



**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN
KARARLILIK ANALİZİ**

**Hazırlayan
Hayrullah ÖZİMAMOĞLU**

**Danışman
Prof. Dr. Fuat GÜRCAN**

Yüksek Lisans Tezi

**Ağustos 2012
KAYSERİ**

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN
KARARLILIK ANALİZİ**

**Hazırlayan
Hayrullah ÖZİMAMOĞLU**

**Danışman
Prof. Dr. Fuat GÜRCAN**

Yüksek Lisans Tezi

**Ağustos 2012
KAYSERİ**

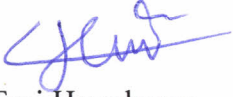
Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Adı Soyadı: Hayrullah ZİMAMOğLU

İmza :

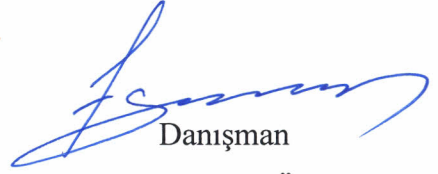


“Lineer Olmayan Fark Denklem Sistemlerinin Kararlılık Analizi” adlı Yüksek Lisans tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ne uygun olarak hazırlanmıştır.



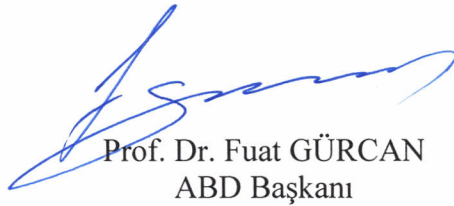
Tezi Hazırlayan

Hayrullah ÖZİMAMOĞLU



Danışman

Prof. Dr. Fuat GÜRCAN



Prof. Dr. Fuat GÜRCAN
ABD Başkanı

Prof. Dr. Fuat GÜRCAN danışmanlığında **Hayrullah ÖZİMAMOĞLU** tarafından hazırlanan “**Lineer Olmayan Fark Denklemlerinin Kararlılık Analizi**” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

30 /07/ 2012

JÜRİ:

Başkan: Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK

Üye : Prof. Dr. Fuat GÜRCAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 07/08/2012 tarih ve 2012/34-04 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

07/08/2012



Prof. Dr. Necmettin MARAŞLI
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında desteğini ve yardımlarını esirgemeyen, bilgi ve tecrübesiyle bana yol gösteren ve kendilerinden çok şey öğrendiğim değerli hocam sayın Prof. Dr. Fuat GÜRCAN' a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Yapılan çalışmada her türlü yardımı yapan, zaman harcayan, emek veren ve tecrübesini paylaşan değerli hocam sayın Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK' e de ayrıca teşekkür ederim.

Yüksek Lisans öğrenimim boyunca maddi anlamda bana büyük katkı sağlayan Türkiye'de bilimin en büyük destekçisi TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Her zaman maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN KARARLILIK ANALİZİ

Hayrullah ÖZİMAMOĞLU
Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2012
Danışman: Prof. Dr. Fuat GÜRCAN

ÖZET

Fark denklemleri, zamanı içeren değişkenlerin ölçülmesi ayrık olduğundan birçok doğal fenomenlerde karşımıza çıkar. Örneğin, bu denklemler biyoloji, fizik, kontrol denklemler ve elektrik denklemleri gibi birçok matematiksel modelde yer alabilir. Biz bu çalışmada yüksek mertebeden rasyonel fark denklem sistemlerini ele alıp bunların pozitif çözümlerinin davranışını inceledik. Bu çalışmanın birinci bölümünde, kullanılan temel tanım ve teoremler verildi. İkinci bölümde A , $k \times k$ tipinde bir matris olmak üzere

$$x(n+1) = Ax(n)$$

şeklindeki sabit katsayılı lineer fark denklem sistemlerinin çözümleri ve çözümlerinin davranışı incelendi. Üçüncü bölümde $p \geq 2$, $q \geq 2$, $r \geq 2$, $s \geq 2$, $(p, q, r, s \in \mathbb{Z})$, A bir pozitif sabit ve $x_{1-\max\{p,r\}}, x_{2-\max\{p,r\}}, \dots, x_{-1}, x_0, y_{1-\max\{q,s\}}, y_{2-\max\{q,s\}}, \dots, y_{-1}, y_0$ pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-p}y_{n-q}}, \quad y_n = A + \frac{x_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklindeki lineer olmayan fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışı incelendi [3]. Dördüncü bölümde $p \geq 1$, $r \geq 1$, $s \geq 1$, $(p, r, s \in \mathbb{Z})$, $A \geq 0$ ve $x_{1-r}, x_{2-r}, \dots, x_{-1}, x_0, y_{1-\max\{p,s\}}, y_{2-\max\{p,s\}}, \dots, y_{-1}, y_0$ pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_n = A + \frac{1}{y_{n-p}}, \quad y_n = \frac{y_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklindeki lineer olmayan fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışı incelendi [4].

Anahtar Sözcükler: Fark denklem sistemi, Sınırlılık, Periyodiklik, Lokal asimptotik kararlılık, Global asimptotik kararlılık.

THE STABILITY ANALYSIS OF NONLINEAR DIFFERENCE EQUATION SYSTEMS

Hayrullah ÖZİMAMOĞLU

Erciyes University, Institute of Natural and Applied Sciences

M.Sc. Thesis, August 2012

Supervisor: Prof. Dr. Fuat GÜRCAN

ABSTRACT

Difference equations appear in natural phenomena because most measurements of time evolving variables are discrete. These equations appear in important mathematical models for various fields, like biology, physics, the study of control systems and electricity. In this work, the system of high order rational difference equations is considered and investigated their behavior of positive solutions. In the first chapter of this thesis basic definitions and theorems used in the study are given. In the second chapter, we solved the system of linear difference equations with constant coefficients

$$x(n+1) = Ax(n)$$

where A is a $k \times k$ matrix, and the behavior of these solutions are investigated. In the third chapter, the behavior of positive solutions of the system of nonlinear difference equations

$$x_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-p}y_{n-q}}, \quad y_n = A + \frac{x_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

where $p \geq 2, q \geq 2, r \geq 2, s \geq 2, (p, q, r, s \in \mathbb{Z})$, A is a positive constant and $x_{1-\max\{p,r\}}, x_{2-\max\{p,r\}}, \dots, x_{-1}, x_0, y_{1-\max\{q,s\}}, y_{2-\max\{q,s\}}, \dots, y_{-1}, y_0$ are positive real numbers, are examined [3]. In the fourth chapter, behavior of positive solutions of the system of nonlinear difference equations

$$x_n = A + \frac{1}{y_{n-p}}, \quad y_n = \frac{y_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

where $p \geq 1, r \geq 1, s \geq 1, (p, r, s \in \mathbb{Z})$, $A \geq 0$ and $x_{1-r}, x_{2-r}, \dots, x_{-1}, x_0, y_{1-\max\{p,s\}}, y_{2-\max\{p,s\}}, \dots, y_{-1}, y_0$ are positive real numbers, are examined [4].

Keywords: Difference equation system, Boundedness, Periodicity, Local asymptotic stability, Global asymptotic stability.

İÇİNDEKİLER
LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN
KARARLILIK ANALİZİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK SAYFASI	i
YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI	ii
KABUL VE ONAY SAYFASI	iii
TEŞEKKÜR	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SEMBOLLER LİSTESİ	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ	x
GİRİŞ	1

1. BÖLÜM
TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1. Fark Denklemleri	7
1.2. Bazı Tanım ve Teoremler	16

2. BÖLÜM
LİNEER VE LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEM
SİSTEMLERİNE KISA BAKIŞ

2.1. Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklem Sistemlerinin Çözümleri.....	25
2.2. Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklem Sistemlerinin Kararlılığı.....	30
2.3. Lineerleştirme Metodu ile Lineer Olmayan Fark Denklem Sistemlerinin Kararlılığının Belirlenmesi.....	41

3. BÖLÜM

$$x_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-p}y_{n-q}}, y_n = A + \frac{x_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}} \quad \text{ŞEKLİNDEKİ LİNEER OLMAYAN}$$

FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN KARARLILIK ANALİZİ

3.1. Giriş	47
3.2. Sınırlılık.....	48
3.3. Lokal Asimptotik Kararlılık	56
3.4. Global Çekicilik.....	69
3.5. Global Asimptotik Kararlılık.....	75

4. BÖLÜM

$$x_n = A + \frac{1}{y_{n-p}}, y_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}} \quad \text{ŞEKLİNDEKİ LİNEER OLMAYAN}$$

FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN KARARLILIK ANALİZİ

4.1. Giriş	76
4.2. Sınırlılık.....	77
4.3. Periyodiklik.....	80
4.4. Lokal Asimptotik Kararlılık	85
4.5. Global Çekicilik.....	98
4.6. Global Asimptotik Kararlılık.....	102

5. BÖLÜM

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar	103
5.2. Tartışma ve Öneriler	104

KAYNAKLAR	105
ÖZGEÇMİŞ.....	107

SEMBOLLER LİSTESİ

<u>Sembol</u>	<u>Anlamı</u>
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\Delta_{n,h}$	: n reel veya kompleks değişkenli, h herhangi bir sabit olmak üzere ileri fark operatörü
Δ	: n reel veya kompleks değişkenli, $h=1$ olmak üzere ileri fark operatörü
E	: Kaydırma operatörü
$\bar{x}$	: Denklemin denge noktası
$\frac{\partial f}{\partial u_i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$	: $f(u_0, u_1, \dots, u_k)$ fonksiyonunun $\bar{x}$ denge noktasındaki kısmi türevleri
$\ x\ $	: x vektörünün normu
$\ A\ $	: A matrisinin normu
$\rho(A)$	: A matrisinin spektral yarıçapı
P^{-1}	: P matrisinin tersi
$\det A$	: A matrisinin determinanı
$\inf A$	: A kümesinin alt sınırlarının en büyüğü
$\sup A$	: A kümesinin üst sınırlarının en küçüğü
$\underline{\lim} s_n = \liminf s_n$	: (s_n) dizisinin alt limiti
$\overline{\lim} s_n = \limsup s_n$	: (s_n) dizisinin üst limiti

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Kararlı düğüm	34
Şekil 2.2. Kararsız düğüm.....	35
Şekil 2.3. Yansımali kararlı düğüm	36
Şekil 2.4. Yansımali kararsız düğüm	37
Şekil 2.5. Merkez	38
Şekil 2.6. Kararsız spiral	38
Şekil 2.7. Kararlı spiral	39
Şekil 2.8. Eyer	40
Şekil 2.9. Yansımali eyer	41
Şekil 3.1. $\varphi_n = \phi \cdot \varphi_{n-1}$ sisteminin matris gösterimi	59
Şekil 3.2. $D\phi$ matrisi	62
Şekil 3.3. $D\phi$ matrisi	63
Şekil 3.4. D^{-1} matrisi.....	64
Şekil 3.5. $D\phi D^{-1}$ matrisi	65
Şekil 4.1. $\psi_n = \psi \cdot \psi_{n-1}$ sisteminin matris gösterimi	88
Şekil 4.2. $P\psi$ matrisi	91
Şekil 4.3. $P\psi$ matrisi	92
Şekil 4.4. P^{-1} matrisi.....	93
Şekil 4.5. $P\psi P^{-1}$ matrisi.....	94

GİRİŞ

x bağımsız değişkeninin tanımlı olduğu aralıkta $y(x)$ bağımlı değişkeninin değişimi $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x), \dots$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Fakat bu değişim x 'in reel sayı ekseninden sadece tamsayı gibi belli noktalarda değerler alması durumunda açıklanamaz. Bu tür kesikli durumlarda fark denklemleri ortaya çıkmıştır. $\{x(n)\}$ dizisinin bir terimi dizideki diğer terimlerin fonksiyonu olarak bir denklem şeklinde ifade ediliyorsa bu denkleme fark denklemi denir. Bu $\{x(n)\}$ dizisi $\{x_n\}$ şeklinde de gösterilebilir.

Doğada meydana gelen olayların matematiksel modellemesinde göz önüne alınan en önemli kuram “ doğada kesintiler (kopuklar) yoktur” varsayımıdır. Buna göre fiziksel olaylar matematiksel olarak, sürekli değişim oranları arasındaki denklemler ile ifade edilirler. Fakat son yüzyılda birçok doğa olayları için yapılan çalışmalar, tüm doğa olaylarının sürekli terimlerle ifade edilemeyeceğini göstermiştir. Bu anlamda fark denklemleri, tabiatla oluşan olayların doğal bir tanımı olarak ortaya çıkarlar. Bununla beraber fark denklemleri, diferensiyel denklemler için ayrıklaştırma (discretization) metotlarının incelenmesinde de karşımıza çıkmaktadır. Fark denklemleri teorisinde elde edilen pek çok sonuç bu metotlara karşılık gelen diferensiyel denklemlerin ayrık benzeridir. Diğer taraftan; fark denklemleri teorisi, karşılık gelen diferensiyel denklemler teorisinden daha zengindir. Örneğin, birinci mertebeden bir diferensiyel denklemin benzeri olan bir fark denklemi kaotik yörüngelere sahip olabilmesine rağmen bu durum ancak yüksek mertebeden diferensiyel denklemler için söz konusudur. Dolayısıyla fark denklemler teorisinin yakın gelecekte daha fazla öneme sahip olacağı düşünülmektedir.

Fark denklemi kavramı, ilk defa M.Ö. 2000 yıllarında en basit haliyle bir denklemin kökünü bulmak için Babiller’de görülmüştür [1].

1200-1600 yılları arasında fark denklemleri ile ilgili önemli bir çalışma Fibonacci tarafından yapılan çalışmadır. Fibonacci biyoloji’de ilk matematiksel modeli oluşturmuştur. Fibonacci bu çalışmasında en çok bilinen fark denklemlerinden birisi olan

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad F_1 = F_2 = 1, \quad n = 2, 3, \dots$$

denklemini oluşturmuştur. Bu denklemin temelinde tavşanları yetiştirmenin en ideal problemi vardır. Buradan yola çıkılarak

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

şeklindeki Fibonacci dizisi ortaya çıkmıştır [2].

1600-1700 yılları arasında Sir İsaac Newton, Abraham de Moivre, Blaise Pascal ve Jacob Bernoulli gibi tanınmış matematikçiler fark denklemleri üzerinde önemli çalışmalar yapmışlardır. Newton tarafından yapılan, bir denklemin kökünü bulmaya yarayan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

fark denklemdir.

1700-1800 yılları arasında Riccati, Simpson ve Cotes gibi matematikçiler de fark denklemleri üzerinde çalışmışlardır. Riccati, Analiz ve Diferensiyel Denklemler üzerine çalışmış ve bugün Riccati fark denklemi olarak bilinen

$$x_{n+1} = \frac{a + bx_n}{c + dx_n}$$

denklemini oluşturmuştur.

1755 yılında Euler sonlu farkın analizi üzerine yapmış olduğu çalışmasında

$$\Delta y(n) = y(n+1) - y(n)$$

şeklinde tanımlı Δ fark operatör sembolünü kullanmış ve

$$y(n+1) - y(n) + p(n)y(n) = 0$$

şeklindeki fark denklemini

$$\Delta y(n) + p(n)y(n) = 0$$

şeklinde göstererek fark denklemlerinin daha kolay ifade edilmesini sağlamıştır [2].

1800-1825 yılları arasında Babagge, Gauss, Legendre ve Bessel gibi matematikçilerin fark denklemleri üzerinde bazı çalışmaları vardır. Babagge fark metodunun

$$\Delta f(x) = f(x_1) - f(x_2), \quad x_1 \neq x_2$$

şeklindeki özel halini oluşturmuştur.

1850-1900 yılları arasında yapılan önemli çalışmalardan biri Felice Casorati'nin diferensiyel denklemler ve fark denklemlerinin ortak özelliklere sahip olduğunu gösterdiği çalışmadır. Burada diferensiyel denklemlerdeki Wronskian'e benzeyen Casoratian vardır. Casorati lineer fark denklemleri için Casorati formülünü geliştirmiştir. n . mertebeden lineer fark denklemi, homojen fark denklemi ve Casorati matrisi üzerine çalışmalar yapmıştır [2].

Populasyon ile ilgili yapılan çalışmalarda fark denklemleri sıklıkla kullanılmıştır. Bu çalışmalarda oluşturulan matematiksel model bir neslin populasyon büyüklüğünün kendisinden önceki neslin populasyon büyüklüğü ile orantılı olması kuramına dayanır. Bu durum matematiksel olarak t periyot zamanı, p_t ; t zamanında populasyon büyüklüğü, p_{t+1} ; bir sonraki zaman dilimindeki populasyon büyüklüğü ve r de büyüme oranı olmak üzere

$$p_{t+1} = rp_t$$

şeklinde gösterilir. Bu modelden yararlanılarak bakteri ve virüs gibi bir türün artışı ve yok oluşu incelenmiştir.

Günümüzde ise fark denklemlerinden yararlanılarak uygulamalı bilim dallarının fizik, kimya ve mühendislik gibi alanlarında sıkça karşılaşılan reel problemlerin çözümlerinin davranışını belirlemek amacıyla matematiksel modeller oluşturulmuştur. Bu modeller bakterilerin, virüslerin ve kanser hücrelerinin davranışlarının incelenmesinde önemli yararlar sağlamaktadırlar.

Bu tez çalışmasının birinci bölümünde ileriki bölümlerde kullanılacak temel tanım ve teoremler verildi.

Tezin ikinci bölümünde A , $k \times k$ tipinde bir matris olmak üzere

$$x(n+1) = Ax(n) \quad (1)$$

şeklindeki sabit katsayılı lineer fark denklem sistemlerinin çözümleri Putzer Algoritmasından yararlanılarak elde edildi. (1) sisteminin orijin denge noktasındaki kararlılık durumu belirlendi ve bunlar grafiklerle gösterildi.

Ayrıca $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$x(n+1) = f(x(n)) \quad (2)$$

şeklindeki lineer olmayan fark denklem sistemlerinin lineerleştirme metodu ile kararlılık durumu incelendi.

Bazı fiziksel olayların açıklanmasında fark denklem sistemleri kullanılmıştır. Literatürde birçok yazar tarafından [3-12] fark denklem sistemlerinin pozitif çözümlerinin davranışları incelenmiştir.

Papaschinopoulos ve Schinas [9] $p \geq 2$, $q \geq 2$ ve A pozitif bir sabit olmak üzere,

$$x_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-p}}, \quad y_n = A + \frac{x_{n-1}}{y_{n-q}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

fark denklem sistemi üzerine çalışmışlardır. Onlar bu çalışmada

- 1) (3) sisteminin her pozitif çözümünün $(1+A, 1+A)$ tek pozitif denge noktası civarında salınımlılığını,
- 2) $A > 1$ iken (3) sisteminin her pozitif çözümünün sınırlılığını,
- 3) $A > 1$ iken (3) sisteminin bütün pozitif çözümleri için $(1+A, 1+A)$ pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Tezin üçüncü bölümünde Yang [3] in yapmış olduğu çalışma ele alındı. Burada

$p \geq 2$, $q \geq 2$, $r \geq 2$, $s \geq 2$, A pozitif bir sabit ve $x_{1-\max\{p,r\}}, x_{2-\max\{p,r\}}, \dots, x_{-1}, x_0, y_{1-\max\{q,s\}},$

$y_{2-\max\{q,s\}}, \dots, y_{-1}, y_0$ pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-p}y_{n-q}}, y_n = A + \frac{x_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}}, n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

şeklindeki lineer olmayan fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışı incelendi.

(4) sistemi,

$$(c, c) = \left(\frac{A + \sqrt{A^2 + 4}}{2}, \frac{A + \sqrt{A^2 + 4}}{2} \right) \quad (5)$$

şeklinde tek pozitif denge noktasına sahiptir. Burada aşağıdaki durumlar incelendi:

- 1) $A > 1$ iken (4) sisteminin her pozitif çözümü sınırlıdır.
- 2) $A > 2/\sqrt{3}$ iken (4) sisteminin (c, c) denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.
- 3) $A > \sqrt{2}$ iken (4) sisteminin her pozitif çözümü (c, c) denge noktasına yakınsaktır.

Cinar [5]

$$x_n = \frac{1}{y_{n-1}}, y_n = \frac{y_{n-1}}{x_{n-2}y_{n-2}}, n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin periyodikliği üzerine çalışmıştır.

Tezin son bölümünde Zhang, Yang, Megson ve Evans [4] ın yapmış olduğu çalışma ele alındı. Burada $p \geq 1, r \geq 1, s \geq 1, A \geq 0$ ve $x_{1-r}, x_{2-r}, \dots, x_{-1}, x_0, y_{1-\max\{p,s\}},$

$y_{2-\max\{p,s\}}, \dots, y_{-1}, y_0$ pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_n = A + \frac{1}{y_{n-p}}, y_n = \frac{y_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}}, n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

lineer olmayan fark denklem sistemlerinin pozitif çözümlerinin davranışları incelendi.

(7) sisteminin $A > 0$ için,

$$(c, c) = \left(\frac{A + \sqrt{A^2 + 4}}{2}, \frac{A + \sqrt{A^2 + 4}}{2} \right) \quad (8)$$

şeklinde bir tek pozitif denge noktası vardır.

$A = 0$ için (7) sistemi $xy = 1$ denklemini sağlayan $x, y \in (0, \infty)$ için sonsuz sayıda pozitif (x, y) denge noktasına sahiptir. Burada aşağıdaki durumlar incelendi:

- 1) $A > 0$ iken (7) sisteminin her pozitif çözümü sınırlıdır.
- 2) $A = 0$ iken (7) sisteminin pozitif çözümleri bazı şartlar altında periyodiktir.
- 3) $A > 2/\sqrt{3}$ iken (7) sisteminin (c, c) denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.
- 4) $A > \sqrt{2}$ iken (7) sisteminin her pozitif çözümü (c, c) denge noktasına yakınsaktır.

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tez çalışmasına zemin hazırlayacak önemli tanımlara, teoremlere ve örneklere yer verilmiştir.

1.1. Fark Denklemleri

Tanım 1.1.1. h herhangi bir sabit, n reel veya kompleks değişkenler olmak üzere $x(n)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Δ ileri fark operatörü olmak üzere $x(n)$ fonksiyonunun birinci ileri farkı

$$\Delta_{n,h} x(n) = x(n+h) - x(n) \quad (1.1.1)$$

şeklinde tanımlanır.

$x(n)$ fonksiyonunun ikinci ileri farkı birinci ileri farkın farkıdır ve

$$\Delta_{n,h}^2 x(n) = \Delta_{n,h} \left(\Delta_{n,h} x(n) \right) = x(n+2h) - 2x(n+h) + x(n) \quad (1.1.2)$$

dir.

$x(n)$ nin t . ileri farkı ise

$$\Delta_{n,h}^t x(n) = \Delta_{n,h} \left(\Delta_{n,h}^{t-1} x(n) \right) = \Delta_{n,h}^{t-1} x(n+h) - \Delta_{n,h}^{t-1} x(n) \quad (1.1.3)$$

dir.

Burada $h=1$ olması durumunda $\Delta_{n,h}$ operatörü Δ şeklinde yazılır [13].

Tanım 1.1.2. $\{x(n)\}$ dizisinin bir terimi dizideki diğer terimlerin fonksiyonu olarak bir denklem şeklinde ifade ediliyorsa bu denkleme bir fark denklemi denir.

Tanım 1.1.3.

$$Ex(n) = x(n+1) \quad (1.1.4)$$

şeklinde tanımlı E 'ye kaydırma operatörü denir [14].

Tanım 1.1.4. I kümesi reel sayıların bir aralığı, reel sayılardaki aralıkların birleşimi veya tam sayılar gibi kesikli bir küme olsun. $f : I^{k+1} \rightarrow I$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) \quad , \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1.5)$$

şeklindeki bir denkleme $(k+1)$. mertebeden fark denklemi denir [15].

Tanım 1.1.5. Bir fark denkleminin mertebesi, denklemdeki en büyük ve en küçük indislerin farkıdır.

Teorem 1.1.1. $x_{-k}, x_{-(k-1)}, \dots, x_{-1}, x_0 \in I$ başlangıç şartlarıyla verilen (1.1.5) denkleminin $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ şeklinde bir tek çözümü vardır [15].

Tanım 1.1.6. (1.1.5) denkleminde

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \quad (1.1.6)$$

şartını sağlayan $\bar{x}$ değerine (1.1.5) denkleminin denge noktası denir.

Tanım 1.1.7. (Kararlılık)

(1.1.5) denkleminin başlangıç şartları $x_{-k}, x_{-(k-1)}, \dots, x_{-1}, x_0 \in I$, çözümü $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ ve denge noktası $\bar{x}$ olmak üzere

a) $\forall \varepsilon > 0$ için

$$|x_{-k} - \bar{x}| + |x_{-k+1} - \bar{x}| + \dots + |x_{-1} - \bar{x}| + |x_0 - \bar{x}| < \delta$$

iken $\forall n \geq -k$ için $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktasına lokal kararlıdır denir.

b) $\bar{x}$ denge noktası lokal kararlı ve

$$|x_{-k} - \bar{x}| + |x_{-k+1} - \bar{x}| + \dots + |x_{-1} - \bar{x}| + |x_0 - \bar{x}| < \delta$$

iken $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktasına lokal asimptotik kararlıdır denir.

c) (1.1.5) denkleminin bütün $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümleri için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ ise $\bar{x}$ denge noktasına global çekicidir denir.

d) $\bar{x}$ denge noktası lokal kararlı ve global çekici ise $\bar{x}$ denge noktasına global asimptotik kararlıdır denir.

e) $\bar{x}$ denge noktası lokal kararlı değil ise $\bar{x}$ denge noktasına kararsızdır denir.

f) (1.1.5) denkleminin bütün $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümleri için

$$|x_{-k} - \bar{x}| + |x_{-k+1} - \bar{x}| + \dots + |x_{-1} - \bar{x}| + |x_0 - \bar{x}| < r$$

iken $|x_N - \bar{x}| > r$ olacak şekilde bir $r > 0$ ve $N \geq 1$ sayıları varsa $\bar{x}$ denge noktasına kararsız düğüm denir [15].

Tanım 1.1.8. G_n ve $i = 1, 2, \dots, k$ için $a_i(n)$; n 'nin fonksiyonları olmak üzere, eğer bir fark denklemi

$$x_{n+k} + a_1(n)x_{n+k-1} + a_2(n)x_{n+k-2} + \dots + a_{k-1}(n)x_{n+1} + a_k(n)x_n = G_n$$

şeklinde yazılabiliyorsa bu denkleme lineerdir denir. Ayrıca $G_n = 0$ ise homojen lineer denklem ve $G_n \neq 0$ ise homojen olmayan lineer denklem adı verilir. Lineer olmayan denkleme nonlineerdir denir [16].

Tanım 1.1.9. $f(u_0, u_1, \dots, u_k)$ fonksiyonu için (1.1.5) denkleminin u_i 'ye göre kısmi türevlerinin $\bar{x}$ denge noktasındaki değeri

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \quad , \quad i = 0, 1, \dots, k \quad (1.1.7)$$

şeklinde olsun. Bu taktirde $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1} + \dots + p_k y_{n-k} \quad (1.1.8)$$

denklemine (1.1.5) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş denklemi denir [17].

Tanım 1.1.10. $i = 0, 1, \dots, k$ için p_i 'ler (1.1.7) eşitliğinden elde edilmek üzere

$$\lambda^{k+1} - p_0 \lambda^k - p_1 \lambda^{k-1} - \dots - p_{k-1} \lambda - p_k = 0 \quad (1.1.9)$$

denklemine (1.1.5) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası civarındaki karakteristik denklemi

denir [17].

Teorem 1.1.2. (Lineerleştirilmiş Kararlılık Teoremi)

f fonksiyonu $\bar{x}$ denge noktasının bazı açık komşuluklarında sürekli türevlenebilir olsun. Bu taktirde

- a) (1.1.9) denkleminin bütün köklerinin mutlak değeri 1'den küçük ise (1.1.5) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.
- b) (1.1.9) denkleminin en az bir kökünün mutlak değeri 1'den büyük ise (1.1.5) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.
- c) (1.1.9) denkleminin bütün köklerinin mutlak değeri 1'den büyük ise (1.1.5) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası kararsız düğüm olur [15].

Tanım 1.1.11. (1.1.9) denkleminin bütün köklerinin mutlak değeri 1'den farklıysa (1.1.5) denkleminin $\bar{x}$ denge noktasına hiperboliktir denir [15].

Tanım 1.1.12. (1.1.9) denkleminin en az bir kökünün mutlak değeri 1'e eşit ise (1.1.5) denkleminin $\bar{x}$ denge noktasına nonhiperboliktir denir [15]. Bu taktirde $\bar{x}$ denge noktası dejenere olup Lineerleştirilmiş Kararlılık Teorisi denge noktasının kararlılığı hakkında bir bilgi vermez.

Tanım 1.1.13. (1.1.9) denkleminin bütün köklerinin mutlak değeri 1'den küçük ise (1.1.5) denkleminin $\bar{x}$ denge noktasına kararlı düğüm denir. Kararlı düğüm noktası lokal asimptotik kararlıdır [15].

Tanım 1.1.14. $\bar{x}$ denge noktası hiperbolik olmak üzere, (1.1.9) denkleminin mutlak değeri 1'den küçük ve 1'den büyük en az birer kökü varsa (1.1.5) denkleminin $\bar{x}$ denge noktasına eyer denir. Eyer noktası kararsızdır [15].

Tanım 1.1.15. $\forall n \geq -k$ için

$$x_{n+p} = x_n \quad (1.1.10)$$

olacak şekilde bir $p \geq 1$ tamsayısı varsa (1.1.5) denkleminin $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne periyodiktir ve periyodu da p dir denir [18].

Tanım 1.1.16. (1.1.10) denklemini sağlayan en küçük pozitif tamsayı p ise (1.1.5) denkleminin $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne p esas periyotlu periyodiktir denir [18].

Tanım 1.1.17. a_1, a_2 sabitler olmak üzere

$$x(n+2) + a_1x(n+1) + a_2x(n) = 0 \quad (1.1.11)$$

denkleminin 2. mertebeden, sabit katsayılı, homojen, lineer fark denklemi denir. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \quad (1.1.12)$$

şeklindedir.

Teorem 1.1.3. (1.1.12) denkleminin kökleri λ_1 ve λ_2 olsun. Bu taktirde c_1, c_2, a ve b sabitler olmak üzere

a) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ise (1.1.11) denkleminin çözümü

$$x(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n \quad (1.1.13)$$

dir.

b) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $\lambda_1 = \lambda_2$ ise (1.1.11) denkleminin çözümü

$$x(n) = c_1\lambda_1^n + c_2n\lambda_1^n \quad (1.1.14)$$

dir.

c) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ve $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ ise $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\theta = \arctan \frac{b}{a}$ olmak üzere (1.1.11)

denkleminin çözümü

$$x(n) = r^n (c_1 \cos(\theta n) + c_2 \sin(\theta n)) \quad (1.1.15)$$

dir [14].

$a_1, a_2, \dots, a_k$ sabitler olmak üzere

$$x(n+k) + a_1x(n+k-1) + \dots + a_{k-1}x(n+1) + a_kx(n) = 0 \quad (1.1.16)$$

k . mertebeden, sabit katsayılı, homojen, lineer fark denkleminin çözümü Teorem 1.1.3.'ün k . mertebeye genişletilmesiyle bulunur [14].

