FUZZY NORMLU UZAYLARDA OPERATÖRLER

Muhammed Recai TÜRKMEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KASIM 2011
ANKARA

Muhammed Recai TÜRKMEN tarafından hazırlanan “FUZZY NORMLU UZAYLARDA OPERATÖRLER” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Hakan EFE …………………………….
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Cemil YILDIZ …………………………….
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Doç. Dr. Hakan EFE …………………………….
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Doç. Dr. Erdal GÜNER …………………………….
Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.

Tarih: 22/11/2011

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU …………………………….
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Muhammed Recai TÜRKMEN

FUZZY NORMLU UZAYLARDA OPERATÖRLER
(Yüksek Lisans Tezi)

Muhammed Recai TÜRKMEN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
KASIM 2011

ÖZET

Bu tez çalışmasında; fuzzy normlu uzaylarda operatörler ele alınmıştır. Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde girişe yer verilmiştir. İkinci bölümde, daha sonraki bölümlere yardımcı olması için fuzzy norm ve fuzzy normlu lineer uzaylar için yakınsaklık, Cauchy dizisi, sınırlılık, kompaktlık ve bunların n-normdaki tanımları verilmiştir. Üçüncü bölümde fuzzy normlu uzaylarda operatörler ve bu operatörlerin süreklilik ve sınırlılığından bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde fuzzy n-normlu uzaylarda operatörlerin süreklilik ve sınırlılıkları incelenmiştir.

Bilim kodu	**: 204.1.132**
Anahtar kelimeler	**: Fuzzy norm, Operatör, n-norm, Fuzzy süreklilik, Sınırlılık**
Sayfa Adedi	**: 54**
Tez Yöneticisi	**: Doç. Dr. Hakan Efe**

OPERATORS IN FUZZY NORMED SPACES

(M. Sc. Thesis)

Muhammed Recai TÜRKMEN

GAZI UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

NOVEMBER 2011

ABSTRACT

In this thesis study, operators from fuzzy normed space are introduced. This paper consists of four sections. In the first section, introduction part is taken place. In the second section, fuzzy norm and in fuzzy normed linear spaces convergence, Cauchy-sequence, boundedness, compactness for and their definitions in n-norm are given in order to help the upcoming parts. In the third section, operators from fuzzy normed space and their continuity and boundedness are mentioned. In the fourth and last section, continuity and boundedness of operators from fuzzy normed space are studied.

Science Code : 204.1.132
Key Words : Fuzzy norms, The operator, The n-norm, Fuzzy continuity, Boundedness
Page Number : 54
Adviser : Assoc. Prof. Dr. Hakan EFE

TEŞEKKÜR

Tez konumu verip, beni fuzzy normlu uzaylara yönlendiren, çalışmalarım boyunca yardımlarını ve değerli zamanını hiçbir zaman esirgemeyen Sayın Hocam Doç. Dr. Hakan EFE'ye, ayrıca manevi desteği ile beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan, yokluğumu çocuklarıma hissettirmeyen eşim Nazife TÜRKMEN'e teşekkürleri bir borç bilirim. Ayrıca bu çalışmalar sırasında ilgilenemediğim çocuklarım Mert ve Duru'ya da gösterdikleri sabır için teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
(U,N)	Fuzzy normlu lineer uzay
$\lVert\cdot,\dots,\cdot\rVert$	n-norm
$\lVert\cdot,\dots,\cdot\rVert_E$	Öklid normu
$N(x_1,x_2,\dots,x_n,t)$	Fuzzy n-norm
R	Reel Sayılar Kümesi
C	Kompleks Sayılar Kümesi

Kısaltmalar	**Açıklama**
abs	Mutlak Değer
f-n-NLU	Fuzzy n-Normlu Lineer Uzay

1. GİRİŞ

Yıllardır matematiğin kesinliği diğer bilimlere göre matematikle uğraşanların fikirlerinin çelişmemesine neden olmuştur. Ama yine de bu kesinlik matematik ilerledikçe sınırlandırıcı olmaya başlamış ve farklı bir matematik alanı olarak çalışılan kümenin değiştirilmesi düşünülmüştür. İlk kez 1965'te California Berkeley Üniversitesinden Azeri matematikçi Lotfi A. Zadeh bu düşünceyle fuzzy mantık ve fuzzy küme kavramlarını tanımlamıştır. Zadeh bu çalışmasında insan düşüncesinin büyük çoğunluğunun bulanık olduğunu, kesin olmadığını belirtmiştir. Bu yüzden 0 ve 1 ile temsil edilen Boolean mantık bu düşünce işlemini yeterli bir şekilde ifade edememektedir. İnsan mantığı, açık, kapalı, sıcak, soğuk, 0 ve 1 gibi değişkenlerden oluşan kesin ifadelerin yanı sıra, az açık, az kapalı, serin, ılık gibi ara değerleri de göz önüne almaktadır. Fuzzy (bulanık) mantık klasik mantığın aksine iki seviyeli değil, çok seviyeli işlemleri kullanmaktadır. Ayrıca Zadeh insanların denetim alanında, mevcut makinelerden daha iyi olduğunu ve kesin olmayan dilsel bilgilere bağlı olarak etkili kararlar alabildiklerini savunmuştur.

Fuzzy sayılar, fuzzy kümeler ve fuzzy mantıktan sonra ilk defa Cheng ve Mordeson 1994 yılında fuzzy norm tanımını verdi [1]. 2003 yılında Bag ve Samanta tarafından yeniden yorumlanan fuzzy norm ve fuzzy normlu lineer uzay tanımları verildi [2].

Tezimizin ikinci bölümünde Bag ve Samanta'nın verdiği norm tanımına göre bir dizinin yakınsaklık tanımı, Cauchy dizisi tanımı, kapalılık tanımı, kapanış tanımı, sınırlılık tanımı, kompaktlık tanımı verildi. Ayrıca Gähler ' in 2-norm ve Gunawan ve Mashadi'nin n-norm tanımları verildi ve Narayanan ve Vijayabalaji'nin fuzzy n-norm tanımı ve bu tanıma göre Efe' nin fuzzy n-normlu lineer uzaylarda yakınsaklık tanımı, Cauchy dizi tanımı, sınırlılık tanımı verildi [3,4,5,6].

Tezimizin üçüncü bölümünde Bag ve Samanta'nın fuzzy normlu lineer uzaylar üzerinde bir operatörün fuzzy süreklilik, dizisel fuzzy süreklilik, zayıf fuzzy süreklilik, kuvvetli fuzzy süreklilik gibi sürekliliğin farklı türleri tanımlandı. Zayıf fuzzy sınırlılık ve kuvvetli fuzzy sınırlılık kavramı fuzzy normlu lineer uzaylar üzerinde lineer operatörler için tanımlandı ve süreklilik ve sınırlılık arasındaki ilişki incelendi.

Tezimizin dördüncü bölümünde Efe'nin fuzzy n-normlu lineer uzaylar üzerinde bir operatörün fuzzy süreklilik, dizisel fuzzy süreklilik, zayıf fuzzy süreklilik, kuvvetli fuzzy süreklilik gibi sürekliliğin farklı türleri tanımlandı. Zayıf fuzzy sınırlılık ve kuvvetli fuzzy sınırlılık kavramı fuzzy n-normlu lineer uzaylar üzerinde lineer operatörler için tanımlandı ve süreklilik ile sınırlılık arasındaki ilişki incelendi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Sonlu Boyutlu Fuzzy Normlu Lineer Uzay

2.1.1 Tanım

U, F cismi üzerinde bir lineer uzay ($F = R$ veya $F = C$, R cismi reel sayılar, C cismi kompleks sayılar) ve N, $U \times R$ nin bir fuzzy alt kümesi olsun. Eğer N aşağıdaki şartları sağlıyorsa N ye U da bir fuzzy norm denir [1].

$\forall x, u \in U$, $\forall c \in F$ için,

i) $\forall t \in R$ ve $t \leq 0$ için $N(x,t) = 0$

ii) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $N(x,t) = 1 \Leftrightarrow x = 0$

iii) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $N(cx,t) = \begin{cases} N(x, t/|c|) & ; c \neq 0 \\ 1 & ; c = 0 \end{cases}$

iv) $\forall t, s \in R$ için $N(x+u, t+s) \geq \min\{N(x,t), N(u,s)\}$ dir.

v) $N(x,.)$, R de soldan sürekli ve azalmayan fonksiyondur öyle ki $\lim_{t\to\infty} N(x,t) = 1$

Bundan sonra (U,N) çifti bir fuzzy normlu lineer uzay olarak anılacaktır.

Aşağıdaki şekilde de bir lineer uzay üzerinde bir fuzzy norm tanımını verilebilir.

2.1.2 Tanım

U, F (reel/kompleks sayılar) cismi üzerinde bir lineer uzay ve N, $U \times R$ (R-reel sayılar kümesi) nin bir fuzzy alt kümesi olsun. Eğer N aşağıdaki şartları sağlıyorsa N ye U da bir fuzzy norm denir [2].

$\forall x, u \in U$ ve $c \in F$ için

N1) $\forall t \in R$ ve $t \leq 0$ için $N(x,t) = 0$, N2) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $N(x,t) = 1 \Leftrightarrow x = 0$,

N3) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $N(cx,t) = N(x, t/|c|)$ ($c \neq 0$ ise),

N4) $\forall t, s \in R$ ve $x, u \in U$ için $N(x+u, s+t) \geq \min\{N(x,s), N(u,t)\}$,

N5) $N(x,.)$ R de azalmayan fonksiyon ve $\lim_{t\to\infty} N(x,t) = 1$,

Bundan sonra (U,N) çifti bir fuzzy normlu lineer uzay olarak anılacaktır.

Örnek

$(U, \| \ \|)$ normlu lineer uzay olsun. $\forall x \in U$ ve $t \in R$ için

$$N(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t + \|x\|} & ; t > 0 \\ 0 & ; t \leq 0 \end{cases}$$

olmak üzere, (U, N) bir fuzzy normlu uzaydır [2].

Çözüm:

(N1) $\forall t \in R$ ve $t \leq 0$ için $N(x,t)$ nin tanımından $N(x,t) = 0$ dır.

(N2) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $N(x,t) = 1 \Rightarrow \dfrac{t}{t + \|x\|} = 1 \Rightarrow t = t + \|x\| \Rightarrow \|x\| = 0$, $x \in U$

ve U normlu uzay olduğundan $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ dır.

Tersine $x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow \dfrac{t}{t + \|x\|} = \dfrac{t}{t} = 1$ dir.

(N3) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $c = 0$ ise $N(cx,t) = N(0,t) = \dfrac{t}{t + \|0\|} = 1$ ve $c \neq 0$ ise

$N(cx,t) = \dfrac{t}{t + \|cx\|} = \dfrac{t/|c|}{t/|c| + \|x\|} = N(x, t/|c|)$ bulunur.

(N4) $\forall t,s \in R$ ve $x,u \in U$ için $N(x+y, s+t) \geq \min\{N(x,s), N(y,t)\}$ olduğunu göstereceğiz.

a) $s + t < 0 \Rightarrow s < 0$ veya $t < 0$ dır. Bu durumda $N(x,t) = 0$ veya $N(u,s) = 0$ dır. Yani $N(x+u, t+s) = 0 = \min\{N(x,t), N(u,s)\}$ bulunur.

b) $s + t = 0 \Rightarrow s = t = 0$ veya $s = -t$ olabilir.

$s = t = 0 \Rightarrow N(x+u, t+s) = 0 = \min\{N(x,t) = 0, N(u,s) = 0\}$

$s = -t \Rightarrow N(x,t) = 0$ veya $N(u,s) = 0$ olacağından

$N(x+u, t+s) = 0 = \min\{N(x,t), N(u,s)\}$

c) $s + t > 0 \Rightarrow$ i) $s < 0 < t$ ii) $t < 0 < s$ iii) $0 < t < s$ iv) $0 < s < t$ durumları olacaktır.
i) ve ii) durumları için $N(u,s) = 0$ ya da $N(x,t) = 0$ olacağından iki durum içinde $\min\{N(x,t), N(u,s)\} = 0$ olacaktır. Yani $N(x+u, t+s) \geq \min\{N(x,t), N(u,s)\}$ olacaktır.

iii) ve iv) durumları için ise $N(x,t) > N(u,s)$ veya $N(u,s) > N(x,t)$ durumlarından biri gerçekleşecektir. Biz $N(x,t) > N(u,s)$ durumunu alalım benzer şekilde diğer durumda yapılacaktır.

$$N(x,t) > N(u,s) \Rightarrow \frac{t}{t + \|x\|} > \frac{s}{s + \|u\|} \Rightarrow$$

$$\frac{t}{t + \|x\|} - \frac{s}{s + \|u\|} > 0 \Rightarrow \frac{t\|u\| - s\|x\|}{(t + \|x\|)(s + \|u\|)} > 0$$

$$\Rightarrow t\|u\| - s\|x\| > 0 \tag{2.1}$$

bulunur.

$N(x,t) > N(u,s)$ olduğundan $\min\{N(x,t), N(u,s)\} = N(u,s)$ olacaktır. Bu durumda $N(x+u,t+s) \geq \min\{N(x,t), N(u,s)\} = N(u,s)$ olup olmadığına bakalım.

$\dfrac{t+s}{t+s+\|x+u\|} \geq \dfrac{t+s}{t+s+\|x\|+\|u\|}$ eşitsizliğini kullanalım. Buradan,

$$\frac{t+s}{t+s+\|x\|+\|u\|} - \frac{s}{s+\|u\|} = \frac{t\|u\| - s\|x\|}{(t+s+\|x\|+\|u\|)(s+\|u\|)}$$

olup Eş. 2.1 den dolayı da

$\dfrac{t\|u\| - s\|x\|}{(t+s+\|x\|+\|u\|)(s+\|u\|)} > 0$ dır. Yani

$\dfrac{t+s}{t+s+\|x\|+\|u\|} > \dfrac{s}{s+\|u\|}$ dir. Buradan

$\dfrac{t+s}{t+s+\|x+u\|} > \dfrac{s}{s+\|u\|}$ olur.

