2} u^{n+1} - \frac{1}{3} c_3, \\
a_{15} &= b_3 \frac{\Delta t}{2}
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$m = 0$  için

$$\begin{aligned}
&\left(a_{02} - a_{00} \frac{a_2}{a_1}\right) \rho_0^{n+1} + \left(a_{04} - a_{00} \frac{a_3}{a_1}\right) \rho_1^{n+1} + \left(a_{03} - a_{01} \frac{a_2}{a_1}\right) \sigma_0^{n+1} \\
&+ \left(a_{05} - a_{01} \frac{a_3}{a_1}\right) \sigma_1^{n+1} = \xi_{m1} - a_{00} \frac{1}{a_1} r_0^n - a_{01} \frac{1}{a_1} s_0^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(a_{12} - a_{10} \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \rho_0^{n+1} + \left(a_{14} - a_{10} \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) \rho_1^{n+1} + \left(a_{13} - a_{11} \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \sigma_0^{n+1} \\
&+ \left(a_{15} - a_{11} \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) \sigma_1^{n+1} = \xi_{m2} - a_{10} \frac{1}{\alpha_1} r_0^n - a_{11} \frac{1}{\alpha_1} s_0^n
\end{aligned}$$

$m = 1$  için

$$a_{00} \rho_0^{n+1} + a_{01} \sigma_0^{n+1} + a_{02} \rho_1^{n+1} + a_{03} \sigma_1 + a_{04} \rho_2 + a_{05} \sigma_2 = \xi_{m1},$$



$$\begin{aligned}
a_{10}\rho_0^{n+1} + a_{11}\sigma_0^{n+1} + a_{12}\rho_1^{n+1} + a_{13}\sigma_1^{n+1} + a_{14}\rho_2^{n+1} + a_{15}\sigma_2^{n+1} &= \xi_{m2}, \\
&\vdots \\
&\quad (3.22)
\end{aligned}$$

$m = N - 1$  için

$$a_{00}\rho_{N-2}^{n+1} + a_{01}\sigma_{N-2}^{n+1} + a_{02}\rho_{N-1}^{n+1} + a_{03}\sigma_{N-1}^{n+1} + a_{04}\rho_N^{n+1} + a_{05}\sigma_N^{n+1} = \xi_{m1},$$

$$a_{10}\rho_{N-2}^{n+1} + a_{11}\sigma_{N-2}^{n+1} + a_{12}\rho_{N-1}^{n+1} + a_{13}\sigma_{N-1}^{n+1} + a_{14}\rho_N^{n+1} + a_{15}\sigma_N^{n+1} = \xi_{m2}$$

$m = N$  için

$$\begin{aligned}
&\left(a_{N-1,0} - a_{N-1,4}\frac{a_1}{a_3}\right)\rho_{N-1}^{n+1} + \left(a_{N-1,1} - a_{N-1,5}\frac{a_1}{a_3}\right)\sigma_{N-1}^{n+1} + \\
&\left(a_{N-1,2} - a_{N-1,4}\frac{a_2}{a_3}\right)\rho_N^{n+1} + \left(a_{N-1,3} - a_{N-1,5}\frac{a_2}{a_3}\right)\sigma_N^{n+1} \\
&= \xi_{m1} - a_{N-1,4}\frac{1}{\alpha_3}r_N^n - a_{N-1,5}\frac{1}{\alpha_3}s_N^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(a_{N0} - a_{N4}\frac{a_1}{a_3}\right)\rho_{N-1}^{n+1} + \left(a_{N1} - a_{N5}\frac{a_1}{a_3}\right)\sigma_{N-1}^{n+1} + \\
&\left(a_{N2} - a_{N4}\frac{a_2}{a_3}\right)\rho_N^{n+1} + \left(a_{N3} - a_{N5}\frac{a_2}{a_3}\right)\sigma_N^{n+1} \\
&= \xi_{m2} - a_{N4}\frac{1}{a_3}r_N^n - a_{N5}\frac{1}{a_3}s_N^n
\end{aligned}$$

formunda açık olarak yazılabilir. (3.22) denklem sistemi  $2N + 2$  denklem,  $2N + 2$  bilinmeyenden oluşan 6 sütun elemanlı bir sistemdir ve Thomas algoritması kullanılarak çözülebilir. Thomas algoritmasının kullanılabilmesi için sistem lineer olmalıdır. Lineerleştirme için (2.21) ile verilen iterasyon bağıntısı kullanılmıştır.

(2.21) bağıntısı her zaman adımında iki kez uygulanarak  $(\delta_i^*)^{n+1}$  parametresi hesaplanmış ve  $\delta^{n+1}$  parametresinin  $n + 1$ . zaman adımındaki değeri için yeni bir yaklaşım yapılmıştır. Bu işlem programın çalışması bitene kadar tekrarlanmıştır.

KB denkleminin genişletilmiş B-spline kolokeyşin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen (3.22) denklem sisteminin çözülebilmesi için,

$$(\rho_{-1}^0, \rho_0^0, \dots, \rho_N^0, \rho_{N+1}^0) \text{ ve } (\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \dots, \sigma_N^0, \sigma_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörlerinin bulunması gereklidir.

### 3.1.3 Başlangıç durumu

Başlangıç vektörleri, (1.78 ve 1.79) başlangıç şartları ile bulunabilir. Bunun için (1.26) yaklaşık çözümü,  $t = 0$  zamanında

$$u_m(x, 0) = u_m = \sum_{m=-1}^{N+1} E_m(x) \rho_m^0, \quad (3.23)$$

$$v_m(x, 0) = v_m = \sum_{m=-1}^{N+1} E_m(x) \sigma_m^0 \quad (3.24)$$

formunda yazılır. (3.23-3.24) eşitliklerinde,  $u_m(x, 0)$  ve  $v_m(x, 0)$  değerleri, (1.78 ve 1.79) başlangıç şartlarından bilindiğinden,  $\rho_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  değerleri bulunabilir.

İlk olarak, (3.23) eşitliği açık olarak yazılırsa  $N + 3$  bilinmeyen ve  $N + 1$  denklemden oluşan

$$\begin{aligned} \rho_{-1}^0 + 4\rho_0^0 + \rho_1^0 &= u_0, \\ \rho_0^0 + 4\rho_1^0 + \rho_2^0 &= u_1, \\ &\vdots \\ \rho_{N-1}^0 + 4\rho_N^0 + \rho_{N+1}^0 &= u_N \end{aligned} \quad (3.25)$$

sistemine ulaşılır. (1.75) sınır şartlarından

$$\begin{aligned} u'(x_0, 0) &= u'_0 = b_1 \rho_{-1}^0 + b_3 \rho_1^0, \\ \rho_{-1}^0 &= \frac{1}{b_1} (u'_0 - b_3 \rho_1^0) \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} u'(x_N, 0) &= u'_N = b_1 \rho_{N-1}^0 + b_3 \rho_{N+1}^0, \\ \rho_{N+1}^0 &= \frac{1}{b_3} (u'_N - b_1 \rho_{N-1}^0) \end{aligned} \quad (3.27)$$

yazılarak,  $\rho_{-1}^0$  ve  $\rho_{N+1}^0$  bilinmeyenleri (3.25) sisteminden yok edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{bmatrix} a_2 & \left(a_3 - a_1 \frac{b_3}{b_1}\right) & & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & & & \\ & a_1 & a_2 & a_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_1 & a_2 & a_3 \\ & & & & a_1 & a_2 & a_3 \\ & & & & & \left(a_1 - a_3 \frac{b_1}{b_3}\right) & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_0^0 \\ \rho_1^0 \\ \rho_2^0 \\ \vdots \\ \rho_{N-2}^0 \\ \rho_{N-1}^0 \\ \rho_N^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 - \frac{a_1}{b_1} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N - \frac{a_3}{b_3} u_N \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

matris sistemine ulaşılır. Bu sistem Thomas algoritması ile çözüldüğünde

$$\rho_0^0, \rho_1^0, \dots, \rho_{N-1}^0, \rho_N^0$$

bilinmeyenleri ve bu değerlerin (3.26-3.27) eşitliklerinde kullanılması ile de  $\rho_{-1}^0$  ve  $\rho_{N+1}^0$  bilinmeyenleri hesaplanmış olur. Böylece  $\rho$  parametresi için

$$(\rho_{-1}^0, \rho_0^0, \dots, \rho_N^0, \rho_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörü elde edilir.

Benzer şekilde, (3.24) eşitliği açık olarak

$$\begin{aligned} \sigma_{-1}^0 + 4\sigma_0^0 + \sigma_1^0 &= v_0, \\ \sigma_0^0 + 4\sigma_1^0 + \sigma_2^0 &= v_1, \\ &\vdots \\ \sigma_{N-1}^0 + 4\sigma_N^0 + \sigma_{N+1}^0 &= v_N \end{aligned} \quad (3.29)$$

şeklinde yazıldığında  $N + 3$  bilinmeyen ve  $N + 1$  denklemden oluşan bir sistem elde edilir.  $\sigma_{-1}^0$  ve  $\sigma_{N+1}^0$  bilinmeyenleri, (1.77) sınır şartlarından

$$\begin{aligned} v'(x_0, 0) &= v'_0 = b_1 \sigma_{-1}^0 + b_3 \sigma_1^0, \\ \sigma_{-1}^0 &= \frac{1}{b_1} \left( v'_0 - b_3 \sigma_1^0 \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} v'(x_N, 0) &= v'_N = b_1 \sigma_{N-1}^0 + b_3 \sigma_{N+1}^0, \\ \sigma_{N+1}^0 &= \frac{1}{b_3} \left( v'_N - b_1 \sigma_{N-1}^0 \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

şeklinde hesaplanır ve (3.24) sisteminde yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılsa

$$\begin{bmatrix} a_2 & \left(a_3 - a_1 \frac{b_3}{b_1}\right) & & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & & & \\ & a_1 & a_2 & a_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_1 & a_2 & a_3 \\ & & & & a_1 & a_2 & a_3 \\ & & & & & \left(a_1 - a_3 \frac{b_1}{b_3}\right) & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0^0 \\ \sigma_1^0 \\ \sigma_2^0 \\ \vdots \\ \sigma_{N-2}^0 \\ \sigma_{N-1}^0 \\ \sigma_N^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 - \frac{a_1}{b_1} v_0' \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} \\ v_N - \frac{a_3}{b_3} v_N' \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

matris sistemine ulaşılır. Bu sistem Thomas algoritması ile çözülürse

$$\sigma_0^0, \sigma_1^0, \dots, \sigma_{N-1}^0, \sigma_N^0$$

bilinmeyenleri ve (3.30-3.31) eşitliklerinin de kullanılmasıyla  $\sigma_{-1}^0$  ve  $\sigma_{N+1}^0$  değerleri bulunur. Böylece  $\sigma$  parametresi için

$$(\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \dots, \sigma_N^0, \sigma_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörü hesaplanmış olur.

Başlangıç şartının kullanılmasıyla elde edilen başlangıç vektörleri sayesinde,  $n = 0$  için (3.22) denklem sisteminin sağ tarafındaki tüm değerler artık bilinmektedir. Sol kısımdaki bilinmeyenler ise, Thomas algoritması ile hesaplanabilir. Sonraki zaman adımlarında, bir önceki zamanda bulunan değerlerin kullanılmasıyla, istenilen zamandaki KB denkleminin sayısal çözümüne ulaşılan kadar iterasyona devam edilir.

### 3.1.4 Test problemleri

#### 3.1.4.1 İlerleyen dalga çözümü

(1.81) ilerleyen dalga çözümü; genliği 1, hızı 1/3 olan, tepe noktası  $x = 0$  noktasına karşılık gelen bir ilerleyen dalganın soldan sağa doğru hareketini modellemektedir. Program,  $-20 \leq x \leq 30$  konum aralığında,  $N = 1000$  ve çeşitli  $\Delta t$

değerleri için  $t = 5$  zamanına kadar çalıştırılmış,  $v(x, t)$  ve  $u(x, t)$  değerlerinin sayısal sonuçları bulunarak, Tablo 3.1 ve Tablo 3.2’de hata normlarının değerleri verilmiştir. Tablo 3.1’den görüldüğü gibi  $\lambda$  nın farklı değerleri seçildiğinde  $\Delta t = 0.005$  için hata normlarının değerlerinde azalma olmakta, diğer zaman adımı seçimlerinde ise hemen hemen aynı gelmektedir.

Tablo 3.1:  $v_m$  için  $N = 1000$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

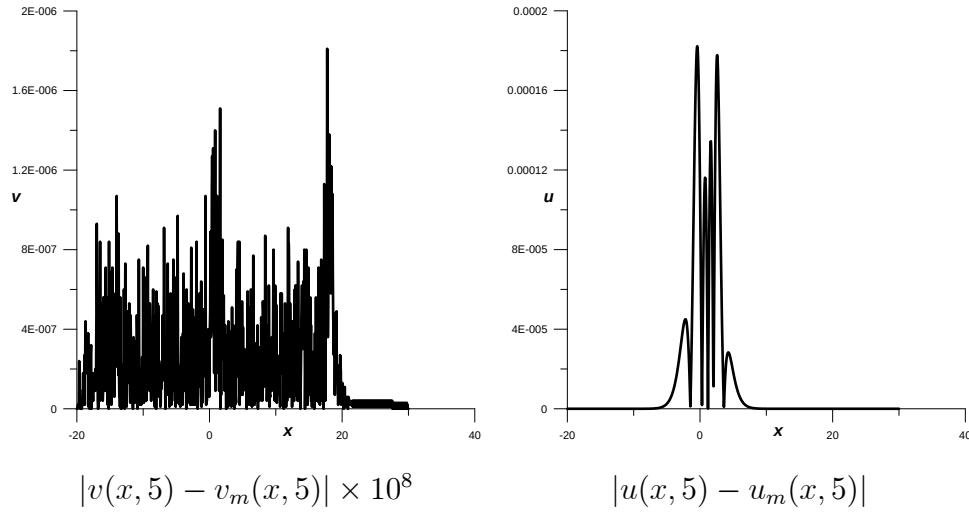
| $\lambda$ | $\Delta t$ | $L_2 \times 10^5$ | $L_\infty \times 10^5$ | $\lambda$ | $\Delta t$ | $L_2 \times 10^5$ | $L_\infty \times 10^5$ |
|-----------|------------|-------------------|------------------------|-----------|------------|-------------------|------------------------|
| 0         | 0.5        | 0.000000          | 0.000000               | -0.0332   | 0.5        | 0.000000          | 0.000000               |
| 0         | 0.05       | 0.000000          | 0.000000               | -0.00197  | 0.05       | 0.000000          | 0.000000               |
| 0         | 0.005      | 0.000006          | 0.000002               | -0.0017   | 0.005      | 0.000000          | 0.000000               |

Tablo 3.2 incelendiğinde ise  $\lambda$  nın farklı değerler alması durumunda hata normlarının değerlerinde fazla değişme olmadığı, yani genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yönteminin, kübik B-spline kolokeyşin yöntemi ile yakın sonuçlar verdiği söylenebilir.

Tablo 3.2:  $u_m$  için  $N = 1000$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

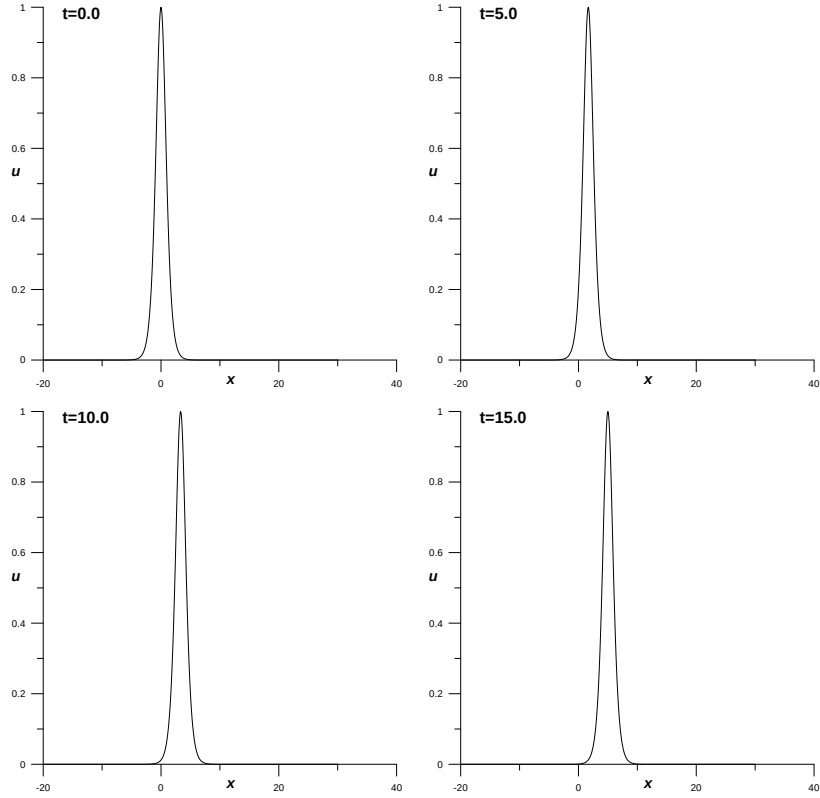
| $\lambda$ | $\Delta t$ | $L_2 \times 1000$ | $L_\infty \times 1000$ | $\lambda$ | $\Delta t$ | $L_2 \times 1000$ | $L_\infty \times 1000$ |
|-----------|------------|-------------------|------------------------|-----------|------------|-------------------|------------------------|
| 0         | 0.5        | 10.310526         | 9.915176               | -0.0339   | 0.5        | 3.182846          | 2.279022               |
| 0         | 0.05       | 0.642989          | 0.631048               | -0.00197  | 0.05       | 0.289269          | 0.206695               |
| 0         | 0.005      | 0.560242          | 0.551502               | -0.0017   | 0.005      | 0.254152          | 0.182177               |

Şekil 3.1’de tam çözüm ile sayısal çözüm arasındaki farkın modülü grafiklerle gösterilmiştir. Hata grafikleri  $v(x, t)$  ve  $u(x, t)$  çözümleri için ayrı ayrı verilmiştir. Şekil 3.1’de  $v$  ve  $u$  ile analitik çözümler,  $v_m$  ve  $u_m$  ile de sayısal çözümler gösterilmektedir. Şekilden maksimum hatanın,  $v(x, t)$  fonksiyonu için  $1.8 \times 10^{-6}$ ,  $u(x, t)$  fonksiyonu için  $1.8 \times 10^{-4}$  olduğu görülebilir.



Şekil 3.1:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.005$ ,  $\lambda = -0.0017$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  için  $t = 5$  zamanındaki Mutlak Hata= $|\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$

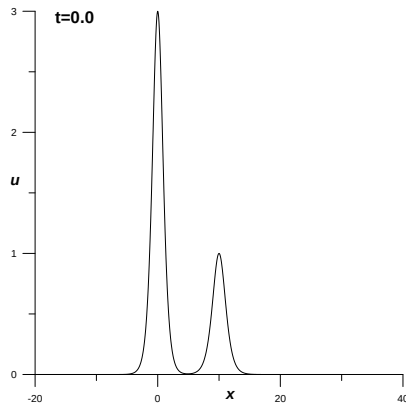
Şekil 3.2’de,  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.005$  ve  $\lambda = -0.0017$  için,  $-20 \leq x \leq 30$  konum aralığında,  $t = 0.0, t = 5.0, t = 10.0, t = 15.0$  zamanlarında elde edilen ilerleyen dalga çözümleri verilmiştir.  $v(x, t)$ ,  $-1$  sabitine eşit olduğu için grafiği çizilmemiştir. Grafikte görüldüğü gibi,  $t = 0$  anında tepe noktası  $x = 0$  konumunda olacak şekilde harekete başlayan bir dalga,  $t = 15$  zamanında tepe noktası  $x = 5$  civarında olacak şekilde bir bozulma olmadan  $x$  ekseninde soldan sağa doğru hareket etmektedir.



