

**EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**(DOKTORA TEZİ)**

**BİR SİSTEMİN ÜRETTİĞİ EN YÜKSEK VE EN  
DÜŞÜK  $M$  SKOR LİSTELERİNE DAYALI AŞAN  
İSTATİSTİKLER**

**Burak UYAR**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Şanslı ŞENOL**

**İkinci Danışman: Yrd. Doç. Dr. Halil TANIL**

**İstatistik Anabilim Dalı**

**Bilim Dalı Kodu: 406.02.01**

**Sunuş Tarihi: 04.01.2013**

**Bornova-İZMİR**

**2013**



Burak UYAR tarafından doktora tezi olarak sunulan “Bir Sistemin Ürettiği En Yüksek ve En Düşük m Skor Listelerine Dayalı Aşan İstatistikler” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 04.01.2013 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği / oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

**Jüri Üyeleri:**

**İmza**

**Jüri Başkanı : Prof. Dr. Şanslı ŞENOL**

.....

**Raportör Üye : Doç. Dr. Selma GÜRLER**

.....

**Üye : Yrd. Doç. Dr. Halil TANIL**

.....

**Üye : Yrd. Doç. Dr. Sevcan DEMİR ATALAY**

.....

**Üye : Yrd. Doç. Dr. Ali MERT**

.....



**ÖZET****BİR SİSTEMİN ÜRETTİĞİ EN YÜKSEK VE EN DÜŞÜK M SKOR LİSTELERİNE DAYALI AŞAN İSTATİSTİKLER**

UYAR, Burak

Doktora Tezi, İstatistik Anabilim Dalı  
Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Şanslı ŞENOL  
İkinci Danışman: Yrd. Doç. Dr. Halil TANIL

Ocak 2013, 46 sayfa

Bu çalışmada, bağımsız ve aynı F dağılımlı skorlar üreten bir sistemde geçerli en yüksek m skora dayalı ve en düşük m skora dayalı iki aşan istatistik tanımlanmış ve bunların olasılık fonksiyonları elde edilmiştir. Dört özgün teoremlerle verilen olasılık fonksiyonları arasındaki bağıntı ortaya konulmuştur. Son olarak tanımlanan aşan istatistiklerden birine dayalı parametrik olmayan bir hipotez testi verilmiş, tasarlanan bir uygulama problemi irdelenmiştir.

*Anahtar sözcükler: En Düşük m Skor, En Yüksek m Skor, Aşan İstatistik, Parametrik Olmayan Hipotez Testi*



**ABSTRACT**

**“EXCEEDANCE STATISTICS BASED ON THE LISTS OF TOP AND  
BOTTOM M SCORES PRODUCED BY A SYSTEM”**

UYAR, Burak

PhD in Statistics

Supervisor: Professor Dr. Şanslı ŞENOL

Co- Supervisor: Assistant Professor Dr. Halil TANIL

January 2013, 46 pages

In this study, two exceedance statistics are defined based on top and bottom  $m$  scores of a system that generates independent and identically distributed scores. And probability functions of these statistics are obtained. Relations between these probability functions which are given by four unique theorems are given. Finally, a non-parametric hypothesis test procedure based on one of these exceedance statistics is derived. An application problem is examined.

***Keywords:*** Bottom  $m$  Scores, Top  $m$  Scores, Exceedance Statistics, Non-Parametric Hypothesis Test



## TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim sürecinde ilgi ve yönlendirmelerini esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Şanslı ŞENOL'a, değerli görüş ve önerileri ile tezimin planlanmasından tamamlanmasına kadar her aşamada bana rehberlik eden ve yanımda olan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Halil TANIL'a, katkılarından dolayı tez izleme jüri üyelerinden Yrd. Doç. Dr. Sevcan DEMİR ATALAY ve Doç. Dr. Selma GÜRLER'e teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim yaşamım boyunca bana emeği geçen tüm saygıdeğer öğretmenlerime, gösterdikleri ilgi ve dostluklarından dolayı tüm çalışma arkadaşlarıma, yaşamımda manevi destekleri ile yanımda olan anne ve babama, bana her zaman her koşulda her türlü desteği sağlayan eğitim emekçisi sevgili eşim Gözde UYAR'a ve varlıkları ile hayatımıza daha da anlam katan canım kızlarım Zeynep Gülşah ve Zehra Naz'a teşekkür ederim.



## İÇİNDEKİLER

Sayfa

<b>ÖZET</b> .....	v
<b>ABSTRACT</b> .....	vii
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	ix
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	xi
<b>1. GİRİŞ</b> .....	1
<b>2. EN YÜKSEK VE EN DÜŞÜK M SKOR LİSTELERİNE DAYALI SIRA İSTATİSTİKLERİ VE AŞAN İSTATİSTİKLER</b> .....	5
2.1 En Yüksek M Skor Listesine Dayalı Sıra İstatistikleri .....	5
2.2 En Düşük M Skor Listesine Dayalı Sıra İstatistikleri.....	7
2.3 Aşan İstatistikler .....	9
<b>3. EN YÜKSEK VE EN DÜŞÜK M SKOR LİSTELERİNE DAYALI AŞAN İSTATİSTİKLER</b> .....	11
3.1 En Yüksek M Skor Listesine Dayalı Aşan İstatistikler .....	12
3.2 En Düşük M Skor Listesine Dayalı Aşan İstatistikler .....	19
3.3. Aşan İstatistiklerin Olasılık Fonksiyonları Arasındaki Bağınıtı .....	28
<b>4. HİPOTEZ TESTİ VE BİR UYGULAMA</b> .....	32
4.1 Parametrik Olmayan Bir Hipotez Testi .....	32
4.2 Bir Uygulama Problemi .....	33
<b>5. GENEL SONUÇ VE TARTIŞMA</b> .....	41
<b>KAYNAKLAR DİZİNİ</b> .....	43
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	46



## 1. GİRİŞ

Sıralanmış rasgele değişkenler teorisi, istatistiğin birçok alanında ve uygulamasında önemli bir yere sahiptir. Güvenilirlik analizi (reliability analysis), sağ kalım analizi (survival analysis), yaşam süresi analizi (life-time analysis), şok modelleri (shock models), finansal ekonomi (financial economics) gibi istatistiksel uygulama alanlarına ve farklı gösterimlere sahip çeşitli sıralanmış rasgele değişken modelleri vardır.

Literatürde sıralanmış rasgele değişkenler ve bunlara ilişkin pek çok model yıllar içinde farklı kişiler tarafından çalışılmıştır. David (1970) sayesinde klasik sıra istatistikleri (ordinary order statistics) literatürde önemli bir yere gelmiştir. Kamps (1995) genelleştirilmiş sıra istatistikleri kavramını ortaya atarak, sıralanmış rasgele değişken modellerinin pek çoğunu kapsayan bir model oluşturmuştur. Chandler (1952) ve Glick (1978), rekor değerlerin temellerini atmıştır.

Sıra istatistikleri, istatistik teorisinin en önemli kavramlarından biri olup, temel istatistik yöntemlerde ve istatistiksel sonuç çıkarımında kullanılmaktadır. Özellikle, sıra istatistiklerine dayalı birçok istatistik, dağılımdan-bağımsızlık (distribution-free) özelliği taşıdığı için, parametrik olmayan istatistiksel yöntemlerde geniş şekilde kullanılmaktadır. Sıra istatistikleri, yeterli istatistikler olduklarından örneklem hakkındaki tüm bilgiyi içerirler. Yeterli istatistikler olma özellikleri sayesinde; istatistiksel çıkarımlarda, tahmin teorisinde, hipotez testlerinde, parametrik olmayan aralık tahmininde, mukavemet testleri (testing of strength of materials), yaşam analizi (life-time studies), güvenilirlik analizi gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Sıra istatistikleri teorisindeki gelişmeler, sıralanmış bir veri dizisinde birbirini izleyen uç değerler olan rekor değerler (record values) üzerine yapılan çalışmaların artmasını sağlamıştır. Rekor değerler ve rekor değerlere dayalı birçok istatistik, meteorolojik analiz (meteorological analysis), hidroloji (hydrology), madencilik (mining), güvenilirlik analizi, spor, ekonomi, doğal afetlerin tahmini, stres testi (stress testing) gibi alanlarda ve belirli bir ürün parçasının ya da bir ürünün yaşam süresi ile ilgili problemlerde önemli olmaktadır. Rekor değerler ve

özellikleri literatürde geniş bir şekilde çalışılmıştır. Matematiksel teorisi Chandler (1952) tarafından başlatılan rekor değerlerin, dağılım teorisi ve çeşitli özellikleri hakkında, Glick (1978), Galambos (1978), Nevzorov (1987), Nagaraja (1988), Balakrishnan ve Nevzorov (1998), Arnold vd.. (1998, 2008), Nevzorov (2001), Ahsanullah ve Nevzorov (2001), Ahsanullah (2004) tarafından kapsamlı incelemeler yapılmıştır. Son yıllarda yapılan çalışmalar daha çok, çeşitli yaşam süresi (life-time) verileri ve rekor değerlere dayalı istatistiksel çıkarsama üzerinedir. Örneğin, Bairamov (1997), üst rekor değerlere ilişkin aşan istatistikleri ele almış ve tekdüze dağılım için karakterizasyona yer vermiştir. Bairamov ve Eryılmaz (2000), rekor eşik modellerini ele alarak, bazı aşan istatistiklerin kesin ve asimptotik dağılımlarını elde etmişlerdir. Bairamov ve Eryılmaz (2001), rekor değerlere ilişkin invaryant güven aralıklarına ait bazı sonuçlar elde etmişlerdir. Bairamov ve Kotz (2001), keyfi bir dağılım için rekor değerlere dayalı aşan istatistiklerin dağılımını incelemişlerdir. Bairamov ve Khan (2007), keyfi bir dağılım için, yakınsama oranlarıyla birlikte rekor değerlere dayalı aşan istatistiklerin kesin ve limit dağılımlarını elde etmişlerdir.

Sıralanmış rasgele değişkenler kavramı kullanılarak, rekor değerler ve  $k$ -rekorlar modellerinin genelleştirilmiş bir hali olan  $\ell$ 'nci yenilenme sonrası en yüksek  $m$  skordan oluşan bir listeye dayalı sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları Blázquez ve Wesolowski (2007) tarafından elde edilmiş, Tanil (2009) ise marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını doğrudan elde etmiştir. Bairamov (1997), rekor değerlerin aşılması olasılığını dağılımdan bağımsız olarak bulmuştur. Tanil (2009), benzer olarak listenin yenilenmesi olasılığını elde etmiştir.

Bu tez çalışmasında, öncelikle aşağıdaki gibi tanımlanan bir deneyin sonunda, özel olarak tanımlanmış iki olayın gerçekleşmesi olasılıklarını elde etme problemi ele alınmış ve ardından bu olayları ifade etmek için tanımlanan aşan istatistiklerin dağılımdan bağımsız olasılık fonksiyonları elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen aşan istatistiklerden birini test istatistiği olarak kullanan bir parametrik olmayan hipotez testi önerilmiş ve su taşkını veya sel gibi afetlerin öncesinde bir uyarı mekanizması içerisinde bu hipotez testinin kullanılabileceği gösterilmiştir.

**DENEY:** Birbirinden bağımsız ve aynı F dağılımlı sürekli skor üreten bir süreçte  $\ell$ 'inci güncelleme sonrası sıralı en yüksek m skor listesinin ( $T_m^\ell = (X_{1:m}^{(\ell)}, \dots, X_{m:m}^{(\ell)})$ ) ve sıralı en düşük m skor listesinin ( $B_m^\ell = (Y_{1:m}^{(\ell)}, \dots, Y_{m:m}^{(\ell)})$ ) gözlemlemesi ve sonrasında aynı süreçten n tane yeni gözlem alınması.

**OLAY 1** ( $T_m^\ell$  listesine dayalı): n tane yeni gözlemden k tanesinin  $T_m^\ell$  listesinin r'inci en küçük elemanından küçük olması.

**OLAY 2** ( $B_m^\ell$  listesine dayalı): n tane yeni gözlemden k tanesinin  $B_m^\ell$  listesinin r'inci en küçük elemanından küçük olması.

Yukarıda tanımlı Olay 1' i ifade etmek için  $T_{n,r,m}^{(\ell)}$  ve Olay 2'yi ifade etmek içinse  $B_{n,r,m}^{(\ell)}$  kesikli rasgele değişkenleri kullanılmıştır. Yani, Olay 1,  $\{T_{n,r,m}^{(\ell)} = k\}$  şeklinde ve Olay 2 ise  $\{B_{n,r,m}^{(\ell)} = k\}$  şeklinde ifade edilebilmektedir. Çalışmada verilen teoremler, bu rasgele değişkenlerin dağılımından bağımsız olasılık fonksiyonlarıdır. Bu rasgele değişkenlere literatürde aşan istatistikler adı verilmektedir.

Bir sistemin ürettiği en yüksek m skora dayalı sıra istatistikleri ( $T_m^\ell$ ) modeli Blázquez ve Wesolowski (2007) ve Tanil (2009) tarafından çalışılmış bir konudur. Kozan (2010) ise, aynı sistem için, en düşük m skora dayalı bir sıra istatistikleri ( $B_m^\ell$ ) modeli vermiştir. Ayrıca, Dağılımdan-bağımsız (distribution-free) veya invaryant (invariant) güven aralıkları ilk kez Bairamov ve Petunin (1991) tarafından ortaya atılmıştır (Bairamov ve Eryılmaz, 2000).