Tanım 1.1.18. $a_1, a_2, \dots, a_k$ sabitler olmak üzere

$$x(n+k) + a_1x(n+k-1) + \dots + a_{k-1}x(n+1) + a_kx(n) = g(n) \quad (1.1.17)$$

denkleminin k . mertebeden, sabit katsayılı, homojen olmayan, lineer fark denklemi denir.

Tanım 1.1.19. (1.1.17) denkleminin homojen kısmının çözümü $x_h(n)$ ve özel çözümü $x_p(n)$ olmak üzere

$$x(n) = x_h(n) + x_p(n) \quad (1.1.18)$$

çözümüne (1.1.17) denkleminin genel çözümü denir.

Teorem 1.1.4. (Annihilatör Metodu)

(1.1.17) denklemi

$$(E^k + a_1E^{k-1} + \dots + a_{k-1}E + a_k)x(n) = g(n) \quad (1.1.19)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan $g(n)$ sabit katsayılı, homojen, lineer bir fark denkleminin çözümü olsun. Yani

$$(E^m + b_1E^{m-1} + \dots + b_{m-1}E + b_m)g(n) = 0 \quad (1.1.20)$$

olsun. (1.1.19) denkleminin her iki tarafına $(E^m + b_1E^{m-1} + \dots + b_{m-1}E + b_m)$ operatörünü uygularsak

$$(E^m + b_1E^{m-1} + \dots + b_{m-1}E + b_m)(E^k + a_1E^{k-1} + \dots + a_{k-1}E + a_k)x(n) = 0 \quad (1.1.21)$$

şeklinde $(k+m)$. mertebeden, sabit katsayılı, homojen, lineer fark denklemi elde edilir ve Teorem 1.1.3.'den yararlanılarak çözüm bulunur. Burada $(E^m + b_1E^{m-1} + \dots + b_{m-1}E + b_m)$ ifadesine $g(n)$ 'nin annihilatörü veya yok edicisi denir [14].

Örnek 1.1.1.

$$x(n+2) + x(n+1) - 12x(n) = n2^n \quad (1.1.22)$$

denkleminin çözümünü bulalım.

Çözüm: (1.1.22) denkleminin homojen kısmı

$$x(n+2) + x(n+1) - 12x(n) = 0 \quad (1.1.23)$$

dır. (1.1.23)'ün karakteristik denklemi

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0 \quad (1.1.24)$$

dır. (1.1.24)'ün kökleri $\lambda_1 = -4$ ve $\lambda_2 = 3$ dür. Dolayısıyla (1.1.23)'ün çözümü

$$x_h(n) = c_1(-4)^n + c_2 3^n \quad (1.1.25)$$

şeklindedir. $n2^n$ 'nin annihilatörü $(E-2)^2$ dir. Çünkü;

$$\begin{aligned} (E-2)^2 n2^n &= (E-2)(E-2)n2^n \\ &= (E-2)((n+1)2^{n+1} - n2^{n+1}) \\ &= (E-2)2^{n+1} \\ &= 2^{n+2} - 2^{n+2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. (1.1.22) denklemi

$$(E+4)(E-3)x(n) = n2^n \quad (1.1.26)$$

şeklinde yazılır. (1.1.26) denkleminin her iki tarafına $(E-2)^2$ 'ni uygularsak

$$(E-2)^2 (E+4)(E-3)x(n) = 0 \quad (1.1.27)$$

elde edilir. (1.1.27)'nin karakteristik denkleminin kökleri $\mu_1 = \mu_2 = 2$, $\mu_3 = -4$ ve $\mu_4 = 3$ olduğundan denklemin çözümü

$$x_h(n) = c_3 2^n + c_4 n2^n + c_5 (-4)^n + c_6 3^n \quad (1.1.28)$$

dir. (1.1.25)'deki $x_h(n)$ ve (1.1.28)'deki $x_h(n)$ 'nin ortak terimleri $x_h(n)$ 'den çıkarılır ve geriye kalan terimler (1.1.22)'nin özel çözümü olarak alınır. Bu taktirde (1.1.22)'nin özel çözümü

$$x_p(n) = c_3 2^n + c_4 n2^n \quad (1.1.29)$$

şeklindedir. Daha sonra (1.1.29), (1.1.22)'de yerine yazılır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} x_p(n) &= c_3 2^n + c_4 n2^n \\ x_p(n+1) &= c_3 2^{n+1} + c_4 (n+1)2^{n+1} \\ x_p(n+2) &= c_3 2^{n+2} + c_4 (n+2)2^{n+2} \end{aligned} \quad (1.1.30)$$

olduğundan (1.1.30), (1.1.22)'de yerine yazılırsa

$$c_3 2^{n+2} + c_4 (n+2)2^{n+2} + c_3 2^{n+1} + c_4 (n+1)2^{n+1} - 12(c_3 2^n + c_4 n2^n) = n2^n$$

$$4c_3 + 4c_4 n + 8c_4 + 2c_3 + 2c_4 n + 2c_4 - 12c_3 - 12c_4 n = n$$

$$-6c_4n + (-6c_3 + 10c_4) = n$$

elde edilir. Buradan

$$-6c_4 = 1 \Rightarrow c_4 = -\frac{1}{6}$$

$$-6c_3 + 10c_4 = 0 \Rightarrow -6c_3 + 10\left(-\frac{1}{6}\right) = 0 \Rightarrow -6c_3 = \frac{5}{3} \Rightarrow c_3 = -\frac{5}{18}$$

bulunur. Dolayısıyla c_3 ve c_4 , (1.1.29)'da yerine yazıldığında (1.1.22)'nin özel çözümü

$$x_p(n) = -\frac{5}{18}2^n - \frac{1}{6}n2^n \quad (1.1.31)$$

şeklinde olur. O halde (1.1.22)'nin genel çözümü $x(n) = x_h(n) + x_p(n)$ olduğundan

$$x(n) = c_1(-4)^n + c_23^n - \frac{5}{18}2^n - \frac{1}{6}n2^n \quad (1.1.32)$$

şeklindedir.

Örnek 1.1.2.

$$x(n+2) + 4x(n) = 8(2)^n \cos \frac{n\pi}{2} \quad (1.1.33)$$

denkleminin çözümünü bulalım.

Çözüm: (1.1.33) denkleminin homojen kısmı

$$x(n+2) + 4x(n) = 0 \quad (1.1.34)$$

dır. (1.1.34)'ün karakteristik denklemi

$$\lambda^2 + 4 = 0 \quad (1.1.35)$$

dır. (1.1.34)'ün kökleri $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ dir. Burada

$$a = 0, b = 2 \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2 \text{ ve } \theta = \arctan \frac{b}{a} = \arctan \frac{2}{0} = \arctan \infty = \frac{\pi}{2}$$

olduğundan (1.1.34)'ün çözümü

$$x_h(n) = 2^n \left(c_1 \cos \frac{n\pi}{2} + c_2 \sin \frac{n\pi}{2} \right) \quad (1.1.36)$$

şeklindedir. $8(2)^n \cos \frac{n\pi}{2}$, nin annihilatörü $(E^2 + 4)$ dür. Çünkü;

$$(E^2 + 4)8(2)^n \cos \frac{n\pi}{2} = 8(2)^{n+2} \cos \frac{(n+2)\pi}{2} + 8(2)^{n+2} \cos \frac{n\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
(E^2 + 4)8(2)^n \cos \frac{n\pi}{2} &= 8(2)^{n+2} \left(\cos \frac{(n+2)\pi}{2} + \cos \frac{n\pi}{2} \right) \\
&= 8(2)^{n+2} \left(\cos \left(\frac{n\pi}{2} + \pi \right) + \cos \frac{n\pi}{2} \right) \\
&= 8(2)^{n+2} \left(-\cos \frac{n\pi}{2} + \cos \frac{n\pi}{2} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. (1.1.33) denklemi

$$(E^2 + 4)x(n) = 8(2)^n \cos \frac{n\pi}{2} \quad (1.1.37)$$

şeklinde yazılır. (1.1.37) denkleminin her iki tarafına $(E^2 + 4)$ 'ü uygularsak

$$(E^2 + 4)(E^2 + 4)x(n) = 0 \quad (1.1.38)$$

elde edilir. (1.1.38)'in karakteristik denkleminin kökleri $\mu_{1,2} = \mu_{3,4} = \pm 2i$ olduğundan denklemin çözümü

$$x_{h_1}(n) = 2^n \left(c_3 \cos \frac{n\pi}{2} + c_4 \sin \frac{n\pi}{2} \right) + n2^n \left(c_5 \cos \frac{n\pi}{2} + c_6 \sin \frac{n\pi}{2} \right) \quad (1.1.39)$$

dir. (1.1.36)'daki $x_h(n)$ ve (1.1.39)'daki $x_{h_1}(n)$ 'nin ortak terimleri $x_{h_1}(n)$ 'den çıkarılır ve geriye kalan terimler (1.1.33)'ün özel çözümü olarak alınır. Bu taktirde (1.1.33)'ün özel çözümü

$$x_p(n) = n2^n \left(c_5 \cos \frac{n\pi}{2} + c_6 \sin \frac{n\pi}{2} \right) \quad (1.1.40)$$

şeklindedir. Daha sonra (1.1.40), (1.1.33)'de yerine yazılır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
x_p(n) &= n2^n \left(c_5 \cos \frac{n\pi}{2} + c_6 \sin \frac{n\pi}{2} \right) \\
x_p(n+2) &= (n+2)2^{n+2} \left(c_5 \cos \frac{(n+2)\pi}{2} + c_6 \sin \frac{(n+2)\pi}{2} \right)
\end{aligned} \quad (1.1.41)$$

olduğundan (1.1.41), (1.1.33)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&(n+2)2^{n+2} \left(c_5 \cos \frac{(n+2)\pi}{2} + c_6 \sin \frac{(n+2)\pi}{2} \right) + 4n2^n \left(c_5 \cos \frac{n\pi}{2} + c_6 \sin \frac{n\pi}{2} \right) \\
&= 8(2)^n \cos \frac{n\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$-(n+2)c_5 \cos \frac{n\pi}{2} - (n+2)c_6 \sin \frac{n\pi}{2} + nc_5 \cos \frac{n\pi}{2} + nc_6 \sin \frac{n\pi}{2} = 2 \cos \frac{n\pi}{2}$$

$$-2c_5 \cos \frac{n\pi}{2} - 2c_6 \sin \frac{n\pi}{2} = 2 \cos \frac{n\pi}{2}$$

elde edilir. Buradan

$$-2c_5 = 2 \Rightarrow c_5 = -1$$

$$-2c_6 = 0 \Rightarrow c_6 = 0$$

bulunur. Dolayısıyla c_5 ve c_6 , (1.1.40)'da yerine yazıldığında (1.1.33)'ün özel çözümü

$$x_p(n) = -n2^n \cos \frac{n\pi}{2} \quad (1.1.42)$$

şeklinde olur. O halde (1.1.33)'ün genel çözümü

$$x_h(n) = 2^n \left(c_1 \cos \frac{n\pi}{2} + c_2 \sin \frac{n\pi}{2} \right) - n2^n \cos \frac{n\pi}{2} \quad (1.1.43)$$

şeklindedir.

1.2. Bazı Tanım ve Teoremler

Tanım 1.2.1. A bir matris olmak üzere $\det A = 0$ ise A 'ya singüler matris, $\det A \neq 0$ ise A 'ya nonsingüler matris denir [19].

Tanım 1.2.2. $v_1, v_2, \dots, v_n$ 'ler V vektör uzayında verilmiş vektörler olsun. Bu taktirde

a) $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörleri lineer bağımsızdır. $\Leftrightarrow a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$ olacak şekildeki $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $a_i = 0$ dır.

b) $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörleri lineer bağımlıdır. $\Leftrightarrow a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$ olacak şekildeki $\exists i = 1, 2, \dots, n$ için $a_i \neq 0$ dır.

Tanım 1.2.3. a reel veya kompleks bir sayı olmak üzere f , a 'nın bir komşuluğunda sonsuz sayıda türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots$$

serisine f 'nin a noktasındaki Taylor serisi denir [19].

Tanım 1.2.4.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{(x_1 - a_1)^{n_1} \dots (x_k - a_k)^{n_k}}{n_1! \dots n_k!} \left(\frac{\partial^{n_1 + \dots + n_k} f}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_k^{n_k}} \right) (a_1, \dots, a_k)$$

serisine f 'nin $(a_1, \dots, a_k)$ noktasındaki Taylor serisi denir [19].

Örnek 1.2.1. f 'nin (a, b) noktasındaki Taylor serisi

$$f(x, y) = f(a, b) + (x - a) f_x(a, b) + (y - b) f_y(a, b) + \frac{1}{2!} \left[(x - a)^2 f_{xx}(a, b) + 2(x - a)(y - b) f_{xy}(a, b) + (y - b)^2 f_{yy}(a, b) \right] + \dots$$

şeklindedir.

Tanım 1.2.5. (Vektör normu)

V , F reel veya kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Eğer $x \in V$ olmak üzere $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\|x\|$ 'e x vektörünün normu denir.

- 1) $\forall x \in V$ için, $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ dır.
- 2) $\forall x \in V$ ve $\forall \alpha \in F$ için, $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ dir.
- 3) $\forall x, y \in V$ için, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ dir.

Tanım 1.2.6. (Matris normu)

K reel veya kompleks sayılar kümesi ve $K^{m \times n}$ de elemanları K 'dan alınan m satır ve n sütundan oluşan bütün matrisleri içeren vektör uzayı olsun. Eğer $A \in K^{m \times n}$ olmak üzere $\|\cdot\|: K^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\|A\|$ 'ya A matrisinin normu denir [20].

- 1) $\forall A \in K^{m \times n}$ için, $\|A\| \geq 0$ ve $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ dır.
- 2) $\forall A \in K^{m \times n}$ ve $\forall \alpha \in K$ için, $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ dır.
- 3) $\forall A, B \in K^{m \times n}$ için, $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ dir.

Ayrıca $m = n$, yani matrisler kare matris ise

- 4) $\forall A, B \in K^{n \times n}$ için, $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ dir.

Tanım 1.2.7. K reel veya kompleks sayılar kümesi olsun. Eğer K^m ve K^n üzerindeki vektör normları verilmişse $K^{m \times n}$ matrislerin uzayı üzerinde aşağıdaki şekilde bir operatör normu tanımlanır:

$$\|A\| = \max \{ \|Ax\| : x \in K^n, \|x\| = 1 \} \text{ ve } \|A\| = \max \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in K^n, x \neq 0 \right\} \text{ dır [20].}$$

Tanım 1.2.8. K reel veya kompleks sayılar kümesi olsun. $A \in K^{m \times n}$ olmak üzere

1) $\|A\|_1 = \max \left\{ \sum_{i=1}^m |a_{ij}| : 1 \leq j \leq n \right\}$ normuna A matrisinin sütun normu denir. Yani A

matrisinin sütun normu matrisin sütun elemanlarının mutlak değerlerinin toplamalarının maksimumudur.

2) $\|A\|_\infty = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| : 1 \leq i \leq m \right\}$ normuna A matrisinin satır normu denir. Yani A

matrisinin satır normu matrisin satır elemanlarının mutlak değerlerinin toplamalarının maksimumudur [20].

Örnek: 1.2.2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

matrisinin sütun ve satır normlarını bulalım.

Çözüm:

$$\|A\|_1 = \max \{ (|2| + |-3| + |1| + |0|), (|-4| + |-1| + |2| + |-6|), (|2| + |5| + |-3| + |-1|), (|-1| + |2| + |-9| + |7|) \}$$

$$\|A\|_1 = \max \{ 6, 13, 11, 19 \} = 19$$

$$\|A\|_\infty = \max \{ (|2| + |-4| + |2| + |-1|), (|-3| + |-1| + |5| + |2|), (|1| + |2| + |-3| + |-9|), (|0| + |-6| + |-1| + |7|) \}$$

$$\|A\|_\infty = \max \{ 9, 11, 15, 14 \} = 15$$

bulunur.

Tanım 1.2.9. K reel veya kompleks sayılar kümesi olsun. $A \in K^{n \times n}$ olmak üzere $Ax = \lambda x$ denklemini sağlayan bir λ skaleri varsa sıfır olmayan x vektörüne A matrisinin özvektörü denir. λ skalerine de A matrisinin özdeğeri denir.

Tanım 1.2.10. K reel veya kompleks sayılar kümesi olsun. $A \in K^{n \times n}$ olmak üzere A matrisinin karakteristik polinomu $K_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ dır. Bu polinomun kökleri A matrisinin özdeğerlerini verir.

Tanım 1.2.11. K reel veya kompleks sayılar kümesi ve $A \in K^{n \times n}$ olsun. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$; A matrisinin reel veya kompleks özdeğerleri olsun. Buna göre $\rho(A) = \max \{|\lambda_i| : 1 \leq i \leq n\}$ 'ye A matrisinin spektral yarıçapı denir.

Teorem 1.2.1. $\rho(A)$ ve $\|A\|$, A matrisinin sırasıyla spektral yarıçapı ve normu olmak üzere $\rho(A) \leq \|A\|$ dır.

İspat: Tanım 1.2.11.'den $1 \leq k \leq n$ için,

$$\rho(A) = \max \{|\lambda_i| : 1 \leq i \leq n\} = |\lambda_k| \quad (1.2.1)$$

yazılır. A matrisinin herhangi bir λ_k özdeğerine karşılık gelen özvektörü x_k olsun.

Tanım 1.2.5. , Tanım 1.2.7. ve Tanım 1.2.9.'dan

$$|\lambda_k| \cdot \|x_k\| = \|\lambda_k \cdot x_k\| = \|A \cdot x_k\| \leq \|A\| \cdot \|x_k\| \text{ olduğundan}$$

$$|\lambda_k| \leq \|A\| \quad (1.2.2)$$

elde edilir. (1.2.1) ve (1.2.2) ifadelerinden $\rho(A) \leq \|A\|$ bulunur.

Tanım 1.2.12. A ve B , $n \times n$ tipinde kare matrisler olmak üzere eğer $A = PBP^{-1}$ olacak şekilde $n \times n$ tipinde tersinir bir P matrisi varsa A ve B matrislerine benzerdir denir.

Teorem 1.2.2. Bir A matrisi ile bu A matrisinin benzer matrisi aynı özdeğerlere sahiptir.

İspat: A matrisinin benzer matrisi PAP^{-1} şeklindeki bir matristir. O halde A ve

PAP^{-1} matrislerinin aynı özdeğerlere sahip olduğunu göstermemiz için $\det(PAP^{-1} - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$ olduğunu göstermeliyiz. $PP^{-1} = I$ ve λ bir skaler

olduğu için $\lambda I = PP^{-1}\lambda I = P\lambda IP^{-1}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\det(PAP^{-1} - \lambda I) &= \det(PAP^{-1} - P\lambda IP^{-1}) \\ &= \det(P(A - \lambda I)P^{-1}) \\ &= \det P \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det P^{-1} \\ &= \det(A - \lambda I) \cdot \det P \cdot \det P^{-1} \\ &= \det(A - \lambda I) \cdot \det(PP^{-1}) \\ &= \det(A - \lambda I) \cdot \det I \\ &= \det(A - \lambda I)\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Tanım 1.2.13. A bir lineer nokta kümesi olsun.

1) Eğer $\forall x \in A$ için $a \leq x$ olacak şekilde bir a reel sayısı varsa A kümesine alttan sınırlıdır ve a sayısına da A kümesinin bir alt sınırı denir. A kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne de A kümesinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir ve $\inf A$ ile gösterilir.

2) Eğer $\forall x \in A$ için $b \geq x$ olacak şekilde bir b reel sayısı varsa A kümesine üstten sınırlıdır ve b sayısına da A kümesinin bir üst sınırı denir. A kümesinin üst sınırlarının en küçüğüne de A kümesinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve $\sup A$ ile gösterilir.

Burada $\inf A$ ve $\sup A$, A 'nın elemanı olmak zorunda değildir.

Örnek 1.2.3. $A = \left\{ \frac{3n}{2n-7} : n \in \mathbb{N} \right\}$ kümelerinin varsa supremum ve infimumlarını bulalım.

Çözüm: $A = \left\{ -\frac{3}{5}, -2, -9, 12, 5, \frac{18}{5}, 3, \dots \right\}$ şeklindedir.

$\forall x \in A$ için $-9 \leq x$ olduğundan $\inf A = -9$ ve $12 \geq x$ olduğundan $\sup A = 12$ dir.

Örnek 1.2.4. $B = \{x : 1 < x < 2, x \in \mathbb{R}\}$ kümelerinin varsa supremum ve infimumlarını

bulalım.

Çözüm: $\forall x \in B$ için $1 \leq x$ olduğundan $\inf B = 1$ ve $2 \geq x$ olduğundan $\sup B = 2$ dir. Dikkat edelim ki $1, 2 \notin B$ dir.

Tanım 1.2.14. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|s_n| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı varsa (s_n) dizisine sınırlı dizi denir [21].

Tanım 1.2.15. $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $a(n) = a_n$ dizisi verilmiş olsun. $k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dizisi bir artan dizi olmak üzere

$$(a \circ k): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, (a \circ k)(n) = a(k(n)) = a(k_n) = a_{k_n}$$

bileşke fonksiyonuna (a_n) dizisinin bir alt dizisi denir [21].

Tanım 1.2.16. (s_{k_n}) , (s_n) dizisinin bir alt dizisi olsun. (s_{k_n}) yakınsak ve limiti s ise bu s ye limit noktası denir [21].

Örnek 1.2.5.

$$s_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ tek ise} \\ \frac{n}{n+1}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı (s_n) dizisinin limit noktalarının kümesini bulalım.

Çözüm: $(s_{2n-1}) = \left(\frac{1}{2n-1}\right) \rightarrow 0$ ve $(s_{2n}) = \left(\frac{2n}{2n+1}\right) \rightarrow 1$ dir. O halde limit noktalarının kümesi $\{0, 1\}$ dir.

Tanım 1.2.17. (s_n) reel terimli bir dizi ve C de (s_n) dizisinin alt dizilerinin limitlerinin kümesi olsun. C , genişletilmiş reel sayılar kümesinin bir alt kümesidir. $\sup C$ ve $\inf C$ genişletilmiş reel sayılarına sırasıyla (s_n) dizisinin üst limiti ve alt limiti denir. Üst limit; $\limsup s_n$ veya $\overline{\lim} s_n$, alt limit; $\liminf s_n$ veya $\underline{\lim} s_n$ ile gösterilir [21].

Teorem 1.2.3. (s_n) reel terimli bir dizi olsun. Bu taktirde,

$$\underline{\lim} s_n = \overline{\lim} s_n = s \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

dir [21].

İspat: $\Rightarrow$ (s_n) dizisinin bütün alt dizilerinin limitlerinin kümesi C olsun. Buna göre

Tanım 1.2.17.'den $\underline{\lim} s_n = \overline{\lim} s_n = s \Rightarrow \inf C = \sup C = s$ olur. $\inf C = s \Rightarrow \forall x \in C$ için $s \leq x$ ve $\sup C = s \Rightarrow \forall x \in C$ için $s \geq x$ dir. Buradan $x = s$ olup (s_n) dizisinin alt dizisi kendisi olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ elde edilir.

$\Leftarrow$: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ olsun. Dolayısıyla (s_n) dizisinin bütün alt dizileri de s 'ye yakınsaktır.

O halde (s_n) dizisinin bütün alt dizilerinin limitlerinin kümesi C ise $C = \{s\}$ dir.

Tanım 1.2.17.'den $\sup C = \inf C = s$ olduğundan $\underline{\lim} s_n = \overline{\lim} s_n = s$ elde edilir.

Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 1.2.6. $(s_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisinin $\limsup s_n$ ve $\liminf s_n$ değerlerini bulalım ve yakınsaklık durumunu belirleyelim.

Çözüm: $(s_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$ dizisinin kendisinden başka hiçbir alt dizisi belli bir değere yakınsamaz. $(s_n) = \left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$ olduğu için limit noktalarının kümesi $\{0\}$ dir.

Dolayısıyla $\limsup s_n = \liminf s_n = 0$ olduğundan Teorem 1.2.3.'den $\lim s_n = 0$ olacağından (s_n) dizisi yakınsaktır.

Örnek 1.2.7. $(s_n) = \left((-1)^n + \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 3}\right)$ dizisinin $\limsup s_n$ ve $\liminf s_n$ değerlerini

bulalım ve yakınsaklık durumunu belirleyelim.

Çözüm: n tek ise

$$(s_{2n-1}) = \left((-1)^{2n-1} + \frac{2(2n-1)^2 + 1}{(2n-1)^2 + 3}\right) = \left(-1 + \frac{8n^2 - 8n + 3}{4n^2 - 4n + 4}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1} = 1$$

dir. n çift ise

$$(s_{2n}) = \left((-1)^{2n} + \frac{2(2n)^2 + 1}{(2n)^2 + 3} \right) = \left(1 + \frac{8n^2 + 1}{4n^2 + 3} \right)$$

$$\Rightarrow \lim s_{2n} = 3$$

dür. O halde limit noktalarının kümesi $C = \{1, 3\}$ olduğundan $\limsup s_n = \sup C = 3$ ve $\liminf s_n = \inf C = 1$ dir. Bu taktirde $\limsup s_n \neq \liminf s_n$ olduğundan Teorem 1.2.3.'den (s_n) dizisi yakınsak değildir.

Tanım 1.2.18. Bir a reel sayısı bir $A \subset \mathbb{R}$ cümlesinin yığılma noktasıdır. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için, $\exists x \in A$ $\ni x \neq a$ ve $|x - a| < \varepsilon$ dur. Yani bir a noktasının her ε komşuluğunda A cümlesinin a 'dan farklı en az bir elemanı varsa, a elemanına A cümlesinin bir yığılma noktasıdır denir. Ayrıca yığılma noktası cümleye ait olmak zorunda değildir.

Örnek 1.2.8. $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesinin yığılma noktasını bulalım.

Çözüm: $A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$ şeklindedir. A 'nın yığılma noktası 0 dir. Çünkü; 0 'ın $(-\varepsilon, \varepsilon)$ komşuluğunda A 'nın 0 'dan farklı sonsuz tane elemanı vardır. Ayrıca $0 \notin A$ dir.

Tanım 1.2.19. 1) Bir A kümesinin en sağda olan yığılma noktasına üst limit veya limit superior denir ve $\limsup A$ veya $\overline{\lim} A$ şeklinde gösterilir.

2) Bir A kümesinin en solda olan yığılma noktasına alt limit veya limit inferior denir ve $\liminf A$ veya $\underline{\lim} A$ şeklinde gösterilir [22].

Teorem 1.2.4. Bir A lineer nokta kümesi için $\inf A \leq \underline{\lim} A \leq \overline{\lim} A \leq \sup A$ dır [22].

İspat: $\inf A = g$, $\underline{\lim} A = m$, $\sup A = G$ ve $\overline{\lim} A = M$ olsun. Bu taktirde teoremin ispatı için $g \leq m \leq M \leq G$ olduğunu göstermeliyiz.

i) $g \leq m$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $m < g$ olsun. $g = \inf A$ olduğundan Tanım 1.2.13.'den $\forall x \in A$ için $g \leq x$ dir. $m = \underline{\lim} A = \liminf A$ olduğundan Tanım

1.2.19.'dan m , A nın en soldaki yığılma noktasıdır. Yani $\forall \varepsilon > 0$ için, $\exists y \in A$ $y \neq m$ ve $|y - m| < \varepsilon$ dur. Buradan $m - \varepsilon < y < m + \varepsilon$ olduğu görülür Diğer taraftan

$m < g \Rightarrow g - m > 0$ olduğundan $\varepsilon = \frac{g - m}{2} > 0$ seçelim. Bu taktirde

$$m - \frac{g - m}{2} < y < m + \frac{g - m}{2} \Rightarrow \frac{3m - g}{2} < y < \frac{m + g}{2} \Rightarrow y < \frac{g + g}{2} \Rightarrow y < g$$

olacak şekilde $\exists y \in A$ mevcuttur. Bu durum $g = \inf A$ olmasıyla çelişir. Çünkü; $\forall x \in A$ için $g \leq x$ idi. Fakat $y < g$ olacak şekilde bir $y \in A$ elde ettik. Dolayısıyla $g \leq m$ dir.

ii) $m \leq M$ olduğunu gösterelim. $m = \underline{\lim} A = \liminf A$ olduğundan Tanım 1.2.19.'dan m , A nın en soldaki yığılma noktasıdır ve $M = \overline{\lim} A = \limsup A$ olduğundan M , A nın en sağdaki yığılma noktasıdır. Dolayısıyla $m \leq M$ dir.

iii) $M \leq G$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $M > G$ olsun. $G = \sup A$ olduğundan Tanım 1.2.13.'den $\forall x \in A$ için $G \geq x$ dir. $M = \overline{\lim} A = \limsup A$ olduğundan Tanım 1.2.19.'dan M , A nın en sağdaki yığılma noktasıdır. Yani $\forall \varepsilon > 0$ için, $\exists z \in A$ $z \neq M$ ve $|z - M| < \varepsilon$ dur. Buradan $M - \varepsilon < z < M + \varepsilon$ olduğu görülür. Diğer taraftan

$M > G \Rightarrow M - G > 0$ olduğundan $\varepsilon = \frac{M - G}{2} > 0$ seçelim. Bu taktirde

$$M - \frac{M - G}{2} < z < M + \frac{M - G}{2} \Rightarrow \frac{M + G}{2} < z < \frac{3M - G}{2} \Rightarrow \frac{G + G}{2} < z \Rightarrow G < z$$

olacak şekilde $\exists z \in A$ mevcuttur. Bu durum $G = \sup A$ olmasıyla çelişir. Çünkü; $\forall x \in A$ için $G \geq x$ idi. Fakat $G < z$ olacak şekilde bir $z \in A$ elde ettik. Dolayısıyla $M \leq G$ dir.

O halde i), ii) ve iii) şıklarından $g \leq m \leq M \leq G$ elde ederiz ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

2. BÖLÜM

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEM SİSTEMLERİNE KISA BAKIŞ

Bu bölümde ilk olarak lineer fark denklem sistemi göz önüne alınacak ve bunların çözümleri ile kararlılık analizleri kısaca irdelenecektir. Daha sonra lineer olmayan bir fark denklem sistemi lineerleştirilerek kararlılık analizinin nasıl yapılacağı gösterilecektir. Bu yöntem sonraki bölümler için bir hareket noktası oluşturacaktır.

2.1. Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklem Sistemlerinin Çözümleri

$1 \leq i, j \leq k$ için a_{ij} ler sabitler olmak üzere $n = a, a+1, a+2, \dots$ için

$$\begin{aligned}x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \dots + a_{1k}x_k(n) \\x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \dots + a_{2k}x_k(n) \\&\vdots \\x_k(n+1) &= a_{k1}x_1(n) + a_{k2}x_2(n) + \dots + a_{kk}x_k(n)\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

şeklinde tanımlı sisteme sabit katsayılı lineer fark denklem sistemi denir.

(2.1.1) sistemi

$$x(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_k(n) \end{bmatrix} \text{ ve } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$
$$x(n+1) = Ax(n)\tag{2.1.2}$$

vektör denklemini şeklinde de gösterilebilir.

Teorem 2.1.1. (Cayley-Hamilton Teoremi)

Her kare matris kendi karakteristik denklemini sağlar. Yani

$$p(A) = \prod_{i=1}^k (A - \lambda_i I)$$

dir [18].

Teorem 2.1.2. (Putzer Algoritması)

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$; A 'nın özdeğerleri olsun.