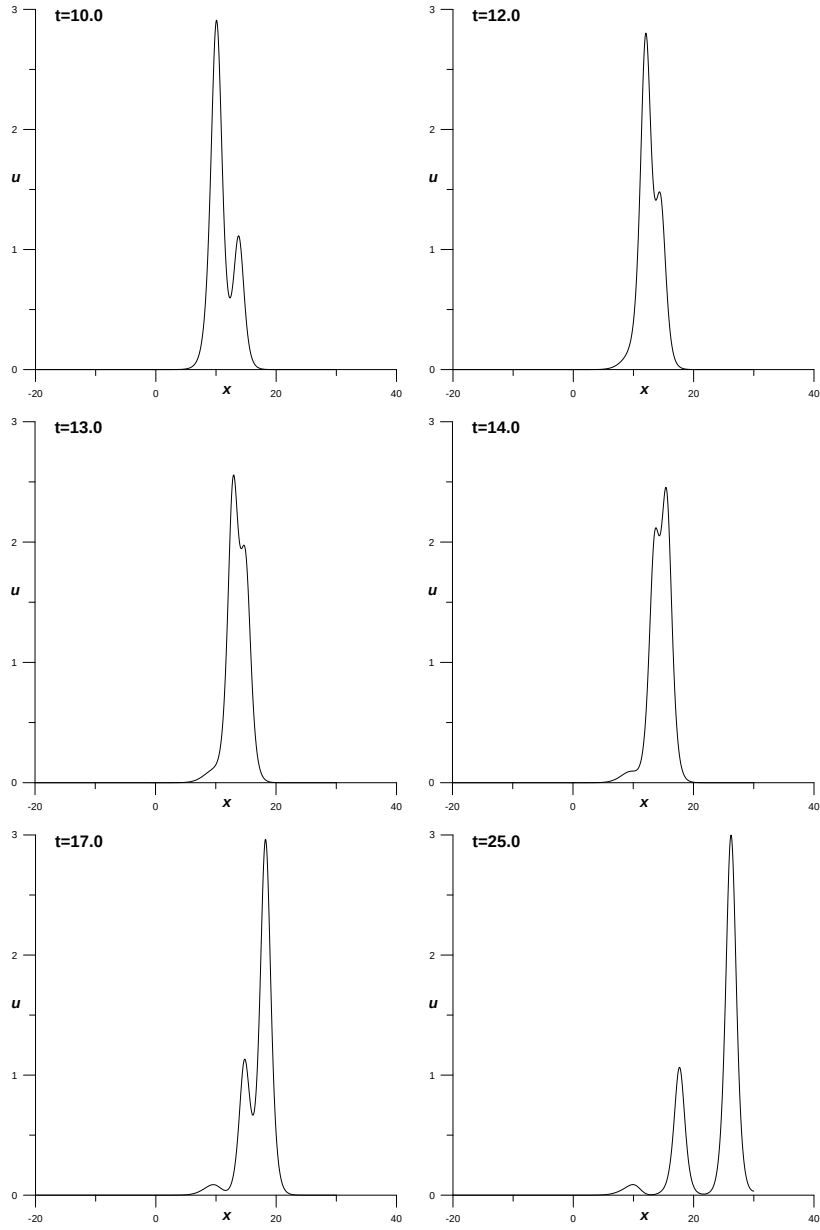
Şekil 3.2  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.005$  ve  $\lambda = -0.0017$ ,  $-20 \leq x \leq 30$  için sayısal çözümler

#### 3.1.4.2 İki ilerleyen dalganın çarpışması

(1.93) ile verilen başlangıç şartı Şekil 3.3'de çizilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi, genlik değeri 3 olan büyük dalganın tepe noktası  $x = 0$  konumuna ve genlik değeri 1 olan küçük dalganın tepe noktası ise  $x = 10$  konumuna karşılık gelmektedir.



Şekil 3.3:  $t = 0$  anında dalgaların durumu



Şekil 3.4:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.005$ ,  $\lambda = -0.0017$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  için ilerleyen iki dalganın çarpışması

Şekil 3.4,  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.005$  ve  $\lambda = -0.0017$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  değerleri için,  $t = 10.0, t = 12.0, t = 13.0, t = 14.0, t = 17.0, t = 25.0$  zamanlarında ilerleyen iki dalganın çarpışmasını göstermektedir. Şekil 3.4’de görüldüğü gibi, aynı yönde harekete başlayan iki dalgadan, hızlı olanın öndeki olan yavaş dalgaya yetişmesi ile çarpışma başlamış ve bir süre sonra hızlı dalganın öne geçmesi ile de çarpışma sona ermiştir. Aynı zamanda dalgaların şekillerinde ve genliklerinde, çarpışma öncesi ve



çarpışma sonrasında ciddi bir bozulma olmadığı da görülmektedir.

### 3.2 RB Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü İçin Genişletilmiş Kübik B-spline Taylor Kolokeyşin Metodu

#### 3.2.1 Zaman ayrışımı

(1.72-1.73) denklem sistemi

$$\left(v - \frac{1}{6}v_{xx}\right)_t + u_x + (vu)_x = 0, \quad (3.33)$$

$$\left(u - \frac{1}{6}u_{xx}\right)_t + v_x + uu_x = 0. \quad (3.34)$$

şeklinde düzenlenir ve

$$k = v - \frac{1}{6}v_{xx} \quad (3.35)$$

$$l = u - \frac{1}{6}u_{xx} \quad (3.36)$$

seçilirse

$$k_t + u_x + (vu)_x = 0, \quad (3.37)$$

$$l_t + v_x + uu_x = 0. \quad (3.38)$$

şeklinde bir sisteme dönüşür.  $k^{n+1}$  ve  $l^{n+1}$  terimleri aşağıdaki şekilde Taylor serisine açılırsa

$$k^{n+1} = k^n + \Delta t (k_t)^n + \frac{\Delta t^2}{2} (k_{tt})^n + O(\Delta t^3) \quad (3.39)$$

$$l^{n+1} = l^n + \Delta t (l_t)^n + \frac{\Delta t^2}{2} (l_{tt})^n + O(\Delta t^3) \quad (3.40)$$

elde edilir. (3.39-3.40) eşitliklerinde  $k_{tt}^n$  ve  $l_{tt}^n$  ifadelerinin yerine

$$k_{tt}^n \approx \frac{(k_t)^{n+1} - (k_t)^n}{\Delta t}, \quad (3.41)$$

$$l_{tt}^n \approx \frac{(l_t)^{n+1} - (l_t)^n}{\Delta t} \quad (3.42)$$

yaklaşımları yazılıp gerekli düzenlemeler yapılır ve  $O(\Delta t^3)$  terimi ihmal edilirse

$$k^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} (k_t)^{n+1} = k^n + \frac{\Delta t}{2} (k_t)^n \quad (3.43)$$

$$l^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} (l_t)^{n+1} = l^n + \frac{\Delta t}{2} (l_t)^n \quad (3.44)$$

eşitliklerine ulaşılır. (3.43-3.44) eşitliklerinde sırasıyla  $k$  ve  $l$  yerine (3.35-3.36) ifadelerindeki eşitleri,  $k_t$  ve  $l_t$  yerine de (3.37-3.38) ifadelerindeki eşitleri yazılıp gereken düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} & u^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} u^{n+1} u_x^{n+1} - \frac{1}{6} u_{xx}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} v_x^{n+1} \\ &= u^n - \frac{\Delta t}{2} u^n u_x^n - \frac{1}{6} u_{xx}^n - \frac{\Delta t}{2} v_x^n \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} & v^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} u^{n+1} v_x^{n+1} - \frac{1}{6} v_{xx}^{n+1} + \left( \frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{2} v^{n+1} \right) u_x^{n+1} \\ &= v^n - \frac{\Delta t}{2} u^n v_x^n - \frac{1}{6} v_{xx}^n - \left( \frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{2} v^n \right) u_x^n \end{aligned} \quad (3.46)$$

şeklinde zaman ayrışımı yapılmış olan RB denklem sistemi elde edilir.

### 3.2.2 Konum ayrışımı

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{4 - \lambda}{24}, & a_2 &= \frac{8 + \lambda}{12}, & a_3 &= a_1, & b_1 &= -\frac{1}{2h}, \\ b_3 &= \frac{1}{2h}, & c_1 &= \frac{2 + \lambda}{2h^2}, & c_2 &= -\frac{2 + \lambda}{h^2}, & c_3 &= c_3. \end{aligned}$$

ve  $\delta_m = \rho_m + i\sigma_m$  olmak üzere,  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  fonksiyonları sırasıyla  $\rho_m$  ve  $\sigma_m$  parametreleri cinsinden yazılırsa

$$\begin{aligned} u_m^n &= a_1 \rho_{m-1}^n + a_2 \rho_m^n + a_3 \rho_{m+1}^n, \\ v_m^n &= a_1 \sigma_{m-1}^n + a_2 \sigma_m^n + a_3 \sigma_{m+1}^n, \\ (u_x)_m^n &= b_1 \rho_{m-1}^n + b_3 \rho_{m+1}^n, \\ (v_x)_m^n &= b_1 \sigma_{m-1}^n + b_3 \sigma_{m+1}^n, \\ (u_{xx})_m^n &= c_1 \rho_{m-1}^n + c_2 \rho_m^n + c_3 \rho_{m+1}^n, \\ (v_{xx})_m^n &= c_1 \sigma_{m-1}^n + c_2 \sigma_m^n + c_3 \sigma_{m+1}^n, \end{aligned} \quad (3.47)$$

elde edilir. (3.45-3.46) denklem sisteminde (3.47) değerleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \xi_{m1} &= u^n - \frac{\Delta t}{2} v_x^n - \frac{\Delta t}{2} u^n u_x^n - \frac{u_{xx}^n}{6} \\ \xi_{m2} &= v^n - \frac{\Delta t}{2} u_x^n - \frac{\Delta t}{2} v^n u_x^n - \frac{\Delta t}{2} v_x^n u^n - \frac{v_{xx}^n}{6} \end{aligned} \quad (3.48)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \rho_{m-1}^{n+1} \left( a_1 + b_1 \frac{\Delta t}{2} u^{n+1} - \frac{c_1}{6} \right) + \sigma_{m-1}^{n+1} \left( \frac{\Delta t}{2} b_1 \right) + \\
& \rho_m^{n+1} \left( a_2 - \frac{c_2}{6} \right) + \sigma_m^{n+1} (0) + \\
& \rho_{m+1}^{n+1} \left( a_3 + b_3 \frac{\Delta t}{2} u^{n+1} - \frac{c_3}{6} \right) + \sigma_{m+1}^{n+1} \left( \frac{\Delta t}{2} b_3 \right) = \xi_{m1}
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
& \rho_{m-1}^{n+1} \left( \frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{2} v^{n+1} \right) b_1 + \sigma_{m-1}^{n+1} \left( a_1 + b_1 \frac{\Delta t}{2} u^{n+1} - \frac{c_1}{6} \right) + \\
& \rho_m^{n+1} (0) + \sigma_m^{n+1} \left( a_2 - \frac{c_2}{6} \right) + \\
& \rho_{m+1}^{n+1} \left( \frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{2} v^{n+1} \right) b_3 + \sigma_{m+1}^{n+1} \left( a_3 + b_3 \frac{\Delta t}{2} u^{n+1} - \frac{c_3}{6} \right) = \xi_{m2}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

denklem sistemi elde edilir. (3.49-3.50) denklem sistemi  $2N + 2$  denklem  $2N + 6$  bilinmeyenden oluşmaktadır. Sistemin çözülebilir olması için, denklem sayısı ve bilinmeyen sayısının eşit olması gerektiğinden,  $\rho_{-1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-1}^{n+1}$ ,  $\rho_{N+1}^{n+1}$  ve  $\sigma_{N+1}^{n+1}$  parametreleri sınır şartları kullanılarak yok edilmelidir. Buna göre, (1.74-1.76) sınır şartlarından

$$\begin{aligned}
u(x_0, t) &= u_0 = a_1 \rho_{-1}^{n+1} + a_2 \rho_0^{n+1} + a_3 \rho_1^{n+1}, \\
v(x_0, t) &= v_0 = a_1 \sigma_{-1}^{n+1} + a_2 \sigma_0^{n+1} + a_3 \sigma_1^{n+1}, \\
u(x_N, t) &= u_N = a_1 \rho_{N-1}^{n+1} + a_2 \rho_N^{n+1} + a_3 \rho_{N+1}^{n+1}, \\
v(x_N, t) &= v_N = a_1 \sigma_{N-1}^{n+1} + a_2 \sigma_N^{n+1} + a_3 \sigma_{N+1}^{n+1}
\end{aligned}$$

yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\rho_{-1}^{n+1} = \frac{1}{a_1} (u_0 - a_2 \rho_0^{n+1} - a_3 \rho_1^{n+1}), \tag{3.51}$$

$$\sigma_{-1}^{n+1} = \frac{1}{a_1} (v_0 - a_2 \sigma_0^{n+1} - a_3 \sigma_1^{n+1}), \tag{3.52}$$

$$\rho_{N+1}^{n+1} = \frac{1}{a_3} (u_N - a_2 \rho_N^{n+1} - a_1 \rho_{N-1}^{n+1}), \tag{3.53}$$

$$\sigma_{N+1}^{n+1} = \frac{1}{a_3} (v_N - a_2 \sigma_N^{n+1} - a_1 \sigma_{N-1}^{n+1}) \tag{3.54}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.49-3.50) denklem sisteminde  $\rho_{-1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-1}^{n+1}$ ,  $\rho_{N+1}^{n+1}$  ve  $\sigma_{N+1}^{n+1}$  parametreleri yerine, (3.51-3.54) eşitlikleri kullanıldığında denklem ve bilinmeyen

sayıları  $2N + 2$  olur. Böylece (3.49-3.50) denklemleri  $x_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$  bölünme noktalarında

$$\begin{aligned}
a_{00} &= a_1 + b_1 \frac{\Delta t}{2} u^{n+1} - \frac{c_1}{6}, \\
a_{01} &= \frac{\Delta t}{2} b_1, \\
a_{02} &= a_2 - \frac{c_2}{6}, \\
a_{03} &= 0, \\
a_{04} &= a_3 + b_3 \frac{\Delta t}{2} u^{n+1} - \frac{c_3}{6}, \\
a_{05} &= \frac{\Delta t}{2} b_3, \\
a_{10} &= \frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{2} v^{n+1}, \\
a_{11} &= a_{00}, \\
a_{12} &= 0, \\
a_{13} &= a_{02}, \\
a_{14} &= a_{10}, \\
a_{15} &= a_{04}
\end{aligned}$$

olmak üzere ,

$m = 0$  için

$$\begin{aligned}
&\left( a_{02} - a_{00} \frac{a_2}{a_1} \right) \rho_0^{n+1} + \left( a_{04} - a_{00} \frac{a_3}{a_1} \right) \rho_1^{n+1} + \left( a_{03} - a_{01} \frac{a_2}{a_1} \right) \sigma_0^{n+1} \\
&+ \left( a_{05} - a_{01} \frac{a_3}{a_1} \right) \sigma_1^{n+1} = \xi_{m1} - a_{00} \frac{1}{a_1} r_0^n - a_{01} \frac{1}{a_1} s_0^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left( a_{12} - a_{10} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \rho_0^{n+1} + \left( a_{14} - a_{10} \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right) \rho_1^{n+1} + \left( a_{13} - a_{11} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \sigma_0^{n+1} \\
&+ \left( a_{15} - a_{11} \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right) \sigma_1^{n+1} = \xi_{m2} - a_{10} \frac{1}{\alpha_1} r_0^n - a_{11} \frac{1}{\alpha_1} s_0^n
\end{aligned}$$

$m = 1$  için

$$a_{00}\rho_0^{n+1} + a_{01}\sigma_0^{n+1} + a_{02}\rho_1^{n+1} + a_{03}\sigma_1 + a_{04}\rho_2 + a_{05}\sigma_2 = \xi_{m1},$$

$$a_{10}\rho_0^{n+1} + a_{11}\sigma_0^{n+1} + a_{12}\rho_1^{n+1} + a_{13}\sigma_1^{n+1} + a_{14}\rho_2^{n+1} + a_{15}\sigma_2^{n+1} = \xi_{m2},$$

$$\vdots \tag{3.55}$$

$m = N - 1$  için

$$a_{00}\rho_{N-2}^{n+1} + a_{01}\sigma_{N-2}^{n+1} + a_{02}\rho_{N-1}^{n+1} + a_{03}\sigma_{N-1}^{n+1} + a_{04}\rho_N^{n+1} + a_{05}\sigma_N^{n+1} = \xi_{m1},$$

$$a_{10}\rho_{N-2}^{n+1} + a_{11}\sigma_{N-2}^{n+1} + a_{12}\rho_{N-1}^{n+1} + a_{13}\sigma_{N-1}^{n+1} + a_{14}\rho_N^{n+1} + a_{15}\sigma_N^{n+1} = \xi_{m2}$$

$m = N$  için

$$\begin{aligned} & \left( a_{N-1,0} - a_{N-1,4} \frac{a_1}{a_3} \right) \rho_{N-1}^{n+1} + \left( a_{N-1,1} - a_{N-1,5} \frac{a_1}{a_3} \right) \sigma_{N-1}^{n+1} + \\ & \left( a_{N-1,2} - a_{N-1,4} \frac{a_2}{a_3} \right) \rho_N^{n+1} + \left( a_{N-1,3} - a_{N-1,5} \frac{a_2}{a_3} \right) \sigma_N^{n+1} \\ = & \xi_{m1} - a_{N-1,4} \frac{1}{\alpha_3} r_N^n - a_{N-1,5} \frac{1}{\alpha_3} s_N^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( a_{N0} - a_{N4} \frac{a_1}{a_3} \right) \rho_{N-1}^{n+1} + \left( a_{N1} - a_{N5} \frac{a_1}{a_3} \right) \sigma_{N-1}^{n+1} + \\ & \left( a_{N2} - a_{N4} \frac{a_2}{a_3} \right) \rho_N^{n+1} + \left( a_{N3} - a_{N5} \frac{a_2}{a_3} \right) \sigma_N^{n+1} \\ = & \xi_{m2} - a_{N4} \frac{1}{a_3} r_N^n - a_{N5} \frac{1}{a_3} s_N^n \end{aligned}$$

formunda açık olarak yazılabilir. (3.55) denklem sistemi  $2N + 2$  denklem,  $2N + 2$  bilinmeyenlerden oluşan 6 sütun elemanlı bir sistemdir ve Thomas algoritması kullanılarak çözülebilir. Thomas algoritmasının kullanılabilmesi için sistem lineer

olmalıdır. Lineerleştirme için (2.21) ile verilen iterasyon bağıntısı kullanılmıştır. (2.21) bağıntısı her zaman adımında iki kez uygulanarak  $(\delta_i^*)^{n+1}$  parametresi hesaplanmış ve  $\delta^{n+1}$  parametresinin  $n + 1$ . zaman adımındaki değeri için yeni bir yaklaşım yapılmıştır. Bu işlem programın çalışması bitene kadar tekrarlanmıştır.

RB denkleminin genişletilmiş B-spline kolokeyşin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen (3.55) denklem sisteminin çözülebilmesi için,

$$(\rho_{-1}^0, \rho_0^0, \dots, \rho_N^0, \rho_{N+1}^0) \text{ ve } (\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \dots, \sigma_N^0, \sigma_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörlerinin bulunması gereklidir.

### 3.2.3 Başlangıç durumu

Başlangıç vektörleri, (1.78 ve 1.79) başlangıç şartları ile bulunabilir. Bunun için (1.26) yaklaşık çözümü,  $t = 0$  zamanında

$$u_m(x, 0) = u_m = \sum_{m=-1}^{N+1} E_m(x) \rho_m^0, \quad (3.56)$$

$$v_m(x, 0) = v_m = \sum_{m=-1}^{N+1} E_m(x) \sigma_m^0 \quad (3.57)$$

formunda yazılır. (3.56-3.57) eşitliklerinde,  $u_m(x, 0)$  ve  $v_m(x, 0)$  değerleri, (3.17 ve 3.18) başlangıç şartlarından bilindiğinden,  $\rho_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  değerleri bulunabilir.

