



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**THİRRİNG İNSTANTONLARININ KAOTİK
DAVRANIŞLARININ DUFFİNG KARAKTERİSTİĞİ**

Beyrul CANBAZ

Fizik Anabilim Dalı

Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programı

Danışman

Prof.Dr. K. Gediz AKDENİZ

Haziran, 2012

İSTANBUL



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**THİRRİNG İNSTANTONLARININ KAOTİK
DAVRANIŞLARININ DUFFİNG KARAKTERİSTİĞİ**

Beyrul CANBAZ

Fizik Anabilim Dalı

Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programı

Danışman

Prof.Dr. K. Gediz AKDENİZ

Haziran, 2012

İSTANBUL

2602080040 Öğrenci numaralı Beyrul CANBAZ tarafından hazırlanan bu çalışma 22/06/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.



Prof. Dr. K. Gediz AKDENİZ
Danışman
İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi

Tez Jürisi



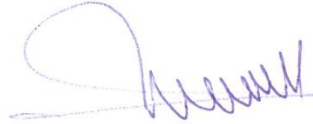
Prof. Dr. Haşim MUTUŞ
İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi



Prof. Dr. Hasan TATLIPINAR
Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi



Prof. Dr. Handan GÜRBÜZ
Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi



Doç. Dr. Bayram DEMİR
İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi

ÖNSÖZ

Yüksek lisans ve doktora öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof.Dr.K. Gediz AKDENİZ'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Ayrıca, doktora eğitimim süresince benden desteklerini esirgemeyen sevgili ailemin tüm fertlerine ve tez çalışmam boyunca yardımlarını esirgemeyen Mine AK'a minnetlerimi sunarım.

Haziran, 2012

Beyrul CANBAZ

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖZET.....	vii
SUMMARY	viii
1.GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	4
2.1. SAF SPİNÖR ALAN TEORİLERİ	4
2.2. İNSTANTONLARIN TARİHİ VE ÖNEMİ	5
2.3. DİNAMİK SİSTEMLER VE KAOS.....	8
3. MALZEME VE YÖNTEM	11
3.1. DUFFİNG DENKLEMİ	11
3.2. KÜTLESİZ SAF SPİNÖR THİRRİNG ALAN MODELİ	15
3.3. THİRRİNG İNSTANTONLARINDA KARARLILIK ANALİZİ	17
3.4. THİRRİNG İNSTANTONLARININ FAZ UZAYONDAKİ DAVRANIŞLARI	19
4. BULGULAR	24
4.1. PERİYODİK KUVVET ETKİSİ ALTINDAKİ THİRRİNG İNSTANTONLARINDA KAOTİK DAVRANIŞLAR.....	24
4.2. PERİYODİK KUVVET ETKİSİ ALTINDAKİ THİRRİNG İNSTANTONLARININ FAZ UZAYINDAKİ DAVRANIŞLARI	28
4.3. PERİYODİK KUVVET ETKİSİ ALTINDAKİ THİRRİNG İNSTANTONLARININ POINCARÉ KESİTLERİ	38

4.4. PERİYODİK KUVVET ETKİSİ ALTINDAKİ THİRRİNG INSTANTONLARINDA ZAMAN SERİSİ.....	45
4.5. PERİYODİK KUVVET ETKİSİ ALTINDAKİ THİRRİNG INSTANTONLARINDA GÜÇ SPEKTRUMLARI.....	52
4.6. PERİYODİK KUVVET ETKİSİ ALTINDAKİ THİRRİNG INSTANTONLARININ SKALOGRAF ANALİZİ.....	60
4.7. İÇ VE DIŞ PERİYODİK KUVVETLER ETKİSİ ALTINDAKİ THİRRİNG INSTANTONLARININ KARŞILAŞTIRILMASI	68
4.8. THİRRİNG INSTANTONLARININ DUFFİNG KARAKTERİSTİĞİ.....	78
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	82
KAYNAKLAR	85
ÖZGEÇMİŞ.....	90
EKLER.....	91
EK A.....	91
EK B	92

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3. 1 : Duffing Faz Uzayı.....	13
Şekil 3. 2 : Periyodik Kuvvet Altındaki Duffing Sisteminin Faz Durum Diyagramları	14
Şekil 3. 3: Thirring İntantonu için $gABcc = 1$ olan $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı.....	19
Şekil 3. 4 : Thirring İntantonu için $gABcc = 1.2$ olan $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı.....	20
Şekil 3. 5 : Thirring İntantonu için $gABcc = 0.7$ olan $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı	20
Şekil 4. 1 : Thirring İntantonlarının $w = 1$ ve $\theta = 0$ olduğu $F(z) - G(z)$ Faz Diyagramları ..	25
Şekil 4. 2 : Thirring İntantonlarının $w = 1$ ve $\theta = 0$ olduğu $F(z) - G(z)$ Faz Diyagramları ..	27
Şekil 4. 3 : $\cos(0.01z)$ periyodik kuvveti etkisi altında Thirring İntantonlarının davranışlarındaki değişimler	69
Şekil 4. 4 : $\cos(z)$ periyodik kuvveti etkisi altında Thirring İntantonlarının davranışlarındaki değişimler	70
Şekil 4. 5 : $\cos(5z)$ periyodik kuvveti etkisi altında Thirring İntantonlarının davranışlarındaki değişimler	71
Şekil 4. 6 : $0.001\cos(z)$ periyodik kuvveti etkisi altında Thirring İntantonlarının davranışlarındaki değişimler	72
Şekil 4. 7 : $0.1\cos(z)$ periyodik kuvveti etkisi altında Thirring İntantonlarının davranışlarındaki değişimler	73
Şekil 4. 8 : $10\cos(z)$ periyodik kuvveti etkisi altında Thirring İntantonlarının davranışlarındaki değişimler	74
Şekil 4. 9 : $\cos(z + 45)$ periyodik kuvveti etkisi altında Thirring İntantonlarının davranışlarındaki değişimler	75
Şekil 4. 10 : $\cos(z + 90)$ periyodik kuvveti etkisi altında Thirring İntantonlarının davranışlarındaki değişimler	76
Şekil 4. 11 : $\cos(z + 270)$ periyodik kuvveti etkisi altında Thirring İntantonlarının davranışlarındaki değişimler	77
Şekil 4. 12 : $0.01\cos(z)$ periyodik dış kuvveti etkisi altındaki Thirring İntantonları ile Duffing Sisteminin Karşılaştırılması	79
Şekil 4. 13 : $\cos(z)$ periyodik dış kuvveti etkisi altındaki Thirring İntantonları ile Duffing Sisteminin Karşılaştırılması	80
Şekil 4. 14 : $10\cos(z)$ periyodik dış kuvveti etkisi altındaki Thirring İntantonları ile Duffing Sisteminin Karşılaştırılması	81

TABLO LİSTESİ

Tablo 3. 1 : Gürsey ve Thirring Instantonlarının Faz Uzaı Davranışlarının Karşılaştırılması .	22
Tablo 4. 1 : $A = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Faz Diyagramları	29
Tablo 4. 2 : $A = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Faz Diyagramları	31
Tablo 4. 3 : $\omega = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Faz Diyagramları	34
Tablo 4. 4 : $\omega = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Faz Diyagramları	35
Tablo 4. 5 : $\omega = 1$, $A = 1$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Faz Diyagramları	36
Tablo 4. 6 : $\omega = 1$, $A = 1$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Faz Diyagramları	37
Tablo 4. 7 : $A = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Poincare Kesitleri	39
Tablo 4. 8 : $A = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Poincare Kesitleri	40
Tablo 4. 9 : $\omega = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Poincare Kesitleri	41
Tablo 4. 10 : $\omega = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Poincare Kesitleri	42
Tablo 4. 11 : $A = 1$, $\omega = 1$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Poincare Kesitleri	43
Tablo 4. 12 : $A = 1$, $\omega = 1$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Poincare Kesitleri	44
Tablo 4. 13 : $A = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Zaman Serisi	46
Tablo 4. 14 : $A = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Zaman Serisi	47
Tablo 4. 15 : $\omega = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Zaman Serisi	48
Tablo 4. 16 : $\omega = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Zaman Serisi	49
Tablo 4. 17 : $A = 1$, $\omega = 1$ Periyodik Dış Kuvvetler Altında Zaman Serisi	50
Tablo 4. 18 : $A = 1$, $\omega = 1$ Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Zaman Serisi	51
Tablo 4. 19 : $A = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Güç Spektrumları	53
Tablo 4. 20 : $A = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Güç Spektrumları	54
Tablo 4. 21 : $\omega = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Güç Spektrumları	55
Tablo 4. 22 : $\omega = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Güç Spektrumları	56
Tablo 4. 23 : $A = 1$, $\omega = 1$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Güç Spektrumları	57
Tablo 4. 24 : $A = 1$, $\omega = 1$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Güç Spektrumları	58
Tablo 4. 25 : $A = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Skalogram	61
Tablo 4. 26 : $A = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Skalogram	62
Tablo 4. 27 : $\omega = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Skalogram	63
Tablo 4. 28 : $\omega = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Skalogram	64
Tablo 4. 29 : $A = 1$, $\omega = 1$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Skalogram	65
Tablo 4. 30 : $A = 1$, $\omega = 1$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Skalogram	66

SEMBOL LİSTESİ

L	: Lagrange yoğunluğu
$\overline{\psi}, \psi$	: Spinör alanlar
g	: Spinör alanların bağlantı sabiti
σ_μ	: Sigma matrisleri
γ_μ	: Dirac matrisleri
w	: Periyodik kuvvetin frekansı
θ	: Periyodik kuvvetin fazı

ÖZET

İnstantonlar sıfır enerjili, sonlu ve sıfırdan farklı eylemlerdeki konformal simetriyi kendiliğinden kıran klasik çözümlerdir. Teorik ve matematiksel fizikte önemli rol oynayan ve vakum durumuna tekabül eden instantonların önemi tez boyunca vurgulanmaya çalışılmıştır.

Konformal simetrik kütlesiz Thirring Model, iki boyuttaki saf spinör alanda kendi kendine etkileşen spinörlerin tam olarak çözülebildiği bir kuantum alan teorisidir. Basitliği ve çözülebilirliği göz önünde tutulduğunda bu model kuantum alanlar teorisinde yeni fikirler ve metotlar için popüler bir test zemini olmuştur. Thirring Model'in instanton tipi çözümleri de konformal simetri kırılmasıyla bulunmuştur.

Yakın zamanda Thirring Model'de Heisenberg anızatı kullanılarak instanton çözümlerini de veren doğrusal olmayan diferansiyel denklem sistemi ele alınmış, Thirring İnstantonları olarak adlandırdığımız bu instantonların faz uzayındaki davranışlarına bakılmıştır. Bu tezde Thirring İnstantonlarının davranışlarının periyodik bir kuvvet etkisi altındaki kaotik değişimlerini inceledik. Ayrıca bu değişimin dinamiği hakkında daha fazla bilgi edinebilmek için, faz diyagramlarına, Poincare kesitlerine, zaman serilerine, güç spektrumlarına ve skalogram analizine baktık ve bulunan sonuçları yorumlamaya çalıştık.

SUMMARY

THE DUFFING CHARACTERIZATION OF CHAOTIC BEHAVIOURS OF THIRRING INSTANTONS

Instantons are classical solutions spontaneous breaking of conformal symmetry with zero-energy, a finite, non-zero action. The importance of instantons which plays an important role in theoretical and mathematical physics and corresponds to the vacuum state has been tried to emphasize throughout the thesis.

Conformally symmetric massless Thirring model is an exactly solvable Quantum Field Theory of a pure spinor field in a two dimensional space-time, with self-interacting spinors. The Model has been a popular test ground for new ideas and methods in Quantum Field Theory. The instanton type solutions of Thirring Model are also found by breaking of conformal symmetry.

Recently the non-linear equations system form of Thirring model which is obtained via Heisenberg anzats has been examined. By this the behaviours of instanton solutions, Thirring Instantons, are investigated in phase-space. In this thesis we have studied the chaotic variations of the behaviours of Thirring Instantons under the influence of a periodic force. In addition, in order to get more information to interpret to the dynamics of this change, we have evaluated phase diagrams, Poincare sections, time series, power spectra and scalogram analysis and tried to interpret the results.

1.GİRİŞ

1926 yılında Schrödinger'in, Bohr tarafından keşfedilen bir atomdaki elektronların acayip davranışlarının de Broglie dalga teorisini kesin matematiksel denklemlere dönüştürmüş olması, yani küçük cisimlerin davranışının doğrusal olmayan "kuantum dalga denklemleri" ile belirlenebileceğinin anlaşılması [1] ve 1930'lu yıllarda Dirac tarafından yazılan spinör alanlı doğrusal olmayan dalga denklemi çözümlerinin elektron ve anti-elektron yorumlamasındaki başarısı [2,3], teorik fizikçileri yeni doğrusal olmayan alan denklemleri yazmaya ve bu denklemlerin fiziksel dalga çözümlerini aramaya teşvik etti.

Yeni parçacıkların keşfedilmesi ile bu teorik çalışmalar ve arayışlar daha da cazibeli bir duruma geldi. Özellikle 1950'li yıllardan itibaren teorik fizik dünyasında söz konusu bu çabalarda büyük bir artma gözlemlendi. Tüm parçacıkları kapsayacağı ümit edilen geniş simetrilere sahip birçok sayıda teorik modeller geliştirildi ve önerildi. Doğrusal olmayan alan denklemleri üzerine yapılan bu ısrarlı çalışmalar ve arayışlar en sonunda meyvesini verdi. Temel parçacıkları tek bir alan teorisi altında toplayabilmenin önünü açacak matematiksel yapının temelleri atıldı. 1954 yılında iki teorik fizikçi, Yang ve Mills çok önceleri matematikçiler tarafından üzerinde çalışmalar yapılmış Abelyen olmayan Lie gruplarının sınıflandırılmasını bu tip Doğrusal olmayan alan modellerine uyguladılar [4]. Geometrik olmayan simetrileri de kapsayan global ayar ve alanların dinamik yapılaşmasını da verebilecek yerel ayar simetrisine sahip spinli alanları içeren model geliştirdiler.

O yıllardan bugüne alan teorilerinin üzerine yapılan ve yapılanmakta olan çalışmalar sürmektedir; doğadaki gravitasyon dışındaki etkileşimlerin ayar teorilerinin geliştirilmesi, bu teorilerde simetrinin kendiliğinden kırılmasının anlaşılması, zayıf etkileşmelerdeki ara bozonların hızlandırıcılarda bulunması, ayar teorilerinin dinamik özelliklerinin, ara parçacık alış verişi, bu alış verişte ortaya çıkan bozuklukların giderilerek, Feynman diyagramlarıyla ifade edilebilmesi, süper simetri kavramı ve

birleşik alan teorileri gibi devrimci görüşler ve buluşlar bu son 40 yıl içine sığmıştır. Parçacık fiziğinin standart modeli diyebileceğimiz bu oluşumlar kümesi kozmolojide de önemli gelişmelerin önünü açmıştır. Standart modelin arkası üzerine yapılan teorik çalışmalar; kütle çekimli sicim teorileri, yüksek boyutlu modeller sürmektedir.

Parçacık fiziğindeki bu hızlı gelişmeler, modellerle ortaya çıkan doğrusal olmayan alan denklemlerin geniş simetricali fiziksel çözümlerinin yeni teknikler geliştirilerek bulunmasını ve bu çözümlerin fiziksel özelliklerinin ve yerinin tartışılmasını hep yanında taşımıştır.

Tez şu şekilde planlanmıştır;

Tezin Genel Kısımlar bölümünde saf spinör alan teorileri hakkında bilgi verilmiştir. Ardından konformal simetri kırılması metodu ile elde edilen, solitonların özel bir tipi olan, uzay-zaman açılımına sahip, sıfır enerjili ve sonlu eylemli instantonların keşfinden yorumlanmasına uzanan tarihsel sürece değinilmiş ve alanlar teorisindeki önemi anlatılmıştır. Bu bölümün son kısmında ise dinamik sistemler ve kaos teorisi hakkında bilgiler verilmiştir.

Tezin Malzeme ve Yöntem kısmında, kaotik davranış sergileyen Duffing denklemi, tezde çalışılan Thirring doğrusal olmayan saf spinör alan modeli tanıtılmıştır. Ayrıca kuvvet etkisi altında olmayan Duffing denkleminin, kütsüz Thirring doğrusal olmayan spinör alan denklemlerinin sabit noktaları bulunmuş ve bu noktalar civarında sistemlerin kararlılık analizine bakılmış ve faz diyagramları çizilmiştir. Son olarak da Thirring İntantonları ile yine bir doğrusal olmayan saf spinör alan modeli olan Gürsey Model'in instantonlarının faz uzayındaki davranışları karşılaştırılmıştır[5].

Tezin özgün kısmını oluşturan Bulgular bölümünde Thirring İntantonlarının faz uzayı davranışlarının bir parçacığa karşılık gelebilen bir enerji ifadesi ile tedarigenmesi sonucu değişimlerinin gözlenmesi, ayrıca vakum durumuna karşılık gelen instantonların kendi iç dinamiğinden oluşabilecek bir tedarigenme durumundaki değişimlerin incelenmesi için sistemimize bir kuvvet terimi eklenmiştir. İntantonun davranışlarının olası

değişimlerini gözlemleyebilmek için faz diyagramları, Poincare kesitleri, zaman serileri, Skalogram analizi ve Güç spektrumları verilmiştir.

Tezin Tartışma ve Sonuç kısmında, Bulgular kısmında elde edilen tüm sonuçların önemi ve fiziksel yorumu verilmeye çalışılmıştır.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. SAF SPİNÖR ALAN TEORİLERİ

1950’li yıllar, keşfedilen parçacık sayısındaki hızlı artışın da etkisiyle, teorik fizikte her temel parçacığı bir denklemle ifade etme çalışmalarının yoğunluk kazandığı yıllardı. Parçacıkları bir denklemle ifade etmenin en önemli nedenlerinden biri de Dirac’ın spinli parçacıklar için yazdığı rölativistik kuantum özelliği olan ve fizik literatüründe “ Dirac Denklemi ” olarak bilinen denklemin, elektronun ve anti-elektron özelliklerine uygun sonuçlar vermesiydi [2,3]. Fakat her parçacığa bir denklem fikrinin, özellikle parçacıkların kuantum sayılarında karışıklıklara yol açacağı da aşıkardı. Born ve Heisenberg bunun tek bir birleşik denklem yazmakla aşılabileceğini öne sürdüler. Bu fizikçilere göre, tüm parçacıkların inşasına olanak verecek bir alan modeli doğrusal olmayan yapıda ve fermiyon özelliği olan bir dalga denklemi olmalıydı. Tüm parçacıklar da bu denklemin çözümünü veren fermiyonsal parçacıklardan oluşmalıydı. Özellikle 1950’ li yıllarda Heisenberg ve öğrencileri bu tip bir alan modeli yazmak için büyük çabalarda bulundular. Heisenberg ve öğrencileri Dirac denkleminde benzeyen, kütle terimine ek olarak fermiyonların diğer parçacıkları oluşturabilmesi için; kendi aralarında bütünleşmeleri ifade eden terimi de içeren modeller geliştirdiler [6]. Heisenberg’ in bu çalışmalarından ve çabalarından etkilenen birçok teorik fizikçi de benzer spinör alanlı modeller geliştirdi. Heisenberg ve arkadaşlarının rüyası olan evrendeki tüm parçacıkların fermiyonlardan oluştuğu düşüncesini gerçekleştirmek amacıyla Feza Gürsey tarafından 1956 yılında bir spinör alan dalga denklemi önerildi[7]. Heisenberg’ in rüyasını [6] gerçekleştirmek için Gürsey tarafından önerilen bu denklem konformal simetriye sahip ilk doğrusal olmayan spinör dalga denklemidir. Dört boyuta ve konformal invaryantlığa sahip olmasından dolayı Dirac denklemi ve Heisenberg ve arkadaşlarının önerdiği denklemlere göre daha geniş bir simetriye sahiptir. Ayrıca fermiyonların dışındaki diğer spinli parçacık yapılaşmasına da açıktır. 1958 yılında Walter Thirring iki boyutlu saf fermiyonsal ve konformal simetriye sahip olan Thirring Modeli önermiştir[8]. Euler-Lagrange denklemlerinin ve geçerli olan

fermion veya bozon tekniklerinin özelliklerine dayanarak literatürde pek çok çözüm vardır. Basitliği ve çözülebilirliği göz önünde tutulduğunda bu model alanlar teorisinde yeni fikirler ve metotlar için popüler bir test zemini olmuştur. Hızlandırıcıların gelişmesiyle bulunan yeni deney sonuçları ve arkasından Yang-Mills tarafından bulunan yerel ayar teorileri Heisenberg' in bu rüyasına son verdi. Fakat konformal simetrilere sahip spinör alanlı doğrusal olmayan modeller ve spinli parçacıklar olan kuarkların 1960'larda Gell-Mann ve Y.Ne'eman tarafından önerilmesi ve deneylerde keşfi ile tekrar önem kazandılar [9,10,11,12,13].

2.2. İNSTANTONLARIN TARİHİ VE ÖNEMİ

İnstantonlar Öklidyen uzay-zaman üzerinde klasik alan teorilerinin hareket denklemleri için bir çözümdür, sıfır enerjili ve sonlu eylemlere sahiptirler[14]. Bu nedenle bunlara teorik fizik ve matematiksel fizikte önemli yerler verilmiştir. Kuantum karakteri taşırlar, bu nedenle kuarkların vakum durumu olarak yorumlanmışlardır. Bu vakum durumu kuantum alan teorisinde önemli rol oynar ve instantonlar bu vakum durumu yapısında mükemmel şekilde tünelleme etkilerine neden olduklarından dolayı sıfır enerjileriyle vakumlar arası geçişi verdiklerinden kuarkların birlikte dolaşmalarını (her zaman ikili ya da üçlü bir yaşantının içine hapsedilmiş olmalarını) açıklamada önem kazanmıştır [15].

İlk olarak instantonlar Belavin ve çalışma arkadaşları tarafından Öklidyen Yang-Mills denklemlerinde 'T Hooft-Polyakov monopolün [16,17] trivyal olmayan klasik çözümlerini ararken QCD'in çok düşük enerjileri durumlarına önemli biçimde etki eden günümüzde BPTS instantonu olarak adlandırılan hayali parçacığı bulundu[18]. Kısa bir süre sonra, bir takım yazarlar dejenere klasik vakum arasında bir tünelleme olayı olarak instantonun fiziksel anlamını açıkladı [19, 20, 21]. Bu çalışmalar, aynı zamanda QCD ile bağlantılı olarak vakum kavramını tanıttı. Yang-Mills teorilerinde instanton tipi çözümler bulunması ve bu çözümlerin uzay-zamana bağlı olmaları yanında, vakum özellikleri göstermeleri parçacık fizikçilerin büyük ilgisini çekti. Bu ilgi çeşitli skaler alan modellerinde instanton çözümlerinin bulunması ile kendini gösterdi. Örneğin Alfaro, Fubini ve Furlan tarafından Sigma Modelinde instanton çözümleri bulundu [22,23]. Bu gelişmelere paralel olarak Akdeniz ve Smailagic spinör tipi instanton

çözümleri bulmak için, iki boyutlu saf fermiyonsal ve konformal simetriye sahip olan kütsüz Thirring Modeli [8] üzerinde bir laboratuvar model olarak çalışmalar yaptılar ve bu modelde konformal simetrinin kırılması ile fermiyon tipi instanton ve meron tipi çözümleri buldular [24]. Önemli bir gelişme, 'T Hooft'un yarı-klasik tünel oranı hesaplamasıyla Dirac operatörünün spektrumunda sıfır modlarının varlığını keşfetmesiyle oldu [25]. Bu sonuç, tünelin özellikle de her instantonun her türden bir soldaki fermiyonu emdiği ve bir sağdakini yaydığı (ve anti-instantonlar için tam tersi) hafif fermiyonlar ile yakından bağlı olduğu ve bu sonuç aynı zamanda anomalilerin, örneğin QCD'de aksenel yük bozması ve QED'de baryon sayısı, instantonlara ait olduğuyla açıklandı. 70'li yılların sonunda genel görünüm çok kötümser oldu. Instanton etkileri için hiçbir deneysel kanıt ve QCD'de yarı-klasik yöntemleri üzerinde teorik bir kontrol yoktu. Bir sorun doğrudan teorik analizi ile çözülemez ise, genellikle yararlı bir fenomenolojik yaklaşıma başvurulur. 80'lerin başında, QCD vakum yapısına böyle bir yaklaşım QCD toplam kuralı yöntemi ile mümkün hale geldi[26]. QCD toplam kuralları kısa mesafelerde hadronik korelasyon fonksiyonlarının davranışı, özellikle kuark ve gluon yoğunlaşması, vakum parametreleri ile ilgilidir. Bu analize dayanarak, "Tüm hadronlar aynı değildir" olduğu anlaşıldı [27].

Çoğu instanton çözümleri pertürbatif değildir. Alan denklemlerinin karşı gelen lineer kısmın çözümlerinden başlayarak ve doğrusal olmayan terimlere pertürbatif olarak uygulayarak elde edilmezler. Klasik çözümler kendileri non-pertürbatiftir, kendilerinden bulunan kuantum etkiler de non-pertürbatif olmaya meyillidirler. Instanton durumunda sıfırdan farklı topolojik indekslerin varlığı, vakum açısı θ ile karakterize edilen vakum durumları ailesine öncülük eder.

Kuantum teorilerinde instantonlara dayanan sonuçların çoğu yarı klasik WKB metodu ile bulunur. Instanton fiziğinde aynı şey non-trivyal, non-pertürbatif klasik çözümler etrafında yapılırken, dalgalanmalar trivyal klasik çözümler etrafında kuantize edildiği yerde Standart Pertürbasyon teorisi yarı klasik metodun özel durumu olarak görülür. Yarı klasik metod, soliton ve instantonları yararlı kılarsa da uygun küçük doğrusal olmayan bağlantı parametresi ile birlikte zayıf bağlantı şartı gerekir. Sonuçlar parametrede non- pertürbatif olsa da bu gereksinmedir. Bazı durumlarda yarı klasik WKB sonuçları bağlantı büyük olsa da doğru cevap veya iyi nümerik yaklaşıklıkla

sonuçlanır ama bu metodun genel özelliği değildir. Metot ilk başta açıkça bazı non-triviyal klasik çözümler gerektirir. Herhangi bir model için yerleşmiş tekil olmayan klasik çözümler kararlılık karakteristikleriyle hem analitik formda veya doğru yaklaşıklıkla var ve hazır olmalıdır. Bu gereklilikler, fizikleri QCD tarafından yönetildiğine inanılan instantonların doğada olan gerçek hadron parçacıklarını tanımlamadaki yararlılığını sınırlıyor. QCD, SU(3) ayar teorisidir, ayar bozonlar fermiyonik kuarklarla çifttir. Fermiyon varlığı durumunda yarı klasik genişlemenin kurulması için bir yol; Fermi alanının ihmal edildiği klasik çözümle başlayıp, QCD için self-coupled ayar alan sisteminin çözümleri bulunabilir. (3+1) boyutlu saf ayar alan teorisinin soliton çözümleri olmadığı gösterilmiştir. Diğer yol ise fermiyonik serbestlik derecesi üzerinden integral alıp ayar alanları için daha karışık etkin eylem bulunur. Bu etkin harekete karşı gelen hiçbir tam soliton çözümü bulunamamıştır. Hadronları tanımlarken tek mükemmel soliton kullanımı yarı klasik süreçteki diğer değişimden gelir. Klasik terimi, spin 1/2 alanı için c-sayısı Dirac dalga fonksiyonu ile değiştir anlamına gelen burada çiftleşmiş bozon-fermiyon alan denklemlerinin klasik çözümleri ile başlanır. Burada da (3+1) boyutlu QCD için klasik çözümler mevcut değildir ama yaklaşık çözümler hadronları tanımlamada başarılıdır[28].

Klasik instanton çözümleri tam analitik formda self-coupled Yang-Mills sistemi için QCD te mevcuttur. Bu instantonların kuantum etkileri hesaplandığında zayıf bağlanma şartı güçlüklerle karşılaşır. QCD instantonları 0'dan ∞ a değerler alan ölçek parametresi taşırlar. Instantonların etkisini hesaplamak için hacimleri üzerinden integre edilmesi gerekir. Normlanmış durumda etkin ayar bağlantı sabiti mesafe ölçeğiyle değişir. Sonuç olarak büyük instantonların davranışı, yarı klasik metodun zayıf bağlanma gerekliliğini ihlal ederek büyük bağlantı sabiti gerektirecek. Bunlar yarı klasik metodun doğru olmadığını söylemez ama QCD bu tahminleri tam olarak sağlamaz. Diğer çeşit teorik alan modelleri için gereksinilen klasik çözümler vardır ve zayıf bağlanma şartı da devamlı olabilir. Bu durumlarda yarı klasik metot önemli non-pertürbatif sonuçlar verir. Soliton ve instantonların etkileri kuantum alan sistemlerinin komplekslik (karışıklık) ve yapı zenginliği anlayışımızı genişletir. (QCD durumunda, vakum durumlarının ve ayar dönüşümlerinin homotopy sınıflandırmasına göre yararlı bilgiler ortaya çıkmıştır) [29].

2.3. DİNAMİK SİSTEMLER VE KAOS

Dinamik Sistemler, sistemin herhangi bir andaki durumunu belirten değişkenlerin, belirli matematiksel kurallara uygun olarak zaman içerisinde değişen sistemlerdir. Dolayısı ile davranışları da zaman içinde değişen sistemler olmalarından dolayı sistemlerin uzun süreli davranışlarının karakterize edilmesine yardımcı olur. Genel olarak Dinamik Sistemler gerçek sistemlerin zamanla değişen davranışlarının gelecekte nasıl bir durumda olacağını amaçlayan basitleştirilmiş bir matematiksel modeldir[30].

Tarihi Newton'a kadar uzanmakta olan Dinamik sistemleri Kesikli ve Sürekli, Otonom ve Otonom Olmayan, Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Dinamik Sistemler şeklinde sınıflandırmalara ayırmak mümkündür[31].

Sistemin durumu farklı zamanlarda kesikli şekillerde sunulan Dinamik Sistemler Kesikli Dinamik Sistemlerdir. Sürekli Dinamik Sistemler ise zamanın sürekli olduğu durumda dinamik sistemi diferansiyel denklem sistemleri ile ifade edebilir ve sistemin durumunun zamanın her noktasında belirlenmeye çalışılmaktadır.

Sistemde önceki değişkenlere bağlı olarak değişen ve zamanın sistem içinde bir değişken olmadığı yani zamandan bağımsız olan sistemler Otonom Dinamik Sistemlerdir. Otonom olmayan dinamik sistemlerde ise değişkenlerin yanında zaman da diferansiyel denklem sisteminde yer alır. Otonom sistemlerde yörüngeler birbirini kesmezler eğer bir kesme durumu olur ise önceki değişkene göre sonraki durum belirlendiği için tekrar eder ve yörüngeler periyodik olur. Otonom olmayan sistemlerde ise bu durumun gerçekleşmesi zorunlu değildir ve yörüngeler birbirlerini kesebilirler[32].

Doğrusal Dinamik Sistemlerde sistemin davranışını temsil eden fonksiyon doğrusal ise sistem doğrusaldır. Doğrusal sistemler çözümü bulunan ve bu çözümde kararlı olan sistemlerdir. Doğrusal modeller basit açıklama biçimleri olduğundan, doğada çözülmesi gereken daha basit ve anlaşılır çözümler sunabilmek için bilimin en önemli analiz yöntemlerinden biri olmuştur. Ancak bu durumda doğa hakkında sınırlı bilgiler vermesine neden olmaktadır.

Dinamik sistemleri tanımlayan denklemlerden birisi doğrusal değilse bu sistem doğrusal olmayan dinamik sistem olarak adlandırılır. Doğanın gerçek yapısı doğrusal olmayan özelliklere sahip olduğundan bu sistemler kararsızdır ve bir denge konumunda sürekli durmak yerine çok değişik davranış tipleri yaratacak yapılara sahiptirler. Doğrusal olmayan dinamik sistemleri çözmek oldukça zordur ya da çözümü imkansız olan denklem sistemlerinden meydana gelmektedirler. Bu nedenle analitik çözüm bulunamamaktadır. Çözüm için dinamik sistemin evrimini ya da yörüngelerini incelemek sistemin davranışları hakkında bilgi verebilir[33].

Doğrusal olmayan dinamik sistemlerde, denge noktası, periyodik ve yarı periyodik davranış tiplerinin yanında bir diğer davranış tipi kaotik davranıştır. Kaotik davranış diğer üç davranıştan farklı olarak bir sistemde doğan periyodik olmayan, kestirilmeyen ve başlangıç şartlarına hassas bağımlılık gösteren davranıştır [34].

Kaos, başlangıç koşullarına aşırı duyarlılık gösteren ve genlik, periyot gibi fiziksel parametrelerin zaman içindeki gelişimi kestirilmeyen sonlu ve rastgele davranışlar olarak tanımlanır. Kaos teorisi; açık genel çözümleri olmayan, doğrusal olmayan problemlere değinmemize izin veren matematik, sayısal ve geometrik teknik topluluğudur. Kaos teorisine göre, varlıkların ve yasaların basit, tahmin edilebilir bir kümesi; karmaşık ve kestirilmeyen bir sonuca sahip olabilir. Çok küçük değişimlerin daha büyük değişimlere yol açması Kaosun önemli bir özelliğidir. Bunun örnekleri; hava durumu, borsa, damlayan bir musluk ya da bazen de insan kalbinin atışı olmak üzere Kaos birçok yerde karşımıza çıkar.

Kaosun gerisindeki mekanizmaların anlaşılması, yalnızca suda yüzen bir yaprağın davranışı, düzensiz kalp atışları ve damlayan bir muslukta değil; evrenin küçük ve büyük ölçekte pek çok görünümünü anlamamıza da yardımcı olacaktır. Bu özelliği nedeniyle kaos teorisi bütün bilim dallarında yerini almıştır. Kaosun güzel örneklerini matematikte de bulmak mümkündür. Görünüşte çok basit problemlerin çözümü son derece karmaşık davranışlar ortaya koymaktadır. Basit olmasına rağmen doğrusal olmayan bu tür problemlerin çözümü ancak bilgisayarların devreye girmesiyle kolaylaşmıştır. Bu nedenle kaos, bilgisayar çağının bilimi olarak adlandırılabilir[35].

Dinamik sistemin kararlılık durumuna göre: sabit, geçici ya da kaotik olabilir. Doğrusal olmayan, dengesiz, determinist dinamik olan, rastgelelik içeren (başlangıç koşullarına duyarlı) sisteme kaotiktir denir. Determinist süreçler için sebep ve etki ilişkisi yoktur. Kaos teorisi uzun süreli tahminler yapamaz; ama kısa bir süre için belirli şartlar altında, çekici ile birkaç boyuta sahipken görüş sağlanmasına neden olur. Kaotik hareket için en belirgin işaret periyot çiftleşmesidir [36].