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= I \\ M_i &= (A - \lambda_i I) M_{i-1}, \quad (1 \leq i \leq k-1) \\ M_k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1.3)$$

ve

$$\begin{bmatrix} c_1(n+1) \\ c_2(n+1) \\ c_3(n+1) \\ \vdots \\ c_k(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1(n) \\ c_2(n) \\ c_3(n) \\ \vdots \\ c_k(n) \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} c_1(0) \\ c_2(0) \\ c_3(0) \\ \vdots \\ c_k(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.4)$$

olmak üzere x_0 başlangıç vektörüyle verilen $x(n+1) = Ax(n)$ sisteminin çözümü

$$x(n) = \left(\sum_{i=0}^{k-1} c_{i+1}(n) M_i \right) x_0 = A^n x_0 \quad (2.1.5)$$

şeklindedir [14].

Örnek 2.1.1.

$$x(n+1) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} x(n), \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} \quad (2.1.6)$$

sisteminin çözümünü bulalım.

Çözüm:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ matrisinin karakteristik denklemi}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -4 \\ 0 & 1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ dır.}$$

Buradan

$$(4-\lambda)\{(2-\lambda)(6-\lambda)+4\}=0$$

$$(4-\lambda)\{12-2\lambda-6\lambda+\lambda^2+4\}=0$$

$$(4-\lambda)\{\lambda^2-8\lambda+16\}=0$$

$$(4-\lambda)(\lambda-4)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=4$$

elde edilir. Diğer taraftan $k=3$ olduğundan (2.1.3)'den

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= I \\ M_1 &= (A - \lambda_1 I) M_0 = A - 4I \\ M_2 &= (A - \lambda_2 I) M_1 = (A - 4I)(A - 4I) \end{aligned} \right\} \quad (2.1.7)$$

olur. (2.1.7)'den

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ M_1 &= \begin{bmatrix} 4-4 & 1 & 2 \\ 0 & 2-4 & -4 \\ 0 & 1 & 6-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ M_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.8)$$

bulunur. (2.1.4) göz önüne alınırsa

$$\begin{bmatrix} c_1(n+1) \\ c_2(n+1) \\ c_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1(n) \\ c_2(n) \\ c_3(n) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c_1(0) \\ c_2(0) \\ c_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.9)$$

olur. (2.1.9)'daki üç ayrı denklem başlangıç koşulları için çözülürse,

i) $c_1(n+1) - 4c_1(n) = 0$, $c_1(0) = 1$ ifadesi için

$$(E - 4)c_1(n) = 0 \Rightarrow \lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 4 \text{ olup } \alpha_1 \text{ sabit olmak üzere}$$

$c_1(n) = \alpha_1 4^n$, $c_1(0) = 1$ elde edilir. Buradan $c_1(0) = \alpha_1 = 1$ olup denklemin çözümü

$$c_1(n) = 4^n \quad (2.1.10)$$

olarak bulunur.

ii) $c_2(n+1) = c_1(n) + 4c_2(n)$, $c_2(0) = 0$ ifadesi için

$$c_2(n+1) - 4c_2(n) = 4^n, \quad c_2(0) = 0$$

$$(E - 4)c_2(n) = 0 \Rightarrow \lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 4$$

$$(c_2)_h = \beta_1 4^n$$

$$(E - 4)c_2(n) = 4^n$$

$$(E - 4)^2 c_2(n) = (E - 4)4^n = 4^{n+1} - 4^{n+1} = 0$$

$$(c_2)_{h_1} = \beta_2 n 4^n + \beta_3 4^n$$

olarak bulunur. $\beta_3 4^n$, $(c_2)_h$ çözümünün içinde olduğundan $(c_2)_p = \beta_2 n 4^n$ alınır ve

denklemden yerine yazılırsa

$$\beta_2(n+1)4^{n+1} - 4\beta_2 n 4^n = 4^n$$

$$\beta_2(n+1)4 - 4\beta_2 n = 1$$

$$4\beta_2 = 1 \Rightarrow \beta_2 = \frac{1}{4}$$

$$(c_2)_p = \frac{1}{4} n 4^n$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$c_2(n) = \beta_1 4^n + \frac{1}{4} n 4^n, \quad c_2(0) = 0$$

$$0 = \beta_1 4^0 + \frac{1}{4} \cdot 0 \cdot 4^0 \Rightarrow \beta_1 = 0$$

olduğu görülür. Buradan denklemin çözümü

$$c_2(n) = n 4^{n-1} \quad (2.1.11)$$

olarak bulunur.

iii) $c_3(n+1) = c_2(n) + 4c_3(n)$, $c_3(0) = 0$ ifadesi için

$$c_3(n+1) - 4c_3(n) = n 4^{n-1}, \quad c_3(0) = 0$$

$$(c_3)_h = \omega_1 4^n$$

$$(E - 4)c_3(n) = n 4^{n-1}$$

$$(E - 4)^3 c_3(n) = (E - 4)^2 n 4^{n-1}$$

$$= (E^2 - 8E + 16) n 4^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
(E-4)^3 c_3(n) &= (n+2)4^{n+1} - 8(n+1)4^n + 16n4^{n-1} \\
&= n4^{n+1} + 2 \cdot 4^{n+1} - 8n4^n - 8 \cdot 4^n + 16n4^{n-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$(c_3)_{h_1} = \omega_2 n^2 4^n + \omega_3 n 4^n + \omega_4 4^n$$

olarak bulunur. $\omega_4 4^n$, $(c_3)_h$ çözümünün içinde olduğundan $(c_3)_p = \omega_2 n^2 4^n + \omega_3 n 4^n$

alınır ve denklemde yerine yazılırsa

$$\omega_2 (n+1)^2 4^{n+1} + \omega_3 (n+1) 4^{n+1} - 4\omega_2 n^2 4^n - 4\omega_3 n 4^n = n 4^{n-1}$$

$$\omega_2 n^2 4^{n+1} + 2\omega_2 n 4^{n+1} + \omega_2 4^{n+1} + \omega_3 n 4^{n+1} + \omega_3 4^{n+1} - \omega_2 n^2 4^{n+1} - \omega_3 n 4^{n+1} = n 4^{n-1}$$

$$8\omega_2 n 4^n + 4\omega_2 4^n + 4\omega_3 4^n = \frac{1}{4} n 4^n$$

$$8\omega_2 n + 4\omega_2 + 4\omega_3 = \frac{1}{4} n$$

$$8\omega_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{32} \quad \text{ve} \quad 4\omega_2 + 4\omega_3 = 0 \Rightarrow \omega_3 = -\omega_2 \Rightarrow \omega_3 = -\frac{1}{32}$$

$$(c_3)_p = \frac{1}{32} n^2 4^n - \frac{1}{32} n 4^n$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$c_3(n) = \omega_1 4^n + \frac{1}{32} n^2 4^n - \frac{1}{32} n 4^n, \quad c_3(0) = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 0$$

olduğu görülür. Buradan denklemin çözümü

$$c_3(n) = \frac{1}{32} n^2 4^n - \frac{1}{32} n 4^n = \frac{n(n-1)}{2} 4^{n-2} \quad (2.1.12)$$

olarak bulunur.

Teorem 2.1.2.'den (2.1.6) sisteminin çözümü

$$\begin{aligned}
x(n) &= \left(\sum_{i=0}^2 c_{i+1}(n) M_i \right) x_0 \\
&= (c_1(n) M_0 + c_2(n) M_1 + c_3(n) M_2) x_0 \\
&= \left(4^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + n 4^{n-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} 4^{n-2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(n) &= \begin{bmatrix} 4^n & n4^{n-1} & 2n4^{n-1} \\ 0 & 4^n - 2n4^{n-1} & -n4^n \\ 0 & n4^{n-1} & 4^n + 2n4^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4^n x_1(0) + n4^{n-1} x_2(0) + 2n4^{n-1} x_3(0) \\ (4^n - 2n4^{n-1}) x_2(0) - n4^n x_3(0) \\ n4^{n-1} x_2(0) + (4^n + 2n4^{n-1}) x_3(0) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

2.2. Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklem Sistemlerinin Kararlılığı

Bu bölümde A nonsingüler bir matris olmak üzere

$$u(n+1) = Au(n) \quad (2.2.1)$$

şeklindeki 2 boyutlu sistemin çözümlerinin davranışları incelenecektir.

Teorem 2.2.1. A , 2×2 tipinde reel terimli bir matris olsun. Bu taktirde bir P reel matrisi vardır öyle ki

$$A = PJP^{-1}$$

şeklindedir. J 'ye A 'nın Jordan formu denir. Burada

a) Eğer A , lineer bağımsız özvektörleri ile verilen λ_1 ve λ_2 şeklinde reel özdeğerlere sahipse

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

b) Eğer A , tek lineer bağımsız özvektörü ile verilen λ şeklinde tek reel özdeğere sahipse

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

c) Eğer A , $\alpha \pm i\beta$ şeklinde kompleks özdeğerlere sahipse

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

şeklindedir [14].

İspat: a) A 'nın λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen lineer bağımsız özvektörleri sırasıyla v^1 ve v^2 olsun. $P = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 \end{bmatrix}$ 'yi 1. sütun vektörü v^1 ve 2. sütun vektörü v^2 ile verilen 2×2 tipinde bir matris olarak tanımlayalım. v^1 ve v^2 lineer bağımsız olduklarından $\det P \neq 0$ olup P nonsingüler bir matristir ve P matrisinin tersi olan P^{-1} matrisi vardır. Bu taktirde

$$\begin{aligned} AP &= A \begin{bmatrix} v^1 & v^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Av^1 & Av^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 v^1 & \lambda_2 v^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v^1 & v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur . Buradan

$$APP^{-1} = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$A = PJP^{-1}$$

elde edilir.

b) A 'nın tek λ özdeğerine karşılık gelen tek bağımsız özvektörü v^1 olsun.

ω , v^1 ' den bağımsız olan $\mathbb{R}^2$ ' de bir vektör olsun. Yani ω , 2×1 tipinde bir sütun vektörü olsun. Cayley Hamilton Teoreminden $(A - \lambda I)(A - \lambda I)\omega = 0$ dir. $c \neq 0$ olmak üzere

$$(A - \lambda I)\omega = cv^1 \quad (2.2.2)$$

dir. $v^2 = c^{-1}\omega$ olarak tanımlayalım ve bu eşitliği (2.2.2)'de yerine yazalım. Buradan

$$(A - \lambda I)cv^2 = cv^1$$

$$(A - \lambda I)v^2 = v^1$$

$$Av^2 = \lambda v^2 + v^1$$

bulunur. Ayrıca $P = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 \end{bmatrix}$ nonsingüler bir matris olur ve P matrisinin tersi olan

P^{-1} matrisi vardır. Bu taktirde

$$\begin{aligned} AP &= A \begin{bmatrix} v^1 & v^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Av^1 & Av^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$AP = \begin{bmatrix} Av^1 & \lambda v^2 + v^1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v^1 & v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan

$$APP^{-1} = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$A = PJP^{-1}$$

elde edilir.

c) A 'nın $\alpha \pm i\beta$ özdeğerlerine karşılık gelen lineer bağımsız özvektörleri, v^1 ve v^2 reel lineer bağımsız vektörler olmak üzere sırasıyla $v^1 \pm iv^2$ olsun. Özdeğerlerin tanımından

$$A(v^1 + iv^2) = (\alpha + i\beta)(v^1 + iv^2)$$

$$Av^1 + iAv^2 = \alpha v^1 - \beta v^2 + i(\beta v^1 + \alpha v^2)$$

bulunur. Buradan

$$Av^1 = \alpha v^1 - \beta v^2$$

$$Av^2 = \beta v^1 + \alpha v^2$$

elde edilir. Ayrıca $P = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 \end{bmatrix}$ nonsingüler bir matris olur ve P matrisinin tersi olan

P^{-1} matrisi vardır. Bu takdirde

$$AP = A \begin{bmatrix} v^1 & v^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Av^1 & Av^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha v^1 - \beta v^2 & \beta v^1 + \alpha v^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v^1 & v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan

$$APP^{-1} = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$A = PJP^{-1}$$

elde edilir.

Sonuç 2.2.1. Teorem 2.2.1.'den

$$u(n+1) = Au(n)$$

$$u(n+1) = PJP^{-1}u(n)$$

$$P^{-1}u(n+1) = JP^{-1}u(n)$$

yazılır. $w(n) = P^{-1}u(n)$ dersek

$$w(n+1) = Jw(n) \quad (2.2.3)$$

sistemi elde edilir. Eğer (2.2.1) sisteminin başlangıç şartı $u(0) = u_0$ ise (2.2.3) sisteminin başlangıç şartı $w(0) = w_0 = P^{-1}u_0$ dır. (2.2.1) ve (2.2.3) sistemlerinin denge noktalarının çeşidi ve göstermiş oldukları kararlılık durumları aynıdır. (2.2.1) sisteminin çözümlerinin davranışı A 'nın özdeğerlerinin durumuna göre değişir. Şimdi bu durumları inceleyelim.

A 'nın λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen lineer bağımsız özvektörleri sırasıyla v^1 ve v^2 olsun.

Durum 1a: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$ (Kararlı düğüm)

(2.2.1) sisteminin çözümleri $u(n) = c_1\lambda_1^n v^1 + c_2\lambda_2^n v^2$ şeklindedir.

Eğer $c_1 = 0$ ise $n \rightarrow \infty$ iken v^2 'yi içeren hat boyunca $u(n) \rightarrow 0$ olur. (Şekil 2.1.'de $\{x_i\}$ ve $\{y_i\}$ dizileri olarak gösterilmiştir.)

Eğer $c_2 = 0$ ise $n \rightarrow \infty$ iken v^1 'i içeren hat boyunca $u(n) \rightarrow 0$ olur. (Şekil 2.1.'de $\{v_i\}$ ve $\{\omega_i\}$ dizileri olarak gösterilmiştir.)

İkinci bir yol olarak Sonuç 2.2.1.'den

$$w(n+1) = Jw(n)$$

$$w(n+1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} w(n)$$

dir. Buradan

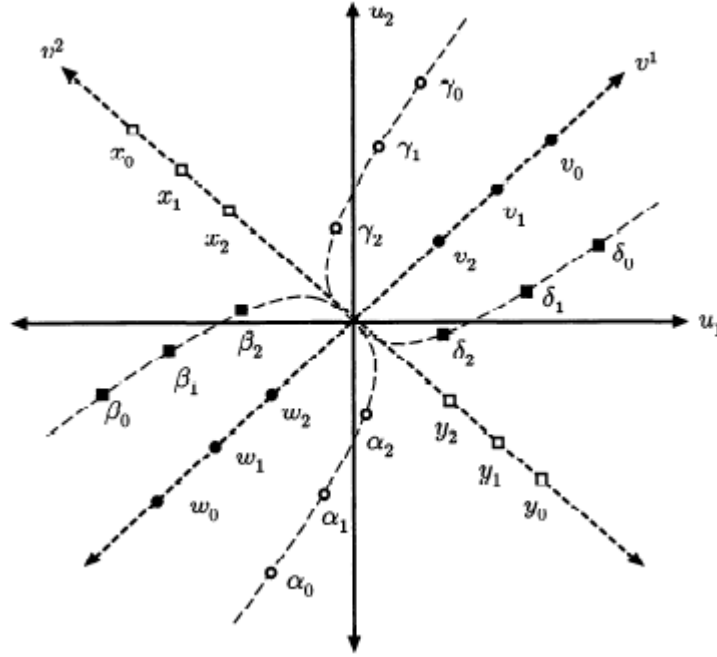
$$w_1(n+1) = \lambda_1 w_1(n)$$

$$w_2(n+1) = \lambda_2 w_2(n)$$

olup

$$\left. \begin{aligned} w_1(n) &= c_1 \lambda_1^n \\ w_2(n) &= c_2 \lambda_2^n \end{aligned} \right\} \Rightarrow w(n) = c_1 \lambda_1^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \lambda_2^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.4)$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.2.4) sistemi c_1 ve c_2 'nin durumlarına göre incelenirse aynı sonuca ulaşılır. (Şekil 2.1.)



Şekil 2.1. Kararlı düğüm

Durum 1b: $0 < \lambda < 1$

Sonuç 2.2.1.'den

$$w(n+1) = Jw(n)$$

$$w(n+1) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} w(n)$$

yazılır ve bu sistemin çözümü

$$\begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right)^n \begin{bmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan

$$w_1(n) = \lambda^n w_1(0) + n \lambda^{n-1} w_2(0)$$

$$w_2(n) = \lambda^n w_2(0)$$

olduğu görülür.

$n \rightarrow \infty$ iken bütün çözümler orijine yaklaşıyor ve Şekil 2.1.'deki benzer durum

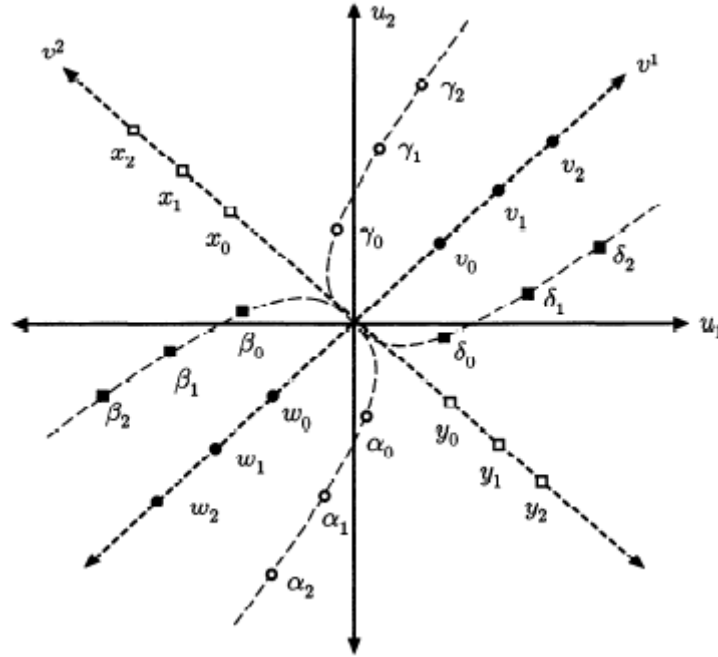
oluşur. Fakat bu kez paraboller yerine doğrular vardır.

Durum 2: $1 < \lambda_1 < \lambda_2$ (Kararsız düğüm)

(2.2.1) sisteminin çözümü $u(n) = c_1 \lambda_1^n v^1 + c_2 \lambda_2^n v^2$ şeklindedir.

Eğer $c_1 = 0$ ise $n \rightarrow \infty$ iken $\lambda_2 > 1$ olduğundan $u(n) = c_2 \lambda_2^n v^2 \rightarrow \infty$ olup v^2 ekseninde başlayan çözümler bu eksen boyunca orijinden dışa doğru hareket eder. (Şekil 2.2.'de $\{x_i\}$ ve $\{y_i\}$ dizileri olarak gösterilmiştir.)

Eğer $c_2 = 0$ ise $n \rightarrow \infty$ iken $\lambda_1 > 1$ olduğundan $u(n) = c_1 \lambda_1^n v^1 \rightarrow \infty$ olup v^1 ekseninde başlayan çözümler bu eksen boyunca orijinden dışa doğru hareket eder. (Şekil 2.2.'de $\{v_i\}$ ve $\{w_i\}$ dizileri olarak gösterilmiştir.)



Şekil 2.2. Kararsız düğüm

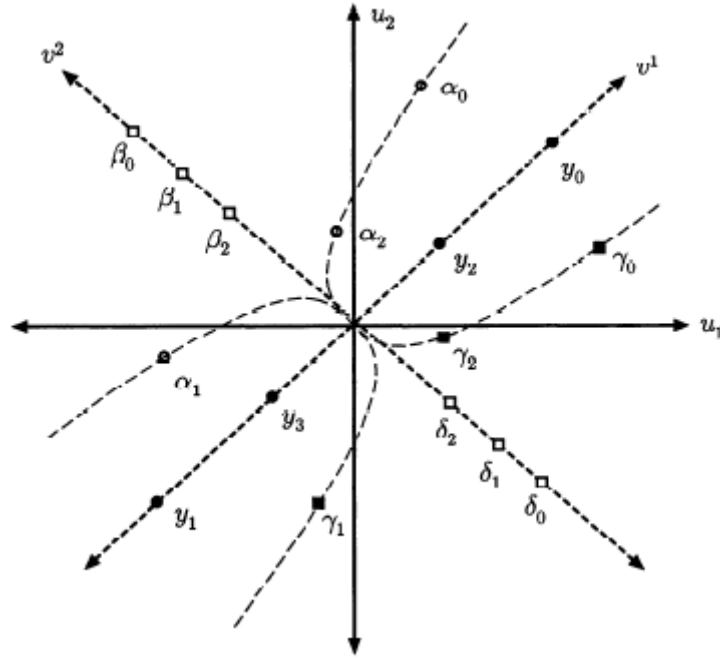
Durum 3: $-1 < \lambda_1 < 0 < \lambda_2 < 1$ (Yansımali kararlı düğüm)

(2.2.1) sisteminin çözümleri $u(n) = c_1 \lambda_1^n v^1 + c_2 \lambda_2^n v^2$ şeklindedir.

Eğer $c_1 = 0$ ise $n \rightarrow \infty$ iken v^2 'yi içeren hat boyunca $u(n) \rightarrow 0$ olur. (Şekil 2.3.'de $\{\delta_i\}$ ve $\{\beta_i\}$ dizileri olarak gösterilmiştir.)

Eğer $c_2 = 0$ ise $n \rightarrow \infty$ iken v^1 'i içeren hat boyunca $u(n) \rightarrow 0$ olur. λ_1^n 'nin işareti n 'nin tek ve çift olma durumlarına göre değiştiği için v^1 hattı boyunca sıçrama yapar.

(Şekil 2.3.'de $\{y_i\}$ dizisi olarak gösterilmiştir.)



Şekil 2.3. Yansımali kararlı düğüm

Durum 4: $\lambda_1 < -1 < 1 < \lambda_2$ (Yansımali kararsız düğüm)

(2.2.1) sisteminin çözümleri $u(n) = c_1 \lambda_1^n v^1 + c_2 \lambda_2^n v^2$ şeklindedir.

Eğer $c_1 = 0$ ise $n \rightarrow \infty$ iken v^2 ' yi içeren hat boyunca $u(n) \rightarrow \infty$ olur. (Şekil 2.4.'de $\{\delta_i\}$ ve $\{\beta_i\}$ dizileri olarak gösterilmiştir.)

Eğer $c_2 = 0$ ise $n \rightarrow \infty$ iken v^1 ' i içeren hat boyunca $u(n) \rightarrow \infty$ olur. λ_1^n ' nin işareti n ' nin tek ve çift olma durumlarına göre değiştiği için v^1 hattı boyunca sıçrama yapar. (Şekil 2.4.'de $\{y_i\}$ dizisi olarak gösterilmiştir.)

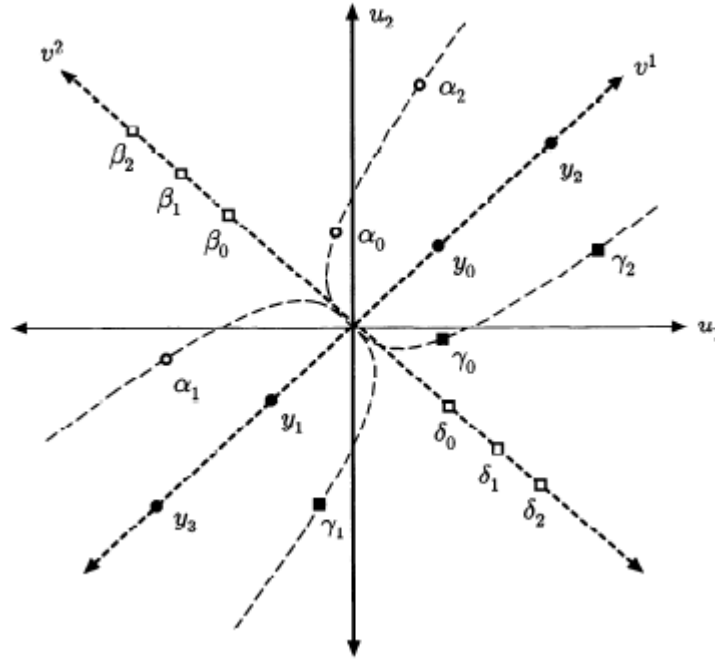
Şimdi özdeğerlerin kompleks olduklarını kabul edelim. Bu taktirde sistemin Jordan formunu aşağıdaki gibi düzenlersek

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ için $|\lambda| = r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ olmak üzere

$$\alpha = r \cos \theta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \theta$$

$$\beta = r \sin \theta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin \theta$$

yazılır.



Şekil 2.4. Yansımali kararsız düğüm

Diğer taraftan Teorem 2.2.1. c)'den

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \theta & \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin \theta \\ -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin \theta & \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$J = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = |\lambda| \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$J = |\lambda| R_\theta$$

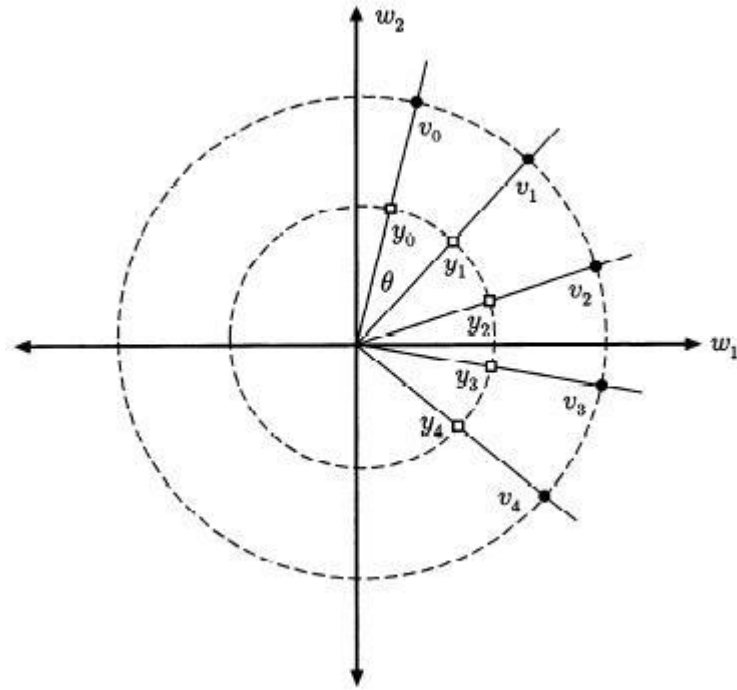
olur. Buradaki R_θ , θ radyan açısıyla saat yönünde düzlemde vektörleri döndürdüğü için rotasyon matrisi olarak adlandırılır.

Durum 5: $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (Merkez)

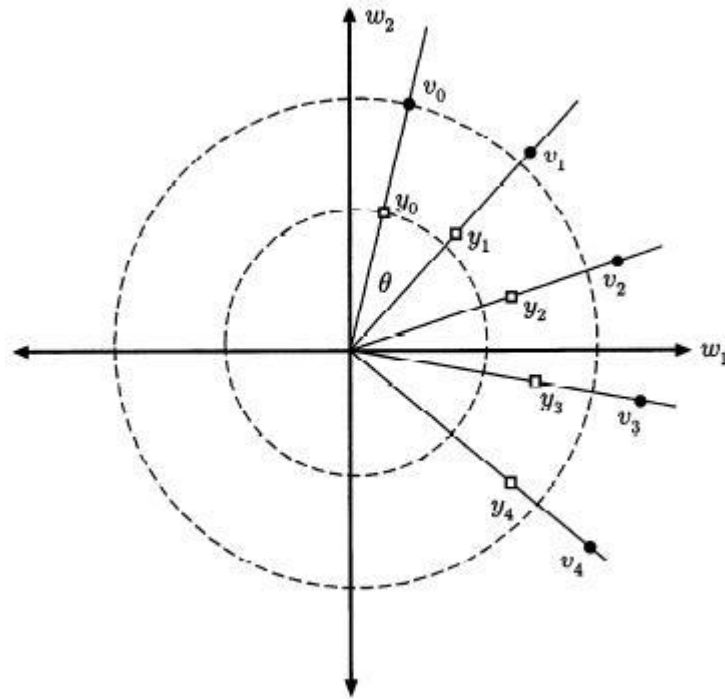
Bu durumda $J = R_\theta$ olup çözümler merkezi orijinde olan bir daire etrafında saat yönünde hareket ederek oluşur. (Şekil 2.5.)

Durum 6: $\alpha^2 + \beta^2 > 1$ (Kararsız spiral)

Bu durumda $J = |\lambda| R_\theta$ ve $|\lambda| > 1$ olduğu için çözümler orijinden uzağa doğru saat yönünde hareket ederek kararsız bir spiral oluşturur. (Şekil 2.6.)



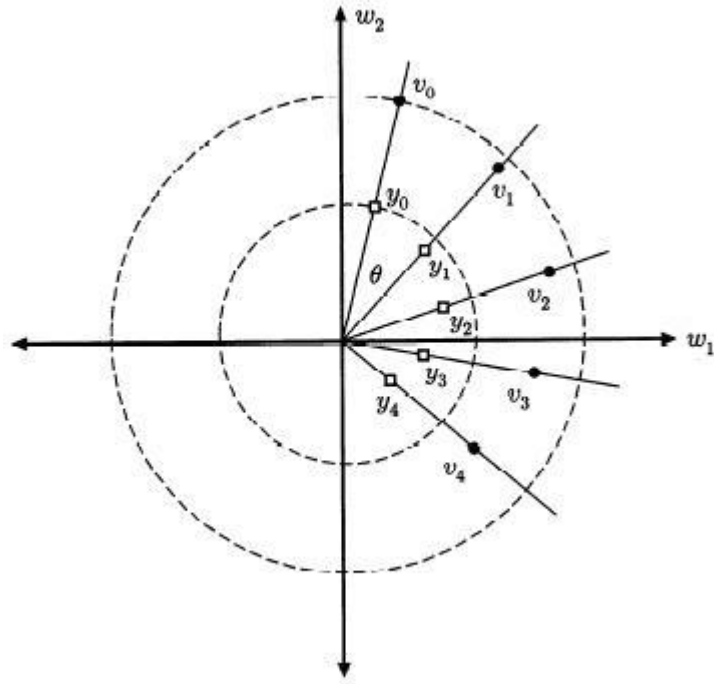
Şekil 2.5. Merkez



Şekil 2.6. Kararsız spiral

Durum 7: $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ (Kararlı spiral)

Bu durumda $J = |\lambda| R_\theta$ ve $|\lambda| < 1$ olduğu için çözümler orijine doğru saat yönünde hareket ederek kararlı bir spiral oluşturur. (Şekil 2.7.)