Çalışmanın 2. bölümünde en yüksek ve en düşük skor listelerine dayalı sıra istatistikleri ve bu sıra istatistiklerinin marjinal ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları ve aşan istatistikler verilmiştir. 3. bölümde öncelikle teoremlerin ispatında faydalanılacak bir yardımcı teorem verilmiş ve ispatlanmıştır. Sonrasında en yüksek m skora dayalı ve en düşük m skora dayalı iki aşan istatistik tanımlanmış ve bunların olasılık fonksiyonları elde edilmiştir.  $T_{n,r,m}^{(\ell)}$  ile  $B_{n,r,m}^{(\ell)}$

rasgele değişkenlerinin olasılık fonksiyonları arasındaki bağını verilmiştir. 4. Bölümde elde edilen olasılık fonksiyonlarının dağılımdan bağımsız olmasından, literatürde parametrik olmayan istatistikte önemli bir yere sahip olan aşan istatistik, test istatistiği olarak alınarak, aşan istatistiğe dayalı parametrik olmayan bir hipotez testi verilmiştir. Ayrıca bir uygulama problemi irdelenerek ortaya konan teoremlerden olasılıklar hesaplanmış ve tablolaştırılmıştır.

## 2. EN YÜKSEK VE EN DÜŞÜK M SKOR LİSTELERİNE DAYALI SIRA İSTATİSTİKLERİ VE AŞAN İSTATİSTİKLER

### 2.1 En Yüksek M Skor Listesine Dayalı Sıra İstatistikleri

$\ell \in \{0, 1, 2, \dots\}$  için  $X_{1:m}^{(\ell)} < X_{2:m}^{(\ell)} < \dots < X_{m:m}^{(\ell)}$ ,  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$  skor dizisine ait  $\ell$ 'inci güncellenme sonrasındaki en yüksek  $m$  skordan oluşan listeye dayalı sıra istatistikleri olsun.  $\ell = 0$  için bu sıra istatistikleri,  $X_1, \dots, X_m$ 'ye dayalı olarak oluşturulur.  $\ell \geq 1$  için ise;

$L(0)$ ,  $X_1, \dots, X_m$  lerin en küçüğünün zaman indeksi ve

$L(t) = \min \{j > \max(m, L(t-1)) : X_j > X_{1:m}^{(t-1)}\}$ ,  $t \in \{1, 2, \dots, \ell\}$  olmak üzere

$\{X_{L(\ell)}\} \cup \{X_{2:m}^{(\ell-1)}, \dots, X_{m:m}^{(\ell-1)}\}$  üzerine kurulur.  $r = 1, 2, \dots, m$  için  $X_{r:m}^{(\ell)}$ , “ $\ell$ '

inci güncelleme sonrası listenin  $r$ 'inci en küçük elemanı” olarak

adlandırılır. Burada,  $X_{r:m}^{(0)}$  in,  $X$  dizisinin ilk  $m$  elemanına dayalı  $r$ 'inci

sıra istatistiği olduğu açıktır.  $X_{1:m}^{(\ell)}$  ise,  $X$  dizisinde, aşağıdaki olasılık

yoğunluk fonksiyonuna sahip  $(\ell + 1)$ 'inci üst  $m$ - rekoru göstermektedir:

$$f^{X_{1:m}^{(\ell)}}(x) = \frac{m^{\ell+1}}{\ell!} (-\ln \bar{F}(x))^\ell \bar{F}(x)^{m-1} f(x) \quad (1)$$

Blázquez ve Wesolowski (2007),  $X_{1:m}^{(\ell)} < X_{2:m}^{(\ell)} < \dots < X_{m:m}^{(\ell)}$  şeklindeki en yüksek  $m$  skora ilişkin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu,  $\ell \geq 0$  ve  $m \geq 1$  için,

$$f^{X_{1:m}^{(\ell)}, X_{2:m}^{(\ell)}, \dots, X_{m:m}^{(\ell)}}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{m^\ell m! (-\ln \bar{F}(x_1))^\ell \prod_{i=1}^m f(x_i)}{\ell!}, \quad x_1 < x_2 < \dots < x_m \quad (2)$$

şeklinde elde etmiştir.

$\ell$ 'inci güncelleme sonrası en yüksek  $m$  skora dayalı sıra istatistikleri modeli, (2) numaralı formülde  $m = 1$  alınması durumunda,  $(\ell + 1)$ 'inci üst rekor değerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu olan

$$f^{X_{U^{(\ell+1)}}}(x) = \frac{1}{\ell!} (-\ln \bar{F}(x))^\ell f(x), \quad x \in \mathfrak{R}.$$

formülüne indirgenir ve literatürde  $X_{U^{(\ell+1)}}$  rasgele değişkeni“  $(\ell + 1)$ 'inci üst rekor değer” olarak bilinmektedir.

$1 \leq r \leq m$  için  $X_{r:m}^{(\ell)}$ 'nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ise Tanil (2009) tarafından,

$$f^{X_{r:m}^{(\ell)}}(x) = \frac{m^\ell m! \bar{F}(x)^{m-r} f(x)}{(m-r)!} \phi_{F(x)}(r-1, \ell), x \in \mathbf{R} \quad (3)$$

şeklinde elde edilmiştir.

Burada,

$$\phi_{F(x)}(r-1, \ell) = \begin{cases} \frac{1}{\ell!} [-\ln \bar{F}(x)]^\ell & , r = 1 \\ \int_0^{F(x)} \frac{[-\ln(1-u)]^\ell [F(x)-u]^{r-2}}{\ell!(r-2)!} du & , r > 1 \end{cases} \quad (4)$$

olarak tanımlıdır (Tanil, 2009).

Yine Tanil (2009) tarafından,  $X_{r:m}^{(\ell)}$  ve  $X_{s:m}^{(\ell)}$ 'nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,  $1 \leq r < s \leq m$  ve  $x < y$  için,

$$f^{X_{r:m}^{(\ell)}, X_{s:m}^{(\ell)}}(x, y) = \frac{m^\ell m! [F(y) - F(x)]^{s-r-1} \bar{F}(y)^{m-s} f(x) f(y)}{(m-s)!(s-r-1)!} \phi_{F(x)}(r-1, \ell) \quad (5)$$

şeklinde verilmiştir.

Tanil (2009), (4)'deki fonksiyonun  $r > 1$  için, integralli kısmının polinomial açılımını,  $k, \ell \in \mathbf{N}$  için,

$$\begin{aligned} \phi_{F(x)}(k, \ell) &= \frac{F(x)^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_1^{(k, \ell, i)} F(x)^{k-i-1} \\ &+ \bar{F}(x)^k \sum_{i=1}^k \sum_{j_i=0}^{\ell_i} \gamma_2^{(k, \ell, j_1, \dots, j_k)} \left[ -\ln \bar{F}(x) \right]^{\ell - j_1 - \dots - j_k} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\gamma_1^{(k, \ell, i)} = \sum_{t=1}^i \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \frac{(-1)^i \prod_{u=1}^i u^{-1-j_u}}{(i+1)^{\ell+1-j_1-\dots-j_i} (k-i-1)!}, \gamma_2^{(k, \ell, j_1, \dots, j_k)} = \frac{(-1)^k \prod_{u=1}^k u^{-1-j_u}}{(\ell - j_1 - \dots - j_k)!},$$

$$\ell_t = \ell - \sum_{u=0}^{t-1} j_u, \quad j_0 = 0 \text{ ve } \sum_{\emptyset} = 0 \text{ olmak üzere,}$$

şeklinde elde etmiştir.

## 2.2 En Düşük $M$ Skor Listesine Dayalı Sıra İstatistikleri

$\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ , birbirinden bağımsız ve aynı sürekli  $F(x)$  dağılım fonksiyonu ve  $f(x)$  olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler dizisi olsun.  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , bu dizinin ilk  $n$  elemanı olmak üzere, bunların artan sırada sıralanmasıyla oluşan klasik sıra istatistikleri  $Y_{1:n} < Y_{2:n} < \dots < Y_{n:n}$  şeklinde gösterilsin.  $1 \leq m \leq n$  için bu sıra istatistiklerinin en küçük  $m$  tanesinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f^{Y_{1:n}, Y_{2:n}, \dots, Y_{m:n}}(y_1, y_2, \dots, y_m) = \frac{n!}{(n-m)!} [1 - F(y_m)]^{(n-m)} \prod_{i=1}^m f(y_i) \quad (7)$$

olacaktır (Kozan, 2010).

Ancak bu fonksiyon sadece  $n$  ve  $m$  parametreleri ile  $F$  dağılım fonksiyonunun seçimine bağlı olup en düşük  $m$  skor listesinin başlangıçtan itibaren kaç kez yenilediği bilgisini içermemektedir. Bu nedenle, azalan rekor değerlerde ve azalan  $k$  - rekorlarda olduğu gibi yenilenme bilgisini de içeren bir modelin kurulması, içerdiği bilgi açısından daha kapsamlı bir modeli ortaya çıkaracaktır.

$\ell \in \mathbb{N}$  ve  $m \in \mathbb{N}^+$  olmak üzere,  $Y_{1:m}^{(\ell)} < Y_{2:m}^{(\ell)} < \dots < Y_{m:m}^{(\ell)}$ ,  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$  skor dizisinin  $\ell$ 'nci yenilenme sonrası en düşük  $m$  skordan oluşan listeye dayalı sıra istatistiklerini gösterebilir. O halde,  $\ell = 0$  için,  $Y_{1:m}^{(0)} < Y_{2:m}^{(0)} < \dots < Y_{m:m}^{(0)}$ , dizinin ilk  $m$  elemanına dayalı sıra istatistiklerini gösterecektir. Sistem, skorlar üretmeye devam ettikçe,  $\ell > 0$  için,  $L(\ell) = \min\{j > \max(m, L(\ell-1)) : X_j < Y_{m:m}^{(\ell-1)}\}$ , olmak üzere,  $L(\ell)$ 'nci gözlem olan  $X_{L(\ell)}$ , listeyi  $\ell$ 'nci kez yenileyecektir ve  $\ell$ 'nci yenilenme sonrası en düşük  $m$  skora dayalı sıra istatistikleri,  $\{Y_{1:m}^{(\ell-1)}, \dots, Y_{m-1:m}^{(\ell-1)}\} \cup \{X_{L(\ell)}\}$  listesine dayalı olacaktır. Burada  $L(0)$ , başlangıç listesinin en büyük elemanının zaman indeksidir. Her yenilenme sonunda bir önceki listenin en büyük elemanı listeden atılacak, yenilenmeyi sağlayan skor listeye girecek ve böylece listedeki skor sayısı  $m$  değişmeyecektir. Bu durumda,  $Y_{r:m}^{(\ell)}$ ,  $\ell$ 'nci yenilenme sonrası en düşük  $m$  skordan oluşan listenin en küçük  $r$ 'nci skorunu göstermektedir.  $Y_{m:m}^{(\ell)}$  ise,  $\ell$ . yenilenme sonrası en düşük  $m$  skordan oluşan listenin  $m$ 'nci en küçük, yani en büyük elemanıdır.

Bir diğer deyişle,  $f^{Y_{m:m}^{(\ell)}}(y_m) = \frac{m^{\ell+1}}{\ell!} [-\ln F(y_m)]^\ell F(y_m)^{m-1} f(y_m)$

azalan  $(\ell+1)$ 'nci  $m$ - rekor değerdir (Kozan, 2010).

$\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ , birbirinden bağımsız ve aynı sürekli  $F$  dağılımına sahip rasgele değişkenler dizisi olmak üzere,  $\ell \in \mathbb{N}$  ve  $m \in \mathbb{N}^+$  için, bu dizinin  $\ell$ 'nci yenilenme sonrası en düşük  $m$  skor listesine dayalı sıra istatistikleri olan  $Y_{1:m}^{(\ell)} < Y_{2:m}^{(\ell)} < \dots < Y_{m:m}^{(\ell)}$ 'lerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, Kozan (2010) tarafından,  $y_1 < y_2 < \dots < y_m$  için,

$$f^{Y_{1:m}^{(\ell)}, Y_{2:m}^{(\ell)}, \dots, Y_{m:m}^{(\ell)}}(y_1, y_2, \dots, y_m) = m! m^\ell \prod_{i=1}^m f(y_i) \frac{[-\ln F(y_m)]^\ell}{\ell!} \quad (8)$$

şekilde elde edilmiştir. Kozan (2010), bu dizinin  $\ell$ 'nci yenilenme sonrası en düşük  $m$  skor listesinin en küçük  $r$ 'nci elemanı olan  $Y_{r:m}^{(\ell)}$ 'nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu,

$$\phi_{1-F(y)}(m-r, \ell) = \begin{cases} \frac{1}{\ell!} [-\ln F(y)]^\ell & , m-r = 0 \\ \int_0^{1-F(y)} \frac{[-\ln(1-u)]^\ell [1-F(y)-u]^{m-r-1}}{\ell!(m-r-1)!} du & , m-r > 0 \end{cases}$$

ve  $1 \leq r \leq m$  olmak üzere,

$$f^{Y_{r:m}^{(\ell)}}(y) = \frac{m!m^\ell F(y)^{r-1} f(y)}{(r-1)!} \phi_{1-F(y)}(m-r, \ell) , y \in \mathbb{R} \quad (9)$$

şeklinde vermiştir.