Kaos teorisinden çıkmış bir başka önemli kavram da çekici ögedir. Dinamik sistemin uzun dönemli davranışının durum uzayında çizdiği geometrik nesneye çekici adı verilmektedir. Çekicinin varlığı nedeniyle Kaostaki düzensizlik rastgele bir düzensizlik değildir. Doğrusal olmayan pek çok sistem belli bir davranışı tekrarlamak zorundaymış gibi hareket eder. Bu bir çekim kuvveti ya da sistemde amaca yönelik var olma değildir, sadece sistemdeki hareket kuralları temelinde sistemin nereye yöneldiğini belirtir. En genel halde üç tür çekiciden bahsedilebilir: Nokta Çekiciler denge noktaları davranış tipi gösterirken, Periyodik Çekiciler limit çevrimler ve yarı periyodik davranışlar sergilerler, Garip Çekiciler ise kaotik davranışlar sergilerler.

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1. DUFFİNG DENKLEMİ

Duffing Denklemi, Georg Duffing'in 1918'de doğrusal olmayan geri çağırıcı kuvvet etkisi altındaki bir mekanik sistemi incelerken elde ettiği ikinci dereceden doğrusal olmayan bir diferansiyel denklemdir[37]. Bu denklem ilk kez 1964 yılında C. Hayaşi tarafından doğrusal olmayan bir osilatör olarak tanımlanmıştır[38]. Bu kaotik davranış sergileyen bir dinamik sistem için en yaygın örnektir. Duffing denklemi zayıf periyodik dalgalara duyarlı rastgele dalgalanmalara bir dereceye kadar güçlüdür ki bu zayıf periyodik dalgalar kritik kaos faz durumundan büyük ölçüde periyodik faz durumuna değişmesine yol açabilir halbuki rasgele dalgalanmalar buna neden olamaz[39]. Duffing denklemi,

$$\ddot{u} + \delta\dot{u} + (\beta u^3 \pm w_0^2 u) = A \cos(wt + \theta) \quad (3.1)$$

ile verilmekte veya

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= -w_0^2 u - \beta u^3 - \delta v + A \cos(wt + \theta) \end{aligned} \quad (3.2)$$

bir denklem sistemi gösterilmektedir. Burada u x 'in yerini almaktadır, v , x 'e göre hızı temsil etmektedir ve w , β , δ , A , θ 'lar sabitlerdir.

$w_0^2 > 0$ için Duffing osilatörü geri çağırıcı kuvvet olan yaylanma ile bir kuvvet tarafından etkilenmiş olan osilatör olarak yorumlanmaktadır. Sadece çok küçük x ler için $\beta > 0$ iken bu yaylanma sertleşme yaylanması ve $\beta < 0$ olduğunda yumuşama yaylanması olarak tanımlanma yorumu yapılmıştır.

$w_0^2 < 0$ için, Duffing osilatörü bir çift potansiyelde nokta kütlenin dinamiğini tanımlamaktadır. Bu durumda kaotik hareketler gözlemlenebilmektedir.

Kuvvet etkisi altında bulunmayan Duffing denklemi için, $\beta = 1$, $w_0^2 = -1$ alırsak ve fazı da sıfır olarak belirlersek, sonrasında denklem

$$\ddot{u} + \delta\dot{u} + (u^3 - u) = A\cos(\omega t + \theta) \quad (3.3)$$

olur. Bu denklemi, denklem sistemi biçiminde yazarsak

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= u - u^3 - \delta v + A\cos(\omega t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

ve kuvvet terimini de çıkarırsak, kuvvet etkisi altında olmayan Duffing denklem sistemini elde etmiş oluruz;

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= u - u^3 - \delta v \end{aligned} \quad (3.5)$$

Bu denklem sisteminin sabit nokta çözümlerine bakacak olursak;

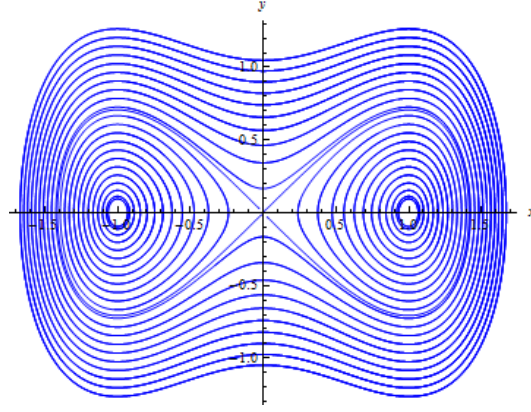
$$\begin{aligned} \dot{u} &= v = 0 \\ \dot{v} &= u - u^3 = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$u = 0, \pm 1$ dir. Böylece sabit noktalar $(-1,0)(0,0)(0,1)$ dir.

Sabit noktaların kararlılık analizi için lineerleştirme metodu ile kararlık matrisi elde edilip özdeğerler incelendiğinde;

$(0,0)$ noktası kararsız $(-1,0)$ ve $(0,1)$ noktaları kararlı noktalar olduğu bulunmaktadır.

Kuvvet etki etmeyen Duffing denkleminin faz uzayı çizecek olursak,



Şekil 3.1 : Duffing Faz Uzayı

şeklini elde ederiz.

Zayıf kuvvet etkisi altında Duffing denklemi; burada Duffing osilatörüne periyodik zayıf bir kuvvet etki ettiğini göz önünde bulunduruyoruz.

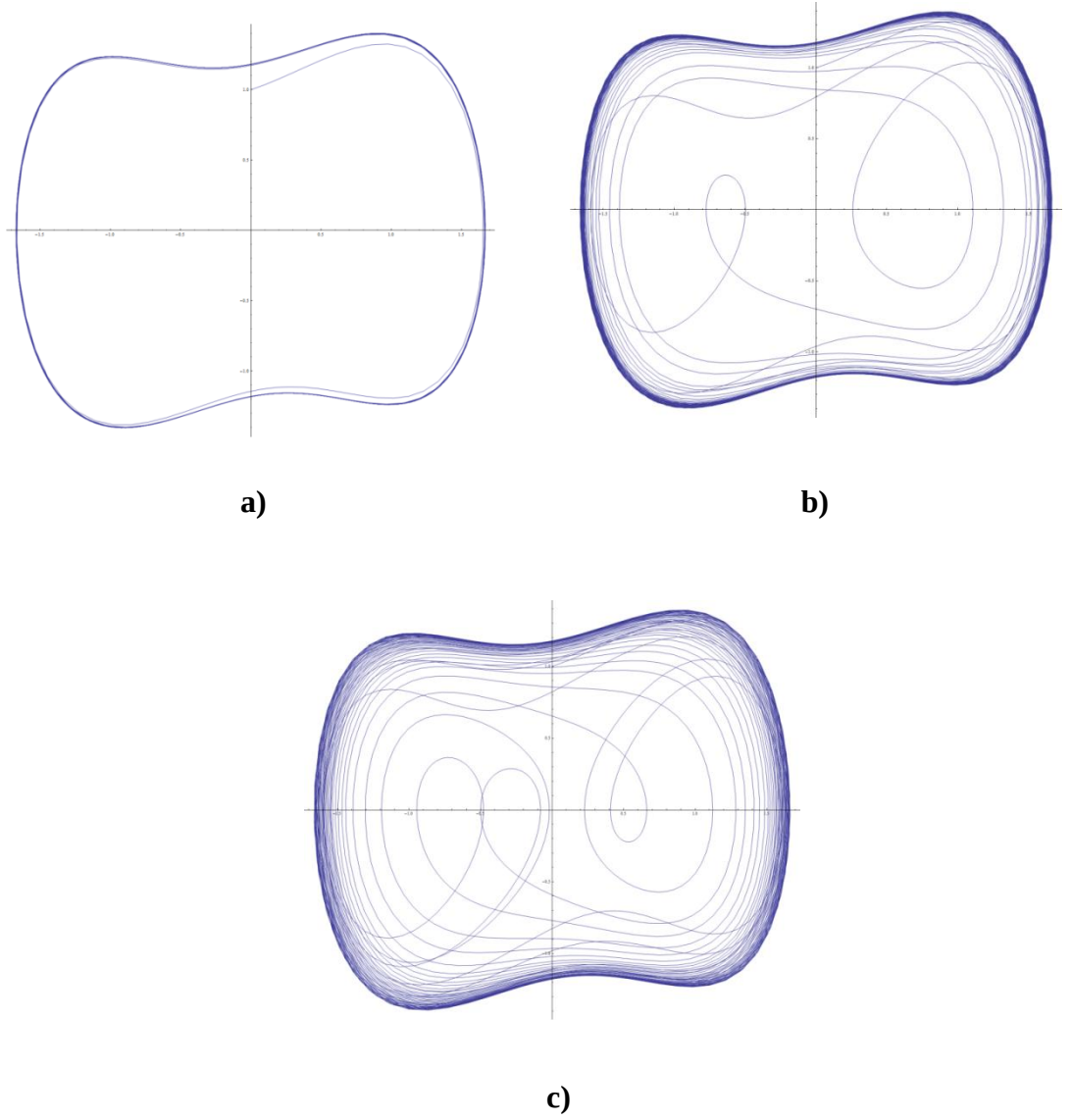
$$\dot{u} = v$$

(3.7)

$$\dot{v} = -\omega_0^2 u - \beta u^3 - \delta v + \gamma \cos(\omega t + \phi)$$

Burada ω_0^2 zayıfça bir doğrusal olmayan yaylanmanın zayıf periyodik bir zorlamaya etkisi olarak tanımlanmaktadır. $-\omega_0^2 u - \beta u^3$ doğrusal olmayan geri çağırıcı kuvveti tanımlamaktadır. δ sönüm oranını belirtmekte ve $\gamma \cos$ içinde var olan titreşimi belirtmektedir.

Burada $\delta=0.5$, $\beta = 1$, $\omega_0^2=-1$ ve $\gamma =0.826$ alırsak Duffing osilatörü geçiş durumuna gelmektedir. Ve bu durumda iken dışarıdan etkiyen kuvvetin sinyaline bağlı olarak daha kaotik veya daha kararlı hale geçebilmektedir[40]. Aşağıda $\gamma \cos$ a göre Duffing osilatörünün geçiş durumundaki, kararlı haldeki ve kaotik haldeki durumları sırası ile gösterilmektedir.



Şekil 3.2 : Periyodik Kuvvet Altındaki Duffing Sisteminin Faz Durum Diyagramları

a) Periyodik Faz Durumu **b)** Kritik Kaotik Faz Durumu **c)** Kaotik Faz Durumu

Şekil 3.2 de görüldüğü üzere Duffing sistemi dışarıdan etkiyen bir periyodik kuvvetin büyüklüğünün bir değerine kadar periyodik faz durumunu korumaktadır ve o değerden sonrasında periyodik durumunda bozulmalar meydana gelmekte ve kritik kaotik faz durumuna geçmektedir. Bu değerden sonrasındaki değerlerde ise sistem tamamen kaotik olmaya başlamaktadır.

3.2. KÜTLESİZ SAF SPİNÖR THİRRİNG ALAN MODELİ

Thirring Model kesin çözülebilir bir kuantum alan kuramıdır, (1+1) iki boyutlu saf spinör ve konformal simetriye sahiptir ve bu Modeli ilk kez 1958 yılında Walter Thirring önermiştir (Konformal Dönüşüm Grubu Ek A da verilmiştir) [8]. Kütlesiz Thirring model, iki boyutta kendi kendine etkileşen kütlesiz spinörün tam olarak çözülebildiği sistemdir. Euler-Lagrange denklemlerinin ve geçerli olan fermiyon veya bozon tekniklerinin özelliklerine dayanarak literatürde pek çok çözüm vardır. Basitliği ve çözülebilirliği göz önünde tutulduğunda bu model alanlar teorisinde yeni fikirler ve metotlar için popüler bir test zemini olmuştur. Akdeniz ve Smailagic'in 1979 yılında yaptıkları çalışmada Thirring saf spinör alan denkleminde, ψ bir spinör alanı göstermek üzere $\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle \neq 0$ olacak şekilde tanımlanan vakumun beklenen değerinin sıfırdan farklı seçilmesiyle konformal simetrinin kendiliğinden kırılması metodunu kullanarak Thirring İntantonlarını bulmuştur [24].

1958 yılında Thirring tarafından önerilen Thirring modelinin Lagrange fonksiyonu

$$L = i\bar{\psi}\sigma_{\mu}\partial_{\mu}\psi + \frac{g}{2}(\bar{\psi}\psi)^2 \quad (3.8)$$

dur. Burada ψ spinör alanı, g bağlantı sabiti boyutsuz bir parametre ($g > 0$) ve σ ise iki boyutlu Pauli spin matrisleridir (Sigma matrisleri ve bu türev operatörünün yapısı Ek. B de açık olarak verilmiştir).

Euler Lagrange formalizminden elde edilen hareket denklemi

$$i\sigma_{\mu}\partial_{\mu}\psi + g(\bar{\psi}\psi)\psi = 0 \quad (3.9)$$

dir.

Heisenberg ön çözümünü[6] Öklid uzayında yazarsak;

$$\psi = [ix_{\mu}\sigma_{\mu}\chi(s) + \varphi(s)]c \quad (3.10)$$

Burada $x_1=x$, $x_2=t$, $s = x^2 + t^2$ ve c spinör sabitidir. Hareket denklemlerimize ön çözümümüzü uygularsak Thirring model için aşağıda verilen χ ve φ ye bağlı doğrusal olmayan diferansiyel denklem sistemini

$$2\chi + 2s \frac{d\chi}{ds} - g\varphi[s\chi^2 + \varphi^2]\bar{c}c = 0 \quad (3.11)$$

$$2 \frac{d\varphi}{ds} + g\chi[s\chi^2 + \varphi^2]\bar{c}c = 0$$

elde ederiz. Bu denklem sistemini boyutsuzlaştırmak için,

$$\chi(s) = A|s|^{-\sigma}F(z),$$

$$\varphi(s) = B|s|^{-\tau}G(z) \quad (3.12)$$

$$z = \ln|s|$$

ifadelerini tanımlayıp[41] bu ifadeleri doğrusal olmayan denklem sistemimizde yerine koyduğumuzda,

$$\tau = \frac{1}{4}, \sigma = \tau + \frac{1}{2} \text{ ve } A^2 = B^2 \quad (3.13)$$

eşitlikleri ile

$$2\dot{F} + \frac{1}{2}F - gABG(F^2 + G^2)\bar{c}c = 0 \quad (3.14)$$

$$2\dot{G} - \frac{1}{2}G + gABF(F^2 + G^2)\bar{c}c = 0$$

A ve B sabitler, F ve G (z) ye bağlı boyutsuz fonksiyonlar olmak üzere Thirring İntantonlarını da kapsayan doğrusal olmayan denklem sistemini elde ederiz[42].

3.3. THIRRİNG İNSTANTONLARINDA KARARLILIK ANALİZİ

Thirring denklem sisteminde $gAB\bar{c}c = \alpha$ dersek ve sabit çözümleri için;

$$\dot{F} = -\frac{1}{4}F + \frac{1}{2}\alpha[F^2 + G^2]G \quad (3.15)$$

$$\dot{G} = \frac{1}{4}G - \frac{1}{2}\alpha[F^2 + G^2]F$$

şeklinde eşitler ve fonksiyonları sabit olarak kabul ederek bulabiliriz.

Modelimizin farklı α değerleri için sabit noktaları aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$\alpha = 1$ olduğu Thirring İntantonları [24] için;

$\alpha = 1$ için,

$F = G = 0, \mp \frac{1}{2}$ olduğundan, kararlı noktalar $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), (0,0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ bulunur.

$\alpha = 1.2$ için,

$F = G = 0, \mp \frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{2}$ olduğundan, kararlı noktalar $\left(-\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{2}, -\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{2}\right), (0,0), \left(\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{2}, \frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{2}\right)$ bulunur.

$\alpha = 0.7$ için,

$F = G = 0, \mp \sqrt{\frac{5}{14}}$ olduğundan, kararlı noktalar $\left(-\sqrt{\frac{5}{14}}, -\sqrt{\frac{5}{14}}\right), (0,0), \left(\sqrt{\frac{5}{14}}, \sqrt{\frac{5}{14}}\right)$

olarak bulunur.

Bulunan bu noktaların kararlılık analizi yapılarak gerçekten kararlı olup olmadıkları bulunabilir. Lineerleştirme metodu ile kararlılık analizi yapacak olursak ve bunun için doğrusal olmayan denklem sistemimizin (3.15) her iki tarafının türevini alırsak,

$$\ddot{F} = -\frac{1}{4}\dot{F} + \frac{1}{2}\alpha[F^2 + G^2]\dot{G} + \frac{1}{2}\alpha G[2F\dot{F} + 2G\dot{G}]$$

(3.16)

$$\ddot{G} = \frac{1}{4}\dot{y} - \frac{1}{2}\alpha[F^2 + G^2]\dot{F} - \frac{1}{2}\alpha F[2F\dot{F} + 2G\dot{G}]$$

elde ederiz. Bunu matris formatında aşağıdaki gibi yazarız.

$$\begin{pmatrix} \ddot{F} \\ \ddot{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \alpha FG & \alpha G^2 + \frac{1}{2}\alpha(F^2 + G^2) \\ -\alpha F^2 - \frac{1}{2}\alpha(F^2 + G^2) & \frac{1}{4} - \alpha FG \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{F} \\ \dot{G} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

α 'nın değerlerine göre daha önce bulduğumuz sabit noktalar için özdeğerleri hesaplırsak;

$\alpha = 1$ olduğu Thirring İntantonları [24] için;

$\alpha = 1$ için $\lambda_{\pm}^{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)} = \pm \frac{i}{2}$ ve $\lambda_{\pm}^{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = \pm \frac{i}{2}$ olarak hesaplanır.

Thirring İntantonları civarındaki durum için ise

$$\alpha = 1.2 \quad \text{ için } \lambda_{\pm}^{\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)} = \pm 0.51031i \quad \text{ ve } \lambda_{\pm}^{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)} = \pm 0.51031i ,$$

$$\alpha = 0.7 \quad \text{ için } \lambda_{\pm}^{\left(-\sqrt{\frac{5}{14}}, -\sqrt{\frac{5}{14}}\right)} = \pm 0.472456i \quad \text{ ve } \lambda_{\pm}^{\left(\sqrt{\frac{5}{14}}, \sqrt{\frac{5}{14}}\right)} = \pm 0.472456i$$

buluruz. Thirring İntantonları için α 'nın yukarıda aldığımız değerlerinin her biri için sabit noktaların kompleks özdeğerlere sahip olduğunu bulduk[43]. Bu sabit noktaların karakteristiği eliptiktir ve civarlarında sistem kararlı davranışlar sergiler [44].

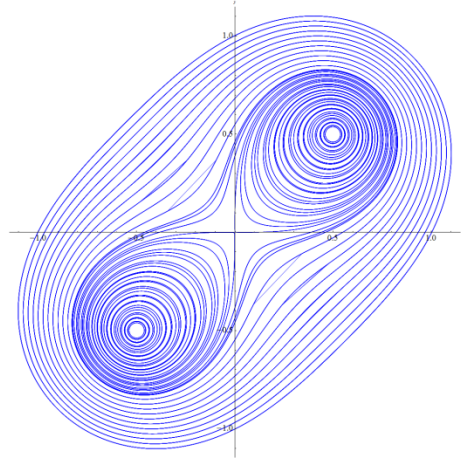
Sabit noktaların yanı sıra sistemin karakteristik davranışının analizine bakarsak,

$$\lambda = \pm \frac{1}{4} \sqrt{1 - 8\alpha FG - 12\alpha^2(F^2 + G^2)^2} \quad (3.18)$$

bulunur. Modelimiz için sabit noktalarının tüm değerleri için α 'nın daha önce yapılmış olan çalışmada ki instanton çözümleri için kullanılan değer olan 1 değerini ve $F = G$ ve α içindeki değerleri (3.13) eşitliğe uygun biçimde koyarak karekök içini tarattığımızda, Thirring İntantonları için $[-1/4, 1/12]$ değerleri dışındaki tüm değerlerin negatif olduğu görülür. Yani Model için de bulduğumuz özdeğerler kompleks olur. Bu da modelde sistemimizin bu değerler için sabit noktalar civarında kararlı bir davranış sergilediğini gösterir.

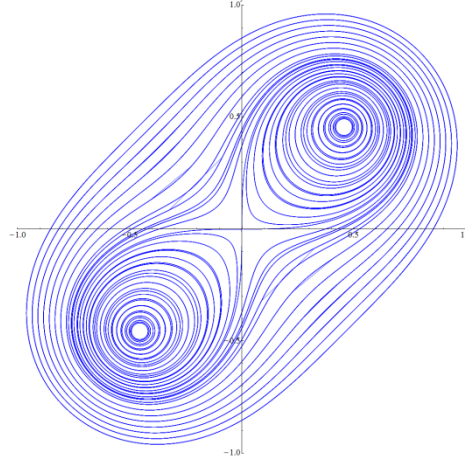
3.4. THİRRİNG İNSTANTONLARININ FAZ UZAYONDAKİ DAVRANIŞLARI

Thirring İntantonlarının faz uzayındaki davranışlarını incelemek için Mathematica programını kullandık. Thirring model için α 'nın yukarıdaki değerlerine göre Mathematica da çizdiğimiz faz uzaylarını aşağıdaki gibi bulduk[43].



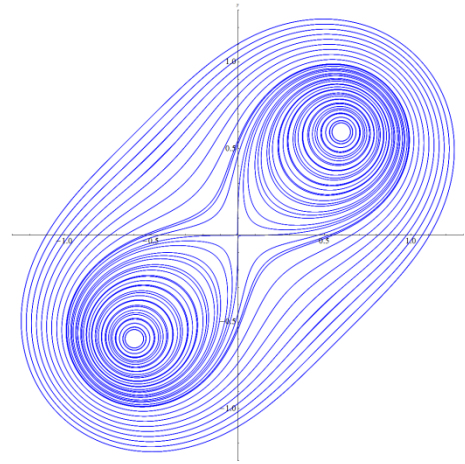
Şekil 3.3: Thirring İntantonu için $gAB\bar{c}c = 1$ olan $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı

Şekil bize Thirring İntantonlarının faz uzayında Duffing tipi davranışlar sergilediğini göstermektedir. Yukarıda $\alpha=1$ olduğu durum için [24] farklı bir metotla kararlı olduğunu bulduğumuz sabit noktaların, faz uzayına baktığımızda da kararlı olduğunu görmekteyiz [43].



Şekil 3.4 : Thirring İntantonu için $gAB\bar{c}c = 1.2$ olan $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı

Yukarıdaki şekil Thirring modelin, $\alpha=1.2$ olduğu durum için çizilmiş $F(z)-G(z)$ faz uzayıdır. Şekil bize Thirring İntantonlarının α 'nın bu değeri için de faz uzayında Duffing tipi davranışlar sergilemeye devam ettiğini göstermekte ve yine $\alpha=1.2$ için de daha önce kararlı olduğunu bulduğumuz sabit noktaların, faz uzayına baktığımızda da kararlı olduğunu teyit etmektedir.



Şekil 3.5 : Thirring İntantonu için $gAB\bar{c}c = 0.7$ olan $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı

Thirring model için çizdiğimiz son şekil ise bize $\alpha=0.7$ için $F(z)-G(z)$ faz uzayını vermektedir. Thirring İntantonları α 'nın birden küçük olduğu değer için de Duffing tipi davranışlar sergilemeye devam etmektedir. Ayrıca faz uzayına bakarak $\alpha=0.7$ için daha önce kararlı olduğunu gösterdiğimiz sabit noktaların kararlılığını teyit edebiliriz.

3.4.1. Gürsey ve Thirring İntantonlarının Faz Uzayı Davranışlarının Karşılaştırılması

Saf spinör alan modeli olan Gürsey Model, Heisenberg ve arkadaşlarının rüyası olan evrendeki tüm parçacıkların fermiyonlardan oluştuğu düşüncesini gerçekleştirmek amacıyla Feza Gürsey tarafından 1956 yılında önerilmiştir[7]. Dört boyuta ve konformal invaryantlığa sahip olmasından dolayı Dirac denklemi ve Heisenberg ve arkadaşlarının önerdiği denklemlere göre daha geniş bir simetriye sahiptir (Konformal Dönüşüm Grubu Ek A da verilmiştir). Feza Gürsey tarafından 1956 yılında önerilmiş olan bu modelin Lagrange fonksiyonu;

$$L = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_{\mu} \partial_{\mu} \psi + g (\bar{\psi} \psi)^{\frac{4}{3}} \quad (3.19)$$

Burada ψ spinör alanı g bağlantı sabiti boyutsuz bir parametre ($g > 0$), γ_{μ} ise dört boyutlu Dirac matrisleridir (Dirac matrisleri ve bu türev operatörünün yapısı Ek. B de açık olarak verilmiştir). Thirring model için uyguladığımız yöntemi Gürsey model için uygularsak için F ve G ye bağlı boyutsuz doğrusal olmayan denklem sistemini

$$2\dot{F}(z) + \frac{3}{2} F(z) - g(AB)^{\frac{1}{3}}(\bar{c}c)^{\frac{1}{3}} G(z) (F^2(z) + G^2(z))^{\frac{1}{3}} = 0 \quad (3.20)$$

$$2\dot{G}(z) - \frac{3}{2} G(z) + g(AB)^{\frac{1}{3}}(\bar{c}c)^{\frac{1}{3}} F(z) (F^2(z) + G^2(z))^{\frac{1}{3}} = 0$$

şeklinde elde ederiz.

Tablo 3.1 de Mathematica kullanarak çizdiğimiz Gürsey ve Thirring İntantonlarının faz uzaylarının bir arada gösterildiği özet bir tablo verilmiştir. İki model için elde ettiğimiz faz uzaylarını karşılaştırdığımızda öncelikle Gürsey ve Thirring İntantonlarının bağlantı sabitinin (α) farklı değerleri için çizilmiş $F(z)$ - $G(z)$ faz uzaylarında Duffing tipi davranışlar sergilediğini görürüz. Burada Duffing [37] bizim için bir test model işlevi görmektedir. Duffing denklemi ve faz uzayı göz önüne alındığında her iki modelde de instantonların faz uzaylarında Duffing tipi davranışlar sergilediği açıkça görülmektedir.

Tablo 3.1 : Gürsey ve Thirring İntantonlarının Faz Uzayı Davranışlarının Karşılaştırılması

	GURSEY MODEL	THIRRING MODEL
$\alpha_{AB} = 1.2$		
$\alpha_{AB} = 1$		
$\alpha_{AB} = 0.7$		

Bağlantı sabitinin bire eşit olduğu durumun [Gürsey İntantonları için $g(AB)^{\frac{1}{3}}(\bar{c}c)^{\frac{1}{3}} = \alpha = 1$ ve Thirring İntantonları için $g(AB)(\bar{c}c) = \alpha = 1$] bizim için ayrı bir önemi vardır. Çünkü bu değer için daha önce yapılan çalışmalarda [15,17] Gürsey ve Thirring modellerinin kararlı instanton çözümlerine sahip olduğu, $\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle \neq 0$ vakum beklenen değerinin sıfırdan farklı seçilmesi suretiyle konformal simetrisinin kendiliğinden kırılması yöntemiyle bulunmuştur. Vakum beklenen değerinin sıfırdan farklı seçilmesi ile konformal simetri, spinör alanlar için kendiliğinden kırılmış olur. Konformal simetrisinin kırılması ile bulunan instantonlar, kuarkların vakum durumu olarak yorumlanmış olup, vakumlar arası geçişi vermelerinden dolayı kuarkların hapsolme problemini açıklamada önem kazanmışlardır. Bilindiği gibi instantonlar sonlu eylemli ve sıfır enerjili çözümlere tekabül ederler.

Dört boyutlu Gürsey ve iki boyutlu Thirring İntantonları için bulduğumuz sonuçları karşılaştırdığımızda her ikisinin de faz uzayında benzer davranışlar sergiliyor olması, Gürsey ve Thirring İntantonlarının farklı boyut ve spinör sayılarına sahip olmaları açısından önemlidir. Bu bizi instantonların faz uzayındaki davranışlarının boyutları gibi kuantum spinör sayılarından da bağımsız olduğu sonucuna götürmektedir[5].

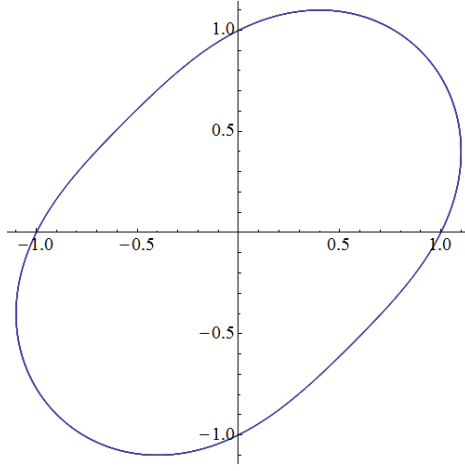
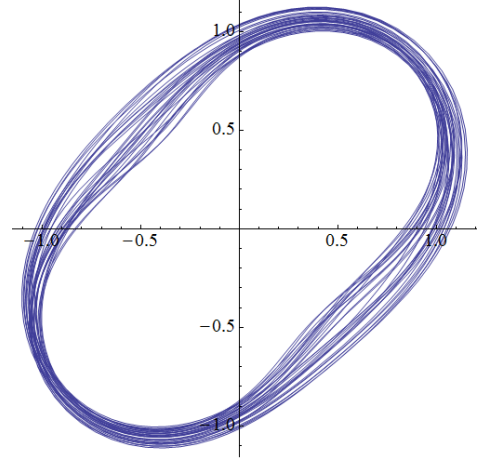
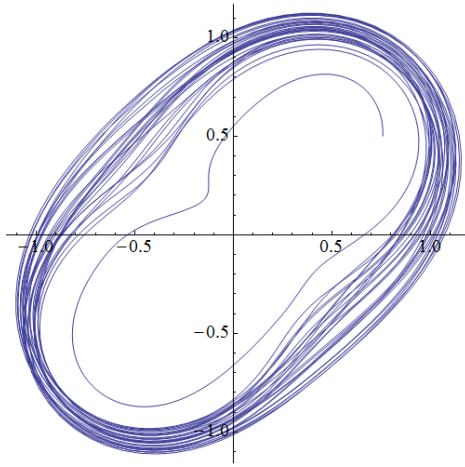
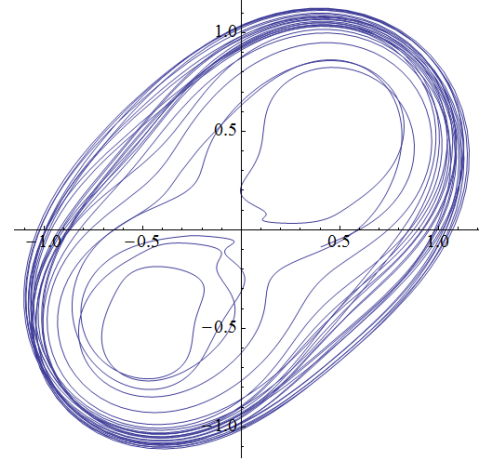
4. BULGULAR

4.1. PERİYODİK KUVVET ETKİSİ ALTINDAKİ THİRRİNG İNSTANTONLARINDA KAOTİK DAVRANIŞLAR

Heisenberg Anzatu ile Thirring modelden elde ettiğimiz Thirring İntantonlarını da kapsayan boyutsuz doğrusal olmayan diferansiyel denklem sistemini (3.14) bağıntısında verdik ve bu denklem sisteminde sabit noktalar etrafında kararlılık analizi yapıldıktan sonra instantonların evriminin dinamiği hakkında bilgiler veren faz diyagramlarını çizdik. Sistemimizin dışarıdan bir etki ile tedirgenmesine neden olacak $A\cos(wz + \theta)$ gibi periyodik bir kuvvet terimini denklem sistemimize eklersek,

$$\begin{aligned} 2\dot{F} + \frac{1}{2}F - \alpha G(F^2 + G^2) &= A\cos(wz + \theta) \\ 2\dot{G} - \frac{1}{2}G + \alpha F(F^2 + G^2) &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

elde ederiz ve burada $\alpha = gAB\bar{c}c$ 'dır. Eklediğimiz bu terimi fiziksel olarak ifade edecek olursak A genliğe, w frekansa, θ ise faza karşılık gelmektedir ve bunu sistem üzerine gönderilen foton gibi bir parçacık olarak düşünebiliriz. Ve ayrıca sistemin kendi iç dinamiklerinden dolayı oluşabilecek bir tedirgenme durumu için, (4.1) denklem sisteminde içeriden oluşan bir periyodik kuvveti temsil eden $A\cos(wz + \theta)$ terimini negatif işaretli olarak alıyoruz. Aynı şekilde eklediğimiz bu fiziksel terimde A genliğe, w frekansa, θ ise faza karşılık gelmektedir. Bu kuvvet teriminin hangi büyüklüklerde vakum durumuna karşılık gelen instantonlarda oluşacak olası değişimlerin gözlenebilmesi ve yorumlanabilmesi, için faz uzayındaki davranışlarına baktık. Daha önceki çalışmalarda olduğu gibi biz de genel instanton çözümleri için $\alpha = 1$ alıyoruz ve frekansa karşılık gelen $w = 1$ seçip fazının olmadığı durumda ve daha net bir inceleme için Thirring İntantonlarının sadece dış yörüngelerini gösteren faz diyagramları çizdik.

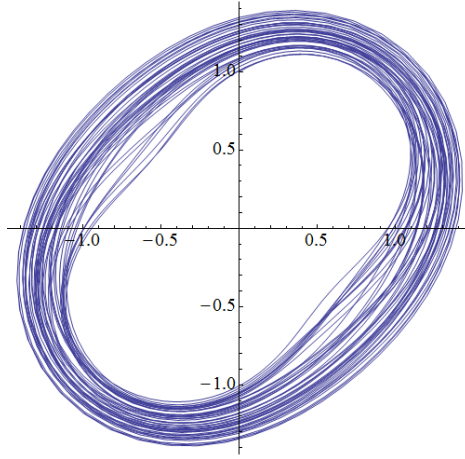
a) $A = 0.0$ b) $A = 0.08987$ c) $A = 0.08988$ d) $A = 0.08989$

Şekil 4. 1 : Thirring İntantonlarının $w = 1$ ve $\theta = 0$ olduğu $F(z) - G(z)$ Faz Diyagramları; a) Kuvvet etkisi altında olmayan periyodik faz durumu b) $0.08987\cos(z)$ etkisi altında periyodik faz durumu c) $0.08988\cos(z)$ etkisi altında kritik kaotik faz durumu d) $0.08989\cos(z)$ etkisi altında kaotik faz durumu

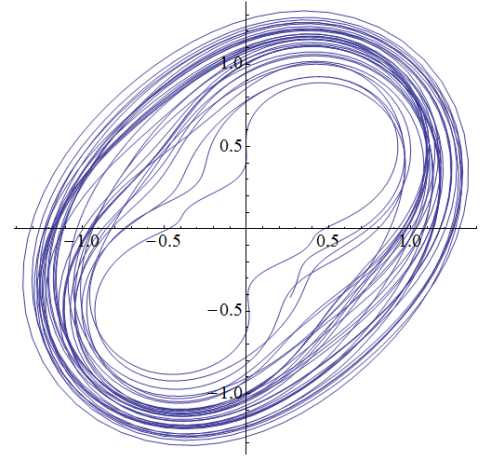
Vakum durumuna karşılık gelen instantonların $\alpha = 1$ için iki boyutta çizdiğimiz faz diyagramlarına baktığımızda Thirring İntantonlarının kararlı yapısı kuvvetin büyüklüğü ile bozulmaya başlamakta ve periyodik faz durumu $0.08988\cos(z)$ değerinde kritik kaotik faz durumu dediğimiz geçiş durumuna gelmekte ve daha büyük değerlerde ise kaotik duruma geçmektedir.