Şekil 2.7. Kararlı spiral

Durum 8: $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ (Eyer)

Sonuç 2.2.1.'den

$$w(n) = c_1 \lambda_1^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \lambda_2^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

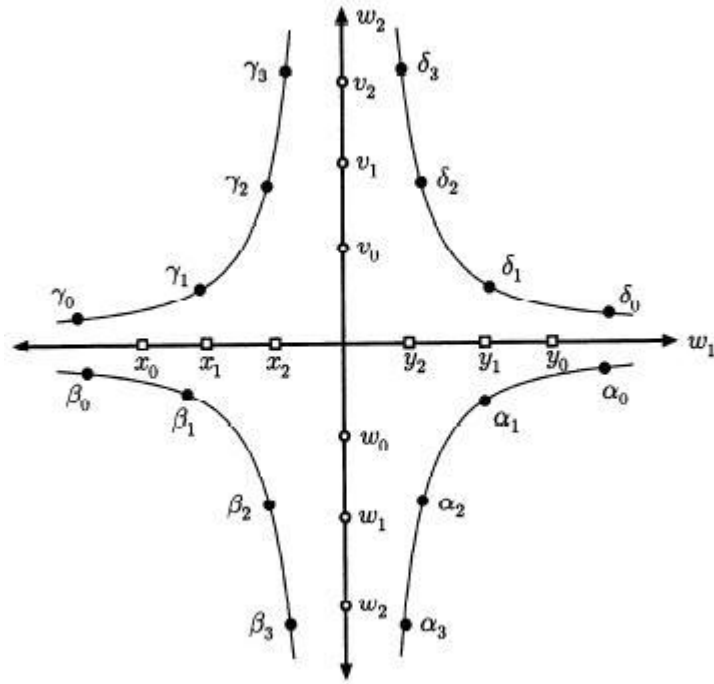
Eğer $c_1 = 0$ ise $n \rightarrow \infty$ iken $\lambda_2 > 1$ olduğundan $w(n) = c_2 \lambda_2^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \infty$ olup düşey eksen üzerinde başlayan çözümler bu eksen boyunca orijinden dışa doğru hareket eder. (Şekil 2.8.'de $\{v_i\}$ ve $\{\omega_i\}$ dizileri olarak gösterilmiştir.)

Eğer $c_2 = 0$ ise $n \rightarrow \infty$ iken $0 < \lambda_1 < 1$ olduğundan $w(n) = c_1 \lambda_1^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 0$ olup yatay

eksen üzerinde başlayan çözümler bu eksen boyunca orijine doğru hareket eder. (Şekil 2.8.'de $\{x_i\}$ ve $\{y_i\}$ dizileri olarak gösterilmiştir.)

$c_1, c_2 \neq 0$ ise $n \rightarrow \infty$ iken $w(n) \rightarrow c_2 \lambda_2^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ olup diğer çözümler düşey eksene yaklaşır.

(Şekil 2.8.)



Şekil 2.8. Eyer

Durum 9: $-1 < \lambda_1 < 0 < 1 < \lambda_2$ (Yansımali eyer)

Sonuç 2.2.1.'den

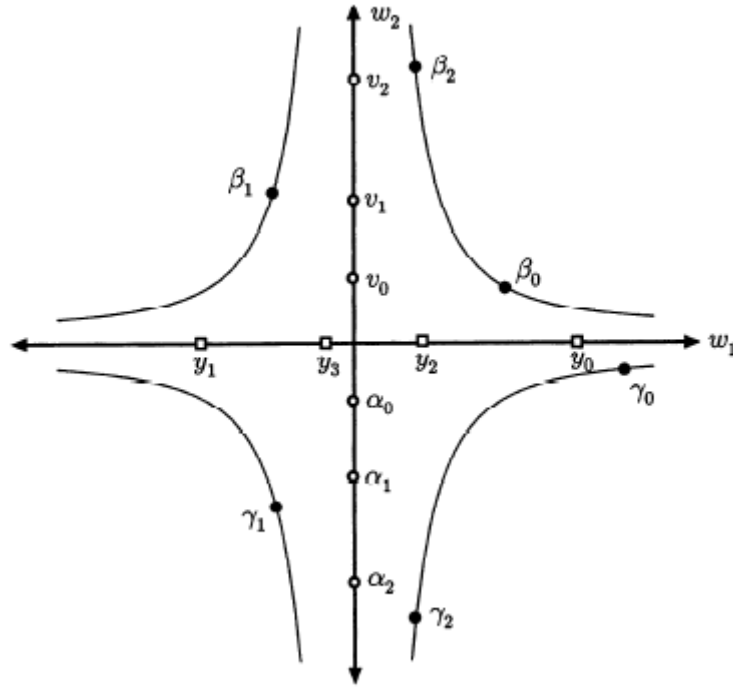
$$w(n) = c_1 \lambda_1^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \lambda_2^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

Eğer $c_1 = 0$ ise $n \rightarrow \infty$ iken $\lambda_2 > 1$ olduğundan $w(n) = c_2 \lambda_2^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \infty$ olup düşey eksen üzerinde başlayan çözümler bu eksen boyunca orijinden dışa doğru hareket eder. (Şekil 2.9.'da $\{v_i\}$ ve $\{\alpha_i\}$ dizileri olarak gösterilmiştir.)

Eğer $c_2 = 0$ ise $n \rightarrow \infty$ iken $-1 < \lambda_1 < 0$ olduğundan $w(n) = c_1 \lambda_1^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 0$ olup λ_1^n 'nin işareti n 'nin tek ve çift olma durumlarına göre değiştiği için düşey eksene göre simetrik olarak yatay eksen üzerinde sıçrama yapar. (Şekil 2.9.'da $\{y_i\}$ dizisi olarak gösterilmiştir.)

$c_1, c_2 \neq 0$ ise $n \rightarrow \infty$ iken $w(n) \rightarrow c_2 \lambda_2^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ olur. Bu durumda çözümler düşey eksene göre simetrik olarak sıçrama yaparak düşey eksene yaklaşır. (Şekil 2.9.)



Şekil 2.9. Yansımali eyer

2.3. Lineerleştirme Metodu ile Lineer Olmayan Fark Denklem Sistemlerinin Kararlılığının Belirlenmesi

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$x(n+1) = f(x(n)) \quad (2.3.1)$$

şeklindeki lineer olmayan fark denklem sistemlerinin kararlılığını inceleyeceğiz.

(2.3.1) sisteminin denge noktası $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ ve $G \subset \mathbb{R}^k$ olmak üzere

$f : G \rightarrow \mathbb{R}^k$, x^* denge noktasında sürekli diferensiyellenebilir fonksiyon olsun.

(2.3.1) sistemini

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ \vdots \\ x_k(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)) \\ f_2(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)) \\ \vdots \\ f_k(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)) \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$

şeklinde yazabiliriz.

Lineerleştirme projesi için ilk önce denge noktası $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$, koordinatları

$(x_1, x_2, \dots, x_k)$ olan (2.3.1) sistemini denge noktası $y^* = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \text{ tane}})$ ve koordinatları

$(y_1, y_2, \dots, y_k)$ olan başka bir sisteme dönüştürelim.

$$\begin{aligned} y_1(n) &= x_1(n) - x_1^* \\ y_2(n) &= x_2(n) - x_2^* \\ &\vdots \\ y_k(n) &= x_k(n) - x_k^* \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

dersek

$$\begin{aligned} x_1(n) &= y_1(n) + x_1^* \\ x_2(n) &= y_2(n) + x_2^* \\ &\vdots \\ x_k(n) &= y_k(n) + x_k^* \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

elde ederiz. (2.3.3)'den

$$\begin{aligned} y_1(n+1) &= x_1(n+1) - x_1^* \\ y_2(n+1) &= x_2(n+1) - x_2^* \\ &\vdots \\ y_k(n+1) &= x_k(n+1) - x_k^* \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

bulunur. (2.3.2)'deki matrisin karşılıklı elemanları eşit olduğundan bu eşitlikler (2.3.5) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y_1(n+1) &= f_1(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)) - x_1^* \\ y_2(n+1) &= f_2(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)) - x_2^* \\ &\vdots \\ y_k(n+1) &= f_k(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)) - x_k^* \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

olduğu görülür. Diğer taraftan f , x^* denge noktasında sürekli diferensiyellenebilir olduğu için Taylor açılımından $i = 1, 2, \dots, k$ için

$$\begin{aligned} f_i(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)) &= f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) + (x_1(n) - x_1^*) \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) \\ &+ (x_2(n) - x_2^*) \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) + \dots + (x_k(n) - x_k^*) \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) \\ &+ h_i(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)) \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

şeklinde yazılabilir.

$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$, (2.3.2)'nin denge noktası olduğundan $i = 1, 2, \dots, k$ için

$$f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) = x_i^* \quad (2.3.8)$$

olur. (2.3.4)'den $i = 1, 2, \dots, k$ için

$$\begin{aligned}
h_i(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)) &= h_i(y_1(n) + x_1^*, y_2(n) + x_2^*, \dots, y_k(n) + x_k^*) \\
&= g_i(y_1(n), y_2(n), \dots, y_k(n))
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

yazılır. Burada $i = 1, 2, \dots, k$ için

$$\begin{aligned}
\|y\| = r &= \sqrt{(x_1(n) - x_1^*)^2 + (x_2(n) - x_2^*)^2 + \dots + (x_k(n) - x_k^*)^2} \text{ olup} \\
\lim_{r \rightarrow 0} \frac{h_i(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n))}{r} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{h_i(x(n))}{r} = 0
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

veya

$$\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{g_i(y_1(n), y_2(n), \dots, y_k(n))}{\|y\|} = \lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{\|g(y(n))\|}{\|y\|} = 0 \tag{2.3.11}$$

şartı sağlanır.

(2.3.3), (2.3.8) ve (2.3.9) ifadeleri (2.3.7)'de yerine yazılırsa $i = 1, 2, \dots, k$ için

$$\begin{aligned}
f_i(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)) - x_i^* &= y_1(n) \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) + y_2(n) \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) \\
&+ \dots + y_k(n) \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) + g_i(y_1(n), y_2(n), \dots, y_k(n))
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

bulunur.

(2.3.12) ifadesi de (2.3.6)'da yerine yazılırsa $i = 1, 2, \dots, k$ için

$$\begin{aligned}
y_i(n+1) &= y_1(n) \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) + y_2(n) \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) \\
&+ \dots + y_k(n) \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) + g_i(y_1(n), y_2(n), \dots, y_k(n))
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

elde edilir.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) \end{bmatrix}$$

matrisine f 'nin Jakobiyen matrisi denir ve (2.3.13) sistemi

$$y(n+1) = Ay(n) + g(y(n)) \quad (2.3.14)$$

şeklinde gösterilir. Burada

$$y(n+1) = Ay(n) \quad (2.3.15)$$

sistemine (2.3.1) sisteminin $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ denge noktasındaki lineerleştirilmiş sistemi denir.

Teorem 2.3.1. a) Eğer $\rho(A) < 1$ ve $\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{\|g(y(n))\|}{\|y\|} = 0$ ise (2.3.1) sistemi

$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ denge noktasında lokal asimptotik kararlıdır.

b) Eğer $\rho(A) > 1$ ve $\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{\|g(y(n))\|}{\|y\|} = 0$ ise (2.3.1) sistemi $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ denge

noktasında kararsızdır.

Örnek 2.3.1.

$$\begin{aligned} y_1(n+1) &= \frac{ay_2(n)}{1+y_1^2(n)} \\ y_2(n+1) &= \frac{by_1(n)}{1+y_2^2(n)} \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

sisteminin orijinde kararlılığını inceleyelim.

Çözüm:

$$f_1(y_1(n), y_2(n)) = \frac{ay_2(n)}{1+y_1^2(n)} \text{ ve } f_2(y_1(n), y_2(n)) = \frac{by_1(n)}{1+y_2^2(n)} \text{ olmak üzere}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = -\frac{2ay_1y_2}{(1+y_1^2)^2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = \frac{a}{1+y_1^2}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = \frac{b}{1+y_2^2} \text{ ve } \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = -\frac{2by_1y_2}{(1+y_2^2)^2}$$

elde edilir.

(2.3.16)'nın orijindeki Jakobiye matrisi

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Biz $y(n+1) = Ay(n) + g(y(n))$ ifadesini elde etmek istiyoruz. Şimdi

$$y(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} y(n) + g(y(n)) \quad (2.3.17)$$

sistemindeki $g(y(n))$ 'i bulalım. Buradan

$$\begin{aligned} g(y(n)) &= y(n+1) - \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} y(n) \\ &= \begin{bmatrix} y_1(n+1) \\ y_2(n+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_1(n+1) - ay_2(n) \\ y_2(n+1) - by_1(n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{ay_2(n)}{1+y_1^2(n)} - ay_2(n) \\ \frac{by_1(n)}{1+y_2^2(n)} - by_1(n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{ay_2(n)y_1^2(n)}{1+y_1^2(n)} \\ -\frac{by_1(n)y_2^2(n)}{1+y_2^2(n)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

bulunur. (2.3.18), (2.3.17)'de yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} y_1(n+1) \\ y_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} y(n) + \begin{bmatrix} -\frac{ay_2(n)y_1^2(n)}{1+y_1^2(n)} \\ -\frac{by_1(n)y_2^2(n)}{1+y_2^2(n)} \end{bmatrix} \quad (2.3.19)$$

elde edilir. Şimdi (2.3.19) ifadesinin her bir terimini inceleyelim.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \text{ matrisinin özdeğerleri}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ b & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - ab = 0$$

$\lambda_1 = \sqrt{ab}$ ve $\lambda_2 = -\sqrt{ab}$ şeklinde bulunur. İkinci terim göz önüne alınırsa

$$g = (g_1, g_2) = \left(-\frac{ay_2y_1^2}{1+y_1^2}, -\frac{by_1y_2^2}{1+y_2^2} \right) \text{ ve}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial y_1} = -\frac{2ay_1y_2}{(1+y_1^2)^2}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial y_2} = -\frac{ay_1^2}{1+y_1^2}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial y_1} = -\frac{by_2^2}{1+y_2^2}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial y_2} = -\frac{2by_1y_2}{(1+y_2^2)^2} \text{ olduğundan } g$$

oriijinde sürekli diferensiyellenebilir. Bu yüzden $\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{\|g(y(n))\|}{\|y\|} = 0$ dır.

O halde Teorem 2.3.1.'den

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = \max\{\sqrt{ab}, \sqrt{ab}\} = \sqrt{ab} \text{ olup}$$

i) $\rho(A) = \sqrt{ab} < 1 \Rightarrow ab < 1$ ise (2.3.16) sistemi oriijinde lokal asimptotik kararlıdır.

ii) $\rho(A) = \sqrt{ab} > 1 \Rightarrow ab > 1$ ise (2.3.16) sistemi oriijinde kararsızdır.

3. BÖLÜM

$$x_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-p}y_{n-q}}, y_n = A + \frac{x_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}} \quad \text{ŞEKLİNDEKİ LİNEER}$$
$$\text{OLMAYAN FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN}$$
$$\text{KARARLILIK ANALİZİ}$$

3.1. Giriş

Bu bölümde Yang [3] ın makalesi detaylı olarak incelenmiştir. Yang [3] çalışmasında $p \geq 2, q \geq 2, r \geq 2, s \geq 2, (p, q, r, s \in \mathbb{Z}), A$ pozitif bir sabit ve $x_{1-\max\{p,r\}}, x_{2-\max\{p,r\}}, \dots, x_{-1}, x_0, y_{1-\max\{q,s\}}, y_{2-\max\{q,s\}}, \dots, y_{-1}, y_0$ pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-p}y_{n-q}}, y_n = A + \frac{x_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}}, n = 1, 2, \dots \quad (3.1.1)$$

şeklindeki yüksek mertebeden fark denklem sistemlerini ele almıştır.

(3.1.1) sisteminin denge noktaları

$$\bar{x} = A + \frac{\bar{y}}{\bar{x} \cdot \bar{y}}, \bar{y} = A + \frac{\bar{x}}{\bar{x} \cdot \bar{y}} \quad (3.1.2)$$

denklem sisteminin çözümü ile bulunur. (3.1.2) ifadesi ayrı ayrı çözülürse

i) $\bar{x} = A + \frac{1}{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x}^2 = A\bar{x} + 1 \Rightarrow \bar{x}^2 - A\bar{x} - 1 = 0$ ve $\Delta = A^2 + 4$ olduğundan

$$\bar{x}_1 = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4}}{2}, \bar{x}_2 = \frac{A - \sqrt{A^2 + 4}}{2}$$

elde edilir.

A pozitif sabit sayı olduğundan $\bar{x}_1 > 0$ dır. Diğer taraftan

$$A^2 < A^2 + 4 \Rightarrow \sqrt{A^2} < \sqrt{A^2 + 4}$$

$$\Rightarrow A < \sqrt{A^2 + 4}$$

$$\Rightarrow A - \sqrt{A^2 + 4} < 0$$

olduğundan $\bar{x}_2 < 0$ olduğu görülür.

ii) (3.1.2)'deki ikinci denklem için i)'dekine benzer işlemler yapılırsa $\bar{y}_1 > 0$ ve $\bar{y}_2 < 0$ elde edilir.

Buna göre i) ve ii) şıklarından

(3.1.1) sistemi

$$(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (c, c) = \left(\frac{A + \sqrt{A^2 + 4}}{2}, \frac{A + \sqrt{A^2 + 4}}{2} \right) \quad (3.1.3)$$

şeklinde bir tek pozitif denge noktasına sahiptir. Bu bölümde aşağıdaki dört durum incelendi:

- 1) $A > 1$ iken (3.1.1) sisteminin her pozitif çözümü sınırlıdır.
- 2) $A > \frac{2}{\sqrt{3}}$ iken (3.1.1) sisteminin (c, c) denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.
- 3) $A > \sqrt{2}$ iken (3.1.1) sisteminin her pozitif çözümü (c, c) 'ye yakınsaktır.
- 4) $A > \sqrt{2}$ iken (3.1.1) sisteminin (c, c) denge noktası global asimptotik kararlıdır.

3.2. Sınırlılık

Teorem 3.2.1. $\{(x_n, y_n)\}$, (3.1.1) sisteminin bir pozitif çözümü olsun. Bu taktirde aşağıdaki üç durum sağlanır:

a) $\forall n \geq 1$ için, $x_n > A$ ve $y_n > A$ dır.

b) Eğer $A > 1$ ise $n \geq \max\{p+1, q+1, r+2, s+2\}$ için,

$$x_n < \begin{cases} \frac{A^3}{A^2 - 1} + x_{\max\{p, q, r+1, s+1\}-1}, & n - \max\{p, q, r+1, s+1\} \text{ tek ise.} \\ \frac{A^3}{A^2 - 1} + x_{\max\{p, q, r+1, s+1\}}, & n - \max\{p, q, r+1, s+1\} \text{ çift ise.} \end{cases}$$

dir.

c) Eğer $A > 1$ ise $n \geq \max\{p+2, q+2, r+1, s+1\}$ için,

$$y_n < \begin{cases} \frac{A^3}{A^2 - 1} + y_{\max\{p+1, q+1, r, s\}-1}, & n - \max\{p+1, q+1, r, s\} \text{ tek ise.} \\ \frac{A^3}{A^2 - 1} + y_{\max\{p+1, q+1, r, s\}}, & n - \max\{p+1, q+1, r, s\} \text{ çift ise.} \end{cases}$$

dir.

İspat:

a) $\{(x_n, y_n)\}$, (3.1.1) sisteminin bir pozitif çözümü ise $n > 0$ için,

$$x_n > 0 \text{ ve } y_n > 0 \quad (3.2.1)$$

dır. Diğer taraftan (3.1.1) sistemi için, $p \geq 2, q \geq 2, r \geq 2, s \geq 2, A > 0$ ve

$$\begin{aligned} x_{1-\max\{p,r\}}, x_{2-\max\{p,r\}}, \dots, x_{-1}, x_0 &> 0 \\ y_{1-\max\{q,s\}}, y_{2-\max\{q,s\}}, \dots, y_{-1}, y_0 &> 0 \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

olduğunu biliyoruz. (3.2.2)'den sırasıyla

$$\begin{aligned} 1 - \max\{p, r\} \leq l \leq 0 &\Rightarrow x_l > 0 \\ 1 - \max\{q, s\} \leq m \leq 0 &\Rightarrow y_m > 0 \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

elde edilir.

i) $n \geq 1 \Rightarrow n-1 \geq 0$ dir. (3.2.1)'den $n-1 > 0 \Rightarrow x_{n-1} > 0$ ve $y_{n-1} > 0$ dir. (3.2.2)'den $n-1 = 0 \Rightarrow x_{n-1} = x_0 > 0$ ve $y_{n-1} = y_0 > 0$ dir.

ii) (3.2.1)'den $n-p > 0$ ve $n-r > 0 \Rightarrow x_{n-p} > 0$ ve $x_{n-r} > 0$ dir.

$n-p \leq 0$ ve $n-r \leq 0$ ise $\max\{p, r\} \geq p, r \Rightarrow -\max\{p, r\} \leq -p, -r$ ve $1 \leq n$ olduğundan $1 - \max\{p, r\} \leq n-p, n-r \leq 0$ olup (3.2.3)'den $x_{n-p}, x_{n-r} > 0$ dir.

iii) (3.2.1)'den $n-q > 0$ ve $n-s > 0 \Rightarrow y_{n-q} > 0$ ve $y_{n-s} > 0$ dir.

$n-q \leq 0$ ve $n-s \leq 0$ ise $\max\{q, s\} \geq q, s \Rightarrow -\max\{q, s\} \leq -q, -s$ ve $1 \leq n$ olduğundan $1 - \max\{q, s\} \leq n-q, n-s \leq 0$ olup (3.2.3)'den $y_{n-q}, y_{n-s} > 0$ dir.

Buna göre i), ii) ve iii) şıklarından $p \geq 2, q \geq 2, r \geq 2, s \geq 2, A > 0$ olmak üzere $\forall n \geq 1$ için, $y_{n-1} > 0, x_{n-p} > 0, y_{n-q} > 0$ ve $x_{n-1} > 0, x_{n-r} > 0, y_{n-s} > 0$ olup (3.1.1)'den $x_n > A$ ve $y_n > A$ elde edilir.

b) (3.1.1)'den

$$\begin{aligned} x_n &= A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-p}y_{n-q}} \text{ ve } y_n = A + \frac{x_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}} \Rightarrow y_{n-1} = A + \frac{x_{n-2}}{x_{n-r-1}y_{n-s-1}} \text{ olduğundan} \\ x_n &= A + \frac{A + \frac{x_{n-2}}{x_{n-r-1}y_{n-s-1}}}{x_{n-p}y_{n-q}} \Rightarrow x_n = A + \frac{A}{x_{n-p}y_{n-q}} + \frac{x_{n-2}}{x_{n-p}y_{n-q}x_{n-r-1}y_{n-s-1}} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

elde edilir.

$n \geq \max\{p+1, q+1, r+2, s+2\}$ olduğundan

$$\begin{aligned} n \geq p+1 &\Rightarrow n-p \geq 1, n \geq q+1 \Rightarrow n-q \geq 1 \\ n \geq r+2 &\Rightarrow n-r-1 \geq 1, n \geq s+2 \Rightarrow n-s-1 \geq 1 \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

yazılır. (3.2.5)'den ve Teorem 3.2.1. a)'dan

$$x_{n-p} > A, y_{n-q} > A, x_{n-r-1} > A, y_{n-s-1} > A \quad (3.2.6)$$

olduğu görülür. (3.2.6)'dan ve $A > 0$ olduğundan $x_{n-p}y_{n-q} > A^2 \Rightarrow \frac{1}{x_{n-p}y_{n-q}} < \frac{1}{A^2}$ olup

$$\frac{A}{x_{n-p}y_{n-q}} < \frac{1}{A} \quad (3.2.7)$$

elde edilir. Yine (3.2.6)'dan $x_{n-p}y_{n-q}x_{n-r-1}y_{n-s-1} > A^4 \Rightarrow \frac{1}{x_{n-p}y_{n-q}x_{n-r-1}y_{n-s-1}} < \frac{1}{A^4}$ ve

$n \geq r+2, r \geq 2 \Rightarrow n \geq 4 \Rightarrow n-2 \geq 2 > 1 \Rightarrow n-2 > 1$ olup Teorem 3.2.1. a)'dan $x_{n-2} > A > 1 > 0 \Rightarrow x_{n-2} > 0$ olduğundan

$$\frac{x_{n-2}}{x_{n-p}y_{n-q}x_{n-r-1}y_{n-s-1}} < \frac{x_{n-2}}{A^4} \quad (3.2.8)$$

bulunur. (3.2.7) ve (3.2.8) eşitsizliklerini (3.2.4)'de yerine yazarsak

$$x_n < A + \frac{1}{A} + \frac{x_{n-2}}{A^4} \quad (3.2.9)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.2.9)'da n yerine $n-2$ yazarsak

$x_{n-2} < A + \frac{1}{A} + \frac{x_{n-4}}{A^4}$ ve $A > 0 \Rightarrow A^4 > 0 \Rightarrow \frac{1}{A^4} > 0$ olduğundan (3.2.9)'dan

$$x_n < A + \frac{1}{A} + \frac{A + \frac{1}{A} + \frac{x_{n-4}}{A^4}}{A^4} = A + \frac{1}{A} + \frac{1}{A^3} + \frac{1}{A^5} + \frac{x_{n-4}}{A^8}$$

$$< \dots < A + \frac{1}{A} + \frac{1}{A^3} + \frac{1}{A^5} + \dots + \frac{1}{A^{4k-3}} + \frac{x_{n-2k}}{A^{4k}}$$

$$x_n < \sum_{i=0}^t \frac{1}{A^{2i-1}} + \frac{x_{n-2k}}{A^{4k}}, \quad 2t-1 = 4k-3 \Rightarrow 2t = 4k-2 \Rightarrow t = 2k-1 \text{ olup}$$

$$x_n < \sum_{i=0}^{2k-1} \frac{1}{A^{2i-1}} + \frac{x_{n-2k}}{A^{4k}} \quad (3.2.10)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi k 'yı belirleyelim. (3.2.10)'dan $k \geq 1, (k \in \mathbb{Z})$ olur.

Eğer $n - \max\{p, q, r+1, s+1\}$ tek ise $n - \max\{p, q, r+1, s+1\} = 2k-1$

$\Rightarrow n - 2k + 1 = \max\{p, q, r+1, s+1\} \Rightarrow n - 2k + 2 = \max\{p, q, r+1, s+1\} + 1$ olup

$$n - 2k + 2 = \max \{p + 1, q + 1, r + 2, s + 2\} \quad (3.2.11)$$

dir.

Eğer $n - \max \{p, q, r + 1, s + 1\}$ çift ise $n - \max \{p, q, r + 1, s + 1\} = 2k$

$\Rightarrow n - 2k = \max \{p, q, r + 1, s + 1\} \Rightarrow n - 2k + 1 = \max \{p, q, r + 1, s + 1\} + 1$ olup

$$n - 2k + 1 = \max \{p + 1, q + 1, r + 2, s + 2\} \quad (3.2.12)$$

dir.

(3.2.11) ve (3.2.12) eşitsizliklerinden $n - 2k + 2 \geq \max \{p + 1, q + 1, r + 2, s + 2\}$ ve diğer taraftan $k \geq 1 \Rightarrow 2k \geq 2 \Rightarrow 0 \geq -2k + 2 \Rightarrow n \geq n - 2k + 2$ olduğundan

$$n \geq n - 2k + 2 \geq \max \{p + 1, q + 1, r + 2, s + 2\} \quad (3.2.13)$$

elde edilir. (3.2.13)'den $n - 2k + 2 \geq \max \{p + 1, q + 1, r + 2, s + 2\}$ ve $p + 1, q + 1 \geq 3$, $r + 2, s + 2 \geq 4$ olduğundan $\max \{p + 1, q + 1, r + 2, s + 2\} \geq 4$ olup $n - 2k + 2 \geq 4$ yazılır.

Buradan $n - 2k \geq 2 > 1 \Rightarrow n - 2k > 1$ olduğundan ve Teorem 3.2.1. a)'dan $x_{n-2k} > A > 0$ olup

$$x_{n-2k} > 0 \quad (3.2.14)$$

elde edilir. Şimdi (3.2.10) eşitsizliğine bakalım. Burada

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2k-1} \frac{1}{A^{2i-1}} &= \sum_{i=0}^{2k-1} \frac{1}{A^{2i}} A^{-1} = \sum_{i=0}^{2k-1} \frac{A}{A^{2i}} = A \left[\sum_{i=0}^{2k-1} \left(\frac{1}{A^2} \right)^i \right] = A \left[1 + \frac{1}{A^2} + \left(\frac{1}{A^2} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{A^2} \right)^{2k-1} \right] \\ \sum_{i=0}^{2k-1} \frac{1}{A^{2i-1}} &= A \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{A^2} \right)^{2k}}{1 - \frac{1}{A^2}} \right] = \frac{A}{1 - \frac{1}{A^2}} \left[1 - \left(\frac{1}{A^2} \right)^{2k} \right] = \frac{A^3}{A^2 - 1} \left[1 - \left(\frac{1}{A^2} \right)^{2k} \right] \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

olarak bulunur ve

$$x_n < \frac{A^3}{A^2 - 1} \left[1 - \left(\frac{1}{A^2} \right)^{2k} \right] + \frac{x_{n-2k}}{A^{4k}} \quad (3.2.16)$$

elde edilir.

$$A > 1 \Rightarrow A \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{A^2} \right)^{2k} > 0 \Rightarrow -\left(\frac{1}{A^2} \right)^{2k} < 0 \Rightarrow \left[1 - \left(\frac{1}{A^2} \right)^{2k} \right] < 1 \text{ ve } \frac{A^3}{A^2 - 1} > 0 \text{ olup}$$

$$\frac{A^3}{A^2-1} \left[1 - \left(\frac{1}{A^2} \right)^{2k} \right] < \frac{A^3}{A^2-1} \quad (3.2.17)$$

bulunur.

Diğer taraftan $k \geq 1 > 0 \Rightarrow k > 0 \Rightarrow 4k > 0$ ve $A > 1 \Rightarrow A^{4k} > 1$ olup

$$\frac{1}{A^{4k}} < 1 \quad (3.2.18)$$

yazılır.

(3.2.14) ve (3.2.18) eşitsizliklerinden

$$\frac{x_{n-2k}}{A^{4k}} < x_{n-2k} \quad (3.2.19)$$

olduğu görülür. (3.2.17) ve (3.2.19) eşitsizliklerini (3.2.16)'da yerine yazarsak (3.2.13) için,

$$x_n < \frac{A^3}{A^2-1} + x_{n-2k} \quad (3.2.20)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan

i) Eğer $n - \max \{p, q, r+1, s+1\}$ tek ise $n - \max \{p, q, r+1, s+1\} = 2k - 1$ olup

$$n - 2k = \max \{p, q, r+1, s+1\} - 1 \quad (3.2.21)$$

yazılır. (3.2.21)'i (3.2.20)'de yerine yazarsak

$$x_n < \frac{A^3}{A^2-1} + x_{\max \{p, q, r+1, s+1\} - 1} \quad (3.2.22)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

ii) Eğer $n - \max \{p, q, r+1, s+1\}$ çift ise $n - \max \{p, q, r+1, s+1\} = 2k$ olup

$$n - 2k = \max \{p, q, r+1, s+1\} \quad (3.2.23)$$

yazılır. (3.2.23)'ü (3.2.20)'de yerine yazarsak

$$x_n < \frac{A^3}{A^2-1} + x_{\max \{p, q, r+1, s+1\}} \quad (3.2.24)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Sonuç olarak i) ve ii) şıklarından ispat tamamlanmış olur.

c) (3.1.1)'den

$$y_n = A + \frac{x_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}} \text{ ve } x_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-p}y_{n-q}} \Rightarrow x_{n-1} = A + \frac{y_{n-2}}{x_{n-p-1}y_{n-q-1}} \text{ olduğundan}$$

$$y_n = A + \frac{A + \frac{y_{n-2}}{x_{n-p-1}y_{n-q-1}}}{x_{n-r}y_{n-s}} \Rightarrow y_n = A + \frac{A}{x_{n-r}y_{n-s}} + \frac{y_{n-2}}{x_{n-p-1}y_{n-q-1}x_{n-r}y_{n-s}} \quad (3.2.25)$$

elde edilir.