İlk olarak, (3.56) eşitliği açık olarak yazılırsa  $N + 3$  bilinmeyen ve  $N + 1$  denklemden oluşan

$$\begin{aligned} \rho_{-1}^0 + 4\rho_0^0 + \rho_1^0 &= u_0, \\ \rho_0^0 + 4\rho_1^0 + \rho_2^0 &= u_1, \\ &\vdots \\ \rho_{N-1}^0 + 4\rho_N^0 + \rho_{N+1}^0 &= u_N \end{aligned} \quad (3.58)$$

sistemine ulaşılır. (1.75) sınır şartlarından

$$\begin{aligned} u'(x_0, 0) &= u'_0 = b_1 \rho_{-1}^0 + b_3 \rho_1^0, \\ \rho_{-1}^0 &= \frac{1}{b_1} (u'_0 - b_3 \rho_1^0) \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} u'(x_N, 0) &= u'_N = b_1 \rho_{N-1}^0 + b_3 \rho_{N+1}^0, \\ \rho_{N+1}^0 &= \frac{1}{b_3} (u'_N - b_1 \rho_{N-1}^0) \end{aligned} \quad (3.60)$$

yazılarak,  $\rho_{-1}^0$  ve  $\rho_{N+1}^0$  bilinmeyenleri (3.58) sisteminden yok edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{bmatrix} a_2 & \left(a_3 - a_1 \frac{b_3}{b_1}\right) & & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & & & \\ & a_1 & a_2 & a_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_1 & a_2 & a_3 \\ & & & & a_1 & a_2 & a_3 \\ & & & & & \left(a_1 - a_3 \frac{b_1}{b_3}\right) & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_0^0 \\ \rho_1^0 \\ \rho_2^0 \\ \vdots \\ \rho_{N-2}^0 \\ \rho_{N-1}^0 \\ \rho_N^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 - \frac{a_1}{b_1} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N - \frac{a_3}{b_3} u_N \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

matris sistemine ulaşılır. Bu sistem Thomas algoritması ile çözüldüğünde

$$\rho_0^0, \rho_1^0, \dots, \rho_{N-1}^0, \rho_N^0$$

bilinmeyenleri ve bu değerlerin (3.59-3.60) eşitliklerinde kullanılması ile de  $\rho_{-1}^0$  ve  $\rho_{N+1}^0$  bilinmeyenleri hesaplanmış olur. Böylece  $\rho$  parametresi için

$$(\rho_{-1}^0, \rho_0^0, \dots, \rho_N^0, \rho_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörü elde edilir.

Benzer şekilde, (3.42) eşitliği açık olarak

$$\begin{aligned} \sigma_{-1}^0 + 4\sigma_0^0 + \sigma_1^0 &= v_0, \\ \sigma_0^0 + 4\sigma_1^0 + \sigma_2^0 &= v_1, \\ &\vdots \\ \sigma_{N-1}^0 + 4\sigma_N^0 + \sigma_{N+1}^0 &= v_N \end{aligned} \quad (3.62)$$

şeklinde yazıldığında  $N + 3$  bilinmeyen ve  $N + 1$  denklemden oluşan bir sistem elde edilir.  $\sigma_{-1}^0$  ve  $\sigma_{N+1}^0$  bilinmeyenleri, (1.77) sınır şartlarından

$$\begin{aligned} v'(x_0, 0) &= v'_0 = b_1 \sigma_{-1}^0 + b_3 \sigma_1^0, \\ \sigma_{-1}^0 &= \frac{1}{b_1} \left( v'_0 - b_3 \sigma_1^0 \right) \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} v'(x_N, 0) &= v'_N = b_1 \sigma_{N-1}^0 + b_3 \sigma_{N+1}^0, \\ \sigma_{N+1}^0 &= \frac{1}{b_3} \left( v'_N - b_1 \sigma_{N-1}^0 \right) \end{aligned} \quad (3.64)$$

şeklinde hesaplanır ve (3.57) sisteminde yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{bmatrix} a_2 & \left(a_3 - a_1 \frac{b_3}{b_1}\right) & & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & & & \\ & a_1 & a_2 & a_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_1 & a_2 & a_3 \\ & & & & a_1 & a_2 & a_3 \\ & & & & & \left(a_1 - a_3 \frac{b_1}{b_3}\right) & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0^0 \\ \sigma_1^0 \\ \sigma_2^0 \\ \vdots \\ \sigma_{N-2}^0 \\ \sigma_{N-1}^0 \\ \sigma_N^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 - \frac{a_1}{b_1} v_0' \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} \\ v_N - \frac{a_3}{b_3} v_N' \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

matris sistemine ulaşılır. Bu sistem Thomas algoritması ile çözülürse

$$\sigma_0^0, \sigma_1^0, \dots, \sigma_{N-1}^0, \sigma_N^0$$

bilinmeyenleri ve (3.63-3.64) eşitliklerinin de kullanılmasıyla  $\sigma_{-1}^0$  ve  $\sigma_{N+1}^0$  değerleri bulunur. Böylece  $\sigma$  parametresi için

$$(\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \dots, \sigma_N^0, \sigma_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörü hesaplanmış olur.

Başlangıç şartının kullanılmasıyla elde edilen başlangıç vektörleri sayesinde,  $n = 0$  için (3.55) denklem sisteminin sağ tarafındaki tüm değerler artık bilinmektedir. Sol kısımdaki bilinmeyenler ise, Thomas algoritması ile hesaplanabilir. Sonraki zaman adımlarında, bir önceki zamanda bulunan değerlerin kullanılmasıyla, istenilen zamandaki RB denkleminin sayısal çözümüne ulaşılan kadar iterasyona devam edilir.

## 3.2 4 Test problemleri

### 3.2.4.1 İlerleyen dalga çözümü

Program,  $-20 \leq x \leq 30$  konum aralığında,  $N = 1000$  ve çeşitli  $\Delta t$  değerleri için  $t = 5$  zamanına kadar çalıştırılmış,  $v(x, t)$  ve  $u(x, t)$  değerlerinin sayısal sonuçları bulunarak, Tablo 3.3 ve Tablo 3.4'de hata normları verilmiştir. Tablo 3.3'den görüldüğü gibi  $\lambda$  nın farklı değerleri için hata normlarının değerleri hemen hemen



aynı gelmektedir. Yani kübik B-spline kolokeyşin ve genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yöntemleri birbirine yakın doğrulukta sonuçlar vermektedir.

Tablo 3.3:  $v_m$  için  $N = 1000$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

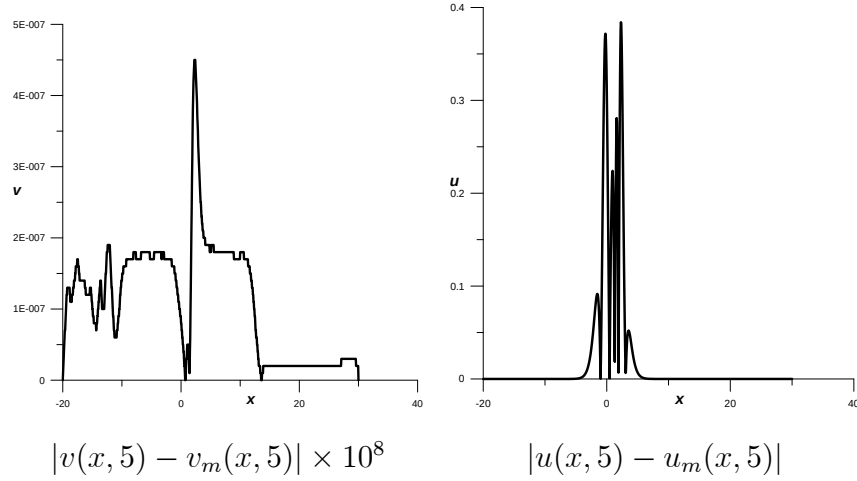
| $\lambda$ | $\Delta t$ | $L_2 \times 10^5$ | $L_\infty \times 10^5$ | $\lambda$ | $\Delta t$ | $L_2 \times 10^5$ | $L_\infty \times 10^5$ |
|-----------|------------|-------------------|------------------------|-----------|------------|-------------------|------------------------|
| 0         | 0.5        | 0.000000          | 0.000000               | -0.0642   | 0.5        | 0.000000          | 0.000000               |
| 0         | 0.05       | 0.000001          | 0.000000               | -0.003627 | 0.05       | 0.000001          | 0.000000               |
| 0         | 0.005      | 0.000006          | 0.000002               | -0.00297  | 0.005      | 0.000007          | 0.000003               |

Tablo 3.4 incelendiğinde ise  $\lambda$  nın farklı değerler alması durumunda hata normlarının değerlerinde ciddi azalmalar olduğu görülmektedir. Bu durumda genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yönteminin, kübik B-spline kolokeyşin yöntemine göre daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Ayrıca zaman adımı küçüldükçe hata normlarının değerlerinin azaldığı da gözlemlenmektedir.

Tablo 3.4:  $u_m$  için  $N = 1000$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

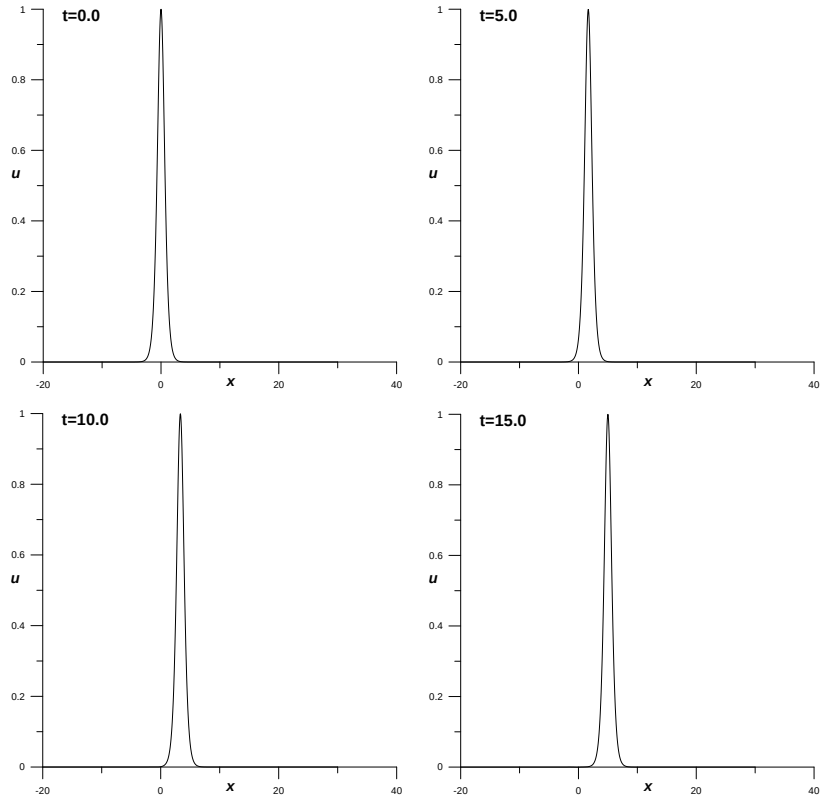
| $\lambda$ | $\Delta t$ | $L_2 \times 1000$ | $L_\infty \times 1000$ | $\lambda$ | $\Delta t$ | $L_2 \times 1000$ | $L_\infty \times 1000$ |
|-----------|------------|-------------------|------------------------|-----------|------------|-------------------|------------------------|
| 0         | 0.5        | 21.938956         | 23.364410              | -0.0642   | 0.5        | 5.740425          | 4.839046               |
| 0         | 0.05       | 1.335463          | 1.435993               | -0.003627 | 0.05       | 0.516358          | 0.439634               |
| 0         | 0.005      | 1.144258          | 1.231550               | -0.00297  | 0.005      | 0.458834          | 0.369655               |

Şekil 3.5’de tam çözüm ile sayısal çözüm arasındaki farkın modülü grafiklerle gösterilmiştir. Hata grafikleri  $v(x, t)$  ve  $u(x, t)$  çözümleri için ayrı ayrı verilmiştir. Şekil 3.5’de  $v$  ve  $u$  ile analitik çözümler,  $v_m$  ve  $u_m$  ile de sayısal çözümler gösterilmektedir. Her iki grafik için de maksimum hatanın, dalgaların tepe noktaları civarında olduğu gözlemlenmiştir.



Şekil 3.5:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.005$ ,  $\lambda = -0.00297$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  için  $t = 5$  zamanındaki Mutlak Hata=|Analitik çözüm – Sayısal çözüm|

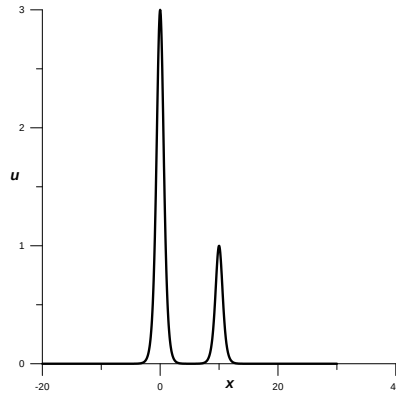
$N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.005$ ,  $\lambda = -0.00297$  için,  $-20 \leq x \leq 30$  konum aralığında,  $t = 0.0; 5.0; 10.0; 15.0$  zamanlarında, elde edilen sayısal çözümler Şekil 3.6’da verilmiştir.



Şekil 3.6  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.005$  ve  $\lambda = -0.00297$ ,  $-20 \leq x \leq 30$  için  $t = 0.0; 5.0; 10.0; 15.0$  anlarındaki sayısal çözümler

Grafikten görüldüğü gibi,  $t = 0$  anında tepe noktası  $x = 0$  konumunda olacak şekilde harekete başlayan bir dalga,  $t = 15$  zamanında tepe noktası  $x = 5$  civarında olacak şekilde,  $x$  ekseninde soldan sağa doğru hareket etmektedir ve şeklinde bir bozulma olmamaktadır.

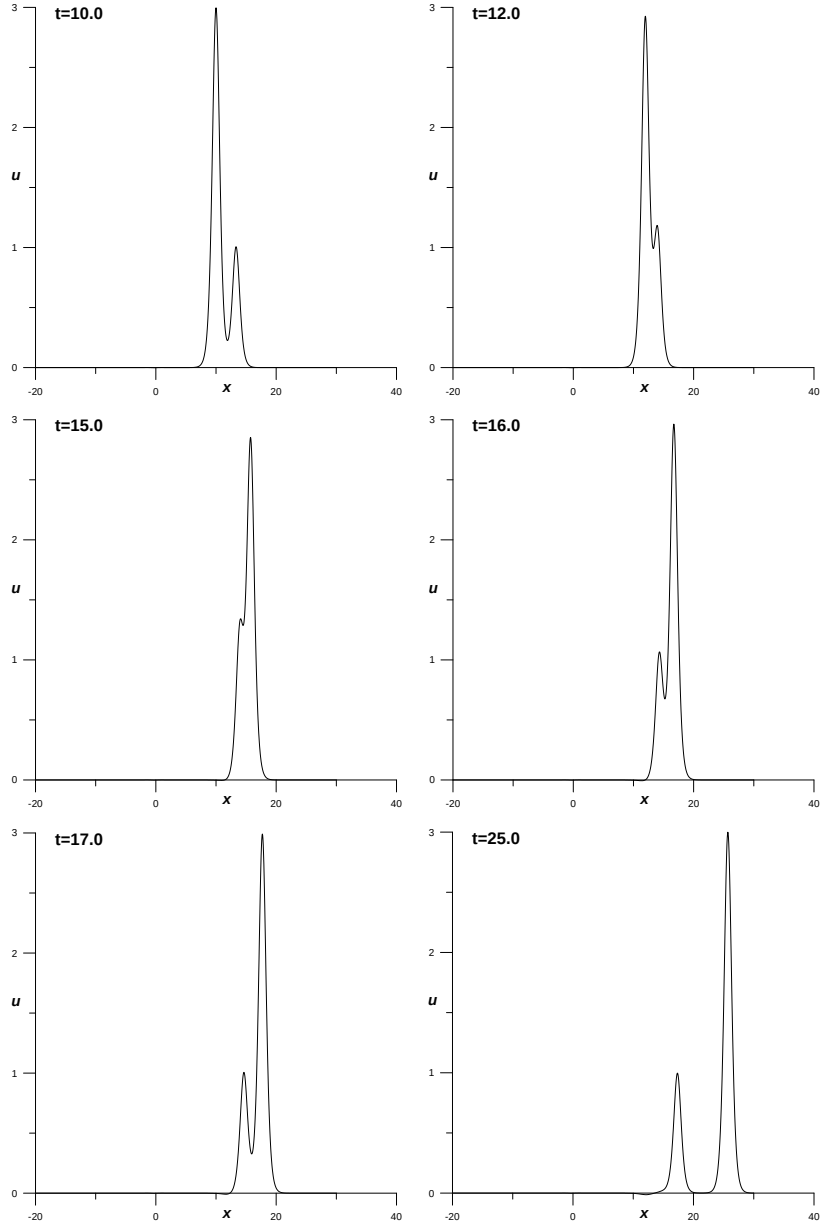
### 3.2.4.2 İki ilerleyen dalganın çarpışması



Şekil 3.7:  $t = 0$  anında dalgaların durumu

Şekil 3.7’de (1.97) ile verilen başlangıç şartı çizilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi, genlik değeri 3 olan büyük dalganın tepe noktası  $x = 0$  konumuna, genlik değeri 1 olan küçük dalganın tepe noktası ise  $x = 10$  konumuna karşılık gelmektedir.

Şekil 3.8,  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.005$ ,  $\lambda = -0.00297$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  değerleri için,  $t = 10.0, t = 12.0, t = 15.0, t = 16.0, t = 17.0, t = 25.0$  zamanlarında ilerleyen iki dalganın çarpışmasını göstermektedir. Şekil 3.8 incelendiğinde dalgaların şekillerinde ve genliklerinde çarpışma öncesi ve çarpışma sonrasında bir bozulma olmadığı görülmektedir.



Şekil 3.8 İlerleyen iki dalganın çarpışması

### 3.3 Sonuç

Bu bölümde, KB ve RB denklem sistemlerinin sayısal çözümünü araştırmak için, genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yöntemi kullanılmıştır. Zaman ayrışımı için Taylor seri açılımı, konum ayrışımı içinse genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin metodu kullanılmıştır. Elde edilen denklem sistemleri  $2N + 2$  denklem  $2N + 6$  bilinmeyenden oluşmaktadır. Denklemlerin çözülebilmesi için denklem sayısı ile

bilinmeyen sayısının eşit olması gerektiğinden, sınır şartları kullanılarak bazı bilinmeyenler elimine edilerek sistemler çözülebilir hale getirilmiştir. Daha sonra da Thomas algoritması kullanılarak çözüme gidilmiştir.

Nümerik çözümlerin doğruluğu test problemleriyle kontrol edilmiştir. Nümerik çözümler, serbest parametre olan  $\lambda$  nın sifıra eşit olduğu ve sıfırdan farklı olduğu değerler için ayrı ayrı hesaplanmış ve bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır.  $\lambda$  değeri sifıra eşit alındığında yöntemimiz kübik B-spline kolokeyşin yöntemiyle aynı sonuçları vermektedir. Dolayısıyla farklı test problemleri ve farklı parametreler için kübik B-spline kolokeyşin yöntemiyle, genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yöntemi arasında karşılaştırma yapma imkanına kavuşulmuştur.

İlk test problemi olan ilerleyen dalga çözümünde, RB denklem sistemi için bulunan sonuçlar incelendiğinde,  $\lambda$  nın sıfırdan farklı değerleri için elde edilen hata normlarının,  $\lambda = 0$  durumundakine göre daha küçük değerler olduğu, dolayısıyla genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yönteminin, kübik B-spline kolokeyşin yöntemine göre daha doğru sonuçlar verdiği görülmüştür. Ancak KB denklem sistemi için elde edilen sonuçlar incelendiğinde, kübik B-spline kolokeyşin yöntemi ve genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yöntemi ile elde edilen sonuçların birbirine yakın olduğu görülmüştür. Hata grafiklerine bakıldığında, RB denklem sistemi için oluşan maksimum hatanın, dalganın tepe noktası civarında olduğu görülmüştür. İlerleyen dalgaları gösteren grafiklere bakıldığında, dalganın zaman içerisinde şeklinde ciddi bir bozulma olmadan ilerlediği, yani genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yönteminin, dalganın hareketini iyi bir şekilde modellediği gözlemlenmiştir.

İkinci test problemi olarak, iki ilerleyen dalganın çarpışması problemi alınmıştır. KB denklem sistemi için ve RB denklem sistemi için, çizilen grafikler incelendiğinde, dalgaların çarpışma öncesindeki şekillerini çarpışma sonrasında da büyük oranda korudukları görülmüştür. Buna göre yöntemimizin bu test problemini de iyi bir şekilde modellediği söylenebilir.