### 2.3 Aşan İstatistikler

Dağılımdan-bağımsız (distribution-free) veya invaryant (invariant) güven aralıkları ilk kez Bairamov ve Petunin (1991) tarafından ortaya atılmış bir konudur (Bairamov ve Eryılmaz, 2000). Yeni bir gözlemin, bir dağılımdan-bağımsız güven aralığına düşmesi olasılığı, aşan (exceedance) istatistiklerin dağılım fonksiyonlarının elde edilmesinde önemli bir rol oynamaktadır. Yeni gözlemleri içeren dağılımdan-bağımsız güven aralıklarının tanımı Bairamov ve Özkaya (2000) tarafından şöyle verilmiştir:

$\mathfrak{T}$ , herhangi bir dağılım fonksiyonları sınıfını göstermek üzere;  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ,  $F \in \mathfrak{T}$  dağılım fonksiyonuna sahip  $n$  büyüklüğünde rasgele bir örneklem olsun.  $f_1(\cdot)$  ve  $f_2(\cdot)$  ile gösterilen fonksiyonlar,  $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  olmak üzere  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  koşulunu sağlayan Borel fonksiyonları olarak kabul edilsin.

Eğer,  $\forall F \in \mathfrak{T}$  için,

$$P\{X_{n+1} \in (f_1(X_1, X_2, \dots, X_n), f_2(X_1, X_2, \dots, X_n))\} = \beta \quad (10)$$

olacak şekilde  $\exists \beta \in (0,1)$  varsa, o zaman  $(f_1(X_1, X_2, \dots, X_n), f_2(X_1, X_2, \dots, X_n))$  rasgele aralığına,  $\mathfrak{F}$  sınıfı için “yeni gözlemleri içeren dağılımdan-bağımsız güven aralığı” denir.

(10) eşitliğinin sağ tarafında yer alan  $\beta$  ise her  $F \in \mathfrak{F}$  için sabittir ve “dağılımdan-bağımsız aralığın güven düzeyi” olarak adlandırılır.

$X_1, X_2, \dots, X_n$  birbirlerinden bağımsız ve aynı  $F$  dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olmak üzere,  $F$  dağılım fonksiyonuna sahip  $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+m}$  ' ler yeni gözlemler olsun. Varsayalım ki,  $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+m}$  gözlemleri,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ' lerden bağımsız olarak elde edilsin.  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $\xi_i$ ,

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & , X_{n+i} \in (f_1(X_1, X_2, \dots, X_n), f_2(X_1, X_2, \dots, X_n)) \\ 0 & , X_{n+i} \notin (f_1(X_1, X_2, \dots, X_n), f_2(X_1, X_2, \dots, X_n)) \end{cases}$$

olmak üzere,  $S_m = \sum_{i=1}^m \xi_i$  şeklinde bir rasgele değişken tanımlansın. Bu

rasgele değişken, birbirlerinden bağımsız ve ortak bir  $F \in \mathfrak{F}$  dağılım fonksiyonuna sahip  $m$  adet yeni gözlemden kaç tanesinin, dağılımdan-bağımsız güven aralığı  $(f_1(X_1, X_2, \dots, X_n), f_2(X_1, X_2, \dots, X_n))$ 'e düştüğünü göstermektedir.  $S_m$  istatistiklerine, literatürde “aşan (exceedance) istatistikler” adı verilir. Dağılımdan-bağımsızlık özelliğine sahip rasgele değişkenler olan aşan istatistikler, parametrik olmayan istatistik içinde önemli bir yere sahiptir. İstatistik literatüründe aşan istatistikler üzerine pek çok çalışma vardır. Örneğin Bairamov ve Eryılmaz (2000), rekor eşik modellerini ele alarak, bazı aşan istatistiklerin kesin ve asimptotik dağılımlarını elde etmişler. Yine Bairamov ve Kotz (2001), keyfi bir dağılım için rekor değerlere dayalı aşan istatistiklerin dağılımını incelemişlerdir. Bairamov ve Khan (2007) ise, keyfi bir dağılım için, yakınsama oranlarıyla birlikte rekor değerlere dayalı aşan istatistiklerin kesin ve limit dağılımlarını elde etmişlerdir.

### 3. EN YÜKSEK VE EN DÜŞÜK M SKOR LİSTELERİNE DAYALI AŞAN İSTATİSTİKLER

Aşağıdaki alt başlıklar içerisinde verilen teoremlerin ispatını kolaylaştırmak amacıyla bir yardımcı teorem (lemma) ile bu bölüme başlayalım.

**Yardımcı Teorem:**  $a, b, c \in \mathbb{N}$  için,

$$\int_0^1 (1-u)^b u^a (-\ln u)^c du = \sum_{v=0}^b \binom{b}{v} \frac{(-1)^v c!}{(a+v+1)^{c+1}}$$

dir.

**İspat:**

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-u)^b u^a (-\ln u)^c du &= (-1)^c \int_0^1 (1-u)^b u^a (\ln u)^c du \\ &= (-1)^c \int_0^1 \sum_{v=0}^b \binom{b}{v} (-u)^v u^a (\ln u)^c du \\ &= \sum_{v=0}^b (-1)^{c+v} \binom{b}{v} \int_0^1 u^{v+a} (\ln u)^c du \end{aligned}$$

Tanil (2009), makalesinde,

$\Psi_a(k, \ell) = \int_a^1 x^k (\ln x)^\ell dx$  integralinin çözümünün,  $a \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$  ve  $\ell, k \in \{0, 1, 2, \dots\}$  olmak üzere,

$$\Psi_a(k, \ell) = (-1)^\ell \ell! \left( \frac{1}{(k+1)^{\ell+1}} - a^{k+1} \sum_{j=0}^{\ell} \frac{(-\ln a)^{\ell-j}}{(k+1)^{1+j} (\ell-j)!} \right)$$

şeklinde olduğunu Tanil (2009)'un verdiği Lemma 3.1' e göre,

$$\int_0^1 u^{v+a} (\ln u)^c du = \Psi_0(a+v, c)$$

ve  $\Psi_0(a+v, c) = (-1)^c c! \frac{1}{(a+v+1)^{c+1}}$  'dir. Öyle ise;

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-u)^b u^a (-\ln u)^c du &= \sum_{v=0}^b (-1)^{c+v} \binom{b}{v} \Psi_0(a+v, c) \\
&= \sum_{v=0}^b (-1)^{c+v} \binom{b}{v} (-1)^c c! \frac{1}{(a+v+1)^{c+1}} \\
&= \sum_{v=0}^b \binom{b}{v} \frac{(-1)^v c!}{(a+v+1)^{c+1}}
\end{aligned}$$

ispat tamamlanmış olur.

### 3.1 En Yüksek M Skor Listesine Dayalı Aşan İstatistikler

Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli skor üreten bir sistemin, gelecekte ortaya çıkacak olan  $\ell$ . güncelleme sonrası en yüksek m-skor listesini ve ardından gözlemlenecek olan  $i$ 'inci yeni skorunu dikkate alalım. Bu  $i$ 'inci yeni skorun, listenin r. en küçük elemanından küçük olup olmadığını gösteren  $\xi_{i,r;m}^{(\ell)}$  rasgele değişkeni aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\xi_{i,r;m}^{(\ell)} = \begin{cases} 1, & X_{L^{(\ell)+i} < X_{r;m}^{(\ell)} \\ 0, & X_{L^{(\ell)+i} > X_{r;m}^{(\ell)} \end{cases}$$

$T_{n,r;m}^{(\ell)} = \sum_{i=1}^n \xi_{i,r;m}^{(\ell)}$  şeklinde tanımlı aşan istatistiğin olasılık fonksiyonu

aşağıdaki iki teoremle verilmiştir.

**Teorem 1:**  $r=1$  için,

$$P\{T_{n,1;m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} m^{\ell+1} \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} \frac{(-1)^v}{(n-k+m+v)^{\ell+1}}, \quad k=0,1,2,\dots,n$$

**İspat:**  $\{T_{n,1;m}^{(\ell)} = k\}$  olayı, n tane yeni gözlemin k tanesinin  $(-\infty, X_{1;m}^{(\ell)})$  aralığına, (n-k) tanesinin  $[X_{1;m}^{(\ell)}, +\infty)$  aralığına düşmesi olayıdır. Bu olay

$\binom{n}{k}$  adet eşit olasılıklı birbirinden ayrık olayın birleşimine eşittir.

O zaman, bu ayrık olaylardan birinin olasılığı hesaplanıp  $\binom{n}{k}$  ile çarpılırsa

$P\{T_{n,l:m}^{(\ell)} = k\}$  hesaplanmış olur. Öyle ise;

$$P\{T_{n,l:m}^{(\ell)} = k\} = P\left\{n \text{ tane yeni gözlemin } k \text{ tanesi } (-\infty, X_{l:m}^{(\ell)}) \text{ , } n-k \text{ tanesi } [X_{l:m}^{(\ell)}, +\infty)\right\}$$

$$P\{T_{n,l:m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} P\left\{X_{L^{(\ell)}+1}, X_{L^{(\ell)}+2}, \dots, X_{L^{(\ell)}+k} \in (-\infty, X_{l:m}^{(\ell)}) \text{ , } X_{L^{(\ell)}+k+1}, X_{L^{(\ell)}+k+2}, \dots, X_{L^{(\ell)}+n} \in [X_{l:m}^{(\ell)}, +\infty)\right\}$$

şeklinde yazılabilir.

$$P\{T_{n,l:m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^y \dots \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^y \dots \int_{-\infty}^y f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) \frac{m^\ell m! \bar{F}(y)^{m-1} f(y)}{(m-1)!} \Phi_{F(y)}(0, \ell) dx_n \dots dx_1 dy$$

$$\begin{aligned} P\{T_{n,l:m}^{(\ell)} = k\} &= \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F(y)]^{n-k} [F(y)]^k \frac{m^\ell m!}{(m-1)!} (1 - F(y))^{m-1} \\ &\quad f(y) \Phi_{F(y)}(0, \ell) dy \\ &= \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(m-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F(y)]^{n-k+m-1} [F(y)]^k \\ &\quad f(y) \Phi_{F(y)}(0, \ell) dy \end{aligned}$$

(6)'da verilen  $\Phi_{F(y)}(0, \ell)$  fonksiyonunun polinomiye açılımı yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} P\{T_{n,l:m}^{(\ell)} = k\} &= \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(m-1)! \ell!} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F(y)]^{n-k+m-1} F(y)^k \\ &\quad [-\ln(1 - F(y))]^\ell dF(y) \\ &= \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(m-1)! \ell!} \int_0^1 [u]^{n-k+m-1} (1-u)^k [-\ln(u)]^\ell du \end{aligned}$$

bulunur.

İntegralli ifadenin açılımını, Bölüm 3'ün başında verilen yardımcı teoreme göre yazarsak,

$$P\{T_{n,l;m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} m^{\ell+1} \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} \frac{(-1)^v}{(n-k+m+v)^{\ell+1}}, r=1$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 2.**  $r \geq 2$  için,

$$P\{T_{n,r;m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(m-r)!} \left\{ \frac{1}{(r-2)!} B(k+r-1, n-k+m-r+1) + \sum_{i=1}^{r-2} \gamma_1^{(r-1, \ell, i)} B(k+r-i-1, n-k+m-r+1) \right. \\ \left. + (-1)^{r-1} \sum_{j_1=0}^{\ell_1} \sum_{j_2=0}^{\ell_2} \dots \sum_{j_{r-1}=0}^{\ell_{r-1}} \left( \prod_{u=1}^{r-1} u^{-1-j_u} \right) \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} \frac{(-1)^v}{(n-k+m+v)^{\ell+1-j_1-\dots-j_{r-1}}} \right\}$$

$$k=0,1,2,\dots,n$$

**İspat:**  $\{T_{n,r;m}^{(\ell)} = k\}$  olayı,  $n$  tane yeni gözlemin  $k$  tanesinin  $(-\infty, X_{r;m}^{(\ell)})$  aralığına,  $(n-k)$  tanesinin  $[X_{r;m}^{(\ell)}, +\infty)$  aralığına düşmesi olayıdır. Bu olay  $\binom{n}{k}$  adet eşit olasılıklı birbirinden ayırık olayın birleşimine eşittir. O

zaman, bu ayırık olaylardan birinin olasılığı hesaplanıp  $\binom{n}{k}$  ile çarpılırsa

$P\{T_{n,r;m}^{(\ell)} = k\}$  hesaplanmış olur. Öyle ise;

$$P\{T_{n,r;m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} P\{X_{L(\ell)+1}, X_{L(\ell)+2}, \dots, X_{L(\ell)+k} \in (-\infty, X_{r;m}^{(\ell)}) \\ , X_{L(\ell)+k+1}, X_{L(\ell)+k+2}, \dots, X_{L(\ell)+n} \in [X_{r;m}^{(\ell)}, +\infty)\}$$

şeklinde yazılabilir.

$$P\{T_{n,r,m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^y \dots \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^y \dots \int_{-\infty}^y f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) \\ \frac{m^\ell m! \bar{F}(y)^{m-r} f(y)}{(m-r)!} \Phi_{F(y)}(r-1, \ell) dx_n \dots dx_1 dy$$

$$P\{T_{n,r,m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} [1-F(y)]^{n-k} [F(y)]^k \frac{m^\ell m!}{(m-r)!} (1-F(y))^{m-r} \\ \Phi_{F(y)}(r-1, \ell) f(y) dy \\ = \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(m-r)!} \int_{-\infty}^{\infty} [1-F(y)]^{n-k+m-r} [F(y)]^k \\ \Phi_{F(y)}(r-1, \ell) f(y) dy$$