Benzer şekilde $N(u,s) > N(x,t)$ durumu da incelenerek, $N(x+u,t+s) \geq \min\{N(x,t), N(u,s)\}$ olduğu görülür.

(N5) $t_1 < t_2 \leq 0$ için $N(x,t_1) = N(x,t_2) = 0$ olur. $0 < t_1 < t_2$ ise $N(x,t_1) - N(x,t_2) = \dfrac{t_1}{t_1+\|x\|} - \dfrac{t_2}{t_2+\|x\|} = \dfrac{(t_1-t_2)\|x\|}{(t_1+\|x\|)(t_2+\|x\|)}$ olur. $t_1 < t_2$ olduğundan $N(x,t_1) - N(x,t_2) < 0$ bulunur. Yani N, R de azalmayan bir fonksiyondur.

$\lim_{t\to\infty} N(x,t)$ ifadesi için iki durum söz konusudur.

$x = 0$ ise $\lim_{t\to\infty} N(x,t) = \lim_{t\to\infty} \dfrac{t}{t+\|0\|} = 1$ dir.

$x \neq 0$ ise $\lim_{t\to\infty} N(x,t) = \lim_{t\to\infty} \dfrac{t}{t+\|x\|} = \lim_{t\to\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{\|x\|}{t}} = \dfrac{1}{1+0} = 1$ bulunur.

Her iki durum içinde $\lim_{t\to\infty} N(x,t) = 1$ dir.

Bu şartları sağladığından N, U da bir fuzzy norm ve (U,N) bir fuzzy normlu lineer uzaydır.

Örnek

$(X,\| \ \|)$ normlu lineer uzay olmak üzere, N fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım. $N: X\times R \to [0,1]$

$$N(x,t) = \begin{cases} 0 & ; t \leq \|x\| \\ 1 & ; t > \|x\| \end{cases}$$

Bu durumda N, X de bir fuzzy normdur ve (X,N) fuzzy normlu uzaydır [2].

Çözüm:

(N1) $\forall t \in R$ ve $t \leq 0$ için $t \leq 0 \leq \|x\|$ olduğundan $N(x,t) = 0$ dır.

(N2) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $N(x,t) = 1$ olsun. Tanımdan $t > \|x\|$ olmalıdır. Bu durumda $t > 0$ olduğundan $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ dır. Şimdi de $x = 0$ alalım. Bu durumda $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $t > \|x\|$ olduğundan $N(x,t) = 1$ dir.

(N3) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ ve $c \neq 0$ için

$$N(cx,t) = \begin{cases} 0 & ; t \leq \|cx\| \\ 1 & ; t > \|cx\| \end{cases} = \begin{cases} 0 & ; t/|c| \leq \|x\| \\ 1 & ; t/|c| > \|x\| \end{cases} = N(x, t/|c|) \text{ dir.}$$

(N4) $\forall t,s \in R$ ve $x,y \in X$ için $N(x+y,s+t) \geq \min\{N(x,s),N(y,t)\}$ olduğunu gösterelim.

- $N(x+y,s+t)=0 \Rightarrow s+t \leq \|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ olduğundan,

a. $s \leq \|x\|$ ve $t \leq \|y\|$ $\Rightarrow N(x+y,s+t)=0=\min\{N(x,s)=0,N(y,t)=0\}$

b. $s \leq \|x\|$ ve $t > \|y\| \Rightarrow N(x+y,s+t)=0=\min\{N(x,s)=0,N(y,t)=1\}$

c. $s > \|x\|$ ve $t \leq \|y\| \Rightarrow N(x+y,s+t)=0=\min\{N(x,s)=1,N(y,t)=0\}$

- $N(x+y,s+t)=1 \Rightarrow \min\{N(x,s),N(y,t)\} \leq 1$ olduğundan

$N(x+y,s+t)=1 \geq \min\{N(x,s),N(y,t)\}$ dir.

(N5) Tanımdan açıktır ki $N(x,\cdot)$ R de azalmayan bir fonksiyondur ve $\lim_{t\to\infty} N(x,t)=1$ dir.

Bu yüzden N, X de bir fuzzy norm ve (X,N) bir fuzzy normlu lineer uzaydır.

2.1.3 Tanım

(U,N) fuzzy normlu lineer uzay ve $\{x_n\}$, U da bir dizi olsun. Eğer $\exists x \in U$ var öyle ki $\forall t>0$ için $\lim_{n\to\infty} N(x_n - x,t)=1$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine yakınsaktır denir. Burada x e $\{x_n\}$ dizisinin limiti denir ve $\lim x_n$ biçiminde gösterilir [2].

2.1.4 Not

$\{x_n\}$ dizisinin limiti tektir [2].

Çünkü eğer $\lim x_n = x$ ve $\lim x_n = y$ mümkün olsaydı yani;

$\forall s,t>0$ için $\lim_{n\to\infty} N(x_n - x,t)=1$ ve $\lim_{n\to\infty} (x_n - y,s)=1$ olurdu. Bu durumda,

$$\begin{aligned} N(x-y,t+s) &= N(x-x_n+x_n-y,t+s) \\ &\geq \min\{N(x-x_n,t),N(x_n-y,s)\} \\ &= \min\{N(x_n-x,t),N(x_n-y,s)\} \end{aligned}$$

Limit alırsak,

$$N(x-y,t+s) \geq \min\left\{\lim_{n\to\infty} N(x_n-x,t),\lim_{n\to\infty} N(x_n-y,s)\right\} = \min\{1,1\}$$
$$\Rightarrow \forall s,t>0 \text{ için } N(x-y,t+s)=1$$
$$\Rightarrow x-y=0 \text{ (N2 den dolayı)}$$
$$\Rightarrow x=y$$

2.1.5 Tanım

U da bir $\{x_n\}$ dizisi $\forall t>0$ ve $p=1,2,3,...$ için $\lim_{n\to\infty} N(x_{n+p}-x_n,t)=1$ oluyorsa, bu diziye Cauchy dizisi denir [2].

2.1.6 Özellik

(U,N) fuzzy normlu lineer uzayında, yakınsak her dizinin alt dizisi de yakınsaktır [2].

2.1.7 Özellik

(U,N) fuzzy normlu lineer uzayında her yakınsak dizi Cauchy dizisidir [2].

İspat

$\{x_n\}$, U da bir dizi ve $\forall t>0$ için $\lim_{n\to\infty} N(x_n-x,t)=1$ alalım.

$t>0$, $s>0$ ve $p>0$ için

$$\begin{aligned} N(x_{n+p}-x_n,s+t) &= N(x_{n+p}-x+x-x_n,s+t) \\ &\geq \min\{N(x_{n+p}-x,s),N(x-x_n,t)\} \\ &= \min\{N(x_{n+p}-x,s),N(x_n-x,t)\} \end{aligned}$$

Limit alırsak

$$\lim_{n\to\infty} N\left(x_{n+p}-x_n, s+t\right) \geq \min\left\{\lim_{n\to\infty} N\left(x_{n+p}-x, s\right), \lim_{n\to\infty} N\left(x_n-x, t\right)\right\}$$

Yukarıdaki özellikten $\lim_{n\to\infty} N\left(x_{n+p}-x, s\right)=1$ elde ederiz. Buradan $\forall t, s>0$ ve $p=1,2,3,\ldots$ için $\lim_{n\to\infty} N\left(x_{n+p}-x_n, s+t\right) \geq 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} N\left(x_{n+p}-x_n, s+t\right)=1$ dir. $\{x_n\}$ (U, N) de bir Cauchy dizisidir.

Örnek

$(X, \|\ \|)$ normlu lineer uzay ve $N: X\times R \to [0,1]$ fonksiyonu şu şekilde tanımlansın.

$$N(x,t)=\begin{cases} \dfrac{t}{t+\|x\|} & ; t>0 \\ 0 & ; t\leq 0 \end{cases}$$

N, X de bir fuzzy normdur (*Örnek* de gösterildi). $\{x_n\}$, X de bir dizi olmak üzere,

i) $\{x_n\}$, $(X, \|\ \|)$ de Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow \{x_n\}$, (X, N) de bir Cauchy dizisidir.

ii) $\{x_n\}$, $(X, \|\ \|)$ de yakınsaktır $\Leftrightarrow \{x_n\}$, (X, N) de yakınsaktır [2].

Çözüm:

$\{x_n\}$, $(X, \|\ \|)$ de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda

$p=1,2,\ldots$ için $n\to\infty$ iken $\|x_n - x_{n+p}\| \to 0$ dır. (2.2)

$t>0$ için $N\left(x_n - x_{n+p}, t\right)=\dfrac{t}{t+\|x_n - x_{n+p}\|}$ dir.

Böylece Eş. 2.2 den $\lim_{n\to\infty} N\left(x_n - x_{n+p}, t\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{t}{t + \left\| x_n - x_{n+p} \right\|} = \frac{t}{t + \lim_{n\to\infty} \left\| x_n - x_{n+p} \right\|} = 1$

dir. Dolayısıyla $\{x_n\}$, (X, N) de bir Cauchy dizisidir.

Şimdi kabul edelim ki $\{x_n\}$, (X, N) de Cauchy dizisi olsun.

Bu durumda $\forall t > 0$ ve $p = 1, 2, \ldots$ için

$\lim_{n\to\infty} N\left(x_n - x_{n+p}, t\right) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{t}{t + \left\| x_n - x_{n+p} \right\|} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left\| x_n - x_{n+p} \right\| = 0$ dır.

O halde $\{x_n\}$, $(X, \| \ \|)$ de bir Cauchy dizisidir.

(ii) Kabul edelim ki (X, N) de $x_n \to x$ olsun. Buradan $t > 0$ için

$\lim_{n\to\infty} N\left(x_n - x, t\right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{t}{t + \left\| x_n - x \right\|} = 1 \Leftrightarrow \frac{t}{t + \lim_{n\to\infty} \left\| x_n - x \right\|} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\| x_n - x \right\| = 0$

$\Leftrightarrow (X, N)$ de $x_n \to x$ dir.

2.1.8 Tanım

(U,N) fuzzy normlu bir lineer uzay olsun. Eğer U nun bir alt kümesi olan F deki her yakınsak $\{x_n\}$ dizinin limiti F de kalıyor ise, F ye kapalıdır denir. Yani $\forall t > 0$ ve $\lim_{n\to\infty} N\left(x_n - x, t\right) = 1$ iken $x \in F$ ise F kapalıdır [2].

2.1.9 Tanım

(U,N) fuzzy normlu bir lineer uzay olsun. $B, F \subset U$ olsun. Eğer her $x \in B$ için $x_n \to x$ olacak şekilde en az bir $\{x_n\}$ dizisi varsa yani $\forall x \in B$ için $\exists \{x_n\} \subset F$ var $\ni \forall t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} N\left(x_n - x, t\right) = 1$ olursa B ye F nin kapanışı denir ve B kümesi $\overline{F}$ ile gösterilir [2].

2.1.10 Tanım

Fuzzy normlu lineer uzayın bir A alt kümesi sınırlıdır $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A$ için $N(x,t) > 1 - r$ olacak şekilde $\exists t > 0$ ve $0 < r < 1$ vardır [2].

2.1.11 Tanım

(U,N) fuzzy normlu lineer uzayının bir alt kümesi A olsun. Eğer A da her $\{x_n\}$ dizisinin alt dizisi A nın bir elemanına yakınsıyor ise, A ya kompakt denir [2].

2.1.12 Özellik

Fuzzy normlu lineer uzaylarda her Cauchy dizisi sınırlıdır [2].

İspat

(U,N) fuzzy normlu lineer uzayında bir $\{x_n\}$ Cauchy dizisini göz önüne alalım. Buradan $\forall t > 0$ ve $p = 1,2,...$ için $\lim_{n\to\infty} N(x_n - x_{n+p}, t) = 1$ dir. α_0 sabitini $0 < \alpha_0 < 1$ seçelim. Biliyoruz ki $\lim_{n\to\infty} N(x_n - x_{n+p}, t) = 1 > \alpha_0$ dır.

$t' > 0$ için $\exists n_0(t')$ var öyle ki $\forall n \geq n_0(t')$ ve $p = 1,2,...$ için $N(x_n - x_{n+p}, t') > \alpha_0$ dır. $\lim_{t\to\infty} N(x,t) = 1$ iken $\exists t_i$ var öyle ki $\forall t \geq t_i$ $i = 1,2,...$ için $N(x_i, t_i) > \alpha_0$ dır. $t_0 = t' + \max\{t_1, t_2, ..., t_{n_o}\}$ olsun.

Bu durumda $n > n_0$ için

$$N(x_n, t_0) \geq N(x_n, t' + t_{n_0}) \geq \min\{N(x_n - x_{n_0}, t'), N(x_{n_0}, t_{n_0})\}$$

Böylece $\forall n \geq n_0$ için $N(x_n, t_0) \geq \min\{\alpha_0, \alpha_0\} = \alpha_0$. Yani $\forall n \geq n_0$ için $N(x_n, t_0) \geq \alpha_0$ dır . Hatta $\forall n = 1,2,...,n_0$ için $N(x_n, t_0) \geq N(x_n, t_n)$ dir. Bundan dolayı $\forall n$ için $N(x_n, t_0) \geq \alpha_0$ dır. Böylece $\{x_n\}$ sınırlıdır.