Şekil 3.2 deki dışarıdan etkiyen periyodik kuvvet altındaki Duffing sisteminin faz diyagramlarına bakıldığında Şekil 4.1 deki dışarıdan etkiyen periyodik bir kuvvet altındaki Thirring İntantonlarının faz uzayındaki davranışlarında benzerlik görülmektedir.

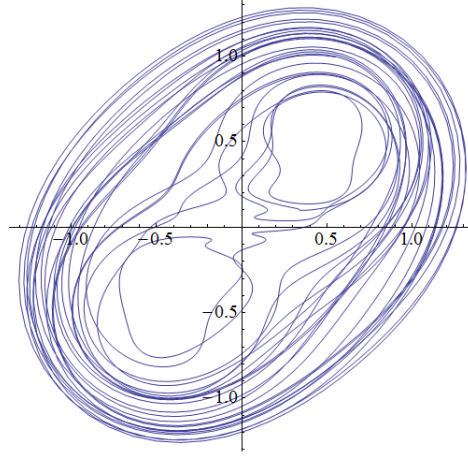
Şimdi sistemin kendi iç dinamiklerinden meydana gelen bir tedirgenme durumu incelemek için yine genel instanton çözümleri için $\alpha = 1$ alıyoruz ve frekansa karşılık gelen $w = 1$ seçip fazının olmadığı durumda ve yine daha net bir inceleme için Thirring İntantonlarının sadece dış yörüngeleri gösterilerek faz diyagramları çizilmiştir.



a) $A = 0.09545589$



b) $A = 0.09545590$



c) $A = 0.09545591$

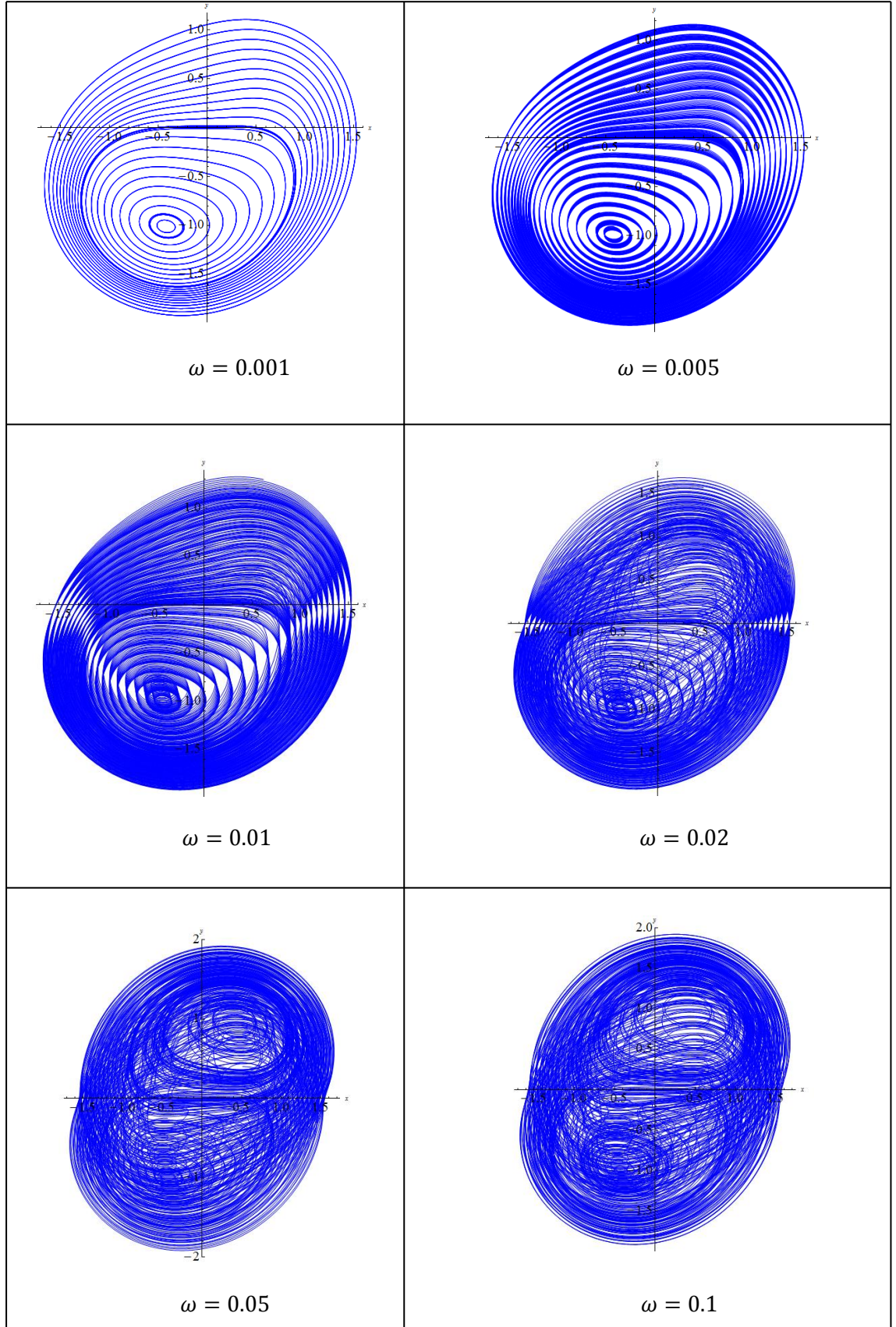
Şekil 4. 2 : Thirring İntantonlarının $w = 1$ ve $\theta = 0$ olduğu $F(z) - G(z)$ Faz Diyagramları; **a)** $0.09545589\cos(z)$ etkisi altında periyodik faz durumu **b)** $0.09545590\cos(z)$ etkisi altında kritik kaotik faz durumu **c)** $0.09545591\cos(z)$ etkisi altında kaotik faz durumu

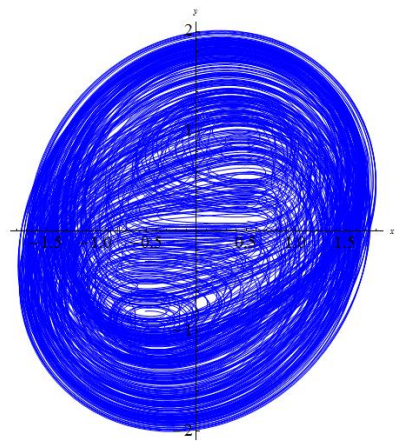
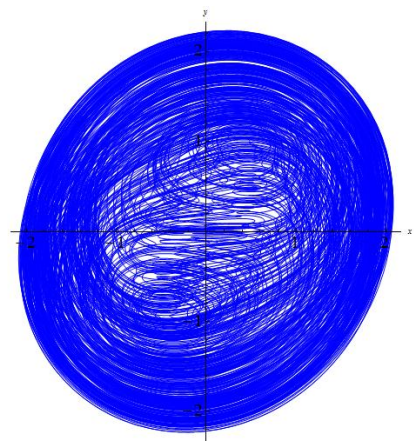
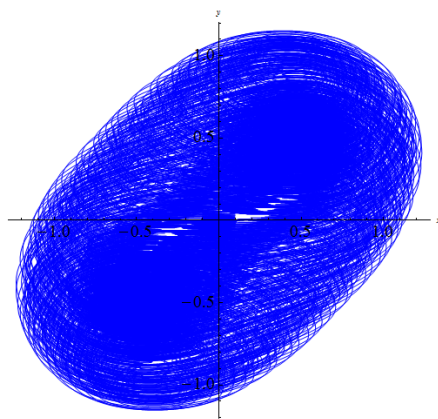
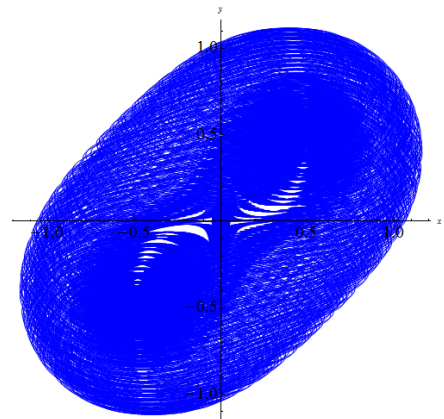
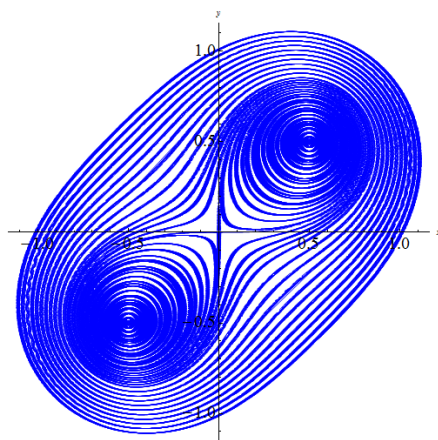
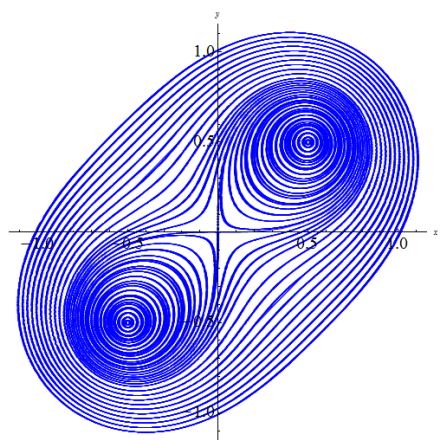
Vakum durumuna karşılık gelen instantonların $\alpha = 1$ için iki boyutta çizdiğimiz faz diyagramlarına baktığımızda Thirring İntantonlarının kararlı yapısı kendi iç dinamiğinden kaynaklanan kuvvetin büyüklüğü ile bozulmaya başlamakta ve periyodik faz durumu $0.09545590\cos(t)$ değerinde kritik kaotik faz durumu dediğimiz geçiş durumuna gelmekte ve daha büyük değerlerde ise kaotik duruma geçmektedir.

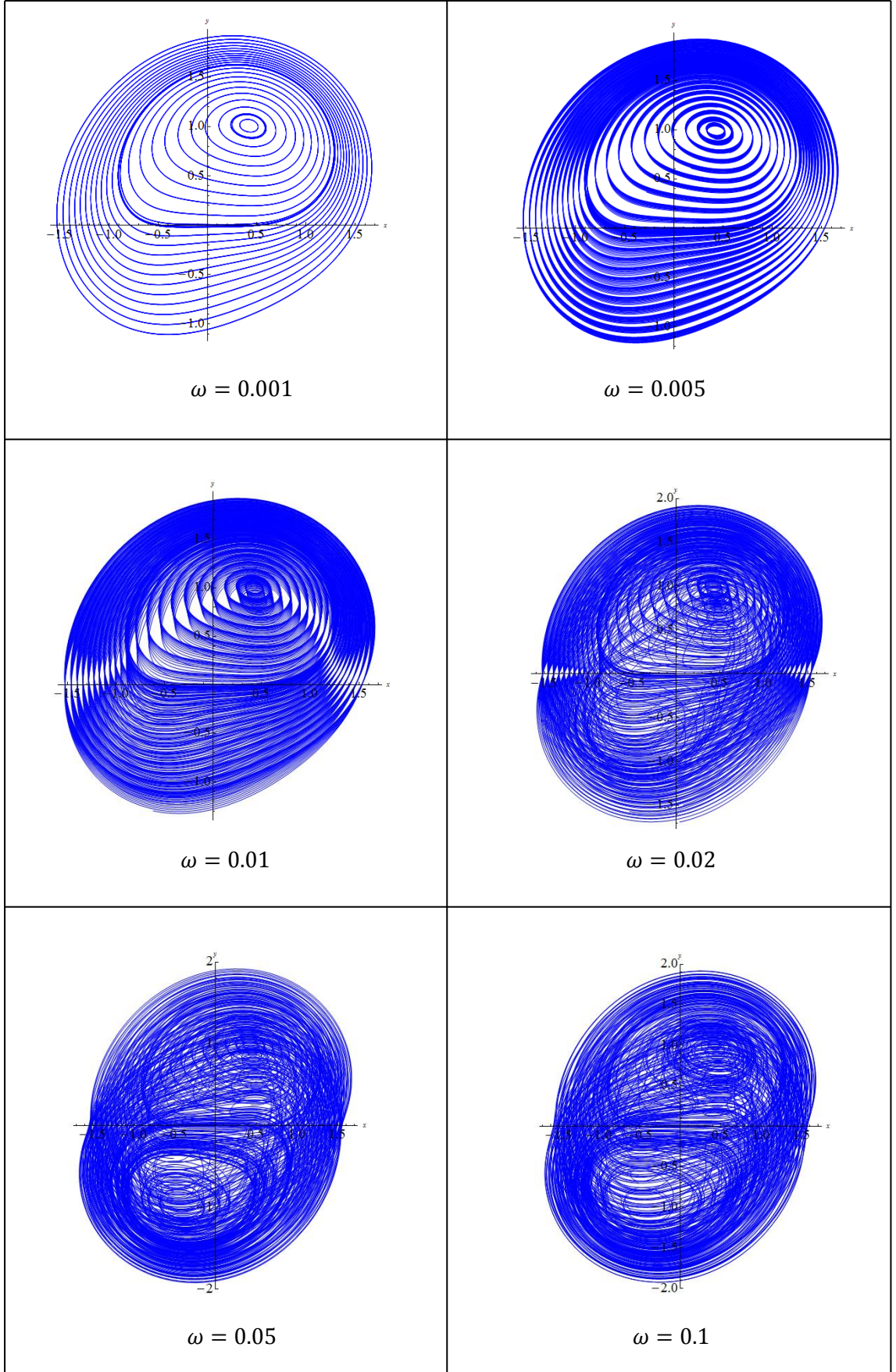
4.2. PERİYODİK KUVVET ETKİSİ ALTINDAKİ THİRRİNG İNSTANTONLARININ FAZ UZAYINDAKİ DAVRANIŞLARI

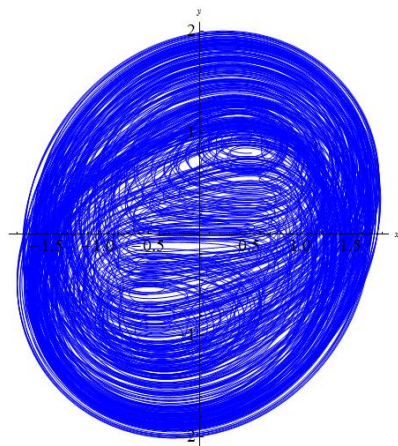
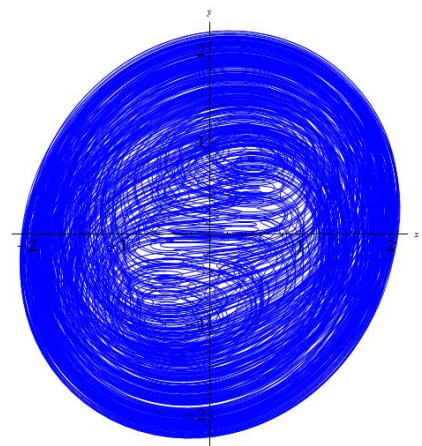
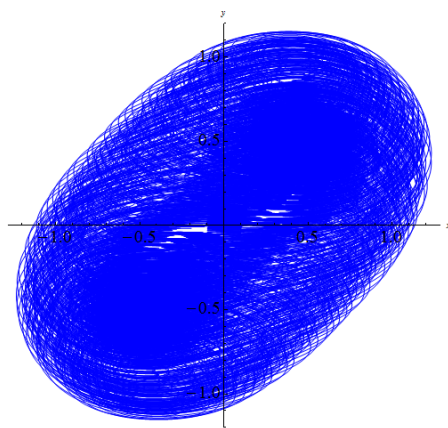
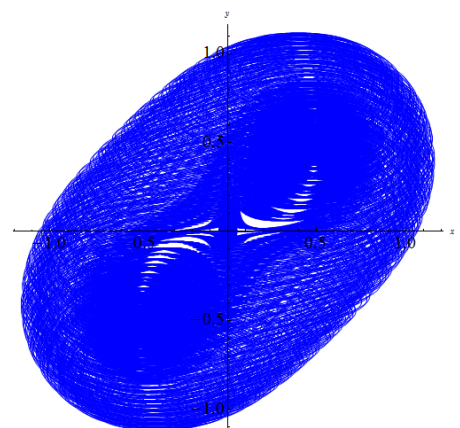
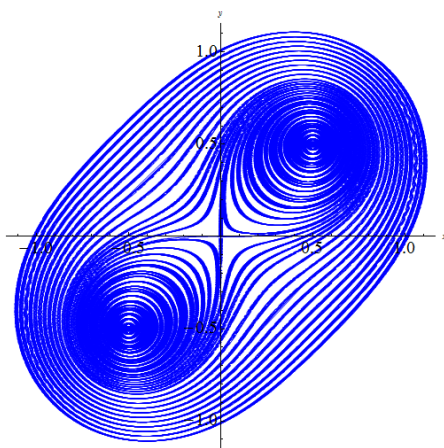
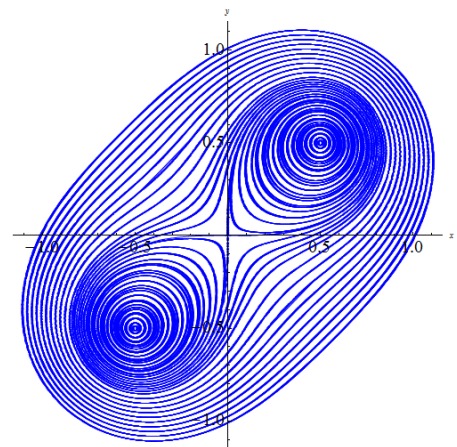
İnstanton tipi çözümleri de kapsayan boyutsuz doğrusal olmayan diferansiyel denklem sistemini Heisenberg Anzatu ile Thirring modelden elde etmiş ve bir önceki kısımda sistemin tedirgenmesine neden olacak $A\cos(wz + \theta)$ gibi bir kuvvet terimi eklemiş ve büyüklüğüne bağlı olarak değişen kaotik durumlarını daha net bir şekilde inceleyebilmek için sadece dış yörüngelerine göre faz diyagramlarını çizmiştik.

Bu kısımda ise daha önce göstermiş olduğumuz Thirring İnstantonlarının kararlı çözümlerine karşılık gelen, $\alpha = 1$ için çizdiğimiz faz uzayındaki (Şekil 3.3) tüm yörüngelere, $A\cos(wz + \theta)$ kuvvet teriminin etkisini, genliğin, frekansın ve fazın farklı değerleriyle incelemek ve bu durumdaki instantonların faz uzayındaki davranışlarını gözlemlemek için faz diyagramları çizdik. İlk olarak genlik değeri bir alınarak ve fazın olmadığı durumlardaki Thirring İnstantonlarının davranışlarının $\alpha = 1$ olduğu değerdeki frekansın farklı değerleri için, hem dışarıdan etki eden, hem de iç dinamiklerinden oluşan periyodik bir kuvvet altındaki değişimleri gözlemlemek için iki boyutta çizdiğimiz faz diyagramlarını sırasıyla aşağıda gösterdik.

Tablo 4. 1 : $A = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Faz Diyagramları

 $\omega = 0.5$  $\omega = 1$  $\omega = 5$  $\omega = 10$  $\omega = 50$  $\omega = 100$

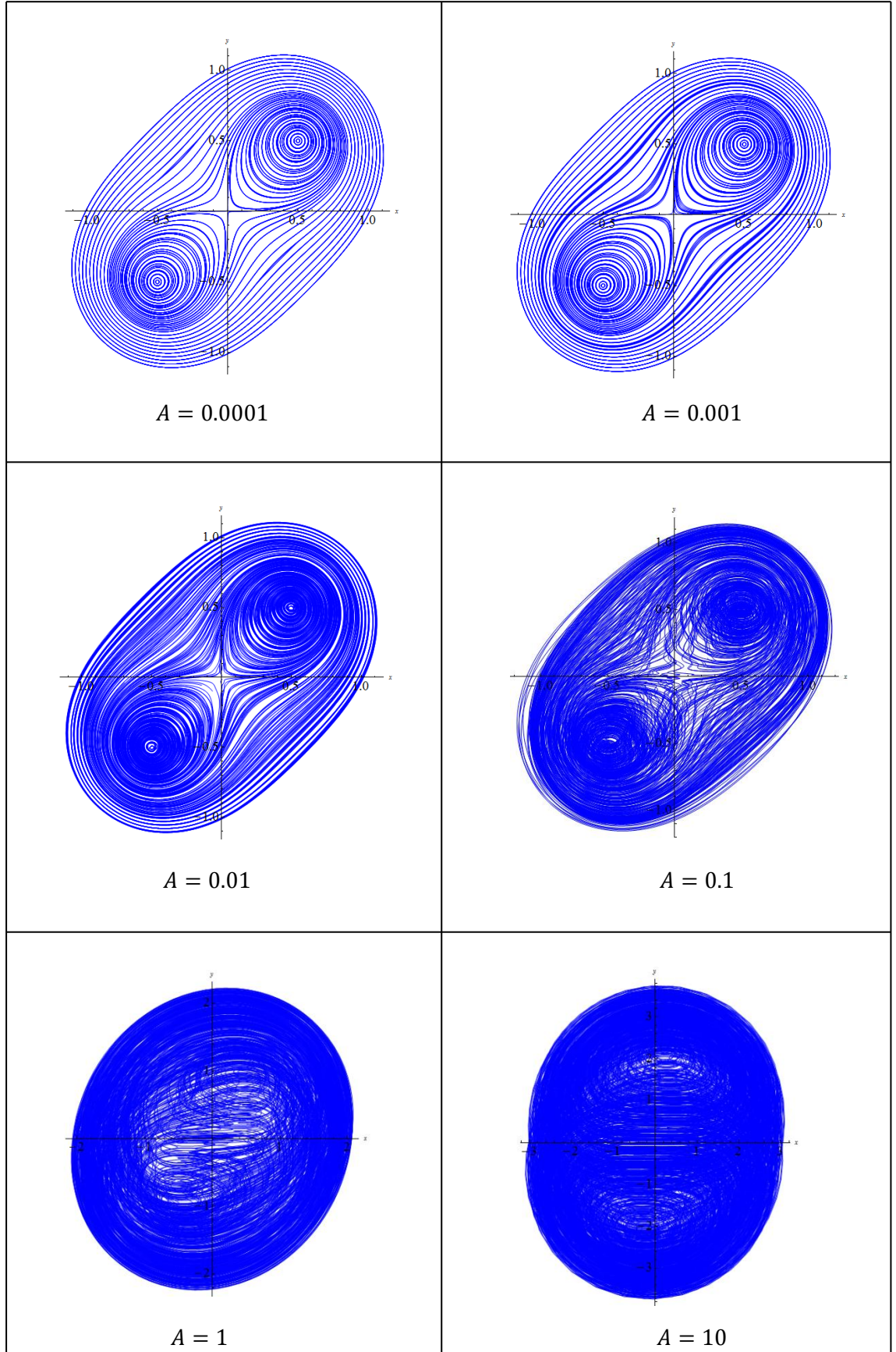
Tablo 4. 2 : $A = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Faz Diyagramları

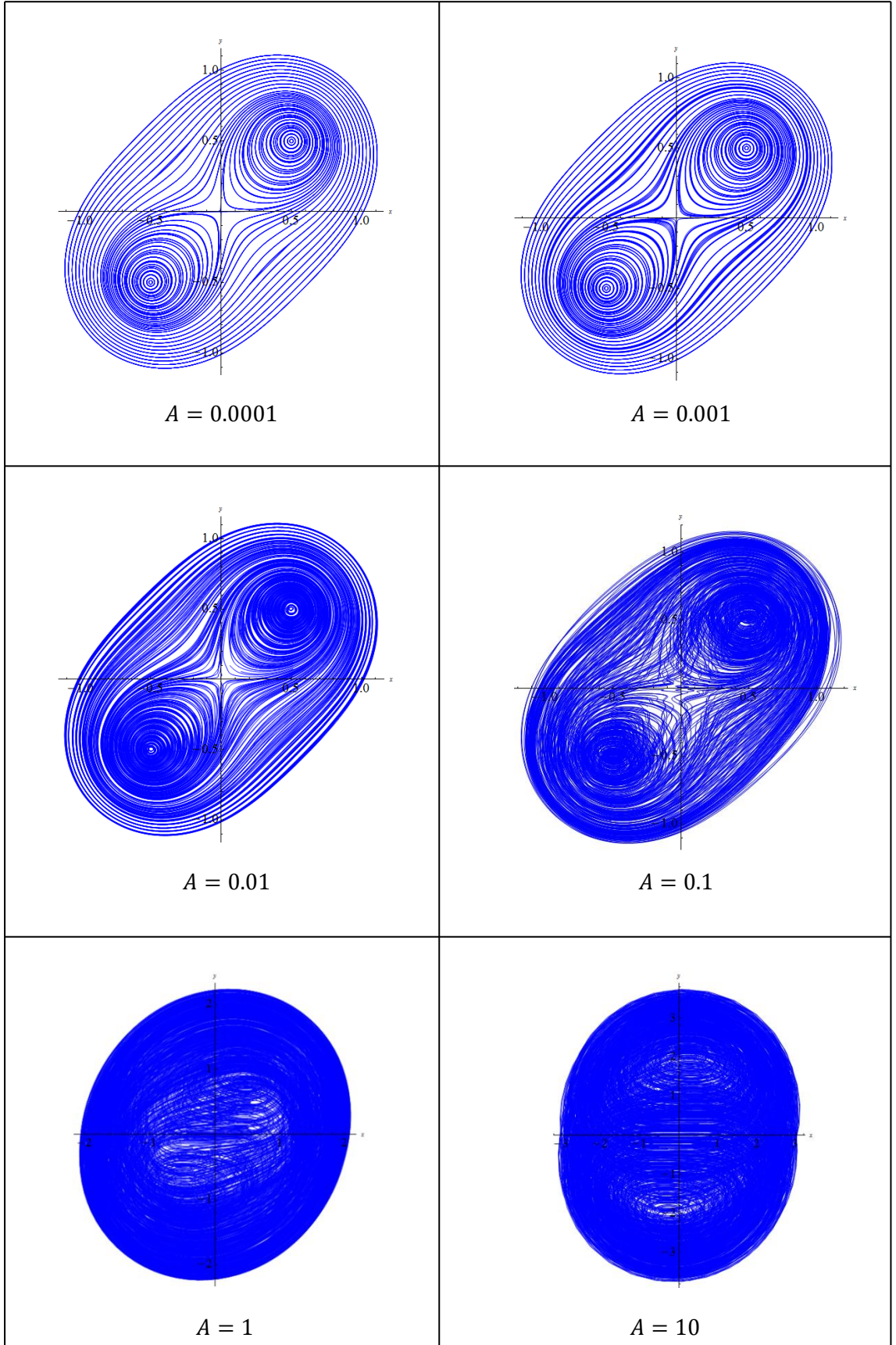
 $\omega = 0.5$  $\omega = 1$  $\omega = 5$  $\omega = 10$  $\omega = 50$  $\omega = 100$

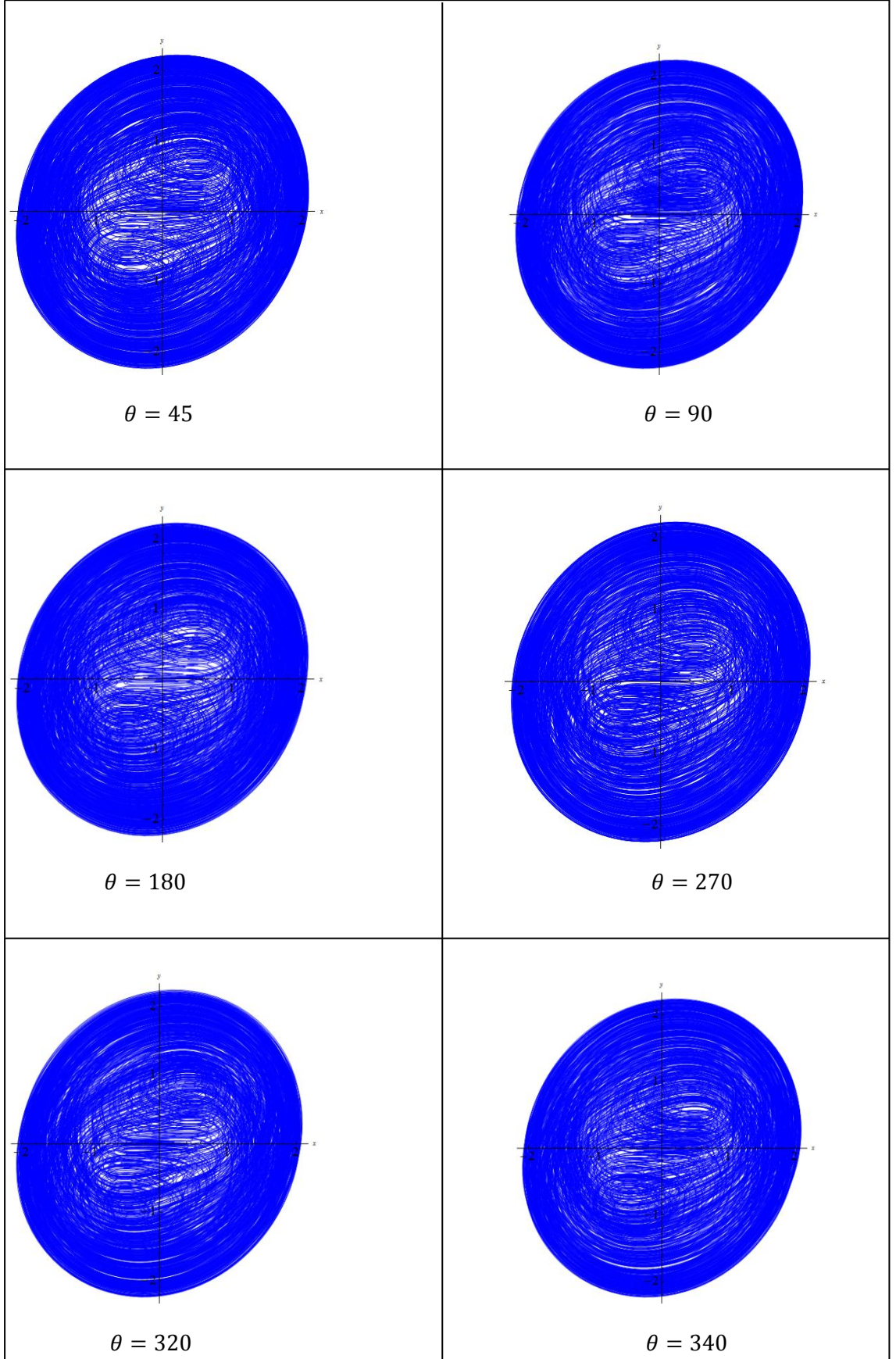
Tablo 4.1. ve Tablo 4.2 de iki boyutta çizdiğimiz diyagramlarını incelediğimizde vakum durumuna karşılık gelen Thirring İntantonların faz uzayı davranışlarının periyodik kuvvetin farklı frekans değerinde değiştiğini görüyoruz. Herhangi bir kuvvet etkisi altında olmayan, $\alpha = 1$ için faz uzayında kararlı davranışlar sergileyen İntantonlar, etki eden periyodik kuvvetin frekansının çok küçük değerlerinde bir denge noktasına göre kararlılık göstermektedirler. Etki eden bu kuvvetin frekansının artan değerlerinde ise sistem kaotikleşmeye başlıyor. Bu Frekansın değerleri daha da arttırıldığında kuvvet etkisi altında olamayan kararlı duruma geçmektedir. Kısaca bu faz uzaylarına bakarak instantonların küçük frekanslarda bozulmalara uğradığını, frekansın belli değerleri için kararlılık iyice bozularak kaotik davranışlar sergilemeye başladığını ve frekansın artan değerleri için sistemin kendini toparlayıp tekrar kararlı davranışlar sergilediğini söyleyebiliriz.

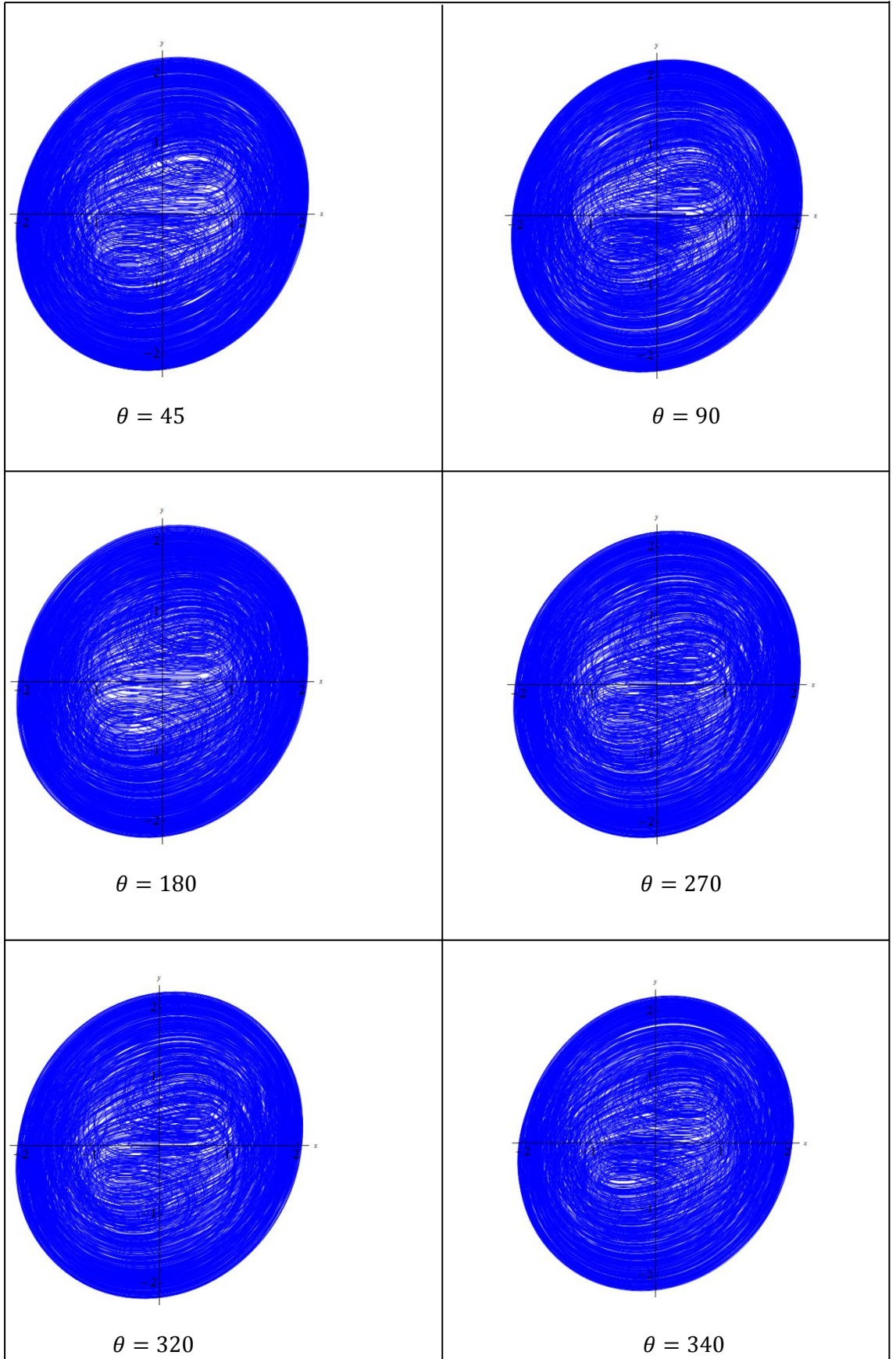
Şimdi frekansı ve fazı sabit tutup genliğin değerleri ile oynayarak Thirring İntantonlarının faz uzayı davranışlarındaki değişikliklere bakalım. Fazın olmadığı durumlarda ve frekans $\omega = 1$ alınarak ve genliğin farklı değerleri için hem dışardan etki ile hem de iç dinamiklerden oluşan değişimler için çizilmiş faz uzayları Tablo 4.3 ve 4.4' te gösterdik. Tablolar incelendiğinde genliğin farklı değerlerinde ki her iki durum içinde Thirring İntantonlarının faz uzayı, genliğin çok küçük değerlerinde kararlı iken artan değerlerinde davranışlarında bozulmalar olduğunu ve kaotik davranışlar sergilemeye başladığını görüyoruz.