## BÖLÜM 4

### İKİLİ BURGERS DENKLEM SİSTEMİNİN GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK B-SPLINE TAYLOR KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde İkili Burgers denklem sisteminin, B-spline kolokeyşin metoduyla sayısal çözümleri araştırılmış, bulunan çözümlerin doğruluğu, iki test problemi için  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları hesaplanarak kontrol edilmiştir.

#### 4.1 İkili Burgers Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü İçin Genişletilmiş Kübik B-spline Taylor Kolokeyşin Metodu

##### 4.1.1 Zaman ayrışımı

(1.100-1.101) denklem sisteminin zaman ayrışımı için,  $u^{n+1}$  ve  $v^{n+1}$  terimleri Taylor serisine açılırsa

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t (u_t)^n + \frac{\Delta t^2}{2} (u_{tt})^n + O(\Delta t^3) \quad (4.1)$$

$$v^{n+1} = v^n + \Delta t (v_t)^n + \frac{\Delta t^2}{2} (v_{tt})^n + O(\Delta t^3) \quad (4.2)$$

elde edilir. Burada  $O(\Delta t^3)$  daha yüksek mertebeden terimleri göstermektedir ve ihmal edilecektir.  $u_{tt}^n$  ve  $v_{tt}^n$  nin aşağıda verilmiş olan yaklaşık değerleri

$$u_{tt}^n \approx \frac{(u_t)^{n+1} - (u_t)^n}{\Delta t} \quad (4.3)$$

$$v_{tt}^n \approx \frac{(v_t)^{n+1} - (v_t)^n}{\Delta t} \quad (4.4)$$

(4.1) ve (4.2) eşitliklerinde yerlerine yazılırsa

$$u^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} u_t^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{2} u_t^n \quad (4.5)$$

$$v^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} v_t^{n+1} = v^n + \frac{\Delta t}{2} v_t^n \quad (4.6)$$

bulunur. (1.100-1.101) eşitliklerine göre  $u_t$  ve  $v_t$  nin değerleri bulunup (4.5) ve (4.6) de yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & u^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} u_x^{n+1} (\eta u^{n+1} + \alpha v^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2} u_{xx}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \alpha u^{n+1} v_x^{n+1} \\ & = u^n + \frac{\Delta t}{2} (u_{xx} - \eta u u_x - \alpha (uv)_x)^n \end{aligned} \quad (4.7)$$

ve

$$\begin{aligned} & v^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} v_x^{n+1} (\eta v^{n+1} + \beta u^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2} v_{xx}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \beta v^{n+1} u_x^{n+1} \\ &= v^n + \frac{\Delta t}{2} (v_{xx} - \eta v v_x - \beta (uv)_x)^n \end{aligned} \quad (4.8)$$

denklem sistemi elde edilir. Bulunan denklemler (1.100-1.101) denklemlerinin zaman ayrışımı yapılmış halidir.

#### 4.1.2 Konum ayrışımı

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{4 - \lambda}{24}, & a_2 &= \frac{8 + \lambda}{12}, & a_3 &= a_1, & b_1 &= -\frac{1}{2h}, \\ b_3 &= \frac{1}{2h}, & c_1 &= \frac{2 + \lambda}{2h^2}, & c_2 &= -\frac{2 + \lambda}{h^2}, & c_3 &= c_3. \end{aligned}$$

ve  $\delta_m = \rho_m + i\sigma_m$  olmak üzere,  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  fonksiyonları sırasıyla  $\rho_m$  ve  $\sigma_m$  parametreleri cinsinden yazılırsa

$$\begin{aligned} u_m^n &= a_1 \rho_{m-1}^n + a_2 \rho_m^n + a_3 \rho_{m+1}^n, \\ v_m^n &= a_1 \sigma_{m-1}^n + a_2 \sigma_m^n + a_3 \sigma_{m+1}^n, \\ (u_x)_m^n &= b_1 \rho_{m-1}^n + b_3 \rho_{m+1}^n, \\ (v_x)_m^n &= b_1 \sigma_{m-1}^n + b_3 \sigma_{m+1}^n, \\ (u_{xx})_m^n &= c_1 \rho_{m-1}^n + c_2 \rho_m^n + c_3 \rho_{m+1}^n, \\ (v_{xx})_m^n &= c_1 \sigma_{m-1}^n + c_2 \sigma_m^n + c_3 \sigma_{m+1}^n, \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir. (4.9) eşitlikleri, (4.7) ve (4.8) denklemlerinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} \xi_{m1} &= u_m^n + \frac{\Delta t}{2} (u_{xx} - \eta u u_x - \alpha (uv)_x)_m^n \\ \xi_{m2} &= v_m^n + \frac{\Delta t}{2} (v_{xx} - \eta v v_x - \beta (uv)_x)_m^n \end{aligned} \quad (4.10)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & \rho_{m-1}^{n+1} \left( a_1 + b_1 \frac{\Delta t}{2} (\eta u^{n+1} + \alpha v^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2} c_1 \right) + \sigma_{m-1}^{n+1} \left( b_1 \frac{\Delta t}{2} \alpha u^{n+1} \right) + \\ & \rho_m^{n+1} \left( a_2 - \frac{\Delta t}{2} c_2 \right) + \sigma_m^{n+1} (0) + \\ & \rho_{m+1}^{n+1} \left( a_3 + b_3 \frac{\Delta t}{2} (\eta u^{n+1} + \alpha v^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2} c_3 \right) + \sigma_{m+1}^{n+1} \left( b_3 \frac{\Delta t}{2} \alpha u^{n+1} \right) = \xi_{m1} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}
& \rho_{m-1}^{n+1} \left( b_1 \frac{\Delta t}{2} \beta v^{n+1} \right) + \sigma_{m-1}^{n+1} \left( a_1 + b_1 \frac{\Delta t}{2} (\eta v^{n+1} + \beta u^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2} c_1 \right) + \\
& \rho_m^{n+1} (0) + \sigma_m^{n+1} \left( a_2 - \frac{\Delta t}{2} c_2 \right) + \\
& \rho_{m+1}^{n+1} \left( b_3 \frac{\Delta t}{2} \beta v^{n+1} \right) + \sigma_{m+1}^{n+1} \left( a_3 + b_3 \frac{\Delta t}{2} (\eta v^{n+1} + \beta u^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2} c_3 \right) = \xi_{m2}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

denklem sistemi elde edilir. (4.11-4.12) denklem sistemi  $2N + 2$  denklem  $2N + 6$  bilinmeyenden oluşmaktadır. Sistemin çözülebilir olması için, denklem sayısı ve bilinmeyen sayısının eşit olması gerektiğinden,  $\rho_{-1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-1}^{n+1}$ ,  $\rho_{N+1}^{n+1}$  ve  $\sigma_{N+1}^{n+1}$  parametreleri sınır şartları kullanılarak yok edilmelidir. Buna göre, (1.104-1.107) sınır şartlarından

$$\begin{aligned}
u(x_0, t) &= a_1 \rho_{-1}^{n+1} + a_2 \rho_0^{n+1} + a_3 \rho_1^{n+1}, \\
v(x_0, t) &= a_1 \sigma_{-1}^{n+1} + a_2 \sigma_0^{n+1} + a_3 \sigma_1^{n+1}, \\
u(x_N, t) &= a_1 \rho_{N-1}^{n+1} + a_2 \rho_N^{n+1} + a_3 \rho_{N+1}^{n+1}, \\
v(x_N, t) &= a_1 \sigma_{N-1}^{n+1} + a_2 \sigma_N^{n+1} + a_3 \sigma_{N+1}^{n+1}
\end{aligned}$$

yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\rho_{-1}^{n+1} = \frac{1}{a_1} (u(x_0, t) - a_2 \rho_0^{n+1} - a_3 \rho_1^{n+1}), \tag{4.13}$$

$$\sigma_{-1}^{n+1} = \frac{1}{a_1} (v(x_0, t) - a_2 \sigma_0^{n+1} - a_3 \sigma_1^{n+1}), \tag{4.14}$$

$$\rho_{N+1}^{n+1} = \frac{1}{a_3} (u(x_N, t) - a_2 \rho_N^{n+1} - a_1 \rho_{N-1}^{n+1}), \tag{4.15}$$

$$\sigma_{N+1}^{n+1} = \frac{1}{a_3} (v(x_N, t) - a_2 \sigma_N^{n+1} - a_1 \sigma_{N-1}^{n+1}) \tag{4.16}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.11-4.12) denklem sisteminde  $\rho_{-1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-1}^{n+1}$ ,  $\rho_{N+1}^{n+1}$  ve  $\sigma_{N+1}^{n+1}$  parametreleri yerine, (4.13-4.16) eşitlikleri kullanıldığında denklem ve bilinmeyen sayıları  $2N + 2$  olur. Böylece (4.11-4.12) denklemleri,  $x_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$  bölünme noktalarında

$$\begin{aligned}
a_{00} &= a_1 + b_1 \frac{\Delta t}{2} (\eta u^{n+1} + \alpha v^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2} c_1, \\
a_{01} &= b_1 \frac{\Delta t}{2} \alpha u^{n+1},
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
a_{02} &= a_2 - \frac{\Delta t}{2} c_2, \\
a_{03} &= 0, \\
a_{04} &= a_3 + b_3 \frac{\Delta t}{2} (\eta u^{n+1} + \alpha v^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2} c_3, \\
a_{05} &= b_3 \frac{\Delta t}{2} \alpha u^{n+1}, \\
a_{10} &= b_1 \frac{\Delta t}{2} \beta v^{n+1}, \\
a_{11} &= a_{00}, \\
a_{12} &= 0, \\
a_{13} &= a_{02}, \\
a_{14} &= a_{10}, \\
a_{15} &= a_{11}
\end{aligned}$$

olmak üzere ,

$m = 0$  için

$$\begin{aligned}
&\left(a_{02} - a_{00} \frac{a_2}{a_1}\right) \rho_0^{n+1} + \left(a_{04} - a_{00} \frac{a_3}{a_1}\right) \rho_1^{n+1} + \left(a_{03} - a_{01} \frac{a_2}{a_1}\right) \sigma_0^{n+1} \\
&+ \left(a_{05} - a_{01} \frac{a_3}{a_1}\right) \sigma_1^{n+1} = \xi_{m1} - a_{00} \frac{1}{a_1} r_0^n - a_{01} \frac{1}{a_1} s_0^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(a_{12} - a_{10} \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \rho_0^{n+1} + \left(a_{14} - a_{10} \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) \rho_1^{n+1} + \left(a_{13} - a_{11} \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \sigma_0^{n+1} \\
&+ \left(a_{15} - a_{11} \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) \sigma_1^{n+1} = \xi_{m2} - a_{10} \frac{1}{\alpha_1} r_0^n - a_{11} \frac{1}{\alpha_1} s_0^n
\end{aligned}$$

$m = 1$  için

$$a_{00} \rho_0^{n+1} + a_{01} \sigma_0^{n+1} + a_{02} \rho_1^{n+1} + a_{03} \sigma_1 + a_{04} \rho_2 + a_{05} \sigma_2 = \xi_{m1},$$

$$a_{10} \rho_0^{n+1} + a_{11} \sigma_0^{n+1} + a_{12} \rho_1^{n+1} + a_{13} \sigma_1^{n+1} + a_{14} \rho_2^{n+1} + a_{15} \sigma_2^{n+1} = \xi_{m2},$$

$$\vdots \quad (4.17)$$

$m = N - 1$  için

$$a_{00}\rho_{N-2}^{n+1} + a_{01}\sigma_{N-2}^{n+1} + a_{02}\rho_{N-1}^{n+1} + a_{03}\sigma_{N-1}^{n+1} + a_{04}\rho_N^{n+1} + a_{05}\sigma_N^{n+1} = \xi_{m1},$$

$$a_{10}\rho_{N-2}^{n+1} + a_{11}\sigma_{N-2}^{n+1} + a_{12}\rho_{N-1}^{n+1} + a_{13}\sigma_{N-1}^{n+1} + a_{14}\rho_N^{n+1} + a_{15}\sigma_N^{n+1} = \xi_{m2}$$

$m = N$  için

$$\begin{aligned} & \left( a_{N-1,0} - a_{N-1,4} \frac{a_1}{a_3} \right) \rho_{N-1}^{n+1} + \left( a_{N-1,1} - a_{N-1,5} \frac{a_1}{a_3} \right) \sigma_{N-1}^{n+1} + \\ & \left( a_{N-1,2} - a_{N-1,4} \frac{a_2}{a_3} \right) \rho_N^{n+1} + \left( a_{N-1,3} - a_{N-1,5} \frac{a_2}{a_3} \right) \sigma_N^{n+1} \\ & = \xi_{m1} - a_{N-1,4} \frac{1}{\alpha_3} r_N^n - a_{N-1,5} \frac{1}{\alpha_3} s_N^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( a_{N0} - a_{N4} \frac{a_1}{a_3} \right) \rho_{N-1}^{n+1} + \left( a_{N1} - a_{N5} \frac{a_1}{a_3} \right) \sigma_{N-1}^{n+1} + \\ & \left( a_{N2} - a_{N4} \frac{a_2}{a_3} \right) \rho_N^{n+1} + \left( a_{N3} - a_{N5} \frac{a_2}{a_3} \right) \sigma_N^{n+1} \\ & = \xi_{m2} - a_{N4} \frac{1}{a_3} r_N^n - a_{N5} \frac{1}{a_3} s_N^n \end{aligned}$$

formunda açık olarak yazılabilir. (4.17) denklem sistemi  $2N + 2$  denklem,  $2N + 2$  bilinmeyenden oluşan 6 sütun elemanlı bir sistemdir ve Thomas algoritması kullanılarak çözülebilir. Thomas algoritmasının kullanılabilmesi için sistem lineer olmalıdır. Lineerleştirme için (2.21) ile verilen iterasyon bağıntısı kullanılmıştır. (2.21) bağıntısı her zaman adımında iki kez uygulanarak  $(\delta_i^*)^{n+1}$  parametresi hesaplanmış ve  $\delta^{n+1}$  parametresinin  $n + 1$ . zaman adımındaki değeri için yeni bir yaklaşım yapılmıştır. Bu işlem programın çalışması bitene kadar tekrarlanmıştır.

İkili Burgers denkleminin genişletilmiş B-spline kolokeyşin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen (4.17) denklem sisteminin çözülebilmesi için,

$$(\rho_{-1}^0, \rho_0^0, \dots, \rho_N^0, \rho_{N+1}^0) \text{ ve } (\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \dots, \sigma_N^0, \sigma_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörlerinin bulunması gereklidir.

## 4.2 Başlangıç durumu

Başlangıç vektörleri, (1.102 ve 1.103) başlangıç şartları ile bulunabilir. Bunun için (1.26) yaklaşık çözümü,  $t = 0$  zamanında

$$u_m(x, 0) = u_m = \sum_{m=-1}^{N+1} E_m(x) \rho_m^0, \quad (4.18)$$

$$v_m(x, 0) = v_m = \sum_{m=-1}^{N+1} E_m(x) \sigma_m^0 \quad (4.19)$$

formunda yazılır. (4.18-4.19) eşitliklerinde,  $u_m(x, 0)$  ve  $v_m(x, 0)$  değerleri, (1.102 ve 1.103) başlangıç şartlarından bilindiğinden,  $\rho_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  değerleri bulunabilir.

İlk olarak, (4.18) eşitliği açık olarak yazılırsa  $N + 3$  bilinmeyen ve  $N + 1$  denklemden oluşan

$$\begin{aligned} \rho_{-1}^0 + 4\rho_0^0 + \rho_1^0 &= u_0, \\ \rho_0^0 + 4\rho_1^0 + \rho_2^0 &= u_1, \\ &\vdots \\ \rho_{N-1}^0 + 4\rho_N^0 + \rho_{N+1}^0 &= u_N \end{aligned} \quad (4.20)$$

sistemine ulaşılır. Sınır şartlarından

$$\begin{aligned} u'(x_0, 0) &= u'_0 = b_1 \rho_{-1}^0 + b_3 \rho_1^0, \\ \rho_{-1}^0 &= \frac{1}{b_1} (u'_0 - b_3 \rho_1^0) \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} u'(x_N, 0) &= u'_N = b_1 \rho_{N-1}^0 + b_3 \rho_{N+1}^0, \\ \rho_{N+1}^0 &= \frac{1}{b_3} (u'_N - b_1 \rho_{N-1}^0) \end{aligned} \quad (4.22)$$

yazılarak,  $\rho_{-1}^0$  ve  $\rho_{N+1}^0$  bilinmeyenleri (4.20) sisteminden yok edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{bmatrix}
a_2 & \left(a_3 - a_1 \frac{b_3}{b_1}\right) & & & & & \\
a_1 & a_2 & a_3 & & & & \\
& a_1 & a_2 & a_3 & & & \\
& & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
& & & a_1 & a_2 & a_3 & \\
& & & & a_1 & a_2 & a_3 \\
& & & & & \left(a_1 - a_3 \frac{b_1}{b_3}\right) & a_2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\rho_0^0 \\
\rho_1^0 \\
\rho_2^0 \\
\vdots \\
\rho_{N-2}^0 \\
\rho_{N-1}^0 \\
\rho_N^0
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
u_0 - \frac{a_1}{b_1} u_0 \\
u_1 \\
u_2 \\
\vdots \\
u_{N-2} \\
u_{N-1} \\
u_N - \frac{a_3}{b_3} u_N
\end{bmatrix}
\quad (4.23)$$

matris sistemine ulaşılır. Bu sistem Thomas algoritması ile çözüldüğünde

$$\rho_0^0, \rho_1^0, \dots, \rho_{N-1}^0, \rho_N^0$$

bilinmeyenleri ve bu değerlerin (4.21-4.22) eşitliklerinde kullanılması ile de  $\rho_{-1}^0$  ve  $\rho_{N+1}^0$  bilinmeyenleri hesaplanmış olur. Böylece  $\rho$  parametresi için

$$(\rho_{-1}^0, \rho_0^0, \dots, \rho_N^0, \rho_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörü elde edilir.

Benzer şekilde, (4.19) eşitliği açık olarak

$$\begin{aligned}
\sigma_{-1}^0 + 4\sigma_0^0 + \sigma_1^0 &= v_0, \\
\sigma_0^0 + 4\sigma_1^0 + \sigma_2^0 &= v_1, \\
&\vdots \\
\sigma_{N-1}^0 + 4\sigma_N^0 + \sigma_{N+1}^0 &= v_N
\end{aligned}
\quad (4.24)$$

şeklinde yazıldığında  $N + 3$  bilinmeyen ve  $N + 1$  denklemden oluşan bir sistem elde edilir.  $\sigma_{-1}^0$  ve  $\sigma_{N+1}^0$  bilinmeyenleri, sınır şartlarından

$$\begin{aligned}
v'(x_0, 0) &= v'_0 = b_1 \sigma_{-1}^0 + b_3 \sigma_1^0, \\
\sigma_{-1}^0 &= \frac{1}{b_1} (v'_0 - b_3 \sigma_1^0)
\end{aligned}
\quad (4.25)$$

$$\begin{aligned}
v'(x_N, 0) &= v'_N = b_1 \sigma_{N-1}^0 + b_3 \sigma_{N+1}^0, \\
\sigma_{N+1}^0 &= \frac{1}{b_3} (v'_N - b_1 \sigma_{N-1}^0)
\end{aligned}
\quad (4.26)$$

şeklinde hesaplanır ve (4.19) sisteminde yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılsa

$$\begin{bmatrix} a_2 & \left(a_3 - a_1 \frac{b_3}{b_1}\right) & & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & & & \\ & a_1 & a_2 & a_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_1 & a_2 & a_3 \\ & & & & a_1 & a_2 & a_3 \\ & & & & & \left(a_1 - a_3 \frac{b_1}{b_3}\right) & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0^0 \\ \sigma_1^0 \\ \sigma_2^0 \\ \vdots \\ \sigma_{N-2}^0 \\ \sigma_{N-1}^0 \\ \sigma_N^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 - \frac{a_1}{b_1} v_0' \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} \\ v_N - \frac{a_3}{b_3} v_N' \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

matris sistemine ulaşılır. Bu sistem Thomas algoritması ile çözülürse

$$\sigma_0^0, \sigma_1^0, \dots, \sigma_{N-1}^0, \sigma_N^0$$

bilinmeyenleri ve (4.25-4.26) eşitliklerinin de kullanılmasıyla  $\sigma_{-1}^0$  ve  $\sigma_{N+1}^0$  değerleri bulunur. Böylece  $\sigma$  parametresi için

$$(\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \dots, \sigma_N^0, \sigma_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörü hesaplanmış olur.