2.1.13 Tanım

U bir lineer uzay, N_1 ve N_2, U da iki fuzzy norm olsun. Eğer $\forall t \in R$ için $N_2(ax,t) \le N_1(x,t) \le N_2(bx,t)$ olacak biçimde a ve b pozitif reel sayıları var ise N_1 ve N_2 normlarına denktir denir ve $N_1 \sim N_2$ şeklinde gösterilir [2].

2.1.14 Teorem

Yukarıda verilen "$\sim$" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır [2].

2.2 Fuzzy n-Normlu Lineer Uzay

2.2.1 Tanım

X, n boyutlu $(n > 1, n \in \mathbb{N})$ bir reel vektör uzayı ve $\|\cdot,\cdot\|$, $X \times X$ de aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli fonksiyon olsun.

(i) $\|x, y\| = 0 \Leftrightarrow$ x ve y lineer bağımlı,

(ii) $\|x, y\| = \|y, x\|$,

(iii) $\|\alpha x, y\| = |\alpha| \|x, y\|$ (α reel),

(iv) $\|x, y+z\| \le \|x, y\| + \|x, z\|$.

Bu durumda $\|\cdot,\cdot\|$ ye X de 2-norm ve $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ ikilisine 2-nornlu lineer uzay denir [3].

2.2.2 Tanım

X, n boyutlu $(n > 1, n \in \mathbb{N})$ bir reel vektör uzayı (Burada n sonsuz olabilir) ve $\|\cdot,...,\cdot\|$ $\underbrace{X \times \cdots \times X}_{n}$ de aşağıdaki özellikleri sağlayan reel değerli fonksiyon olsun.

(i) $\|x_1, x_2, ..., x_n\| = 0 \Leftrightarrow x_1, x_2, ..., x_n$ lineer bağımlı,

(ii) $\|x_1, x_2, ..., x_n\|$, $x_1, x_2, ..., x_n$ nin her permütasyonuna göre değişmeyen,

(iii) Her $\alpha \in R$ için $\|x_1, x_2, ..., \alpha x_n\| = |\alpha| \|x_1, x_2, ..., x_n\|$,

(iv) $\|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y+z\| \leq \|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y\| + \|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, z\|$,

Bu durumda $\|\cdot, ..., \cdot\|$ fonksiyonuna X de n-norm ve $(X, \|\cdot, ..., \cdot\|)$ ikilisine n-normlu lineer uzay denir [4].

Örnek

n-normlu uzayın aşikar örneği aşağıdaki n-normla donatılmış $X = R^n$ dir. Her $i = 1, 2, ..., n$ için $x_i = (x_{i1}, ..., x_{in}) \in R^n$ olmak üzere

$$\|x_1, ..., x_n\|_E = \text{abs}\left(\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \right) \text{ dir. } (\text{abs}(x) = |x|)$$

$(X, \|\cdot, ..., \cdot\|)$ n-normlu uzayında tüm $x_1, ..., x_n \in X$ ve $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1} \in R$ için $\|x_1, ..., x_n\| \geq 0$ ve $\|x_1, ..., x_{n-1}, x_n\| = \|x_1, ..., x_{n-1}, x_n + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1}\|$ olduğunu unutmayalım [4].

2.2.3 Tanım

X, F reel cismi üzerinde bir lineer uzay ve $X \times \cdots \times X \times R$ nin bir fuzzy kümesi N olsun. N aşağıdaki şartları sağlıyorsa N ye X de fuzzy n-norm denir.

(N1) $\forall t \in R$ ve $t \leq 0$ için $N(x_1, x_2, ...x_n, t) = 0$,

(N2) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $N(x_1, x_2 ..., x_n, t) = 1 \Leftrightarrow x_1, x_2, ..., x_n$ lineer bağımlıdır,

(N3) $N(x_1, x_2, ..., x_n, t)$ $x_1, x_2, ..., x_n$ in herhangi permütasyonuna göre değişmeyen,

(N4) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için eğer $c \neq 0$, $c \in F$ (cisim) ise

$$N(x_1, x_2, ..., cx_n, t) = N\left(x_1, x_2, ..., x_n, \frac{t}{|c|}\right) \text{ dir,}$$

(N5) $\forall s, t \in R$ için

$$N(x_1, x_2, ..., x_n + x'_n, s+t) \geq \min\{N(x_1, x_2, ..., x_n, s), N(x_1, x_2, ..., x'_n, t)\},$$

(N6) $N(x_1, x_2, ..., x_n, \cdot)$ R nin azalmayan bir fonksiyonu ve $\lim_{t\to\infty} N(x_1, x_2, ..., x_n, t) = 1$ dir [5].

Bu durumda (X, N) ye bir fuzzy n-normlu lineer uzay veya kısaca f-n-NLU denir.

2.2.4 Uyarı

(N3) den f-n-NLU da aşağıdakiler vardır.

(N4) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $c \neq 0$ ise

$$N(x_1, x_2, ..., cx_i, ...x_n, t) = N\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n, \frac{t}{|c|}\right) \text{ dir.}$$

(N5) $\forall s, t \in R$ için

$$N(x_1, x_2, ..., x_i + x'_i, ..., x_n, s+t) \geq \min\{N(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n, s), N(x_1, x_2, ..., x'_i, ..., x_n, t)\}$$

Örnek

$(X, \|\cdot, ..., \cdot\|)$ tanım 2.2.2 ye göre bir n-normlu lineer uzay olsun. $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n}$ olmak üzere,

$$N(x_1, x_2, ..., x_n, t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t + \|x_1, x_2, ..., x_n\|} & ; t > 0, t \in R \\ 0 & ; t \leq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda (X, N) f-n-NLU dır [5].

Çözüm:

(N1) $\forall t \in R$ ve $t \le 0$ için tanımdan $N(x_1, x_2, ..., x_n, t) = 0$ dır.

(N2) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $N(x_1, x_2, ..., x_n, t) = 1$ dir.

$$\Leftrightarrow \frac{t}{t + \|x_1, x_2, ..., x_n\|} = 1$$

$$\Leftrightarrow t = t + \|x_1, x_2, ..., x_n\|$$

$$\Leftrightarrow \|x_1, x_2, ..., x_n\| = 0$$

$\Leftrightarrow x_1, x_2, ..., x_n$ lineer bağımlıdır.

(N3) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $N(x_1, x_2, ..., x_n, t) = \dfrac{t}{t + \|x_1, x_2, ..., x_n\|}$

$$= \frac{t}{t + \|x_1, x_2, ..., x_n, x_{n-1}\|} = N(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n-1}, t) = \ldots$$

(N4) $\forall t \in R$, $t > 0$ ve $c \in F$, $c \neq 0$ için $N\left(x_1, x_2, ..., x_n, \dfrac{t}{|c|}\right) = \dfrac{\frac{t}{|c|}}{\frac{t}{|c|} + \|x_1, x_2, ..., x_n\|}$

$$= \frac{\frac{t}{|c|}}{\frac{t + |c|\|x_1, x_2, ..., x_n\|}{|c|}} = \frac{t}{t + |c|\|x_1, x_2, ..., x_n\|} = \frac{t}{t + \|x_1, x_2, ..., cx_n\|} = N(x_1, x_2, ..., cx_n, t)$$

(N5) $N(x_1, x_2, ..., x_n + x_n', s + t) \ge \min\{N(x_1, x_2, ..., x_n, s), N(x_1, x_2, ..., x_n', t)\}$

olduğunu ispatlamalıyız.

(a) $s+t<0$

(b) $s=t=0$

(c) $s+t>0$; $s>0, t<0$; $s<0, t>0$

Bu üç durum olduğu zaman yukarıdaki ilişki açıktır.

(d) $s+t>0$; $s>0$, $t>0$ durumunda ise

$$N\left(x_1, x_2, \ldots, x_n + x_n', s+t\right) = \frac{s+t}{s+t+\left\|x_1, x_2, \ldots, x_n + x_n'\right\|}$$
$$\geq \frac{s+t}{s+t+\left\|x_1, x_2, \ldots, x_n\right\| + \left\|x_1, x_2, \ldots, x_n'\right\|}$$

Eğer

$$\frac{s}{s+\left\|x_1, x_2, \ldots, x_n\right\|} \geq \frac{t}{t+\left\|x_1, x_2, \ldots, x_n'\right\|}$$ ise bu durumda

$$\frac{s}{s+\left\|x_1, x_2, \ldots, x_n\right\|} - \frac{t}{t+\left\|x_1, x_2, \ldots, x_n'\right\|} \geq 0$$ dır. Bu da

$$s\left(t+\left\|x_1, x_2, \ldots, x_n'\right\|\right) - t\left(s+\left\|x_1, x_2, \ldots, x_n\right\|\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow s\left\|x_1, x_2, \ldots, x_n'\right\| - t\left\|x_1, x_2, \ldots, x_n\right\| \geq 0$$ dır. Dolayısıyla

$$\frac{s+t}{s+t+\left\|x_1, x_2, \ldots, x_n\right\| + \left\|x_1, x_2, \ldots, x_n'\right\|} - \frac{t}{t+\left\|x_1, x_2, \ldots, x_n'\right\|}$$

$$= \frac{s\left\|x_1, x_2, \ldots, x_n'\right\| - t\left\|x_1, x_2, \ldots, x_n\right\|}{\left(s+t+\left\|x_1, x_2, \ldots, x_n\right\| + \left\|x_1, x_2, \ldots, x_n'\right\|\right)\left(t+\left\|x_1, x_2, \ldots, x_n'\right\|\right)} \geq 0$$ dır. Yani

$$\frac{s+t}{s+t+\|x_1,x_2,...,x_n\|+\|x_1,x_2,...,x_n'\|}-\frac{t}{t+\|x_1,x_2,...,x_n'\|}\geq 0$$ olmasından

$$\frac{s+t}{s+t+\|x_1,x_2,...,x_n\|+\|x_1,x_2,...,x_n'\|}\geq\frac{t}{t+\|x_1,x_2,...,x_n'\|}$$ olduğu anlamına gelir.

Benzer olarak, Eğer

$$\frac{t}{t+\|x_1,x_2,...,x_n'\|}\geq\frac{s}{s+\|x_1,x_2,...,x_n\|}$$ ise bu durumda

$$\frac{s+t}{s+t+\|x_1,x_2,...,x_n\|+\|x_1,x_2,...,x_n'\|}\geq\frac{s}{s+\|x_1,x_2,...,x_n\|}$$ olur. Böylece

$$N\left(x_1,x_2,...,x_n+x_n',s+t\right)\geq\min\left\{N\left(x_1,x_2,...,x_n,s\right),N\left(x_1,x_2,...,x_n',t\right)\right\}$$ dir.

(N6) $\forall t_1,t_2\in R$ için eğer $t_1<t_2\leq 0$ ise tanımımızdan $N\left(x_1,x_2,...,x_n,t_1\right)=N\left(x_1,x_2,...,x_n,t_2\right)$ dır.

Farz edelim ki $t_2>t_1>0$ olsun. Bu durumda

$$\frac{t_2}{t_2+\|x_1,x_2,...,x_n\|}-\frac{t_1}{t_1+\|x_1,x_2,...,x_n\|}=\frac{\|x_1,x_2,...,x_n\|\left(t_2-t_1\right)}{\left(t_2+\|x_1,x_2,...,x_n\|\right)\left(t_1+\|x_1,x_2,...,x_n\|\right)}\geq 0$$

dır.

Bu da $\forall\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\in X\times\cdots\times X$ için $\dfrac{t_2}{t_2+\|x_1,x_2,...,x_n\|}\geq\dfrac{t_1}{t_1+\|x_1,x_2,...,x_n\|}$ demektir.

Buradan $N\left(x_1,x_2,...,x_n,t_2\right)\geq N\left(x_1,x_2,...,x_n,t_1\right)$ olur. Böylece $N\left(x_1,x_2,...,x_n,t\right)$ bir azalmayan fonksiyondur.

Ayrıca

$$\lim_{t\to\infty} N(x_1, x_2, ..., x_n, t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{t + \|x_1, x_2, ..., x_n\|}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{t}{t\left(1 + \frac{1}{t}\right)\|x_1, x_2, ..., x_n\|} = 1$$

dir. Böylece (X, N) bir f-n-NLU dır.

2.2.5 Tanım

(X, N) f-n-NLU ve $\{x_k\} \subset X$ bir dizi olsun. Eğer $\exists x \in X$ var öyle ki her $t > 0$ için, $\lim_{k\to\infty} N(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - x, t) = 1$ oluyorsa $\{x_k\}$ dizisine $x \in X$ noktasına yakınsıyor denir ve $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ veya $x_k \to x$ ile gösterilir [6].

2.2.6 Tanım

(X, N) f-n-NLU ve $\{x_k\} \subset X$ bir dizi olsun. Eğer her $t > 0$ ve her $k, l \in N$ için $\lim_{k,l\to\infty} N(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - x_l, t) = 1$ oluyorsa $\{x_k\}$ dizisine Cauchy dizisi denir [6].

2.2.7 Teorem

(X, N) f-n-NLU da yakınsak her dizi Cauchy dizisidir [6].

İspat

$\{x_k\} \subset X$ bir dizi ve $t > 0$ için $\lim_{k\to\infty} N(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - x, t) = 1$ olsun.

Bu durumda $t, s > 0$ ve $\forall k, l \in N$ için

$$N(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - x_l, s + t) = N(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - x + x - x_l, s + t)$$

$$\geq \min\{N(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - x, s), N(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x - x_l, t)\}$$

$\geq \min\left\{N\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - x, s\right), N\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_l - x, t\right)\right\}$

olur. Limit alınırsa, $\lim_{k,l\to\infty} N\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - x_l, s+t\right)$

$\geq \min\left\{\lim_{k,l\to\infty} N\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - x, s\right), \lim_{k,l\to\infty} N\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_l - x, t\right)\right\}$ olur.