Tablo 4.5 ve 4.6 da ise belirli bir frekansta ve genlikteki etki altında kararlı bir duruma getirdiğimiz Thirring İntantonlarının fazını değiştirerek davranışlarındaki meydana gelen değişim incelendi. Etki eden kuvvetin genlik değeri $A = 1$ ve frekansını $\omega = 1$ olarak belirleyip fazın farklı değerleri için Thirring İntantonlarının faz diyagramlarına baktığımızda her iki durum içinde İntantonların davranışlarında belirli bir değişim olmadığını görüyoruz.

Tablo 4. 3 : $\omega = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Faz Diyagramları

Tablo 4. 4 : $\omega = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Faz Diyagramları

Tablo 4. 5 : $\omega = 1$, $A = 1$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Faz Diyagramları

Tablo 4. 6 : $\omega = 1$, $A = 1$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Faz Diyagramları

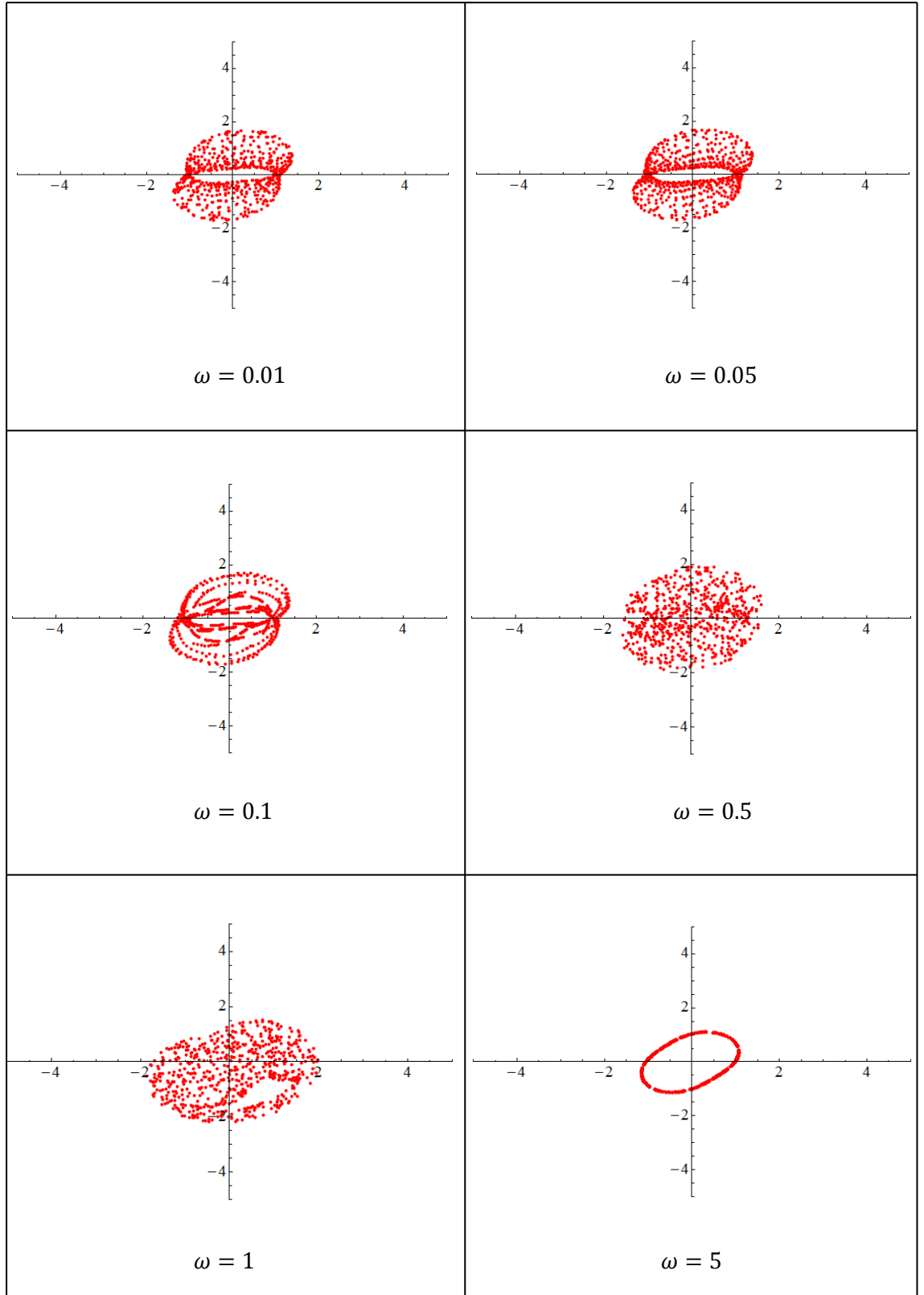
4.3. PERİYODİK KUVVET ETKİSİ ALTINDAKİ THİRRİNG İNSTANTONLARININ POİNCARE KESİTLERİ

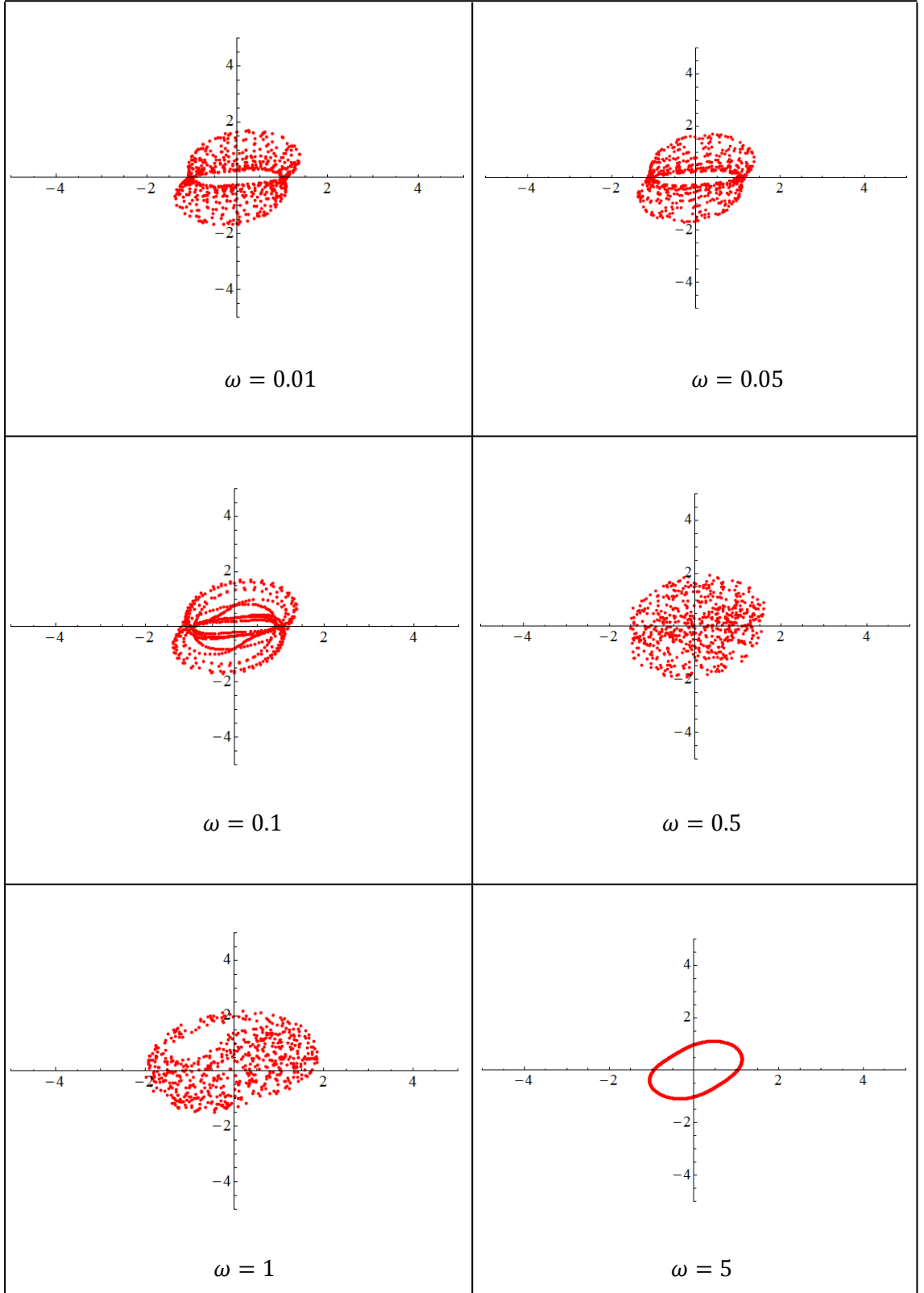
Poincare kesiti sistemin uzun-süreli davranışına ait faz yörüngesinin faz uzayında izlediği yol hakkında uzaysal ve zamansal bilgi sağlaması ve sistemin uzun-süreli davranışı hakkında daha iyi bilgi sahibi olabilmemiz açısından önemlidir. Ayrıca Poincare kesitleri çok karmaşık olan faz uzayları hakkında da yorum yapmaya imkan sağlamaktadır.

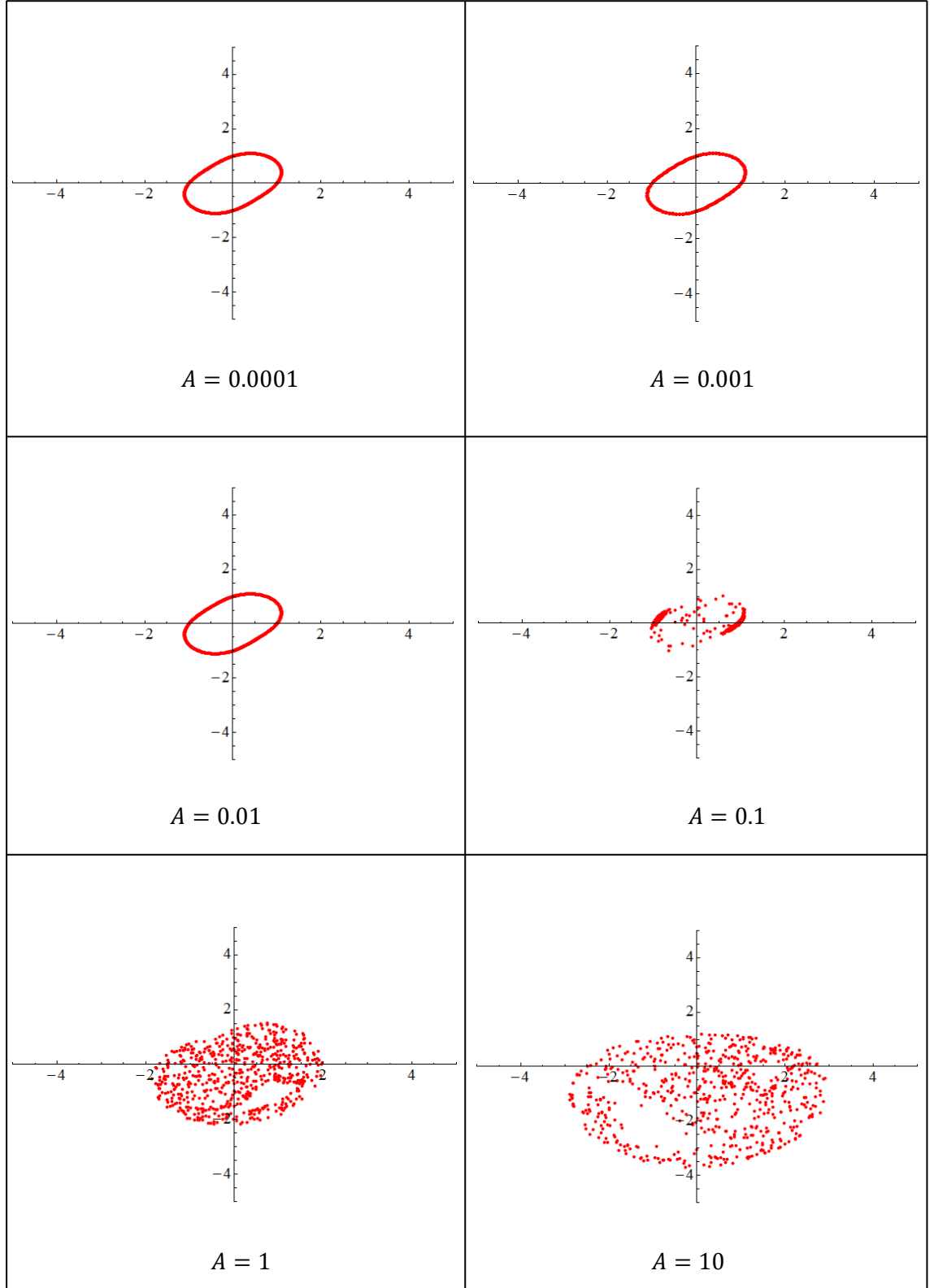
Periyodik kuvvet etkisi altındaki Thirring İntantonlarının Poincare kesitlerini hem kendi iç dinamiklerinden oluşan hem de dışarıdan etki eden bir periyodik kuvvet terimindeki genliğin frekansın ve fazın değişimine bağlı inceleyeceğiz. Tablo 4.7 ve 4.8 de genlik ve faz sabit tutularak frekansın değişimine bağlı olarak çizilen Poincare kesitlerini görüyoruz. Her iki Tabloda da görüldüğü gibi frekansın artan değerlerinde Thirring İntantonları kararlı yapıya geçmektedir.

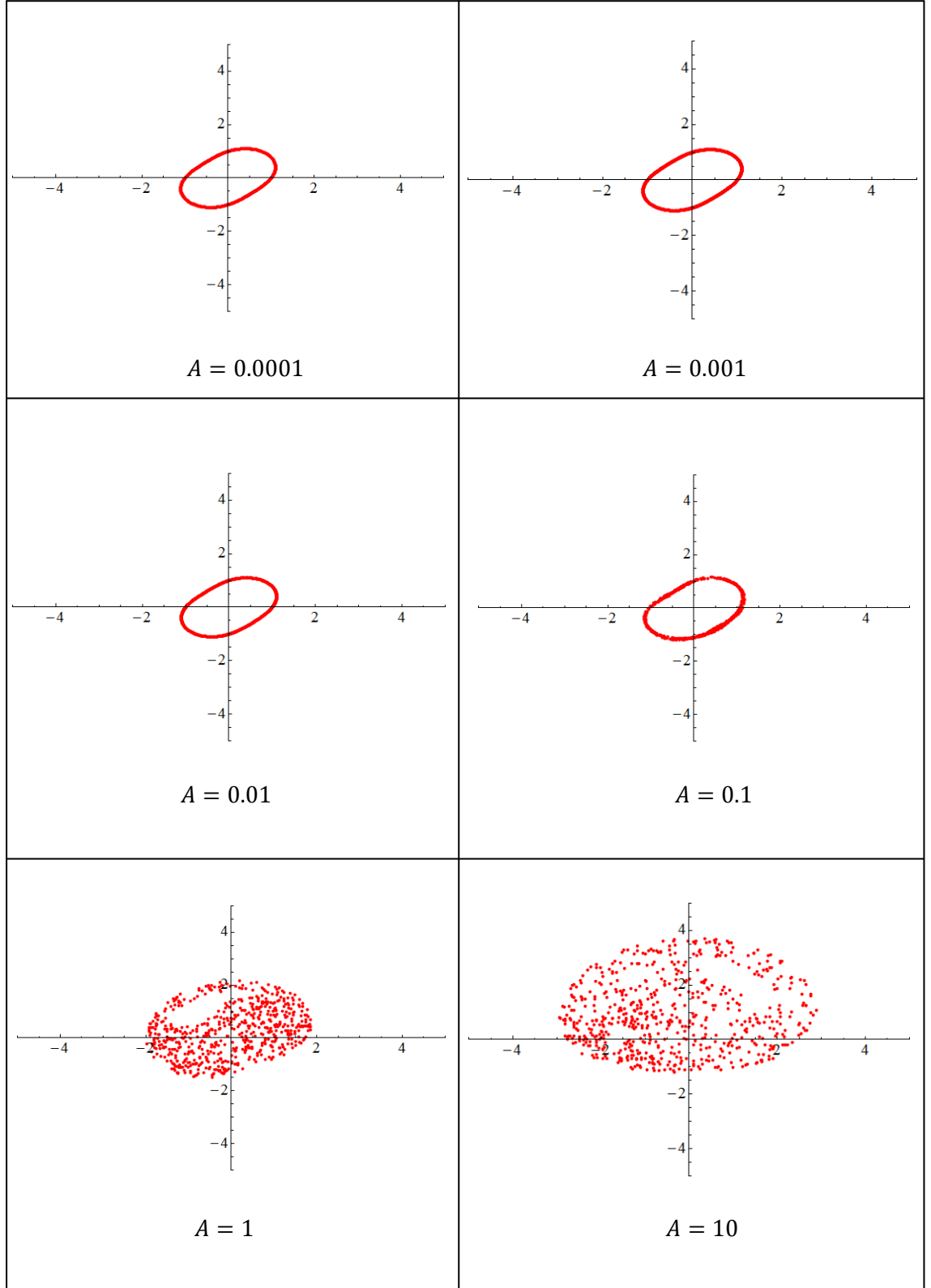
Frekansın sabit tutulduğu ve fazın olmadığı durumlar için Tablo 4.9 ve 4.10 da gösterilen Poincare kesitlerinde genliğin artan değerlerinde sistemin tamamen kaotikleştiği görülmektedir.

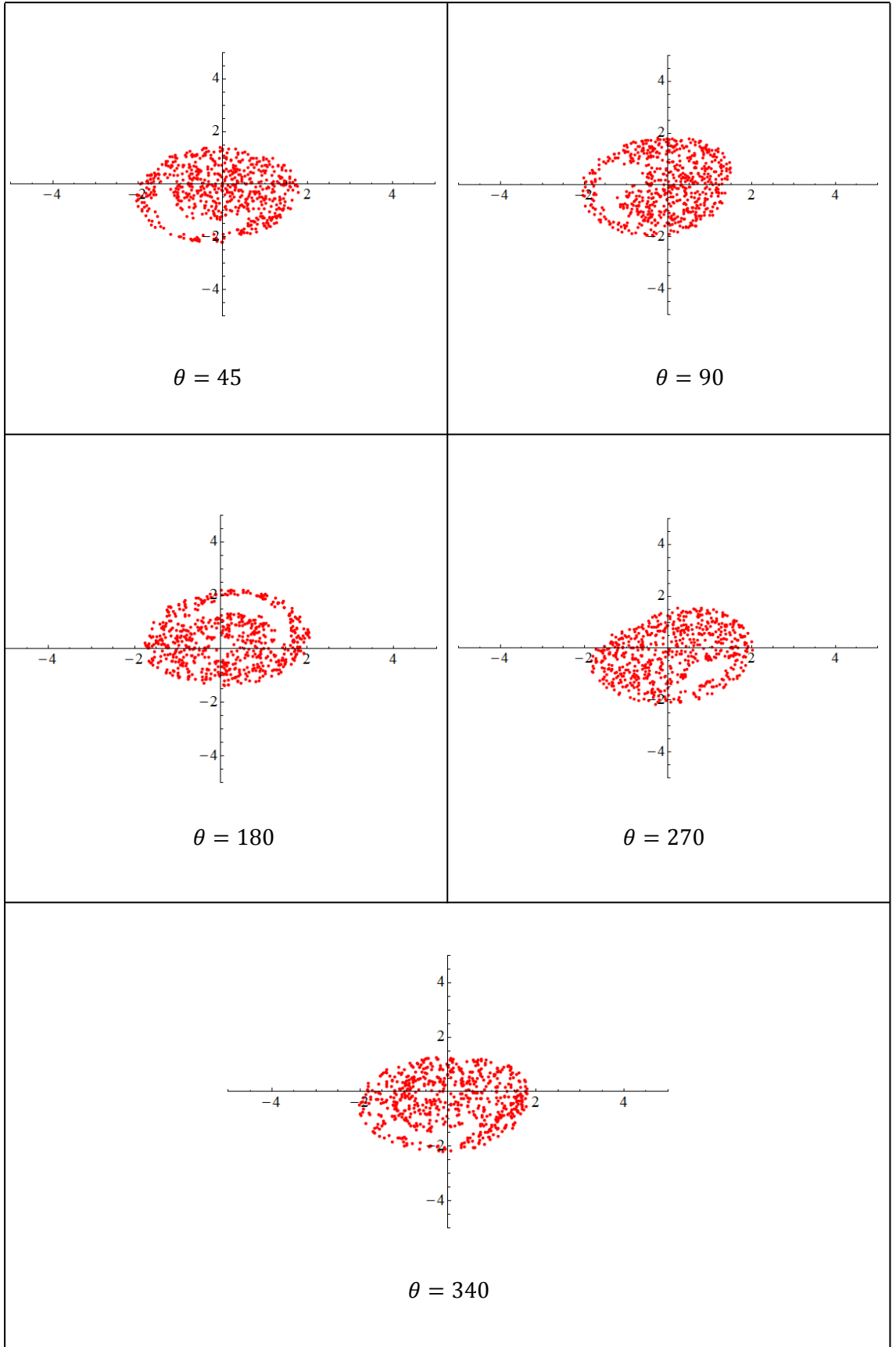
Genliğin ve Frekansın değerini bir alıp fazı değiştirdiğimizde, Tablo 4.11 ve 4.12 de Thirring İntantonlarının davranışlarının Poincare kesitlerini görüyoruz. Etki eden kuvvetin fazındaki değişime göre sistemimizin faz uzayı grafikleri çok karmaşıktı. Fakat Poincare kesitlerinde sistemimizin fazın değişimine göre döndüğünü görüyoruz. Bu da bize yörüngelerinin yer değiştirdiğinin yorumunu yapmamıza imkan sağlamaktadır.

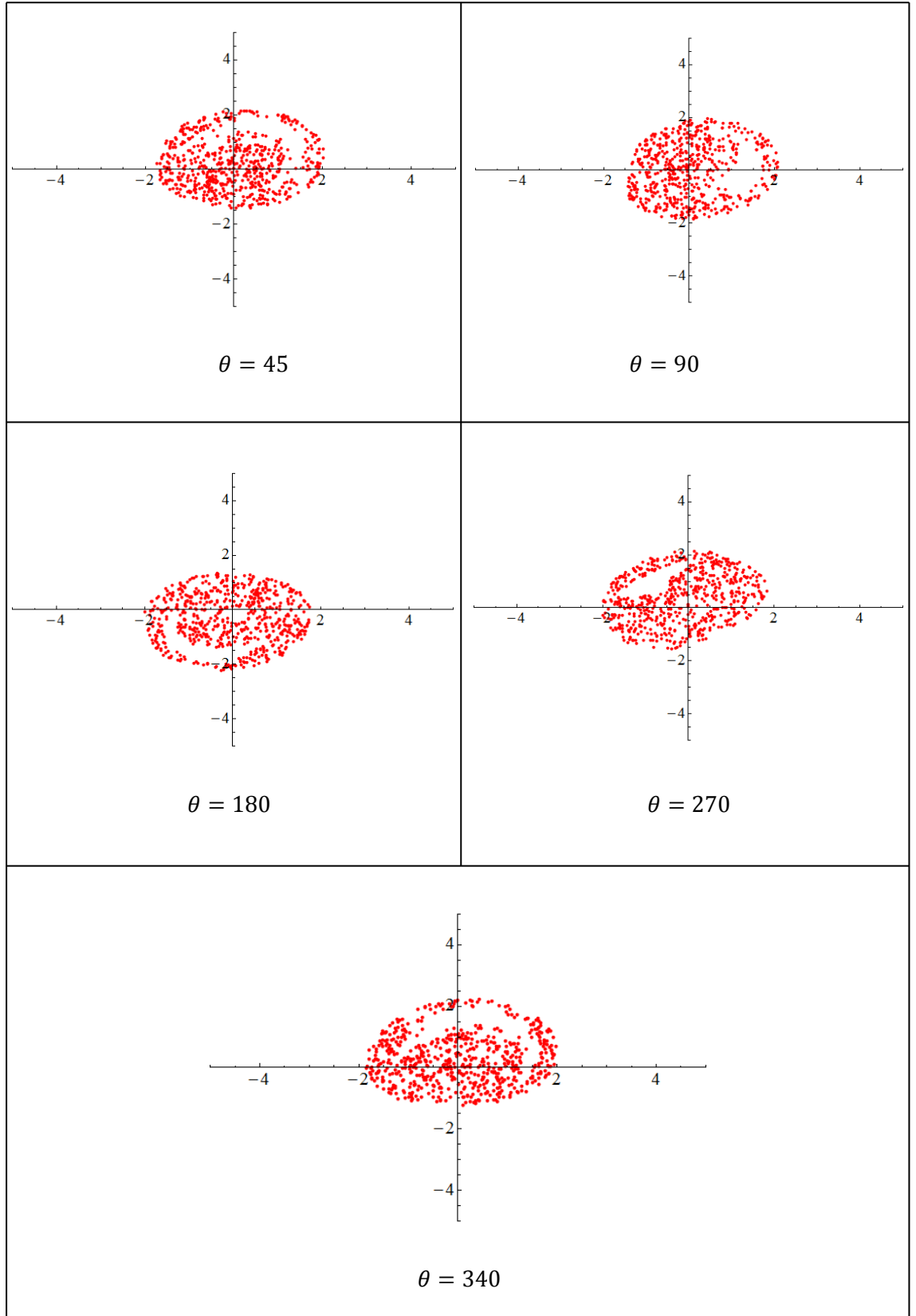
Tablo 4. 7 : $A = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Poincare Kesitleri

Tablo 4. 8 : $\mathbf{A} = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Poincare Kesitleri

Tablo 4. 9 : $\omega = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Poincare Kesitleri

Tablo 4. 10 : $\omega = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Poincare Kesitleri

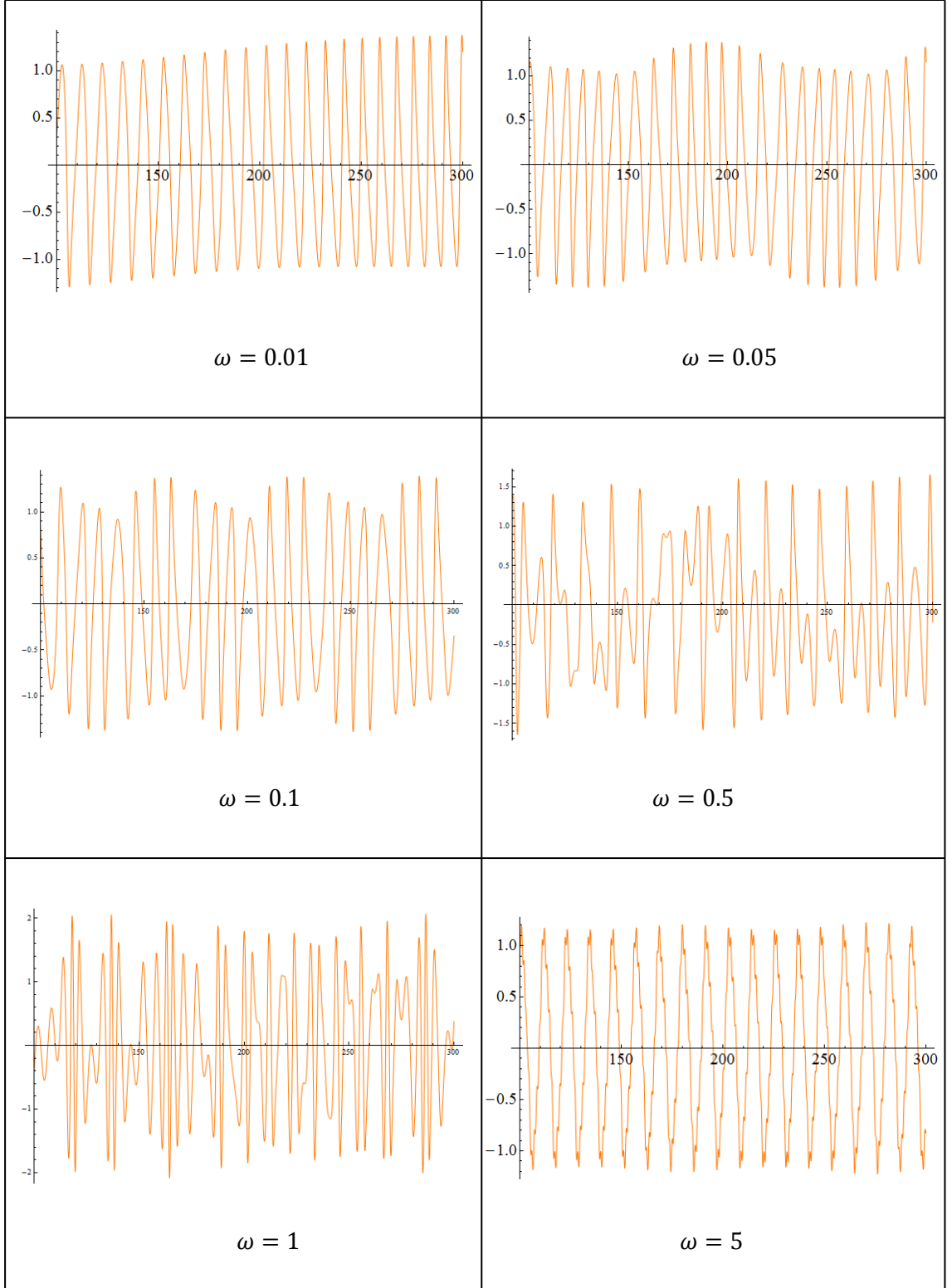
Tablo 4. 11 : $A = 1$, $\omega = 1$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Poincare Kesitleri

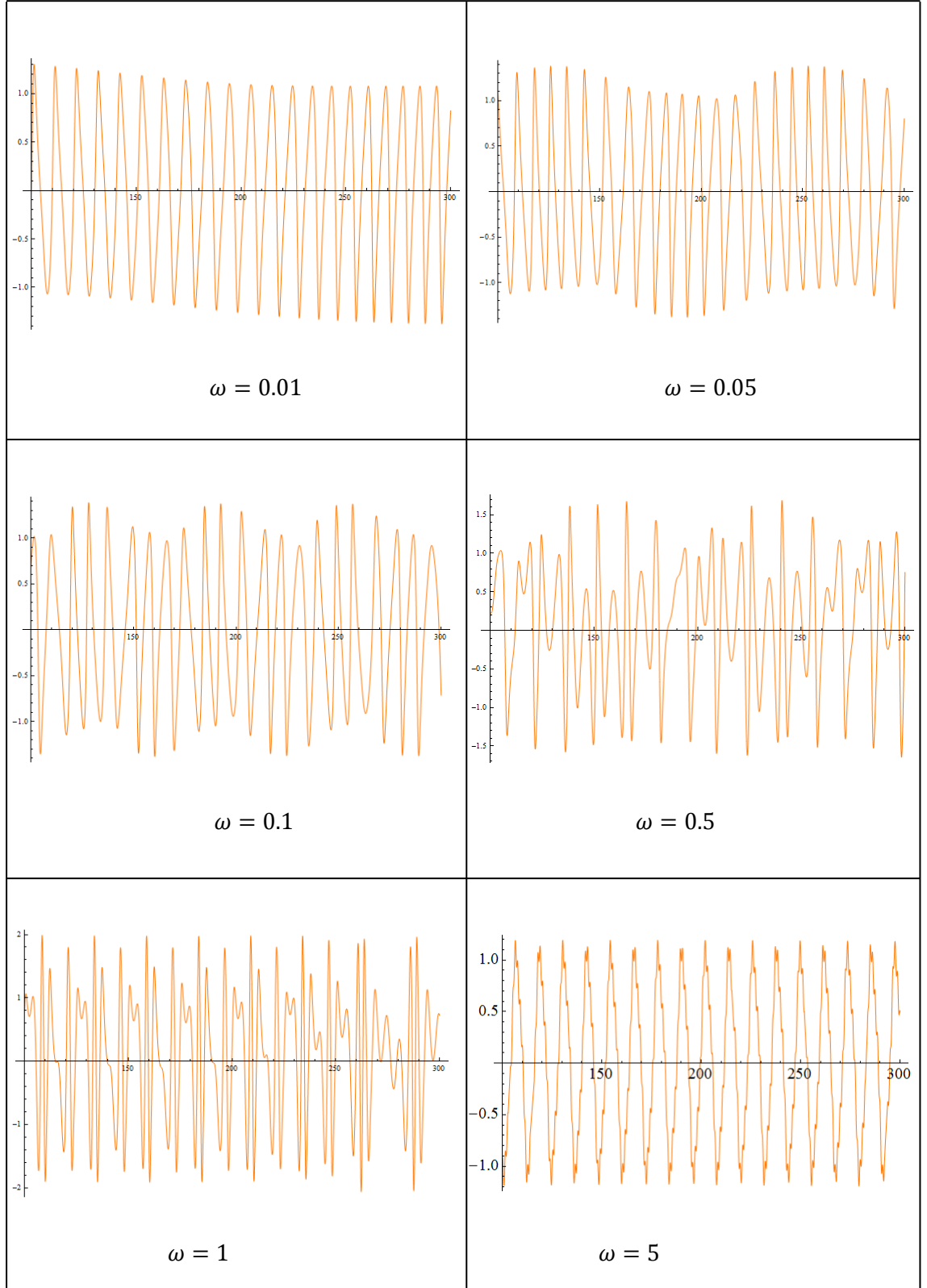
Tablo 4. 12 : $A = 1$, $\omega = 1$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Poincare Kesitleri