$n \geq \max \{p+2, q+2, r+1, s+1\}$ olduğundan

$$\begin{aligned} n \geq p+2 &\Rightarrow n-p-1 \geq 1, n \geq q+2 \Rightarrow n-q-1 \geq 1 \\ n \geq r+1 &\Rightarrow n-r \geq 1, n \geq s+1 \Rightarrow n-s \geq 1 \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

yazılır. (3.2.26)'dan ve Teorem 3.2.1. a)'dan

$$x_{n-p-1} > A, y_{n-q-1} > A, x_{n-r} > A, y_{n-s} > A \quad (3.2.27)$$

olduğu görülür. (3.2.27)'den ve $A > 0$ olduğundan $x_{n-r}y_{n-s} > A^2 \Rightarrow \frac{1}{x_{n-r}y_{n-s}} < \frac{1}{A^2}$ olup

$$\frac{A}{x_{n-r}y_{n-s}} < \frac{1}{A} \quad (3.2.28)$$

elde edilir. Yine (3.2.27)'den $x_{n-p-1}y_{n-q-1}x_{n-r}y_{n-s} > A^4 \Rightarrow \frac{1}{x_{n-p-1}y_{n-q-1}x_{n-r}y_{n-s}} < \frac{1}{A^4}$ ve

$n \geq p+2, p \geq 2 \Rightarrow n \geq 4 \Rightarrow n-2 \geq 2 > 1 \Rightarrow n-2 > 1$ olup Teorem 3.2.1. a)'dan

$y_{n-2} > A > 1 > 0 \Rightarrow y_{n-2} > 0$ olduğundan

$$\frac{y_{n-2}}{x_{n-p-1}y_{n-q-1}x_{n-r}y_{n-s}} < \frac{y_{n-2}}{A^4} \quad (3.2.29)$$

bulunur. (3.2.28) ve (3.2.29) eşitsizliklerini (3.2.25)'de yerine yazarsak

$$y_n < A + \frac{1}{A} + \frac{y_{n-2}}{A^4} \quad (3.2.30)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.2.30)'da n yerine $n-2$ yazarsak

$y_{n-2} < A + \frac{1}{A} + \frac{y_{n-4}}{A^4}$ ve $A > 0 \Rightarrow A^4 > 0 \Rightarrow \frac{1}{A^4} > 0$ olduğundan (3.2.30)'dan

$$\begin{aligned} y_n &< A + \frac{1}{A} + \frac{A + \frac{1}{A} + \frac{y_{n-4}}{A^4}}{A^4} = A + \frac{1}{A} + \frac{1}{A^3} + \frac{1}{A^5} + \frac{y_{n-4}}{A^8} \\ &< \dots < A + \frac{1}{A} + \frac{1}{A^3} + \frac{1}{A^5} + \dots + \frac{1}{A^{4k-3}} + \frac{y_{n-2k}}{A^{4k}} \end{aligned}$$

$$y_n < \sum_{i=0}^t \frac{1}{A^{2i-1}} + \frac{y_{n-2k}}{A^{4k}}, \quad 2t-1 = 4k-3 \Rightarrow 2t = 4k-2 \Rightarrow t = 2k-1 \text{ olup}$$

$$y_n < \sum_{i=0}^{2k-1} \frac{1}{A^{2i-1}} + \frac{y_{n-2k}}{A^{4k}} \quad (3.2.31)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi k 'yı belirleyelim. (3.2.31)'den $k \geq 1$, ($k \in \mathbb{Z}$) olur.

$$\begin{aligned} \text{Eğer } n - \max\{p+1, q+1, r, s\} \text{ tek ise } n - \max\{p+1, q+1, r, s\} &= 2k-1 \\ \Rightarrow n-2k+1 = \max\{p+1, q+1, r, s\} &\Rightarrow n-2k+2 = \max\{p+1, q+1, r, s\} + 1 \text{ olup} \\ n-2k+2 &= \max\{p+2, q+2, r+1, s+1\} \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

dir.

$$\begin{aligned} \text{Eğer } n - \max\{p+1, q+1, r, s\} \text{ çift ise } n - \max\{p+1, q+1, r, s\} &= 2k \\ \Rightarrow n-2k = \max\{p+1, q+1, r, s\} &\Rightarrow n-2k+1 = \max\{p+1, q+1, r, s\} + 1 \text{ olup} \\ n-2k+1 &= \max\{p+2, q+2, r+1, s+1\} \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

dir.

(3.2.32) ve (3.2.33) eşitsizliklerinden $n-2k+2 \geq \max\{p+2, q+2, r+1, s+1\}$ ve diğer taraftan $k \geq 1 \Rightarrow 2k \geq 2 \Rightarrow 0 \geq -2k+2 \Rightarrow n \geq n-2k+2$ olduğundan

$$n \geq n-2k+2 \geq \max\{p+2, q+2, r+1, s+1\} \quad (3.2.34)$$

elde edilir. (3.2.34)'den $n-2k+2 \geq \max\{p+2, q+2, r+1, s+1\}$ ve $p+2, q+2 \geq 4$, $r+1, s+1 \geq 3$ olduğundan $\max\{p+2, q+2, r+1, s+1\} \geq 4$ olup $n-2k+2 \geq 4$ yazılır. Buradan $n-2k \geq 2 > 1 \Rightarrow n-2k > 1$ olduğundan ve Teorem 3.2.1. a)'dan $y_{n-2k} > A > 0$ olup

$$y_{n-2k} > 0 \quad (3.2.35)$$

elde edilir. Şimdi (3.2.31) eşitsizliğine bakalım. Burada (3.2.15)'den

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2k-1} \frac{1}{A^{2i-1}} &= \frac{A^3}{A^2-1} \left[1 - \left(\frac{1}{A^2} \right)^{2k} \right] \text{ olduğundan} \\ y_n &< \frac{A^3}{A^2-1} \left[1 - \left(\frac{1}{A^2} \right)^{2k} \right] + \frac{y_{n-2k}}{A^{4k}} \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

yazılır.

(3.2.18) ve (3.2.35) eşitsizliklerinden

$$\frac{y_{n-2k}}{A^{4k}} < y_{n-2k} \quad (3.2.37)$$

olduğu görülür.

(3.2.17) ve (3.2.37) eşitsizliklerini (3.2.36)'da yerine yazarsak (3.2.34) için,

$$y_n < \frac{A^3}{A^2 - 1} + y_{n-2k} \quad (3.2.38)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan

i) Eğer $n - \max \{p+1, q+1, r, s\}$ tek ise $n - \max \{p+1, q+1, r, s\} = 2k - 1$ olup

$$n - 2k = \max \{p+1, q+1, r, s\} - 1 \quad (3.2.39)$$

yazılır. (3.2.39)'u (3.2.38)'de yerine yazarsak

$$y_n < \frac{A^3}{A^2 - 1} + y_{\max \{p+1, q+1, r, s\} - 1} \quad (3.2.40)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

ii) Eğer $n - \max \{p+1, q+1, r, s\}$ çift ise $n - \max \{p+1, q+1, r, s\} = 2k$ olup

$$n - 2k = \max \{p+1, q+1, r, s\} \quad (3.2.41)$$

yazılır. (3.2.41)'i (3.2.40)'da yerine yazarsak

$$y_n < \frac{A^3}{A^2 - 1} + y_{\max \{p+1, q+1, r, s\}} \quad (3.2.42)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Sonuç olarak i) ve ii) şıklarından ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.1. $\{(x_n, y_n)\}$, (3.1.1) sisteminin bir pozitif çözümü ve $A > 1$ olsun.

Bu taktirde,

a) Teorem 3.2.1. a) ve b) şıklarından $n \geq \max \{p+1, q+1, r+2, s+2\}$ için,

$$A < x_n < \begin{cases} \frac{A^3}{A^2 - 1} + x_{\max \{p, q, r+1, s+1\} - 1}, & n - \max \{p, q, r+1, s+1\} \text{ tek ise.} \\ \frac{A^3}{A^2 - 1} + x_{\max \{p, q, r+1, s+1\}}, & n - \max \{p, q, r+1, s+1\} \text{ çift ise.} \end{cases}$$

yazılır.

b) Teorem 3.2.1. a) ve c) şıklarından $n \geq \max \{p+2, q+2, r+1, s+1\}$ için,

$$A < y_n < \begin{cases} \frac{A^3}{A^2 - 1} + y_{\max \{p+1, q+1, r, s\} - 1}, & n - \max \{p+1, q+1, r, s\} \text{ tek ise.} \\ \frac{A^3}{A^2 - 1} + y_{\max \{p+1, q+1, r, s\}}, & n - \max \{p+1, q+1, r, s\} \text{ çift ise.} \end{cases}$$

yazılır.

Sonuç 3.2.1.'den $A > 1$ ve $n \geq \max\{p+2, q+2, r+2, s+2\}$ olmak üzere, (3.1.1) sisteminin her pozitif çözümü sınırlıdır.

3.3. Lokal Asimptotik Kararlılık

Teorem 3.3.1. Kabul edelim ki $A > \frac{2}{\sqrt{3}}$ olsun. Bu taktirde (3.1.1) sisteminin (c, c)

pozitif denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

İspat: $M = \max\{p, q, r, s\}$ olsun. Bu taktirde $M \geq 2$ olur. Aşağıdaki dönüşümleri göz önüne alalım.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n-1} = w_n^1 \\ x_{n-2} = w_n^2 \\ x_{n-3} = w_n^3 \\ \vdots \\ x_{n-(M-2)} = w_n^{M-2} \\ x_{n-(M-1)} = w_n^{M-1} \\ x_{n-M} = w_n^M \\ y_{n-1} = z_n^1 \\ y_{n-2} = z_n^2 \\ y_{n-3} = z_n^3 \\ \vdots \\ y_{n-(M-2)} = z_n^{M-2} \\ y_{n-(M-1)} = z_n^{M-1} \\ y_{n-M} = z_n^M \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{n-2} = w_{n-1}^1 \\ x_{n-3} = w_{n-1}^2 \\ x_{n-4} = w_{n-1}^3 \\ \vdots \\ x_{n-(M-1)} = w_{n-1}^{M-2} \\ x_{n-M} = w_{n-1}^{M-1} \\ x_{n-M-1} = w_{n-1}^M \\ y_{n-2} = z_{n-1}^1 \\ y_{n-3} = z_{n-1}^2 \\ y_{n-4} = z_{n-1}^3 \\ \vdots \\ y_{n-(M-1)} = z_{n-1}^{M-2} \\ y_{n-M} = z_{n-1}^{M-1} \\ y_{n-M-1} = z_{n-1}^M \end{array} \right. \quad (3.3.1)$$

olsun.

Diğer taraftan $2 \leq p, r, q, s \leq M$ olduğundan

$$x_{n-p} = w_{n-1}^{p-1}, x_{n-r} = w_{n-1}^{r-1}, y_{n-q} = z_{n-1}^{q-1}, y_{n-s} = z_{n-1}^{s-1} \quad (3.3.2)$$

dir. (3.3.1) ve (3.3.2) eşitliklerinden (3.1.1) sistemini

$$\left\{ \begin{array}{l} w_n^1 = x_{n-1}, w_n^2 = w_{n-1}^1, w_n^3 = w_{n-1}^2, \dots, w_n^{M-1} = w_{n-1}^{M-2}, w_n^M = w_{n-1}^{M-1}, \\ z_n^1 = y_{n-1}, z_n^2 = z_{n-1}^1, z_n^3 = z_{n-1}^2, \dots, z_n^{M-1} = z_{n-1}^{M-2}, z_n^M = z_{n-1}^{M-1}, \\ x_n = A + \frac{y_{n-1}}{w_{n-1}^{p-1} \cdot z_{n-1}^{q-1}}, y_n = A + \frac{x_{n-1}}{w_{n-1}^{r-1} \cdot z_{n-1}^{s-1}}, \end{array} \right. \quad (3.3.3)$$

1. mertebeden lineer olmayan denklem sistemi şeklinde yazabiliriz. Şimdi (3.3.3) sistemini lineerleştirelim.

i)

$$x_n = A + \frac{y_{n-1}}{w_{n-1}^{p-1} \cdot z_{n-1}^{q-1}} \quad (3.3.4)$$

denkleminin (3.1.3)'deki $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (c, c)$ denge noktasındaki lineerleştirilmiş denklemini bulalım. $x_n = f(y_{n-1}, w_{n-1}^{p-1}, z_{n-1}^{q-1})$ ve $y_{n-1} = u_0, w_{n-1}^{p-1} = u_1, z_{n-1}^{q-1} = u_2$ olmak üzere

$$x_n = f(u_0, u_1, u_2) = A + \frac{u_0}{u_1 \cdot u_2} \quad (3.3.5)$$

yazılır. Buradan

$$P_0 = \frac{\partial f}{\partial u_0}(u_0, u_1, u_2) \Big|_{(c,c)} = \frac{\partial}{\partial u_0} \left(A + \frac{u_0}{u_1 \cdot u_2} \right) \Big|_{(c,c)} = \frac{1}{u_1 \cdot u_2} \Big|_{(c,c)} = \frac{1}{c \cdot c} = c^{-2} \quad (3.3.6)$$

$$P_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1}(u_0, u_1, u_2) \Big|_{(c,c)} = \frac{\partial}{\partial u_1} \left(A + \frac{u_0}{u_1 \cdot u_2} \right) \Big|_{(c,c)} = -\frac{u_0}{u_1^2 \cdot u_2} \Big|_{(c,c)} = -\frac{c}{c^2 \cdot c} = -c^{-2} \quad (3.3.7)$$

$$P_2 = \frac{\partial f}{\partial u_2}(u_0, u_1, u_2) \Big|_{(c,c)} = \frac{\partial}{\partial u_2} \left(A + \frac{u_0}{u_1 \cdot u_2} \right) \Big|_{(c,c)} = -\frac{u_0}{u_1 \cdot u_2^2} \Big|_{(c,c)} = -\frac{c}{c \cdot c^2} = -c^{-2} \quad (3.3.8)$$

elde edilir. (3.3.4) denkleminin (c, c) denge noktasındaki lineerleştirilmiş denklemi, (3.3.6), (3.3.7) ve (3.3.8) eşitliklerinden $x_n = P_0 \cdot u_0 + P_1 \cdot u_1 + P_2 \cdot u_2$ şeklinde olup

$$x_n = c^{-2} \cdot y_{n-1} - c^{-2} \cdot w_{n-1}^{p-1} - c^{-2} \cdot z_{n-1}^{q-1} \quad (3.3.9)$$

olarak bulunur.

ii)

$$y_n = A + \frac{x_{n-1}}{w_{n-1}^{r-1} \cdot z_{n-1}^{s-1}} \quad (3.3.10)$$

denkleminin (3.1.3)'deki $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (c, c)$ denge noktasındaki lineerleştirilmiş denklemini bulalım. $y_n = g(x_{n-1}, w_{n-1}^{r-1}, z_{n-1}^{s-1})$ ve $x_{n-1} = v_0, w_{n-1}^{r-1} = v_1, z_{n-1}^{s-1} = v_2$ olmak üzere

$$y_n = g(v_0, v_1, v_2) = A + \frac{v_0}{v_1 \cdot v_2} \quad (3.3.11)$$

yazılır. Buradan

$$R_0 = \frac{\partial g}{\partial v_0}(v_0, v_1, v_2) \Big|_{(c,c)} = \frac{\partial}{\partial v_0} \left(A + \frac{v_0}{v_1 \cdot v_2} \right) \Big|_{(c,c)} = \frac{1}{v_1 \cdot v_2} \Big|_{(c,c)} = \frac{1}{c \cdot c} = c^{-2} \quad (3.3.12)$$

$$R_1 = \frac{\partial g}{\partial v_1}(v_0, v_1, v_2) \Big|_{(c,c)} = \frac{\partial}{\partial v_1} \left(A + \frac{v_0}{v_1 \cdot v_2} \right) \Big|_{(c,c)} = -\frac{v_0}{v_1^2 \cdot v_2} \Big|_{(c,c)} = -\frac{c}{c^2 \cdot c} = -c^{-2} \quad (3.3.13)$$

$$R_2 = \frac{\partial g}{\partial v_2}(v_0, v_1, v_2) \Big|_{(c,c)} = \frac{\partial}{\partial v_2} \left(A + \frac{v_0}{v_1 \cdot v_2} \right) \Big|_{(c,c)} = -\frac{v_0}{v_1 \cdot v_2^2} \Big|_{(c,c)} = -\frac{c}{c \cdot c^2} = -c^{-2} \quad (3.3.14)$$

elde edilir. (3.3.10) denkleminin (c, c) denge noktasındaki lineerleştirilmiş denklemi, (3.3.12), (3.3.13) ve (3.3.14) eşitliklerinden $y_n = R_0 \cdot v_0 + R_1 \cdot v_1 + R_2 \cdot v_2$ şeklinde olup

$$y_n = c^{-2} \cdot x_{n-1} - c^{-2} \cdot w_{n-1}^{r-1} - c^{-2} \cdot z_{n-1}^{s-1} \quad (3.3.15)$$

olarak bulunur. (3.3.3) sisteminin denge noktası $\underbrace{(c, c, \dots, c)}_{2M+2 \text{ tane}}$ dir. i) ve ii) şıklarından

(3.3.3) sisteminin $\underbrace{(c, c, \dots, c)}_{2M+2 \text{ tane}}$ denge noktasındaki lineerleştirilmiş sistemi

$$\begin{cases} w_n^1 = x_{n-1}, w_n^2 = w_{n-1}^1, w_n^3 = w_{n-1}^2, \dots, w_n^{M-1} = w_{n-1}^{M-2}, w_n^M = w_{n-1}^{M-1}, \\ z_n^1 = y_{n-1}, z_n^2 = z_{n-1}^1, z_n^3 = z_{n-1}^2, \dots, z_n^{M-1} = z_{n-1}^{M-2}, z_n^M = z_{n-1}^{M-1}, \\ x_n = c^{-2} \cdot y_{n-1} - c^{-2} \cdot w_{n-1}^{p-1} - c^{-2} \cdot z_{n-1}^{q-1}, y_n = c^{-2} \cdot x_{n-1} - c^{-2} \cdot w_{n-1}^{r-1} - c^{-2} \cdot z_{n-1}^{s-1}, \end{cases} \quad (3.3.16)$$

şeklinde elde edilir. Şimdi (3.3.16) lineerleştirilmiş sistemini matris biçiminde yazalım.

Bu taktirde sistemin denge noktası $\underbrace{(c, c, \dots, c)}_{2M+2 \text{ tane}}^T$ şekline dönüşür.

$\varphi_n = (w_n^1, w_n^2, w_n^3, \dots, w_n^{M-1}, w_n^M, z_n^1, z_n^2, z_n^3, \dots, z_n^{M-1}, z_n^M, x_n, y_n)^T$ olsun. Buradan

$\varphi_{n-1} = (w_{n-1}^1, w_{n-1}^2, w_{n-1}^3, \dots, w_{n-1}^{M-1}, w_{n-1}^M, z_{n-1}^1, z_{n-1}^2, z_{n-1}^3, \dots, z_{n-1}^{M-1}, z_{n-1}^M, x_{n-1}, y_{n-1})^T$ yazılır.

$$\varphi_n = \phi \cdot \varphi_{n-1} \quad (3.3.17)$$

lineerleştirilmiş sistemi Şekil 3.1.'de gösterilmiştir. Burada φ_n ve φ_{n-1} , $(2M+2) \times 1$

tipinde matrislerdir. ϕ ise $(2M+2) \times (2M+2)$ tipinde bir matristir. Şekil 3.1.'de

ϕ 'nin $(2M+1)$. satırındaki $-c^{-2}$ terimleri sırasıyla $(p-1)$. ve $(M+q-1)$.

sütunundadırlar ve c^{-2} terimi ise $(2M+2)$. sütunundadır. Şekil 3.1.'de ϕ 'nin

$(2M+2)$. satırındaki $-c^{-2}$ terimleri sırasıyla $(r-1)$. ve $(M+s-1)$. sütunundadırlar

ve c^{-2} terimi ise $(2M+1)$. sütunundadır.

$\varepsilon > 0$ ve $\varepsilon < \min \left\{ \frac{1}{M}, \frac{c^2 - 3}{(M-1)c^2} \right\}$ olmak üzere $1 \leq k \leq M$ için,

$$d_k = d_{M+k} = 1 - k\varepsilon \quad (3.3.18)$$

olsun. Ayrıca

$$d_{2M+1} = d_{2M+2} = 1 \quad (3.3.19)$$

olsun.

Buna göre $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_M, d_{M+1}, \dots, d_{M+M} = d_{2M}, d_{2M+1}, d_{2M+2})$ şeklinde bir köşegen matris olsun.

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{1}{M}, \frac{c^2 - 3}{(M-1)c^2} \right\} \Rightarrow \varepsilon < \frac{1}{M} \text{ ve } \varepsilon < \frac{c^2 - 3}{(M-1)c^2} \quad (3.3.20)$$

dir. (3.3.20)'den $\varepsilon < \frac{1}{M}$ ve $M \geq 2 > 0$ olduğundan

$$M\varepsilon < 1 \Rightarrow -M\varepsilon > -1 \Rightarrow 1 - M\varepsilon > 0 \quad (3.3.21)$$

dır. $k \leq M$ ve $\varepsilon > 0$ olduğundan

$$k\varepsilon \leq M\varepsilon \Rightarrow -k\varepsilon \geq -M\varepsilon \Rightarrow 1 - k\varepsilon \geq 1 - M\varepsilon \quad (3.3.22)$$

dur. (3.3.21) ve (3.3.22) eşitsizliklerinden

$$1 - k\varepsilon > 0 \quad (3.3.23)$$

elde edilir. (3.3.23)'den $1 - k\varepsilon > 0 \Rightarrow 1 > k\varepsilon$ ve $k > 0 \Rightarrow \frac{1}{k} > 0$ olduğundan

$$\varepsilon < \frac{1}{k} \quad (3.3.24)$$

dır.

Diğer taraftan

$$1 \leq k \Rightarrow \frac{1}{k} \leq 1 \quad (3.3.25)$$

dir. (3.3.24) ve (3.3.25) eşitsizliklerinden $\varepsilon < 1$ olup $\varepsilon > 0$ olduğundan

$$0 < \varepsilon < 1 \quad (3.3.26)$$

elde edilir.

Kabulden $A > \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow A^2 > \frac{4}{3} \Rightarrow A^2 + 4 > \frac{4}{3} + 4 \Rightarrow A^2 + 4 > \frac{16}{3} \Rightarrow \sqrt{A^2 + 4} > \frac{4}{\sqrt{3}}$ bulunur.

O halde $A > \frac{2}{\sqrt{3}}$ ve $\sqrt{A^2 + 4} > \frac{4}{\sqrt{3}}$ olduğundan $A + \sqrt{A^2 + 4} > \frac{6}{\sqrt{3}}$ olup

$$c = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4}}{2} > \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow c^2 > 3 \quad (3.3.27)$$

yazılır.

$M \geq 2$ ve $\varepsilon > 0$ olduğundan $M > (M-1) > \dots > 2 > 1 \Rightarrow M\varepsilon > (M-1)\varepsilon > \dots > 2\varepsilon > \varepsilon$

$\Rightarrow -M\varepsilon < -(M-1)\varepsilon < \dots < -2\varepsilon < -\varepsilon \Rightarrow 1 - M\varepsilon < 1 - (M-1)\varepsilon < \dots < 1 - 2\varepsilon < 1 - \varepsilon$ ve

(3.3.21)'den $0 < 1 - M\varepsilon$ ve $\varepsilon > 0 \Rightarrow -\varepsilon < 0 \Rightarrow 1 - \varepsilon < 1$ olduğundan

$$0 < 1 - M\varepsilon < 1 - (M-1)\varepsilon < \dots < 1 - 2\varepsilon < 1 - \varepsilon < 1 \quad (3.3.28)$$

elde edilir. (3.3.18) ve (3.3.28) ifadelerinden

$$0 < d_M < d_{M-1} < \dots < d_2 < d_1 < 1 \quad (3.3.29)$$

$$0 < d_{M+M} = d_{2M} < d_{M+(M-1)} = d_{2M-1} < \dots < d_{M+2} < d_{M+1} < 1 \quad (3.3.30)$$

yazılır. D bir köşegen matris olduğundan

$\det D = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_M \cdot d_{M+1} \cdot \dots \cdot d_{2M} \cdot d_{2M+1} \cdot d_{2M+2}$ olarak bulunur. (3.3.29) , (3.3.30)

eşitsizliklerinden ve (3.3.19)'dan $\det D \neq 0$ olduğundan D matrisi tersinirdir. Yani D matrisinin tersi vardır. Üstelik D matrisinin tersi

$D^{-1} = \text{diag}(d_1^{-1}, d_2^{-1}, \dots, d_M^{-1}, d_{M+1}^{-1}, \dots, d_{2M}^{-1}, d_{2M+1}^{-1}, d_{2M+2}^{-1})$ şeklinde olup Şekil 3.4.'de

gösterilmiştir. $D\phi D^{-1}$ matrisi de Şekil 3.5.'de gösterilmiştir. Tanım 1.2.12.'den ϕ ve

$D\phi D^{-1}$ matrisleri benzerdir ve Teorem 1.2.2'den ϕ ile $D\phi D^{-1}$ matrisleri aynı

özdeğerlerine sahiptir. ϕ ile $D\phi D^{-1}$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2M+2}$ olsun.

(3.1.1) sisteminin (c, c) denge noktasında lokal asimptotik kararlı olduğunu

göstermemiz için $\varphi_n = \phi \cdot \varphi_{n-1}$ lineerleştirilmiş sisteminin $\underbrace{(c, c, \dots, c)^T}_{2M+2 \text{ tane}}$ denge noktasında

lokal asimptotik kararlı olduğunu göstermeliyiz. Bunun için ise ϕ matrisinin bütün özdeğerlerinin mutlak değerlerinin maksimumunun 1'den küçük olduğunu göstermek yeterlidir.

O halde teoremin ispatı için

$$\forall 1 \leq t \leq 2M+2 \text{ için, } \max_{1 \leq t \leq 2M+2} |\lambda_t| < 1 \quad (3.3.31)$$

olduğunu göstermeliyiz.

Tanım 1.2.11.'den $D\phi D^{-1}$ matrisinin spektral yarıçapı $\rho(D\phi D^{-1}) = \max_{1 \leq t \leq 2M+2} |\lambda_t|$ ve

Teorem 1.2.1.'den $\|D\phi D^{-1}\|_\infty$ bir matris normu olduğundan $\rho(D\phi D^{-1}) \leq \|D\phi D^{-1}\|_\infty$ olup

$$\max_{1 \leq t \leq 2M+2} |\lambda_t| \leq \|D\phi D^{-1}\|_\infty \quad (3.3.32)$$

elde edilir. $1 \leq i, j \leq 2M+2$ için, $D\phi D^{-1} = (a_{ij})_{(2M+2) \times (2M+2)}$ olsun. Tanım 1.2.8.'den

$$\|D\phi D^{-1}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 2M+2} \sum_{j=1}^{2M+2} |a_{ij}| \text{ olup (3.3.32)'den}$$

$$\max_{1 \leq t \leq 2M+2} |\lambda_t| \leq \max_{1 \leq i \leq 2M+2} \sum_{j=1}^{2M+2} |a_{ij}| \quad (3.3.33)$$

yazılır.

(3.3.33) ve Şekil 3.5.'den

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq t \leq 2M+2} |\lambda_t| &\leq \max_{1 \leq i \leq 2M+2} \sum_{j=1}^{2M+2} |a_{ij}| \\ &= \max \left\{ \sum_{j=1}^{2M+2} |a_{1j}|, \sum_{j=1}^{2M+2} |a_{2j}|, \dots, \sum_{j=1}^{2M+2} |a_{Mj}|, \sum_{j=1}^{2M+2} |a_{(M+1)j}|, \sum_{j=1}^{2M+2} |a_{(M+2)j}|, \dots, \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=1}^{2M+2} |a_{(2M)j}|, \sum_{j=1}^{2M+2} |a_{(2M+1)j}|, \sum_{j=1}^{2M+2} |a_{(2M+2)j}| \right\} \\ &= \max \left\{ d_1 d_{2M+1}^{-1}, d_2 d_1^{-1}, \dots, d_M d_{M-1}^{-1}, d_{M+1} d_{2M+2}^{-1}, d_{M+2} d_{M+1}^{-1}, \dots, d_{2M} d_{2M-1}^{-1}, \right. \\ &\quad \left(d_{2M+1} c^{-2} d_{p-1}^{-1} + d_{2M+1} c^{-2} d_{M+q-1}^{-1} + d_{2M+1} c^{-2} d_{2M+2}^{-1} \right), \left(d_{2M+2} c^{-2} d_{r-1}^{-1} + \right. \\ &\quad \left. d_{2M+2} c^{-2} d_{M+s-1}^{-1} + d_{2M+2} c^{-2} d_{2M+1}^{-1} \right) \left. \right\} \\ &= \max \left\{ d_1 d_{2M+1}^{-1}, \max_{2 \leq k \leq M} \{ d_k d_{k-1}^{-1} \}, d_{M+1} d_{2M+2}^{-1}, \max_{2 \leq k \leq M} \{ d_{M+k} d_{M+k-1}^{-1} \}, \right. \\ &\quad \left. d_{2M+1} c^{-2} \left(d_{p-1}^{-1} + d_{M+q-1}^{-1} + d_{2M+2}^{-1} \right), d_{2M+2} c^{-2} \left(d_{r-1}^{-1} + d_{M+s-1}^{-1} + d_{2M+1}^{-1} \right) \right\} \\ &= \max \left\{ d_1 d_{2M+1}^{-1}, d_{M+1} d_{2M+2}^{-1}, \max_{2 \leq k \leq M} \{ d_k d_{k-1}^{-1}, d_{M+k} d_{M+k-1}^{-1} \}, d_{2M+1} c^{-2} \left(d_{p-1}^{-1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. d_{M+q-1}^{-1} + d_{2M+2}^{-1} \right), d_{2M+2} c^{-2} \left(d_{r-1}^{-1} + d_{M+s-1}^{-1} + d_{2M+1}^{-1} \right) \right\} \quad (3.3.34) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi (3.3.34)'ü inceleyelim.

i) (3.3.19)'dan $d_{2M+1} = d_{2M+2} = 1 \Rightarrow d_{2M+1}^{-1} = d_{2M+2}^{-1} = 1$, (3.3.29)'dan $d_1 < 1$ ve (3.3.30)'

dan $d_{M+1} < 1$ olduğundan

$$d_1 d_{2M+1}^{-1} < 1 \text{ ve } d_{M+1} d_{2M+2}^{-1} < 1 \quad (3.3.35)$$

bulunur.

ii) (3.3.29)'dan $0 < d_M < d_{M-1} < \dots < d_2 < d_1 < 1$ dir. Buradan

$$0 \neq d_1 \text{ ve } d_2 < d_1 \Rightarrow d_2 d_1^{-1} < 1$$

$$0 \neq d_2 \text{ ve } d_3 < d_2 \Rightarrow d_3 d_2^{-1} < 1$$

$$\vdots$$

$$0 \neq d_M \text{ ve } d_M < d_{M-1} \Rightarrow d_M d_{M-1}^{-1} < 1$$

olduğundan $2 \leq k \leq M$ için

$$d_k d_{k-1}^{-1} < 1 \quad (3.3.36)$$

yazılır.

iii) (3.3.30)'dan $0 < d_{2M} < d_{2M-1} < \dots < d_{M+2} < d_{M+1} < 1$ dir. Buradan

$$0 \neq d_{M+1} \text{ ve } d_{M+2} < d_{M+1} \Rightarrow d_{M+2} d_{M+1}^{-1} < 1$$

$$0 \neq d_{M+2} \text{ ve } d_{M+3} < d_{M+2} \Rightarrow d_{M+3} d_{M+2}^{-1} < 1$$

$$\vdots$$

$$0 \neq d_{2M-1} \text{ ve } d_{2M} < d_{2M-1} \Rightarrow d_{2M} d_{2M-1}^{-1} < 1$$

olduğundan $2 \leq k \leq M$ için

$$d_{M+k} d_{M+k-1}^{-1} < 1 \quad (3.3.37)$$

elde edilir. O halde (3.3.36) ve (3.3.37) eşitsizliklerinden

$$\max_{2 \leq k \leq M} \{d_k d_{k-1}^{-1}, d_{M+k} d_{M+k-1}^{-1}\} < 1 \quad (3.3.38)$$

olduğu görülür.

iv) (3.3.18)'den $1 \leq p-1 < M$ ve $1 \leq q-1 < M$ olduğundan $d_{p-1} = 1 - (p-1)\varepsilon$ ve

$d_{q-1} = 1 - (q-1)\varepsilon$ dur. $M = \max\{p, q, r, s\}$ olduğundan $p \leq M \Rightarrow p-1 \leq M-1$

$\Rightarrow -(p-1) \geq -(M-1)$ ve (3.3.26)'dan $0 < \varepsilon < 1$ olduğundan $-(p-1)\varepsilon \geq -(M-1)\varepsilon$

$\Rightarrow 1 - (p-1)\varepsilon \geq 1 - (M-1)\varepsilon$ dur. Benzer şekilde $1 - (q-1)\varepsilon \geq 1 - (M-1)\varepsilon$ bulunur.