$t, s > 0$ ve $\forall k, l \in N$ için, $\lim_{k,l\to\infty} N\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - x, s\right) = 1$ ve

$\lim_{k,l\to\infty} N\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_l - x, t\right) = 1$ olduğundan

$\lim_{k,l\to\infty} N\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - x_l, s+t\right) \geq 1$ olur ki bu da

$\lim_{k,l\to\infty} N\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - x_l, s+t\right) = 1$ olduğunu gösterir.

2.2.8 Tanım

Bir fuzzy n-normlu lineer uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise tamdır denir [7].

Örnek

$\left(X, \|\cdot, ..., \cdot\|\right)$ n-normlu lineer uzay,

$N : X \times X \times \cdots \times X \times R \to [0,1]$;

$$N\left(x_1, x_2, ..., x_n, t\right) = \begin{cases} \dfrac{t}{t + \|x_1, x_2, ..., x_n\|} & ; t > 0, t \in R \\ 0 & ; t \leq 0 \end{cases}$$

ve $\{x_k\} \subset X$ bir dizi olsun. O halde aşağıdakiler vardır.

(i) $\{x_k\}$ $\left(X, \|\cdot, ..., \cdot\|\right)$ de Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow \{x_k\}$, $\left(X, N\right)$ de bir Cauchy dizisidir.

(ii) $\{x_k\}$ $\left(X, \|\cdot, ..., \cdot\|\right)$ yakınsak dizidir $\Leftrightarrow \{x_k\}$, $\left(X, N\right)$ de yakınsaktır.

Çözüm:

i) $\{x_k\}$, $\left(X, \|\cdot, ..., \cdot\|\right)$ de Cauchy dizisi olsun. Buradan,

$\lim_{k,l\to\infty}\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k-x_l\|=0$

$t>0$ için

$$N(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k-x_l,t)=\frac{t}{t+\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k-x_l\|}$$

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\lim_{k,l\to\infty} N(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k-x_l,t) &= \lim_{k,l\to\infty}\frac{t}{t+\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k-x_l\|}\\ &= \frac{t}{t+\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k-x_l\|}\\ &=1\end{aligned}$$

Böylece $\{x_k\}$, (X,N) de Cauchy dizisidir.

Tersine $\{x_k\}$, (X,N) de Cauchy dizisi olsun. Buradan $t>0$ için

$$\lim_{k,l\to\infty} N(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k-x_l,t)=1\Rightarrow \lim_{k,l\to\infty}\frac{t}{t+\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k-x_l\|}=1$$

$$\Rightarrow \lim_{k,l\to\infty}\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k-x_l\|=0$$

Böylece $\{x_k\}$, $(X,\|\cdot,...,\cdot\|)$ de Cauchy dizisidir.

(ii) Kabul edelim ki $\{x_k\}$, $(X,\|\cdot,...,\cdot\|)$ de yakınsak olsun. Buradan $t>0$ için ,

$$\lim_{k\to\infty} N(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k-x)=1\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{t}{t+\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k-x\|}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{t+\lim_{k\to\infty}\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k-x\|}=1\Leftrightarrow \lim_{k,l\to\infty}\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k-x_l\|=0$$

$\Leftrightarrow \{x_k\}$, (X,N) de yakınsaktır [6].

Böylece eğer tam olmayan n-normlu $(X,\|\cdot,...,\cdot\|)$ lineer uzayı varsa, bu n-norm tarafından indirgenen normla elde edilen fuzzy n-normlu uzay, tam olmayan fuzzy n-normlu uzaydır [7].

2.2.9 Tanım

(X,N) f-n-NLU ve $A\subset X$ olsun. Eğer her $x_1,x_2,...,x_{n-1}\in X$ ve her $x\in A$ için $N(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,t)>1-r$ olacak biçimde $t>0$ ve $r\in(0,1)$ varsa, A kümesine sınırlıdır denir [6].

2.2.10 Teorem

Fuzzy n-normlu uzayda her Cauchy dizisi sınırlıdır [6].

İspat

(X,N) fuzzy n-normlu uzay ve $\{x_k\}\subset X$ bir Cauchy dizisi olsun. Dolayısıyla $t>0$ için $\lim_{k,l\to\infty}N(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k-x_l,t)=1$ dir. $\alpha_0\in(0,1)$ sabit tutalım. Buradan $t>0$ için, $\lim_{k,l\to\infty}N(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k-x_l,t)=1>\alpha_0$ dır. $t'>0$ için en az bir $k_0(t')$ var öyle ki $\forall k\geq k_0(t')$ için $N(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k-x_l,t)>\alpha_0$ dır. $\lim_{t\to\infty}N(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k,t)=1$ olduğundan en az bir t_i var öyle ki $\forall t\geq t_i$, $i=1,2,...,k_0$ için, $N(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_i,t_i)>\alpha_0$ olur. $t_0=t'+\max\{t_1,t_2,...,t_{k_0}\}$ olsun.

Buradan $\forall k\geq k_0$ için, $N(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k,t_0)\geq N(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k,t'+t_{k_0})$

$\geq\min\{N(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k-x_{k_0},t'),N(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_{k_0},t_{k_0})\}$.

Dolayısıyla $\forall k\geq k_0$ için, $N(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k,t_0)\geq\min\{\alpha_0,\alpha_0\}=\alpha_0$ dır. Yani her $k\geq k_0$ için $N(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k,t_0)\geq\alpha_0$ elde edilir. Ayrıca her $i=1,2,...,k_0$ için, $N(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k,t_0)\geq N(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k,t_k)\geq\alpha_0$ dır.

Böylece $\forall n \in N$ için $N(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k, t_0) \geq \alpha_0$ olur ki bu da $\{x_k\}$ dizisinin sınırlı olması demektir.

2.2.11 Tanım

X bir lineer uzay, N_1 ve N_2, X üzerinde iki fuzzy n-norm olsun. Eğer her $t \in R$ için, $N_2(x_1, x_2, ..., ax_n, t) \leq N_1(x_1, x_2, ..., x_n, t) \leq N_2(x_1, x_2, ..., bx_n, t)$ olacak biçimde a ve b pozitif reel sayıları varsa N_1 ve N_2 normlarına denktir denir ve $N_1 \sim N_2$ ile gösterilir [6].

2.2.12 Teorem

Yukarıda verilen "$\sim$" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat

(i) Her $t \in R$ için

$$N_1(x_1, x_2, ..., 1 \cdot x_n, t) \leq N_1(x_1, x_2, ..., x_n, t) \leq N_1(x_1, x_2, ..., 1 \cdot x_n, t)$$

olduğundan yansıma özelliği sağlanır.

(ii) Kabul edelim ki $a, b > 0$ ve $\forall t \in R$ için,

$$N_2(x_1, x_2, ..., ax_n, t) \leq N_1(x_1, x_2, ..., x_n, t) \leq N_2(x_1, x_2, ..., bx_n, t)$$

olsun. $\forall t \in R$ için,

$$N_1(x_1, x_2, ..., cx_n, t) \leq N_2(x_1, x_2, ..., x_n, t) \leq N_1(x_1, x_2, ..., dx_n, t)$$

olacak biçimde $c, d > 0$ sayılarının varlığını göstermeliyiz.

$N_2(x_1, x_2, ..., ax_n, t) \leq N_1(x_1, x_2, ..., x_n, t)$ olduğundan

$N_2\left(x_1, x_2, ..., x_n, \dfrac{t}{a}\right) \leq N_1(x_1, x_2, ..., x_n, t)$ dir. $s = \dfrac{t}{a}$ alınırsa

$$N_2\left(x_1,x_2,...,x_n,s\right)\le N_1\left(x_1,x_2,...,x_n,as\right)$$
$$=N_1\left(x_1,x_2,...,x_n,\frac{s}{1/a}\right)=N_1\left(x_1,x_2,...,\left(1/a\right)x_n,s\right)$$

elde edilir. Böylece,

$$N_2\left(x_1,x_2,...,x_n,s\right)\le N_1\left(x_1,x_2,...,\left(1/a\right)x_n,s\right) \tag{2.3}$$

dir. Diğer taraftan,

$$N_1\left(x_1,x_2,...,x_n,t\right)\le N_2\left(x_1,x_2,...,bx_n,t\right)=N_2\left(x_1,x_2,...,x_n,t/b\right)$$

t yerine $\left(\frac{b}{a}\right)t$ yazılırsa,

$$N_1\left(x_1,x_2,...,x_n,\left(b/a\right)t\right)\le N_2\left(x_1,x_2,...,x_n,t/a\right)$$
$$\Rightarrow N_1\left(x_1,x_2,...,x_n,bs\right)\le N_2\left(x_1,x_2,...,x_n,s\right)$$
$$\Rightarrow N_1\left(x_1,x_2,...,\left(1/b\right)x_n,s\right)\le N_2\left(x_1,x_2,...,x_n,s\right)$$

Eş. 2.3 ve son eşitsizlik birlikte kullanılırsa $N_1\left(x_1,x_2,...,\left(1/b\right)x_n,s\right)\le N_2\left(x_1,x_2,...,x_n,s\right)\le N_1\left(x_1,x_2,...,\left(1/a\right)x_n,s\right)$ elde edilir.

Yani $c=\frac{1}{b}$ ve $d=\frac{1}{a}$ olmak üzere,
$N_1\left(x_1,x_2,...,cx_n,s\right)\le N_2\left(x_1,x_2,...,x_n,s\right)\le N_1\left(x_1,x_2,...,dx_n,s\right)$ elde edilir. Böylece simetri özelliği sağlanır.

(iii) Kabul edelim ki her $t\in R$ için
$N_0\left(x_1,x_2,...,ax_n,t\right)\le N\left(x_1,x_2,...,x_n,t\right)\le N_0\left(x_1,x_2,...,ax_n,t\right)$ ve
$N_1\left(x_1,x_2,...,cx_n,t\right)\le N_0\left(x_1,x_2,...,x_n,t\right)\le N_1\left(x_1,x_2,...,dx_n,t\right)$ olsun. Şimdi her $t\in R$ için,

$N_1(x_1, x_2, ..., ex_n, t) \le N(x_1, x_2, ..., x_n, t) \le N_1(x_1, x_2, ..., fx_n, t)$ olacak biçimde e ve f pozitif reel sayılarının varlığını göstereceğiz.

$$N_1(x_1, x_2, ..., cx_n, t) \le N_0(x_1, x_2, ..., x_n, t)$$
$$\Rightarrow N_1\left(x_1, x_2, ..., x_n, t/c\right) \le N_0(x_1, x_2, ..., x_n, t)$$
$$\Rightarrow N_1\left(x_1, x_2, ..., ax_n, t/c\right) \le N_0(x_1, x_2, ..., ax_n, t)$$
$$\Rightarrow N_1(x_1, x_2, ..., acx_n, t) \le N_0(x_1, x_2, ..., ax_n, t)$$

Böylece,

$$N_1(x_1, x_2, ..., acx_n, t) \le N(x_1, x_2, ..., x_n, t) \le N_0(x_1, x_2, ..., bx_n, t)$$

olur. Yine,

$$N_0(x_1, x_2, ..., x_n, t) \le N_1(x_1, x_2, ..., dx_n, t)$$
$$\Rightarrow N_0(x_1, x_2, ..., bx_n, t) \le N_1(x_1, x_2, ..., bdx_n, t)$$

Böylece $N_1(x_1, x_2, ..., acx_n, t) \le N(x_1, x_2, ..., x_n, t) \le N_1(x_1, x_2, ..., bdx_n, t)$ olur. Eğer $ac = e$ ve $bd = f$ alınırsa $\forall t \in R$ için,

$$N_1(x_1, x_2, ..., ex_n, t) \le N(x_1, x_2, ..., x_n, t) \le N_1(x_1, x_2, ..., fx_n, t)$$

elde edilir ki bu da geçişme özelliğinin sağlandığını gösterir.

3. FUZZY NORMLU UZAYLARDA OPERATÖRLER

3.1 Fuzzy Sürekli Dönüşüm ve Fuzzy Lineer Operatörler

Bu bölümde fuzzy normlu lineer uzaylar üzerinde bir operatörün fuzzy süreklilik, dizisel fuzzy süreklilik, zayıf fuzzy süreklilik, kuvvetli fuzzy süreklilik gibi sürekliliğin farklı türleri tanımlandı. Zayıf fuzzy sınırlılık ve kuvvetli fuzzy sınırlılık kavramı fuzzy normlu lineer uzaylar üzerinde lineer operatörler için tanımlandı ve süreklilik ve sınırlılık arasındaki ilişki incelendi.

U ve V aynı skaler cisim üzerinde iki lineer uzay olsun. N_1 ve N_2 sırasıyla U ve V üzerinde iki fuzzy norm olsun. O halde (U, N_1) ve (V, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylardır.

3.1.1 Tanım

T, (U, N_1) den (V, N_2) ye bir dönüşüm ve $x_0 \in U$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$, $\alpha \in (0,1)$ için $\exists \delta = \delta(\alpha, \varepsilon) > 0$, $\beta = \beta(\alpha, \varepsilon) \in (0,1)$ var $\ni$ $\forall x \in U$ için $N_1(x - x_0, \delta) > \beta \Rightarrow N_2(T(x) - T(x_0), \varepsilon) > \alpha$ ise T ye $x_0 \in U$ da fuzzy süreklidir denir.

Eğer T, U nun her noktasında fuzzy sürekli ise, T ye U da fuzzy süreklidir denir [8].