Başlangıç şartının kullanılmasıyla elde edilen başlangıç vektörleri sayesinde,  $n = 0$  için (4.17) denklem sisteminin sağ tarafındaki tüm değerler artık bilinmektedir. Sol kısımdaki bilinmeyenler ise, Thomas algoritması ile hesaplanabilir. Sonraki zaman adımlarında, bir önceki zamanda bulunan değerlerin kullanılmasıyla, İkili Burgers denkleminin istenilen zamandaki sayısal çözümüne ulaşılana kadar iterasyona devam edilir.

### 4.3 Test Problemleri

#### 4.3.1 Problem 1

Bu test problemi için tüm hesaplamalar  $-\pi \leq x \leq \pi$  aralığında yapılmıştır. Tablo 4.1'de yaklaşık çözümlerin  $N = 200$  ve  $N = 400$  için farklı  $\lambda$  değerlerinde aldığı değerler verilmiştir. Görüldüğü gibi genel olarak adım uzunluğu azaldıkça

hata normlarının değerleri de azalmaktadır. Bunun yanında  $\lambda = -1.64 \times 10^{-4}$  ve  $\lambda = -4.087 \times 10^{-5}$  seçilmesi halinde,  $\lambda = 0$  durumuna göre hata normlarının değerlerinde büyük miktarda azalma görülmektedir. Buna göre genişletilmiş kübik kolokeyşin yönteminin, kübik kolokeyşin yöntemine göre çok daha doğru sonuçlar verdiği söylenebilir. Burada  $u(x, t) = v(x, t)$  olduğu için ikisi de ayrı tabloda gösterilmiştir.

Tablo 4.1  $t = 0.1$ ,  $N = 200$ ,  $N = 400$  ve  $\Delta t = 0.001$  için hata normları.

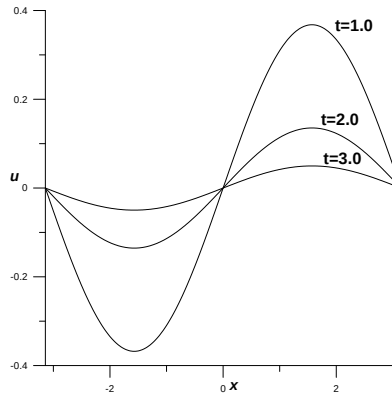
| $N = 200$         |                        |                                   |                        |
|-------------------|------------------------|-----------------------------------|------------------------|
| $\lambda = 0$     |                        | $\lambda = -1.64 \times 10^{-4}$  |                        |
| $L_2 \times 10^5$ | $L_\infty \times 10^5$ | $L_2 \times 10^5$                 | $L_\infty \times 10^5$ |
| 1.31728           | 0.74326                | 0.00154                           | 0.00079                |
| $N = 400$         |                        |                                   |                        |
| $\lambda = 0$     |                        | $\lambda = -4.087 \times 10^{-5}$ |                        |
| $L_2 \times 10^5$ | $L_\infty \times 10^5$ | $L_2 \times 10^5$                 | $L_\infty \times 10^5$ |
| 0.32842           | 0.18534                | 0.00009                           | 0.00006                |

Tablo 4.2, farklı zaman adımları için  $t = 1$  zamanındaki hata normalarının değerlerini göstermektedir. Tablodan da görüldüğü gibi  $\lambda = -5.896 \times 10^{-5}$  ve  $\lambda = -5.992 \times 10^{-5}$  olarak alındığında  $\lambda = 0$  durumuna göre hata normlarının değerlerinde büyük azalmalar meydana gelmektedir. Yani genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yöntemi, kübik B-spline kolokeyşin yöntemine göre çok daha doğru sonuçlar vermektedir.

Tablo 4.2  $N = 400, t = 1, \Delta t = 0.01, \Delta t = 0.001$  için hata normları.

| $\Delta t = 0.01$  |                        |                                   |                        |
|--------------------|------------------------|-----------------------------------|------------------------|
| $\lambda = 0$      |                        | $\lambda = -5.896 \times 10^{-5}$ |                        |
| $L_2 \times 10^5$  | $L_\infty \times 10^5$ | $L_2 \times 10^5$                 | $L_\infty \times 10^5$ |
| 1.92653            | 1.08691                | 0.00191                           | 0.00131                |
| $\Delta t = 0.001$ |                        |                                   |                        |
| $\lambda = 0$      |                        | $\lambda = -5.992 \times 10^{-5}$ |                        |
| $L_2 \times 10^5$  | $L_\infty \times 10^5$ | $L_2 \times 10^5$                 | $L_\infty \times 10^5$ |
| 1.95667            | 1.10393                | 0.00062                           | 0.00036                |

Şekil 4.1’de, farklı  $t$  zamanlarındaki sayısal çözümler gösterilmiştir. Grafikten de görüldüğü gibi genişletilmiş kübik kolokeyşin yöntemi problemin fiziksel karakteristiğini korumaktadır. Problemin başlangıç ve sınır şartları simetrik olduğundan  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  için elde edilen nümerik çözümler aynıdır.

Şekil 4.1  $N = 400, \Delta t = 0.001, \lambda = -4.087 \times 10^{-5}$  için farklı zamanlardaki sayısal çözümler

### 4.3.2 Problem 2

Bu test problemi için tüm hesaplamalar  $0 \leq x \leq 1$  aralığında yapılmış ve  $\alpha = 1, \beta = 0.3$  olarak seçilmiştir. Tablo 4.3’de  $u(x, t)$  için, Tablo 4.4’de  $v(x, t)$

için hesaplanan hata normlarının değerleri verilmiştir. Görüldüğü gibi genel olarak adım uzunluğu azaldıkça hata normlarının değerlerinde değişiklik olmamaktadır. Bunun yanında  $\lambda$  için sıfırdan farklı bir değer alındığında, hata normlarının değerlerinde büyük miktarda azalma görülmektedir. Yani genişletilmiş kübik kolokeyşin yöntemi, kübik kolokeyşin yöntemine göre çok daha doğru sonuçlar vermektedir.

Tablo 4.3  $t = 1, \Delta t = 0.001, N = 10, N = 100$  olmak üzere,  $u(x, t)$  için hesaplanan hata normları.

| $N = 10$          |                        |                                   |                        |
|-------------------|------------------------|-----------------------------------|------------------------|
| $\lambda = 0$     |                        | $\lambda = -6 \times 10^5$        |                        |
| $L_2 \times 10^5$ | $L_\infty \times 10^5$ | $L_2 \times 10^5$                 | $L_\infty \times 10^5$ |
| 2.72760           | 3.73505                | 0.00055                           | 0.00077                |
| $N = 100$         |                        |                                   |                        |
| $\lambda = 0$     |                        | $\lambda = -4.087 \times 10^{-5}$ |                        |
| $L_2 \times 10^5$ | $L_\infty \times 10^5$ | $L_2 \times 10^5$                 | $L_\infty \times 10^5$ |
| 2.72272           | 3.73503                | 0.00056                           | 0.00078                |

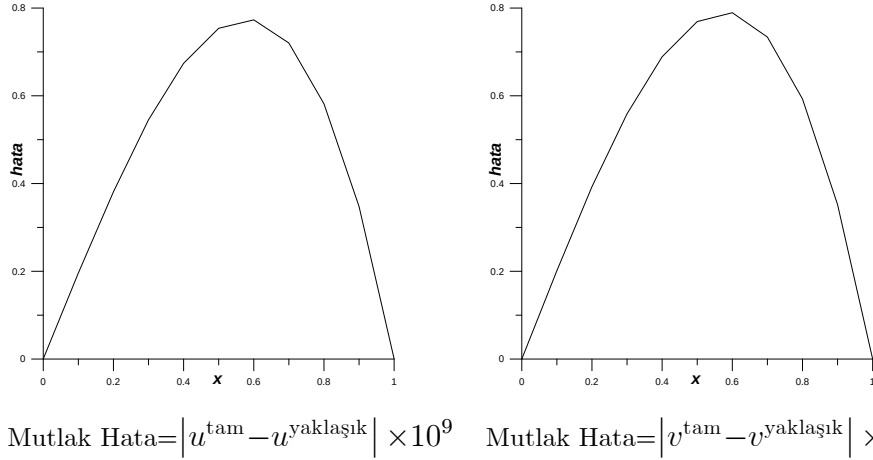
Tablo 4.4  $t = 1, \Delta t = 0.001, N = 10, N = 100$  olmak üzere,  $v(x, t)$  için hesaplanan hata normları.

| $N = 10$          |                        |                                   |                        |
|-------------------|------------------------|-----------------------------------|------------------------|
| $\lambda = 0$     |                        | $\lambda = -6 \times 10^5$        |                        |
| $L_2 \times 10^5$ | $L_\infty \times 10^5$ | $L_2 \times 10^5$                 | $L_\infty \times 10^5$ |
| 0.94232           | 1.29039                | 0.00057                           | 0.00079                |
| $N = 100$         |                        |                                   |                        |
| $\lambda = 0$     |                        | $\lambda = -4.087 \times 10^{-5}$ |                        |
| $L_2 \times 10^5$ | $L_\infty \times 10^5$ | $L_2 \times 10^5$                 | $L_\infty \times 10^5$ |
| 0.94236           | 1.29038                | 0.00057                           | 0.00079                |

Şekil 4.2  $N = 10, \Delta t = 0.001, a_0 = 0.05, 0 \leq x \leq 1, \alpha = 1, \beta = 0.3,$



$\lambda = -6 \times 10^5$  için  $t = 1$  zamanındaki tam çözüm ile yaklaşık çözüm arasındaki farkın mutlak değerinin grafiğini göstermektedir. Görüldüğü gibi hata, konum aralığının ortalarında artmaktadır.



Şekil 4.2  $N = 10$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $a_0 = 0.05$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0.3$  için  $t = 1$  zamanındaki mutlak hatalar

#### 4.4 Sonuç

Bu bölümde, İkili Burgers denklem sisteminin sayısal çözümünü araştırmak için, genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yöntemi kullanılmıştır. Zaman ayrışımı için Taylor seri açılımı, konum ayrışımı içinse genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin metodu kullanılmıştır. Elde edilen denklem sistemi  $2N+2$  denklem  $2N+6$  bilinmeyenden oluşmaktadır. Denklemlerin çözülebilmesi için denklem sayısı ile bilinmeyen sayısının eşit olması gerektiğinden, sınır şartları kullanılarak bazı bilinmeyenler elimine edilerek sistem çözülebilir hale getirilmiştir. Daha sonra da Thomas algoritması kullanılarak çözüme gidilmiştir.

Nümerik çözümlerin doğruluğu test problemleriyle kontrol edilmiştir. Nümerik çözümler, serbest parametre olan  $\lambda$  nın sifıra eşit olduğu ve sıfırdan farklı olduğu değerler için ayrı ayrı hesaplanmış ve bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır.  $\lambda$  değeri sifıra eşit alındığında yöntemimiz kübik B-spline kolokeyşin yöntemiyle aynı sonuçları vermektedir. Dolayısıyla farklı test problemleri ve farklı parametreler için kübik

B-spline kolokeyşin yöntemiyle, genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yöntemi arasında karşılaştırma yapma imkanına kavuşulmuştur.

İlk test probleminin tabloları incelendiğinde,  $\lambda$  nın sıfırdan farklı değerleri için elde edilen hata normlarının,  $\lambda = 0$  durumundakine göre çok daha küçük değerler olduğu, dolayısıyla genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yönteminin, kübik B-spline kolokeyşin yöntemine göre çok daha doğru sonuçlar verdiği görülmüştür. Grafikler incelendiğinde, sayısal çözümün zaman içerisindeki davranışının, referanslarla uyumlu olduğu, dolayısıyla genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yönteminin problemi iyi modellediği anlaşılmıştır.

İkinci test probleminin tabloları incelendiğinde de,  $\lambda$  nın sıfırdan farklı değerleri için elde edilen hata normlarının,  $\lambda = 0$  durumundakine göre çok daha küçük değerler olduğu, dolayısıyla genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yönteminin, kübik B-spline kolokeyşin yöntemine göre çok daha doğru sonuçlar verdiği görülmüştür. Analitik ve nümerik çözümleri daha iyi kıyaslayabilmek için çizilen hata grafiklerine bakıldığında, oluşan maksimum hatanın çözüm aralığının ortalarında olduğu görülmektedir.

## BÖLÜM 5

### REAKSİYON DİFÜZYON DENKLEM SİSTEMİNİN GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK B-SPLINE TAYLOR KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde reaksiyon difüzyon denklem sisteminin, B-spline kolokeyşin metoduyla sayısal çözümleri araştırılmış, bulunan çözümlerin doğruluğu, iki test problemi için  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları hesaplanarak kontrol edilmiştir.

#### 5.1 Reaksiyon-Difüzyon Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü İçin Genişletilmiş Kübik B-spline Taylor Kolokeyşin Metodu

##### 5.1.1 Zaman ayrışımı

$u^{n+1}$  ve  $v^{n+1}$  terimleri Taylor serisine açılırsa

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t (u_t)^n + \frac{\Delta t^2}{2} (u_{tt})^n + O(\Delta t^3) \quad (5.1)$$

$$v^{n+1} = v^n + \Delta t (v_t)^n + \frac{\Delta t^2}{2} (v_{tt})^n + O(\Delta t^3) \quad (5.2)$$

elde edilir. Burada  $O(\Delta t^3)$  daha yüksek mertebeden terimleri göstermektedir ve ihmal edilecektir.  $u_{tt}^n$  ve  $v_{tt}^n$  nin aşağıda verilmiş olan yaklaşık değerleri

$$u_{tt}^n \approx \frac{(u_t)^{n+1} - (u_t)^n}{\Delta t} \quad (5.3)$$

$$v_{tt}^n \approx \frac{(v_t)^{n+1} - (v_t)^n}{\Delta t} \quad (5.4)$$

(5.1) ve (5.2) eşitliklerinde yerlerine yazılırsa

$$u^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} u_t^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{2} u_t^n \quad (5.5)$$

$$v^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} v_t^{n+1} = v^n + \frac{\Delta t}{2} v_t^n \quad (5.6)$$

bulunur. (1.129-1.130) eşitliklerine göre  $u_t$  ve  $v_t$  nin değerleri (5.5) ve (5.6) da yer-

lerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \left(1 - b_1 \frac{\Delta t}{2} - m_1 \frac{\Delta t}{2} (v^2)^{n+1}\right) u^{n+1} - a_1 \frac{\Delta t}{2} u_{xx}^{n+1} \\
& - \left(c_1 \frac{\Delta t}{2} + d_1 \frac{\Delta t}{2} (u^2)^{n+1} + e_1 \frac{\Delta t}{2} u^{n+1}\right) v^{n+1} + n_1 \\
= & \\
& \left(1 + b_1 \frac{\Delta t}{2} + m_1 \frac{\Delta t}{2} (v^2)^n\right) u^n + a_1 \frac{\Delta t}{2} u_{xx}^n \\
& + \left(c_1 \frac{\Delta t}{2} + d_1 \frac{\Delta t}{2} (u^2)^n + e_1 \frac{\Delta t}{2} u^n\right) v^n + n_1
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{\Delta t}{2} c_2 - \frac{\Delta t}{2} d_2 (u^2)^{n+1}\right) v^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} a_2 v_{xx}^{n+1} \\
& - \left(b_2 \frac{\Delta t}{2} + e_2 \frac{\Delta t}{2} v^{n+1} + m_2 \frac{\Delta t}{2} (v^2)^{n+1}\right) u^{n+1} + n_2 \\
= & \\
& \left(1 + \frac{\Delta t}{2} c_2 + \frac{\Delta t}{2} d_2 (u^2)^n\right) v^n + \frac{\Delta t}{2} a_2 v_{xx}^n \\
& + \left(b_2 \frac{\Delta t}{2} + e_2 \frac{\Delta t}{2} v^n + m_2 \frac{\Delta t}{2} (v^2)^n\right) u^n + n_2
\end{aligned} \tag{5.8}$$

denklem sistemi elde edilir. Bulunan denklemler (1.129-1.130) denklemlerinin zaman

ayrışımı yapılmış halidir.

### 5.1.2 Konum ayrışımı

$$\begin{aligned}
aa_1 &= \frac{4 - \lambda}{24}, & aa_2 &= \frac{8 + \lambda}{12}, & aa_3 &= aa_1, & bb_1 &= -\frac{1}{2h}, \\
bb_3 &= \frac{1}{2h}, & cc_1 &= \frac{2 + \lambda}{2h^2}, & cc_2 &= -\frac{2 + \lambda}{h^2}, & cc_3 &= cc_3.
\end{aligned}$$

ve  $\delta_m = \rho_m + i\sigma_m$  olmak üzere,  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  fonksiyonları sırasıyla  $\rho_m$  ve  $\sigma_m$

parametreleri cinsinden yazılırsa

$$\begin{aligned}
u_m^n &= aa_1\rho_{m-1}^n + aa_2\rho_m^n + aa_3\rho_{m+1}^n, \\
v_m^n &= aa_1\sigma_{m-1}^n + aa_2\sigma_m^n + aa_3\sigma_{m+1}^n, \\
(u_x)_m^n &= bb_1\rho_{m-1}^n + bb_3\rho_{m+1}^n, \\
(v_x)_m^n &= bb_1\sigma_{m-1}^n + bb_3\sigma_{m+1}^n, \\
(u_{xx})_m^n &= cc_1\rho_{m-1}^n + cc_2\rho_m^n + cc_3\rho_{m+1}^n, \\
(v_{xx})_m^n &= cc_1\sigma_{m-1}^n + cc_2\sigma_m^n + cc_3\sigma_{m+1}^n,
\end{aligned} \tag{5.9}$$

elde edilir. (5.9) eşitlikleri, (5.7) ve (5.8) denklemlerinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\xi_{m1} &= \left(1 + b_1 \frac{\Delta t}{2} + m_1 \frac{\Delta t}{2} (v^2)^n\right) u^n + a_1 \frac{\Delta t}{2} u_{xx}^n \\
&+ \left(c_1 \frac{\Delta t}{2} + d_1 \frac{\Delta t}{2} (u^2)^n + e_1 \frac{\Delta t}{2} u^n\right) v^n + n_1,
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
\xi_{m2} &= \left(1 + \frac{\Delta t}{2} c_2 + \frac{\Delta t}{2} d_2 (u^2)^n\right) v^n + \frac{\Delta t}{2} a_2 v_{xx}^n \\
&+ \left(b_2 \frac{\Delta t}{2} + e_2 \frac{\Delta t}{2} v^n + m_2 \frac{\Delta t}{2} (v^2)^n\right) u^n + n_2.
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&\rho_{m-1}^{n+1} \left( aa_1 \left( 1 - b_1 \frac{\Delta t}{2} - m_1 \frac{\Delta t}{2} (v^2)^{n+1} \right) - cc_1 a_1 \frac{\Delta t}{2} \right) + \\
&\sigma_{m-1}^{n+1} \left( -aa_1 \left( c_1 \frac{\Delta t}{2} + d_1 \frac{\Delta t}{2} (u^2)^{n+1} + e_1 \frac{\Delta t}{2} u^{n+1} \right) \right) + \\
&\rho_m^{n+1} \left( aa_2 \left( 1 - b_1 \frac{\Delta t}{2} - m_1 \frac{\Delta t}{2} (v^2)^{n+1} \right) - cc_2 a_1 \frac{\Delta t}{2} \right) + \\
&\sigma_m^{n+1} \left( -aa_2 \left( c_1 \frac{\Delta t}{2} + d_1 \frac{\Delta t}{2} (u^2)^{n+1} + e_1 \frac{\Delta t}{2} u^{n+1} \right) \right) + \\
&\rho_{m+1}^{n+1} \left( aa_3 \left( 1 - b_1 \frac{\Delta t}{2} - m_1 \frac{\Delta t}{2} (v^2)^{n+1} \right) - cc_3 a_1 \frac{\Delta t}{2} \right) + \\
&\sigma_{m+1}^{n+1} \left( -aa_3 \left( c_1 \frac{\Delta t}{2} + d_1 \frac{\Delta t}{2} (u^2)^{n+1} + e_1 \frac{\Delta t}{2} u^{n+1} \right) \right) = \xi_{m1}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}
& \rho_{m-1}^{n+1} \left( -aa_1 \left( b_2 \frac{\Delta t}{2} + e_2 \frac{\Delta t}{2} v^{n+1} + m_2 \frac{\Delta t}{2} (v^2)^{n+1} \right) \right) + \\
& \sigma_{m-1}^{n+1} \left( aa_1 \left( 1 - \frac{\Delta t}{2} c_2 - \frac{\Delta t}{2} d_2 (u^2)^{n+1} \right) - cc_1 a_2 \frac{\Delta t}{2} \right) + \\
& \rho_m^{n+1} \left( -aa_2 \left( b_2 \frac{\Delta t}{2} + e_2 \frac{\Delta t}{2} v^{n+1} + m_2 \frac{\Delta t}{2} (v^2)^{n+1} \right) \right) + \\
& \sigma_m^{n+1} \left( aa_2 \left( 1 - \frac{\Delta t}{2} c_2 - \frac{\Delta t}{2} d_2 (u^2)^{n+1} \right) - cc_2 a_2 \frac{\Delta t}{2} \right) + \\
& \rho_{m+1}^{n+1} \left( -aa_3 \left( b_2 \frac{\Delta t}{2} + e_2 \frac{\Delta t}{2} v^{n+1} + m_2 \frac{\Delta t}{2} (v^2)^{n+1} \right) \right) + \\
& \sigma_{m+1}^{n+1} \left( aa_3 \left( 1 - \frac{\Delta t}{2} c_2 - \frac{\Delta t}{2} d_2 (u^2)^{n+1} \right) - cc_3 a_2 \frac{\Delta t}{2} \right) = \xi_{m2}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