Buradan

$$\frac{1}{1 - (p-1)\varepsilon} \leq \frac{1}{1 - (M-1)\varepsilon} \text{ ve } \frac{1}{1 - (q-1)\varepsilon} \leq \frac{1}{1 - (M-1)\varepsilon} \quad (3.3.39)$$

olur.

Diğer taraftan (3.3.28)'den $0 < 1 - (M-1)\varepsilon < 1$ olduğundan $3 - (M-1)\varepsilon < 3$ ve $c^2 > 0$

$\Rightarrow c^{-2} > 0$ olup $c^{-2} \left(\frac{3 - (M-1)\varepsilon}{1 - (M-1)\varepsilon} \right) < c^{-2} \left(\frac{3}{1 - (M-1)\varepsilon} \right)$ bulunur ve (3.3.20)'den

$$\varepsilon < \frac{c^2 - 3}{(M-1)c^2} \Rightarrow (M-1)\varepsilon < c^{-2}(c^2 - 3) = 1 - 3c^{-2}$$

$$\Rightarrow -(M-1)\varepsilon > -1 + 3c^{-2} \Rightarrow 1 - (M-1)\varepsilon > 3c^{-2} \Rightarrow \frac{3c^{-2}}{1 - (M-1)\varepsilon} < 1$$

olduğundan

$$c^{-2} \left(\frac{3 - (M-1)\varepsilon}{1 - (M-1)\varepsilon} \right) < 1 \quad (3.3.40)$$

yazılır.

$$\begin{aligned} d_{2M+1} c^{-2} (d_{p-1}^{-1} + d_{M+q-1}^{-1} + d_{2M+2}^{-1}) &= c^{-2} \left(\frac{1}{1 - (p-1)\varepsilon} + \frac{1}{1 - (q-1)\varepsilon} + 1 \right) \\ &\leq c^{-2} \left(\frac{1}{1 - (M-1)\varepsilon} + \frac{1}{1 - (M-1)\varepsilon} + 1 \right) \quad ((3.3.39)'dan) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= c^{-2} \left(\frac{3 - (M-1)\varepsilon}{1 - (M-1)\varepsilon} \right) \\ &< 1 \quad ((3.3.40)'dan) \end{aligned} \quad (3.3.41)$$

elde edilir.

v) iv)'dekine benzer şekilde $M = \max\{p, q, r, s\}$ olduğundan

$$\frac{1}{1 - (r-1)\varepsilon} \leq \frac{1}{1 - (M-1)\varepsilon} \quad , \quad \frac{1}{1 - (s-1)\varepsilon} \leq \frac{1}{1 - (M-1)\varepsilon} \quad (3.3.42)$$

yazılır.

$$\begin{aligned} d_{2M+2} c^{-2} (d_{r-1}^{-1} + d_{M+s-1}^{-1} + d_{2M+1}^{-1}) &= c^{-2} \left(\frac{1}{1 - (r-1)\varepsilon} + \frac{1}{1 - (s-1)\varepsilon} + 1 \right) \\ &\leq c^{-2} \left(\frac{1}{1 - (M-1)\varepsilon} + \frac{1}{1 - (M-1)\varepsilon} + 1 \right) \quad ((3.3.42)'den) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= c^{-2} \left(\frac{3 - (M-1)\varepsilon}{1 - (M-1)\varepsilon} \right) \\ &< 1 \quad ((3.3.40)'dan) \end{aligned} \quad (3.3.43)$$

elde edilir.

Sonuç olarak (3.3.35), (3.3.38), (3.3.41) ve (3.3.43) eşitsizliklerini (3.3.34)'de yerine yazarsak

$$\forall 1 \leq t \leq 2M+2 \text{ için, } \max_{1 \leq t \leq 2M+2} |\lambda_t| < 1 \quad (3.3.44)$$

elde ederiz. (3.3.31)'i elde ettiğimiz için teoremin ispatı tamamlanmış olur.

3.4. Global Çekicilik

Lemma 3.4.1. Kabul edelim ki $A > \sqrt{2}$ olsun. Bu taktirde $x, y \geq A$ için $x + y < Axy$ dir.

İspat: $f(x, y) = x + y - Axy$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 1 - Ay, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 1 - Ax \quad (3.4.1)$$

olarak bulunur.

$$A > \sqrt{2} \Rightarrow A \cdot A > 2 \Rightarrow A \cdot A > 1 \Rightarrow A > \frac{1}{A} \text{ ve } x, y \geq A \text{ için}$$

$$x, y > \frac{1}{A} \quad (3.4.2)$$

elde edilir. $A > \sqrt{2} > 0$ ve (3.4.2)'den $x > \frac{1}{A}$ olduğundan

$$1 - Ax < 0 \quad (3.4.3)$$

bulunur. Benzer şekilde $A > 0$ ve (3.4.2)'den $y > \frac{1}{A}$ olduğundan

$$1 - Ay < 0 \quad (3.4.4)$$

olduğu görülür. (3.4.3) ve (3.4.4) eşitsizliklerini (3.4.1)'de yerine yazarsak

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} < 0, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0 \quad (3.4.5)$$

elde ederiz. (3.4.5)'den $f(x, y)$ fonksiyonu x ve y de monoton azalandır.

$$f(A, A) = A + A - A \cdot A \cdot A = 2A - A^3 = A(2 - A^2) \text{ bulunur. Ayrıca } A > \sqrt{2} \Rightarrow A^2 > 2$$

$$\Rightarrow 2 - A^2 < 0 \text{ ve } A > 0 \text{ olduğundan } A(2 - A^2) < 0 \text{ olup}$$

$$f(A, A) < 0 \quad (3.4.6)$$

elde edilir. $f(x, y)$ fonksiyonu x ve y de monoton azalan ve $x, y \geq A$ olduğundan $f(x, y) \leq f(A, A) < 0 \Rightarrow x + y - Axy < 0 \Rightarrow x + y < Axy$ bulunur.

Teorem 3.4.1. Kabul edelim ki $A > \sqrt{2}$ olsun. Bu taktirde (3.1.1) sisteminin her pozitif çözümü (c, c) denge noktasına yakınsaktır.

İspat: $\{(x_n, y_n)\}$, (3.1.1) sisteminin keyfi bir pozitif çözümü olmak üzere

$$\Lambda_1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad \lambda_1 = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$\Lambda_2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad \lambda_2 = \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n$$

şeklinde olsun. Teorem 3.2.1. a)'dan $\forall n \geq 1$ için, $x_n > A \Rightarrow A < x_n$ olduğundan A , (x_n) dizisinin bir alt sınırıdır ve (x_n) dizisinin alt sınırlarının en büyüğü $\inf x_n$ olduğundan

$$A \leq \inf x_n \quad (3.4.7)$$

dir. Teorem 1.2.4.'den

$$\inf x_n \leq \lambda_1 \leq \Lambda_1 \leq \sup x_n < \infty \quad (3.4.8)$$

dur. (3.4.7), (3.4.8) eşitsizliklerinden ve kabulden

$$\sqrt{2} < A \leq \lambda_1 \leq \Lambda_1 < \infty \quad (3.4.9)$$

elde edilir. Benzer şekilde Teorem 3.2.1. a)'dan $\forall n \geq 1$ için, $y_n > A \Rightarrow A < y_n$ olduğundan A , (y_n) dizisinin bir alt sınırıdır ve (y_n) dizisinin alt sınırlarının en büyüğü $\inf y_n$ olduğundan

$$A \leq \inf y_n \quad (3.4.10)$$

dir. Teorem 1.2.4.'den

$$\inf y_n \leq \lambda_2 \leq \Lambda_2 \leq \sup y_n < \infty \quad (3.4.11)$$

dur. (3.4.10), (3.4.11) eşitsizliklerinden ve kabulden

$$\sqrt{2} < A \leq \lambda_2 \leq \Lambda_2 < \infty \quad (3.4.12)$$

elde edilir.

i) $q \geq 2 > 1$ olduğundan $(y_{n-q}) \supset (y_{n-1}) \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} (y_{n-q}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} (y_{n-1})$ olup

$$\frac{\limsup_{n \rightarrow \infty}(y_{n-1})}{\limsup_{n \rightarrow \infty}(y_{n-q})} \leq 1 \quad (3.4.13)$$

bulunur. Benzer şekilde $p \geq 2 > 0$ olduğundan

$$(x_{n-p}) \supset (x_n) \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty}(x_{n-p}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty}(x_n) \text{ olup}$$

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty}(x_{n-p})} \leq \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty}(x_n)} \quad (3.4.14)$$

bulunur. (3.4.9) ve (3.4.12) eşitsizliklerinden $\lambda_1 \leq \Lambda_1$ ve $\lambda_2 \leq \Lambda_2$ olduğundan $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \leq \Lambda_1 \cdot \Lambda_2$ olup

$$\frac{1}{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2} \leq \frac{1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \quad (3.4.15)$$

yazılır. (3.1.1) sistemi için, (3.4.13), (3.4.14) ve (3.4.15) eşitsizlikleri göz önüne alınırsa

$$x_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-p}y_{n-q}} \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-p}y_{n-q}} \right\}$$

$$\Rightarrow \Lambda_1 = A + \frac{\limsup_{n \rightarrow \infty}(y_{n-1})}{\limsup_{n \rightarrow \infty}(x_{n-p}) \limsup_{n \rightarrow \infty}(y_{n-q})} \leq A + \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty}(x_n)} = A + \frac{1}{\Lambda_1} = A + \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2}$$

$$\Lambda_1 \leq A + \frac{\Lambda_2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \quad (3.4.16)$$

elde edilir.

ii) $q \geq 2 > 1$ olduğundan $(y_{n-q}) \supset (y_{n-1}) \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty}(y_{n-q}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty}(y_{n-1})$ olup

$$\frac{\liminf_{n \rightarrow \infty}(y_{n-1})}{\liminf_{n \rightarrow \infty}(y_{n-q})} \geq 1 \quad (3.4.17)$$

bulunur. Benzer şekilde $p \geq 2 > 0$ olduğundan

$$(x_{n-p}) \supset (x_n) \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty}(x_{n-p}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty}(x_n) \text{ olup}$$

$$\frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty}(x_{n-p})} \geq \frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty}(x_n)} \quad (3.4.18)$$

bulunur. (3.1.1) sistemi için, (3.4.17), (3.4.18) ve (3.4.15) eşitsizlikleri göz önüne alınırsa

$$x_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-p}y_{n-q}} \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-p}y_{n-q}} \right\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_1 &= A + \frac{\liminf_{n \rightarrow \infty} (y_{n-1})}{\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_{n-p}) \liminf_{n \rightarrow \infty} (y_{n-q})} \geq A + \frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n)} = A + \frac{1}{\lambda_1} = A + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \\ \lambda_1 &\geq A + \frac{\lambda_2}{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2} \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

elde edilir.

iii) $r \geq 2 > 1$ olduğundan $(x_{n-r}) \supset (x_{n-1}) \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_{n-r}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_{n-1})$ olup

$$\frac{\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_{n-1})}{\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_{n-r})} \leq 1 \quad (3.4.20)$$

bulunur. Benzer şekilde $s \geq 2 > 0$ olduğundan

$$(y_{n-s}) \supset (y_n) \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} (y_{n-s}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} (y_n)$$

olup

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} (y_{n-s})} \leq \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} (y_n)} \quad (3.4.21)$$

bulunur. (3.1.1) sistemi için, (3.4.20), (3.4.21) ve (3.4.15) eşitsizlikleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} y_n &= A + \frac{x_{n-1}}{x_{n-r} y_{n-s}} \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ A + \frac{x_{n-1}}{x_{n-r} y_{n-s}} \right\} \\ \Rightarrow \Lambda_2 &= A + \frac{\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_{n-1})}{\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_{n-r}) \limsup_{n \rightarrow \infty} (y_{n-s})} \leq A + \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} (y_n)} = A + \frac{1}{\Lambda_2} = A + \frac{\Lambda_1}{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2} \\ \Lambda_2 &\leq A + \frac{\Lambda_1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

elde edilir.

iv) $r \geq 2 > 1$ olduğundan $(x_{n-r}) \supset (x_{n-1}) \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} (x_{n-r}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (x_{n-1})$ olup

$$\frac{\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_{n-1})}{\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_{n-s})} \geq 1 \quad (3.4.23)$$

bulunur. Benzer şekilde $s \geq 2 > 0$ olduğundan

$$(y_{n-s}) \supset (y_n) \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} (y_{n-s}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (y_n) \text{ olup}$$

$$\frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} (y_{n-s})} \geq \frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} (y_n)} \quad (3.4.24)$$

bulunur. (3.1.1) sistemi için, (3.4.23), (3.4.24) ve (3.4.15) eşitsizlikleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
 y_n &= A + \frac{x_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}} \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ A + \frac{x_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}} \right\} \\
 \Rightarrow \lambda_2 &= A + \frac{\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_{n-1})}{\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_{n-r}) \liminf_{n \rightarrow \infty} (y_{n-s})} \geq A + \frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} (y_n)} = A + \frac{1}{\lambda_2} = A + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \\
 \lambda_2 &\geq A + \frac{\lambda_1}{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2} \tag{3.4.25}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak (3.4.16), (3.4.19), (3.4.22) ve (3.4.25) eşitsizliklerinden

$$\Lambda_1 \leq A + \frac{\Lambda_2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \quad , \quad \Lambda_2 \leq A + \frac{\Lambda_1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \tag{3.4.26}$$

$$\lambda_1 \geq A + \frac{\lambda_2}{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2} \quad , \quad \lambda_2 \geq A + \frac{\lambda_1}{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2} \tag{3.4.27}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.4.26) ve (3.4.27) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
 \Lambda_1 \Lambda_2 \lambda_1 \lambda_2 &\leq A \Lambda_1 \lambda_1 \lambda_2 + \Lambda_1^2 \\
 \Lambda_1 \Lambda_2 \lambda_1 \lambda_2 &\geq A \Lambda_1 \Lambda_2 \lambda_1 + \lambda_1^2
 \end{aligned} \tag{3.4.28}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \Lambda_1 \Lambda_2 \lambda_1 \lambda_2 &\leq A \Lambda_2 \lambda_1 \lambda_2 + \Lambda_2^2 \\
 \Lambda_1 \Lambda_2 \lambda_1 \lambda_2 &\geq A \Lambda_1 \Lambda_2 \lambda_2 + \lambda_2^2
 \end{aligned} \tag{3.4.29}$$

ifadeleri bulunur. (3.4.28)'deki eşitsizliklerden $\Lambda_1 \Lambda_2 \lambda_1 \lambda_2 \leq A \Lambda_1 \lambda_1 \lambda_2 + \Lambda_1^2$ ve $-\Lambda_1 \Lambda_2 \lambda_1 \lambda_2 \leq -A \Lambda_1 \Lambda_2 \lambda_1 - \lambda_1^2$ elde edilir ve bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa $0 \leq -A \Lambda_1 \lambda_1 (\Lambda_2 - \lambda_2) + \Lambda_1^2 - \lambda_1^2$ olur ve bunun düzenlemesi

$$\Lambda_1^2 - \lambda_1^2 \geq A \Lambda_1 \lambda_1 (\Lambda_2 - \lambda_2) \tag{3.4.30}$$

ifadesini verir.

Benzer şekilde (3.4.29)'daki eşitsizliklerden $\Lambda_1 \Lambda_2 \lambda_1 \lambda_2 \leq A \Lambda_2 \lambda_1 \lambda_2 + \Lambda_2^2$ ve $-\Lambda_1 \Lambda_2 \lambda_1 \lambda_2 \leq -A \Lambda_1 \Lambda_2 \lambda_2 - \lambda_2^2$ elde edilir ve bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa $0 \leq -A \Lambda_2 \lambda_2 (\Lambda_1 - \lambda_1) + \Lambda_2^2 - \lambda_2^2$ olup

$$\Lambda_2^2 - \lambda_2^2 \geq A \Lambda_2 \lambda_2 (\Lambda_1 - \lambda_1) \tag{3.4.31}$$

elde edilir.

$\Lambda_1 \geq \lambda_1 \Rightarrow \Lambda_1^2 - \lambda_1^2 \geq 0$, $A \Lambda_1 \lambda_1 (\Lambda_2 - \lambda_2) \geq 0$, $\Lambda_2 \geq \lambda_2 \Rightarrow \Lambda_2^2 - \lambda_2^2 \geq 0$ ve

$A\Lambda_2\lambda_2(\Lambda_1 - \lambda_1) \geq 0$ olduğundan (3.4.30) ve (3.4.31) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılırsa

$$(\Lambda_1^2 - \lambda_1^2)(\Lambda_2^2 - \lambda_2^2) \geq A^2\Lambda_1\Lambda_2\lambda_1\lambda_2(\Lambda_1 - \lambda_1)(\Lambda_2 - \lambda_2) \quad (3.4.32)$$

olduğu görülür.

Diğer taraftan $\Lambda_1 > \lambda_1$ ve $\Lambda_2 > \lambda_2$ ise $\Lambda_1 - \lambda_1 > 0$ ve $\Lambda_2 - \lambda_2 > 0$ ifadeleri kullanılarak (3.4.32) eşitsizliğinden

$$(\Lambda_1 + \lambda_1)(\Lambda_2 + \lambda_2) \geq A^2\Lambda_1\Lambda_2\lambda_1\lambda_2 \quad (3.4.33)$$

bulunur. $A > \sqrt{2}$ ve $\Lambda_1, \lambda_1 \geq A$ olduğundan Lemma 3.4.1.'den

$$\Lambda_1 + \lambda_1 < A\Lambda_1\lambda_1 \quad (3.4.34)$$

elde edilir. Benzer şekilde $A > \sqrt{2}$ ve $\Lambda_2, \lambda_2 \geq A$ olduğundan Lemma 3.4.1.'den

$$\Lambda_2 + \lambda_2 < A\Lambda_2\lambda_2 \quad (3.4.35)$$

olduğu görülür. $\Lambda_1 + \lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 + \lambda_2 > 0$, $A\Lambda_1\lambda_1 > 0$ ve $A\Lambda_2\lambda_2 > 0$ olduğundan (3.4.34) ve (3.4.35) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılırsa

$$(\Lambda_1 + \lambda_1)(\Lambda_2 + \lambda_2) < A^2\Lambda_1\Lambda_2\lambda_1\lambda_2 \quad (3.4.36)$$

bulunur. Bu ise (3.4.33) eşitsizliği ile çelişir. O halde $\Lambda_1 = \lambda_1$ ya da $\Lambda_2 = \lambda_2$ elde olmalıdır.

a) Kabul edelim ki $\Lambda_1 = \lambda_1$ olsun. Bu taktirde $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ olduğundan Teorem 1.2.3.'den $\underline{\lim}(x_n) = \overline{\lim}(x_n)$ olup $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ mevcuttur. $\Lambda_1 = \lambda_1$ olduğundan (3.4.30) eşitsizliğinden

$\Lambda_1^2 - \lambda_1^2 \geq A\Lambda_1\lambda_1(\Lambda_2 - \lambda_2) \Rightarrow 0 \geq A\Lambda_1\lambda_1(\Lambda_2 - \lambda_2) \geq 0 \Rightarrow \Lambda_2 = \lambda_2$ elde edilir. Bu taktirde $\limsup_{n \rightarrow \infty} y_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n$ olduğundan Teorem 1.2.3.'den $\underline{\lim}(y_n) = \overline{\lim}(y_n)$ olup $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ mevcuttur.

b) Kabul edelim ki $\Lambda_2 = \lambda_2$ olsun. Bu taktirde $\limsup_{n \rightarrow \infty} y_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n$ olduğundan Teorem 1.2.3.'den $\underline{\lim}(y_n) = \overline{\lim}(y_n)$ olup $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ mevcuttur. $\Lambda_2 = \lambda_2$ olduğundan (3.4.31) eşitsizliğinden

$\Lambda_2^2 - \lambda_2^2 \geq A\Lambda_2\lambda_2(\Lambda_1 - \lambda_1) \Rightarrow 0 \geq A\Lambda_2\lambda_2(\Lambda_1 - \lambda_1) \geq 0 \Rightarrow \Lambda_1 = \lambda_1$ elde edilir.

Bu taktirde $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ olduğundan Teorem 1.2.3.'den $\underline{\lim}(x_n) = \overline{\lim}(x_n)$

olup $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ mevcuttur.

(3.1.1) sisteminin pozitif denge noktası bir tek olduğundan a) ve b) şıklarından $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$ elde edilir. Dolayısıyla (3.1.1) sisteminin her pozitif çözümü (c, c) denge noktasına yakınsaktır ve (3.1.1) sisteminin (c, c) denge noktası global çekicidir.

3.5. Global Asimptotik Kararlılık

Teorem 3.5.1. Kabul edelim ki $A > \sqrt{2}$ olsun. Bu taktirde (3.1.1) sisteminin (c, c) pozitif denge noktası sistemin bütün pozitif çözümleri için global asimptotik kararlıdır.

İspat: $A > \sqrt{2}$ ve $\sqrt{2} > \frac{2}{\sqrt{3}}$ olduğundan $A > \frac{2}{\sqrt{3}}$ olup Teorem 3.3.1.'den (3.1.1) sisteminin (c, c) pozitif denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

Diğer taraftan $A > \sqrt{2}$ olduğundan Teorem 3.4.1.'den (3.1.1) sisteminin her pozitif çözümü (c, c) denge noktasına yakınsaktır ve bu yüzden (3.1.1) sisteminin (c, c) denge noktası global çekicidir. Dolayısıyla (3.1.1) sisteminin (c, c) pozitif denge noktası lokal asimptotik kararlı ve global çekici olduğundan global asimptotik kararlıdır.

4. BÖLÜM

$$x_n = A + \frac{1}{y_{n-p}}, y_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}} \text{ ŞEKLİNDEKİ}$$

LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN KARARLILIK ANALİZİ

4.1. Giriş

Bu bölümde Zhang, Yang, Megson ve Evans [4] in makalesi detaylı olarak incelenmiştir. Onlar [4] de $p \geq 1, r \geq 1, s \geq 1, (p, r, s \in \mathbb{Z}), A \geq 0$ ve $x_{1-r}, x_{2-r}, \dots, x_{-1}, x_0, y_{1-\max\{p,s\}}, y_{2-\max\{p,s\}}, \dots, y_{-1}, y_0$ pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_n = A + \frac{1}{y_{n-p}}, y_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}}, n = 1, 2, \dots \quad (4.1.1)$$

şeklindeki yüksek mertebeden fark denklem sistemlerini ele aldılar.

(4.1.1) sisteminin denge noktaları

$$\bar{x} = A + \frac{1}{\bar{y}}, \bar{y} = A + \frac{\bar{y}}{\bar{x} \cdot \bar{y}} \quad (4.1.2)$$

denklem sisteminin çözümü ile bulunur. (4.1.2) sisteminden

$$\bar{x} = A + \frac{1}{\bar{y}}, \bar{y} = A + \frac{1}{\bar{x}} \quad (4.1.3)$$

elde edilir. (4.1.3)'teki denklemleri A 'nın durumlarına göre inceleyelim:

i) $A > 0$ durumu için,

$$\bar{x} = A + \frac{1}{\bar{y}} = A + \frac{1}{A + \frac{1}{\bar{x}}} = A + \frac{1}{\frac{A\bar{x} + 1}{\bar{x}}} = A + \frac{\bar{x}}{A\bar{x} + 1} = \frac{A^2\bar{x} + A + \bar{x}}{A\bar{x} + 1}$$

$$A\bar{x}^2 + \bar{x} = A^2\bar{x} + A + \bar{x} \Rightarrow A\bar{x}^2 - A^2\bar{x} - A = 0 \Rightarrow A(\bar{x}^2 - A\bar{x} - 1) = 0$$

bulunur. Bu ifadenin sıfır olabilmesi için

$\bar{x}^2 - A\bar{x} - 1 = 0$ olmalıdır ve $\Delta = A^2 + 4$ olduğundan

$\bar{x}_1 = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4}}{2}$, $\bar{x}_2 = \frac{A - \sqrt{A^2 + 4}}{2}$ denge noktaları bulunur. Buradan $A > 0$

dolayısıyla $\sqrt{A^2 + 4} > 0$ olup $\bar{x}_1 > 0$ elde edilir. Diğer taraftan $A < \sqrt{A^2 + 4}$ olduğundan $\bar{x}_2 < 0$ olacağı açıktır. $\bar{x}_1$ denge noktası (4.1.3)'ün ikinci denkleminde yerine yazılırsa

$$\bar{y} = A + \frac{1}{\bar{x}} = A + \frac{1}{\frac{A + \sqrt{A^2 + 4}}{2}} = A + \frac{2}{A + \sqrt{A^2 + 4}} = A + \frac{2(\sqrt{A^2 + 4} - A)}{A^2 + 4 - A^2} = A + \frac{\sqrt{A^2 + 4} - A}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4}}{2}$$

elde edilir. Bu taktirde $A > 0$ durumu için (4.1.1) sistemi

$$(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (c, c) = \left(\frac{A + \sqrt{A^2 + 4}}{2}, \frac{A + \sqrt{A^2 + 4}}{2} \right) \quad (4.1.4)$$

şeklinde bir tek pozitif denge noktasına sahiptir.

ii) $A = 0$ durumu için,

$\bar{x} = \frac{1}{\bar{y}}, \bar{y} = \frac{1}{\bar{x}}$ olduğundan $\bar{x} \cdot \bar{y} = 1$ bulunur. O halde $A = 0$ durumu için (4.1.1)

sisteminin pozitif denge noktası $\bar{x} \cdot \bar{y} = 1$ denklemini sağlayan $\bar{x}, \bar{y} \in (0, \infty)$ olacak şekildeki sonsuz sayıda $(\bar{x}, \bar{y})$ ikililerinden oluşur.

Bu bölümde aşağıdaki beş durum incelendi:

- 1) $A > 0$ iken (4.1.1) sisteminin her pozitif çözümü sınırlıdır.
- 2) $A = 0$ iken (4.1.1) sistemi periyodiktir.
- 3) $A > \frac{2}{\sqrt{3}}$ iken (4.1.1) sisteminin (c, c) denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.
- 4) $A > \sqrt{2}$ iken (4.1.1) sisteminin her pozitif çözümü (c, c) 'ye yakınsaktır.
- 5) $A > \sqrt{2}$ iken (4.1.1) sisteminin (c, c) denge noktası global asimptotik kararlıdır.

4.2. Sınırlılık

Teorem 4.2.1. $A > 0$ ve $\{(x_n, y_n)\}$, (4.1.1) sisteminin bir pozitif çözümü olsun.

Bu taktirde aşığıdaki üç durum sağlanır:

a) $\forall n \geq 1$ için, $x_n > A$ ve $y_n > A$ dır.

b) $n \geq p+1$ için, $x_n < A + \frac{1}{A}$ dır.

c) $n \geq \max\{r+s, 2s\}$ için, $y_n < \sum_{i=0}^s A^{-(2i-1)}$ dir.

İspat: a) $\{(x_n, y_n)\}$, (4.1.1) sisteminin bir pozitif çözümü ise $n > 0$ için,

$$x_n > 0 \text{ ve } y_n > 0 \quad (4.2.1)$$

dır. Diğer taraftan (4.1.1) sistemi için, $p \geq 1, r \geq 1, s \geq 1, A > 0$ ve

$$\begin{aligned} x_{1-r}, x_{2-r}, \dots, x_{-1}, x_0 &> 0 \\ y_{1-\max\{p,s\}}, y_{2-\max\{p,s\}}, \dots, y_{-1}, y_0 &> 0 \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

olduğunu biliyoruz. (4.2.2)'den sırasıyla

$$\begin{aligned} 1-r \leq l \leq 0 &\Rightarrow x_l > 0 \\ 1-\max\{p,s\} \leq m \leq 0 &\Rightarrow y_m > 0 \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

elde edilir.

i) $n \geq 1 \Rightarrow n-1 \geq 0$ dır. (4.2.1)'den $n-1 > 0 \Rightarrow y_{n-1} > 0$ dır. (4.2.2)'den

$n-1=0 \Rightarrow y_{n-1} = y_0 > 0$ dır.

ii) (4.2.1)'den $n-r > 0 \Rightarrow x_{n-r} > 0$ dır. $n-r \leq 0$ ise $1 \leq n$ olduğundan $1-r \leq n-r \leq 0$

olup (4.2.3)'den $x_{n-r} > 0$ dır.

iii) (4.2.1)'den $n-p > 0$ ve $n-s > 0 \Rightarrow y_{n-p} > 0$ ve $y_{n-s} > 0$ dır. $n-p \leq 0$ ve

$n-s \leq 0$ ise $\max\{p,s\} \geq p, s \Rightarrow -\max\{p,s\} \leq -p, -s$ ve $1 \leq n$ olduğundan

$1-\max\{p,s\} \leq n-p, n-s \leq 0$ olup (4.2.3)'den $y_{n-p}, y_{n-s} > 0$ dır.

Buna göre i), ii) ve iii) şıklarından $p \geq 1, r \geq 1, s \geq 1, A > 0$ olmak üzere $\forall n \geq 1$ için,

$y_{n-p} > 0$ ve $y_{n-1} > 0, x_{n-r} > 0, y_{n-s} > 0$ olup (4.1.1)'den $x_n > A$ ve $y_n > A$ elde edilir.

b) $n \geq p+1 \Rightarrow n-p \geq 1$ için, Teorem 4.2.1. a)'dan $y_{n-p} > A$ olup

$$\frac{1}{y_{n-p}} < \frac{1}{A} \quad (4.2.4)$$

yazılır.