3.1.2 Tanım

T, (U, N_1) den (V, N_2) ye bir dönüşüm ve $x_0 \in U$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ var $\ni$ $\forall x \in U$ için $N_2(T(x) - T(x_0), \varepsilon) \geq N_1(x - x_0, \delta)$ ise T ye $x_0 \in U$ da kuvvetli fuzzy süreklidir denir.

Eğer T, U nun her noktasında kuvvetli fuzzy sürekli ise, T ye U da kuvvetli fuzzy süreklidir denir [8].

3.1.3 Tanım

T, (U,N_1) den (V,N_2) ye bir dönüşüm ve $x_0 \in U$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$, $\alpha \in (0,1)$ için $\exists \delta = \delta(\alpha,\varepsilon) > 0$ var $\ni$ $\forall x \in U$ için $N_1(x - x_0, \delta) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x) - T(x_0), \varepsilon) \geq \alpha$ ise T ye $x_0 \in U$ da zayıf fuzzy süreklidir denir.

Eğer T, U nun her noktasında zayıf fuzzy sürekli ise T ye U da zayıf fuzzy süreklidir denir [8].

3.1.4 Tanım

T, (U,N_1) den (V,N_2) ye bir dönüşüm ve $x \in U$ olsun. Eğer her $\{x_n\} \subset U$ dizisi için $x_n \to x$ iken $Tx_n \to Tx$ oluyorsa, yani $\forall t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} N_1(x_n - x, t) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} N_2(T(x_n) - T(x), t) = 1$ ise T ye $x \in U$ da dizisel fuzzy süreklidir denir.

Eğer T, U nun her noktasında dizisel fuzzy sürekli ise T ye U da dizisel fuzzy süreklidir denir [8].

3.1.5 Not

Eğer dönüşüm kuvvetli fuzzy sürekli ise bu durumda dönüşümün zayıf fuzzy sürekli olduğunu görmek kolaydır [8].

3.1.6 Teorem

(U,N_1) ve (V,N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar olmak üzere $T:(U,N_1) \to (V,N_2)$ bir dönüşüm olsun. Eğer T kuvvetli fuzzy sürekli ise, T dizisel fuzzy süreklidir fakat tersi doğru değildir [8].

İspat

Kabul edelim ki T , $x_0 \in U$ da kuvvetli fuzzy süreklidir. Böylece her $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ var $\ni$ $\forall x \in U$ için

$$N_2\left(T(x) - T(x_0), \varepsilon\right) \geq N_1\left(x - x_0, \delta\right) \text{ dir.} \tag{3.1}$$

$\{x_n\}$, U da bir dizi öyle ki $x_n \to x_0$ olsun.

$$\text{Yani } \forall t > 0 \text{ için } \lim_{n\to\infty} N_1\left(x_n - x_0, t\right) = 1 \text{ dir.} \tag{3.2}$$

Şimdi Eş. 3.1 den $n = 1, 2, ...$ için

$$N_2\left(T(x_n) - T(x_0), \varepsilon\right) \geq N_1\left(x_n - x_0, \delta\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} N_2\left(T(x_n) - T(x_0), \varepsilon\right) \geq \lim_{n\to\infty} N_1\left(x_n - x_0, \delta\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} N_2\left(T(x_n) - T(x_0), \varepsilon\right) = 1 \text{ dir. (Eş. 3.2 den)}$$

ε küçük keyfi pozitif bir sayı olduğundan bu $T(x_n) \to T(x_0)$ demektir.

Örnek

$\forall x \in R$ için $\|x\| = |x|$ olmak üzere $\left(X = R, \|\ \|\right)$ normlu lineer uzay olsun. $N_1, N_2 : X \times R \to [0,1]$ fonksiyonları

$$N_1(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t + |x|} & ; \forall x \in X, t > 0 \\ 0 & ; \forall x \in X, t \leq 0 \end{cases}$$

$$N_2(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t + k|x|} & ; \forall x \in X, t > 0 \\ 0 & ; \forall x \in X, t \leq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. (Burada $k > 0$ sabittir.)

Bu durumda N_1 ve N_2 nin X de fuzzy norm olduğu kolaylıkla gösterilebilir ve böylece (X, N_1) ve (X, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylardır.

Burada $T(x) = \dfrac{x^4}{1+x^2}$ fonksiyonunu ele alalım.

$x_n \in X$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisini seçelim öyle ki $x_n \to x_0$ olsun.

$\forall t > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} N_1(x_n - x_0, t) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{t}{t + |x_n - x_0|} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n - x_0| = 0 \text{ bulunur.} \qquad (3.3)$$

$$N_2(T(x_n) - T(x_0), t) = \frac{t}{t + k\left|\dfrac{x_n^4}{1+x_n^2} - \dfrac{x_0^4}{1+x_0^2}\right|}$$

$$= \frac{t|1+x_n^2||1+x_0^2|}{t|1+x_n^2||1+x_0^2| + k|x_n^4 + x_n^4x_0^2 - x_0^4 - x_n^2x_0^4|}$$

$$= \frac{t|1+x_n^2||1+x_0^2|}{t|1+x_n^2||1+x_0^2| + k|(x_n - x_0)(x_n + x_0)(x_n^2 + x_0^2) + x_n^2x_0^2(x_n^2 - x_0^2)|}$$

$$= \frac{t|1+x_n^2||1+x_0^2|}{t|1+x_n^2||1+x_0^2| + k|x_n - x_0||(x_n + x_0)(x_n^2 + x_0^2) + x_n^2x_0^2(x_n + x_0)|}$$

$\Rightarrow \forall t > 0$ için Eş. 3.3 ü kullanarak $\lim_{n\to\infty} N_2(T(x_n) - T(x_0), t) = 1$ dir.

$\Rightarrow (X, N_2)$ de $Tx_n \to Tx_0$ dır. T dizisel süreklidir.

Kabul edelim ki T kuvvetli sürekli olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ var öyle ki $\forall x \in X$ için $N_2(T(x) - T(x_0), \varepsilon) \geq N_1(x - x_0, \delta)$

$$\Rightarrow N_2\left(\frac{x^4}{1+x^2}-\frac{x_0^4}{1+x_0^2},\varepsilon\right)\geq N_1\left(x-x_0,\delta\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon+k\left|\frac{x^4}{1+x^2}-\frac{x_0^4}{1+x_0^2}\right|}\geq\frac{\delta}{\delta+|x-x_0|}$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon|1+x^2||1+x_0^2|}{\varepsilon|1+x^2||1+x_0^2|+k|x^4+x^4x_0^2-x_0^4-x_0^4x^2|}\geq\frac{\delta}{\delta+|x-x_0|}$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon|1+x^2||1+x_0^2|}{\varepsilon|1+x^2||1+x_0^2|+k|x-x_0||x+x_0||x^2+x_0^2+x^2x_0^2|}\geq\frac{\delta}{\delta+|x-x_0|}$$

$$\Rightarrow k\delta|x-x_0||x+x_0||x^2+x_0^2+x^2x_0^2|\leq\varepsilon|1+x^2||1+x^2||x-x_0|$$

$$\Rightarrow \delta\leq\frac{\varepsilon|1+x^2||1+x_0^2|}{k|x+x_0||x^2\left(1+x_0^2\right)+x_0^2|}\,(x\neq 0 \text{ için}) \tag{3.4}$$

$\forall x\left(\neq x_0\right)\in X$ için eğer Eş. 3.4 ü sağlayan $\exists\delta>0$ varsa T nin x_0 da sürekli olduğunu görürüz.

$\delta_1=\inf\left|\frac{\left(1+x^2\right)\left(1+x_0^2\right)}{\left(x+x_0\right)\left(x^2\left(1+x_0^2\right)+x_0^2\right)}\right|$ olduğunda $\delta=\frac{\varepsilon}{k}\delta_1$ Eş. 3.4 ü sağlar. (infimum tüm $x\in X$, $x\neq x_0$ üzerinden alınmıştır.) Fakat $\delta_1=0$ mümkün değildir. Bu yüzden T kuvvetli fuzzy sürekli değildir [8].

3.1.7 Teorem

$\left(U,N_1\right)$ ve $\left(V,N_2\right)$ fuzzy normlu lineer uzaylar olmak üzere, $T:\left(U,N_1\right)\rightarrow\left(V,N_2\right)$ lineer dönüşüm olsun. Bu durumda

T fuzzy süreklidir $\Leftrightarrow$ T dizisel fuzzy süreklidir [8].

İspat

T , $x_0 \in U$ da fuzzy sürekli olsun. $\{x_n\}$, U da bir dizi öyle ki $x_n \to x_0$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\alpha \in (0,1)$ seçelim. T, x_0 da fuzzy sürekli olduğundan $\forall x \in U$ için $\exists \delta = \delta(\alpha, \varepsilon) > 0$ ve $\exists \beta = \beta(\alpha, \varepsilon) \in (0,1)$ var öyle ki $N_1(x - x_0, \delta) > \beta \Rightarrow N_2(T(x) - T(x_0), \varepsilon) > \alpha$ dır.

U da $x_n \to x_0$ olduğundan, en az bir pozitif n_0 sabiti var öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $N_1(x_n - x_0, \delta) > \beta$ dır. Buradan $\forall n \geq n_0$ için $N_2(T(x_n) - T(x_0), \varepsilon) > \alpha$ dır.

Dolayısıyla verilen her $\varepsilon > 0$ ve her $\alpha \in (0,1)$ için $\exists\ n_0$ pozitif sabiti var $\ni$ $\forall n \geq n_0$ için $N_2(T(x_n) - T(x_0), \varepsilon) > \alpha$ dır. Bu da $\lim_{n\to\infty} N_2(T(x_n) - T(x_0), \varepsilon) = 1$ demektir.

Böylece keyfi $\varepsilon > 0$ için (V, N_2) de $T(x_n) \to T(x_0)$ dir. Yani T dizisel fuzzy süreklidir.

Şimdi de T dizisel fuzzy sürekli olsun. Kabul edelim ki T, x_0 da fuzzy sürekli olmasın.

Böylece her $\delta > 0$ ve $\beta \in (0,1)$ için $\exists \varepsilon > 0$ ve $\alpha > 0$ var öyle ki $\exists y \in X$ (δ, β ya bağlı) için $N_1(x_0 - y, \delta) > \beta$ fakat $N_2(T(x_0) - T(y), \varepsilon) \leq \alpha$ dır.

Buradan $\beta = 1 - \frac{1}{n+1}$, $\delta = \frac{1}{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ için $\exists y_n$ var öyle ki

$$N_1\left(x_0 - y_n, \frac{1}{n+1}\right) > 1 - \frac{1}{n+1} \text{ fakat } N_2(T(x_0) - T(y_n), \varepsilon) \leq \alpha \text{ dır.} \tag{3.5}$$

$\delta > 0$ alırsak $\exists n_0$ var öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $\frac{1}{n+1} < \delta$ dır.

O halde $\forall n \geq N$ için $N_1(x_0 - y_n, \delta) \geq N_1\left(x_0 - y_n, \frac{1}{n+1}\right) > 1 - \frac{1}{1+n}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} N_1(x_0 - y_n, \delta) \geq 1$

$\Rightarrow y_n \to x_0$ dır.

Fakat Eş. 3.5 den, $N_2(T(x_0) - T(y_n), \varepsilon) \leq \alpha$ dolayısıyla $n \to \infty$ iken $N_2(T(x_0) - T(y_n), \varepsilon) \not\to 1$ dir.

Böylece $T(y_n) \not\to T(x_0)$ dir. Halbuki $y_n \to x_0$ (N_1 e göre) dır. Bu da bizim kabulümüzle çelişir. Bundan dolayı T, x_0 da fuzzy süreklidir.

3.2 Fuzzy Sınırlı Dönüşüm ve Fuzzy Lineer Operatörler

3.2.1 Tanım

(U, N_1) ve (V, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar olmak üzere $T : (U, N_1) \to (V, N_2)$ bir lineer operatör olsun. Eğer $\exists M$ pozitif reel sayısı var öyle ki $\forall x \in U$ ve $\forall s \in R$ için $N_2(T(x), s) \geq N_1\left(x, \frac{s}{M}\right)$ ise, T ye U da kuvvetli fuzzy sınırlıdır denir [8].

Örnek

Sıfır ve özdeşlik operatörleri kuvvetli fuzzy sınırlıdır [8].

Örnek

Bu örnek sıfır veya özdeşlik operatörlerinden farklı kuvvetli fuzzy sınırlı operatörlerin bir örneğidir [8].

$(X, \| \ \|)$ bir normlu lineer uzay olsun. $N_1, N_2 : X \times R \to [0,1]$ olmak üzere

$$N_1(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t + \alpha_1 \|x\|} & ; t > 0 \\ 0 & ; t \le 0 \end{cases}$$

ve

$$N_2(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t + \alpha_2 \|x\|} & ; t > 0 \\ 0 & ; t \le 0 \end{cases}$$

şeklinde iki fonksiyon tanımlayalım. Burada α_1 ve α_2 iki sabit reel sayı ve $\alpha_1 > \alpha_2$ dir.

Şimdi N_1 ve N_2 nin X de fuzzy norm olduğunu gösterelim.

(N1) $\forall t \in R$ için $t \le 0$ iken tanımdan $N_1(x,t) = 0$ dır.

(N2) $\forall t(>0) \in R$, $N_1(x,t) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{t}{t + \alpha_1 \|x\|} = 1 \Leftrightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ dır.