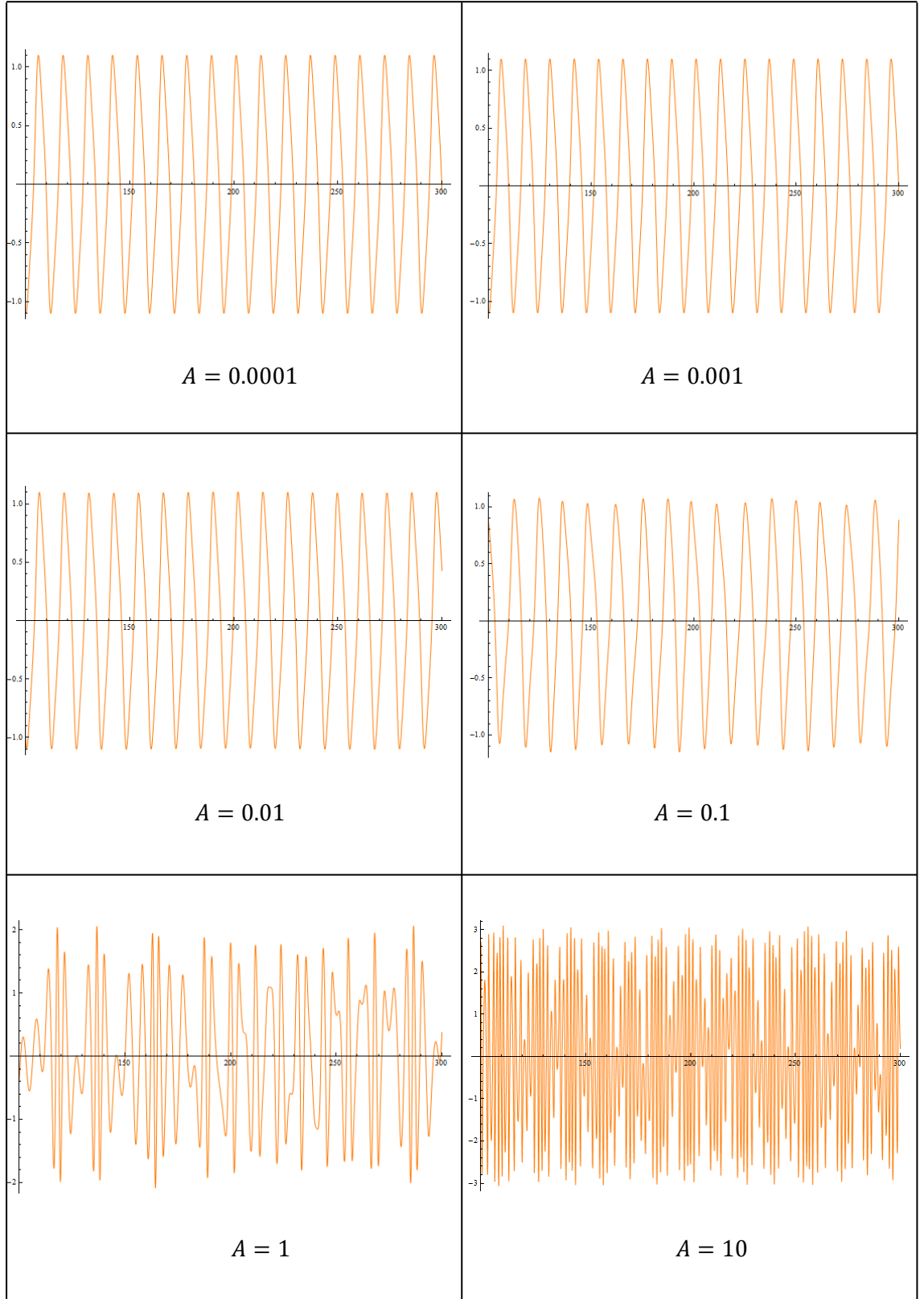
4.4. PERİYODİK KUVVET ETKİSİ ALTINDAKİ THİRRİNG INSTANTONLARINDA ZAMAN SERİSİ

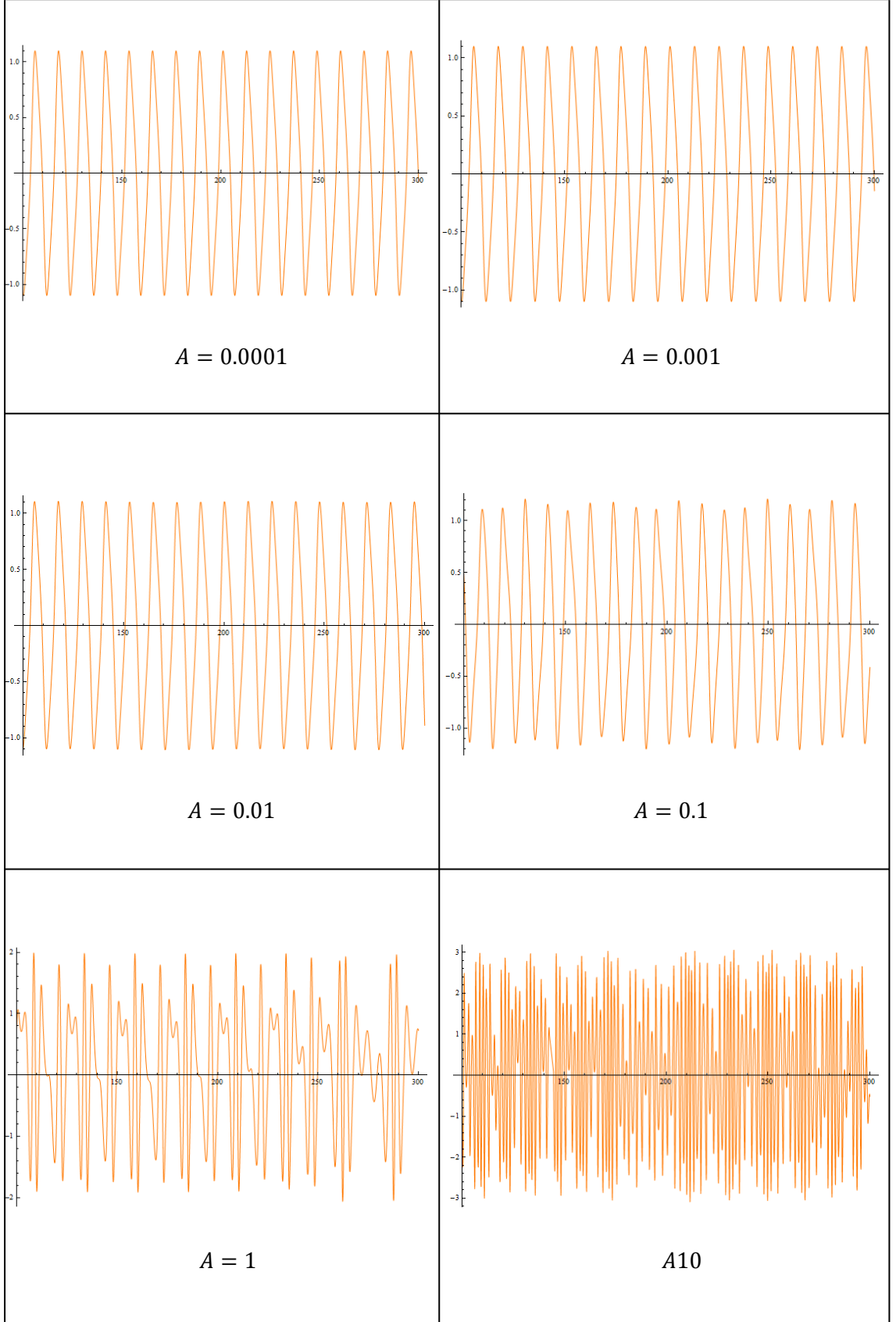
Periyodik kuvvet etkisi altındaki sistemimiz yapısı hakkında daha fazla bilgi almak için zaman serisi analizine başvurduk. Hem dışarıdan etki eden bir parçacığa göre hem de kendi iç dinamiklerinden oluşan bir tedirgenmeye göre frekansın, genliğin ve fazın değişen değerlerine bağlı olarak çizilen zaman serisi grafikleri aşağıdaki tablolarda verilmiştir. Deney sonucu veya iterasyon yapılarak ya da herhangi bir yolla elde edilen ve herhangi bir dinamik sistemin davranışını karakterize eden sayılar sistemimizin zaman serisi olarak adlandırılır. Zaman serisinin değişimi herhangi bir düzene göre olmayıp, düzensiz bir şekilde oluyorsa sistemin bu sayılarla belirlenen davranışı kaos gösterebilir[45].

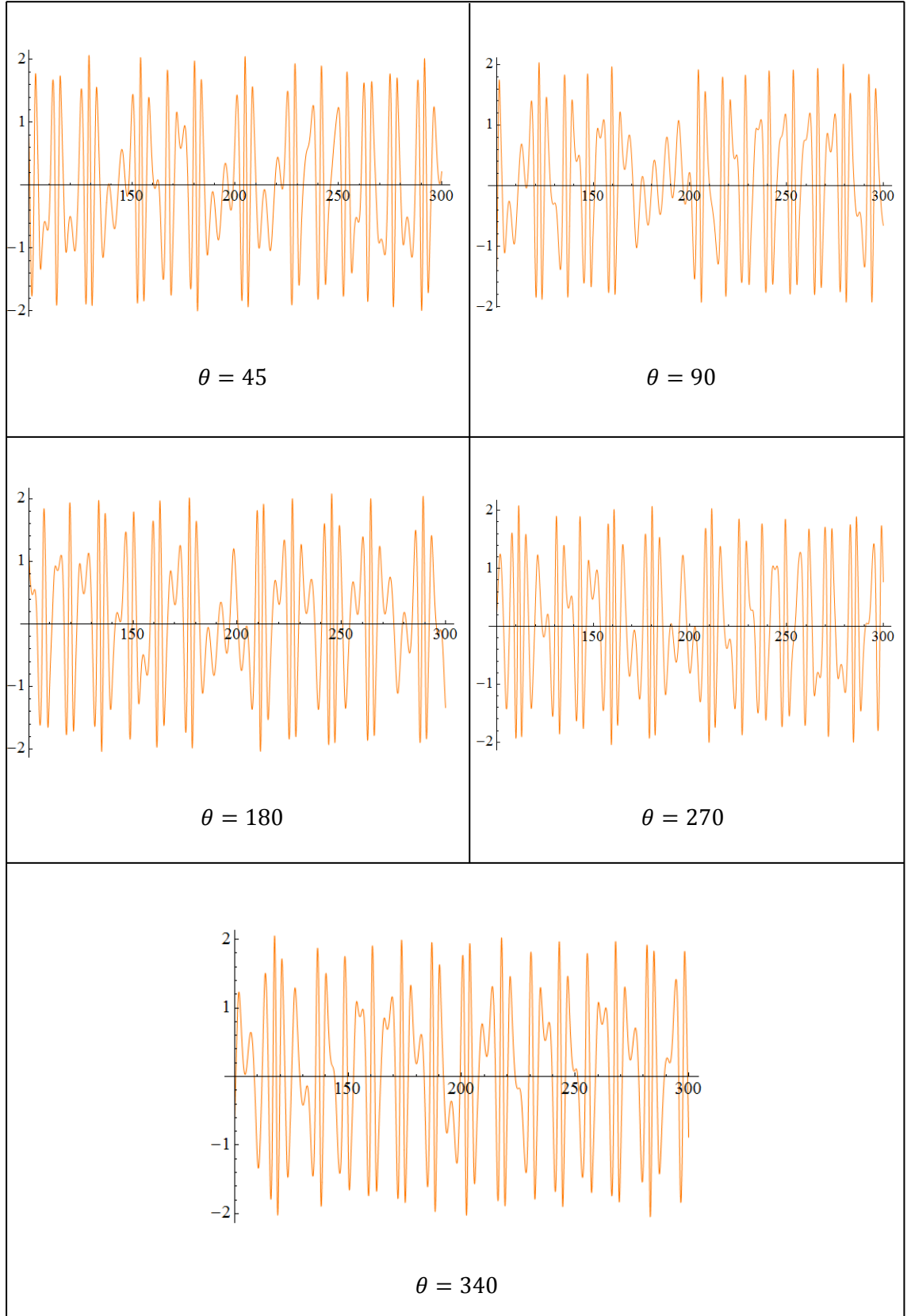
Aşağıda her iki durum için de verilmiş olan zaman serisi grafikleri incelendiğinde daha önce çizdiğimiz faz uzaylarının incelenmesiyle elde edilen sonuçlarla uyumlu oldukları gözlenmiştir. Tablo 4.13 ve Tablo 4.14’de frekansın küçük değerlerindeki kararlı yapı artan değerlerde kaotik yapıya geçmekte ve sonrasında kararlı yapıya doğru bir eğilim gözükmektedir. Tablo 4.15 ve 4.16’da genliğin küçük değerlerindeki sistemin periyodik yapısı genliğin artan değerlerinde bozulmakta ve kaotikleşmektedir. Tablo 4.17 ve Tablo 4.18’de fazın değişen değerlerine göre çizilen zaman serilerinde kaymalardan oluşan bir değişim gözlenmektedir.

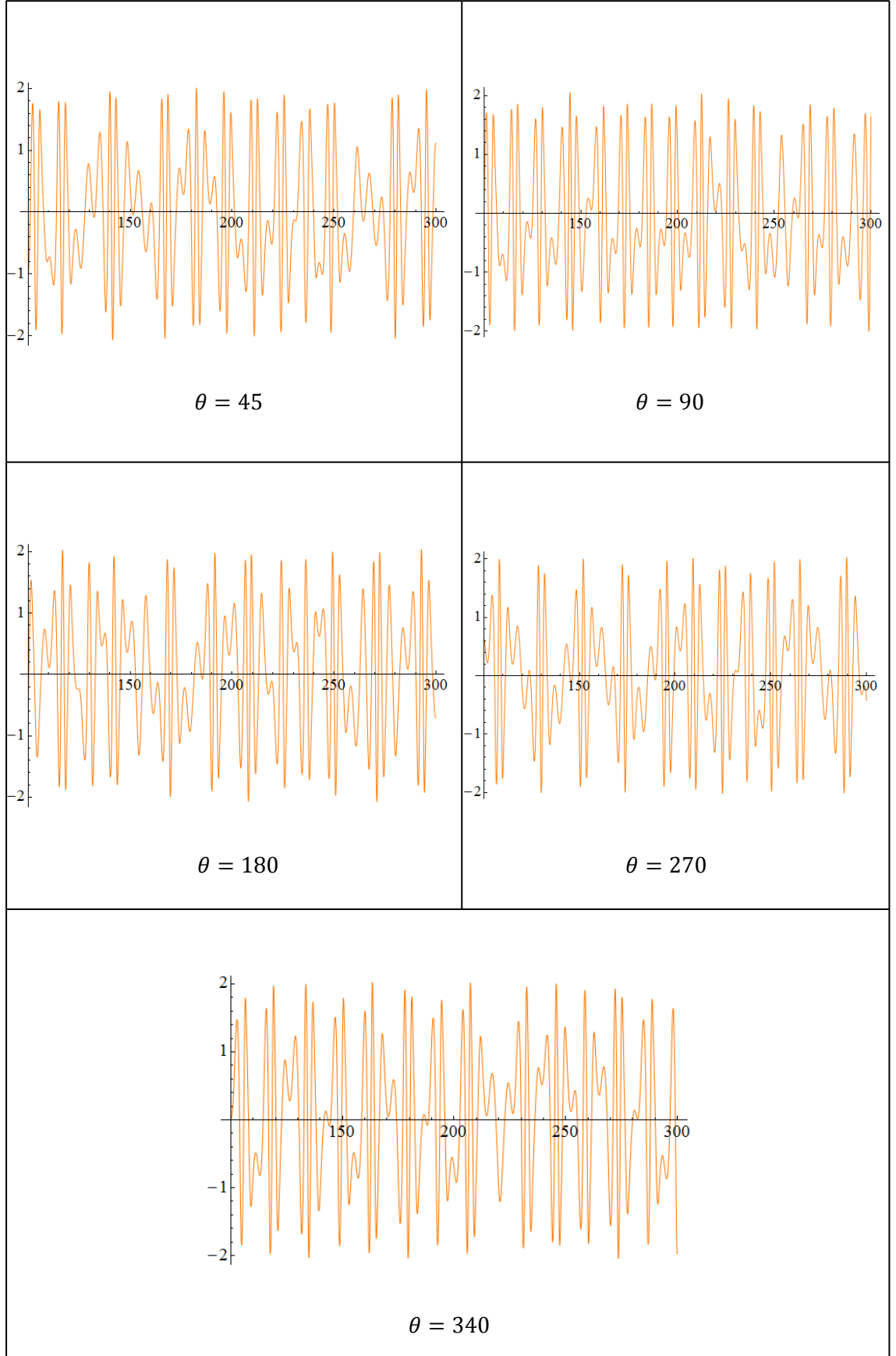
Tablo 4. 13 : $A = 1, \theta = 0$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Zaman Serisi

Tablo 4. 14 : $A = 1, \theta = 0$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Zaman Serisi

Tablo 4. 15 : $\omega = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Zaman Serisi

Tablo 4. 16 : $\omega = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Zaman Serisi

Tablo 4. 17 : $A = 1$, $\omega = 1$ Periyodik Dış Kuvvetler Altında Zaman Serisi

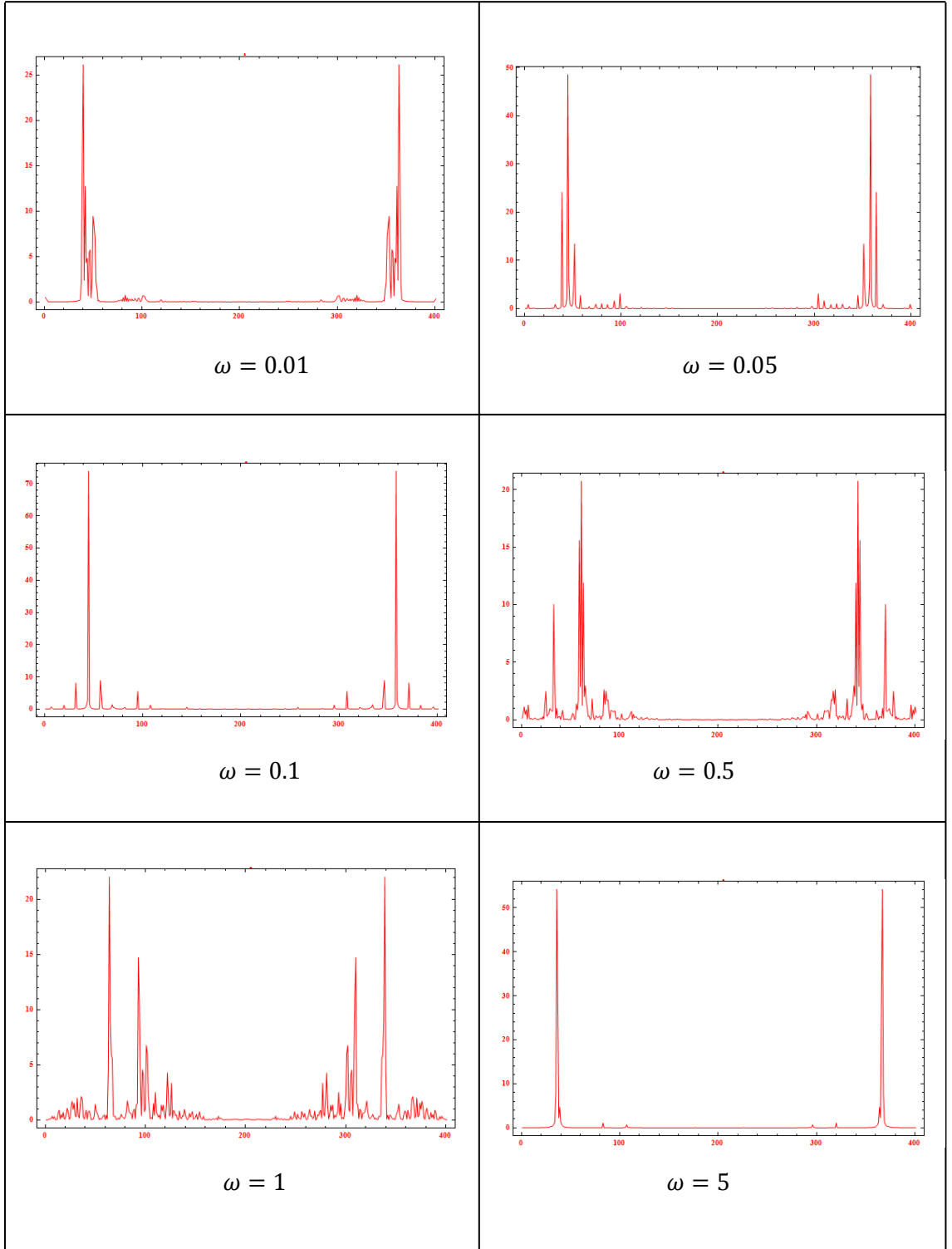
Tablo 4. 18 : $A = 1$, $\omega = 1$ Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Zaman Serisi

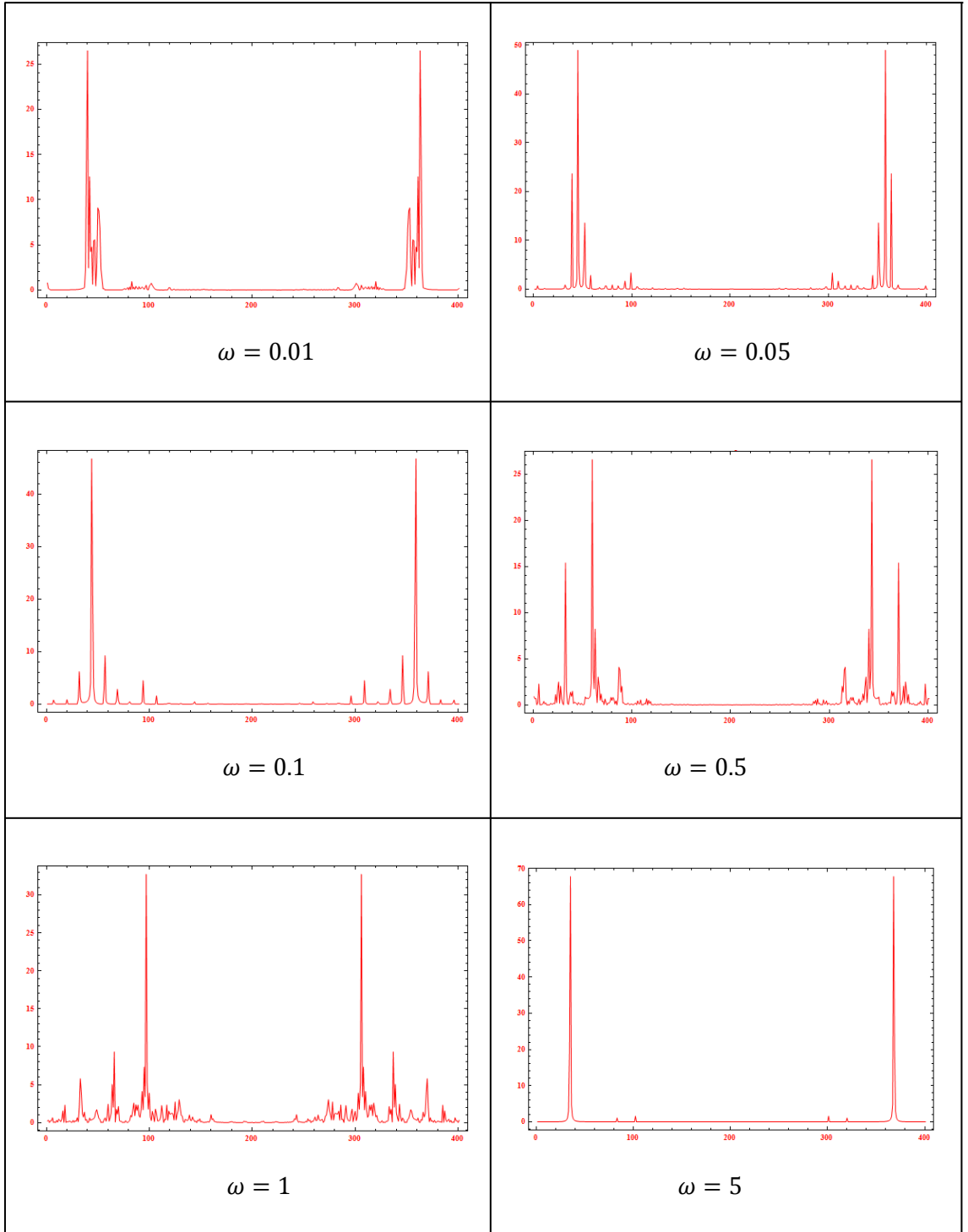
4.5. PERİYODİK KUVVET ETKİSİ ALTINDAKİ THİRRİNG İNSTANTONLARINDA GÜÇ SPEKTRUMLARI

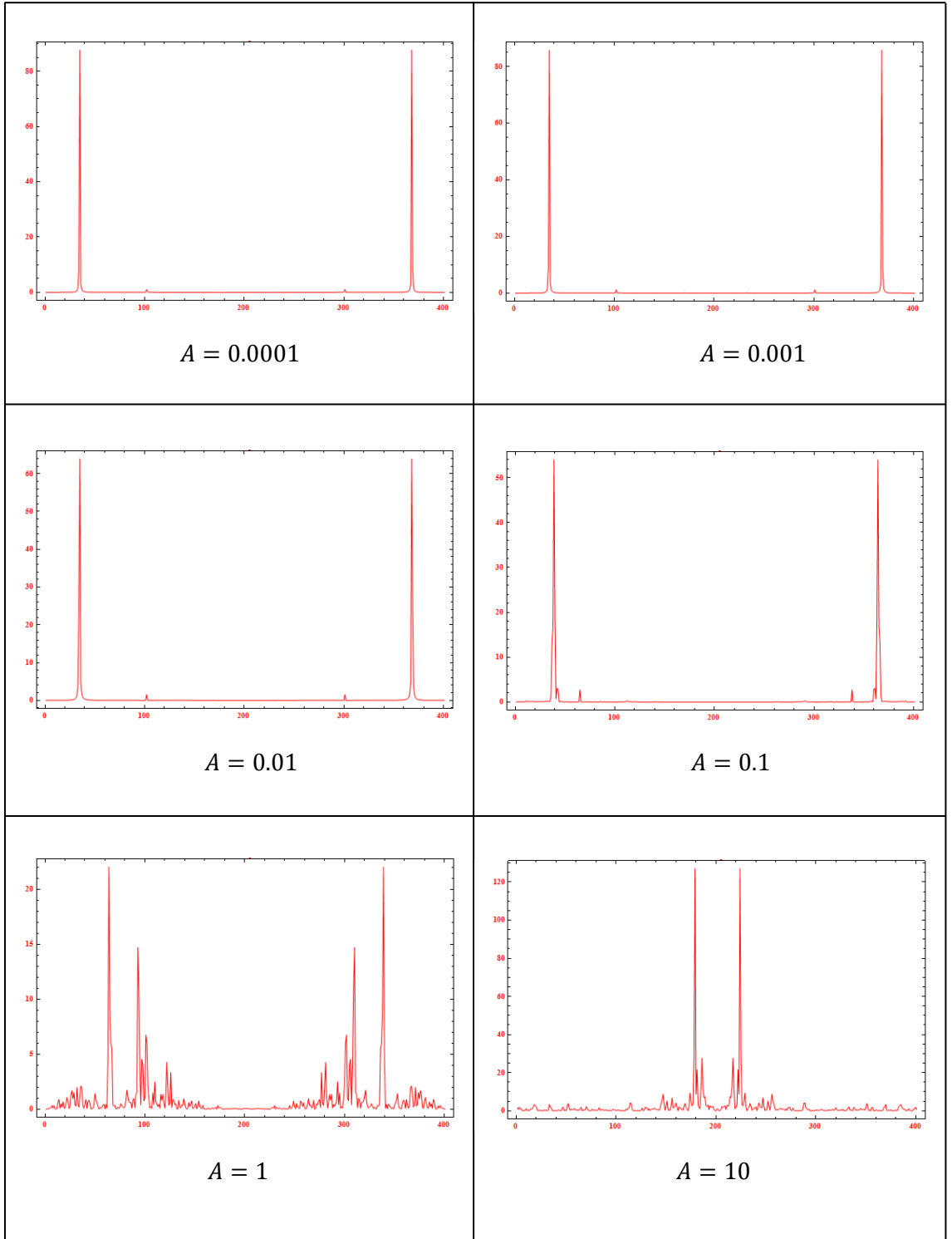
Güç spektrumları analizi yapmak, periyodik kuvvet etkisi altındaki Thirring İntantonları hakkında daha fazla bilgi edinebilmek için oldukça yararlıdır. Sistemimizdeki doğrusal olmayan zaman serileri, frekans ortamındaki serilerdir. Yani bu seriler sinyal şeklindedir ve frekans bileşenlerine sahiptir. Bu bileşenlerin oranlarının hesaplanması ise spektral analiz (güç spektrumları analizi) olarak adlandırılır.

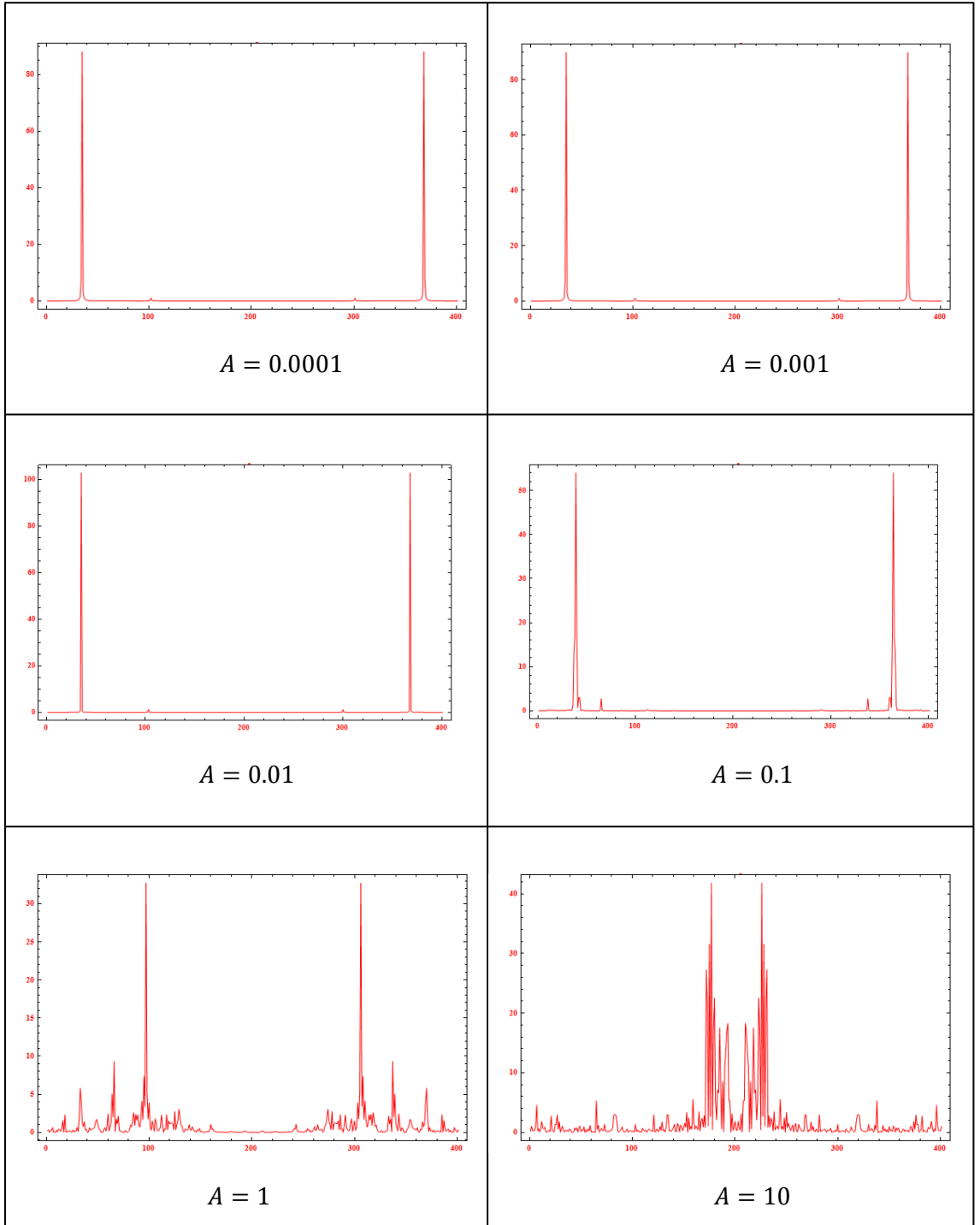
Doğrusal olmayan bir zaman serisine spektral analiz uygulanması ile serinin spektrum yoğunlukları saptanarak serinin kaotikliği hakkında bir ipucu verebilir. Sisteme ait güç spektrumlarının elde edilmesi, sistemin kaotikliği hakkında bir fikir verir ancak tek başına kaos için yeterli değildir. Dinamik sisteme ait serinin güç spektrumları incelendiğinde kaos durumu mevcut değil ise spektrum yoğunlukları grafikte uzun ve geniş pikler (sıçramalar) olarak görülür. Faz uzayında ise periyodik yapıya yakın bir davranış gözlenir. Kaos durumunu sergileyen davranışlarda faz uzayında garip çekiciler mevcut, güç spektrumları grafiğinde ise pikler uzun ve geniş ancak belli belirsizdir. Dolayısıyla kaotik olan bir sinyalle, kaotik olmayan bir sinyal, güç spektrumuna bakarak ayrılabilir. Kısaca sistem kaotik davranışlar sergiliyorsa, güç spektrumunda süreklilik vardır, sistem kaotik değilse, sadece belli frekanslarda sıçramalar mevcuttur.