(4.1.1) ve (4.2.4)'den $x_n = A + \frac{1}{y_{n-p}} < A + \frac{1}{A}$ bulunur.

c) (4.1.1)'den

$$y_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}} \Rightarrow y_{n-1} = A + \frac{y_{n-2}}{x_{n-r-1}y_{n-s-1}} \text{ olduğundan}$$

$$y_n = A + \frac{A + \frac{y_{n-2}}{x_{n-r-1}y_{n-s-1}}}{x_{n-r}y_{n-s}} \Rightarrow y_n = A + \frac{A}{x_{n-r}y_{n-s}} + \frac{y_{n-2}}{x_{n-r}x_{n-r-1}y_{n-s}y_{n-s-1}} \quad (4.2.5)$$

elde edilir.

$$y_{n-2} = A + \frac{y_{n-3}}{x_{n-r-2}y_{n-s-2}} \text{ olduğundan (4.2.5)'den}$$

$$y_n = A + \frac{A}{x_{n-r}y_{n-s}} + \frac{A + \frac{y_{n-3}}{x_{n-r-2}y_{n-s-2}}}{x_{n-r}x_{n-r-1}y_{n-s}y_{n-s-1}} \text{ olup}$$

$$y_n = A + \frac{A}{x_{n-r}y_{n-s}} + \frac{A}{x_{n-r}x_{n-r-1}y_{n-s}y_{n-s-1}} + \frac{y_{n-3}}{x_{n-r}x_{n-r-1}x_{n-r-2}y_{n-s}y_{n-s-1}y_{n-s-2}} \quad (4.2.6)$$

bulunur. Tümevarım ile

$$y_n = A + \frac{A}{x_{n-r}y_{n-s}} + \frac{A}{x_{n-r}x_{n-r-1}y_{n-s}y_{n-s-1}} + \dots + \frac{A}{x_{n-r}x_{n-r-1}x_{n-r-(s-2)}y_{n-s}y_{n-s-1}y_{n-s-(s-2)}} \\ + \frac{y_{n-s}}{x_{n-r}x_{n-r-1}x_{n-r-(s-1)}y_{n-s}y_{n-s-1}y_{n-s-(s-1)}} \quad (4.2.7)$$

elde edilir. $n \geq \max\{r+s, 2s\}$ olduğundan

$$n \geq r+s \Rightarrow n-r-s \geq 0 \Rightarrow n-r-s+1 \geq 1$$

$$n \geq 2s \Rightarrow n-2s \geq 0 \Rightarrow n-2s+1 \geq 1 \quad (4.2.8)$$

olduğu görülür. (4.2.8)'den

$$n-r > n-r-1 > \dots > n-r-(s-2) > n-r-(s-1) \geq 1$$

$$n-s > n-s-1 > \dots > n-s-(s-2) > n-s-(s-1) \geq 1 \quad (4.2.9)$$

yazılır. Teorem 4.2.1. a) şikkından ve (4.2.9)'dan

$$x_{n-r}, x_{n-r-1}, \dots, x_{n-r-(s-2)}, x_{n-r-(s-1)} > A$$

$$y_{n-s}, y_{n-s-1}, \dots, y_{n-s-(s-2)}, y_{n-s-(s-1)} > A \quad (4.2.10)$$

bulunur. (4.2.10)'dan

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_{n-r}}, \frac{1}{x_{n-r-1}}, \dots, \frac{1}{x_{n-r-(s-2)}}, \frac{1}{x_{n-r-(s-1)}} &< \frac{1}{A} \\ \frac{1}{y_{n-s}}, \frac{1}{y_{n-s-1}}, \dots, \frac{1}{y_{n-s-(s-2)}}, \frac{1}{y_{n-s-(s-1)}} &< \frac{1}{A} \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

elde edilir.

(4.2.11) eşitsizlikleri (4.2.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y_n &< A + \frac{A}{A \cdot A} + \frac{A}{A \cdot A \cdot A \cdot A} + \dots + \frac{A}{\underbrace{A \cdot A \cdots A}_{s-1 \text{ tane}} \cdot \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{s-1 \text{ tane}}} + \frac{1}{\underbrace{A \cdot A \cdots A}_s \cdot \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{s-1 \text{ tane}}} \\ y_n &< A + \frac{1}{A} + \frac{1}{A^3} + \dots + \frac{1}{A^{2s-3}} + \frac{1}{A^{2s-1}} = \sum_{i=0}^s A^{-(2i-1)} \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.2. $\{(x_n, y_n)\}$, (4.1.1) sisteminin bir pozitif çözümü ve $A > 0$ olsun.

Bu taktirde,

a) Teorem 4.2.1. a) ve b) şıklarından $n \geq p+1$ için,

$$A < x_n < A + \frac{1}{A}$$

yazılır.

b) Teorem 4.2.1. a) ve c) şıklarından $n \geq \max\{r+s, 2s\}$ için,

$$A < y_n < \sum_{i=0}^s A^{-(2i-1)}$$

yazılır.

Sonuç 4.2.2.'den $A > 0$, $n \geq p+1$ ve $n \geq \max\{r+s, 2s\}$ olmak üzere, (4.1.1) sisteminin her pozitif çözümü sınırlıdır.

4.3. Periyodiklik

$A = 0$ iken (4.1.1) sistemi

$$x_n = \frac{1}{y_{n-p}}, \quad y_n = \frac{y_{n-1}}{x_{n-r} y_{n-s}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3.1)$$

şekline dönüşür. Şimdi (4.3.1) sisteminin periyodikliğini inceleyeceğiz.

Teorem 4.3.1. $\{(x_n, y_n)\}$, (4.3.1) sisteminin bir pozitif çözümü olsun.

Bu taktirde aşağıdaki üç durum sağlanır:

a) $s=1$ iken (4.3.1) sisteminin bütün pozitif çözümleri periyodiktir ve $p+r$ periyotludur.

b) $p+r=s>1$ iken (4.3.1) sisteminin bütün pozitif çözümleri bazı $a>0$ için $(x_n, y_n) = \left(a, \frac{1}{a}\right)$ şeklindedir.

c) $p+r-1=s>1$ iken (4.3.1) sisteminin bütün pozitif çözümleri periyodiktir ve $2s$ periyotludur.

İspat: **a)** $s=1$ olsun. Bu taktirde (4.3.1) sistemi

$$x_n = \frac{1}{y_{n-p}}, y_n = \frac{1}{x_{n-r}} \quad (4.3.2)$$

şeklinde olur. (4.3.2)'den

$$x_{n+p+r} = \frac{1}{y_{(n+p+r)-p}} = \frac{1}{y_{n+r}} = \frac{1}{\frac{1}{x_{(n+r)-r}}} = \frac{1}{\frac{1}{x_n}} = x_n \quad (4.3.3)$$

$$y_{n+p+r} = \frac{1}{x_{(n+p+r)-r}} = \frac{1}{x_{n+p}} = \frac{1}{\frac{1}{y_{(n+p)-p}}} = \frac{1}{\frac{1}{y_n}} = y_n \quad (4.3.4)$$

elde edilir. (4.3.3) ve (4.3.4) eşitliklerinden ispat tamamlanmış olur.

b)

$$p+r=s>1 \quad (4.3.5)$$

olsun. Eğer (x_n) ve (y_n) dizilerinin periyodik ve periyotlarının 1 olduğu gösterilirse bu dizilerin bütün terimleri birbirine eşit olur.

(4.3.1)'den

$$x_{n+p} = \frac{1}{y_n} \Rightarrow x_{n+p} y_n = 1 \quad (4.3.6)$$

dir. (4.3.1), (4.3.5) ve (4.3.6) eşitliklerinden

$$y_{n+p+r} = \frac{y_{(n+p+r)-1}}{x_{(n+p+r)-r} y_{(n+p+r)-s}} = \frac{y_{n+p+r-1}}{x_{n+p} y_{n+p+r-s}} = \frac{y_{n+p+r-1}}{x_{n+p} y_n} = y_{n+p+r-1} \quad (4.3.7)$$

elde edilir. (4.3.1) ve (4.3.7) eşitliklerinden

$$x_{n+p+r} = \frac{1}{y_{(n+p+r)-p}} = \frac{1}{y_{n+r}} = \frac{1}{y_{n+r-1}} = x_{n+p+r-1} \quad (4.3.8)$$

bulunur. (4.3.8)'den $x_{n+p+r} = x_{n+p+r-1}$ olduğundan $a > 0$ olmak üzere

$$x_n = a \quad (4.3.9)$$

olsun. (4.3.1), (4.3.7) ve (4.3.9) eşitliklerinden

$$x_n = \frac{1}{y_{n-p}} \Rightarrow a = \frac{1}{y_{n-p}} \Rightarrow y_{n-p} = \frac{1}{a} \text{ olup}$$

$$y_n = \frac{1}{a} \quad (4.3.10)$$

elde edilir. (4.3.9) ve (4.3.10) eşitliklerinden $a > 0$ olmak üzere

$$(x_n, y_n) = \left(a, \frac{1}{a} \right)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

c)

$$p + r - 1 = s > 1 \quad (4.3.11)$$

olsun.

i) (4.3.1)'den

$$x_{n+2s} = \frac{1}{y_{n+2s-p}} \quad (4.3.12)$$

$$y_{n+2s-p} = \frac{y_{(n+2s-p)-1}}{x_{(n+2s-p)-r} y_{(n+2s-p)-s}} = \frac{y_{n+2s-p-1}}{x_{n+2s-p-r} y_{n+2s-p-s}} \quad (4.3.13)$$

elde edilir. (4.3.13), (4.3.12)'de yerine yazılırsa

$$x_{n+2s} = \frac{x_{n+2s-p-r} y_{n+2s-p-s}}{y_{n+2s-p-1}} \quad (4.3.14)$$

bulunur. (4.3.1)'den

$$y_{n+2s-p-1} = \frac{y_{(n+2s-p-1)-1}}{x_{(n+2s-p-1)-r} y_{(n+2s-p-1)-s}} = \frac{y_{n+2s-p-2}}{x_{n+2s-p-r-1} y_{n+2s-p-1-s}} \quad (4.3.15)$$

olur. (4.3.15), (4.3.14)'de yerine yazılırsa

$$x_{n+2s} = \frac{x_{n+2s-p-r} x_{n+2s-p-r-1} y_{n+2s-p-s} y_{n+2s-p-1-s}}{y_{n+2s-p-2}} \quad (4.3.16)$$

olduğu görülür.

(4.3.1)'den

$$x_{n+2s-p-r} = \frac{1}{y_{(n+2s-p-r)-p}} = \frac{1}{y_{n+2s-2p-r}} \quad (4.3.17)$$

elde edilir.

(4.3.11)'den $p+r-1=s \Rightarrow -r=p-s-1$ olduğundan

$$n+2s-2p-r = n+2s-2p+p-s-1 = n+s-p-1 \quad (4.3.18)$$

bulunur. (4.3.18)'den

$$y_{n+2s-2p-r} = y_{n+s-p-1} \quad (4.3.19)$$

olur. (4.3.19), (4.3.17)'de yerine yazılırsa

$$x_{n+2s-p-r} y_{n+s-p-1} = 1 \quad (4.3.20)$$

olduğu görülür. (4.3.20), (4.3.16)'da yerine yazılırsa

$$x_{n+2s} = \frac{x_{n+2s-p-r-1} y_{n+s-p}}{y_{n+2s-p-2}} \quad (4.3.21)$$

elde edilir. (4.3.1)'den

$$y_{n+2s-p-2} = \frac{y_{(n+2s-p-2)-1}}{x_{(n+2s-p-2)-r} y_{(n+2s-p-2)-s}} = \frac{y_{n+2s-p-3}}{x_{n+2s-p-r-2} y_{n+s-p-2}} \quad (4.3.22)$$

olur. (4.3.22), (4.3.21)'de yerine yazılırsa

$$x_{n+2s} = \frac{x_{n+2s-p-r-1} x_{n+2s-p-r-2} y_{n+s-p} y_{n+s-p-2}}{y_{n+2s-p-3}} \quad (4.3.23)$$

bulunur. (4.3.20)'de n yerine $n-1$ yazılırsa

$$x_{n+2s-p-r-1} y_{n+s-p-2} = 1 \quad (4.3.24)$$

olduğu görülür. (4.3.24), (4.3.23)'de yerine yazılırsa

$$x_{n+2s} = \frac{x_{n+2s-p-r-2} y_{n+s-p}}{y_{n+2s-p-3}} \quad (4.3.25)$$

elde edilir. (4.3.21) ve (4.3.25) eşitliklerinden tümevarım ile

$$\begin{aligned} x_{n+2s} &= \frac{x_{n+2s-p-r-1} y_{n+s-p}}{y_{n+2s-p-2}} = \frac{x_{n+2s-p-r-2} y_{n+s-p}}{y_{n+2s-p-3}} = \dots = \frac{x_{n+2s-p-r-(s-1)} y_{n+s-p}}{y_{n+2s-p-s}} \\ &= \frac{x_{n+s-p-r+1} y_{n+s-p}}{y_{n+s-p}} = x_{n+s-p-r+1} \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

bulunur. (4.3.11)'den

$$p+r-1=s \Rightarrow s-p-r+1=0 \quad (4.3.27)$$

yazılır. (4.3.27), (4.3.26)'da yerine yazılırsa

$$x_{n+2s} = x_n \quad (4.3.28)$$

elde edilir. Dolayısıyla (x_n) dizisi periyodiktir ve periyodu $2s$ dir.

ii) (4.3.1)'den

$$y_{n+2s} = \frac{y_{(n+2s)-1}}{x_{(n+2s)-r} y_{(n+2s)-s}} = \frac{y_{n+2s-1}}{x_{n+2s-r} y_{n+s}} \quad (4.3.29)$$

$$x_{n+2s-r} = \frac{1}{y_{n+2s-r-p}} \quad (4.3.30)$$

elde edilir. (4.3.11)'den

$$p+r-1=s \Rightarrow -r-p=-s-1 \quad (4.3.31)$$

yazılır. (4.3.31), (4.3.30)'da yerine yazılırsa

$$x_{n+2s-r} = \frac{1}{y_{n+s-1}} \quad (4.3.32)$$

bulunur. (4.3.32), (4.3.29)'da yerine yazılırsa

$$y_{n+2s} = \frac{y_{n+2s-1} y_{n+s-1}}{y_{n+s}} \quad (4.3.33)$$

olduğu görülür. (4.3.1)'den

$$y_{n+s} = \frac{y_{n+s-1}}{x_{n+s-r} y_{n+s-s}} = \frac{y_{n+s-1}}{x_{n+s-r} y_n} \quad (4.3.34)$$

elde edilir. (4.3.34), (4.3.33)'de yerine yazılırsa

$$y_{n+2s} = y_{n+2s-1} x_{n+s-r} y_n \quad (4.3.35)$$

bulunur. i)'den (x_n) dizisinin periyodu $2s$ olduğundan (4.3.1)'den

$$x_{n+s-r} = x_{n+3s-r} = \frac{1}{y_{n+3s-r-p}} \quad (4.3.36)$$

yazılır. (4.3.31)'den $-r-p=-s-1$ olduğundan (4.3.36)'dan

$$x_{n+s-r} y_{n+2s-1} = 1 \quad (4.3.37)$$

elde edilir. (4.3.37), (4.3.35)'de yerine yazılırsa

$$y_{n+2s} = y_n \quad (4.3.38)$$

bulunur. Dolayısıyla (y_n) dizisinin de periyodiktir ve periyodu $2s$ dir.

4.4. Lokal Asimptotik Kararlılık

Teorem 4.4.1. Kabul edelim ki $A > \frac{2}{\sqrt{3}}$ ve $\max\{p, r, s\} \geq 2$ olsun. Bu taktirde (4.1.1)

sisteminin (c, c) pozitif denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

İspat: $M = \max\{p, r, s\}$ olsun. Bu taktirde $M \geq 2$ olur. Aşağıdaki dönüşümleri göz önüne alalım.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n-1} = w_n^1 \\ x_{n-2} = w_n^2 \\ x_{n-3} = w_n^3 \\ \vdots \\ x_{n-(M-2)} = w_n^{M-2} \\ x_{n-(M-1)} = w_n^{M-1} \\ y_{n-1} = z_n^1 \\ y_{n-2} = z_n^2 \\ y_{n-3} = z_n^3 \\ \vdots \\ y_{n-(M-2)} = z_n^{M-2} \\ y_{n-(M-1)} = z_n^{M-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{n-2} = w_{n-1}^1 \\ x_{n-3} = w_{n-1}^2 \\ x_{n-4} = w_{n-1}^3 \\ \vdots \\ x_{n-(M-1)} = w_{n-1}^{M-2} \\ x_{n-M} = w_{n-1}^{M-1} \\ y_{n-2} = z_{n-1}^1 \\ y_{n-3} = z_{n-1}^2 \\ y_{n-4} = z_{n-1}^3 \\ \vdots \\ y_{n-(M-1)} = z_{n-1}^{M-2} \\ y_{n-M} = z_{n-1}^{M-1} \end{array} \right. \quad (4.4.1)$$

olsun.

Diğer taraftan $p, r, s \leq M$ olduğundan

$$x_{n-r} = w_{n-1}^{r-1}, y_{n-p} = z_{n-1}^{p-1}, y_{n-s} = z_{n-1}^{s-1} \quad (4.4.2)$$

dir. (4.4.1) ve (4.4.2) eşitliklerinden (4.1.1) sistemini

$$\left\{ \begin{array}{l} w_n^1 = x_{n-1}, w_n^2 = w_{n-1}^1, w_n^3 = w_{n-1}^2, \dots, w_n^{M-1} = w_{n-1}^{M-2}, \\ z_n^1 = y_{n-1}, z_n^2 = z_{n-1}^1, z_n^3 = z_{n-1}^2, \dots, z_n^{M-1} = z_{n-1}^{M-2}, \\ x_n = A + \frac{1}{z_{n-1}^{p-1}}, y_n = A + \frac{y_{n-1}}{w_{n-1}^{r-1} \cdot z_{n-1}^{s-1}}, \end{array} \right. \quad (4.4.3)$$

1. mertebeden lineer olmayan denklem sistemi şeklinde yazabiliriz. Şimdi (4.4.3) sistemini lineerleştirelim.

i)

$$x_n = A + \frac{1}{z_{n-1}^{p-1}} \quad (4.4.4)$$

denkleminin (4.1.4)'deki $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (c, c)$ denge noktasındaki lineerleştirilmiş denklemini bulalım. $x_n = f(z_{n-1}^{p-1})$ ve $z_{n-1}^{q-1} = u_0$ olmak üzere

$$x_n = f(u_0) = A + \frac{1}{u_0} \quad (4.4.5)$$

yazılır. Buradan

$$P_0 = \left. \frac{\partial f}{\partial u_0}(u_0) \right|_{(c,c)} = \left. \frac{\partial}{\partial u_0} \left(A + \frac{1}{u_0} \right) \right|_{(c,c)} = -\frac{1}{u_0^2} \Big|_{(c,c)} = -\frac{1}{c^2} = -c^{-2} \quad (4.4.6)$$

elde edilir. (4.4.4) denkleminin (c, c) denge noktasındaki lineerleştirilmiş denklemi, (4.4.6)'dan $x_n = P_0 \cdot u_0$ şeklinde olup

$$x_n = -c^{-2} \cdot z_{n-1}^{p-1} \quad (4.4.7)$$

olarak bulunur.

ii)

$$y_n = A + \frac{y_{n-1}}{w_{n-1}^{r-1} \cdot z_{n-1}^{s-1}} \quad (4.4.8)$$

denkleminin (4.1.4)'deki $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (c, c)$ denge noktasındaki lineerleştirilmiş denklemini bulalım. $y_n = g(y_{n-1}, w_{n-1}^{r-1}, z_{n-1}^{s-1})$ ve $y_{n-1} = v_0$, $w_{n-1}^{r-1} = v_1$, $z_{n-1}^{s-1} = v_2$ olmak üzere

$$y_n = g(v_0, v_1, v_2) = A + \frac{v_0}{v_1 \cdot v_2} \quad (4.4.9)$$

yazılır. Buradan

$$R_0 = \left. \frac{\partial g}{\partial v_0}(v_0, v_1, v_2) \right|_{(c,c)} = \left. \frac{\partial}{\partial v_0} \left(A + \frac{v_0}{v_1 \cdot v_2} \right) \right|_{(c,c)} = \left. \frac{1}{v_1 \cdot v_2} \right|_{(c,c)} = \frac{1}{c \cdot c} = c^{-2} \quad (4.4.10)$$

$$R_1 = \left. \frac{\partial g}{\partial v_1}(v_0, v_1, v_2) \right|_{(c,c)} = \left. \frac{\partial}{\partial v_1} \left(A + \frac{v_0}{v_1 \cdot v_2} \right) \right|_{(c,c)} = -\left. \frac{v_0}{v_1^2 \cdot v_2} \right|_{(c,c)} = -\frac{c}{c^2 \cdot c} = -c^{-2} \quad (4.4.11)$$

$$R_2 = \left. \frac{\partial g}{\partial v_2}(v_0, v_1, v_2) \right|_{(c,c)} = \left. \frac{\partial}{\partial v_2} \left(A + \frac{v_0}{v_1 \cdot v_2} \right) \right|_{(c,c)} = -\left. \frac{v_0}{v_1 \cdot v_2^2} \right|_{(c,c)} = -\frac{c}{c \cdot c^2} = -c^{-2} \quad (4.4.12)$$

elde edilir. (4.4.8) denkleminin (c, c) denge noktasındaki lineerleştirilmiş denklemi, (4.4.10), (4.4.11) ve (4.4.12) eşitliklerinden $y_n = R_0 \cdot v_0 + R_1 \cdot v_1 + R_2 \cdot v_2$ şeklinde olup

$$y_n = c^{-2} \cdot y_{n-1} - c^{-2} \cdot w_{n-1}^{r-1} - c^{-2} \cdot z_{n-1}^{s-1} \quad (4.4.13)$$

olarak bulunur.

(4.4.3) sisteminin denge noktası $\underbrace{(c, c, \dots, c)}_{2M \text{ tane}}$ dir. i) ve ii) şıklarından (4.4.3) sisteminin

$\underbrace{(c, c, \dots, c)}_{2M \text{ tane}}$ denge noktasındaki lineerleştirilmiş sistemi

$$\begin{cases} w_n^1 = x_{n-1}, w_n^2 = w_{n-1}^1, w_n^3 = w_{n-1}^2, \dots, w_n^{M-1} = w_{n-1}^{M-2}, \\ z_n^1 = y_{n-1}, z_n^2 = z_{n-1}^1, z_n^3 = z_{n-1}^2, \dots, z_n^{M-1} = z_{n-1}^{M-2}, \\ x_n = -c^{-2} \cdot z_{n-1}^{p-1}, y_n = c^{-2} \cdot y_{n-1} - c^{-2} \cdot w_{n-1}^{r-1} - c^{-2} \cdot z_{n-1}^{s-1}, \end{cases} \quad (4.4.14)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi (4.4.14) lineerleştirilmiş sistemini matris biçiminde yazalım. Bu taktirde sistemin denge noktası $\underbrace{(c, c, \dots, c)}_{2M \text{ tane}}^T$ şekline dönüşür.

$\psi_n = (w_n^1, w_n^2, w_n^3, \dots, w_n^{M-2}, w_n^{M-1}, z_n^1, z_n^2, z_n^3, \dots, z_n^{M-2}, z_n^{M-1}, x_n, y_n)^T$ olsun. Buradan

$\psi_{n-1} = (w_{n-1}^1, w_{n-1}^2, w_{n-1}^3, \dots, w_{n-1}^{M-2}, w_{n-1}^{M-1}, z_{n-1}^1, z_{n-1}^2, z_{n-1}^3, \dots, z_{n-1}^{M-2}, z_{n-1}^{M-1}, x_{n-1}, y_{n-1})^T$ yazılır.

$$\psi_n = \psi \cdot \psi_{n-1} \quad (4.4.15)$$

lineerleştirilmiş sistemi Şekil 4.1.'de gösterilmiştir. Burada ψ_n ve ψ_{n-1} , $(2M) \times 1$ tipinde matrislerdir. ψ ise $(2M) \times (2M)$ tipinde bir matristir. Şekil 4.1.'de ψ 'nin $(2M-1)$. satırındaki $-c^{-2}$ terimi $(M-1+p-1)$. sütunundadır. Şekil 4.1.'de ψ 'nin $(2M)$. satırındaki $-c^{-2}$ terimleri sırasıyla $(r-1)$. ve $(M-1+s-1)$. sütunundadırlar ve c^{-2} terimi ise $(2M)$. sütunundadır.

$\varepsilon > 0$ ve $\varepsilon < \min \left\{ \frac{1}{M-1}, \frac{c^2-3}{(M-1)c^2} \right\}$ olmak üzere $1 \leq k \leq M-1$ için,

$$d_k = d_{M-1+k} = 1 - k\varepsilon \quad (4.4.16)$$

olsun. Ayrıca

$$d_{2M-1} = d_{2M} = 1 \quad (4.4.17)$$

olsun.

Buna göre $P = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_{M-1}, d_{(M-1)+1} = d_M, \dots, d_{(M-1)+(M-1)} = d_{2M-2}, d_{2M-1}, d_{2M})$

şeklinde bir köşegen matris olsun.

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{1}{M-1}, \frac{c^2-3}{(M-1)c^2} \right\} \Rightarrow \varepsilon < \frac{1}{M-1} \quad \text{ve} \quad \varepsilon < \frac{c^2-3}{(M-1)c^2} \quad (4.4.18)$$

dir. (4.4.18)'den $\varepsilon < \frac{1}{M-1}$ ve $M-1 \geq 1 > 0$ olduğundan

$$(M-1)\varepsilon < 1 \Rightarrow -(M-1)\varepsilon > -1 \Rightarrow 1 - (M-1)\varepsilon > 0 \quad (4.4.19)$$

dır. $k \leq M-1$ ve $\varepsilon > 0$ olduğundan

$$k\varepsilon \leq (M-1)\varepsilon \Rightarrow -k\varepsilon \geq -(M-1)\varepsilon \Rightarrow 1 - k\varepsilon \geq 1 - (M-1)\varepsilon \quad (4.4.20)$$

dur. (4.4.19) ve (4.4.20) eşitsizliklerinden

$$1 - k\varepsilon > 0 \quad (4.4.21)$$

elde edilir. (4.4.21)'den $1 - k\varepsilon > 0 \Rightarrow 1 > k\varepsilon$ ve $k > 0 \Rightarrow \frac{1}{k} > 0$ olduğundan

$$\varepsilon < \frac{1}{k} \quad (4.4.22)$$

dır. Diğer taraftan

$$1 \leq k \Rightarrow \frac{1}{k} \leq 1 \quad (4.4.23)$$

dir. (4.4.22) ve (4.4.23) eşitsizliklerinden $\varepsilon < 1$ olup $\varepsilon > 0$ olduğundan

$$0 < \varepsilon < 1 \quad (4.4.24)$$

elde edilir.

Kabulden $A > \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow A^2 > \frac{4}{3} \Rightarrow A^2 + 4 > \frac{4}{3} + 4 \Rightarrow A^2 + 4 > \frac{16}{3} \Rightarrow \sqrt{A^2 + 4} > \frac{4}{\sqrt{3}}$ bulunur.

O halde $A > \frac{2}{\sqrt{3}}$ ve $\sqrt{A^2 + 4} > \frac{4}{\sqrt{3}}$ olduğundan $A + \sqrt{A^2 + 4} > \frac{6}{\sqrt{3}}$ olup

$$c = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4}}{2} > \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow c^2 > 3 \quad (4.4.25)$$

yazılır.

$M-1 \geq 1$ ve $\varepsilon > 0$ olduğundan

$$(M-1) > (M-2) > \dots > 2 > 1 \Rightarrow (M-1)\varepsilon > (M-2)\varepsilon > \dots > 2\varepsilon > \varepsilon$$

$$\Rightarrow -(M-1)\varepsilon < -(M-2)\varepsilon < \dots < -2\varepsilon < -\varepsilon \Rightarrow 1 - (M-1)\varepsilon < 1 - (M-2)\varepsilon < \dots < 1 - 2\varepsilon < 1 - \varepsilon$$

ve (4.4.19)'dan $0 < 1 - (M-1)\varepsilon$ ve $\varepsilon > 0 \Rightarrow -\varepsilon < 0 \Rightarrow 1 - \varepsilon < 1$ olduğundan

$$0 < 1 - (M-1)\varepsilon < 1 - (M-2)\varepsilon < \dots < 1 - 2\varepsilon < 1 - \varepsilon < 1 \quad (4.4.26)$$

elde edilir. (4.4.16) ve (4.4.26) ifadelerinden

$$0 < d_{M-1} < d_{M-2} < \dots < d_2 < d_1 < 1 \quad (4.4.27)$$

$$0 < d_{M-1+(M-1)} < d_{M-1+(M-2)} < \dots < d_{M-1+2} < d_{M-1+1} < 1 \quad (4.4.28)$$

elde edilir. P bir köşegen matris olduğundan

$$\det P = d_1 \cdot d_2 \cdots d_{M-1} \cdot d_M \cdots d_{2M-2} \cdot d_{2M-1} \cdot d_{2M} \quad \text{olarak bulunur.} \quad (4.4.27) \quad , \quad (4.4.28)$$

eşitsizliklerinden ve (4.4.17)'den $\det P \neq 0$ olduğundan P matrisi tersinirdir. Yani P matrisinin tersi vardır. Üstelik P matrisinin tersi $P^{-1} = \text{diag}(d_1^{-1}, d_2^{-1}, \dots, d_{M-1}^{-1}, d_M^{-1}, \dots, d_{2M-2}^{-1}, d_{2M-1}^{-1}, d_{2M}^{-1})$ şeklinde olup Şekil 4.4.'de gösterilmiştir. $P\psi P^{-1}$ matrisi de Şekil 4.5.'de gösterilmiştir. Tanım 1.2.12.'den ψ ve $P\psi P^{-1}$ matrisleri benzerdir ve Teorem 1.2.2'den ψ ile $P\psi P^{-1}$ matrisleri aynı özdeğerlerine sahiptir. ψ ile $P\psi P^{-1}$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2M}$ olsun.

(4.1.1) sisteminin (c, c) denge noktasında lokal asimptotik kararlı olduğunu

göstermemiz için $\psi_n = \psi \cdot \psi_{n-1}$ lineerleştirilmiş sisteminin $\underbrace{(c, c, \dots, c)^T}_{2M \text{ tane}}$ denge

noktasında lokal asimptotik kararlı olduğunu göstermeliyiz. Bunun için ise ψ matrisinin bütün özdeğerlerinin mutlak değerlerinin maksimumunun 1'den küçük olduğunu göstermek yeterlidir. O halde teoremin ispatı için

$$\forall 1 \leq t \leq 2M \text{ için, } \max_{1 \leq t \leq 2M} |\lambda_t| < 1 \quad (4.4.29)$$

olduğunu göstermeliyiz. Tanım 1.2.11.'den $P\psi P^{-1}$ matrisinin spektral yarıçapı

$$\rho(P\psi P^{-1}) = \max_{1 \leq t \leq 2M} |\lambda_t| \text{ ve Teorem 1.2.1.'den } \|P\psi P^{-1}\|_{\infty} \text{ bir matris normu olduğundan}$$

$$\rho(P\psi P^{-1}) \leq \|P\psi P^{-1}\|_{\infty} \text{ olup}$$

$$\max_{1 \leq t \leq 2M} |\lambda_t| \leq \|P\psi P^{-1}\|_{\infty} \quad (4.4.30)$$

elde edilir. $1 \leq i, j \leq 2M$ için, $P\psi P^{-1} = (b_{ij})_{(2M) \times (2M)}$ olsun. Tanım 1.2.8.'den

$$\|P\psi P^{-1}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq 2M} \sum_{j=1}^{2M} |b_{ij}| \text{ olup (4.4.30)' dan}$$

$$\max_{1 \leq t \leq 2M} |\lambda_t| \leq \max_{1 \leq i \leq 2M} \sum_{j=1}^{2M} |b_{ij}| \quad (4.4.31)$$

yazılır.