(N3) $\forall t \in R$ için $t > 0$ ve $c(\neq 0) \in F$ (reel veya kompleks cisim) iken

$$N_1(cx,t) = \frac{t}{t + \alpha_1 \|cx\|} = \frac{\frac{t}{|c|}}{\frac{t}{|c|} + \alpha_1 \|x\|} = N_1\left(x, \frac{t}{|c|}\right) \text{ dir.}$$

(N4) $\forall s,t \in R$ için $N_1(x+u, s+t) \ge \min\{N_1(x,s), N_1(u,t)\}$ olduğunu göstermeliyiz.

a) $s + t < 0$

b) $s = t = 0$

c) $s + t > 0$; $s > 0$, $t < 0$; $s < 0$, $t > 0$

Yukarıdaki 3 durum için ilişki açıktır. Eğer,

$t>0, s>0$ ise $N_1(x+u,s+t)=\dfrac{s+t}{s+t+\alpha_1\|x+u\|}\geq\dfrac{s+t}{s+t+\alpha_1\|x\|+\alpha_1\|u\|}$

dir.

$\dfrac{s}{s+\alpha_1\|x\|}\geq\dfrac{t}{t+\alpha_1\|u\|}$ olduğunda

$\Rightarrow\dfrac{s}{s+\alpha_1\|x\|}-\dfrac{t}{t+\alpha_1\|u\|}\geq 0$

$\Rightarrow s\|u\|-t\|x\|\geq 0$ dır. Buradan

$\dfrac{s+t}{s+t+\alpha_1\|x\|+\alpha_1\|u\|}-\dfrac{t}{t+\alpha_1\|u\|}=\dfrac{\alpha_1\left(s\|u\|-t\|x\|\right)}{\left(s+t+\alpha_1\|x\|+\alpha_1\|u\|\right)\left(t+\alpha_1\|u\|\right)}$ dir. Dolayısıyla

$\dfrac{s}{s+\alpha_1\|x\|}\geq\dfrac{t}{t+\alpha_1\|u\|}\quad\Rightarrow\dfrac{s+t}{s+t+\alpha_1\|x+u\|}\geq\dfrac{s}{s+\alpha_1\|x\|}$ dir. Benzer olarak, eğer

$\dfrac{t}{t+\alpha_1\|u\|}\geq\dfrac{s}{s+\alpha_1\|x\|}\Rightarrow\dfrac{s+t}{s+t+\alpha_1\|x+u\|}\geq\dfrac{s}{s+\alpha_1\|x\|}$ dir. Böylece

$N_1(x+u,s+t)\geq\min\{N_1(x,s),N_1(u,t)\}$ dir.

(N5) Eğer $t_1<t_2\leq 0$ ise, $\forall x\in U$ için $N_1(x,t_1)=N_2(x,t_2)=0$ dır.

Eğer $t_2>t_1>0$ ise $\dfrac{t_2}{t_2+\alpha_1\|x\|}-\dfrac{t_1}{t_1+\alpha_1\|x\|}=\dfrac{\alpha_1\|x\|(t_2-t_1)}{\left(t_2+\alpha_1\|x\|\right)\left(t_1+\alpha_1\|x\|\right)}\geq 0$

$\Rightarrow\forall x\in U$ için $N_1(x,t_2)\geq N_1(x,t_1)$ dir.

Böylece $N_1(x,\cdot)$ R de azalmayan bir fonksiyondur.

Eğer $x\neq 0$ ise $\lim_{t\to\infty}N_1(x,t)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{t}{t+\alpha_1\|x\|}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{\alpha_1\|x\|}{t}}=1$ dir.

Eğer $x=0$ ise, bu durumda $\lim_{n\to\infty}N_1(x,t)=\lim_{t\to\infty}N_1(0,t)=1$ dir.

Böylece $\forall x\in X$ için $\lim_{t\to\infty}N_1(x,t)=1$ dir.

Bundan dolayı (X,N_1) bir fuzzy normlu lineer uzaydır.

Benzer olarak (X,N_2) nin de bir fuzzy normlu lineer uzay olduğunu gösterebiliriz.

Şimdi $T:(X,N_1)\to(X,N_2)$ operatörünü $r(\neq 0)\in R$ sabit olmak üzere $T(x)=rx$ olarak tanımlayalım. Açıkça T bir lineer operatördür.

Eğer $M\geq|r|$ olacak şekilde bir M pozitif sayısı seçersek, bu durumda $\forall x\in X$ ve $\forall t\in R$ için $N_2(T(x),t)\geq N_1\left(x,\frac{t}{M}\right)$ olduğu gösterilebilir. Gerçekten;

$\forall x\in U$ ve $M\geq|r|$ için $\alpha_1 M\geq\alpha_2|r|$ vardır. ($\alpha_1>\alpha_2>0$ dan)

$$\Rightarrow \alpha_1 M\|x\|\geq\alpha_2|r|\|x\|$$

$$\Rightarrow \forall t>0 \text{ için } t+\alpha_1 M\|x\|\geq t+\alpha_2|r|\|x\|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t+\alpha_2|r|\|x\|}\geq\frac{1}{t+\alpha_1 M\|x\|}$$

$$\Rightarrow \forall t>0 \text{ için } \frac{t}{t+\alpha_2|r|\|x\|}\geq\frac{t}{t+\alpha_1 M\|x\|}$$

$$\Rightarrow \forall t>0 \text{ için } \frac{t}{t+\alpha_2|r|\|x\|}\geq\frac{\frac{t}{M}}{\frac{t}{M}+\alpha_1\|x\|}$$

$$\Rightarrow \forall t>0 \text{ ve } \forall x\in X \text{ için } N_2(T(x),t)\geq N_1\left(x,\frac{t}{M}\right) \text{ dir.}$$

Eğer $t\leq 0$ ise, bu durumda $\forall x\in X$ için yukarıdaki ilişki sağlanır. Bu nedenle T kuvvetli fuzzy sınırlı lineer operatördür.

3.2.2 Tanım

(U,N_1) ve (V,N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar olmak üzere $T:(U,N_1)\to(V,N_2)$ bir lineer operatör olsun. Eğer her $\alpha\in(0,1)$ için $\exists M_\alpha>0$ var öyle ki $\forall x\in U$ ve $\forall t\in R$ için $N_1\left(x,\frac{t}{M_\alpha}\right)\geq\alpha\Rightarrow N_2\left(T(x),t\right)\geq\alpha$ ise, T ye zayıf fuzzy sınırlı denir [8].

3.2.3 Teorem

(U,N_1) ve (V,N_2) normlu lineer uzaylar $T:(U,N_1)\to(V,N_2)$ bir lineer operatör olsun. Eğer T kuvvetli fuzzy sınırlı ise, T zayıf fuzzy sınırlıdır ancak tersi doğru değildir [8].

İspat

Öncelikle T kuvvetli fuzzy sınırlı olsun.

Bu nedenle $\exists M>0$ var öyle ki $\forall x\in U$ ve $\forall t\in R$ için $N_2\left(T(x),t\right)\geq N_1\left(x,\frac{t}{M}\right)$ dir. Böylece her $\alpha\in(0,1)$ ve $\exists M_\alpha(=M)>0$ var öyle ki $\forall x\in U$ ve $\forall t\in R$ için $N_1\left(x,\frac{t}{M_\alpha}\right)\geq\alpha\Rightarrow N_2\left(T(x),t\right)\geq\alpha$ dır. Buda T nin zayıf fuzzy sınırlı olduğunu gösterir.

Tersinin olmadığını göstermek için aşağıdaki örneği ele alalım.

Örnek

$(X,\|\ \|)$ bir normlu lineer uzay olsun. N_1 ve N_2 fonksiyonlarını şu şekilde tanımlayalım;

$$N_1(x,t)=\begin{cases}\dfrac{t^2-\|x\|^2}{t^2+\|x\|^2} & ; t>\|x\| \\ 0 & ; t\le\|x\|\end{cases}$$

ve

$$N_2(x,t)=\begin{cases}\dfrac{t}{t+\|x\|} & ; \forall x\in X, t>0 \\ 0 & ; \forall x\in X, t\le 0\end{cases}$$

N_1 ve N_2, X de fuzzy normdur.

Biz şimdi $T:(X,N_1)\rightarrow(X,N_2)$ lineer operatörünü $\forall x\in X$ için $T(x)=x$ olarak tanımlayalım. $\forall\alpha\in(0,1)$ için $M_\alpha=\dfrac{1}{1-\alpha}$ seçelim. Bu durumda $t>\|x\|$ için,

$$N_1\left(x,\frac{t}{M_\alpha}\right)\ge\alpha$$

$$\Rightarrow\frac{t^2(1-\alpha)^2-\|x\|^2}{t^2(1-\alpha)^2+\|x\|^2}\ge\alpha$$

$$\Rightarrow t^2\left(1-\alpha^2\right)-\|x\|^2\ge\alpha t^2(1-\alpha)^2+\alpha\|x\|^2$$

$$\Rightarrow t^2(1-\alpha)^2-\alpha(1-\alpha)^2t^2\ge(1+\alpha)\|x\|^2$$

$$\Rightarrow t^2(1-\alpha)^3\ge(1+\alpha)\|x\|^2$$

$$\Rightarrow\|x\|\le\frac{t(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}}$$

$$\Rightarrow t+\|x\|\le\frac{t(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}}+t=t\frac{(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{t+\|x\|} \geq \frac{\sqrt{1+\alpha}}{(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{1+\alpha}} \text{ dır. Şimdi} \tag{3.6}$$

$$\frac{\sqrt{1+\alpha}}{(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{1+\alpha}} \geq \alpha$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\alpha} \geq \alpha(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha}+\alpha\sqrt{1+\alpha}$$

$$\Leftrightarrow (1-\alpha)\sqrt{1+\alpha} \geq \alpha(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\alpha} \geq \alpha\sqrt{1-\alpha} \ \ (\alpha \neq 1 \text{ için})$$

$$\Leftrightarrow 1+\alpha \geq \alpha^2(1-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow 1+\alpha+\alpha^3 \geq \alpha^2 \text{ dir.}$$

Bu bütün $\alpha \in (0,1)$ için doğrudur. Böylece Eş. 3.6 dan $\forall \alpha \in (0,1)$ için $\frac{t}{t+\|x\|} \geq \alpha$ elde ederiz. Böylece eğer $t > \|x\|$ ise, $N_2(T(x),t) \geq \alpha$ dır.

Ayrıca $t \leq \|x\|$ iken de $\frac{t^2-\|x\|^2}{t^2+\|x\|^2} = 0$ dır. Buda $\forall \alpha \in (0,1)$ için $N_1\left(x, \frac{t}{M_\alpha}\right) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x),t) \geq \alpha$ demektir.

Bu nedenle her durumda da $\forall \alpha \in (0,1)$ için $N_1\left(x, \frac{t}{M_\alpha}\right) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x),t) \geq \alpha$ elde ederiz. Böylece T zayıf fuzzy sınırlıdır. Şimdi de kuvvetli fuzzy sınırlı olmadığını görelim.

$t > \|x\|$, $x \neq 0$ için

$$N_2\left(T(x),t\right)\geq N_1\left(x,\frac{t}{M}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{t+\|x\|}\geq\frac{t^2-M^2\|x\|^2}{t^2+M^2\|x\|^2}$$

$$\Leftrightarrow t^3+tM^2\|x\|^2\geq t^3-M^2t\|x\|^2+t^2\|x\|-M^2\|x\|^3$$

$$\Leftrightarrow tM^2\|x\|^2\geq -M^2t\|x\|^2+t^2\|x\|-M^2\|x\|^3$$

$$\Leftrightarrow tM^2\|x\|\geq -M^2t\|x\|+t^2-M^2\|x\|^2\ \ (\|x\|\neq 0\ \text{ için})$$

$$\Leftrightarrow M^2\left(2t\|x\|+\|x\|^2\right)\geq t^2$$

$$\Leftrightarrow M^2\geq\frac{t^2}{2t\|x\|+\|x\|^2}\ \ (\|x\|>0\ \text{ için})$$

$$\Leftrightarrow M\geq\frac{t}{\left\{2t\|x\|+\|x\|^2\right\}^{1/2}}\ \ (\|x\|>0\ \text{ için})$$

$$\Leftrightarrow t\to\infty\ \text{ iken }\ M=\infty\ \text{ dur.}$$

Böylece T kuvvetli fuzzy sınırlı değildir.

3.2.4 Teorem

(U,N_1) ve (V,N_2) iki fuzzy normlu lineer uzay ve T, U dan V ye bir lineer operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler vardır.

(i) Eğer T bir $x_0\in U$ noktasında kuvvetli fuzzy sürekli ise T, U da kuvvetli fuzzy süreklidir.

(ii) T kuvvetli fuzzy süreklidir $\Leftrightarrow$ T kuvvetli fuzzy sınırlıdır [8].

İspat

(i) $x_0 \in U$ da kuvvetli fuzzy sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ var öyle ki $\forall x \in U$ için $N_2\left(T(x) - T(x_0), \varepsilon\right) \geq N_1\left(x - x_0, \delta\right)$ dir.

Herhangi bir $y \in U$ alarak x yerine $x + x_0 - y$ koyarsak

$$N_2\left(T(x + x_0 - y) - T(x_0), \varepsilon\right) \geq N_1\left(x + x_0 - y - x_0, \delta\right)$$

$$\Rightarrow N_2\left(T(x) + T(x_0) - T(y) - T(x_0), \varepsilon\right) \geq N_1\left(x - y, \delta\right)$$

$\Rightarrow N_2\left(T(x) - T(y), \varepsilon\right) \geq N_1\left(x - y, \delta\right)$ elde ederiz. y keyfi olduğundan T, U da kuvvetli fuzzy süreklidir.

(ii) T kuvvetli fuzzy sınırlı olsun. O halde $\exists M > 0$ var öyle ki $\forall x \in U$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $N_2\left(T(x), \varepsilon\right) \geq N_1\left(x, \dfrac{\varepsilon}{M}\right)$ dir.

Yani $\forall x \in U$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $N_2\left(T(x) - T(0), \varepsilon\right) \geq N_1\left(x - 0, \dfrac{\varepsilon}{M}\right)$ dir.