denklem sistemi elde edilir. (5.11-5.12) denklem sistemi  $2N + 2$  denklem,  $2N + 6$  bilinmeyenden oluşmaktadır. Sistemin çözülebilir olması için, denklem sayısı ve bilinmeyen sayısının eşit olması gerektiğinden,  $\rho_{-1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-1}^{n+1}$ ,  $\rho_{N+1}^{n+1}$  ve  $\sigma_{N+1}^{n+1}$  parametreleri sınır şartları kullanılarak yok edilmelidir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
u(x_0, t) &= a_1 \rho_{-1}^{n+1} + a_2 \rho_0^{n+1} + a_3 \rho_1^{n+1}, \\
v(x_0, t) &= a_1 \sigma_{-1}^{n+1} + a_2 \sigma_0^{n+1} + a_3 \sigma_1^{n+1}, \\
u(x_N, t) &= a_1 \rho_{N-1}^{n+1} + a_2 \rho_N^{n+1} + a_3 \rho_{N+1}^{n+1}, \\
v(x_N, t) &= a_1 \sigma_{N-1}^{n+1} + a_2 \sigma_N^{n+1} + a_3 \sigma_{N+1}^{n+1}
\end{aligned}$$

yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\rho_{-1}^{n+1} = \frac{1}{a_1} (u(x_0, t) - a_2 \rho_0^{n+1} - a_3 \rho_1^{n+1}), \tag{5.13}$$

$$\sigma_{-1}^{n+1} = \frac{1}{a_1} (v(x_0, t) - a_2 \sigma_0^{n+1} - a_3 \sigma_1^{n+1}), \tag{5.14}$$

$$\rho_{N+1}^{n+1} = \frac{1}{a_3} (u(x_N, t) - a_2 \rho_N^{n+1} - a_1 \rho_{N-1}^{n+1}), \tag{5.15}$$

$$\sigma_{N+1}^{n+1} = \frac{1}{a_3} (v(x_N, t) - a_2 \sigma_N^{n+1} - a_1 \sigma_{N-1}^{n+1}) \tag{5.16}$$

eşitlikleri elde edilir. (5.11-5.12) denklem sisteminde  $\rho_{-1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-1}^{n+1}$ ,  $\rho_{N+1}^{n+1}$  ve  $\sigma_{N+1}^{n+1}$  parametreleri yerine, (5.13-5.16) eşitlikleri kullanıldığında denklem ve bilinmeyen sayıları  $2N + 2$  olur. Böylece (5.11-5.12) denklemleri  $x_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$  bölünme

noktalarında

$$\begin{aligned}
a_{00} &= aa_1 \left( 1 - b_1 \frac{\Delta t}{2} - m_1 \frac{\Delta t}{2} (v^2)^{n+1} \right) - cc_1 a_1 \frac{\Delta t}{2}, \\
a_{01} &= -aa_1 \left( c_1 \frac{\Delta t}{2} + d_1 \frac{\Delta t}{2} (u^2)^{n+1} + e_1 \frac{\Delta t}{2} u^{n+1} \right), \\
a_{02} &= aa_2 \left( 1 - b_1 \frac{\Delta t}{2} - m_1 \frac{\Delta t}{2} (v^2)^{n+1} \right) - cc_2 a_1 \frac{\Delta t}{2}, \\
a_{03} &= -aa_2 \left( c_1 \frac{\Delta t}{2} + d_1 \frac{\Delta t}{2} (u^2)^{n+1} + e_1 \frac{\Delta t}{2} u^{n+1} \right), \\
a_{04} &= aa_3 \left( 1 - b_1 \frac{\Delta t}{2} - m_1 \frac{\Delta t}{2} (v^2)^{n+1} \right) - cc_3 a_1 \frac{\Delta t}{2}, \\
a_{05} &= -aa_3 \left( c_1 \frac{\Delta t}{2} + d_1 \frac{\Delta t}{2} (u^2)^{n+1} + e_1 \frac{\Delta t}{2} u^{n+1} \right), \\
a_{10} &= -aa_1 \left( b_2 \frac{\Delta t}{2} + e_2 \frac{\Delta t}{2} v^{n+1} + m_2 \frac{\Delta t}{2} (v^2)^{n+1} \right), \\
a_{11} &= aa_1 \left( 1 - \frac{\Delta t}{2} c_2 - \frac{\Delta t}{2} d_2 (u^2)^{n+1} \right) - cc_1 a_2 \frac{\Delta t}{2}, \\
a_{12} &= -aa_2 \left( b_2 \frac{\Delta t}{2} + e_2 \frac{\Delta t}{2} v^{n+1} + m_2 \frac{\Delta t}{2} (v^2)^{n+1} \right), \\
a_{13} &= aa_2 \left( 1 - \frac{\Delta t}{2} c_2 - \frac{\Delta t}{2} d_2 (u^2)^{n+1} \right) - cc_2 a_2 \frac{\Delta t}{2}, \\
a_{14} &= -aa_3 \left( b_2 \frac{\Delta t}{2} + e_2 \frac{\Delta t}{2} v^{n+1} + m_2 \frac{\Delta t}{2} (v^2)^{n+1} \right), \\
a_{15} &= aa_3 \left( 1 - \frac{\Delta t}{2} c_2 - \frac{\Delta t}{2} d_2 (u^2)^{n+1} \right) - cc_3 a_2 \frac{\Delta t}{2},
\end{aligned}$$

olmak üzere ,

$m = 0$  için

$$\begin{aligned}
&\left( a_{02} - a_{00} \frac{a_2}{a_1} \right) \rho_0^{n+1} + \left( a_{04} - a_{00} \frac{a_3}{a_1} \right) \rho_1^{n+1} + \left( a_{03} - a_{01} \frac{a_2}{a_1} \right) \sigma_0^{n+1} \\
&+ \left( a_{05} - a_{01} \frac{a_3}{a_1} \right) \sigma_1^{n+1} = \xi_{m1} - a_{00} \frac{1}{a_1} r_0^n - a_{01} \frac{1}{a_1} s_0^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left( a_{12} - a_{10} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \rho_0^{n+1} + \left( a_{14} - a_{10} \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right) \rho_1^{n+1} + \left( a_{13} - a_{11} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \sigma_0^{n+1} \\
&+ \left( a_{15} - a_{11} \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right) \sigma_1^{n+1} = \xi_{m2} - a_{10} \frac{1}{\alpha_1} r_0^n - a_{11} \frac{1}{\alpha_1} s_0^n
\end{aligned}$$

$m = 1$  için

$$a_{00}\rho_0^{n+1} + a_{01}\sigma_0^{n+1} + a_{02}\rho_1^{n+1} + a_{03}\sigma_1 + a_{04}\rho_2 + a_{05}\sigma_2 = \xi_{m1},$$

$$a_{10}\rho_0^{n+1} + a_{11}\sigma_0^{n+1} + a_{12}\rho_1^{n+1} + a_{13}\sigma_1^{n+1} + a_{14}\rho_2^{n+1} + a_{15}\sigma_2^{n+1} = \xi_{m2},$$

$$\vdots \tag{5.17}$$

$m = N - 1$  için

$$a_{00}\rho_{N-2}^{n+1} + a_{01}\sigma_{N-2}^{n+1} + a_{02}\rho_{N-1}^{n+1} + a_{03}\sigma_{N-1}^{n+1} + a_{04}\rho_N^{n+1} + a_{05}\sigma_N^{n+1} = \xi_{m1},$$

$$a_{10}\rho_{N-2}^{n+1} + a_{11}\sigma_{N-2}^{n+1} + a_{12}\rho_{N-1}^{n+1} + a_{13}\sigma_{N-1}^{n+1} + a_{14}\rho_N^{n+1} + a_{15}\sigma_N^{n+1} = \xi_{m2}$$

$m = N$  için

$$\begin{aligned} & \left( a_{N-1,0} - a_{N-1,4} \frac{a_1}{a_3} \right) \rho_{N-1}^{n+1} + \left( a_{N-1,1} - a_{N-1,5} \frac{a_1}{a_3} \right) \sigma_{N-1}^{n+1} + \\ & \left( a_{N-1,2} - a_{N-1,4} \frac{a_2}{a_3} \right) \rho_N^{n+1} + \left( a_{N-1,3} - a_{N-1,5} \frac{a_2}{a_3} \right) \sigma_N^{n+1} \\ = & \xi_{m1} - a_{N-1,4} \frac{1}{\alpha_3} r_N^n - a_{N-1,5} \frac{1}{\alpha_3} s_N^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( a_{N0} - a_{N4} \frac{a_1}{a_3} \right) \rho_{N-1}^{n+1} + \left( a_{N1} - a_{N5} \frac{a_1}{a_3} \right) \sigma_{N-1}^{n+1} + \\ & \left( a_{N2} - a_{N4} \frac{a_2}{a_3} \right) \rho_N^{n+1} + \left( a_{N3} - a_{N5} \frac{a_2}{a_3} \right) \sigma_N^{n+1} \\ = & \xi_{m2} - a_{N4} \frac{1}{a_3} r_N^n - a_{N5} \frac{1}{a_3} s_N^n \end{aligned}$$

formunda açık olarak yazılabilir. (5.17) denklem sistemi  $2N + 2$  denklem,  $2N + 2$  bilinmeyenden oluşan 6 sütun elemanlı bir sistemdir ve Thomas algoritması kullanılarak çözülebilir. Thomas algoritmasının kullanılabilmesi için sistem lineer



olmalıdır. Lineerleştirme için (2.21) ile verilen iterasyon bağıntısı kullanılmıştır. (2.21) bağıntısı her zaman adımında iki kez uygulanarak  $(\delta_i^*)^{n+1}$  parametresi hesaplanmış ve  $\delta^{n+1}$  parametresinin  $n + 1$ . zaman adımındaki değeri için yeni bir yaklaşım yapılmıştır. Bu işlem programın çalışması bitene kadar tekrarlanmıştır.

Reaksiyon-Difüzyon denkleminin genişletilmiş B-spline kolokeyşin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen (5.17) denklem sisteminin çözülebilmesi için,

$$(\rho_{-1}^0, \rho_0^0, \dots, \rho_N^0, \rho_{N+1}^0) \text{ ve } (\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \dots, \sigma_N^0, \sigma_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörlerinin bulunması gereklidir.

## 5.2 Başlangıç Durumu

Başlangıç vektörleri, başlangıç şartları ile bulunabilir. Bunun için (1.26) yaklaşık çözümü,  $t = 0$  zamanında

$$u_m(x, 0) = u_m = \sum_{m=-1}^{N+1} E_m(x) \rho_m^0, \quad (5.18)$$

$$v_m(x, 0) = v_m = \sum_{m=-1}^{N+1} E_m(x) \sigma_m^0 \quad (5.19)$$

formunda yazılır. (5.18-5.19) eşitliklerinde,  $u_m(x, 0)$  ve  $v_m(x, 0)$  değerleri, başlangıç şartlarından bilindiğinden,  $\rho_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  değerleri bulunabilir.

İlk olarak, (5.18) eşitliği açık olarak yazılırsa  $N + 3$  bilinmeyen ve  $N + 1$  denklemden oluşan

$$\begin{aligned} \rho_{-1}^0 + 4\rho_0^0 + \rho_1^0 &= u_0, \\ \rho_0^0 + 4\rho_1^0 + \rho_2^0 &= u_1, \\ &\vdots \\ \rho_{N-1}^0 + 4\rho_N^0 + \rho_{N+1}^0 &= u_N \end{aligned} \quad (5.20)$$

sistemine ulaşılır. Sınır şartlarından

$$\begin{aligned} u'(x_0, 0) &= u'_0 = b_1 \rho_{-1}^0 + b_3 \rho_1^0, \\ \rho_{-1}^0 &= \frac{1}{b_1} (u'_0 - b_3 \rho_1^0) \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} u'(x_N, 0) &= u'_N = b_1 \rho_{N-1}^0 + b_3 \rho_{N+1}^0, \\ \rho_{N+1}^0 &= \frac{1}{b_3} (u'_N - b_1 \rho_{N-1}^0) \end{aligned} \quad (5.22)$$

yazılarak,  $\rho_{-1}^0$  ve  $\rho_{N+1}^0$  bilinmeyenleri (5.20) sisteminden yok edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$= \begin{bmatrix} aa_2 & \left( aa_3 - aa_1 \frac{bb_3}{bb_1} \right) & & & & & & & \\ aa_1 & aa_2 & aa_3 & & & & & & \\ & aa_1 & aa_2 & aa_3 & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & aa_1 & aa_2 & aa_3 & & \\ & & & & & aa_1 & aa_2 & aa_3 & \\ & & & & & & \left( aa_1 - aa_3 \frac{bb_1}{bb_3} \right) & aa_2 & \\ & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_0^0 \\ \rho_1^0 \\ \rho_2^0 \\ \vdots \\ \rho_{N-2}^0 \\ \rho_{N-1}^0 \\ \rho_N^0 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

$$\begin{bmatrix} u_0 - \frac{a_1}{b_1} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N - \frac{a_3}{b_3} u_N \end{bmatrix}$$

matris sistemine ulaşılır. Bu sistem Thomas algoritması ile çözüldüğünde

$$\rho_0^0, \rho_1^0, \dots, \rho_{N-1}^0, \rho_N^0$$

bilinmeyenleri ve bu değerlerin (5.21-5.22) eşitliklerinde kullanılması ile de  $\rho_{-1}^0$  ve  $\rho_{N+1}^0$  bilinmeyenleri hesaplanmış olur. Böylece  $\rho$  parametresi için

$$(\rho_{-1}^0, \rho_0^0, \dots, \rho_N^0, \rho_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörü elde edilir.

Benzer şekilde, (5.19) eşitliği açık olarak

$$\begin{aligned} \sigma_{-1}^0 + 4\sigma_0^0 + \sigma_1^0 &= v_0, \\ \sigma_0^0 + 4\sigma_1^0 + \sigma_2^0 &= v_1, \\ &\vdots \\ \sigma_{N-1}^0 + 4\sigma_N^0 + \sigma_{N+1}^0 &= v_N \end{aligned} \quad (5.24)$$

şeklinde yazıldığında  $N + 3$  bilinmeyen ve  $N + 1$  denklemden oluşan bir sistem elde edilir.  $\sigma_{-1}^0$  ve  $\sigma_{N+1}^0$  bilinmeyenleri, sınır şartlarından

$$\begin{aligned} v'(x_0, 0) &= v'_0 = b_1 \sigma_{-1}^0 + b_3 \sigma_1^0, \\ \sigma_{-1}^0 &= \frac{1}{b_1} (v'_0 - b_3 \sigma_1^0) \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} v'(x_N, 0) &= v'_N = b_1 \sigma_{N-1}^0 + b_3 \sigma_{N+1}^0, \\ \sigma_{N+1}^0 &= \frac{1}{b_3} (v'_N - b_1 \sigma_{N-1}^0) \end{aligned} \quad (5.26)$$

şeklinde hesaplanır ve (5.24) sisteminde yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$= \begin{bmatrix} aa_2 & \left( aa_3 - aa_1 \frac{bb_3}{bb_1} \right) & & & & & & & & \\ aa_1 & aa_2 & aa_3 & & & & & & & \\ & aa_1 & aa_2 & aa_3 & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & aa_1 & aa_2 & aa_3 & & & & \\ & & & & aa_1 & aa_2 & aa_3 & & & \\ & & & & & \left( aa_1 - aa_3 \frac{bb_1}{bb_3} \right) & aa_2 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0^0 \\ \sigma_1^0 \\ \sigma_2^0 \\ \vdots \\ \sigma_{N-2}^0 \\ \sigma_{N-1}^0 \\ \sigma_N^0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$\begin{bmatrix} v_0 - \frac{a_1}{b_1} v'_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} \\ v_N - \frac{a_3}{b_3} v'_N \end{bmatrix}$$

matris sistemine ulaşılır. Bu sistem Thomas algoritması ile çözülürse

$$\sigma_0^0, \sigma_1^0, \dots, \sigma_{N-1}^0, \sigma_N^0$$

bilinmeyenleri ve (5.25-5.26) eşitliklerinin de kullanılmasıyla  $\sigma_{-1}^0$  ve  $\sigma_{N+1}^0$  değerleri bulunur. Böylece  $\sigma$  parametresi için

$$(\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \dots, \sigma_N^0, \sigma_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörü hesaplanmış olur.

Başlangıç şartının kullanılmasıyla elde edilen başlangıç vektörleri sayesinde,  $n = 0$  için (5.17) denklem sisteminin sağ tarafındaki tüm değerler artık bilinmektedir. Sol kısımdaki bilinmeyenler ise, Thomas algoritması ile hesaplanabilir. Sonraki zaman adımlarında, bir önceki zamanda bulunan değerlerin kullanılmasıyla, istenilen zamandaki Reaksiyon-Difüzyon denkleminin sayısal çözümüne ulaşılan kadar iterasyona devam edilir.

### 5.3 Test Problemleri

#### 5.3.1 Lineer problem

Nümerik hesaplamalarda  $a, b, d$  için iki farklı seçim yapılarak sonuçlar incelenmiştir. İlk olarak

$$a = 0.1, b = 0.01 \text{ ve } d = 1 \quad (5.28)$$

seçilerek difüzyon teriminin reaksiyon terimine göre daha baskın olduğu bir sistem ele alınmıştır. (5.28) seçimleri altında  $t = 1$  anında elde edilen sonuçlar Tablo 5.1’de gösterilmiştir. Tablo incelendiğinde  $v(x, t)$  fonksiyonu için bulunan nümerik çözümlerin  $u(x, t)$  fonksiyonu için bulunan nümerik çözümlere göre daha doğru sonuçlar olduğu, aynı zamanda  $\lambda$  nın sıfırdan farklı değerler aldığı durumlarda, yani genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonların kullanıldığı durumlarda da sonuçların daha doğru olduğu görülmektedir.