(4.4.31) ve Şekil 4.5.'den

$$\begin{aligned}
\max_{1 \leq t \leq 2M} |\lambda_t| &\leq \max_{1 \leq i \leq 2M} \sum_{j=1}^{2M} |b_{ij}| \\
&= \max \left\{ \sum_{j=1}^{2M} |b_{1j}|, \sum_{j=1}^{2M} |b_{2j}|, \dots, \sum_{j=1}^{2M} |b_{(M-1)j}|, \sum_{j=1}^{2M} |b_{Mj}|, \sum_{j=1}^{2M} |b_{(M+1)j}|, \dots, \sum_{j=1}^{2M} |b_{(2M-2)j}|, \right. \\
&\quad \left. \sum_{j=1}^{2M} |b_{(2M-1)j}|, \sum_{j=1}^{2M} |b_{(2M)j}| \right\} \\
&= \max \left\{ d_1 d_{2M-1}^{-1}, d_2 d_1^{-1}, \dots, d_{M-1} d_{M-2}^{-1}, d_M d_{2M}^{-1}, d_{M+1} d_M^{-1}, \dots, d_{2M-2} d_{2M-3}^{-1}, \right. \\
&\quad \left. (d_{2M-1} c^{-2} d_{M-1+p-1}^{-1}), (d_{2M} c^{-2} d_{r-1}^{-1} + d_{2M} c^{-2} d_{M-1+s-1}^{-1} + d_{2M} c^{-2} d_{2M}^{-1}) \right\} \\
&= \max \left\{ d_1 d_{2M-1}^{-1}, \max_{2 \leq k \leq M-1} \{d_k d_{k-1}^{-1}\}, d_M d_{2M}^{-1}, \max_{2 \leq k \leq M-1} \{d_{M-1+k} d_{M-1+k-1}^{-1}\}, \right. \\
&\quad \left. (d_{2M-1} c^{-2} d_{M-1+p-1}^{-1}), d_{2M} c^{-2} (d_{r-1}^{-1} + d_{M-1+s-1}^{-1} + d_{2M}^{-1}) \right\} \\
&= \max \left\{ d_1 d_{2M-1}^{-1}, d_M d_{2M}^{-1}, \max_{2 \leq k \leq M-1} \{d_k d_{k-1}^{-1}, d_{M-1+k} d_{M-1+k-1}^{-1}\}, (d_{2M-1} c^{-2} d_{M-1+p-1}^{-1}), \right. \\
&\quad \left. d_{2M} c^{-2} (d_{r-1}^{-1} + d_{M-1+s-1}^{-1} + d_{2M}^{-1}) \right\} \tag{4.4.32}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi (4.4.32)'yi inceleyelim.

i) (4.4.17)'den $d_{2M-1} = d_{2M} = 1 \Rightarrow d_{2M-1}^{-1} = d_{2M}^{-1} = 1$, (4.4.27)'den $d_1 < 1$ ve (4.4.28)'den $d_M < 1$ olduğundan

$$d_1 d_{2M-1}^{-1} < 1 \text{ ve } d_M d_{2M}^{-1} < 1 \tag{4.4.33}$$

bulunur.

ii) (4.4.27)'den $0 < d_{M-1} < d_{M-2} < \dots < d_2 < d_1 < 1$ dir. Buradan

$$0 \neq d_1 \text{ ve } d_2 < d_1 \Rightarrow d_2 d_1^{-1} < 1$$

$$0 \neq d_2 \text{ ve } d_3 < d_2 \Rightarrow d_3 d_2^{-1} < 1$$

⋮

$$0 \neq d_{M-1} \text{ ve } d_{M-1} < d_{M-2} \Rightarrow d_{M-1} d_{M-2}^{-1} < 1$$

olduğundan $2 \leq k \leq M-1$ için

$$d_k d_{k-1}^{-1} < 1 \tag{4.4.34}$$

yazılır.

iii) (4.4.28)'den $0 < d_{2M-2} < d_{2M-3} < \dots < d_{M+1} < d_M < 1$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} 0 \neq d_M \quad \text{ve} \quad d_{M+1} < d_M &\Rightarrow d_{M+1} d_M^{-1} < 1 \\ 0 \neq d_{M+1} \quad \text{ve} \quad d_{M+2} < d_{M+1} &\Rightarrow d_{M+2} d_{M+1}^{-1} < 1 \\ &\vdots \\ 0 \neq d_{2M-3} \quad \text{ve} \quad d_{2M-2} < d_{2M-3} &\Rightarrow d_{2M-2} d_{2M-3}^{-1} < 1 \end{aligned}$$

olduğundan $2 \leq k \leq M-1$ için

$$d_{M-1+k} d_{M-1+k-1}^{-1} < 1 \quad (4.4.35)$$

olduğu görülür. O halde (4.4.34) ve (4.4.35) eşitsizliklerinden

$$\max_{2 \leq k \leq M-1} \{d_k d_{k-1}^{-1}, d_{M-1+k} d_{M-1+k-1}^{-1}\} < 1 \quad (4.4.36)$$

elde edilir.

iv) (4.4.16)'dan $1 \leq p-1 \leq M-1$ olduğundan $d_{M-1+p-1} = 1 - (p-1)\varepsilon$ dur.

$M = \max\{p, r, s\}$ olduğundan $p \leq M \Rightarrow p-1 \leq M-1 \Rightarrow -(p-1) \geq -(M-1)$

ve (4.4.24)'den $0 < \varepsilon < 1$ olduğundan $-(p-1)\varepsilon \geq -(M-1)\varepsilon$
 $\Rightarrow 1 - (p-1)\varepsilon \geq 1 - (M-1)\varepsilon$ dur. Buradan

$$\frac{1}{1 - (p-1)\varepsilon} \leq \frac{1}{1 - (M-1)\varepsilon} \quad (4.4.37)$$

olur. Diğer taraftan (4.4.18)'den

$\varepsilon < \frac{c^2 - 3}{(M-1)c^2} \Rightarrow c^2 - 3 > c^2 (M-1)\varepsilon \Rightarrow c^2 + c^2 (M-1)\varepsilon > 3$ olduğundan

$$c^2 (1 + (M-1)\varepsilon) > 1 \quad (4.4.38)$$

elde edilir. (4.4.38)'den

$$c^{-2} \left(\frac{1}{1 + (M-1)\varepsilon} \right) < 1 \quad (4.4.39)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} d_{2M-1} c^{-2} d_{M-1+p-1}^{-1} &= c^{-2} \left(\frac{1}{1 - (p-1)\varepsilon} \right) \\ &\leq c^{-2} \left(\frac{1}{1 - (M-1)\varepsilon} \right) \quad ((4.4.37)'den) \\ &< 1 \quad ((4.4.39)'dan) \end{aligned} \quad (4.4.40)$$

elde edilir.

v) (4.4.16)'dan $1 \leq r-1 \leq M-1$ ve $1 \leq s-1 \leq M-1$ olduğundan $d_{r-1} = 1 - (r-1)\varepsilon$ ve $d_{M-1+s-1} = 1 - (s-1)\varepsilon$ dur. $M = \max\{p, r, s\}$ olduğundan $r \leq M \Rightarrow r-1 \leq M-1 \Rightarrow -(r-1) \geq -(M-1)$ ve (4.4.24)'den $0 < \varepsilon < 1$ olduğundan $-(r-1)\varepsilon \geq -(M-1)\varepsilon \Rightarrow 1 - (r-1)\varepsilon \geq 1 - (M-1)\varepsilon$ dur. Benzer şekilde $1 - (s-1)\varepsilon \geq 1 - (M-1)\varepsilon$ bulunur. Buradan

$$\frac{1}{1 - (r-1)\varepsilon} \leq \frac{1}{1 - (M-1)\varepsilon} \text{ ve } \frac{1}{1 - (s-1)\varepsilon} \leq \frac{1}{1 - (M-1)\varepsilon} \quad (4.4.41)$$

olur.

Diğer taraftan (4.4.26)'dan $0 < 1 - (M-1)\varepsilon < 1$ olduğundan $3 - (M-1)\varepsilon < 3$ ve $c^2 > 0$

$\Rightarrow c^{-2} > 0$ olup $c^{-2} \left(\frac{3 - (M-1)\varepsilon}{1 - (M-1)\varepsilon} \right) < c^{-2} \left(\frac{3}{1 - (M-1)\varepsilon} \right)$ bulunur ve (4.4.18)'den

$$\varepsilon < \frac{c^2 - 3}{(M-1)c^2} \Rightarrow (M-1)\varepsilon < c^{-2}(c^2 - 3) = 1 - 3c^{-2}$$

$$\Rightarrow -(M-1)\varepsilon > -1 + 3c^{-2} \Rightarrow 1 - (M-1)\varepsilon > 3c^{-2} \Rightarrow \frac{3c^{-2}}{1 - (M-1)\varepsilon} < 1$$

olduğundan

$$c^{-2} \left(\frac{3 - (M-1)\varepsilon}{1 - (M-1)\varepsilon} \right) < 1 \quad (4.4.42)$$

yazılır.

$$\begin{aligned} d_{2M} c^{-2} (d_{r-1}^{-1} + d_{M-1+s-1}^{-1} + d_{2M}^{-1}) &= c^{-2} \left(\frac{1}{1 - (r-1)\varepsilon} + \frac{1}{1 - (s-1)\varepsilon} + 1 \right) \\ &\leq c^{-2} \left(\frac{1}{1 - (M-1)\varepsilon} + \frac{1}{1 - (M-1)\varepsilon} + 1 \right) \quad ((4.4.41)'den) \\ &= c^{-2} \left(\frac{3 - (M-1)\varepsilon}{1 - (M-1)\varepsilon} \right) \\ &< 1 \quad ((4.4.42)'den) \end{aligned} \quad (4.4.43)$$

elde edilir.

Sonuç olarak (4.4.33), (4.4.36), (4.4.40) ve (4.4.43) eşitsizlikleri (4.4.32)'de yerine yazılırsa

$$\forall 1 \leq t \leq 2M \text{ için, } \max_{1 \leq t \leq 2M} |\lambda_t| < 1 \quad (4.4.44)$$

elde edilir. (4.4.29)'u elde ettiğimiz için teoremin ispatı tamamlanmış olur.

4.5. Global Çekicilik

Teorem 4.5.1. Kabul edelim ki $A > \sqrt{2}$ olsun. Bu taktirde (4.1.1) sisteminin her pozitif çözümü (c, c) denge noktasına yakınsaktır.

İspat: $\{(x_n, y_n)\}$, (4.1.1) sisteminin keyfi bir pozitif çözümü olmak üzere

$$L_1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad l_1 = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$L_2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad l_2 = \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n$$

şeklinde olsun. Teorem 4.2.1. a)'dan $\forall n \geq 1$ için, $x_n > A \Rightarrow A < x_n$ olduğundan A , (x_n) dizisinin bir alt sınırıdır ve (x_n) dizisinin alt sınırlarının en büyüğü $\inf x_n$ olduğundan

$$A \leq \inf x_n \quad (4.5.1)$$

dir. Teorem 1.2.4.'den

$$\inf x_n \leq l_1 \leq L_1 \leq \sup x_n < \infty \quad (4.5.2)$$

dur. (4.5.1), (4.5.2) eşitsizliklerinden ve kabulden

$$\sqrt{2} < A \leq l_1 \leq L_1 < \infty \quad (4.5.3)$$

elde edilir. Benzer şekilde Teorem 4.2.1. a)'dan $\forall n \geq 1$ için, $y_n > A \Rightarrow A < y_n$ olduğundan A , (y_n) dizisinin bir alt sınırıdır ve (y_n) dizisinin alt sınırlarının en büyüğü $\inf y_n$ olduğundan

$$A \leq \inf y_n \quad (4.5.4)$$

dir. Teorem 1.2.4.'den

$$\inf y_n \leq l_2 \leq L_2 \leq \sup y_n < \infty \quad (4.5.5)$$

dur. (4.5.4), (4.5.5) eşitsizliklerinden ve kabulden

$$\sqrt{2} < A \leq l_2 \leq L_2 < \infty \quad (4.5.6)$$

elde edilir.

i) $p \geq 1 > 0$ olduğundan $(y_{n-p}) \supset (y_n) \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} (y_{n-p}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} (y_n)$ olup

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} (y_{n-p})} \leq \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} (y_n)} \quad (4.5.7)$$

bulunur. (4.5.6)'dan $l_2 \leq L_2$ olduğundan

$$\frac{1}{L_2} \leq \frac{1}{l_2} \quad (4.5.8)$$

yazılır. (4.1.1) sistemi için, (4.5.7) ve (4.5.8) eşitsizlikleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} x_n &= A + \frac{1}{y_{n-p}} \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ A + \frac{1}{y_{n-p}} \right\} \\ \Rightarrow L_1 &= A + \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} (y_{n-p})} \leq A + \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} (y_n)} = A + \frac{1}{L_2} \\ L_1 &\leq A + \frac{1}{l_2} \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

elde edilir.

ii) $p \geq 1 > 0$ olduğundan $(y_{n-p}) \supset (y_n) \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} (y_{n-p}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (y_n)$ olup

$$\frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} (y_{n-p})} \geq \frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} (y_n)} \quad (4.5.10)$$

bulunur. (4.1.1) sistemi için (4.5.10) ve (4.5.8) eşitsizlikleri göz önüne

$$\begin{aligned} x_n &= A + \frac{1}{y_{n-p}} \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ A + \frac{1}{y_{n-p}} \right\} \\ \Rightarrow l_1 &= A + \frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} (y_{n-p})} \geq A + \frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} (y_n)} = A + \frac{1}{L_2} \\ l_1 &\geq A + \frac{1}{L_2} \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

elde edilir.

iii) $s \geq 1$ olduğundan $(y_{n-s}) \supset (y_{n-1}) \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} (y_{n-s}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} (y_{n-1})$ olup

$$\frac{\limsup_{n \rightarrow \infty} (y_{n-1})}{\limsup_{n \rightarrow \infty} (y_{n-s})} \leq 1 \quad (4.5.12)$$

bulunur. Benzer şekilde $r \geq 1 > 0$ olduğundan

$(x_{n-r}) \supset (x_n) \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_{n-r}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n)$ olup

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_{n-r})} \leq \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n)} \quad (4.5.13)$$

bulunur. (4.5.3) ve (4.5.6) eşitsizliklerinden $l_1 \leq L_1$ ve $l_2 \leq L_2$ olduğundan $l_1 \cdot l_2 \leq L_1 \cdot L_2$ olup

$$\frac{1}{L_1 \cdot L_2} \leq \frac{1}{l_1 \cdot l_2} \quad (4.5.14)$$

yazılır. (4.1.1) sistemi için, (4.5.12), (4.5.13) ve (4.5.14) eşitsizlikleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} y_n &= A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-r} y_{n-s}} \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-r} y_{n-s}} \right\} \\ \Rightarrow L_2 &= A + \frac{\limsup_{n \rightarrow \infty} (y_{n-1})}{\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_{n-r}) \limsup_{n \rightarrow \infty} (y_{n-s})} \leq A + \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n)} = A + \frac{1}{L_1} = A + \frac{L_2}{L_1 \cdot L_2} \\ L_2 &\leq A + \frac{L_2}{l_1 \cdot l_2} \end{aligned} \quad (4.5.15)$$

elde edilir.

iv) $s \geq 1$ olduğundan $(y_{n-s}) \supset (y_{n-1}) \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} (y_{n-s}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (y_{n-1})$ olup

$$\frac{\liminf_{n \rightarrow \infty} (y_{n-1})}{\liminf_{n \rightarrow \infty} (y_{n-s})} \geq 1 \quad (4.5.16)$$

bulunur. Benzer şekilde $r \geq 1 > 0$ olduğundan

$(x_{n-r}) \supset (x_n) \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} (x_{n-r}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n)$ olup

$$\frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_{n-r})} \geq \frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n)} \quad (4.5.17)$$

bulunur. (4.1.1) sistemi için (4.5.16), (4.5.17) ve (4.5.14) eşitsizlikleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} y_n &= A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-r} y_{n-s}} \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-r} y_{n-s}} \right\} \\ \Rightarrow l_2 &= A + \frac{\liminf_{n \rightarrow \infty} (y_{n-1})}{\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_{n-r}) \liminf_{n \rightarrow \infty} (y_{n-s})} \geq A + \frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n)} = A + \frac{1}{l_1} = A + \frac{l_2}{l_1 \cdot l_2} \\ l_2 &\geq A + \frac{l_2}{L_1 \cdot L_2} \end{aligned} \quad (4.5.18)$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.5.9), (4.5.11), (4.5.15) ve (4.5.18) eşitsizliklerinden

$$L_1 \leq A + \frac{1}{l_2} \quad , \quad l_2 \geq A + \frac{l_2}{L_1 \cdot L_2} \quad (4.5.19)$$

$$l_1 \geq A + \frac{1}{L_2} \quad , \quad L_2 \leq A + \frac{L_2}{l_1 \cdot l_2} \quad (4.5.20)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (4.5.19) ve (4.5.20) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} L_1 L_2 l_2 &\leq A L_2 l_2 + L_2 \\ L_1 L_2 l_2 &\geq A L_1 L_2 + l_2 \end{aligned} \quad (4.5.21)$$

ve

$$\begin{aligned} L_2 l_1 l_2 &\geq A L_2 l_2 + l_2 \\ L_2 l_1 l_2 &\leq A l_1 l_2 + L_2 \end{aligned} \quad (4.5.22)$$

ifadeleri bulunur. (4.5.21)'deki eşitsizliklerden $A L_1 L_2 + l_2 \leq L_1 L_2 l_2 \leq A L_2 l_2 + L_2$ olup

$$A L_1 L_2 + l_2 \leq A L_2 l_2 + L_2 \quad (4.5.23)$$

elde edilir. (4.5.22)'deki eşitsizliklerden $A L_2 l_2 + l_2 \leq L_2 l_1 l_2 \leq A l_1 l_2 + L_2$ olup

$$A L_2 l_2 + l_2 \leq A l_1 l_2 + L_2 \quad (4.5.24)$$

yazılır. (4.5.23) ve (4.5.24) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} A L_1 L_2 + 2 l_2 &\leq A l_1 l_2 + 2 L_2 \Rightarrow A L_1 L_2 - 2 L_2 \leq A l_1 l_2 - 2 l_2 \\ &\Rightarrow L_2 (A L_1 - 2) \leq l_2 (A l_1 - 2) \end{aligned} \quad (4.5.25)$$

olduğu görülür. Diğer taraftan $\sqrt{2} < A$ olduğundan ve (4.5.3)'den

$$2 < A \cdot A \Rightarrow 0 < A \cdot A - 2 \leq A \cdot l_1 - 2 \text{ olup}$$

$$A \cdot l_1 - 2 > 0 \quad (4.5.26)$$

elde edilir. (4.5.3)'den

$$A l_1 - 2 \leq A L_1 - 2 \quad (4.5.27)$$

ve (4.5.6)'dan

$$l_2 \leq L_2 \quad (4.5.28)$$

yazılır. (4.5.26)'dan dolayı (4.5.27) ve (4.5.28) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılırsa

$$L_2 (A l_1 - 2) \geq l_2 (A l_1 - 2) \quad (4.5.29)$$

elde edilir. (4.5.25) ve (4.5.29) eşitsizliklerinden

$$l_2 (A l_1 - 2) = L_2 (A l_1 - 2) \quad (4.5.30)$$

olduğu görülür.

a) (4.5.28)'den $l_2 \leq L_2$ olduğundan (4.5.30)'daki eşitliğin sağlanması için

$$Al_1 - 2 \geq AL_1 - 2 \quad (4.5.31)$$

olması gerekir. (4.5.27) ve (4.5.31) eşitsizliklerinden $Al_1 - 2 = AL_1 - 2$ olup

$$l_1 = L_1 \quad (4.5.32)$$

elde edilir.

b) (4.5.27)'den $Al_1 - 2 \leq AL_1 - 2$ olduğundan (4.5.30)'daki eşitliğin sağlanması için

$$l_2 \geq L_2 \quad (4.5.33)$$

olması gerekir. (4.5.28) ve (4.5.33) eşitsizliklerinden

$$l_2 = L_2 \quad (4.5.34)$$

elde edilir.

(4.5.32)'den $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ olduğundan Teorem 1.2.3.'den $\underline{\lim}(x_n) = \overline{\lim}(x_n)$ olup $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ mevcuttur. (4.5.34)'den $\limsup_{n \rightarrow \infty} y_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n$ olduğundan Teorem 1.2.3.'den $\underline{\lim}(y_n) = \overline{\lim}(y_n)$ olup $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ mevcuttur.

Bu taktirde (4.1.1) sisteminin pozitif denge noktası bir tek olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$ elde edilir. Dolayısıyla (4.1.1) sisteminin her pozitif çözümü (c, c) denge noktasına yakınsaktır ve (4.1.1) sisteminin (c, c) denge noktası global çekicidir.

4.6. Global Asimptotik Kararlılık

Teorem 3.5.1. Kabul edelim ki $A > \sqrt{2}$ ve $\max\{p, r, s\} \geq 2$ olsun. Bu taktirde (4.1.1) sisteminin (c, c) pozitif denge noktası sistemin bütün pozitif çözümleri için global asimptotik kararlıdır.

İspat: $A > \sqrt{2}$ ve $\sqrt{2} > \frac{2}{\sqrt{3}}$ olduğundan $A > \frac{2}{\sqrt{3}}$ ve $\max\{p, r, s\} \geq 2$ olup Teorem

4.4.1.'den (4.1.1) sisteminin (c, c) pozitif denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

Diğer taraftan $A > \sqrt{2}$ olduğundan Teorem 4.5.1.'den (4.1.1) sisteminin her pozitif çözümü (c, c) denge noktasına yakınsaktır ve bu yüzden (4.1.1) sisteminin (c, c) denge noktası global çekicidir. Dolayısıyla (4.1.1) sisteminin (c, c) pozitif denge noktası lokal asimptotik kararlı ve global çekici olduğundan global asimptotik kararlıdır.

5. BÖLÜM

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu bölümün amacı bu tezde yer alan çalışmaları gözden geçirmek ve bazı öneriler sunarak gelecekteki çalışmalar için hareket noktası oluşturmaktır.

5.1. Sonuçlar

Süreklilik teorisi kullanılarak oluşturulan diferensiyel denklemlerin veya kısmi türevli diferensiyel denklemlerin genel çözümünü bulmak çoğu zaman zordur. Fakat bu tür denklemler dinamik sistem olarak ele alındığında, son yüzyılın önemli bir konusu olan nicel teori, dinamik sisteme dönüştürülen sistemin çözümü hakkında bilgi veren önemli bir yöntemdir.

Benzer düşünce bazı doğa olaylarının ayrık problemleri için oluşturulan fark denklem sistemleri için de geçerlidir. Bu tür problemleri çözmek için literatürde yer alan metotlar oldukça sınırlıdır. En yaygın kullanılanları Putzer Algoritması veya sabit katsayılı lineer bir fark denklem sisteminin karakteristik denklem yöntemleridir. Genel çözüm bulma yöntemleri sınırlı olduğundan bu tür sistemlerin çözümü hakkında fikir edinmek nicel teorinin kararlılık analizi ile mümkündür. Bu tezde ele alınan fark denklem sistemlerinin kararlılık analizi nicel teorisiyle yapıldı.

Bu çalışmada ilk olarak sabit katsayılı lineer fark denklem sistemlerinin çözümleri Putzer Algoritması ile basitçe verilip bu sistemlerin kararlılık analizi koordinat düzlemi üzerinde incelendi. Lineer olmayan bir fark denklem sisteminin kararlılık analizi için lineerleştirme teorisi kullanılarak lineer şekle dönüştürüldü.

Yukarıda uygulaması gösterilen lineerleştirme teorisi üçüncü bölümünde ele alınan rasyonel fark denklem sistemine uygulandı. Ele alınan sistem

$p \geq 2, q \geq 2, r \geq 2, s \geq 2, (p, q, r, s \in \mathbb{Z}), A$ pozitif bir sabit ve $x_{1-\max\{p,r\}}, x_{2-\max\{p,r\}}, \dots, x_{-1}, x_0, y_{1-\max\{q,s\}}, y_{2-\max\{q,s\}}, \dots, y_{-1}, y_0$ pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-p}y_{n-q}}, y_n = A + \frac{x_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}}, n = 1, 2, \dots \quad (5.1.1)$$

şeklindedir. Lineer olmayan fark denklem sisteminin pozitif denge noktası elde edilerek bu denge noktasında sistemin global asimptotik kararlı olduğu sonucuna ulaşıldı.

Son olarak bu çalışmada $p \geq 1, r \geq 1, s \geq 1, (p, r, s \in \mathbb{Z}), A \geq 0$ ve $x_{1-r}, x_{2-r}, \dots, x_{-1}, x_0, y_{1-\max\{p,s\}}, y_{2-\max\{p,s\}}, \dots, y_{-1}, y_0$ pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_n = A + \frac{1}{y_{n-p}}, y_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}}, n = 1, 2, \dots \quad (5.1.2)$$

şeklindeki lineer olmayan fark denklem sistemi ele alındı. Yukarıda yapılan çalışmaya benzer şekilde bu sistemin de pozitif denge noktası elde edilerek sistemin global asimptotik kararlı olduğu sonucuna ulaşıldı.

5.2. Tartışma ve Öneriler

Bu çalışmada ele alınan fark denklem sistemlerinin pozitif denge noktası civarında kararlılık analizi yapılmış olup negatif denge noktaları için genişletilmesi yeni bir teorik çalışma olarak düşünülebilir. Burada belirtmelidir ki negatif denge noktasının doğa bilimlerinde herhangi bir karşılığı bilinmemektedir.

Yukarıda ele alınan (5.1.1) ve (5.1.2) sistemleri uygulamalı bilim dallarında herhangi bir reel problemin modellemesi değildir. Fakat bu sistemlere benzer sistemler biyomatematik'te karşılaşılmıştır. Bu çalışmada oluşturulan yöntemler biyoloji veya doğa bilimlerindeki reel problemler için oluşturulan sistemlerin kararlılık analizinin yapılmasına yardımcı olur.

KAYNAKLAR

1. Lakshmikantham, V., Trigiante, D., Theory of difference equations-numerical methods an applications, **American Mathematical Society**, **40 (2)**: 259-262.
2. Kulenovic, M.R.S., 2000. Kalabusic. S., Projects For The History of Difference Equations and Recursive Relations, University of Rhode Island, <http://hypatia.math.uri.edu/~kulenm/diffequaturi/m381f00fp/m381f00mp.htm>.
3. Yang, X.F., 2005. On the system of rational difference equations $x_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-p}y_{n-q}}, y_n = A + \frac{x_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}}$, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, **307 (1)** : 305-311.
4. Zhang, Y., Yang, X.F., Megson, G.M., Evans, D.J., 2006. On the system of rational difference equations $x_n = A + \frac{1}{y_{n-p}}, y_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}}$, **Applied Mathematics and Computation**, **176** : 403-408.
5. Cinar, C., 2004. On the positive solutions of the difference equation system $x_n = \frac{1}{y_{n-1}}, y_n = \frac{y_{n-1}}{x_{n-2}y_{n-2}}$, **Applied Mathematics and Computation**, **158 (2)**: 303-305.
6. Clark, D., Kulenovic, M.R.S., 2002. A coupled system of rational difference equations, **Computers and Mathematics with Applications**, **43 (6 & 7)**: 849-867.
7. Clark, D., Kulenovic, M.R.S., Selgrade, J.F., 2003. Global asymptotic behavior of a two dimensional difference equation modeling competition, **Nonlinear Analysis**, **52 (7)** : 1765-1776.
8. Grove, E.A., Ladas, G., McGrath, L.C., Teixeira, C.T., 2001. Existence and behavior of solutions of a rational system, **Communications on Applied Nonlinear Analysis**, **8**: 1-25.
9. Papaschinopoulos, G., Schinas,, C.J., 1998. On a system of two nonlinear difference equations, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, **219 (2)**: 415-426.

10. Camouzis, E., Papaschinopoulos, G., 2004. Global asymptotic behavior of positive solutions on the system of rational difference equations

$$x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{y_{n-m}}, y_{n+1} = 1 + \frac{y_n}{x_{n-m}},$$
Applied Mathematics Letters, **17 (6)**: 733-737.
11. Papaschinopoulos, G., Papadopoulos, B.K., 2002. On the fuzzy difference equation

$$x_{n+1} = A + \frac{x_n}{x_{n-m}},$$
Fuzzy Sets and Systems, **129 (1)**: 73-81.
12. Yang, X.F., Liu, Y.X., Bai, S., On the system of high order rational difference equations $x_n = \frac{a}{y_{n-p}}, y_n = \frac{by_{n-p}}{x_{n-q}y_{n-q}},$ **Applied Mathematics and Computation**, in press, doi:10.1016/j.amc.2005.01.092.
13. Jordan, C., 1965. Calculus of Finite Difference, Chelsea Publishing Company, s.2-3, New York.
14. Kelley, W.G., Peterson, A.C., 2001. Difference Equations, An Introduction with Applications, Academic Press, The United States of America.
15. Grove, E.A., Ladas, G., 2005. Periodicities in Nonlinear Difference Equations, Advances in Discrete Mathematics and Applications, CRC Press, The United States of America.
16. Mickens, R.E., 1990. Difference Equations,, Theory and Applications, s. 88, Chapman&Hall, New York.
17. He, W.S., Li, W.T., 2004. Attractivity in a Nonlinear Delay Difference Equation, Applied Mathematics E-Notes, 4, 48-53.
18. Elaydi, S., 2004. An Introduction to Difference Equations, 3nd edition, San Antonio Texas.
19. Adams, R.A., Essex, C., Calculus, 2008. A Complete Course, 3nd edition, Canada.
20. Roger, A.H., Charles, R.J., 1990. Matrix Analysis, Cambridge University Pres.
21. Balcı, M., 2008. Matematik Analiz 1, Ertem Matbaası, Ankara.
22. Yurtsever, B., 1978. Matematik Analiz Dersleri, Bir Değişkenli Fonksiyonlar, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hayrullah ÖZİMAMOĞLU

Baba Adı : Ahmet

Anne Adı : İlhan Meral

Doğum Yeri : KAYSERİ

Doğum Tarihi : 09.12.1986

İlk ve orta öğrenimini Kayseri’de tamamladı. Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2009 yılında birincilikle mezun oldu. 2010 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda yüksek lisans eğitime başladı. Hâlen Erciyes Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı’nda yüksek lisans eğitime devam etmektedir.

Adres: Osman Kavuncu Mah. Girne Şehitleri Cad. Neslin Apt. No: 2/11

Melikgazi/KAYSERİ

E-posta : hayrullah_1986@hotmail.com