(6)'da verilen  $\Phi_{F(y)}(r-1, \ell)$  fonksiyonunun polinomiye açılımı yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$P\{T_{n,r,m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(m-r)!} \int_{-\infty}^{\infty} [1-F(y)]^{n-k+m-r} [F(y)]^k f(y) \\ \left\{ \frac{[F(y)]^{r-2}}{(r-2)!} + \sum_{i=1}^{r-2} \gamma_1^{(r-1, \ell, i)} [F(y)]^{r-i-2} + [1-F(y)]^{r-1} \right. \\ \left. \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j_i=0}^{\ell_i} \gamma_2^{(r-1, \ell, j_1, \dots, j_{r-1})} [-\ln(1-F(y))]^{\ell-j_1-\dots-j_{r-1}} dy \right\}$$

$$P\{T_{n,r,m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(m-r)!} \left\{ \frac{1}{(r-2)!} \int_{-\infty}^{\infty} [1-F(y)]^{n-k+m-r} [F(y)]^{k+r-2} dF(y) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{r-2} \gamma_1^{(r-1, \ell, i)} \int_{-\infty}^{\infty} [1-F(y)]^{n-k+m-r} [F(y)]^{k+r-i-2} dF(y) + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j_i=0}^{\ell_i} \gamma_2^{(r-1, \ell, j_1, \dots, j_{r-1})} \right. \\ \left. \int_{-\infty}^{\infty} [1-F(y)]^{n-k+m-r} [F(y)]^k [-\ln(1-F(y))]^{\ell-j_1-\dots-j_{r-1}} dF(y) \right\}$$

elde edilir. Yukarıdaki son eşitlikte yer alan integrallerden ilk ikisinin Beta fonksiyonu olması sebebiyle bu eşitlik aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$P\{T_{n,r;m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(m-r)!} \left\{ \frac{1}{(r-2)!} B(k+r-1, n-k+m-r+1) + \sum_{i=1}^{r-2} \gamma_1^{(r-1, \ell, i)} B(k+r-i-1, n-k+m-r+1) + \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \gamma_2^{(r-1, \ell, j_1, \dots, j_{r-1})} \int_{-\infty}^{\infty} [1-F(y)]^{n-k+m-1} [F(y)]^k [-\ln(1-F(y))]^{\ell-j_1-\dots-j_{r-1}} dF(y) \right\}$$

Şimdi eşitlikte A diye adlandırdığımız integrali ele alalım.

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} [1-F(y)]^{n+m-r} [F(y)]^{r-1} [-\ln(1-F(y))]^{\ell-j_1-\dots-j_{r-1}} f(y) dy$$

$$A = \int_0^1 (u)^{n-k+m-1} (1-u)^k [-\ln(u)]^{\ell-j_1-\dots-j_{r-1}} du$$

Yardımcı teoremden, A ile adlandırdığımız integrali şu şekilde yazabiliriz:

$$A = \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} \frac{(-1)^v (\ell - j_1 - \dots - j_{r-1})!}{(n-k+m+v)^{\ell+1-j_1-\dots-j_{r-1}}}$$

Şimdi A'yı  $P\{T_{n,r;m}^{(\ell)} = k\}$  denkleminde yerine yazalım.

$$P\{T_{n,r;m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(m-r)!} \left\{ \frac{1}{(r-2)!} B(k+r-1, n-k+m-r+1) + \sum_{i=1}^{r-2} \gamma_1^{(r-1, \ell, i)} B(k+r-i-1, n-k+m-r+1) + \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \gamma_2^{(r-1, \ell, j_1, \dots, j_{r-1})} \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} \frac{(-1)^v (\ell - j_1 - \dots - j_{r-1})!}{(n-k+m+v)^{\ell+1-j_1-\dots-j_{r-1}} \right\}$$

$$(6) \text{ dan } \gamma_2^{(k, \ell, j_1, \dots, j_k)} = \frac{(-1)^k \prod_{u=1}^k u^{-1-j_u}}{(\ell - j_1 - \dots - j_k)!} \text{ olduğunu biliyoruz. Öyle ise,}$$

$$\gamma_2^{(r-1, \ell, j_1, \dots, j_{r-1})} = \frac{(-1)^{r-1} \prod_{u=1}^{r-1} u^{-1-j_u}}{(\ell - j_1 - \dots - j_{r-1})!} \quad \text{şeklini alarak } P\{T_{n,r,m}^{(\ell)} = k\}'de$$

yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa, ispat aşağıdaki gibi tamamlanmış olur.

$$\begin{aligned} P\{T_{n,r,m}^{(\ell)} = k\} &= \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(m-r)!} \left\{ \frac{1}{(r-2)!} B(k+r-1, n-k+m-r+1) \right. \\ &+ \sum_{i=1}^{r-2} \gamma_1^{(r-1, \ell, i)} B(k+r-i-1, n-k+m-r+1) \\ &\left. + (-1)^{r-1} \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j_i=0}^{\ell_i} \prod_{u=1}^{r-1} u^{-1-j_u} \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} \frac{(-1)^v}{(n-k+m+v)^{\ell+1-j_1-\dots-j_{r-1}}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{T_{n,r,m}^{(\ell)} = k\} &= \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(m-r)!} \left\{ \frac{1}{(r-2)!} B(k+r-1, n-k+m-r+1) \right. \\ &+ \sum_{i=1}^{r-2} \gamma_1^{(r-1, \ell, i)} B(k+r-i-1, n-k+m-r+1) \\ &\left. + (-1)^{r-1} \sum_{j_1=0}^{\ell_1} \sum_{j_2=0}^{\ell_2} \dots \sum_{j_{r-1}=0}^{\ell_{r-1}} \left( \prod_{u=1}^{r-1} u^{-1-j_u} \right) \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} \frac{(-1)^v}{(n-k+m+v)^{\ell+1-j_1-\dots-j_{r-1}}} \right\} \end{aligned}$$

**Özel Sonuç 1:**  $\{T_{1,1,m}^{(0)} = 1\}$  olayı  $\{X_{L(\ell)+1} < X_{1,m}^{(0)}\}$  şeklinde yazılabilir. İyi

bilinir ki,  $P\{X_{L(\ell)+1} \leq X_{1,m}\} = \frac{1}{m+1}$  dir. 1. teoremden bu sonucu elde

edebildiğimizi gösterelim:

$$P\{T_{n,l:m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} m^{\ell+1} \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} \frac{(-1)^v}{(n-k+m+v)^{\ell+1}}$$

$$P\{T_{1,1:m}^{(0)} = 1\} = m \sum_{v=0}^1 \binom{1}{v} \frac{(-1)^v}{(m+v)}$$

$$P\{T_{1,1:m}^{(0)} = 1\} = m \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right)$$

$$P\{T_{1,1:m}^{(0)} = 1\} = \frac{1}{m+1}$$

**Özel Sonuç 2:**  $\{T_{1,r:m}^{(0)} = 1\}$  olayı  $\{X_{L(\ell)+1} < X_{r:m}^{(0)}\}$  şeklinde yazılabilir.

Klasik sıra istatistiklerinde,  $P\{X_{L(\ell)+1} \leq X_{r:m}^{(0)}\} = \frac{r}{m+1}$  dir.

Teorem 2'den bu sonucu elde edebildiğimizi gösterelim:

$$P\{T_{n,r:m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(m-r)!} \left\{ \frac{1}{(r-2)!} B(k+r-1, n-k+m-r+1) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{r-2} \gamma_1^{(r-1, \ell, i)} B(k+r-i-1, n-k+m-r+1) + (-1)^{r-1} \right. \\ \left. \sum_{j_1=0}^{\ell_1} \sum_{j_2=0}^{\ell_2} \dots \sum_{j_{r-1}=0}^{\ell_{r-1}} \left( \prod_{u=1}^{r-1} u^{-1-j_u} \right) \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} \frac{(-1)^v}{(n-k+m+v)^{\ell+1-j_1-\dots-j_{r-1}}} \right\}$$

$$P\{T_{1,r:m}^{(0)} = 1\} = \frac{m^0 m!}{(m-r)!} \left\{ \frac{1}{(r-2)!} B(r, m-r+1) + \sum_{i=1}^{r-2} \gamma_1^{(r-1, 0, i)} \right. \\ \left. B(r-i, m-r+1) + (-1)^{r-1} \sum_{j_1=0}^{\ell_1} \sum_{j_2=0}^{\ell_2} \dots \sum_{j_{r-1}=0}^{\ell_{r-1}} \left( \prod_{u=1}^{r-1} u^{-1-j_u} \right) \right. \\ \left. \sum_{v=0}^1 \binom{1}{v} \frac{(-1)^v}{(m+v)^{\ell+1-j_1-\dots-j_{r-1}}} \right\}$$

$$\ell_i = \ell - \sum_{u=0}^{i-1} j_u \quad , \quad j_0 = 0 \text{ olmak üzere,}$$

$$\ell_1 = 0, \ell_2 = -j_1, \ell_3 = -j_1 - j_2, \dots, \ell_{r-1} = -j_1 - j_2 - \dots - j_{r-2} \text{ dir.}$$

İlgili olasılık aşağıdaki adımlar sonrasında elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned}
P\{T_{1,r;m}^{(0)} = 1\} &= \frac{m^0 m!}{(m-r)!} \left\{ \frac{1}{(r-2)!} B(r, m-r+1) \right. \\
&+ \sum_{i=1}^{r-2} \gamma_1^{(r-1,0,i)} B(r-i, m-r+1) \\
&+ (-1)^{r-1} \sum_{j_1=0}^0 \sum_{j_2=0}^{-j_1} \dots \sum_{j_{r-1}=0}^{-j_1-j_2-\dots-j_{r-2}} \left( (1)^{-1-j_1} (2)^{-1-j_2} \dots (r-1)^{-1-j_{r-1}} \right) \\
&\left. \left( \frac{1}{(m)^{1-j_1-\dots-j_{r-1}}} - \frac{1}{(m+1)^{1-j_1-\dots-j_{r-1}}} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P\{T_{1,r;m}^{(0)} = 1\} &= \frac{m!}{(m-r)!} \left\{ \frac{(r-1)!(m-r)!}{(r-2)!m!} + \sum_{i=1}^{r-2} \gamma_1^{(r-1,0,i)} \frac{(r-i-1)!(m-r)!}{(m-i)!} \right. \\
&\left. + (-1)^{r-1} \frac{1}{(r-1)!} \frac{1}{m(m+1)} \right\} \\
&= \frac{(r-1)!}{(r-2)!} + \sum_{i=1}^{r-2} \gamma_1^{(r-1,0,i)} \frac{m!(r-i-1)!}{(m-i)!} + \frac{m!}{(m-r)!} \frac{1}{m(m+1)} \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \\
&= \frac{(r-1)!}{(r-2)!} + m! \sum_{i=1}^{r-2} \frac{(-1)^i}{(i+1)!} \frac{(r-i-1)}{(m-i)!} + \frac{(m-1)!}{(m-r)!} \frac{1}{(m+1)} \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \\
&= \frac{r}{m+1}
\end{aligned}$$

### 3.2 En Düşük M Skor Listesine Dayalı Aşan İstatistikler

Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli skor üreten bir sistemin, gelecekte ortaya çıkacak olan  $\ell$ . güncelleme sonrası en düşük m-skor listesini ve ardından gözlemlenecek olan  $i$ 'inci yeni skorunu dikkate alalım. Bu  $i$ 'inci yeni skorun, listenin  $r$ . en küçük elemanından küçük olup olmadığını gösteren  $\xi_{i,r;m}^{(\ell)}$  rasgele değişkeni aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\xi_{i,r;m}^{(\ell)} = \begin{cases} 1, & X_{L(\ell)+i} < Y_{r;m}^{(\ell)} \\ 0, & X_{L(\ell)+i} > Y_{r;m}^{(\ell)} \end{cases}$$

$B_{n,r;m}^{(\ell)} = \sum_{i=1}^n \xi_{i,r;m}^{(\ell)}$  şeklinde tanımlı aşan istatistiğin olasılık fonksiyonu aşağıdaki iki teoremle verilmiştir.