Tablo 5.1  $t = 1$  anında difüzyon baskın durumu için elde edilen hata normları

| $N$ | $\Delta t$ | $\lambda$              | $u$               |                        | $v$               |                        |
|-----|------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|
|     |            |                        | $L_2 \times 10^6$ | $L_\infty \times 10^6$ | $L_2 \times 10^6$ | $L_\infty \times 10^6$ |
| 512 | 0.005      | 0                      | 2.486730          | 2.824275               | 0.107367          | 0.122302               |
| 512 | 0.005      | $-7.92 \times 10^{-6}$ | 0.039944          | 0.066519               | 0.007814          | 0.009883               |

İkinci olarak

$$a = 2, b = 1 \text{ ve } d = 0.001 \quad (5.29)$$

seçimleriyle reaksiyon terimlerinin etkisi artırılmış, (5.29) seçimleri altında  $t = 1$  anında elde edilen sonuçlar Tablo 5.2 de gösterilmiştir. Tablo incelendiğinde  $v(x, t)$  fonksiyonu için bulunan nümerik çözümlerin,  $u(x, t)$  fonksiyonuna göre bulunan nümerik çözümlere göre daha doğru sonuçlar olduğu, aynı zamanda  $\lambda$  nın sıfırdan farklı değerler aldığı durumlarda, yani genişletilmiş kübik B-spline fonkiyonların kullanıldığı durumlarda da, sonuçların daha doğru olduğu görülmektedir. Ayrıca reaksiyon teriminin baskın olması durumunda, konum parçalanmasının nümerik çözümler üzerinde etkili olmadığı da söylenebilir.

Tablo 5.2  $t = 1$  anında reaksiyon baskın durumu için elde edilen hata normları

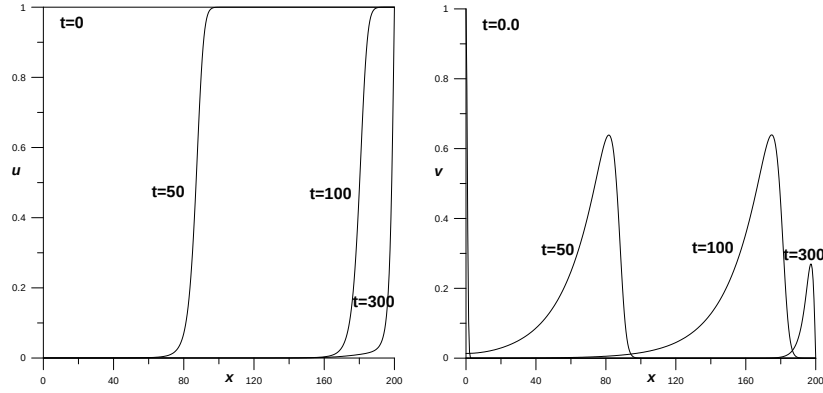
| $N$ | $\Delta t$ | $\lambda$             | $u$               |                        | $v$               |                        |
|-----|------------|-----------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|
|     |            |                       | $L_2 \times 10^6$ | $L_\infty \times 10^6$ | $L_2 \times 10^6$ | $L_\infty \times 10^6$ |
| 512 | 0.005      | 0                     | 3.109156          | 3.506869               | 0.926684          | 1.046081               |
| 512 | 0.005      | $-1.0 \times 10^{-2}$ | 0.879772          | 0.993713               | 0.703125          | 0.791181               |

### 5.3.2 İzotermal kimyasal sistem

(1.139-1.140) sistemi  $k < 1$  için ilerleyen dalga çözümüne sahiptir (Merkin et al., 1989).

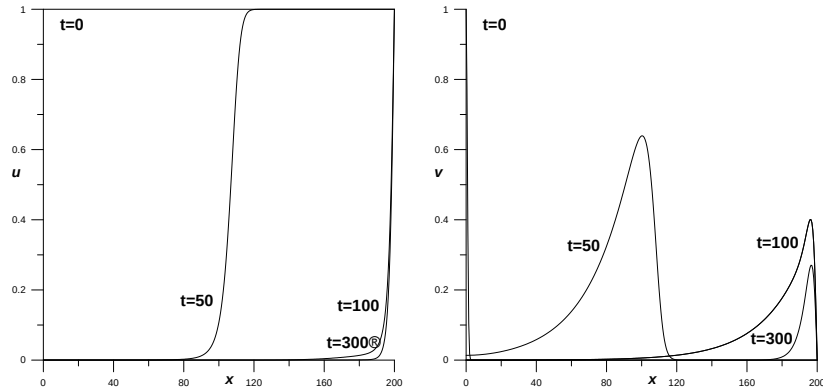
Sonlu farklar yöntemi (Twizell et al., 1994) ve kısmi lineerleştirilmiş üçgensel ve köşegen  $\theta$ -metotları (Lopez and Ramos, 1996), (1.139-1.140) sisteminin nümerik çözümlerini bulmak için daha önce kullanılan yöntemlerden bazılarıdır (Şahin, 2009).

İlerleyen dalgaların asimptotik hızları için üç farklı durum dikkate alınmış, çözüm bölgesi olarak  $[0, 200]$  aralığı seçilmiştir. Şekil 5.1 de  $\lambda = 0$  ve  $k = 0.1$  için yani, asimptotik hızın  $2(1 - k)^{\frac{1}{2}} = 1.897$  değeri için oluşan ilerleyen dalga çözümleri grafiklerle gösterilmiştir. Şekil 5.1'den görüldüğü gibi  $k = 0.1$  için dalgalar çözüm bölgesi üzerinde asimptotik hıza ulaşmakta ve sağ sınırda sıklaşma göstermektedir. (Twizel et al., 1994) referansı ile karşılaştırıldığında bu sıklaşmanın normal olduğu söylenebilir.



Şekil 5.1:  $N = 400, k = 0.1, \lambda = 0$  için ilerleyen dalga çözümleri

Şekil 5.2’de ise  $\lambda = 1$  ve  $k = 0.1$  için yani asimptotik hızın  $2(1 - k)^{\frac{1}{2}} = 1.897$  değeri için oluşan ilerleyen dalga çözümleri grafiklerle gösterilmiştir. Şekil 5.2’den görüldüğü gibi  $k = 0.1$  için dalgalar çözüm bölgesi üzerinde asimptotik hıza ulaşmakta ve sağ sınırdaki Şekil 5.1’deki duruma göre daha kısa zamanda sıklaşma göstermektedir.



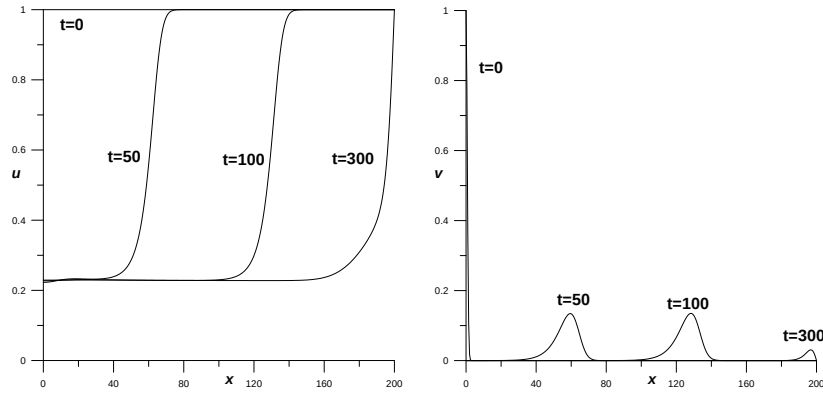
Şekil 5.2:  $N = 400, k = 0.1, \lambda = 1$  için ilerleyen dalga çözümleri

Tablo 5.3’de  $k = 0.1$  durumunda oluşan bağıl hata değerleri verilmiştir. Tablo-  
dan görüldüğü gibi  $\lambda$  nın sıfırdan farklı değerler alması halinde  $v$  fonksiyonu için  
hesaplanan bağıl hata değerlerinde azalma görülmektedir.

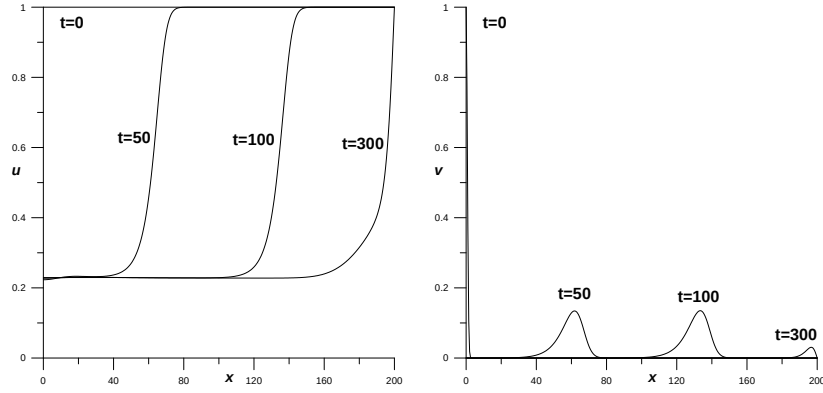
Tablo 5.3:  $k = 0.1, t = 300$  için hesaplanan bağıl hata değerleri

| $k = 0.1$          |                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\lambda = 0$      |                    | $\lambda = 1$      |                    |
| $u$                | $v$                | $u$                | $v$                |
| Hata $\times 10^3$ | Hata $\times 10^3$ | Hata $\times 10^3$ | Hata $\times 10^3$ |
| 0.00970            | 0.00110            | 0.00900            | 0.00089            |

İkinci durum olarak  $k = 0.5$  seçildiğinde dalgaların asimptotik hızı 1.414 olmaktadır. Şekil 5.3'de  $\lambda = 0$  ve  $k = 0.5$  için oluşan ilerleyen dalga çözümleri grafiklerle gösterilmiştir. Şekil 5.3'den görüldüğü gibi  $k = 0.5$  için dalgalar çözüm bölgesi üzerinde asimptotik hıza ulaşmakta fakat sıklaşma daha yavaş olmaktadır.

Şekil 5.3:  $N = 400, k = 0.5, \lambda = 0$  için ilerleyen dalga çözümleri

Şekil 5.4'de ise  $\lambda = 0.16$  ve  $k = 0.5$  için oluşan ilerleyen dalga çözümleri grafiklerle gösterilmiştir. Şekil 5.4'den görüldüğü gibi dalgalar çözüm bölgesi üzerinde asimptotik hıza ulaşmakta ve sağ sınırda Şekil 5.3'deki ile aynı zamanda sıklaşma göstermektedir.



Şekil 5.4:  $N = 400, k = 0.5, \lambda = 0.16$  için ilerleyen dalga çözümleri

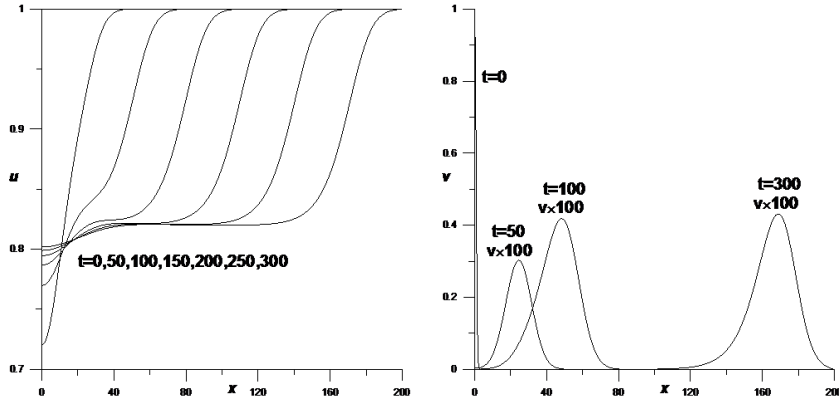
Tablo 5.4’de  $k = 0.5$  durumunda oluşan bağıl hata değerleri verilmiştir. Tablo-  
dan görüldüğü gibi  $\lambda$  nın sıfırdan farklı değerler alması halinde bağıl hata değ-  
lerinde ciddi bir değişme olmamaktadır. Yani  $k = 0.5$  durumunda genişletilmiş  
kübik B-spline kolokeyşin yöntemi ile kübik B-spline kolokeyşin yöntemi aynı sonuç-  
ları vermektedir.

Tablo 5.4:  $k = 0.5, t = 300$  için hesaplanan bağıl hata değerleri

| $k = 0.5$          |                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\lambda = 0$      |                    | $\lambda = 0.16$   |                    |
| $u$                | $v$                | $u$                | $v$                |
| Hata $\times 10^3$ | Hata $\times 10^3$ | Hata $\times 10^3$ | Hata $\times 10^3$ |
| 0.03520            | 0.01539            | 0.03458            | 0.01354            |

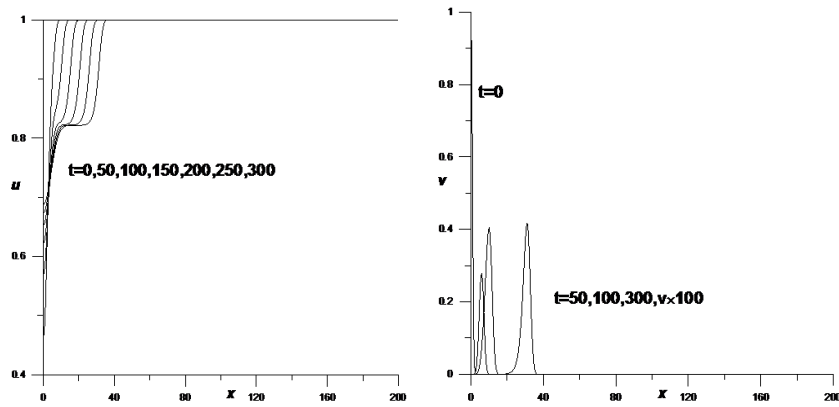
$k = 0.9$  seçildiğinde ise Şekil 5.5’den görüldüğü gibi dalgalar bölge üzerinde  
asimptotik hıza ulaşamamaktadır. Bundan dolayı da dalgaların ilerlemesi sırasında  
sıklaşma olmamaktadır.





Şekil 5.5:  $N = 400, k = 0.9, \lambda = 0$  için ilerleyen dalga çözümleri

Şekil 5.6 da  $\lambda = -1.93$  ve  $k = 0.9$  için oluşan ilerleyen dalga çözümleri grafiklerle gösterilmiştir. Şekil 5.6 dan görüldüğü gibi dalgalar çözüm bölgesi üzerinde asimptotik hıza ulaşamamakta ve sabit hıza yakın bir hızla ilerlemektedir.



Şekil 5.6:  $N = 400, k = 0.9, \lambda = -1.93$  için ilerleyen dalga çözümleri

Tablo 5.5'de  $k = 0.9$  durumunda oluşan bağıl hata değerleri verilmiştir. Tablo-  
dan görüldüğü gibi  $\lambda = -1.93$  seçildiğinde  $u$  fonksiyonu için hesaplanan bağıl hata  
değerlerinde azalma görülmektedir.

Tabo 5.5:  $k = 0.9, t = 300$  için hesaplanan bağıl hata değerleri

| $k = 0.9$          |                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\lambda = 0$      |                    | $\lambda = -1.93$  |                    |
| $u$                | $v$                | $u$                | $v$                |
| Hata $\times 10^3$ | Hata $\times 10^3$ | Hata $\times 10^3$ | Hata $\times 10^3$ |
| 0.14209            | 3.92251            | 0.05089            | 3.85121            |

## 5.4 Sonuç

Bu bölümde, genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yöntemi ile Reaksiyon-Difüzyon denklem sisteminin sayısal çözümleri araştırılmıştır. Zaman ayrışımı için Taylor seri açılımı, konum ayrışımı içinse genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin metodu kullanılmıştır. Elde edilen denklem sistemi  $2N + 2$  denklem  $2N + 6$  bilinmeyenenden oluşmaktadır. Denklemlerin çözülebilmesi için denklem sayısı ile bilinmeyen sayısının eşit olması gerektiğinden, sınır şartları kullanılarak bazı bilinmeyenler elimine edilerek sistemler çözülebilir hale getirilmiştir. Daha sonra da Thomas algoritması kullanılarak çözüme gidilmiştir.

Nümerik çözümlerin doğruluğu test problemleriyle kontrol edilmiştir. Nümerik çözümler, serbest parametre olan  $\lambda$  nın sifıra eşit olduğu ve sıfırdan farklı olduğu değerler için ayrı ayrı hesaplanmış ve bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır.  $\lambda$  değeri sifıra eşit alındığında yöntemimiz kübik B-spline kolokeyşin yöntemiyle aynı sonuçları vermektedir. Dolayısıyla farklı test problemleri ve farklı parametreler için kübik B-spline kolokeyşin yöntemiyle, genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yöntemi arasında karşılaştırma yapma imkanına kavuşulmuştur.

Lineer problemin tabloları incelendiğinde,  $\lambda$  nın sıfırdan farklı değerleri için elde edilen hata normlarının,  $\lambda = 0$  durumundakine göre daha küçük değerler olduğu, dolayısıyla genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yönteminin, kübik B-spline kolokeyşin yöntemine göre daha doğru sonuçlar verdiği görülmüştür.

İzotermal kimyasal sitemin nümerik çözümlerinin doğruluğunu kontrol etmek için bağıl hata kullanılmıştır. Oluşturulan tablolar incelendiğinde de,  $k = 0.1$

durumunda,  $v(x, t)$  için elde edilen bağıl hata değerlerinin,  $\lambda$  nın sıfırdan farklı olduğu hallerde,  $\lambda = 0$  durumundakine göre daha küçük değerler olduğu, dolayısıyla genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yönteminin, kübik B-spline kolokeyşin yöntemine göre daha doğru sonuçlar verdiği görülmüştür. Grafikler incelendiğinde ise dalgaların asimptotik hıza ulaştıkları, genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yöntemi kullanıldığında, sağ taraftaki sıklaşmanın daha kısa sürede olduğu söylenebilir.  $k = 0.5$  seçilmesi durumunda,  $\lambda$  nın sıfırdan farklı değerleri için elde edilen hata normlarının,  $\lambda = 0$  durumundakine göre farklı olmadığı, dolayısıyla genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yönteminin, kübik B-spline kolokeyşin yöntemi ile aynı sonuçları verdiği görülmüştür. Grafikler incelendiğinde, dalgaların asimptotik hıza ulaştıkları, genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yöntemi kullanıldığında sağ taraftaki sıklaşmanın, kübik B-spline kolokeyşin yöntemi ile aynı sürede olduğu söylenebilir.  $k = 0.9$  seçilmesi durumunda ise,  $u(x, t)$  için bulunan bağıl hatanın,  $\lambda$  nın sıfırdan farklı olması durumunda,  $\lambda = 0$  durumundakine göre daha küçük olduğu, dolayısıyla genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yönteminin, kübik B-spline kolokeyşin yöntemine göre daha doğru sonuçlar verdiği görülmüştür. Grafikler incelendiğinde ise  $k = 0.9$  seçilmesi durumunda, dalgaların her iki yöntem için de sabit hıza yakın bir hızla ilerledikleri ve asimptotik hıza ulaşamadıkları gözlemlenmiştir.

## BÖLÜM 6

### SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada NLS, RB , KB, İkili Burgers ve Reaksiyon-Difüzyon denklem sistemlerinin genişletilmiş kübik B-spline Taylor kolokeyşin yöntemi ile sayısal çözümleri araştırılmış, çözümlerin doğruluğu test problemleri kullanılarak incelenmiştir.

Birinci bölümde; sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri, kolokeyşin metodu, B-spline fonksiyonlar, kübik B-spline fonksiyonlar, genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yöntemi, lineer olmayan oluşum denklemleri, korunum kanunları, soliton dalgaları tanıtılmış, daha sonra, ilerleyen bölümlerde sayısal çözümleri bulunacak olan denklem sistemleri ve test problemleri hakkında bilgiler verilmiştir. Bu bölümde aynı zamanda elde edilen nümerik çözümlerin doğruluğunu kontrol etmek için kullandığımız hata normları ve bağıl hatanın bağıntıları da verilmiştir.

İkinci bölümde NLS denklem sisteminin sayısal çözümleri bulunmuş, bulunan çözümlerin doğruluğu hata normları ve korunum sabitlerinin değerlerine bakılarak kontrol edilmiştir. Sayısal çözümün modülünün ve oluşan hatanın grafikleri çizilmiştir. Aynı zamanda bulunan sayısal sonuçlar tablolarla gösterilmiştir. Önerilen yöntemin doğruluğu, solitary dalga çözümü, iki soliton dalgasının çarpışması, sabit soliton dalgasının doğuşu, hareketli soliton dalgasının doğuşu ve bağlı durumlu solitonlar başlıkları altında ifade edilen, beş tane test problemi ile araştırılmıştır.

Üçüncü bölümde KB ve RB denklem sistemlerinin sayısal çözümleri bulunmuş, bulunan çözümlerin doğruluğu hata normlarının değerlerine bakılarak kontrol edilmiştir. Sayısal çözümün ve oluşan hatanın grafikleri çizilmiştir. Aynı zamanda bulunan sayısal sonuçlar tablolarla gösterilmiştir. Genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yönteminin doğruluğu, ilerleyen dalga çözümü, iki ilerleyen dalganın çarpışması başlıkları ile ifade edilen iki adet test problemi ile incelenmiştir.