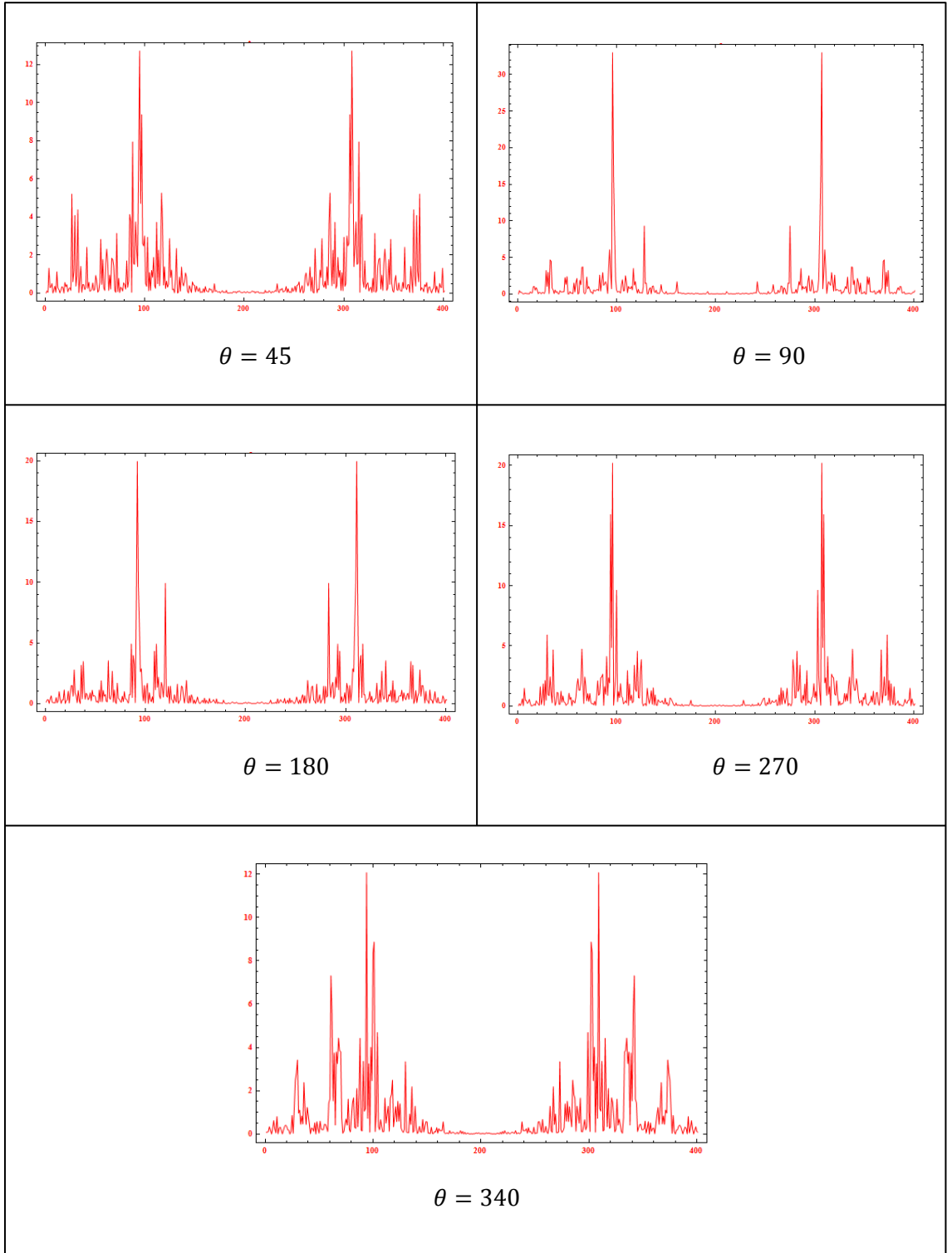
Hem dışarıdan etki eden bir parçacığa göre hem de kendi iç dinamiklerinden oluşan bir tedirgenmeye göre frekansın, genliğin ve fazın değişen değerlerine bağlı olarak çizilen güç spektrum grafikleri aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

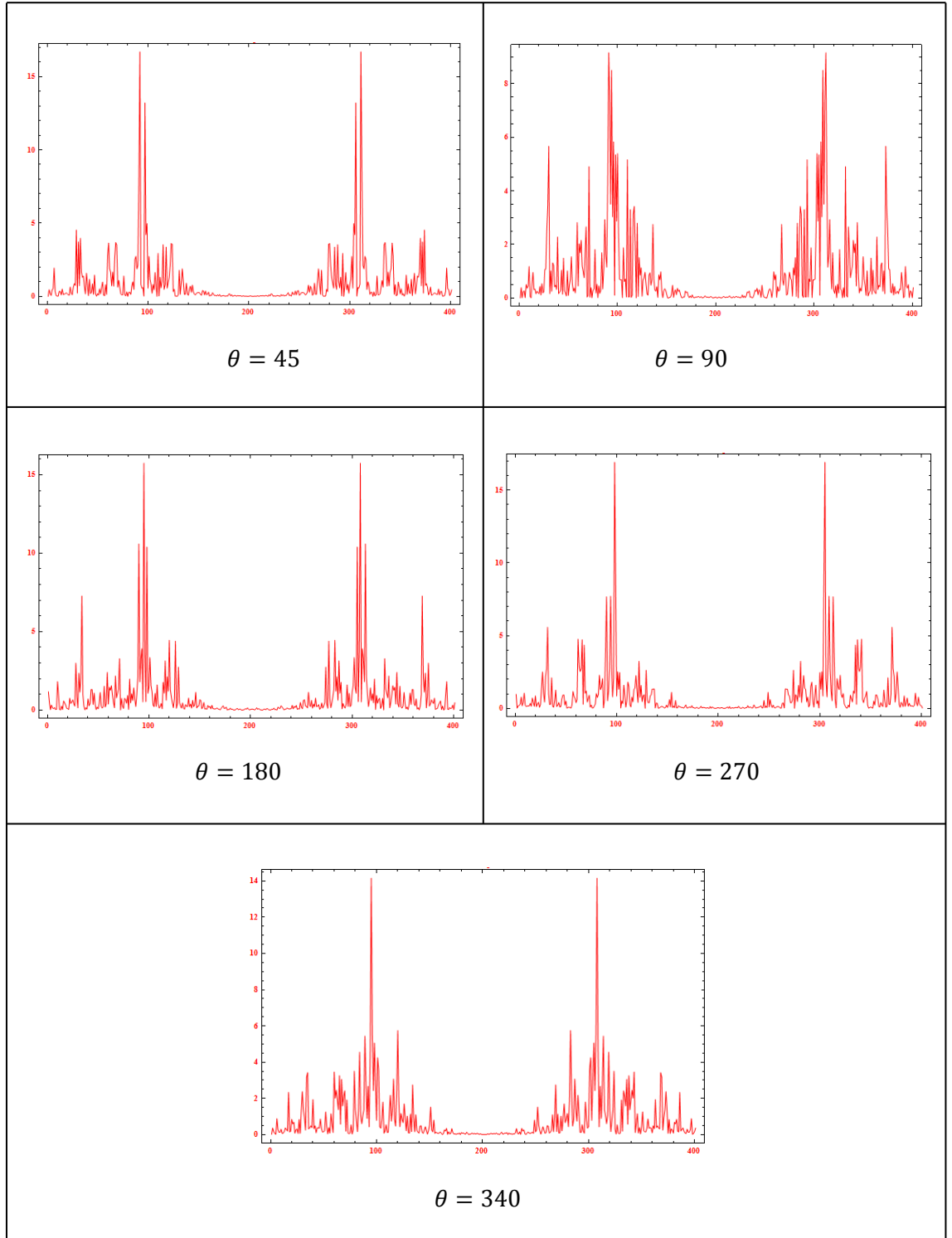
Tablo 4. 19 : $A = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Güç Spektrumları

Tablo 4. 20 : $A = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Güç Spektrumları

Tablo 4. 21 : $\omega = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Güç Spektrumları

Tablo 4. 22 : $\omega = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Güç Spektrumları

Tablo 4. 23 : $A = 1$, $\omega = 1$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Güç Spektrumları

Tablo 4. 24 : $A = 1$, $\omega = 1$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Güç Spektrumları

Tablo 4.19 ve 4.20 de etki eden kuvvetin genliğinin ve fazının sabit tutularak frekansının değişimine göre Thirring İntantonlarının davranışlarının güç spektrumları gösterilmiştir. Frekansın küçük değerleri için güç spektrumlarında uzun piklerin hemen yanında daha küçük pikler de mevcuttur. Frekansın değeri artırıldığında spektrum grafiğinde uzun piklerin yanı sıra çok farklı frekanslarda pikler de bulunmakta dolayısıyla davranışların kaotikleştiğini söyleyebiliriz. Etki eden Kuvvetin frekansın değerleri daha da arttırıldığında ise sadece belli frekans değerlerinde sıçramalar görülmekte ve sistemin periyodikleşmeye başladığını görüyoruz.

Etki eden kuvvetin frekansının ve fazının sabit tutulduğu, genlik değerlerine göre değişimleri Tablo 4.21 ve 4.22 de gösterilmiştir. Çok küçük değerlerde spektrum grafiğinde sadece belirli frekans değerlerinde sıçramalar mevcuttur dolayısıyla sistemin davranışları periyodiktir. Genlik değeri arttığında güç spektrumlarında çok fazla pik bulunmaktadır yani sistem çok sayıda farklı frekanslar içermekte olduğunda kaotik davranışlar sergilemektedir.

Tablo 4.23 ve 4.24 te gösterilen etki eden periyodik kuvvetin fazındaki değişimlere göre gösterilmiş spektrum grafikleri birbirlerine benzemekte olduklarından dolayı fazın sistemin durumunun değişimine etkisinin olmadığı yorumunu yapabiliriz.

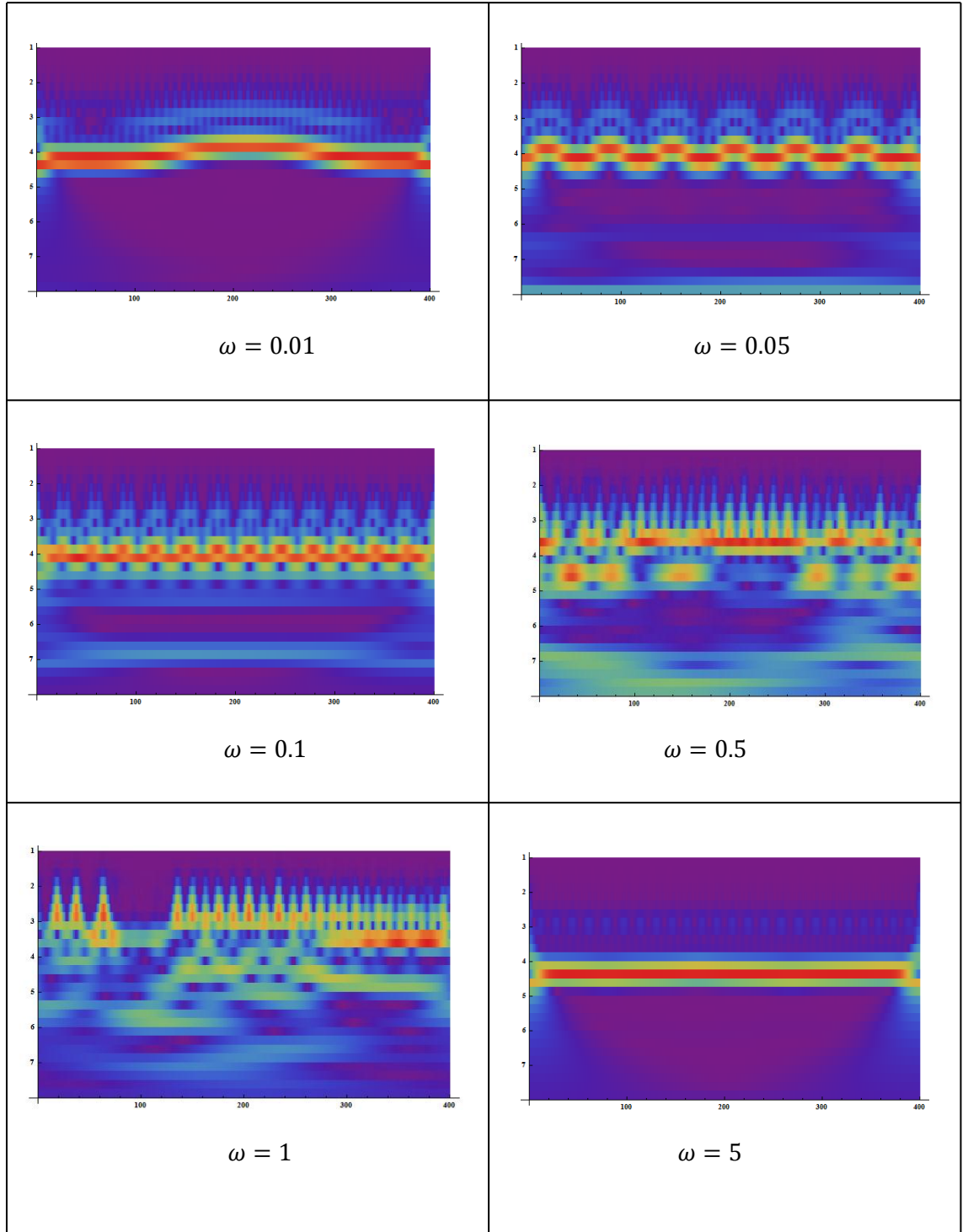
4.6. PERİYODİK KUVVET ETKİSİ ALTINDAKİ THİRRİNG İNSTANTONLARININ SKALOGRAM ANALİZİ

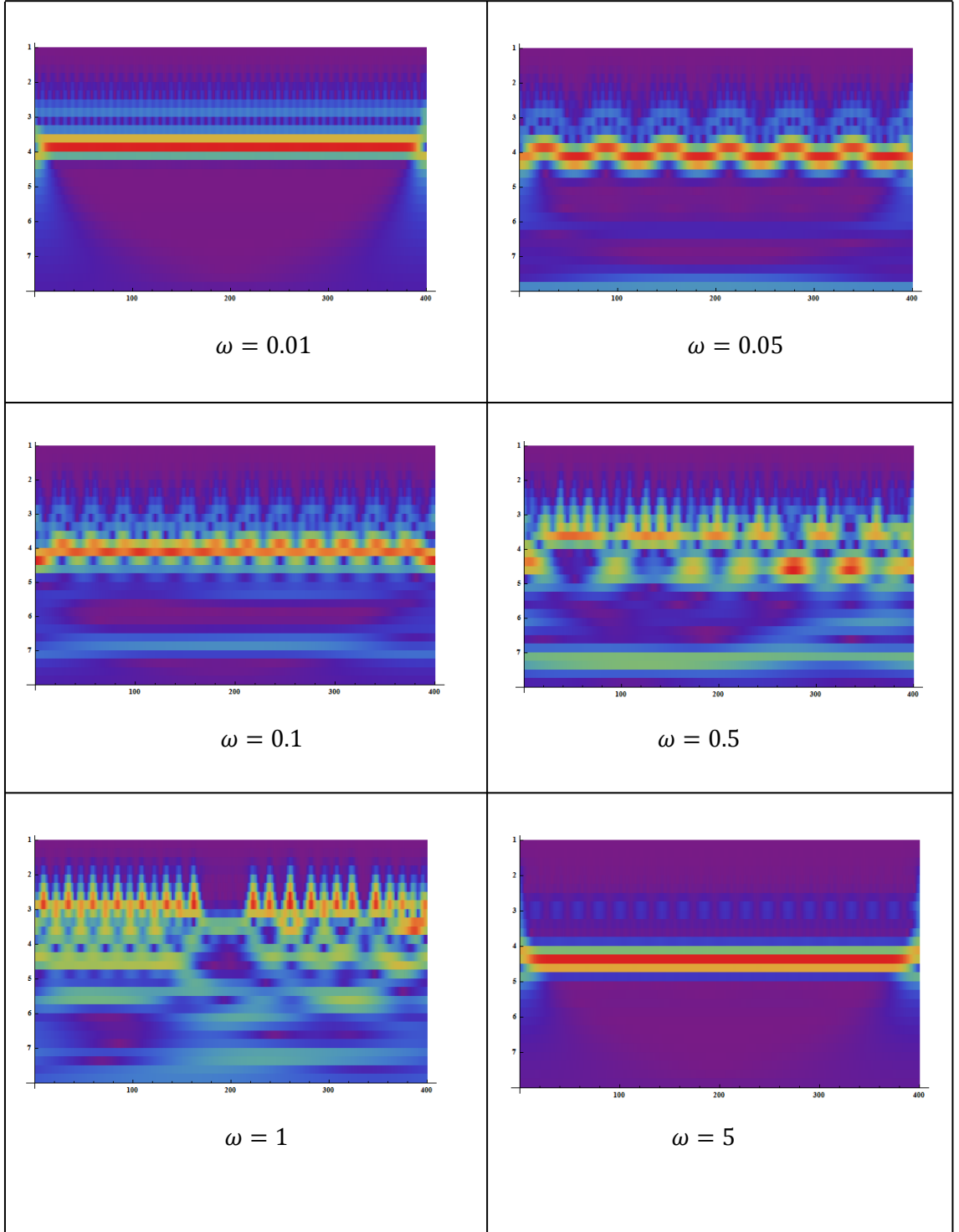
Sistemin Faz uzayının gösterimi yörüngelerin özellikleri ve geçmişi hakkında bilgi sağlamamakta ve Lyapunov üsteli gibi asimptotik hesaplamalar da sistemin dinamiği hakkında bilgi içermemektedir[46]. Bu sebeple Thirring İntantonlarının davranışları hakkında daha fazla bilgi edinebilmek amacıyla sistem dinamiğine dair bilgi sağlayan yörüngelerin zaman-frekans gösterimi olan skalogram analizini yaptık.

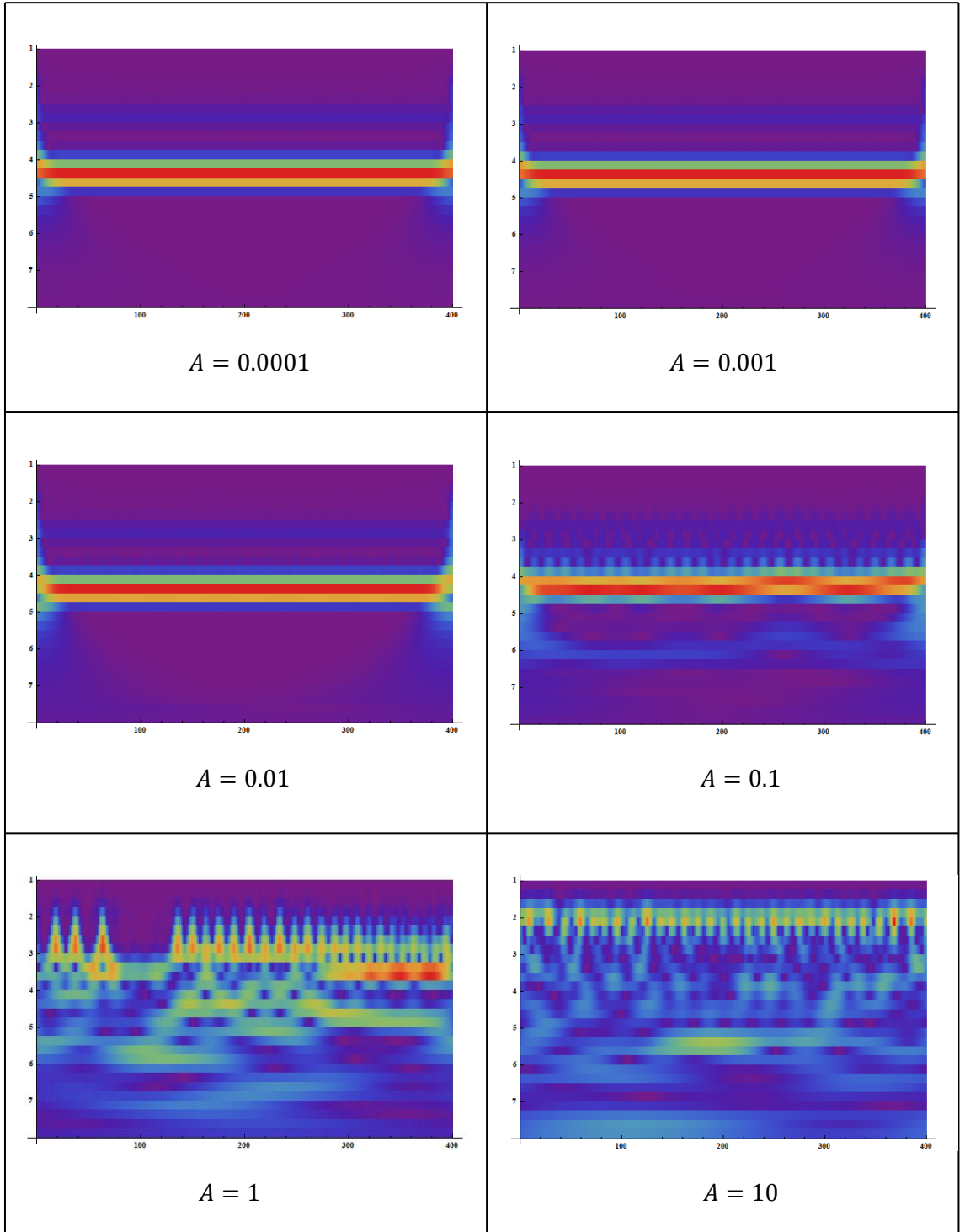
Zaman serileri dalgacık dönüşümüyle frekans-zaman olan sinyale ayrıldığında, dönüşümlerin (dalgacık katsayıları) sonuçları zaman ve frekans fonksiyonu olarak dalgacık katsayılarının değerlerini temsil eden bir düzlemde haritalanabilir. Bu katsayılar renk değerleri olarak kodlanarak elde edilen görüntüye skalogram denir. Dalgacık katsayılarının karesi ile verilen kaydırılmış ve ölçeklenmiş sinyal yerel enerji yoğunluğu ile orantılı sinyal olan Skalogram, dalgacık dönüşümünün kare büyüklüğü olarak tanımlanan sinyalin enerjisi olarak kabaca yorumlanabilir[47].

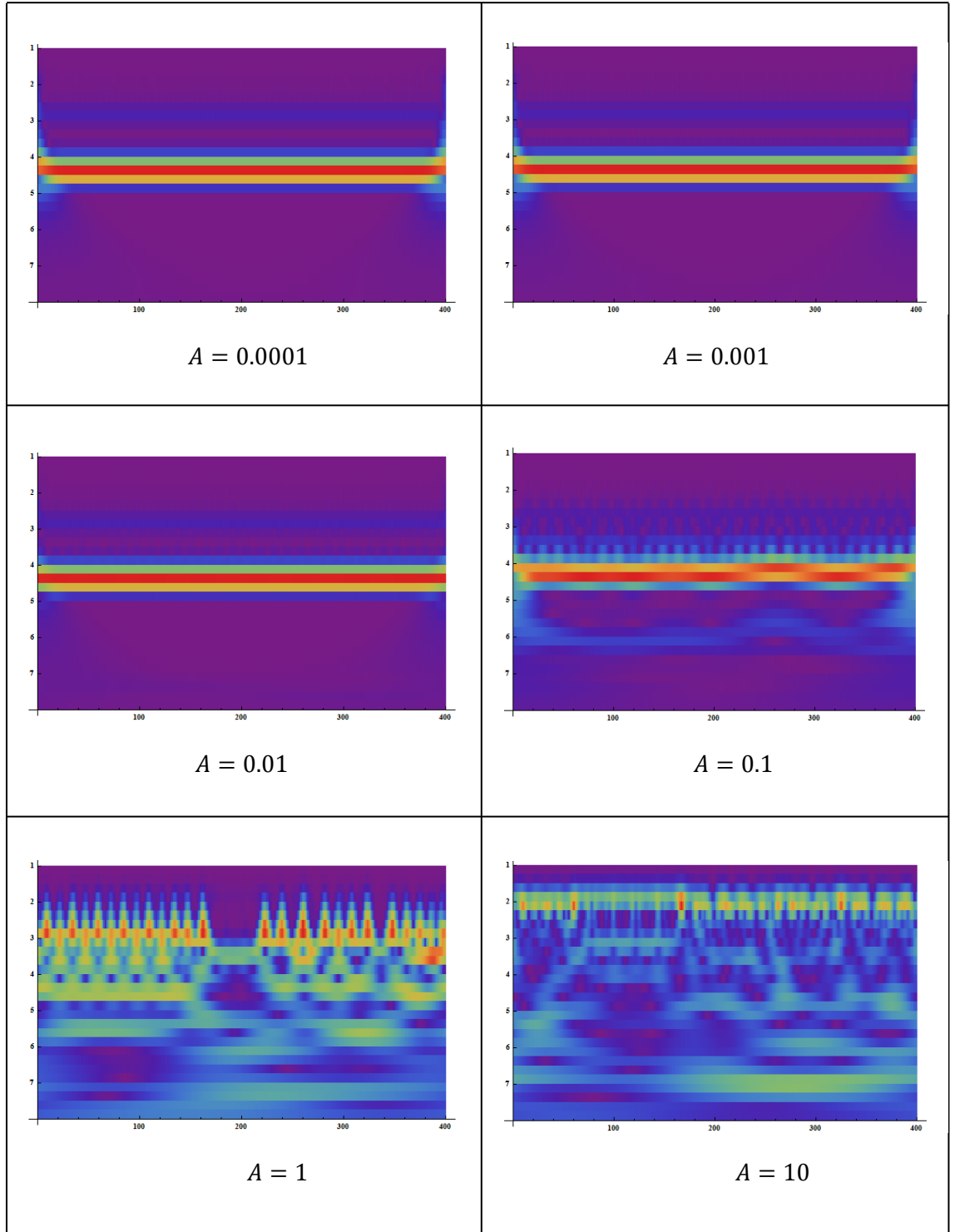
Skalogram ortak zaman-frekans etki alanında bir sinyalin enerji değişikliklerini tanımlayarak çeşitli frekans bantlarında sinyal enerji ölçümleri sağladığından ve yüksek frekans aralığında iyi sonuçlar verdiği için kaotik davranışları analiz etmekte kullanılabilir.

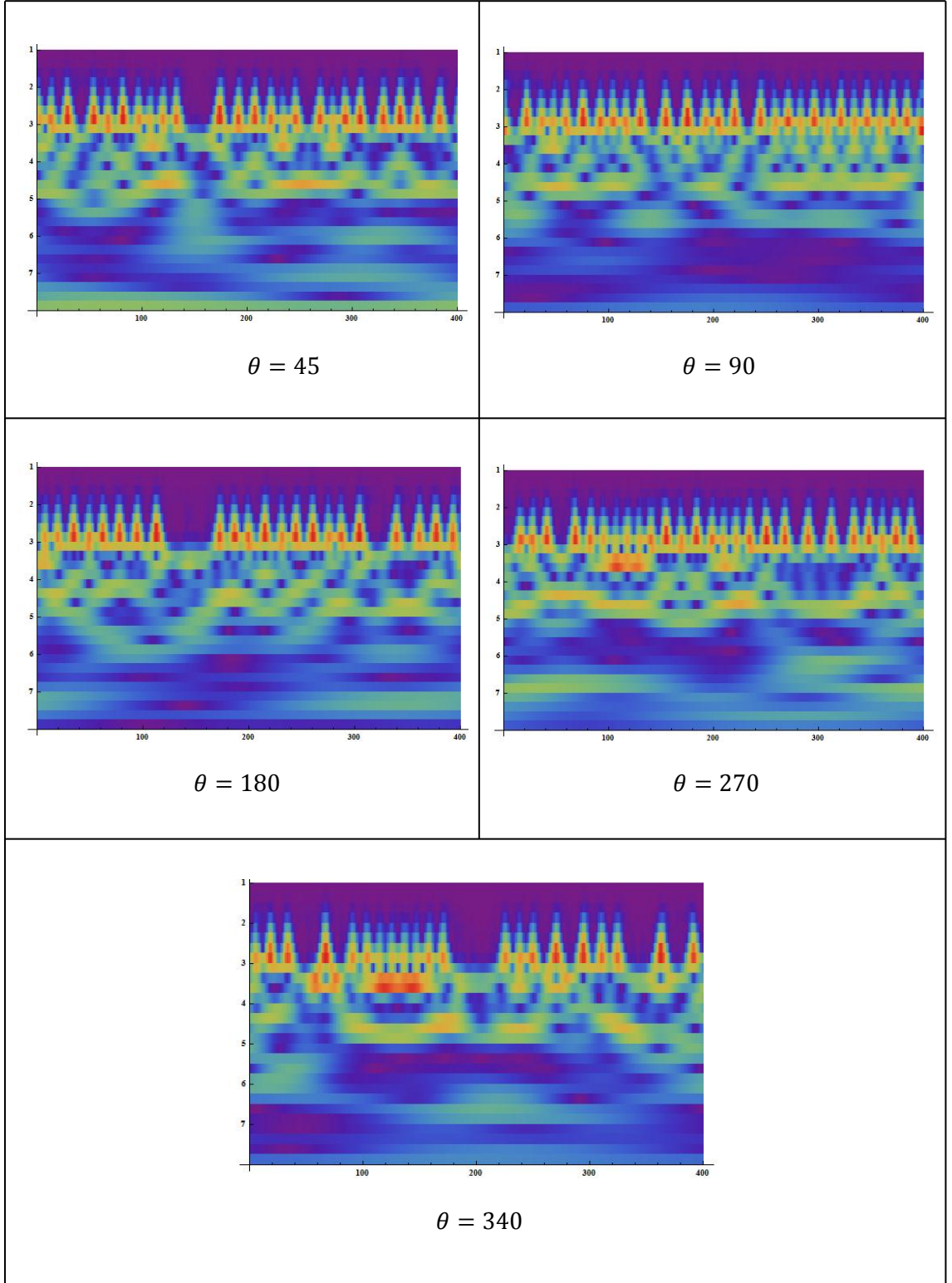
Thirring İntantonlarına dışarıdan etki eden bir parçacığa ve kendi iç dinamiklerinden oluşan bir tedirgenmeye karşılık gelen periyodik kuvvetin frekansının, genliğinin ve fazının değişen değerlerine bağlı olarak verilen skalogram analizleri aşağıdaki tablolarda gösterilmiştir.

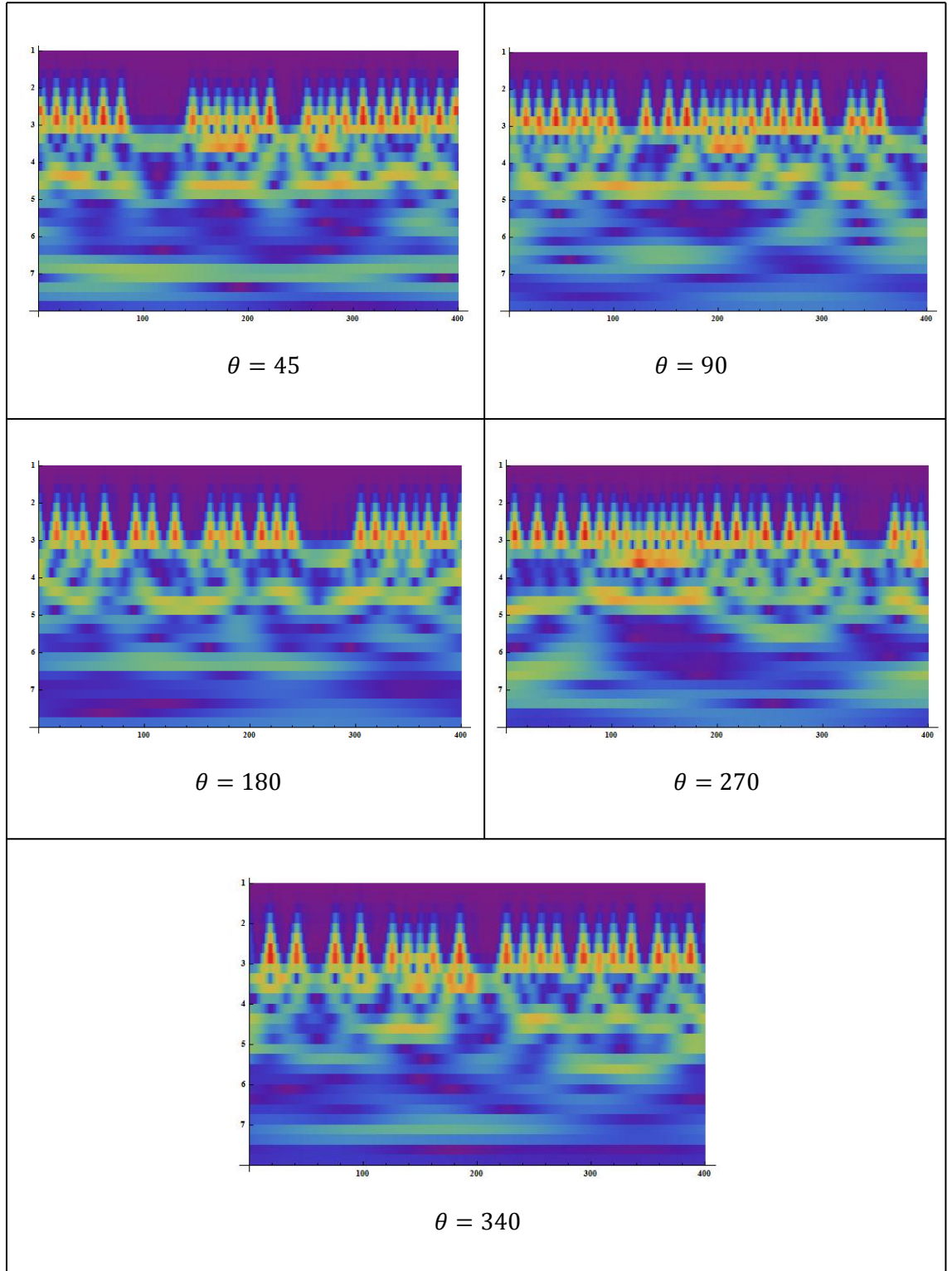
Tablo 4. 25 : $\mathbf{A} = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Skalogram

Tablo 4. 26 : $\mathbf{A} = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Skalogram

Tablo 4. 27 : $\omega = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Skalogram

Tablo 4. 28 : $\omega = 1$, $\theta = 0$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Skalogram

Tablo 4. 29 : $A = 1$, $\omega = 1$ olan Periyodik Dış Kuvvetler Altında Skalogram

Tablo 4. 30 : $A = 1$, $\omega = 1$ olan Periyodik İç Kuvvetler Etkisinde Skalogram

Thirring İntantonlarına etki eden periyodik kuvvetin genliğinin ve fazının sabit tutularak frekans değerlerindeki değişime göre skalogram grafikleri Tablo 4.25 ve 4.26 da verilmiştir. Etki eden kuvvetin çok küçük frekans değerleri için sistemin skalogram gösteriminde temel anlık frekansı tek bir maksimum değere sahip olduğundan Thirring İntantonları periyodik davranışlar göstermektedir. Frekansın artan değerlerinde ise maksimumlar tek bir değerde olmasa bile, yörünge temel bilgileri, tek bir anlık frekans eğrisinden elde edilebildiği için sistem zayıf kaotiktir. Etki eden kuvvetin frekans değerleri biraz daha arttırıldığında Frekans-zaman grafiğinde maksimumları gösteren çok sayıda sırt oluşmasıyla temel anlık frekans eğrisi belirlenemediğinden sistem kuvvetli kaotik duruma geçmektedir. Etki eden kuvvetin frekans değeri daha da arttırıldığında temel anlık frekansı eğrisi tek bir doğru ile gösterildiğinden sistem yine periyodik duruma geçmektedir.