**Teorem 3:**  $1 \leq r < m$  için,

$$\begin{aligned} P\{B_{n,r;m}^{(\ell)} = k\} = & \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(r-1)!} \left\{ \frac{1}{(m-r-1)!} B(k+r, n-k+m-r) \right. \\ & + \sum_{i=1}^{m-r-1} \gamma_1^{(m-r, \ell, i)} B(k+r, n-k+m-r-i) \\ & + (-1)^{m-r} \sum_{j_1=0}^{\ell_1} \sum_{j_2=0}^{\ell_2} \dots \sum_{j_{m-r}=0}^{\ell_{m-r}} \left( \prod_{u=1}^{m-r} u^{-1-j_u} \right) \\ & \left. \sum_{v=0}^{n-k} \binom{n-k}{v} \frac{(-1)^v}{(m+k+v)^{\ell+1-j_1-\dots-j_{m-r}}} \right\}, \quad k=0,1,2,\dots,n \end{aligned}$$

**İspat:**

$\{B_{n,r;m}^{(\ell)} = k\}$  olayı,  $n$  tane yeni gözlemin  $k$  tanesinin  $(-\infty, Y_{r;m}^{(\ell)})$  aralığına,  $(n-k)$  tanesinin  $[Y_{r;m}^{(\ell)}, +\infty)$  aralığına düşmesi olayıdır. Bu olay  $\binom{n}{k}$  adet eşit olasılıklı birbirinden ayrık olayın birleşimine eşittir. O zaman, bu ayrık olaylardan birinin olasılığı hesaplanıp  $\binom{n}{k}$  ile çarpılırsa  $P\{B_{n,r;m}^{(\ell)} = k\}$  hesaplanmış olur. Öyle ise;

$$\begin{aligned} P\{B_{n,r;m}^{(\ell)} = k\} = & P\{n \text{ tane yeni gözlemin } k \text{ tanesi } (-\infty, Y_{r;m}^{(\ell)}) \\ & , n-k \text{ tanesi } [Y_{r;m}^{(\ell)}, +\infty) \} \end{aligned}$$

$$P\{B_{n,r;m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} P\{X_{L(\ell)+1}, X_{L(\ell)+2}, \dots, X_{L(\ell)+k} \in (-\infty, Y_{r;m}^{(\ell)})$$

$$, X_{L(\ell)+k+1}, X_{L(\ell)+k+2}, \dots, X_{L(\ell)+n} \in [Y_{r;m}^{(\ell)}, +\infty)\}$$

şeklinde yazılabilir.

$$P\{B_{n,r;m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^x \dots \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1) f(y_2) \dots f(y_n)$$

$$\frac{m^\ell m! F(y)^{r-1} f(y)}{(r-1)!} \Phi_{1-F(y)}(m-r, \ell) dy_n \dots dy_1 dx$$

$$P\{B_{n,r;m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} [1-F(x)]^{n-k} [F(x)]^{k+r-1} \frac{m^\ell m!}{(r-1)!}$$

$$\Phi_{1-F(x)}(m-r, \ell) f(x) dx$$

$$P\{B_{n,r;m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(r-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} [1-F(x)]^{n-k} [F(x)]^{k+r-1}$$

$$\Phi_{1-F(x)}(m-r, \ell) f(x) dx$$

(6)'da verilen  $\Phi_{1-F(x)}(m-r, \ell)$  fonksiyonunun polinomial açılımı yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$P\{B_{n,r;m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(r-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} [1-F(x)]^{n-k} [F(x)]^{k+r-1} f(x)$$

$$\left\{ \frac{[1-F(x)]^{m-r-1}}{(m-r-1)!} + \sum_{i=1}^{m-r-1} \gamma_1^{(m-r, \ell, i)} [1-F(x)]^{m-r-i-1} \right.$$

$$\left. + [F(x)]^{m-r} \sum_{i=1}^{m-r} \sum_{j_i=0}^{\ell_i} \gamma_2^{(m-r, \ell, j_1, \dots, j_{m-r})} [-\ln(F(x))]^{\ell-j_1-\dots-j_{m-r}} \right\} dx$$

$$\begin{aligned}
P\{B_{n,r;m}^{(\ell)} = k\} = & \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(r-1)!} \left\{ \frac{1}{(m-r-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} [1-F(x)]^{n-k+m-r-1} [F(x)]^{k+r-1} \right. \\
& dF(x) + \sum_{i=1}^{m-r-1} \gamma_1^{(m-r,\ell,i)} \int_{-\infty}^{\infty} [1-F(x)]^{n-k+m-r-i-1} [F(x)]^{k+r-1} \\
& dF(x) + \sum_{t=1}^{m-r} \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \gamma_2^{(m-r,\ell,j_1,\dots,j_{m-r})} \int_{-\infty}^{\infty} [1-F(x)]^{n-k} [F(x)]^{m+k-1} \\
& \left. [-\ln(F(x))]^{\ell-j_1-\dots-j_{m-r}} dF(x) \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki son eşitlikte yer alan integrallerden ilk ikisinin Beta fonksiyonu olması sebebiyle bu eşitlik aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$\begin{aligned}
P\{B_{n,r;m}^{(\ell)} = k\} = & \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(r-1)!} \left\{ \frac{1}{(m-r-1)!} B(k+r, n-k+m-r) \right. \\
& + \sum_{i=1}^{m-r-1} \gamma_1^{(m-r,\ell,i)} B(k+r, n-k+m-r-i) + \sum_{t=1}^{m-r} \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \gamma_2^{(m-r,\ell,j_1,\dots,j_{m-r})} \\
& \left. \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} [1-F(x)]^{n-k} [F(x)]^{m+k-1} [-\ln(F(x))]^{\ell-j_1-\dots-j_{m-r}} dF(x)}_A \right\}
\end{aligned}$$

Şimdi eşitlikte A diye adlandırdığımız integrali ele alalım.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-\infty}^{\infty} [1-F(x)]^{n-k} [F(x)]^{m+k-1} [-\ln(F(x))]^{\ell-j_1-\dots-j_{m-r}} dF(x) \\
A &= \int_0^1 (1-u)^{n-k} (u)^{m+k-1} [-\ln(u)]^{\ell-j_1-\dots-j_{m-r}} du \text{ olur.}
\end{aligned}$$

Yardımcı teoremden, A integralini şu şekilde yazabiliriz:

$$A = \sum_{v=0}^{n-k} \binom{n-k}{v} \frac{(-1)^v (\ell - j_1 - \dots - j_{m-r})!}{(m+k+v)^{\ell+j_1-\dots-j_{m-r}}}$$

Şimdi A'yı  $P\{B_{n,r;m}^{(\ell)} = k\}$  denkleminde yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
P\{B_{n,r;m}^{(\ell)} = k\} &= \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(r-1)!} \left\{ \frac{1}{(m-r-1)!} B(k+r, n-k+m-r) \right. \\
&+ \sum_{i=1}^{m-r-1} \gamma_1^{(m-r,\ell,i)} B(k+r, n-k+m-r-i) \\
&\left. + \sum_{t=1}^{m-r} \sum_{j_i=0}^{\ell_t} \gamma_2^{(m-r,\ell,j_1,\dots,j_{m-r})} \sum_{v=0}^{n-k} \binom{n-k}{v} \frac{(-1)^v (\ell - j_1 - \dots - j_{m-r})!}{(m+k+v)^{\ell+1-j_1-\dots-j_{m-r}}} \right\}
\end{aligned}$$

(6) dan  $\gamma_2^{(k,\ell,j_1,\dots,j_k)} = \frac{(-1)^k \prod_{u=1}^k u^{-1-j_u}}{(\ell - j_1 - \dots - j_k)!}$  olduğunu biliyoruz. Öyle ise,

$$\gamma_2^{(m-r,\ell,j_1,\dots,j_{m-r})} = \frac{(-1)^{m-r} \prod_{u=1}^{m-r} u^{-1-j_u}}{(\ell - j_1 - \dots - j_{m-r})!}, \text{ dir. } P\{B_{n,r;m}^{(\ell)} = k\} \text{ 'de yerine}$$

yazılıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
P\{B_{n,r;m}^{(\ell)} = k\} &= \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(r-1)!} \left\{ \frac{1}{(m-r-1)!} B(k+r, n-k+m-r) \right. \\
&+ \sum_{i=1}^{m-r-1} \gamma_1^{(m-r,\ell,i)} B(k+r, n-k+m-r-i) \\
&\left. + (-1)^{m-r} \sum_{t=1}^{m-r} \sum_{j_i=0}^{\ell_t} \prod_{u=1}^{m-r} u^{-1-j_u} \sum_{v=0}^{n-k} \binom{n-k}{v} \frac{(-1)^v}{(m+k+v)^{\ell+1-j_1-\dots-j_{m-r}}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P\{B_{n,r;m}^{(\ell)} = k\} &= \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(r-1)!} \left\{ \frac{1}{(m-r-1)!} B(k+r, n-k+m-r) \right. \\
&+ \sum_{i=1}^{m-r-1} \gamma_1^{(m-r,\ell,i)} B(k+r, n-k+m-r-i) \\
&+ (-1)^{m-r} \sum_{j_1=0}^{\ell_1} \sum_{j_2=0}^{\ell_2} \dots \sum_{j_{m-r}=0}^{\ell_{m-r}} \left( \prod_{u=1}^{m-r} u^{-1-j_u} \right) \\
&\left. \sum_{v=0}^{n-k} \binom{n-k}{v} \frac{(-1)^v}{(m+k+v)^{\ell+1-j_1-\dots-j_{m-r}}} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. İspat tamamlanmıştır.

**Teorem 4:**  $r = m$  için,

$$P\{B_{n,m:m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} \frac{m^{\ell+1}}{\ell!} \sum_{v=0}^{n-k} \binom{n-k}{v} \frac{(-1)^v \ell!}{(m+k+v)^{\ell+1}}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n$$

**İspat:**

$\{B_{n,m:m}^{(\ell)} = k\}$  olayı,  $n$  tane yeni gözlemin  $k$  tanesinin  $(-\infty, Y_{m:m}^{(\ell)})$  aralığına,  $(n-k)$  tanesinin  $[Y_{m:m}^{(\ell)}, +\infty)$  aralığına düşmesi olayıdır. Bu olay  $\binom{n}{k}$  adet eşit olasılıklı birbirinden ayrık olayın birleşimine eşittir. O zaman, bu ayrık olaylardan birinin olasılığı hesaplanıp  $\binom{n}{k}$  ile çarpılırsa  $P\{B_{n,m:m}^{(\ell)} = k\}$  hesaplanmış olur. Öyle ise;

$$P\{B_{n,m:m}^{(\ell)} = k\} = P\{n \text{ tane yeni gözlemin } k \text{ tanesi } (-\infty, Y_{m:m}^{(\ell)}), \\ n-k \text{ tanesi } [Y_{m:m}^{(\ell)}, +\infty) \}$$

$$P\{B_{n,m:m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} P\{X_{L^{(\ell)}+1}, X_{L^{(\ell)}+2}, \dots, X_{L^{(\ell)}+k} \in (-\infty, Y_{m:m}^{(\ell)}), X_{L^{(\ell)}+k+1}, \\ X_{L^{(\ell)}+k+2}, \dots, X_{L^{(\ell)}+n} \in [Y_{m:m}^{(\ell)}, +\infty) \}$$

şeklinde yazılabilir.

$$P\{B_{n,m:m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^x \dots \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^x \dots \int_{-\infty}^x f(y_1) f(y_2) \dots f(y_n) \frac{m^\ell m! F(y)^{m-1} f(y)}{(m-1)!} \Phi_{1-F(y)}(0, \ell) dy_n dy_{n-1} \dots dy_1 dx$$

$$\begin{aligned} P\{B_{n,m:m}^{(\ell)} = k\} &= \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} [1-F(x)]^{n-k} [F(x)]^{k+m-1} \frac{m^\ell m!}{(m-1)!} \\ &\quad \Phi_{1-F(x)}(0, \ell) f(x) dx \\ &= \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(m-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} [1-F(x)]^{n-k} [F(x)]^{k+m-1} \\ &\quad \Phi_{1-F(x)}(0, \ell) f(x) dx \end{aligned}$$

(6)'da verilen  $\Phi_{1-F(x)}(0, \ell)$  fonksiyonunun polinomial açılımı yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$P\{B_{n,m:m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(m-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} [1-F(x)]^{n-k} [F(x)]^{k+m-1} \frac{1}{\ell!} (-\ln[F(x)])^\ell f(x) dx$$

$$P\{B_{n,m:m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} \frac{m^{\ell+1}}{\ell!} \int_{-\infty}^{\infty} [1-F(x)]^{n-k} F(x)^{k+m-1} [-\ln(F(x))]^\ell dF(x)$$

$$P\{B_{n,m:m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} \frac{m^{\ell+1}}{\ell!} \int_0^1 (1-u)^{n-k} (u)^{k+m-1} [-\ln(u)]^\ell du$$

Yardımcı Teoremden,

$$\begin{aligned} P\{B_{n,m:m}^{(\ell)} = k\} &= \binom{n}{k} \frac{m^{\ell+1}}{\ell!} \int_0^1 (1-u)^{n-k} (u)^{k+m-1} [-\ln(u)]^\ell du \\ &= \binom{n}{k} \frac{m^{\ell+1}}{\ell!} \sum_{v=0}^{n-k} \binom{n-k}{v} \frac{(-1)^v \ell!}{(m+k+v)^{\ell+1}} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir ve ispat tamamlanmış olur.