Dördüncü bölümde İkili Burgers denklem sisteminin sayısal çözümleri bulunmuş, bulunan çözümlerin doğruluğu hata normlarının değerlerine bakılarak kontrol edilmiştir. Sayısal çözümün ve oluşan hatanın grafikleri çizilmiştir. Aynı zamanda bulunan sayısal sonuçlar tablolarla gösterilmiştir. Kullanılan sayısal yöntemin doğruluğu iki test problemi kullanılarak araştırılmıştır.

Beşinci bölümde Reaksiyon-Difüzyon denklem sisteminin sayısal çözümleri bulunmuş, bulunan çözümlerin doğruluğu hata normlarının değerlerine bakılarak kontrol edilmiştir. Sayısal çözümün grafikleri çizilmiştir. Aynı zamanda bulunan sayısal sonuçlar tablolarla gösterilmiştir. Kullanılan sayısal yöntemin doğruluğu lineer problem ve izotermal kimyasal sistem olarak adlandırılan iki tane test problemi ile araştırılmıştır. İzotermal kimyasal problem başlığıyla verilen test probleminin sayısal sonuçlarının doğruluğunu kontrol etmek için önceki bölümlerden farklı olarak, bağıl hata değerleri kullanılmıştır. Çünkü bu test probleminin analitik çözümü yoktur.

Elde edilen tüm sonuçlar incelendiğinde, genel olarak  $\lambda$  nın sıfırdan farklı değerleri için elde edilen hata normlarının,  $\lambda = 0$  durumundakine göre daha küçük değerler aldığı, dolayısıyla genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yönteminin, kübik B-spline kolokeyşin yöntemine göre daha doğru sonuçlar verdiği görülmüştür. Uygulanması açısından bakıldığında genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin metodunun, kübik B-spline kolokeyşin metoduna göre işlem maliyetinin daha fazla olduğu söylenebilir.

Sonuç olarak , doğru sonuçlar vermesi ve problemleri modellemedeki başarısı açısından bakıldığında, benzer tipteki kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri araştırılırken kullanılması tavsiye edilir.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Abassy, T. A., El-Tawil, M. A. and El-Zoheiry, H., 2007, Exact solutions of some nonlinear partial differential equations using the variational iteration method linked with Laplace transforms and the Pade technique, *Comput. Math. Appl.*, 54, 940-954.
- Abazari, R. and Borhanifar, A., 2010, Numerical study of the solution of the Burgers and coupled Burgers equations by a differential transformation method, *Comput. Math. Appl.*, 59, 2711-2722.
- Abazari, R. , 2011, Numerical simulation of coupled nonlinear Schrödinger equation by RDTM and comparison with DTM, *Journal of Applied Science*, 11(20), 3454-3463.
- Abd. Hamid, N. N., Abd. Majid, A. and Md. Ismail, A. I., 2011, Extended cubic B-spline method for linear two-point boundary value problems, *Sains Malaysiana*, 40(11), 1285-1290.
- Abdou, M. A. and Soliman, A. A., 2005, Variational iteration method for solving Burgers' and coupled Burgers' equations, *J. Comput. Appl. Math.*, 181, 245-251.
- Al-Khaled, K. and Nusier, A. S., 2008, Numerical investigation for solitary solutions of the Boussinesq equation, *Appl. Math. E-Notes*, 8, 159-170.
- Amick, C.J., 1984, Regularity and uniqueness of solutions to the Boussinesq system of equations, *Journal of Differential Equations* 54, 231-247
- Argyris ,J.and Haase, M.,1987, An engineer's guide to soliton phenomena: Application of the finite element method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 61 ,71-122.
- Aronson, D.G. and Weinberger, H.F., 1975, Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation in:J.A. Goldstein (Ed.), *Partial Differntia Equations and Related Topics*, in: *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 446, SPringer-Verlag, Heidelberg, Berlin, 1975, pp. 5-49., 508-509.

## KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Barari, T., Barari, A., Momeni, M. and Vahdatirad, M. J., 2010, Numerical analysis of coupled system of nonlinear diffusion-reaction problem, *Int. Jour. of Appl. Math. and Comput.*, 2(24), 55-62.
- Bona, J.L., Saut, J.-C. and Toland, J.F., 1997, Boussinesq equations for small-amplitude long wavelength water waves (preprint).
- Bona, J.L. and Chen, M., 1998, A Boussinesq system for two way propagation of nonlinear dispersive waves, *Physica D* 116, 191-224.
- Bona, J.L., Chen, M. and Saut, J.-C., 2002, Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media I: derivation and linear theory, *Journal of Nonlinear Science* 12, 283-318.
- Boor, C., 1978, *A practical guide to splines*, Springer.
- Boussinesq, J.V., 1871, Theorie de l'intumescence liquide appelee onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire, *Comptes Rendus de l'Academie de Sciences* 72, 755-759.
- Calogero, F. and Eckhaus, W., 1987, Nonlinear evolution equations, rescalings, model PDEs and their integrability. I, *Inverse Problems* 3, 229-262.
- Chaohao, G., 1995, *Soliton theory and its applications*, Springer, 403 p.
- Chen, M., 1998, Exact travelling-wave solutions to bidirectional wave equations, *International Journal of Theoretical Physics*, 37 (5), 1547-1567.
- Chen, M., 1998, Exact solutions of various Boussinesq systems, *Applied Mathematics Letters* 5, 45-49.
- Chen, Y. and An, H., 2008, Numerical solutions of coupled Burgers equations with time- and space-fractional derivatives, *Appl. Math. and Comput.*, 200, 87-95.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Chou, C. S., Zhang, Y. T., Zhao, R. and Nie, Q., 2007, Numerical methods for stiff reaction-diffusion systems, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, 7, 515-525.
- Dağ, I., 1994, Studies of B-spline finite elements, PhD thesis, University of Wales, Bangor, U.K.
- Dağ, I., Irk, D. and Saka, B., 2005, A numerical solution of the Burgers' equation using cubic B-splines, *Applied Mathematics and Computation* 163(1), 199-211.
- Dağ, I., Irk, D. and Şahin, A., 2005, B-spline collocation methods for numerical solutions of the Burgers' , *Mathematical Problems in Engineering* (5), 521-538.
- Davies, A. J., 1980, *The finite element method: A first approach*, Clarendon Press, Oxford.
- Denghan, M., Hamidi, A. and Shakourifar, M., 2007, The solution coupled Burgers' equations using Adomian-Pade technique, *Appl. Math. and Comput.*, 189, 1034-1047.
- Denghan, M. and Taleei, A., 2010, Numerical solution of nonlinear Schrödinger equation by using time-space Pseudo-Spectral method, *Inc. Num. Methods Partial Differential Eq.*, 26, 979-992.
- Dereli, Y., Irk, D. and Dağ, I., 2009, Simulations of Solitons Using Radial Basis Functions for NLS Equation, *Chaos, Solitons and Fractals*, 42, 1227-1233.
- Epstein, I.R. and Pojman, J.A., 1998, *An Introduction to Nonlinear Chemical Dynamics*, Oxford University Press.
- Esipov, S. E., 1995, Coupled Burgers' equations: a model of polydisperse sedimentation, *Phys. Rev. Lett.*, 52, 3711-3718.



## KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Falkovich, G., 2007, Soliton: A brief history of , <http://www.weizmann.ac.il/~home/fnfal/soliton.pdf>.
- Fordy, A.P., 1990, Soliton theory: a survey of results, Manchester Univ Pr, 300 p.
- Gardner, L.R.T., Gardner, G.A. and Ali. A.H.A., 1991, Simulations of solitons using quadratic spline finite elements, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 92 : 231–243.
- Gardner, L.R.T., Gardner, G.A. and Doğan, A., 1996, A least-squares finite element scheme for the RLW equation, Communications in Numerical Methods in Engineering 12(11), 795-804.
- Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M. D., and Miura, R. M., 1967, Method for solving the Korteweg-deVries equation, Physical Review Letters 19, 1095-1097.
- Gang, X. U., Guo-Zhao, W., 2008, Extended cubic uniform B-spline and  $\alpha$ -B-spline, Acta Automatica Sinica, 34(8).
- Ghoreishi, M., Ismail, A.I.B.Md. and Rashid, A., 2011, The Coupled Viscous Burgers Equations with Fractional-Time Derivative by the Homotopy Perturbation Method, J. Comput. Anal. Appl., 13(6), 1054-1066.
- Ghotbi, A. R., Avaei, A., Barari, A. and Mohammadzade, M. A., 2008, Assessment of He's Homotopy Perturbation Method in Burgers' and Coupled Burgers' Equations, L. Applied. Sci., 8(2), 322-327.
- Gierer, A. and Meinhardt, H., 1972, A theory of biological pattern formation, Kybernetik, 12, 30-39.
- Harvard Gazette Archives, April 20, 2006, Solitons: next wave in electronics, <http://www.news.harvard.edu/gazette/2006/04.20/10-soliton.html>.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Hasimoto, H. and Ono, H., 1972, Nonlinear modulation of gravity waves, *Journal of Physical Society of Japan* 33, 805–811.
- Herbst, B.M., Morris J. Ll, and Mitchel, A.R., 1985, Numerical experience with the nonlinear Schrödinger equation, *J. Comput. Phys.*, 60 , 282–305.
- Höllig, K., 2003, Finite element methods with B-splines, *Society for Industrial & Applied Mathematics*, 145 p.
- Hunter, J. K., 1996, Nonlinear evolution equations, University of California, Davis.
- Inan, I. E., Kaya, D. and Ugurlu, Y., 2010, Auto-Bäcklund transformation and similarity reductions for coupled Burger's equation, *Appl. Math. and Comput.*, 216, 2507-2511.
- Infeld, E. and Rowlands, G., 1990, *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos*, Cambridge University Press.
- İrk, D., 2007, Bazı kısmi türevli diferansiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümleri, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Doktora Tezi
- İslam, S., Sarler, B., Vertnik, R. and Kosec, G., 2012, Radial basis function collocation method for the numerical solution of the two-dimensional transient nonlinear coupled Burgers' equations, *Applied Mathematical Modelling*, 36, 1148-1160.
- Ismail, M. S., 2007, Numerical solution of coupled nonlinear Schrödinger equation by Galerkin method, *Math. and Comput. in Simulation*, 78, 532-547.
- Jin-Ming, Z. and Yao-Ming, Z., 2011, The Hirota bilinear method for the coupled Burgers equation and high-order Boussinesq Burgers equation, *Chin. Phys. B*, 20(1), 010205-1-7.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Karpman, V.I. and Krushkal, E.M., 1969, Modulated waves in non-linear dispersive media, Soviet Phys. JEPT 28, 277-281.
- Kaya, D., 2001, An explicit solution of coupled viscous Burgers' equation by the decomposition method, Int. J. Math. Sci., 27(11), 675-680.
- Khater, A. H., Temsah R. S. and Hassan M. M., 2008, A Chebyshev spectral collocation method for solving Burgers'-typ equations, J. Comput. Appl. Math., 222(2), 333-350.
- Korkmaz, A. and Dağ, I., 2008, A differential quadrature algorithm for simulations of the nonlinear Schrödinger equation, Comp. Math. Appl., 56, 2222-2234.
- Korteweg, D.J and De Vries, G., 1895, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves, Philosophical Magazine 39, 422-443.
- Lamb, G.L., 1980, Elements of soliton theory, John Wiley and Sons, 304 p.
- Lapidus, L. and Pinder, G.F., 1982, Numerical solution of partial differential equations in science and engineering, John Wiley and Sons, 677 p.
- Lian, Z. and Lou, S.Y., 2006, Symmetry study of the coupled Burgers system, Chaos, Solitons and Fractals, 27, 51-55.
- Liu, J. and Hou, G., 2011, Numerical solutions of the space-and time-fractional coupled Burgers' equations by generalized differential transform method, Appl. Math. and Comput., 217, 7001-7008.
- Liu, J. and Sun, Z., 2007, Finite difference method for reaction-diffusion equation with nonlocal boundary conditions, Numer. Math. J. Chinese Univ., 16, 97-111.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Liu. N., 2010, Similarity reduction and explicit solutions for the variable-coefficient coupled Burger's equations, *Appl. Math. and Comput.*, 217, 4178-4185.
- Logan, D. L., 2007, *A First Course in the Finite Element Method (Fourth Edition)*, Thomson.
- Löhner, R, Morgan, K.,and Zienkiewich.,O. C., 1984, The solution of the non-linear hyperbolic equation systems by finite element method, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 4, 1043–1063.
- Maini, P. K., Painter, K. J. and Chau, H. N. P., 1997, Spatial pattern formation in chemical and biological systems, *J. Chem. Soc., Faraday Trans.*, 93(20), 3601-3610.
- Merkin, J.H., Needham, D.J. and Scott, S.K., 1989, The development of travelling waves in a simple isothermal chemical system I. Quadratic autocatalysis with linear decay, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 424, 187-209.
- Mittal, R. C. and Arora, G., 2011, Numerical solution of the coupled viscous Burgers' equation, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 16, 1304-1313.
- Mohyud-Din, S. T., Inc, M. and Cavlak, E., 2010, On numerical solutions of two-dimensional Boussinesq equations by using Adomian decomposition and He's homotopy perturbation method, *Applications and Applied Mathematics*, 1, 1-11.
- Mokhtari, R., Toodar, A. S. and Chegini, N. G., 2011, Num. simu. of coupled nonlinear Schrödinger equations using the generalized differential quadrature method, *Chin. Phys. Lett.*, 28(2), 020202.
- Mokhtari, R., Toodar, A. S. and Chegini, N. G., 2011, Application of the generalized differential quadrature method in solving Burgers' equations, *Commun. Theor. Phys.*, 56, 1009-1015.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Nee, J., and Duan, J., 1998, Limit set of trajectories of the coupled viscous Burgers' equations, *Appl. Math. Lett.*, 11(1), 57-61.
- Pelloni, B. and Dougalis, V.A., 2001, Numerical modelling of two-way propagation of non-linear dispersive waves, *Mathematics and Computers in Simulation* 55, 595-606.
- Prenter, P. M., 1975, *Splines and variational methods*, John Wiley&Sons, 336 p.
- Rashid, A. and Ismail, A. I. B. M., 2009, A Fourier Pseudospectral Method for Solving Coupled Viscous Burgers' Equations, *Comp. Methods in Appl. Math.*, 9(4), 412-420.
- Reddy, J. N., 1993, *An introduction to the finite element method*, Mcgraw-Hill Book Company, Singapore.
- Robinson, M.P. and Fairweather, G., 1994, Orthogonal spline collocation methods for Schrödinger-type equation in one space variable, *Numer. Math.*, 68(3), 303-318.
- Russel, J.S., 1844, Report on waves, Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement. of Science (John Murray, London) pp 311-390.
- Sahin, A., 2009, Reaksiyon-Difüzyon Denklem Sistemlerinin B-spline Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Nümerik Çözümleri, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi.
- Saka, B. and Dağ, I., 2005, A collocation method for the numerical solution of the RLW equation using cubic B-spline basis, *Arabian Journal for Science and Engineering* 30(1A), 39-50.
- Schonbek, M.E., 1981, Existence of solutions for the Boussinesq sytem of equations, *Journal of Differential Equations* 42, 325-352.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Scott, A.C., Chu, F.Y.F and D.W. Mclaughlin.D.W, (1973) The soliton: A new concept in applied science, Procc., IEEE 61: 1443-1483.
- Sherratt, J. A., 1997, A comparison of two num. methods for oscillatory reaction-diffusion equations systems, Appl. Math. Lett., 10(2), 1-5.
- Shirvany Y., Hayati M.and Moradian R., 2007, Numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation by feedforward neural networks, Commu. in Non. Sci. and Num.Simu., 13, 2132-2145.
- Smith, G.D., 1978, Numerical solution of partial differential equations, finite difference methods, Oxford university press, 304 p.
- Soliman A. A., 2006, The modified extended tanh-function method for solving Burgers-type equations, Physica A., 361, 394-404.
- Soliman A. A., 2007, On the solution of two-dimensional coupled Burgers' equations by variational iteration method, Chaos, Solitons and Fractals, 40(3), 1146-1155.
- Somathilake, L. W., 2009, Numerical solutions of reaction-diffusion systems with coupled diffusion terms, Ruhuna Journal of Science, 4, 1-12
- Strauss, W.A., 1978, The non-linear Schrödinger equation, in Contemporary Developments in continuum Mechanics, edited by G. M. de la Penha and L. A. Medeiros, North-Holland, NewYork, 452 p.
- Sweilam, N. H. and Khader, M. M., 2009, Exact solutions of some coupled partial diferential equations using the homotopy perturbation method, Comput. Math. Appl., 58, 2134-2141.
- Taha, T.R. and Ablowitz, M.J., 1984, Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. II, Numerical, nonlinear Schrödinger equations, J. Comput. Phys., 55, 203–230.

## KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Taşcan, F., 2002, İntegrallenebilirlik ve pertürbasyon teori, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 63 s.
- Thomas, D., 1975, Artificial enzyme membrane, transport, memory, and oscillatory phenomena, in: D. Thomas, J.-P. Kervenez (Eds.) Analysis and control of imbolised enzyme systems, Springer, Berlin, Heidelberg, Nw York, 1975, 115-150.
- Thomas, J.W., 1995, Numerical partial differential equations, Springer, 437 p
- Tourigny, Y. and Morris.J. LI,. 1988, An investigation into the effect of product approximation in the numerical solution of the cubic nonlinear Schrödinger equation, J. Comput. Phys., 76 : 103-130.
- Twizell, E. H., Wang, Y., Price, W. G. and Fakhr, F., 1994, Finite-Difference methods for solving the reaction-diffusion equations of a simple isothermal chemical system, Numer. Meth. for Partial Differential Equations, 10, 435-454.
- Uçar, Y.,2011, B-spline sonlu eleman yöntemleri ile coupled diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 240 s.
- Whitham, G.B., 1974, Linear and nonlinear waves, Wiley, New York, 636 p.
- Wu, S.L. and Liu, S. Y., 2009, Asymptotic speed of spread and travelling fronts for a nonlocal reaction-diffusion model with distributed delay, Applied Mathematical Modelling, 33, 2757-2765.
- Yıldırım, A. and Kelleci, A., 2011, An efficient numerical method for solving coupled Burgers' equation by combining homotopy perturbation and pade techniques, Numer. Meth. Part. Diff. Equ., 27(4 ), 982-995.

Zabusky, N.J. and Kruskal, M.D, 1965, Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and recurrence of initial states, Physical Review Letters 15, 240-243.

Zakharov, V.E., and Shabat, A.B., , 1972, Exact theory of two dimensional self focusing and one dimensional self waves in nonlinear media, Soviet Phys, JEPT, 34, 62-69



## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı:** Abdullah Murat Aksoy

**Uyruğu:** T.C

**Doğum Yeri, Tarihi:** Bakırköy, 07.05.1975

**Medeni hali:** Evli

**Adres :**Alanönü Mah.

Maide Bolel Huzurevi Cad. No:1/12

Odunpazarı/Eskişehir

**E-posta:** amurataksoy1@gmail.com

### **Eğitim Bilgileri:**

#### **Doktora:**

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı  
(2007-2012)

#### **Yüksek Lisans:**

Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü  
Fen ve Mühendislik Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı  
(2003-2006)

#### **Lisans:**

Atatürk Üniversitesi  
Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi  
Matematik Bölümü  
(1993-1998)

### **İş Deneyimi:**

Matematik Öğretmeni, Muzaffer Çil Anadolu Lisesi, Eskişehir, 2008-  
Matematik Öğretmeni, Ertuğrulgazi Anadolu Lisesi, Erzincan, 2007-2008  
Matematik Öğretmeni, Atatürk Sağlık Meslek Lisesi, Erzincan, 2006-2007  
Matematik Öğretmeni, Hacı Ali Akın Lisesi, Kemaliye, Erzincan, 2005-2006  
Matematik Öğretmeni, Elka İlköğretim Okulu, Pendik, İstanbul, 2002-2005  
Matematik Öğretmeni, Yavuz Sultan Selim İlköğretim Okulu, Çorum, 1998-2002