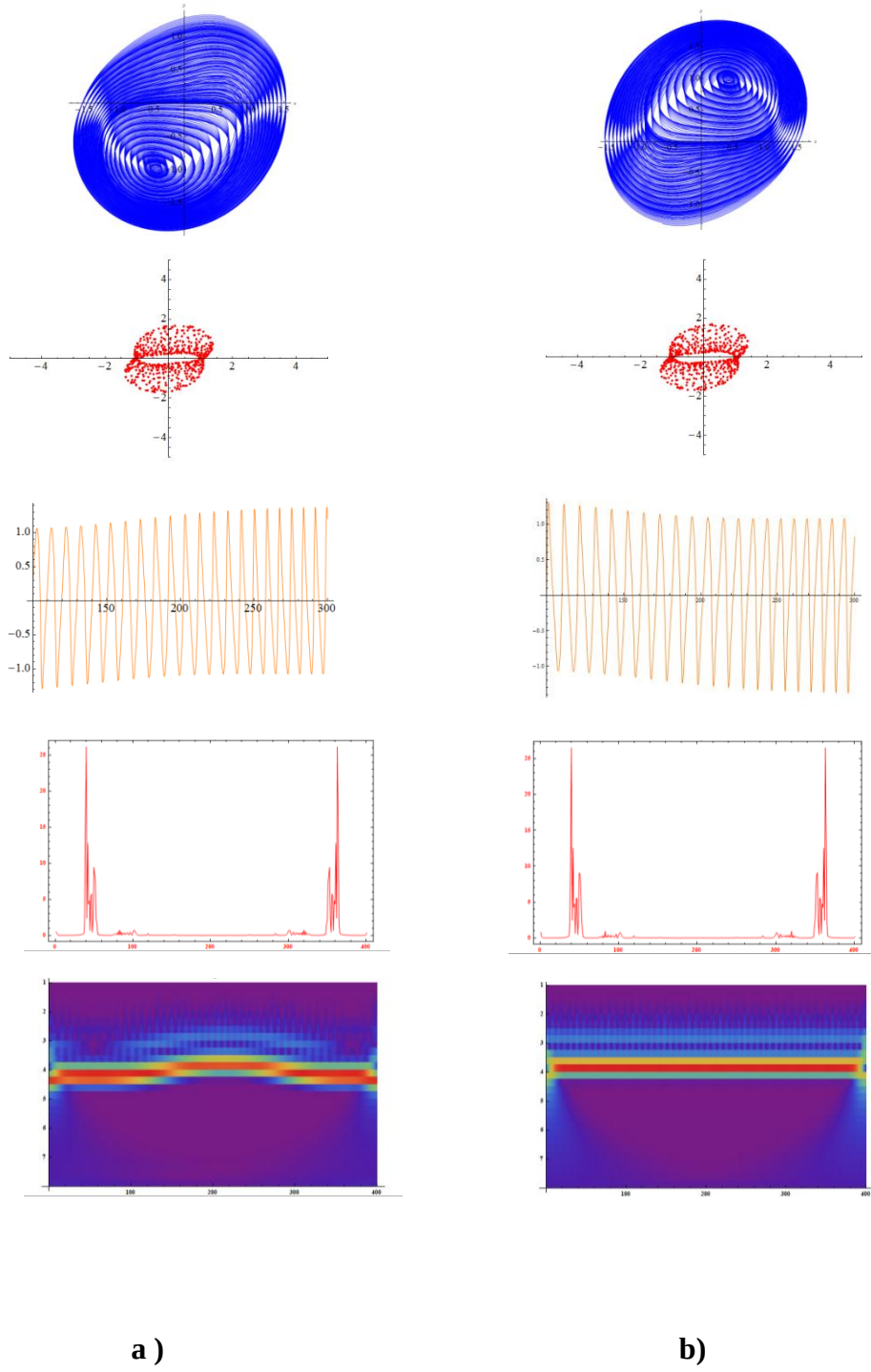
Thirring İntantonlarına etki eden kuvvetin frekansının ve fazının sabit tutulduğu, genlik değerlerine göre değişimler Tablo 4.27 ve 4.28 de gösterilmiştir. Çok küçük frekans değerleri için sistemin skalogram gösteriminde temel anlık frekansı tek bir maksimum değere sahip bir eğri olduğundan Thirring İntantonları periyodik davranışlar göstermektedir. Kuvvetin büyüklüğü arttırıldığında skalogramda görüldüğü gibi farklı frekans büyüklüklerinde pek çok sırt meydana geldiğinden Thirring İntantonlarının davranışları kaotikleşir.

Tablo 4.29 ve 4.30 da Thirring İntantonlarına etki eden periyodik kuvvetin fazındaki değişimlere göre gösterilmiş skalogramlar birbirlerine benzerlik göstermelerinden dolayı fazın sistemin durumunun değişimine etkisinin olmadığını söyleyebiliriz. Ancak skalogramlar dikkatlice incelendiğinde tepe noktalarında belirli bir düzenle kaydıklarından dolayı yörüngelerin yer değiştirdiği sonucunu çıkarabiliriz.

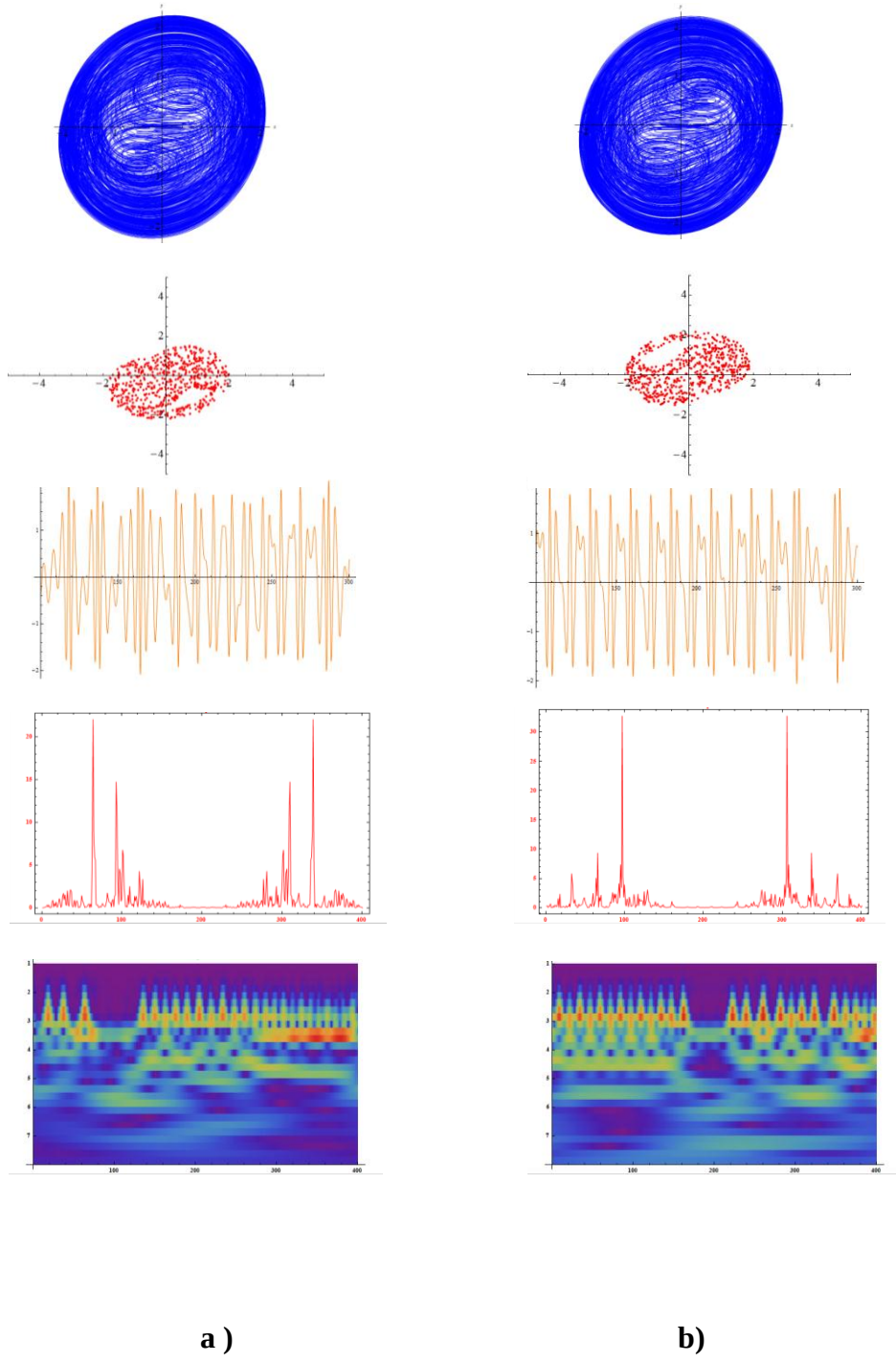
4.7. İÇ VE DIŞ PERİYODİK KUVVETLER ETKİSİ ALTINDAKİ THİRRİNG İNSTANTONLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

Thirring İntantonlarının davranışlarının periyodik bir kuvvet etkisi altındaki değişiminin daha iyi okunabilmesi için bir önceki bölümlerde göstermiş olduğumuz tablolardan yararlanarak hem iç dinamiklerden meydana gelen hem de dışarıdan etki eden periyodik kuvvetlerin aynı değerlerinde Faz uzayları, Poincare kesitleri, zaman serileri, güç spektrumları ve skalogram analizlerini karşılaştırmalı olarak aşağıdaki şekillerde verdik. Aynı zamanda etki eden kuvvetin belirli bir değerinde tüm analiz yöntemleri tek bir sayfada görülebildiğinden instantonların davranışlarındaki değişimlerin incelenmesi daha kolay olmaktadır.

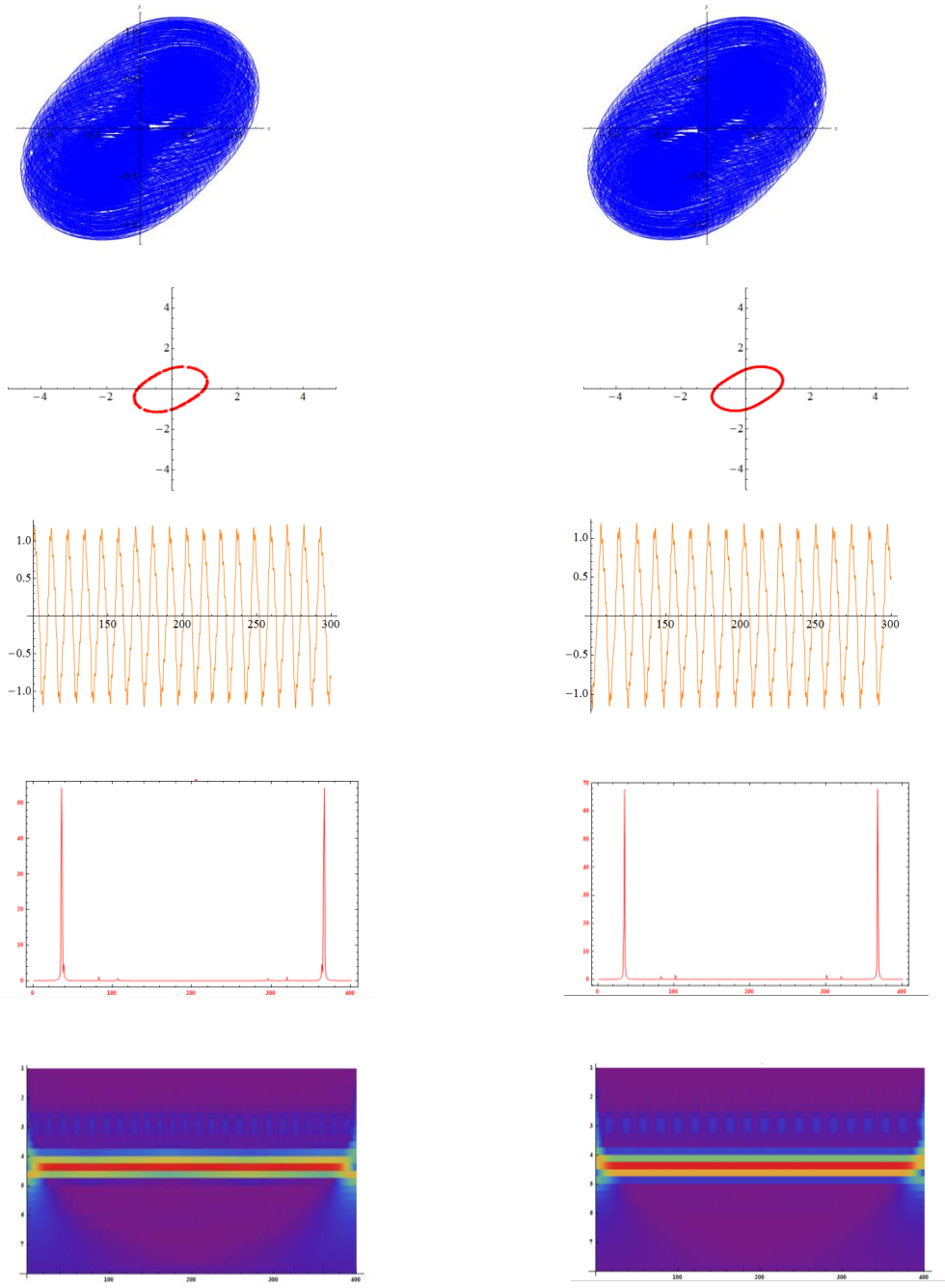
Malzeme ve yöntem kısmında göstermiş olduğumuz $\alpha = 1$ için kuvvet etkisi altında bulunmayan Thirring İntantonları faz uzayında kararlı davranışlar sergilerken, periyodik bir kuvvet etkisi altında bozulmalara uğramaktadır ve genlik sabit tutularak fazın olmadığını varsayarak frekans değerleriyle oynandığında her iki durumu veren Şekil 4.3 incelendiğinde frekansın küçük değerlerinde periyodik durumda iken frekansın artırıldığı Şekil 4.4 de kararlılığın iyice bozularak sistemin kaotik davranışlar sergilemeye başladığı görülmektedir. Fakat frekansın daha artan değerlerindeki Şekil 4.5 te sistem kendini toparlayıp tekrar kararlı davranışlar sergilemeye başladığını söyleyebiliriz. Frekansı sabit tutup genliğin farklı değerleri için Şekil 4.6 incelendiğinde kuvvet etkisi altında olmayan Thirring İntantonları gibi kararlı olduğu görülür. Ancak genlik değerinin artan değerlerindeki Şekil 4.7 e bakıldığında davranışlarında bozulmalar olduğunu ve kaotik davranışlar sergilemeye başladığını söyleyebiliriz. Genlik değeri daha da artırılmış olan Şekil 4.8 de ise sistemin tamamen kaotik olduğunu görüyoruz. Tüm bu faz diyagramları göz önüne alındığında, kuvvet etkisi altında vakum durumuna tekabül eden instantonların, faz uzaylarında sergiledikleri kararlı yapının bozulduğunu ve sistemin artık kaotik davranışlar sergilemeye başladığını söyleyebiliriz. Frekans ve genliğin değerlerine bağlı olarak bu kaotiklik azalmakta ya da artmaktadır. Frekans değerleri ile genlik değerleri sabit tutularak fazın instantonlara etkisi Şekil 4.9 4.10 4.11 incelendiğinde sistemin kaotik durumunda herhangi bir değişime neden olmadığı sadece yörüngelere ve davranışların yönlerine dair değişimler gözlenmektedir.



Şekil 4. 3 : $\cos(0.01z)$ periyodik kuvveti etkisi altında Thirring İntantonlarının davranışlarındaki değişimler **a)** Dış kuvvetler etkisi altında **b)** İç dinamiklerin etkisi altında



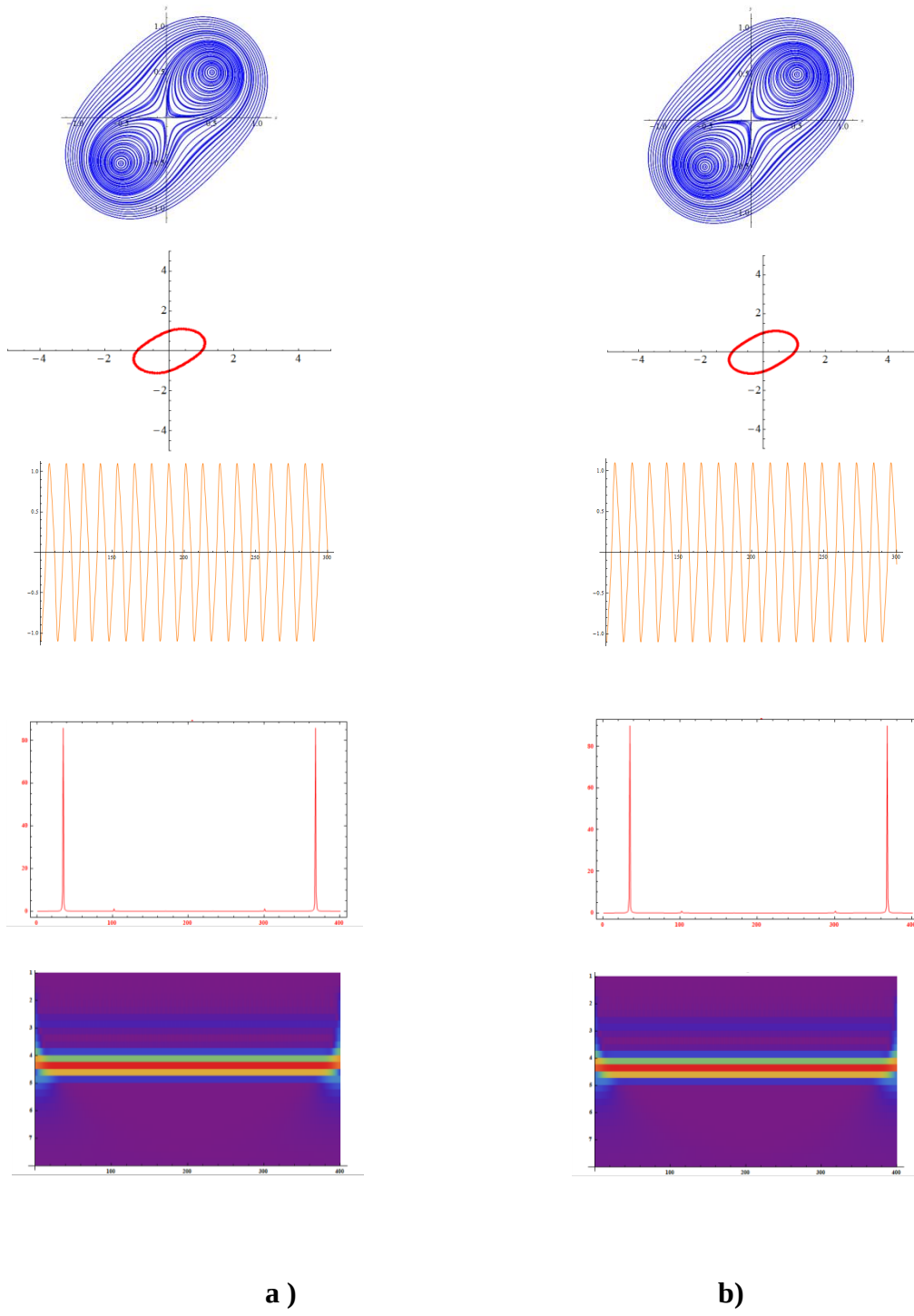
Şekil 4. 4 : $\cos(z)$ periyodik kuvveti etkisi altında Thirring İntantonlarının davranışlarındaki değişimler **a)** Dış kuvvetler etkisi altında **b)** İç dinamiklerin etkisi altında



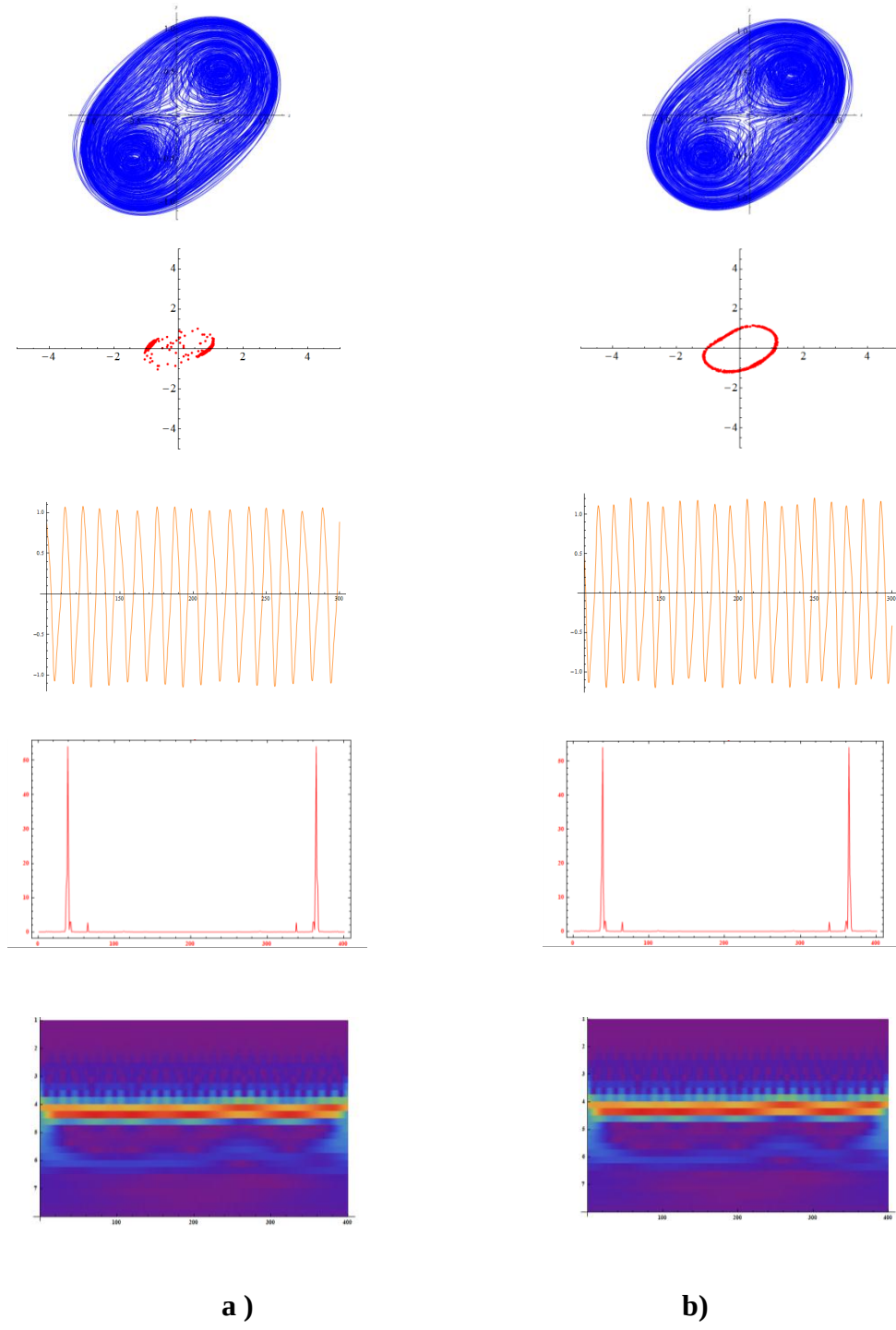
a)

b)

Şekil 4. 5 : $\cos(5z)$ periyodik kuvveti etkisi altında Thirring İntantonlarının davranışlarındaki değişimler **a)** Dış kuvvetler etkisi altında **b)** İç dinamiklerin etkisi altında



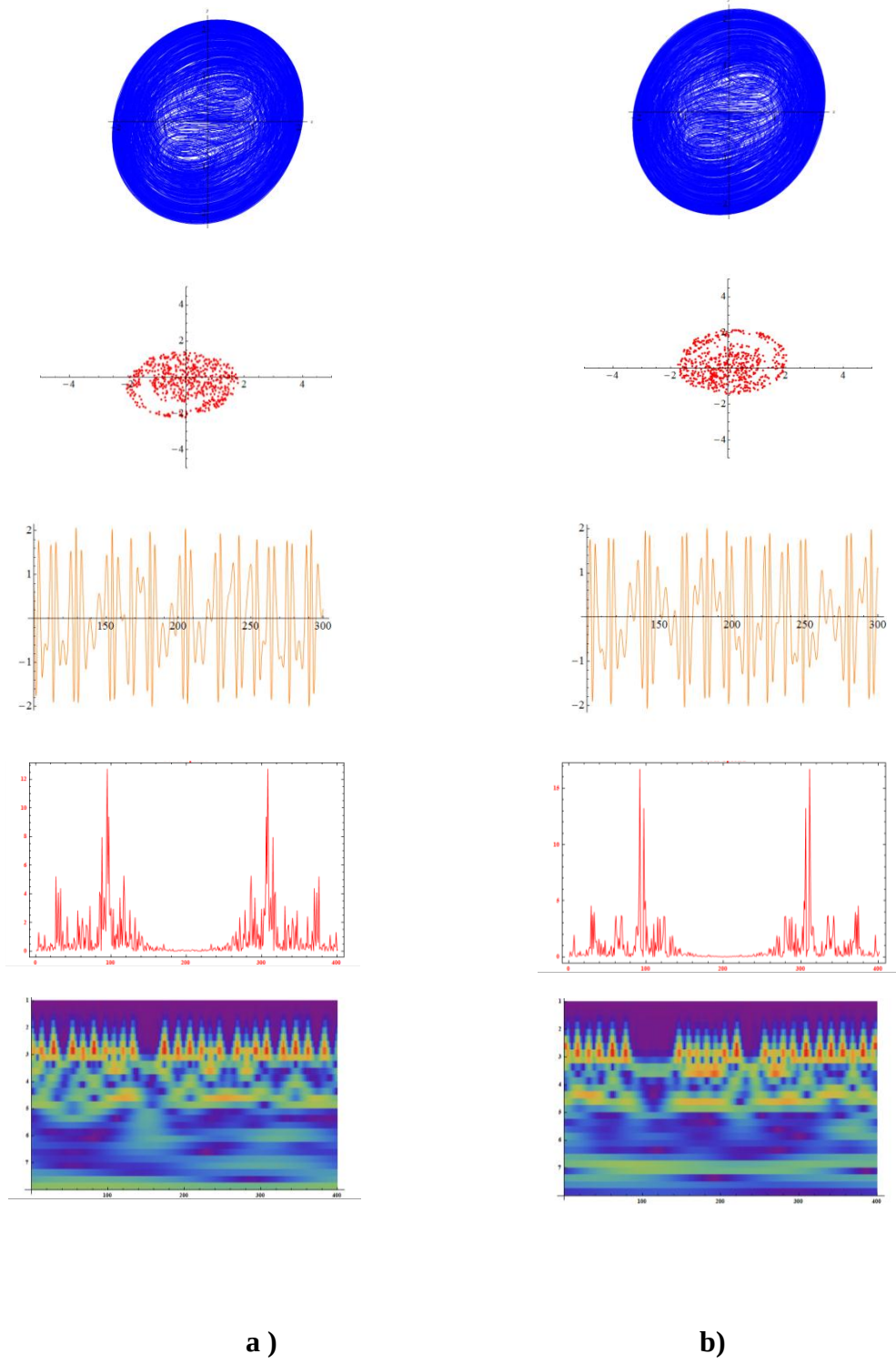
Şekil 4. 6 : $0.001\cos(z)$ periyodik kuvveti etkisi altında Thirring İntantonlarının davranışlarındaki değişimler **a)** Dış kuvvetler etkisi altında **b)** İç dinamiklerin etkisi altında



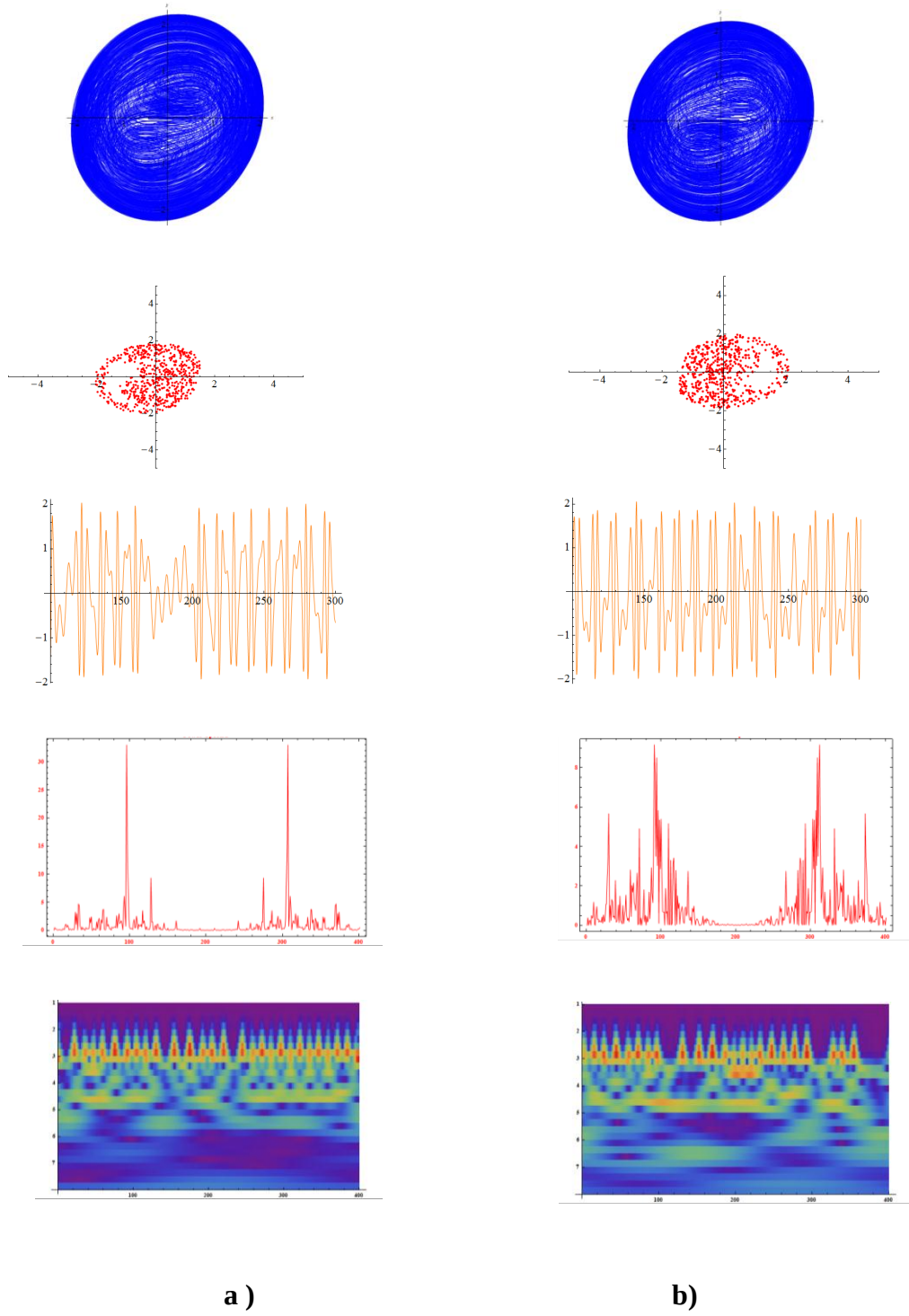
Şekil 4. 7 : $0.1\cos(z)$ periyodik kuvveti etkisi altında Thirring İntantonlarının davranışlarındaki değişimler **a)** Dış kuvvetler etkisi altında **b)** İç dinamiklerin etkisi altında



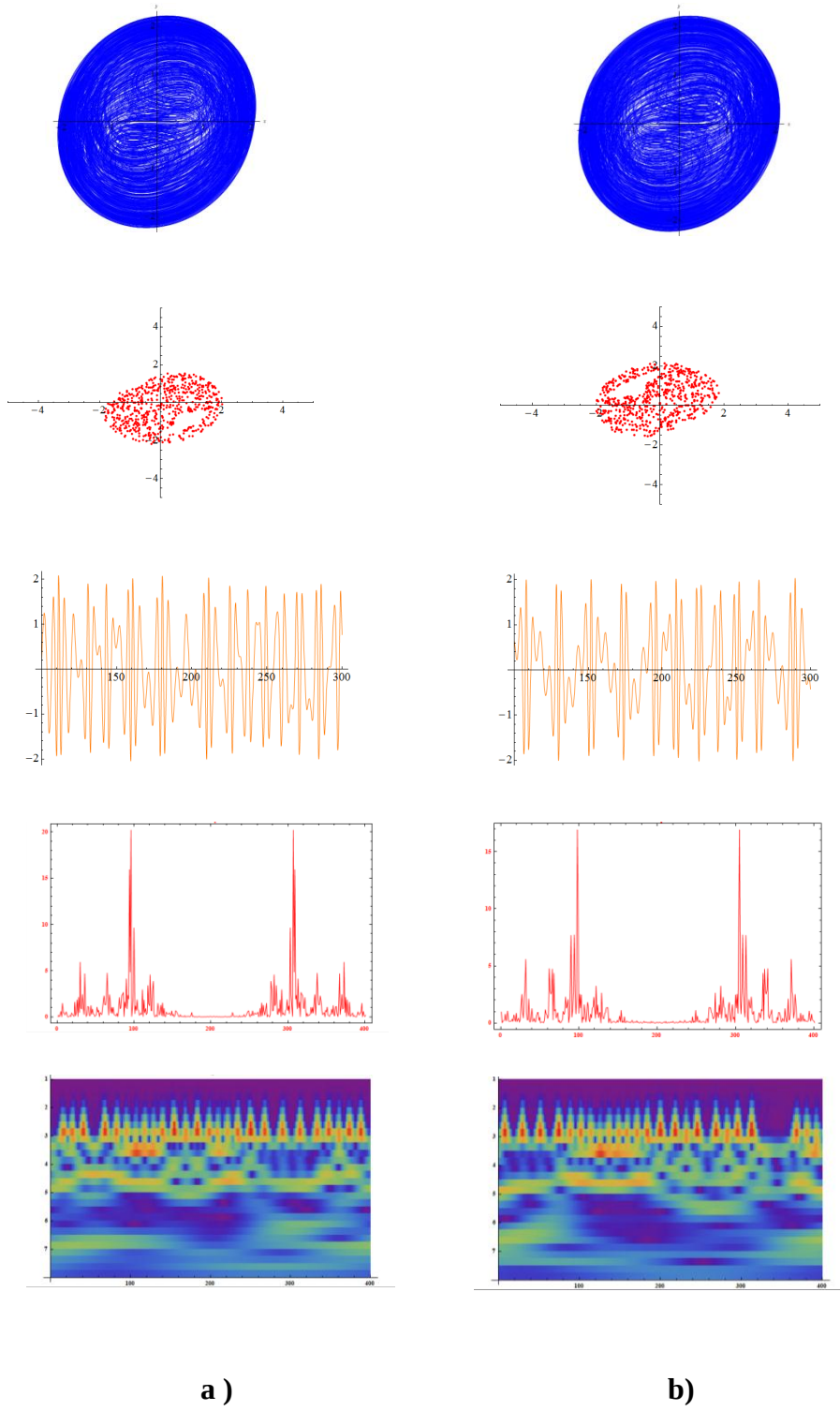
b)



Şekil 4. 9 : $\cos(z + 45)$ periyodik kuvveti etkisi altında Thirring İntantonlarının davranışlarındaki değişimler **a)** Dış kuvvetler etkisi altında **b)** İç dinamiklerin etkisi altında



Şekil 4. 10 : $\cos(z + 90)$ periyodik kuvveti etkisi altında Thirring İntantonlarının davranışlarındaki değişimler **a)** Dış kuvvetler etkisi altında **b)** İç dinamiklerin etkisi altında



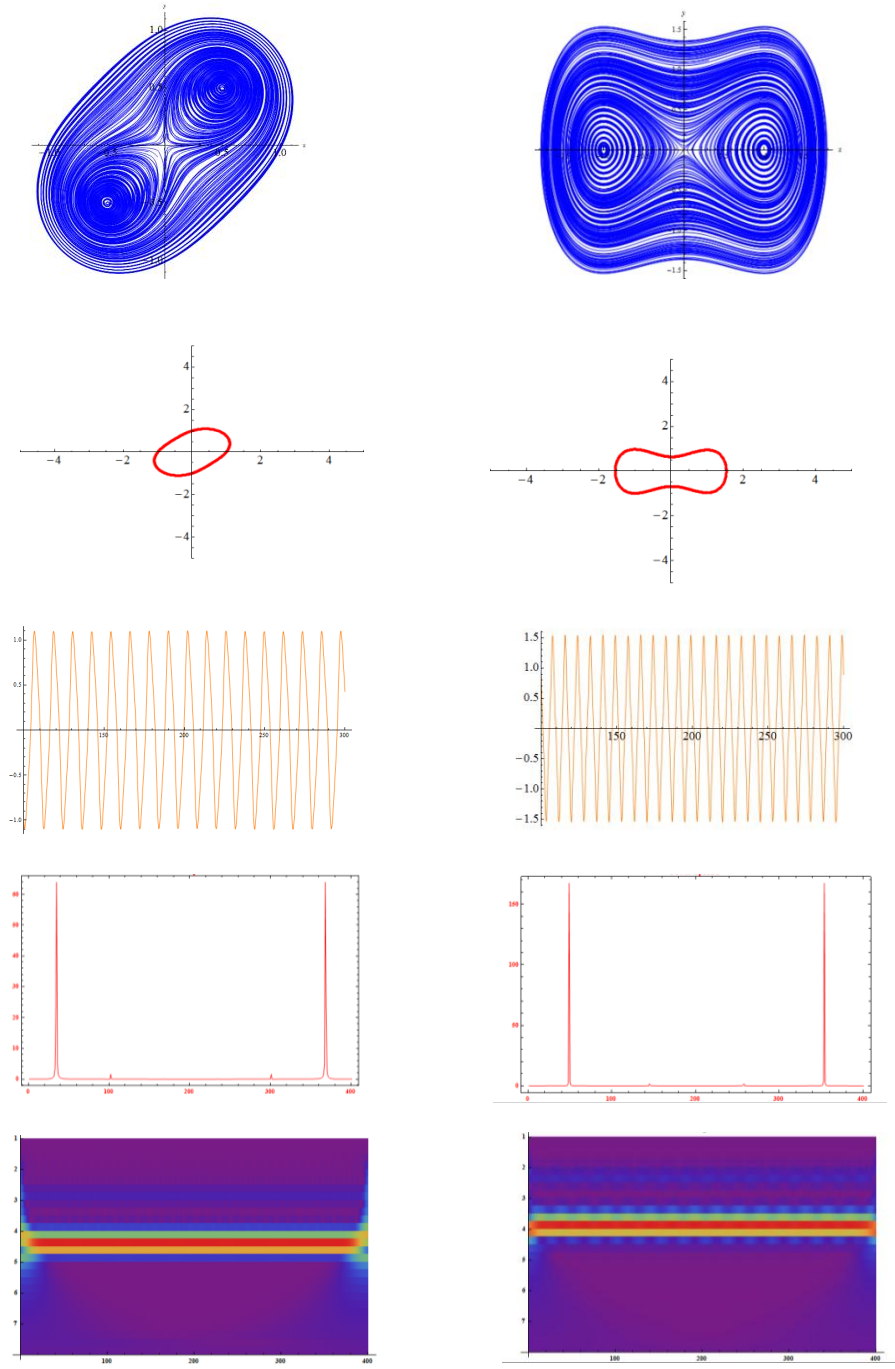
Şekil 4. 11 : $\cos(z + 270)$ periyodik kuvveti etkisi altında Thirring İntantonlarının davranışlarındaki değişimler **a)** Dış kuvvetler etkisi altında **b)** İç dinamiklerin etkisi altında

4.8. THİRRİNG İNSTANTONLARININ DUFFİNG KARAKTERİSTİĞİ

Kuvvet etkisi altında olmayan Thirring İntantonların davranışlarının Duffing benzerliğini Materyal Metot bölümünde sergilemiştik. Bulgular kısmının başında ise periyodik kuvvet etkisi altındaki Thirring İntantonlarının periyodik kuvvet etki altındaki Duffing sistemi gibi kuvvetin büyüklüğünün değerlerine göre periyodik, kritik kaotik ve tamamen kaotik durumda bulunduklarını göstermiştik.