Burada $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$ olarak alınırsa $N_2\left(T(x) - T(0), \varepsilon\right) \geq N_1\left(x - 0, \delta\right)$ dır.

Bu T nin 0 da kuvvetli fuzzy sürekli olduğu anlamına gelir ve böylece T, U da kuvvetli fuzzy süreklidir.

Tersine T, U da kuvvetli fuzzy sürekli olsun. T nin $x = 0$ da ki sürekliliğini kullanarak

$\varepsilon = 1$ için $\exists\delta > 0$ var öyle ki $\forall x \in U$ için $N_2\left(T(x) - T(0), 1\right) \geq N_1\left(x - 0, \delta\right)$ dir.

Kabul edelim ki $x \neq 0$ ve $t > 0$ olsun. $u = \frac{x}{t}$ yazarsak

$N_2\left(T(x),t\right) = N_2\left(tT(u),t\right) = N_2\left(T(u),1\right) \geq N_1(u,\delta) = N_1\left(\frac{x}{t},\delta\right) = N_1\left(x,\frac{t}{M}\right)$ olur.

Burada $M = \frac{1}{\delta}$ dır. Dolayısıyla $N_2\left(T(x),t\right) \geq N_1\left(x,\frac{t}{M}\right)$ olur.

Eğer $x \neq 0$ ve $t \leq 0$ ise bu durumda $N_2\left(T(x),t\right) = 0 = N_1\left(x,\frac{t}{M}\right)$ dir.

Eğer $x = 0$ ve $t \in R$ ise bu durumda $N_1\left(0_U,\frac{t}{M}\right) = 0_V$ ve $t > 0$ ise

$N_2\left(0_V,t\right) = N_1\left(0_U,\frac{t}{M}\right) = 1$ dir. $t \leq 0$ ise $N_2\left(0_V,t\right) = N_1\left(0_U,\frac{t}{M}\right) = 0$ dır.

Yukarıdaki işlemlerin sonucu olarak T kuvvetli fuzzy sınırlıdır.

3.2.5 Teorem

(U,N_1) ve (V,N_2) iki fuzzy normlu lineer uzay ve T, U dan V ye bir lineer operatör olsun. Eğer T bir noktada dizisel fuzzy sürekli ise, bu durumda T, U üzerinde dizisel fuzzy süreklidir [8].

İspat

$x \in U$ sabit bir nokta ve $\{x_n\}$ U da bir dizi öyle ki $x_n \to x$ olsun.

Bu durumda $\forall t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} N_1\left(x_n - x,t\right) = 1$ dir. Yani $\forall t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} N_1\left(\left(x_n - x + x_0\right) - x_0,t\right) = 1$ dir.

T, x_0 da sürekli olduğundan $\forall t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} N_1\left(T\left(x_n - x + x_0\right) - T\left(x_0\right),t\right) = 1$ dir. Yani $\forall t > 0$ için

$\lim_{n\to\infty} N_1\left(T\left(x_n\right) - T(x) + T\left(x_0\right) - T\left(x_0\right),t\right) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} N_2\left(T\left(x_n\right) - T(x),t\right) = 1$

dir. Böylece $\forall t > 0$ için

$\lim_{n\to\infty} N_1(x_n - x, t) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} N_2(T(x_n) - T(x), t) = 1$ dir. Bu gösterir ki T, U da dizisel fuzzy süreklidir.

3.2.6 Teorem

(U, N_1) ve (V, N_2) iki fuzzy normlu lineer uzay ve T, U dan V ye bir lineer operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler vardır.

(i) Eğer T $x_0 \in U$ noktasında zayıf fuzzy sürekli ise, T, U da zayıf fuzzy süreklidir.
(ii) T zayıf fuzzy süreklidir $\Leftrightarrow$ T zayıf fuzzy sınırlıdır [8].

İspat

(i) T, $x_0 \in U$ da zayıf fuzzy sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve $\alpha \in (0,1)$ için $\exists\delta(\alpha, \varepsilon) > 0$ var öyle ki $\forall x \in U$ için $N_1(x - x_0, \delta) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x) - T(x_0), \varepsilon) \geq \alpha$ dır. $y \in U$ alalım ve x yerine $x + x_0 - y$ koyarak $N_1(x + x_0 - y - x_0, \delta) \geq N_2(T(x + x_0 - y) - T(x_0), \varepsilon) \geq \alpha$ elde ederiz. Yani $N_1(x - y, \delta) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x) - T(y), \varepsilon) \geq \alpha$ dır. y sabit olduğundan T, U da zayıf fuzzy süreklidir.

(ii) İlk olarak kabul edelim ki T zayıf fuzzy sürekli olsun. Böylece her $\alpha \in (0,1)$ için $\exists M_\alpha > 0$ var öyle ki $\forall t \in R$, $\forall x \in U$ için $N_1\left(x, \frac{t}{M_\alpha}\right) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x), t) \geq \alpha$ dır. Yani $N_1\left(x - 0, \frac{t}{M_\alpha}\right) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x) - T(0), t) \geq \alpha$ dır. Başka bir ifadeyle $\varepsilon > 0$ için $N_1\left(x - 0, \frac{\varepsilon}{M_\alpha}\right) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x) - T(0), \varepsilon) \geq \alpha$ dir. $\delta = \frac{\varepsilon}{M_\alpha}$ alarak $N_1(x - 0, \delta) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x) - T(0), \varepsilon) \geq \alpha$ elde edilir. Bu da T nin $x = 0$ da zayıf fuzzy sürekli olduğu anlamına gelir ve bundan dolayı T, U da zayıf fuzzy süreklidir.

Tersine, T nin U da zayıf fuzzy sürekli olduğunu kabul edelim.

T nin 0 da sürekliliğini kullanalım ve $\varepsilon = 1$ alalım. $\forall\alpha \in (0,1)$ için $\exists\delta(\alpha,1) > 0$ var öyle ki $\forall x \in U$ için $N_1(x-0,\delta) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x)-T(0),1) \geq \alpha$ yani $N_1(x,\delta) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x),1) \geq \alpha$ olduğunu biliyoruz.

Kabul edelim ki $x \neq 0$ ve $t > 0$ olsun. $x = \frac{u}{t}$ yazalım.

$N_1\left(\frac{u}{t},\delta\right) \geq \alpha \Rightarrow N_2\left(T\left(\frac{u}{t}\right),1\right) \geq \alpha$ yani $N_1(u,t\delta) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(u),t) \geq \alpha$ dır.

Başka bir ifadeyle $M_\alpha = \frac{1}{\delta(\alpha,1)}$ alarak $N_1\left(u,\frac{t}{M_\alpha}\right) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(u),t) \geq \alpha$ elde edilir. Bu da T nin zayıf fuzzy sınırlı olduğunu gösterir.

Eğer $x \neq 0$ ve $t \leq 0$ ise bu durumda her $M_\alpha > 0$ için $N_1\left(x,\frac{t}{M_\alpha}\right) = N_2(T(x),t) = 0$ dır. Eğer $x = 0$ ise bu durumda $M_\alpha > 0$ için $t > 0$ ise $N_1\left(x,\frac{t}{M_\alpha}\right) = N_2(T(x),t) = 1$ dir. $t \leq 0$ ise $N_1\left(x,\frac{t}{M_\alpha}\right) = N_2(T(x),t) = 0$ dır.

Yukarıda ki üç durumdan $\alpha \in (0,1)$ için $\exists M_\alpha > 0$ var öyle ki $\forall u \in U$, $\forall t \in R$ için $N_1\left(u,\frac{t}{M_\alpha}\right) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(u),t) \geq \alpha$ dır. Bundan dolayı T zayıf fuzzy sınırlıdır.

4. FUZZY n-NORMLU UZAYLARDA OPERATÖRLER

Bu bölümde fuzzy n-normlu lineer uzaylarda operatörlerin süreklililiklerinin çeşitli tipleri olan fuzzy süreklilik, fuzzy dizisel süreklilik, zayıf fuzzy süreklilik, kuvvetli fuzzy süreklilik ve lineer operatörlerin sınırlılıkların tipleri olan zayıf fuzzy sınırlılık, kuvvetli fuzzy sınırlılık incelenmiştir.

4.1 Tanım

T, (X,N_1) den (Y,N_2) ye bir dönüşüm ve $z\in X$ verilsin. Eğer her $\varepsilon>0$, $\alpha\in(0,1)$ için $\exists\delta=\delta(\alpha,\varepsilon)>0$, $\beta=\beta(\alpha,\varepsilon)\in(0,1)$ var $\ni$ $\forall x_1,x_2,...,x_{n-1},y\in X$, $y_1,y_2,...,y_{n-1}\in Y$ için $N_1(x_1,x_2,...,x_{n-1},y-z,\delta)>\beta\Rightarrow N_2(y_1,y_2,...,y_{n-1},Ty-Tz,\varepsilon)>\alpha$ ise, T ye $z\in X$ de fuzzy süreklidir denir.

Eğer T, X in her noktasında fuzzy sürekli ise, T ye X de fuzzy süreklidir denir [9].

4.2 Tanım

T, (X,N_1) den (Y,N_2) ye bir dönüşüm ve $z\in X$ verilsin. Eğer her $\varepsilon>0$ için $\exists\delta>0$ var öyle ki $\forall x_1,x_2,...,x_{n-1},y\in X$, $y_1,y_2,...,y_{n-1}\in Y$ için $N_2(y_1,y_2,...,y_{n-1},Ty-Tz,\varepsilon)\geq N_1(x_1,x_2,...,x_{n-1},y-z,\delta)$ ise, T ye $z\in X$ noktasında kuvvetli fuzzy süreklidir denir.

Eğer T, X in her noktasında kuvvetli fuzzy sürekli ise, T ye X de kuvvetli fuzzy süreklidir denir [9].

4.3 Tanım

T, (X,N_1) den (Y,N_2) ye bir dönüşüm ve $z\in X$ verilsin. Eğer her $\varepsilon>0$, $\alpha\in(0,1)$ için $\exists\delta=\delta(\alpha,\varepsilon)>0$ var öyle ki $\forall x_1,x_2,...,x_{n-1},y\in X$, $y_1,y_2,...,y_{n-1}\in Y$ için

$N_1(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y - z, \delta) \geq \alpha \Rightarrow N_2(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, Ty - Tz, \varepsilon) \geq \alpha$ ise T ye $z \in X$ noktasında zayıf fuzzy süreklidir denir.

Eğer T, X in her noktasında zayıf fuzzy sürekli ise T ye X de zayıf fuzzy süreklidir denir [9].

4.4 Tanım

T, (X, N_1) den (Y, N_2) ye bir dönüşüm ve $z \in X$ verilsin. Eğer X de her $\{x_k\}$ dizisi için $x_k \to z$ iken $Tx_k \to Tz$ $(k \in N)$ oluyorsa yani $\forall t > 0$, $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in X$, $y_1, y_2, ..., y_{n-1} \in Y$ için $\lim_{k \to \infty} N_1(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - z, t) = 1 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} N_2(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, Tx_k - Tz, t) = 1$ ise T ye $z \in X$ noktasında dizisel fuzzy süreklidir denir.

Eğer T, X in her noktasında dizisel fuzzy sürekli ise T ye X de dizisel fuzzy süreklidir denir [9].

4.5 Not

Bir dönüşümün kuvvetli fuzzy sürekli iken zayıf fuzzy sürekli olduğunu görmek kolaydır [9].

4.6 Teorem

(X, N_1) ve (Y, N_2) iki f-n-NLU ve $T : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer T kuvvetli fuzzy sürekli ise bu durumda dizisel fuzzy süreklidir [9].

İspat

T, $z \in X$ noktasında kuvvetli fuzzy sürekli olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(z, \varepsilon) > 0$ var $\ni$ $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y \in X$, $y_1, y_2, ..., y_{n-1} \in Y$ için

$$N_2(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, Ty - Tz, \varepsilon) \geq N_1(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y - z, \delta) \quad (4.1)$$

dır. $\{x_k\}$, X de bir dizi öyle ki $x_k \to z$ yani $\forall t>0$ için

$$\lim_{k\to\infty} N_1(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - z, t) = 1 \tag{4.2}$$

dir. Şimdi Eş. 4.1 den $k = 1, 2, ...$ için

$$N_2(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, Tx_k - Tz, \varepsilon) \geq N_1(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - z, \delta)$$

dır. Bu durumda

$$\lim_{k\to\infty} N_2(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, Tx_k - Tz, \varepsilon) \geq \lim_{k\to\infty} N_1(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - z, \delta)$$

dır. Bu da Eş. 4.2 den $\lim_{k\to\infty} N_2(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, Tx_k - Tz, \varepsilon) = 1$ dir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $Tx_k \to Tz$ dir.

4.7 Teorem

(X, N_1) ve (Y, N_2) iki f-n-NLU ve $T: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda,

T fuzzy süreklidir $\Leftrightarrow$ T dizisel fuzzy süreklidir [9].

İspat

T, $z \in X$ de fuzzy sürekli olsun. $\{x_k\}$, X de bir dizi öyle ki $x_k \to z$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\alpha \in (0,1)$ seçelim. T, z de fuzzy sürekli olduğundan bir $\delta = \delta(\alpha, \varepsilon) > 0$ ve $\beta = \beta(\alpha, \varepsilon) \in (0,1)$ var öyle ki $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y \in X$ ve $y_1, y_2, ..., y_{n-1} \in Y$ için $N_1(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y - z, \delta) > \beta \Rightarrow N_2(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, Ty - Tz, \varepsilon) > \alpha$ dır. X de $x_k \to z$ olduğundan bir pozitif k_0 sabiti var öyle ki $\forall k \geq k_0$ için $N_1(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - z, \delta) > \beta$ dır. Bu durumda $\forall k \geq k_0$ için $N_2(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, Tx_k - Tz, \varepsilon) > \alpha$ dır. Böylece belirli bir $\varepsilon > 0$ ve her $\alpha \in (0,1)$ için bir pozitif k_0 sabiti vardır öyle ki $\forall k \geq k_0$ için $N_2(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, Tx_k - Tz, \varepsilon) > \alpha$ dır. Bu da $\lim_{k\to\infty} N_2(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, Tx_k - Tz, \varepsilon) = 1$ dir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan X de $Tx_k \to Tz$ dir.