**Özel Sonuç 3:**

$\{B_{1,1,m}^{(0)} = 1\}$  olayı  $\{X_{L(\ell)+1} < Y_{1:m}^{(0)}\}$  şeklinde yazılabilir. İyi bilinir ki,

$P\{X_{L(\ell)+1} \leq Y_{1:m}^{(0)}\} = \frac{1}{m+1}$  dir. Yukarıda verdiğimiz 3. teoremden bu

sonucu elde edebildiğimizi gösterelim:

$$\begin{aligned}
P\{B_{n,r,m}^{(\ell)} = k\} &= \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(r-1)!} \left\{ \frac{1}{(m-r-1)!} B(k+r, n-k+m-r) \right. \\
&+ \sum_{i=1}^{m-r-1} \gamma_1^{(m-r,\ell,i)} B(k+r, n-k+m-r-i) \\
&+ (-1)^{m-r} \sum_{j_1=0}^{\ell_1} \sum_{j_2=0}^{\ell_2} \dots \sum_{j_{m-r}=0}^{\ell_{m-r}} \left( \prod_{u=1}^{m-r} u^{-1-j_u} \right) \\
&\left. \sum_{v=0}^{n-k} \binom{n-k}{v} \frac{(-1)^v}{(m+k+v)^{\ell+1-j_1-\dots-j_{m-r}}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P\{B_{1,1,m}^{(0)} = 1\} &= \binom{1}{1} \frac{m^0 m!}{(1-1)!} \left\{ \frac{1}{(m-1-1)!} B(1+1, 1-1+m-1) \right. \\
&+ \sum_{i=1}^{m-1-1} \gamma_1^{(m-1,0,i)} B(1+1, 1-1+m-1-i) \\
&\left. + (-1)^{m-1} \sum_{j_1=0}^{\ell_1} \sum_{j_2=0}^{\ell_2} \dots \sum_{j_{m-1}=0}^{\ell_{m-1}} \left( \prod_{u=1}^{m-1} u^{-1-j_u} \right) \frac{1}{(m+1)^{1-j_1-\dots-j_{m-1}}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\ell_t = \ell - \sum_{u=0}^{t-1} j_u \quad , j_0 = 0 \text{ olmak üzere,}$$

$$\ell_1 = 0, \ell_2 = -j_1, \ell_3 = -j_1 - j_2, \dots, \ell_{m-1} = -j_1 - j_2 - \dots - j_{m-2} \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned}
P\{B_{1,1,m}^{(0)} = 1\} &= m! \left\{ \frac{1}{(m-2)!} B(2, m-1) + \sum_{i=1}^{m-2} \gamma_1^{(m-1,0,i)} B(2, m-1-i) \right. \\
&+ (-1)^{m-1} \sum_{j_1=0}^0 \sum_{j_2=0}^{-j_1} \dots \sum_{j_{m-1}=0}^{-j_1-j_2-\dots-j_{m-2}} \\
&\left. \left( (1)^{-1-j_1} (2)^{-1-j_2} \dots (m-1)^{-1-j_{m-1}} \right) \frac{1}{(m+1)^{1-j_1-\dots-j_{m-1}}} \right\}
\end{aligned}$$

$$P\{B_{1,1:m}^{(0)} = 1\} = m! \left\{ \frac{1}{(m-2)!} \frac{(m-2)!}{m!} + \sum_{i=1}^{m-2} \gamma_1^{(m-1,0,i)} \frac{(m-2-i)!}{(m-i)!} \right. \\ \left. + (-1)^{m-1} \frac{1}{(m-1)!} \frac{1}{m+1} \right\}$$

$$\gamma_1^{(k,\ell,i)} = \sum_{t=1}^i \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \frac{(-1)^i \prod_{u=1}^i u^{-1-j_u}}{(i+1)^{\ell+1-j_1-\dots-j_i} (k-i-1)!} \text{ ve } \sum_{\emptyset} = 0 \text{ (Tanil, 2009)}$$

olmak üzere;

$$P\{B_{1,1:m}^{(0)} = 1\} = m! \left\{ \frac{1}{m!} + \sum_{i=1}^{m-2} \frac{(-1)^i \frac{1}{i!}}{(i+1)(m-2-i)!} \frac{(m-2-i)!}{(m-i)!} \right. \\ \left. + (-1)^{m-1} \frac{1}{(m-1)!} \frac{1}{m+1} \right\} \\ = m! \left\{ \frac{1}{m!} + \sum_{i=1}^{m-2} \frac{(-1)^i}{(i+1)!} \frac{1}{(m-i)!} + \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!(m+1)} \right\} \\ = 1 + \sum_{i=1}^{m-2} \frac{(-1)^i}{(i+1)!} \frac{m!}{(m-i)!} + \frac{(-1)^{m-1} m!}{(m-1)!(m+1)} \\ = 1 + \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^{m-2} (-1)^i \binom{m+1}{i+1} + (-1)^{m-1} \frac{m}{m+1} \\ = 1 + \frac{1}{m+1} m[(-1)^m - 1] + (-1)^{m-1} \frac{m}{m+1} \\ = 1 + \frac{m(-1)^m - m}{m+1} - \frac{m(-1)^m}{m+1} \\ = \frac{m+1 + m(-1)^m - m - m(-1)^m}{m+1} \\ = \frac{1}{m+1}$$

**Özel Sonuç 4:**

$\{B_{1,m:m}^{(0)} = 1\}$  olayı  $\{X_{L(\ell)+1} < Y_{m:m}^{(0)}\}$  şeklinde yazılabilir. İyi bilinir ki,

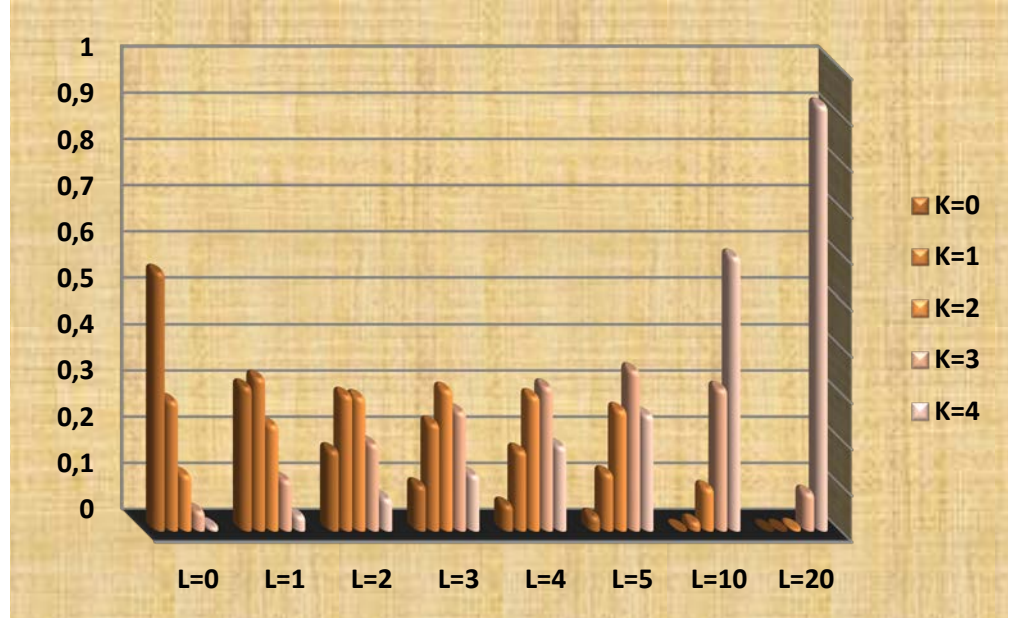
$P\{X_{L(\ell)+1} \leq Y_{m:m}^{(0)}\} = \frac{m}{m+1}$  dir. Yukarıda verdiğimiz 4. teoremden bu

sonucu elde edebildiğimizi gösterelim:

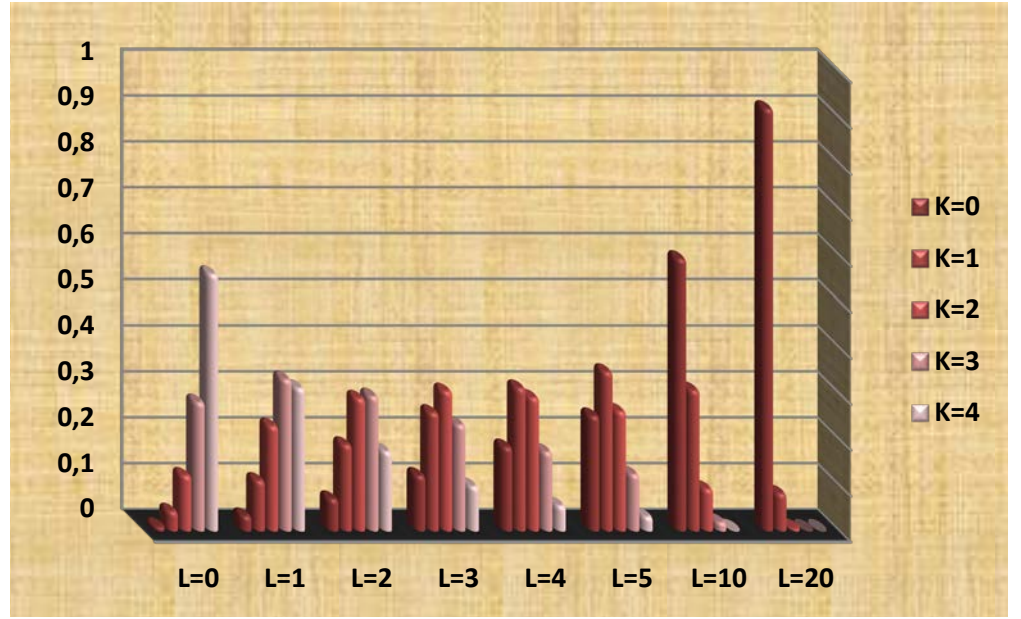
$$\begin{aligned} P\{B_{n,m:m}^{(\ell)} = k\} &= \binom{n}{k} \frac{m^{\ell+1}}{\ell!} \sum_{v=0}^{n-k} \binom{n-k}{v} \frac{(-1)^v \ell!}{(m+k+v)^{\ell+1}} \\ &= \binom{1}{1} m \frac{1}{m+1} \\ &= \frac{m}{m+1} \end{aligned}$$

**3.3. Aşan İstatistiklerin Olasılık Fonksiyonları Arasındaki Bağını**

$T_{n,r:m}^{(\ell)}$  ve  $B_{n,r:m}^{(\ell)}$  istatistiklerinin olasılık fonksiyonlarının  $\ell$ 'ye göre değişimlerini gösteren grafikler 3.1 ve 3.2 de verilmiştir.  $P\{T_{n,r:m}^{(\ell)} = k\}$  olasılık fonksiyonu,  $\ell$  arttıkça, sağa çarpık konumdan sola çarpık hale (Bkz. Grafik 3.1),  $P\{B_{n,r:m}^{(\ell)} = k\}$  olasılık fonksiyonu ise sola çarpık konumdan sağa çarpık hale geldiği görülmektedir (Bkz. Grafik 3.2).



Grafik 3.1  $T_{n,r;m}^{(\ell)}$  İstatistiğinin Olasılık Fonksiyonu Grafiğinin  $\ell$  'ye Göre Değişimi



Grafik 3.2  $B_{n,r;m}^{(\ell)}$  İstatistiğinin Olasılık Fonksiyonu Grafiğinin  $\ell$  'ye Göre Değişimi

Ayrıca 4. Bölümde verilen tablolar incelendiğinde  $P\{T_{n,r;m}^{(\ell)} = k\}$  ile  $P\{B_{n,r;m}^{(\ell)} = k\}$ 'nin belli bir düzen içerisinde aynı değerler aldığı görülmektedir. Ortaya konulan teoremlerin birbirleriyle ilişkisini; tablolardaki,  $n, m, r, k$  değerleri arasındaki matematiksel ilişkiden hareketle,

$$P\{B_{n,r;m}^{(\ell)} = k\} = P\{T_{n,m+1-r;m}^{(\ell)} = n - k\} \text{ olduğunu şu şekilde gösterebiliriz:}$$

Teorem 2'deki  $P\{T_{n,r;m}^{(\ell)} = k\}$  olasılığında;

$$P\{T_{n,r;m}^{(\ell)} = k\} = \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(m-r)!} \left\{ \frac{1}{(r-2)!} B(k+r-1, n-k+m-r+1) + \sum_{i=1}^{r-2} \gamma_1^{(r-1, \ell, i)} B(k+r-i-1, n-k+m-r+1) + (-1)^{r-1} \sum_{j_1=0}^{\ell_1} \sum_{j_2=0}^{\ell_2} \dots \sum_{j_{r-1}=0}^{\ell_{r-1}} \left( \prod_{u=1}^{r-1} u^{-1-j_u} \right) \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} \frac{(-1)^v}{(n-k+m+v)^{\ell+1-j_1-\dots-j_{r-1}}} \right\}$$

$r$  yerine  $(m+1-r)$ ,  $k$  yerine de  $(n-k)$  yazalım.

$$P\{T_{n,r;m}^{(\ell)} = n-k\} = \binom{n}{k} \frac{m^\ell m!}{(m-r)!} \left\{ \frac{1}{(r-2)!} B(k+r-1, n-k+m-r+1) + \sum_{i=1}^{r-2} \gamma_1^{(r-1, \ell, i)} B(k+r-i-1, n-k+m-r+1) + (-1)^{r-1} \sum_{j_1=0}^{\ell_1} \sum_{j_2=0}^{\ell_2} \dots \sum_{j_{r-1}=0}^{\ell_{r-1}} \left( \prod_{u=1}^{r-1} u^{-1-j_u} \right) \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} \frac{(-1)^v}{(n-k+m+v)^{\ell+1-j_1-\dots-j_{r-1}}} \right\}$$

$$P\{T_{n, (m+1-r); m}^{(\ell)} = n-k\} = \binom{n}{n-k} \frac{m^\ell m!}{(m-(m+1-r))!} \left\{ \frac{1}{((m+1-r)-2)!} + B(n-k+(m+1-r)-1, n-(n-k)+m-(m+1-r)+1) + \sum_{i=1}^{(m+1-r)-2} \gamma_1^{((m+1-r)-1, \ell, i)} B(n-k+(m+1-r)-i-1, n-(n-k)+m-(m+1-r)+1) + (-1)^{m-r} \sum_{j_1=0}^{\ell_1} \sum_{j_2=0}^{\ell_2} \dots \sum_{j_{m-r}=0}^{\ell_{m-r}} \left( \prod_{u=1}^{m-r} u^{-1-j_u} \right) \sum_{v=0}^k \binom{n-k}{v} \frac{(-1)^v}{(k+m+v)^{\ell+1-j_1-\dots-j_{m-r}}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
P\{T_{n,(m+1-r);m}^{(\ell)} = n-k\} &= \binom{n}{n-k} \frac{m^\ell m!}{(r-1)!} \left\{ \frac{1}{(m-r-1)!} B(n-k+m-r, k+r) \right. \\
&+ \sum_{i=1}^{m-r-1} \gamma_i^{(m-r, \ell, i)} B(n+m-k-r-i, k+r) + (-1)^{m-r} \\
&\left. \sum_{j_1=0}^{\ell_1} \sum_{j_2=0}^{\ell_2} \dots \sum_{j_{r-1}=0}^{\ell_{r-1}} \left( \prod_{u=1}^{m-r} u^{-1-j_u} \right) \sum_{v=0}^{n-k} \binom{n-k}{v} \frac{(-1)^v}{(k+m+v)^{\ell+1-j_1-\dots-j_{m-r}}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuç,  $P\{B_{n,r;m}^{(\ell)} = k\}$  olasılık fonksiyonu olan Teorem 3'te verilen olasılık fonksiyonunun aynısıdır.