Bu kısımda uygulanan periyodik kuvvete bağlı olarak kaotik davranış sergileyen Duffing sistemi ile periyodik kuvvet etkisi altındaki Thirring İntantonlarının, faz diyagramları, Poincare kesitleri, zaman serileri, güç spektrumları ve skalogram analizini aşağıda karşılaştırılmalı olarak inceledik.

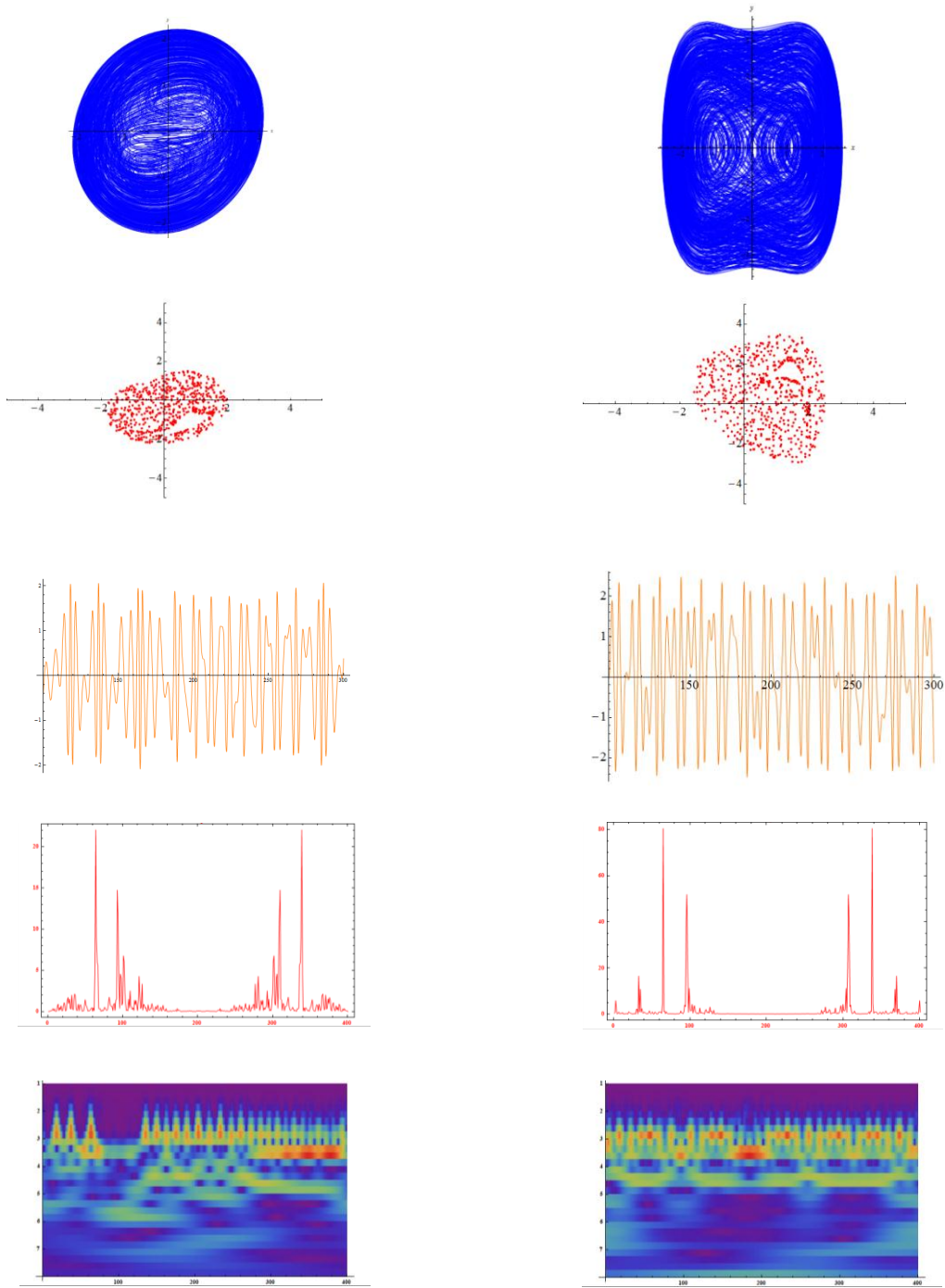
Şekil 4.12, 4.13, 4.14 e bakıldığında dışarıdan etki eden periyodik kuvvet etkisi altındaki Thirring İntantonları ile Duffing sisteminin faz uzaylarındaki davranışlarının kararlı yapıları kuvvetin artan değerlerinde benzer şekilde kaotik duruma geçtikleri görülmektedir. Poincare Kesitlerine de bakıldığında şekillerin bozulmalarında ki benzerlik fark edilmektedir. Periyodik durumda olan zaman serileri benzer şekilde kuvvetin artan değerlerinde giderek daha da karmaşık hale gelmektedir. İlk şekilde güç spektrumları analizine bakarsak her iki sistemde de belirli frekanslarda sıçramalar görülmekte ve diğer iki şekilde ise frekans değerlerindeki sıçramalar çok fazla ve belli belirsizdir. Son olarak da yörüngelerin zaman-frekans gösterimi olan Skalogram analizini incelediğimizde, Şekil 4.12 de görüldüğü üzere sistemlerin temel frekansları bozulmamaktadır. Ancak Şekil 4.13 ve Şekil 4.14 te temel frekans bozulmakta ve farklı frekans sırtları gözlenmektedir.



a) Thirring İntantonları

b) Duffing Sistemi

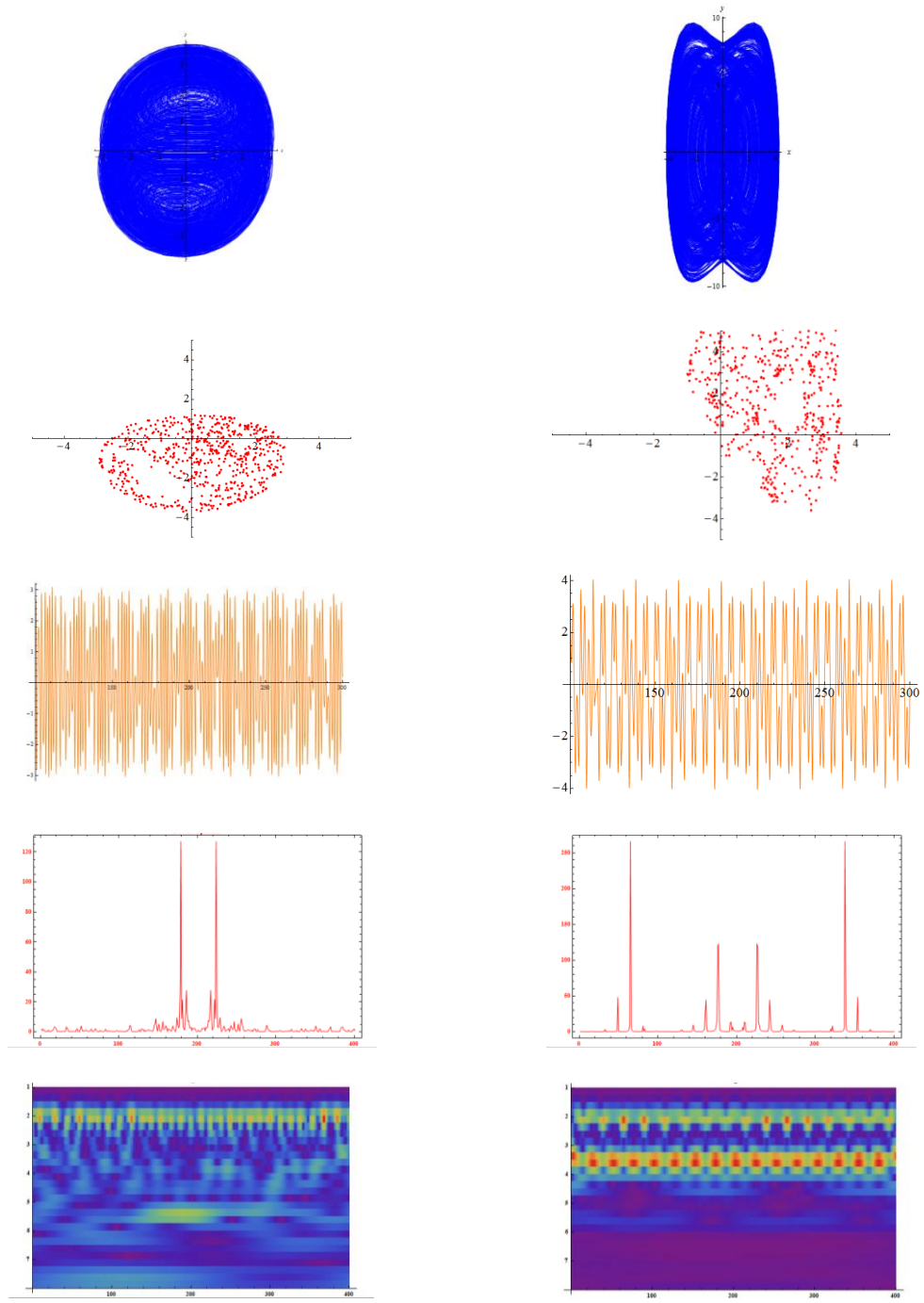
Şekil 4. 1 : $0.01\cos(t)$ periyodik dış kuvveti etkisi altındaki Thirring İntantonları ile Duffing Sisteminin Karşılaştırılması



a) Thirring İntantonları

b) Duffing Sistemi

Şekil 4. 2 : $\cos(t)$ periyodik dış kuvveti etkisi altındaki Thirring İntantonları ile Duffing Sisteminin Karşılaştırılması



a) Thirring İntantonları

b) Duffing Sistemi

Şekil 4. 3 : $10\cos(t)$ periyodik dış kuvveti etkisi altındaki Thirring İntantonları ile Duffing Sisteminin Karşılaştırılması

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Kısa bir girişin ardından tezin genel kısımlar bölümünde saf spinör alan teorileri hakkında bilgi verdikten sonra instantonların keşfinden yorumlanmasına uzanan tarihsel sürece değindik ve alanlar teorisindeki önemini anlattık ve bu bölümün son kısmında ise dinamik sistemler ve kaos teorisi hakkında bilgiler verdik.

Kaotik davranışlar sergileyen Duffing denklemi ile tezde çalışılan Thirring doğrusal olmayan saf spinör alan modeli ve saf spinör alan modellerinde instantonların faz uzayındaki davranışlarının karşılaştırıldığı doğrusal olmayan saf spinör alan Gürsey Modelini tezin üçüncü kısmı olan malzeme ve yöntemde tanıttık. Ayrıca kuvvet etkisi altında olmayan Duffing denklemi ile kütsüz Thirring doğrusal olmayan spinör alan denklemlerinin sabit noktalarını gösterdik ve bu noktalar civarında sistemlerin kararlılık analizine baktık ve faz diyagramları çizdik. Son olarak da farklı boyut ve spinör sayılarına sahip olan Thirring İntantonları ile Gürsey İntantonlarının faz uzayındaki davranışlarının karşılaştırılmasını[5] yine tezin bu kısmında verdik.

Tezimizin özgün kısmını oluşturan bulgular bölümünde Thirring spinör alan modelinden Heisenberg anızatı kullanılarak konformal simetrinin kırılması sonucu, sıfır enerjileriyle vakumlar arası geçişi sağlayan instantonları kapsayan denklem sistemimize, dışarıdan etki eden bir parçacığa karşılık gelen periyodik bir kuvvet terimi ekledik. Bu terime karşılık olarak gelen parçacık, sistem üzerine gönderilen bir foton olarak düşünülebilir. Ayrıca vakum durumu olarak yorumlanan bu instantonların kendi iç dinamiğinden oluşabilecek bir etki içinde doğrusal olmayan denklem sistemimize kuvvet terimini negatif işaretli olarak yerleştirdik. Etki eden bu kuvvet nedeniyle meydana gelen Thirring İntantonlarının davranışlarındaki değişimi gözlemlemek ve dinamiği hakkında daha fazla bilgi almak için faz diyagramlarına, Poincare kesitlerine, zaman serilerine, güç spektrumlarına ve skalogram analizine baktık.

Thirring İntantonlarını da içeren doğrusal olmayan denklem sistemimize eklediğimiz bu periyodik kuvvetin, faz uzayında meydana getireceği değişimleri daha iyi analiz edebilmek için dış yörüngelerine göre faz diyagramlarını çizdik. Şekil 4.1'e baktığımızda dışarıdan periyodik kuvvet etkisi altındaki Thirring İntantonlarının faz diyagramları ile Şekil 3.2 deki dışarıdan etkiyen periyodik kuvvet altındaki Duffing sisteminin faz diyagramları arasındaki benzerlik dikkat çekicidir. Thirring İntantonları ile Duffing sistemi etki eden kuvvetin büyüklüğü arttırıldığında belirli bir değere kadar periyodik faz durumlarını korumaktadırlar. Kritik kaotik durum dediğimiz bu geçiş değerinde kuvvetin büyüklük değişimleri sayesinde her iki sistem de kaotik veya periyodik duruma geçebilmektedirler. Faz uzaylarında bakıldığında Thirring İntantonlarının kaotik geçişi Duffing sistemi ile kıyaslandığında daha yavaş olduğu söylenebilir. Bu geçiş değerinden daha büyük kuvvet değerlerinde sistemlerin giderek daha da kaotikleştikleri görülmektedir. Bu da bize Thirring İntantonlarının Duffing tipi davranışlar sergilediğini göstermektedir.

Thirring İntantonlarının davranışlarının dinamiği hakkında daha fazla bilgi edinebilmek için bulgular kısmında elde ettiğimiz tüm şekiller ve analizler göz önüne alındığında, vakum durumuna tekabül eden instantonların sergiledikleri kararlı davranışlar periyodik kuvvet etkisi altında bozulduğunu ve sistemin artık kaotik davranışlar sergilemeye başladığını görüyoruz. Frekans ve genliğin değerlerine bağlı olarak bu kaotiklik azalmakta ya da artmaktadır. Genliği sabit tutarak ve fazı ihmal ederek frekans değerleriyle oynadığımızda, çok küçük değerlerinde periyodik bir yapı sergilerken artan değerlerinde sistemin kaotikleştiğini fakat frekans değerlerini daha da arttırdıkça bu kaotikliğin yerini kararlı bir yapıya bıraktığını ve sistemin kendini topladığını görüyoruz. Frekans ile fazın sabit tutulduğu ve genlik değerinin küçük değerlerindeki kararlı yapı genliğin arttırılmasıyla giderek bozulmakta ve tamamen kaotik hale gelmekte iken genliği ve frekansı belirli bir değerde tutup fazı değiştirdiğimizde sistemin kaotik durumunda herhangi bir değişime neden olmadığı sadece yörüngelere yerlerine dair değişimler gözlenmektedir.

Vakum durumuna tekabül eden instantonların hem dışarıdan etki eden periyodik kuvvetin hem de kendi iç dinamiklerinden oluşan etki sonucu davranışlarının karşılaştırılmasının yapıldığı Bölüm 4.7 de tüm şekiller karşılıklı incelendiğinde

sistemlerin yörüngelerinde farklılıklar olmasına rağmen Thirring İntantonlarının davranışları birbirlerine benzemektedir. Bu sonuçlarla instantonların kendi aralarında tedirgediğini düşünebiliriz. Bu durum için sonrasında oluşan yapılar da karardır. Daha önce başka bir yöntem uygulanarak [24] gözlemlenemeyen bu sonuca, bu tekniği kullanarak ulaşabiliriz ki bu kullandığımız tekniğin bize kazandırdığı önemli bir avantajdır. Bu sonucu vakum durumuna tekabül eden instantonların periyodik kuvvet etkisi altında kendi aralarında organize olarak kararlı spinör tipi parçacıkların oluşumuna yol açtığı şeklinde yorumlamak mümkündür.

Bölüm 4.8 de Duffing sistemine ve Thirring İntantonlarına etkiyen periyodik kuvvetin genliğinin frekansının ve fazının farklı değerleri için, sistemlerin faz diyagramlarını, Poincare kesitlerini, zaman serilerini, güç spektrumlarını ve skalogram analizlerini karşılaştırmalı olarak gösterdik. Tüm şekiller ve analizler incelendiğinde, Thirring İntantonlarının davranışlarının Duffing tipi karakteristik davranışlar sergilediği sonucuna varıyoruz.

Daha önce genel kısımlarda bahsettiğimiz Heisenberg ve arkadaşlarının rüyası olan evrendeki tüm parçacıkların fermiyonlardan oluştuğu düşüncesini gerçekleştirmek amacıyla yaptıkları çalışmaların bir alternatifi olarak elde edilen bu sonuçlar, tüm spinör tipi parçacıkların kuantum farkındalığı olarak yorumlanabilir ki bu yapılan tezin özgünlüğü açısından elde edilen önemli sonuçlardan biridir. Bu fikir aynı zamanda spinör tipi instantonların kuantum alanlar teorisinde tanımlanması fırsatını doğurur [48]

Elde edilen tüm bu sonuçlar neticesinde, yeni bir Heisenberg rüyası ve de Higgs mekanizmasına da bir alternatif olarak, vakum durumuna karşılık gelen instantonların tedirgeyerek parçacık üretimine yol açıp açmayacağı fikri üzerine araştırmalar yapmak mümkündür[48].

Tezde saf spinör alan modeli olan Thirring Modelden konformal simetrinin kendiliğinden kırılması ile ortaya çıkan spinör tipi instantonların periyodik bir kuvvet etkisi altındaki davranışlarının dinamiğini inceledik ve fiziksel olarak yorumlamaya çalıştık.

KAYNAKLAR

- [1] YANG, C. N., MILLS, R., 1954, Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance, *Physical Review* **96** (1), 191–195. [doi:10.1103/PhysRev.96.191](https://doi.org/10.1103/PhysRev.96.191).
- [2] SCHRODINGER, E., 1926, An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules *Physical Review*, **28** (6), 1049–1070. [doi:10.1103/PhysRev.28.1049](https://doi.org/10.1103/PhysRev.28.1049).
- [3] DIRAC, P. A. M., 1928, The Quantum Theory of the Electron, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol.117, No.778, 610-624. [doi:10.1098/rspa.1928.0023](https://doi.org/10.1098/rspa.1928.0023).
- [4] DIRAC, P. A. M., 1930, Theory of the Electron and Proton, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol.126, No.801, 360-365. [doi:10.1098/rspa.1930.0013](https://doi.org/10.1098/rspa.1930.0013)
- [5] AYDOĞMUŞ F., 2012, *Spinör Tipi İntanton Çekicilerinin Faz Uzayında Davranışları*, Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [6] HEISENBERG, W., 1954, Zur Quantentheorie Nichtrenormierbarer Wellengleichungen (On The Quantum Theory Of Nonrenormalized Wave Equations). *Zeitschrift für Naturforschung*, 9A, 292–303.
- [7] GÜRSEY, F., 1956, On a Conform-Invariant Spinor Wave Equation, *II Nuova Cimento*, Vol.3, No.5, 988-1006.
- [8] THIRRING, W.E., 1958, A Soluble Relativistic Field Theory, *Annal Physics*, Vol.3, 91-112, [doi:10.1016/0003-4916\(58\)90015-0](https://doi.org/10.1016/0003-4916(58)90015-0).

- [9] GELL-MANN, M., 1961, The Eightfold Way: A Theory of Strong Interaction Symmetry, *California Institute of Technology Report CTSL-20*, (unpublished)
- [10] NE'EMANN, Y., 1961, Derivation of strong interactions from gauge invariance, *Nuclear Physics* **26** (2): 222-229. [doi:10.1016/0029-5582\(61\)90134-1](https://doi.org/10.1016/0029-5582(61)90134-1)
- [11] GELL-MANN, M., 1964, A Schematic Model of Baryons and Mesons, *Physics Letters* **8** (3), 214–215. [doi:10.1016/S0031-9163\(64\)92001-3](https://doi.org/10.1016/S0031-9163(64)92001-3)
- [12] ZWEIG, G., 1964, An $SU(3)$ Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking, *CERN Report No.8181/Th 8419*.
- [13] ZWEIG, G., 1964, An $SU(3)$ Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking: II, *CERN Report No.8419/Th 8412*.
- [14] RAJARAMAN, R., 1982, *Solitons and Instantons*, North-Holland, Amsterdam, 0444870474.
- [15] SHURYAK, E. V., 2004, *The QCD Vacuum, Hadrons and Superdense Matter*, World Scientific, London, 9812385738.
- [16] 'T HOOFT, G., 1974, Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theoris, *Nucl. Phys. B*, **79**, 276-284
- [17] POLYAKOV, A.M., 1974, Particle spectrum in quantum field theory, *JETP Lett.*, **20** (6), 194-195
- [18] BELAVIN, A.A., POLYAKOV, A.M., SCHWARTZ, A.S., TYUPKIN, Yu.S., 1975, Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations, *Phys.Lett. B*, **59**, 85-87. [doi:10.1016/0370-2693\(75\)90163-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(75)90163-X).
- [19] JACKIW, R., REBBI, C., 1976, Vacuum Periodicity in a Yang-Mills Quantum Theory, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 172-175.

- [20] CALLAN, C. G., DASHEN, R., GROSS, D. J., 1976, The structure of the gauge theory vacuum, *Phys. Lett. B*, 63, 334-340.
- [21] POLYAKOV, A.M., 1977, Quark confinement and topology of gauge theories, *Nucl. Phys. B* **120** (3), 429–58. [doi:10.1016/0550-3213\(77\)90086-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(77)90086-4).
- [22] FUBINI, S., 1976, A new approach to conformal invariant field theories, *Il Nuovo Cimento A*, Vol.34, No. 4, 521-554.
- [23] DE ALFARO, V., FURLAN, G., 1976, Spontaneously broken conformal symmetry and the nucleon sigma-model, *Il Nuovo Cimento A*, Vol.34, No. 4, 555-568.
- [24] AKDENİZ, K. G., SMAILAGIC, A., 1979, Classical Solitons for Fermionic Models, *Il Nuova Cimento A*, vol.51, No.3, 345-357.
- [25] 'T HOOFT, G., 1976, Symmetry Breaking through Bell-Jackiw Anomalies, *Phys. Rev. Lett.*, 37, 8-11.
- [26] SHIFMAN, M., VAINSHTEIN, A., ZAKHAROV, V., 1979, QCD and resonance physics. theoretical foundations, *Nuclear Physics B*, Vol.147, No.5, 385-447. [doi:10.1016/0550-3213\(79\)90022-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(79)90022-1)
- [27] NOVIKOV, V.A., SHIFMAN, M.A., VAINSHTEIN, A.I., ZAKHAROV, V.I., 1981, Are all hadrons alike?, *Nuclear Physics B*, Vol.191, No.2, 301-369.
- [28] DUNAJSKI, M., 2010, *Solitons, Instantons, and Twistors*, Oxford University Press, New York, 0198570635.
- [29] SAĞALTICI, SERAP, 2004, *Gürsey Solitonlarının Düzensiz Dinamik Yapılarının İncelenmesi*, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

- [30] KELLERT, H.S., 1993, *In the Wake of Chaos: Unpredictable Order in Dynamical Systems*, University Of Chicago Press, Chicago, 0226429741
- [31] WIGGINS, S., 1997, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag Telos, California, 0387970037.
- [32] BOZDAĞ, C.E., 1998, *Kaos Analizi: Bir Finansal Sektör Uygulaması*, Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [33] HILBORN, R.C., 1994, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford University Press, New York, 0195057600
- [34]] SZEMPLINSKA-STUPNICKA, W., IOOSS, G. ve MOON, F. C., 1988, *Chaotic Motions in Nonlinear Dynamical Systems*, Springer Verlag Wien, New York, 3211820620.
- [35] CAMBEL, A. B., 1993, *Applied Chaos Theory a Paradigm for Complexity*, Academic Press, Boston, 0121559408.
- [36] GUCKENHEIMER J., HOLMES, P., 1983, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York, 0387908196.
- [37] DUFFING, G., 1918, *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, F.Vieweg & Sohn, Braunschweig
- [38] HAYASHI C., 1964, *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*, McGraw-Hill, New York.
- [39] OTT E., 2002, *Chaos in Dynamical Systems (2nd edition)*, Cambridge University Press,.

- [40] YUAN, Y., LI, Y., (2008), Study on EEG time series based on Duffing equation, *BioMedical Engineering and Informatics, BMEI 2008. International Conference on*, Vol.02, 516 - 519. [doi:10.1109/BMEI.2008.9](https://doi.org/10.1109/BMEI.2008.9)
- [41] KORTEI, F., 1956, *On Some Solutions of Gürsey' s Conformal- Invariant Spinor Wave Equation*, II Nuova Cimento, vol.4, No.2, 210-215.
- [42] CANBAZ B., 2008, *Thirring İntantonlarının Faz Uzayında Kararlılığı*, Yüksek Lisans Tezi, İÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [43] CANBAZ B., ÖNEM C., AYDOĞMUŞ F., AKDENİZ K. G., 2012, From Heisenberg Ansatz to Attractor of Thirring Instanton, *Chaos Solitons & Fractals*, vol.45,
- [44] STROGATZ, S., 2001, *Nonlinear Dynamics And Chaos: With Applications To Physics, Biology, Chemistry, And Engineering*, Westview Press, Colorado, 0738204536
- [45] SPROTT, J.C., 2003, *Chaos and time-series analysis*, Oxford University Press, New York, 0198508409.
- [46] CHANDRE, C., WIGGINS, S., UZER, T., 2003, Time-frequency analysis of chaotic systems, *Physica D*, 181, 171-196. [doi: 10.1016/S0167-2789\(03\)00117-9](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(03)00117-9)
- [47] Bi, G., Zeng, Y., 2003, *Transforms and Fast Algorithms for Signal Analysis and Representations*, Birkhäuser, Boston, 0817642792
- [48] WITTEN E., 1996, Small instantons in string theory, *Nucl.Phys. B*, 460, 541-559

ÖZGEÇMİŞ

Beyrul CANBAZ Bulgaristan'ın Haskovo kentinde 26 Nisan 1982 tarihinde doğdu. 1989 yılındaki göç ile Türkiye'ye geldi. İlköğrenimini Çorlu da sırası ile Atatürk İlk Okulu, Reşadiye İlköğretim Okulu ve Mimar Sinan Lisesinde tamamladı. Lise bitiminden sonra Ege Üniversitesi Fizik Bölümünü kazandı ve lisansını orada tamamladı. Aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği yüksek lisans programına kabul edildi ve ardından aynı kurumda doktora eğitimine devam etti.

EKLER

EK A

KONFORMAL DÖNÜŞÜM GRUBU

Gürsey 1956 yılında önerdiği bu modellerle [7] spinör alan teorilerinde konformal invaryanslığı deneyen ilk fizikçi olmuştur. Uzay ve zaman simetrilerinden daha geniş simetrilere olan ihtiyaç yapılan yüksek enerjili deneylerde ortaya çıkan reaksiyonların yeni korunumlar göstermesinden kaynaklanmaktadır. Bu simetriler, dinamik yapıyla birlikte; parçacığın kendine özgü, korunan büyüklükleri de keşfedilince ortaya çıkmaktadır bunlar: izospin, renk yükleri, çeşniler (acayıplık, cazibe, kuantum sayıları..) gibi korunumlardır. Her korunumun bir simetri özelliğine karşılık geldiği bilinmektedir. Konformal simetri, bu simetrilerin geometrik özelliklerini kapsayan geniş simetrilere biridir.

Dört boyutlu konformal dönüşüm grubu;

Öteleme	$: x_{\mu} \rightarrow x'_{\mu} = x_{\mu} + a_{\mu}$	(Jeneratörü P_{μ})
Dönme (uzay-zaman)	$: x_{\mu} \rightarrow x'_{\mu} = \Omega'_{\mu} x_{\nu}$	(Jeneratörü $M_{\mu\nu}$)
Dilatasyon (eşel invaryant)	$: x_{\mu} \rightarrow x'_{\mu} = \rho x_{\mu}$	(Jeneratörü D_{μ})
ve	$: x_{\mu} \rightarrow x'_{\mu} = \frac{x_{\mu} + x^2 c_{\mu}}{1 + 2\vec{x} \cdot \vec{c} + c^2}$	(Jeneratörü K_{μ})

dür. Son dönüşüm, sırasıyla; ters çevirme, öteleme ve tekrar ters çevirme koordinat dönüşümlerinin arka arkaya tekrarlanmasından meydana gelmiştir. Bunlar özel konformal koordinat dönüşümleridir.

Konformal invaryant spinör alan teorilerinde klasik çözümler (instanton ve meron) konformal simetrinin kendiliğinden kırılması ile bulunur. Vakum beklenen değerinin

$$\langle 0 | \bar{\Psi} \Psi | 0 \rangle \neq 0$$

sıfırdan farklı seçilmesi ile konformal simetri, spinör alanlar için kendiliğinden kırılmış olur.

Kendiliğinden simetri kırılması, dejenere vakum sistemlerinde Lagrangiyende, vakum değerlerinden biriyle çalışma zorunluluğu olması ve vakumun Lagrangiyenin simetrisini paylaşmamasından dolayı dışardan hiçbir vasıta olmadan gerçekleşir. Örneğin gravite üç boyutlu simetriyi aşağı ve yukarıyı, sağ ve soldan çok farklı yaparak kırar ya da ince plastik bir cetvel aynı anda kenarlarından sıkılırsa eğri bir görünüş alır. Cetvel hem sağa hem de sola eğilebilir ikisi de sistemin temel seviyeleridir her biri sağ sol simetriyi kırar. Kendiliğinden olan bu simetri kırılması, sadece iki temel seviyeyle olan simetridir. Sürekli simetriler daha ilginçtir: Cetveli, plastik bir örgü şişi ile değiştirelim. Örgü şişi sadece sağa veya sola değil her yöne bükülür. Sürekli simetri durumunda kütsüz skaler (0-spin) parçacıkların belirmesi dikkate değerdir. Bu Goldstone bozonları, mümkün iki vakum değerini birbirine bağlayan 0-enerji uyarımlarıdır.

EK B

PAULİ VE DIRAC MATRİSLERİ

1) Pauli Spin Matrisleri:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır.

Özellikleri:

a) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I$

b) i) $\sigma_1, \sigma_2 = i \sigma_3$

ii) $\sigma_2, \sigma_3 = i \sigma_1$

iii) $\sigma_3, \sigma_1 = i \sigma_2$

c) i) $[\sigma_1, \sigma_2] = \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1 = 2i \sigma_3$

ii) $[\sigma_2, \sigma_3] = \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_2 = 2i \sigma_1$

iii) $[\sigma_3, \sigma_1] = \sigma_3 \sigma_1 - \sigma_1 \sigma_3 = 2i \sigma_2$

d) $\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_2 = \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_3 = 0$

e) $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = iI$

2) Dirac Matrisleri:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \text{ olarak tanımlanır. Bunlar;}$$

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Özellikleri:

a) $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\gamma^{\mu\nu}$ Anti-komitasyon

b) $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4I$

c) $[\gamma^\mu \gamma^\nu, \gamma^g] = \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^g - \gamma^g \gamma^\mu \gamma^\nu = 2(\gamma^\mu \gamma^{\nu g} - \gamma^\nu \gamma^{\mu g})$

d) $\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu = -2\gamma_\nu$

e) $\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_g \gamma_\mu = 4\gamma_{\nu g}$

f) $\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_g \gamma_\sigma \gamma_\mu = -2(\gamma_\sigma \gamma_g \gamma_\nu)$

g) $\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_g \gamma_\sigma \gamma_\tau \gamma_\nu = 2(\gamma_\tau \gamma_\nu \gamma_g \gamma_\sigma + \gamma_\sigma \gamma_g \gamma_\nu \gamma_\tau)$