Şimdi de T, $z \in X$ de dizisel fuzzy sürekli olsun. Kabul edelim ki T, z de fuzzy sürekli olmasın. Böylece bir $\varepsilon > 0$ ve $\alpha > 0$ var öyle ki her $\delta > 0$ ve $\beta \in (0,1)$ için bir $w \in X$ (δ ve β ya bağlı) var öyle ki $N_1(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, z - w, \delta) > \beta$ fakat $N_2(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, Tz - Tw, \varepsilon) \leq \alpha$ dır. Buradan $\beta = 1 - \frac{1}{k+1}$, $\delta = \frac{1}{k+1}$, $k = 1, 2, ...$ için bir w_k var öyle ki

$$N_1\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, z - w_k, \frac{1}{k+1}\right) > 1 - \frac{1}{k+1} \tag{4.3}$$

fakat $N_2(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, Tz - Tw_k) \leq \alpha$ dır.

$\delta > 0$ alırsak, bir k_0 vardır öyle ki $\forall k \geq k_0$ için $\frac{1}{k+1} < \delta$ dır. Bu durumda $\forall k \geq k_0$ için ;

$$N_1(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, z - w_k, \delta) \geq N_1\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, z - w_k, \frac{1}{k+1}\right) > 1 - \frac{1}{k+1}$$

dır. Dolayısıyla $\lim_{k\to\infty} N_1(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, z - w_k, \delta) \geq 1 \Rightarrow w_k \to z$ dir.

Fakat Eş. 4.3 den $N_2(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, Tz - Tw_k, \varepsilon) \leq \alpha$

Dolayısıyla $k \to \infty$ iken $N_2(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, Tz - Tw_k, \varepsilon) \not\to 1$ dir.

Böylece $Tw_k \not\to Tz$ dır. Oysa N_1 e göre $w_k \to z$ dir.

Buda bizim kabulümüzle çelişir. Bundan dolayı T, z de fuzzy süreklidir.

4.8 Tanım

(X, N_1) ve (Y, N_2) iki f-n-NLU ve $T: X \to Y$ bir lineer operatör olsun. $\exists M$ reel sayısı var öyle ki $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y \in X$, $y_1, y_2, ..., y_{n-1} \in Y$ ve $\forall s \in R$ için $N_2(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, Ty, s) \geq N_1\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y, \frac{s}{M}\right)$ ise T ye X de kuvvetli fuzzy sınırlıdır denir [9].

Örnek

Sıfır ve özdeşlik operatörleri kuvvetli fuzzy sınırlıdır.

Örnek

$(X, \|\cdot, \ldots, \cdot\|)$ n normlu lineer uzay olsun. $X \times \cdots \times X \times R$ den $[0,1]$ aralığına iki fonksiyon tanımlayalım.

$$N_1(x_1, x_2, ..., x_n, t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t + \alpha_1 \|x_1, x_2, ..., x_n\|} & ; t > 0 \\ 0 & ; t \leq 0 \end{cases}$$

ve

$$N_2(x_1, x_2, ..., x_n, t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t + \alpha_2 \|x_1, x_2, ..., x_n\|} & ; t > 0 \\ 0 & ; t \leq 0 \end{cases}$$

Burada α_1 ve α_2 iki sabit pozitif reel sayı ve $\alpha_1 > \alpha_2$ dir. Kolaylıkla gösterilebilir ki N_1 ve N_2 , X de iki fuzzy normdur. Bir T operatörünü $T: (X, N_1) \to (X, N_2)$ $Ty = ry$ şeklinde tanımlayalım. Burada $r \in R \setminus \{0\}$ sabittir. Açıkça T bir lineer operatördür. Eğer M pozitif sayısını $M \geq |r|$ olacak şekilde seçersek bu durumda $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y \in X$ ve $\forall t \in R$ için

$N_2\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, Ty, t\right) \geq N_1\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y, \dfrac{t}{M}\right)$ olduğunu gösterebiliriz.

$\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y \in X$, $M \geq |r|$ ve $\forall t > 0$ için $\alpha_1 M \geq \alpha_2 |r|$ olduğunu biliyoruz.

$$\Rightarrow \alpha_1 M \|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y\| \geq \alpha_2 |r| \|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y\|$$

$$\Rightarrow t + \alpha_1 M \|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y\| \geq t + \alpha_2 |r| \|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y\|$$

$$\Rightarrow \frac{t}{t + \alpha_2 |r| \|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y\|} \geq \frac{t}{t + \alpha_1 M \|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y\|}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{t + \alpha_2 |r| \|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y\|} \geq \frac{\frac{t}{M}}{\frac{t}{M} + \alpha_1 \|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y\|}$$

$$\Rightarrow N\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, Ty, t\right) \geq N_1\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y, \frac{t}{M}\right)$$

Eğer $t \leq 0$ ise bu durumda $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y \in X$ için yukarıdaki ilişki vardır.

Böylece T kuvvetli fuzzy sınırlı lineer operatördür [9].

4.9 Tanım

$\left(X, N_1\right)$ ve $\left(Y, N_2\right)$ iki f-n-NLU ve $T : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer herhangi $\alpha \in (0,1)$ için $\exists M_\alpha > 0$ var öyle ki $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y \in X$, $y_1, y_2, ..., y_{n-1} \in Y$ ve $\forall t \in R$ için

$N_1\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y, \dfrac{t}{M_\alpha}\right) \geq \alpha \Rightarrow N_2\left(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, Ty, t\right) \geq \alpha$ ise T ye X de zayıf fuzzy sınırlı denir [9].

4.10 Teorem

(X, N_1) ve (Y, N_2) iki f-n-NLU ve $T: X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer T kuvvetli fuzzy sınırlı ise bu durumda T zayıf fuzzy sınırlıdır fakat tersi doğru değildir [9].

İspat

T nin kuvvetli fuzzy sınırlı olduğunu kabul edelim. O halde bir $M > 0$ var öyle ki $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y \in X$, $y_1, y_2, ..., y_{n-1} \in Y$ ve $\forall t \in R$ için

$$N_2\left(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, Ty, t\right) \geq N_1\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y, \frac{t}{M}\right) \text{ dir.}$$

Böylece her $\alpha \in (0,1)$ için bir $M_\alpha (= M) > 0$ var öyle ki $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y \in X$, $y_1, y_2, ..., y_{n-1} \in Y$ ve $\forall t \in R$ için

$$N_1\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y, \frac{t}{M_\alpha}\right) \geq \alpha \Rightarrow N_2\left(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, Ty, t\right) \geq \alpha$$ dır. Buda T nin zayıf fuzzy sınırlı olması demektir.

Örnek

$(X, \|\cdot, \ldots, \cdot\|)$ bir n-normlu lineer uzay olsun. $N_1, N_2 : X \times \cdots \times X \times R \to [0,1]$ fonksiyonlarını şu şekilde tanımlayalım. $\forall x_1, x_2, ..., x_n \in X$ için

$$N_1\left(x_1, x_2, ..., x_n, t\right) = \begin{cases} \dfrac{t^2 - \|x_1, x_2, ..., x_n\|^2}{t^2 + \|x_1, x_2, ..., x_n\|^2} & ; t > \|x_1, x_2, ..., x_n\| \\ 0 & ; t \leq \|x_1, x_2, ..., x_n\| \end{cases}$$

ve

$$N_2\left(x_1,x_2,...,x_n,t\right)=\begin{cases}\dfrac{t}{t+\|x_1,x_2,...,x_n\|} & ;t>0\\ 0 & ;t\le 0\end{cases}$$

N_1, N_2 nin X de bir fuzzy n-norm olduğu gösterilebilir.

$T:X\to X$ lineer operatörünü $Ty=y$ olarak tanımlayalım. Eğer $\forall\alpha\in(0,1)$ için $M_\alpha=\dfrac{1}{1-\alpha}$ seçersek $N_1\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},y\dfrac{t}{M_\alpha}\right)\ge\alpha\Rightarrow N_2\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},Ty,t\right)\ge\alpha$ elde ederiz.

Böylece T zayıf fuzzy sınırlıdır. Fakat T nin kuvvetli fuzzy sınırlı olmadığı ispat edilebilir [9].

4.11 Teorem

(X,N_1) ve (Y,N_2) iki f-n-NLU ve $T:X\to Y$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler vardır.

(i) Eğer T bir $z\in X$ noktasında kuvvetli fuzzy sürekli ise T, X üzerinde her yerde kuvvetli fuzzy süreklidir.
(ii) T kuvvetli fuzzy süreklidir $\Leftrightarrow$ T kuvvetli fuzzy sınırlıdır [9].

4.12 Not

Eğer T kuvvetli fuzzy sınırlı ise bu durumda T, X de dizisel fuzzy süreklidir [9].

4.13 Teorem

(X,N_1) ve (Y,N_2) iki f-n-NLU ve $T:X\to Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer T bir noktada dizisel fuzzy sürekli ise bu durumda T, X de dizisel fuzzy süreklidir [9].

İspat

Kabul edelim ki T, $y_0 \in X$ de dizisel sürekli olsun. $y \in X$ bir keyfi nokta ve $\{x_k\}$, X de bir dizi öyle ki $x_k \to y$ olsun. Bu durumda $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y \in X$ ve $\forall t > 0$ için,

$\lim\limits_{k\to\infty} N_1\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - y, t\right) = 1$ dir. Yani $\forall t > 0$ için

$$\lim_{k\to\infty} N_1\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, \left(x_k - y + y_0\right) - y_0, t\right) = 1 \text{ dir.}$$

T, $y_0 \in X$ de sürekli olduğu için biliyoruz ki $y_1, y_2, ..., y_{n-1} \in Y$ ve $\forall t > 0$ için

$$\lim_{k\to\infty} N_2\left(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, T\left(x_k - y + y_0\right) - Ty_0, t\right) = 1 \text{ dir.}$$

$\Rightarrow \forall t > 0$ için $\lim_{k\to\infty} N_2\left(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, Tx_k - Ty + Ty_0 - Ty_0, t\right) = 1$ dir.

$\Rightarrow \forall t > 0$ için $N_2\left(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, Tx_k - Ty, t\right) = 1$

Böylece $\forall t > 0$ için $\lim_{k\to\infty} N_1\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - y, t\right) = 1$ dir. Buda $\forall t > 0$ için $\lim_{k\to\infty} N_2\left(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, Tx_k - Ty, t\right) = 1$ demektir. Buradan görülüyor ki T, X de dizisel fuzzy süreklidir.

4.14 Teorem

$\left(X, N_1\right)$ ve $\left(Y, N_2\right)$ iki f-n-NLU ve $T: X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda;

(i) Eğer T bir $y_0 \in X$ noktasında zayıf fuzzy sürekli ise T, X üzerinde her yerde zayıf fuzzy süreklidir.

(ii) T zayıf fuzzy süreklidir $\Leftrightarrow$ T zayıf fuzzy sınırlıdır [9].

KAYNAKLAR

1. Cheng, S.C., Mordeson, J.N., "Fuzzy linear operator and fuzzy normed linear spaces", ***Bull. Calcutta Math. Soc.,*** 86 : 429–436 (1994)

2. Bag, T., Samanta, S.K., "Finite Dimensional Fuzzy Normed Linear Spaces", ***J. Fuzzy Math.,*** 11 (3) : 687–705 (2003)

3. Gähler, S., "Lineare 2-normierte Räume", ***Math.Nachr.,*** 28 **:** 1–43 (1964)

4. Gunawan, H., Mashadi, M., "On n-normed spaces", ***Int. J. Math. Math. Sci.,*** 27 (10) : 631–639 (2001)

5. Narayanan, Al., Vijayabalaji, S., "Fuzzy n-normed linear space", ***Int. J. Math. Math. Sci.,*** 24: 3963–3977 (2005)

6. Efe, H., Yıldız, C., "Fuzzy n- Normlu Lineer Uzaylar Üzerine Bazı Sonuçlar", ***Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Dergisi,*** 9 : 127-135 (2007)

7. Vijayabalaji, S., Thillaigovindan, N., "Complete Fuzzy n-normed linear space", ***Journal of Fundamental Sciences,*** 3 : 119-126 (2007)

8. Bag, T., Samanta, S.K., "Fuzzy Bounded Linear Operators", ***Fuzzy Sets and Systems,*** 151 : 513–547 (2005)

9. Efe, H., "Continuous Mappings And Bounded Linear Operators In Fuzzy n-Normed Linear Spaces", ***Ars Combinatoria***, accepted (2008)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: TÜRKMEN, Muhammed Recai
Uyruğu	: Türkiye Cumhuriyeti
Doğum Tarihi ve Yeri	: 30.08.1981, Ankara
Medeni Hali	: Evli
Telefon	: 0533 511 08 23
e-mail	: mr.turkmen@alparslan.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Y. Lisans	Gazi Ünv. / Matematik Eğitimi (tezsiz)	2004
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik	2002
Lise	Prof. Dr. Ş. Raşit Hatipoğlu Lisesi	1998

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2002-2010	Ankara Açı Dershaneleri	Öğretmen
2010- …	Muş Alparslan Üniversitesi	Arş. Gör.

Yabancı Dil

İngilizce