Öyle ise,

$$P\{B_{n,r;m}^{(\ell)} = k\} = P\{T_{n,m+1-r;m}^{(\ell)} = n-k\} \text{ 'dir.}$$

Böylece,  $\ell$ . güncelleme sonrası en yüksek m skor listesi ile en düşük m skor listelerinin, n tane yeni gözlemin, listelerin r. elamanından daha küçük olması olaylarının olasılıklarının arasındaki bağıntı ortaya konulmuştur.

## 4. HİPOTEZ TESTİ VE BİR UYGULAMA

### 4.1 Parametrik Olmayan Bir Hipotez Testi

Bu çalışmanın önceki bölümlerinde tanımlanan aşan istatistik  $T_{n,r;m}^{(\ell)}$ , aşağıda önerdiğimiz parametrik olmayan hipotez testinde test istatistiği olarak alınmıştır. Bu parametrik olmayan hipotez testi araştırmacılar açısından esnek bir yapıya sahiptir. Test istatistiği, belirlenecek bir eşik altında kalan gözlem sayısıdır. Eşik çeşitli araştırmacılar farklı açılardan ele alabilir. Örneğin, eşik değer olarak klasik sıra istatistiklerini kullanmak isteyen araştırmacı, test istatistiğinin parametrelerinden  $\ell$ 'yi 0, rekor değerleri eşik değer olarak almak isteyen  $m$ 'yi 1, k-rekor değerleri eşik değer olarak almak isteyen de  $r$ 'yi 1 almalıdır. Bu kısıtlar dışında da eşik değer istenildiği gibi alınabilir. Yani test istatistiği içerisinde yer alan eşik belirleme konusu, birden fazla sıralanmış rasgele değişken modelini seçmeyi olanaklı kılar.

#### 1. Varsayımlar:

- $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ , sayılabilir sonsuz bir rasgele değişkenler dizisidir.
- Rasgele değişkenler bağımsız ve aynı  $F$  dağılımlıdır.
- Rasgele değişkenler süreklidir.
- $T_m^\ell = (X_{1:m}^{(\ell)}, \dots, X_{m:m}^{(\ell)})$ , bu rasgele değişkenler dizisinin  $\ell$ 'inci güncelleme sonrası en yüksek  $m$  skor listesidir. Başlangıç liste  $T_m^{(0)} = \{X_{1:m}, X_{2:m}, \dots, X_{m:m}\}$  olup, bu listenin güncellenmesi; sistemden ölçümlenmeye devam edilen herbir yeni gözlem, listenin en küçük elemanından büyüğe listeye dahil edilip, listenin en küçük elemanı listeden düşürülerek gerçekleştirilir. Böylelikle  $T_m^{(\ell)}$  listesine ulaşılır.  $\ell$ 'nin seçimi, listenin güncellenme olasılığı  $\left(\frac{m}{m+1}\right)^\ell$  (Bkz. Tanil, 2009), araştırmacının belirleyeceği  $p_0$ 'dan küçük veya eşit olacak şekilde,  $\left(\frac{m}{m+1}\right)^\ell \leq p_0$  yaklaşımıyla belirlenebilir.
- $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ , yukarıdaki liste elde edildikten sonra alınan  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ 'lerden ve kendi aralarında bağımsız ve aynı  $G$  dağılımlı yeni gözlemleri gösterir.

## 2. Hipotezler:

$H_0$  : Yeni gözlemlerin geldiği kitle ile  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$  dizisinin geldiği kitle aynıdır.

$H_A$  : Yeni gözlemler,  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$  dizisinin elemanlarına göre daha yüksek olma eğilimindedir.

## 3. Test İstatistiği:

- a)  $T_{n,r,m}^{(\ell)}$ , yani  $n$  adet yeni gözlemden kaçının  $T_m^\ell$  listesinin  $r$ 'inci en küçük elemanından küçük olduğunu gösteren rasgele değişken test istatistiği olarak alınır ve değeri ( $k$ ) hesaplanır.
- b) Test istatistiğinin parametrelerinden biri olan  $r$ , araştırmacı tarafından belirlenir ( $1 \leq r \leq m$ ).  $r$ 'nin seçimi ile, yeni gözlemlerin karşılaştırılacağı eşğin,  $T_m^{(\ell)}$  listesi içerisindeki hangi eleman olduğu belirlenmiş olur.

## 4. Karar Kuralı:

- a)  $H_0$  hipotezinin doğru olması durumunda test istatistiğinin değerinin büyük çıkması beklenir. Aksi halde  $H_0$ 'ın yanlış olabileceği düşüncesi ortaya çıkar. Yani, test istatistiğinin değeri yeterince küçükse  $H_0$  hipotezi reddedilecektir.
- b)  $p$  – değeri ( $p$  – value =  $P\{T_{n,r,m}^{(\ell)} \leq k\}$ ) ile  $1$ . Tip hata olarak seçilecek  $\alpha$  karşılaştırılır.
- c) Eğer  $p$  – değeri  $\alpha$  'dan küçük ise  $H_0$  hipotezi %100( $1 - \alpha$ ) güven düzeyinde reddedilir. Aksi halde reddedilemez.

### 4.2 Bir Uygulama Problemi

Bir akarsudan alınacak debi ölçümlerini kaydetme deneyi ile ortaya çıkacak süreç, aynı F dağılımından, birbirinden bağımsız, sayılabilir sonsuz skor üreten sistem varsayımına uygun bir örnek olarak verilebilir (Bilir, 2012). En yüksek ve en düşük 5 debi ayrı ayrı iki liste halinde tutulmaya karar verilsin. Zaman içerisinde yeni debi ölçümleri alındıkça her iki liste de  $\ell$  kez güncellenecektir. Bu sürecin sonunda elimizde  $T_5^\ell$  ve  $B_5^\ell$  listeleri bulunacaktır. Bu listeler elde edildikten sonra aynı akarsudan alınacak 4 debi ölçümü ile

deneyimiz tamamlansın. Çalışmamızın giriş kısmında verilen Olay 1' in bu uygulamadaki karşılığı, “4 tane yeni debi ölçümünden k tanesinin  $T_5^\ell$  listesinin r'inci en küçük elemanından küçük olması” olayı, yani  $\{T_{4,r:5}^{(\ell)} = k\}$  olacaktır. Benzer şekilde Olay 2 ise  $\{B_{4,r:5}^{(\ell)} = k\}$  şeklinde ifade edilecektir. Aşağıda verilen beş tabloda,  $\ell = 0,1,2,3,4,5,10,20$  için bu olayların olasılıkları yer almaktadır. Örneğin, 4 yeni debi ölçümünün tümünün  $T_5^{10}$  listesinin en küçük elemanından büyük olması olasılığı  $P\{T_{4,1:5}^{(10)} = 0\} = 0.001$  olarak Tablo 4.1'den okunur. Aynı şekilde 4 yeni debi ölçümünden 3 tanesinin  $B_5^4$  listesinin en büyük elemanından küçük olmasının olasılığı  $P\{B_{4,5:5}^{(4)} = 3\} = 0.17$  olarak Tablo 4.1'den görülebilir.

Diğer yandan, bir akarsuyun debisinin yükselmesi, o bölgede sel veya taşkın afetlerinin ortaya çıkmasına neden olabilir. Bu yüzden debilerdeki yükselişin tespiti önemlidir. Bunu tespit edebilmek için, Bölüm 4.1'de önerilen parametrik olmayan hipotez testi kullanılabilir. Örneğin, belirlenen bir akarsudan zaman sıralı olarak alınan debi ölçümleri kullanılarak 10 kez güncellenmiş en yüksek 5 debi elde edilmiş olsun. Daha sonra, aynı akarsudan 4 yeni debi ölçümü alınsın. Araştırmacı yeni debi ölçümlerinin karşılaştırılacağı eşğin, 10 kez güncellenmiş en yüksek beş debinin medyanı olması için  $r$ 'yi 3 olarak seçsin. Yapılacak böyle bir deneyde,

$H_0$  : Yeni debiler ile eski debiler aynı kitleden gelmektedir.

$H_A$  : Yeni debiler eskilere göre daha yüksek olma eğilimindedir.

hipotezleri kurulsun. Birinci tip hata olan  $\alpha$ , 0.05 olarak seçilsin. Eğer test istatistiğinin değeri  $T_{4,3:5}^{(10)} = 2$  olarak hesaplanmış ise Tablo 4.6'dan  $p$ -değeri  $P\{T_{4,3:5}^{(10)} \leq 2\} = 0.047$  olarak okunacaktır. Bu değer 0.05'ten küçük olduğu için  $H_0$  hipotezi %95 güven düzeyinde reddedilecektir.  $H_0$  hipotezinin reddedilmesiyle, yeni debi ölçümlerinin dağılımında bir değişiklik olabileceği, başka bir deyişle, yeni debilerin eskilere göre daha yüksek olma eğiliminde olduğu, bu durumun bir tehlike (sel, taşkın,vb...) işareti olabileceği kararına varılır.

Tablo 4.1.  $\{T_{4,1:5}^{(\ell)} = k\}$  ve  $\{B_{4,5:5}^{(\ell)} = k\}$  Olaylarının Çeşitli  $k$  ve  $\ell$  Değerleri İçin Olasılık Değerleri

	$P\{T_{n,r:m}^{(\ell)} = k\}$					$P\{B_{n,r:m}^{(\ell)} = k\}$				
	$n=4, m=5, r=1, m-r>0$					$n=4, m=5, r=5, m-r=0$				
	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$\ell=0$	0.556	0.278	0.118	0.04	0.008	0.008	0.04	0.118	0.278	0.556
$\ell=1$	0.309	0.328	0.226	0.107	0.03	0.03	0.107	0.226	0.328	0.309
$\ell=2$	0.171	0.291	0.286	0.185	0.067	0.067	0.185	0.286	0.291	0.171
$\ell=3$	0.095	0.229	0.302	0.255	0.118	0.118	0.255	0.302	0.229	0.095
$\ell=4$	0.053	0.17	0.288	0.309	0.18	0.18	0.309	0.288	0.17	0.053
$\ell=5$	0.029	0.121	0.258	0.344	0.248	0.248	0.344	0.258	0.121	0.029
$\ell=10$	0.0010	0.017	0.089	0.304	0.589	0.589	0.304	0.089	0.017	0.0010
$\ell=20$	$4.36 \cdot 10^{-6}$	$1.89 \cdot 10^{-4}$	$4.80 \cdot 10^{-3}$	0.079	0.916	0.916	0.079	$4.80 \cdot 10^{-3}$	$1.89 \cdot 10^{-4}$	$4.36 \cdot 10^{-6}$

Tablo 4.2.  $\{T_{4,2:5}^{(\ell)} = k\}$  ve  $\{B_{4,4:5}^{(\ell)} = k\}$  Olaylarının Çeşitli  $k$  ve  $\ell$  Değerleri İçin Olasılık Değerleri

	$P\{T_{n,r:m}^{(\ell)} = k\}$					$P\{B_{n,r:m}^{(\ell)} = k\}$				
	$n = 4, m=5, r=2, m-r>0$					$n = 4, m=5, r=4, m-r>0$				
	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$\ell = 0$	0.278	0.317	0.238	0.127	0.04	0.04	0.127	0.238	0.317	0.278
$\ell = 1$	0.154	0.276	0.288	0.202	0.08	0.08	0.202	0.288	0.276	0.154
$\ell = 2$	0.086	0.215	0.297	0.268	0.134	0.134	0.268	0.297	0.215	0.086
$\ell = 3$	0.048	0.158	0.281	0.317	0.196	0.196	0.317	0.281	0.158	0.048
$\ell = 4$	0.026	0.112	0.249	0.347	0.266	0.266	0.347	0.249	0.112	0.026
$\ell = 5$	0.015	0.077	0.211	0.359	0.338	0.338	0.359	0.211	0.077	0.015
$\ell = 10$	0,000778	0.009881	0.064341	0.269	0.656	0.656	0.269	0.064341	0.009881	0,000778
$\ell = 20$	$2.18 \cdot 10^{-6}$	$1.09 \cdot 10^{-4}$	$3.89 \cdot 10^{-3}$	0.063	0.933	0.933	0.063	$3.89 \cdot 10^{-3}$	$1.09 \cdot 10^{-4}$	$2.18 \cdot 10^{-6}$

Tablo 4.3.  $\{T_{4,3:5}^{(\ell)} = k\}$  ve  $\{B_{4,3:5}^{(\ell)} = k\}$  Olaylarının Çeşitli  $k$  ve  $\ell$  Değerleri İçin Olasılık Değerleri

	$P\{T_{n,r:m}^{(\ell)} = k\}$					$P\{B_{n,r:m}^{(\ell)} = k\}$				
	$n = 4, m=5, r=3, m-r>0$					$n = 4, m=5, r=3, m-r>0$				
	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$\ell = 0$	0.119	0.238	0.286	0.238	0.119	0.119	0.238	0.286	0.238	0.119
$\ell = 1$	0.066	0.182	0.282	0.292	0.178	0.178	0.292	0.282	0.182	0.066
$\ell = 2$	0.037	0.132	0.258	0.33	0.243	0.243	0.33	0.258	0.132	0.037
$\ell = 3$	0.02	0.093	0.224	0.349	0.314	0.314	0.349	0.224	0.093	0.02
$\ell = 4$	0.011	0.064	0.187	0.354	0.384	0.384	0.354	0.187	0.064	0.011
$\ell = 5$	0.0063	0.043	0.152	0.345	0.4537	0.4537	0.345	0.152	0.043	0.0063
$\ell = 10$	$3,37 \cdot 10^{-4}$	$5,16 \cdot 10^{-3}$	0.0415	0.223	0.73	0.73	0.223	0.0415	$5,16 \cdot 10^{-3}$	$3,37 \cdot 10^{-4}$
$\ell = 20$	$9,9 \cdot 10^{-7}$	$1,22 \cdot 10^{-4}$	$1,88 \cdot 10^{-3}$	0.043	0.955	0.955	0.043	$1,88 \cdot 10^{-3}$	$1,22 \cdot 10^{-4}$	$9,9 \cdot 10^{-7}$

Tablo 4.4.  $\{T_{4,4:5}^{(\ell)} = k\}$  ve  $\{B_{4,2:5}^{(\ell)} = k\}$  Olaylarının Çeşitli  $k$  ve  $\ell$  Değerleri İçin Olasılık Değerleri

	$P\{T_{n,r:m}^{(\ell)} = k\}$					$P\{B_{n,r:m}^{(\ell)} = k\}$				
	$n = 4, m = 5, r = 4, m - r > 0$					$n = 4, m = 5, r = 2, m - r > 0$				
	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$\ell = 0$	0.04	0.127	0.238	0.317	0.278	0.278	0.317	0.238	0.127	0.04
$\ell = 1$	0.022	0.09	0.209	0.334	0.345	0.345	0.334	0.209	0.09	0.022
$\ell = 2$	0.012	0.063	0.176	0.337	0.412	0.412	0.337	0.176	0.063	0.012
$\ell = 3$	0.006	0.043	0.144	0.329	0.478	0.478	0.329	0.144	0.043	0.006
$\ell = 4$	0.005	0.028	0.115	0.312	0.54	0.54	0.312	0.115	0.028	0.005
$\ell = 5$	0.003	0.019	0.09	0.29	0.598	0.598	0.29	0.09	0.019	0.003
$\ell = 10$	0.0001	0.0019	0.023	0.163	0.812	0.812	0.163	0.023	0.0019	0.0001
$\ell = 20$	0.00002	0.00008	0.0009	0.030	0.9690	0.9690	0.030	0.0009	0.00008	0.00002

Tablo 4.5.  $\{T_{4,5:5}^{(\ell)} = k\}$  ve  $\{B_{4,1:5}^{(\ell)} = k\}$  Olaylarının Çeşitli  $k$  ve  $\ell$  Değerleri İçin Olasılık Değerleri

	$P\{T_{n,r:m}^{(\ell)} = k\}$					$P\{B_{n,r:m}^{(\ell)} = k\}$				
	$n=4, m=5, r=5, m-r=0$					$n=4, m=5, r=1, m-r=0$				
	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$\ell=0$	0.007	0.04	0.119	0.278	0.556	0.556	0.278	0.119	0.04	0.007
$\ell=1$	0.004	0.027	0.097	0.264	0.608	0.608	0.264	0.097	0.027	0.004
$\ell=2$	0.003	0.018	0.077	0.245	0.657	0.657	0.245	0.077	0.018	0.003
$\ell=3$	0.002	0.012	0.06	0.224	0.702	0.702	0.224	0.06	0.012	0.002
$\ell=4$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$7,9 \cdot 10^{-3}$	0.046	0.202	0.743	0.743	0.202	0.046	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$
$\ell=5$	$8,7 \cdot 10^{-4}$	$5,1 \cdot 10^{-3}$	0.035	0.18	0.779	0.779	0.18	0.035	$5,1 \cdot 10^{-3}$	$8,7 \cdot 10^{-4}$
$\ell=10$	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$5,6 \cdot 10^{-4}$	$7,4 \cdot 10^{-3}$	0.09	0.902	0.902	0.09	$7,4 \cdot 10^{-3}$	$5,6 \cdot 10^{-4}$	$2,2 \cdot 10^{-5}$
$\ell=20$	$0,9 \cdot 10^{-7}$	$9,9 \cdot 10^{-5}$	0.003	0.0189	0.978	0.978	0.0189	0.003	$9,9 \cdot 10^{-5}$	$0,9 \cdot 10^{-7}$

Tablo 4.6.  $T_{n,r,m}^{(\ell)}$  İstatistiğinin  $n = 4, m=5, r=3$  için Dağılım Fonksiyonu Değerleri

$P\{T_{n,r,m}^{(\ell)} \leq k\}$					
$n = 4, m=5, r=3, m-r > 0$					
	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$\ell = 0$	0,119	0,357	0,643	0,881	1
$\ell = 1$	0,066	0,248	0,53	0,822	1
$\ell = 2$	0,037	0,169	0,427	0,757	1
$\ell = 3$	0,02	0,113	0,337	0,686	1
$\ell = 4$	0,011	0,075	0,262	0,616	1
$\ell = 5$	0,0063	0,0493	0,2013	0,5463	1
$\ell = 10$	0,000337	0,0055	0,047	0,27	1
$\ell = 20$	$0,99338 \cdot 10^{-6}$	0,000123	0,002	0,045	1

## 5. GENEL SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasının üçüncü bölümünde, birbirinden bağımsız ve aynı F dağılımlı sürekli skor üreten bir süreçte  $\ell$ 'inci güncelleme sonrası sıralı en yüksek m skor listesini ( $T_m^\ell = (X_{1:m}^{(\ell)}, \dots, X_{m:m}^{(\ell)})$ ) ve sıralı en düşük m skor listesini ( $B_m^\ell = (Y_{1:m}^{(\ell)}, \dots, Y_{m:m}^{(\ell)})$ ) gözlemlemek ve sonrasında aynı süreçten n tane yeni gözlem almak şeklinde tanımlanan bir deneyin sonunda,  $T_m^\ell$  listesine dayalı, n tane yeni gözlemden k tanesinin  $T_m^\ell$  listesinin r'inci en küçük elemanından küçük olması ve  $B_m^\ell$  listesine dayalı, n tane yeni gözlemden k tanesinin  $B_m^\ell$  listesinin r'inci en küçük elemanından küçük olması olarak tanımlanmış bu rasgele değişkenlerin dağılımından bağımsız olasılık fonksiyonları 4 özgün teoremlerle verilmiştir. Dördüncü bölümde, aynı F dağılımından, birbirinden bağımsız, sayılabilir sonsuz skor üreten sistem varsayımının geçerli olduğu, bir akarsuyun debi ölçümleri ile ilgili bir uygulama tasarlanmış ve verilen teoremlere göre olasılık değerleri hesaplanarak tablolastırılmıştır. Elde edilen dağılımdan bağımsız aşan istatistiklerden birini test istatistiği olarak kullanan parametrik olmayan bir hipotez testi verilmiştir.

Bu parametrik olmayan hipotez testi araştırmacılar açısından esnek bir yapıya sahiptir. Test istatistiği, belirlenecek bir eşiğin altında kalan gözlem sayısıdır. Eşiği çeşitli araştırmacılar farklı açılardan ele alabilir. Örneğin, eşik değer olarak klasik sıra istatistiklerini kullanmak isteyen araştırmacı, test istatistiğinin parametrelerinden  $\ell$ 'yi 0, rekor değerleri eşik değer olarak almak isteyen  $m$ 'yi 1, k-rekor değerleri eşik değer olarak almak isteyen de  $r$ 'yi 1 almalıdır. Bu kısıtlar dışında da eşik değer istenildiği gibi alınabilir. Yani test istatistiği içerisinde yer alan eşik belirleme konusu, birden fazla sıralanmış rasgele değişken modelini seçmeyi olanaklı kılar.

Ayrıca test istatistiği olarak  $B_{n,r,m}^{(\ell)}$  seçilerek, en düşük m skor listelerine dayalı bir parametrik olmayan sağ taraf testi de benzer şekilde tasarlanabilir. Bu

sayede verilen örnek probleme dayalı olarak, kuraklık ile ilgili tehlikeyi işaret eden bir parametrik olmayan hipotez testi ortaya çıkacaktır.

Bu tez çalışmasında verilen aşan istatistikler, onların dağılımdan bağımsız olasılık fonksiyonları ve önerilen parametrik olmayan hipotez testi çeşitli alanlarda (hidroloji, jeoloji, tıp vb.) uygulama imkanı bulabilir ve araştırmacıların yapacakları çalışmalara temel teşkil edebilir.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

**Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N.,** 1998, Records, Wiley, New York.

**Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N.,** 2008, A First Course in Order Statistics, John Wiley & Sons, New York.

**Ahsanullah, M. and Nevzorov, V.B.,** 2001, Ordered Random Variables, Nova Science Publishers, New York, 412p.

**Ahsanullah, M.,** 2004, Record Values – Theory and Applications, University Press of America Inc., New York, 314p.

**Bairamov, I.G.,** 1997, Some distribution free properties of statistics based on record values and characterizations of the distributions through a record, *Journal of Applied Statistical Science*, 5(1):17-25pp.

**Bairamov, I.G. and Eryilmaz, S.N.,** 2000, Distributional properties of statistics based on minimal spacing and record exceedance statistics, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 90:21-33pp.

**Bairamov, I.G. and Eryilmaz, S.,** 2001, On properties of statistics connected with minimal spacing and record exceedances, *Journal of Applied Statistical Science*, V, 245-254.

**Bairamov, I.G. and Khan, M.K.,** 2007, On exceedances of record and order statistics, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 135(6):1935-1945pp.

**Bairamov, I.G. and Kotz, S.,** 2001, On distributions of exceedances associated with order statistics and record values for arbitrary distributions, *Statistical Papers*, 42:171-185pp.

**Bairamov, I.G., Özkaya, N.,** 2000, *On the nonparametric test for two sample problem based on spacings*, *Journal of Applied Statistical Science*, 57-68.

## KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

**Bairamov, I.G., Petunin, Yu.I.**, 1991, *Structure of invariant confidence intervals containing the main distributed mass*, *Theor. Probab. Appl.*, 15-26.

**Balakrishnan, N. and Nevzorov, V.B.**, 1998, A record of records, *Handbook of Statistics*, 16.

**Bilir, A.A.**, 2012, *Sürekli Değerli Dizilerde Tekrar İstatistikleri*, Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 84s (yayımlanmamış).

**Chandler, K.N.**, 1952, The distribution and frequency of record values, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, 14(2):220-228pp.

**David, H.A.**, 1970, *Order Statistics*, John Wiley & Sons, New York, 272p.

**F. Lòpez-Blàzquez, J. Wesolowski**, 2007, Top-*k*-lists. *Metrika* **65**, 69-82.

**Galambos, J.**, 1978, *The asymptotic theory of extreme order statistics*, Wiley, New York.

**Glick, N.**, 1978, Breaking records and breaking boards, *The American Mathematical Monthly*, 85(1):2-26pp.

**Kamps, U.**, 1995, A concept of generalized order statistics, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 48(1):1-23pp.

**Kozan, A.**, 2010 *Bir Sistemin Ürettiği En Düşük M Skor Ve Azalan Genelleştirilmiş Sıra İstatistikleri*, Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir, Türkiye

**Nagaraja, H.N.**, 1988, Record values and related statistics – a review, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 17(7):2223-2238pp.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)**

**Nevzorov, V.B.**, 1987, Records, *Theory of Probability and its Applications*, 32(2):201-228pp.

**Nevzorov, V.B.**, 2001, Records: A Mathematical Theory, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 194, 164p.

**Tanil, H.**, 2009, An order statistics model based on the list of top  $m$  scores after  $\ell$  th change, *J. Statist. Plann. Inference*, 139:2189-2195pp.

## ÖZGEÇMİŞ

1975 yılında İnegöl'de doğan Burak UYAR, ilköğrenimini İzmir'in Karaburun ilçesinde, orta ve lise öğrenimini Çorum'da tamamlamıştır. 1993 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'ne girmiş ve 1997 yılında lisans öğrenimini bitirmiştir. Lisans öğreniminden sonra çeşitli özel dersane ve kolejlerde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmıştır. 2002 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak akademik hayata adım atmıştır. 2003 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başlayıp ve 2006 yılında tamamlamıştır. Evli ve 2 kız çocuğu babası olan Burak UYAR, Eylül 2007'de Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalında Doktora öğrenimine başlamış ve halen Ege Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.

