

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ROTOR SİSTEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mak. Müh. Birgül AŞCIOĞLU

TEMMUZ 2002
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ROTOR SİSTEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE
İNCELENMESİ

Mak. Müh. Birgül AŞCIOĞLU

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
" Makine Yüksek Mühendisi "
Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 23.07.2002

Tezin Savunma Tarihi :

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Muzaffer DOĞAN

Jüri Üyesi :

Jüri Üyesi :

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Asım KADIOĞLU

Trabzon 2002

ÖNSÖZ

Yapılan bu çalışmada rotor sistemlerinin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak dinamik analizi yapılmıştır.

Çalışma konumu seçerek, benden yardımlarını esirgemeyen danışman hocam sayın Doç.Dr. Muzaffer DOĞAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca lisans yıllarımda sonlu elemanlar dünyasıyla tanışmamı sağlayan sayın hocam Prof.Dr. Sami KARADENİZ'e, problemlerin çözüm aşamasında internet aracılığıyla destek veren sayın Prof.Dr. Alain BERLIOZ'a, Arş.Gör. Vahap VAHABOĞLU'na, Arş.Gör. Hasan GEDİKLİ'ye ve Arş.Gör. Süleyman ÖZGEN'e katkılarından dolayı çok teşekkür ederim.

Ve sevgili ailem ve güzel dostlarım hep yanımdaydınız. Asıl alkışım sizin için.

Birgül AŞCIOĞLU
Trabzon, Temmuz 2002

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	VI
SUMMARY.....	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VIII
TABLolar DİZİNİ.....	XI
SEMBOLLER DİZİNİ.....	XIII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Literatür Taraması.....	2
1.3. Rotorların Modellenmesi.....	6
1.3.1. Model Çeşitleri.....	7
1.3.2. Hesaplama Teknikleri.....	10
1.4. Rotor Denklemleri ve Denklemler Çözümleri.....	14
1.4.1. Rotor Elemanlarının Karakteristik Büyüklükleri.....	14
1.4.1.1. Disk.....	14
1.4.1.2. Mil.....	16
1.4.1.2.1. Kinetik Enerji.....	16
1.4.1.2.2. Şekil Değiştirme Enerjisi.....	17
1.4.1.3. Yataklar.....	20
1.4.1.4. Dengelenmemiş Kütle.....	22
1.4.2. Rotor Elemanlarının Sonlu Elemanları.....	24
1.4.2.1. Disk.....	24
1.4.2.2. Mil.....	24
1.4.2.3. Yataklar.....	29
1.4.2.4. Kütle Dengesizliği.....	30
1.4.3. Tekli Rotorlar için Hareket Denklemleri.....	31
1.4.4. Eş Eksenli Çoklu Rotorlar İçin Hareket Denklemleri.....	32

1.4.5.	Hareket Denklemlerinin Çözümü.....	35
1.4.5.1.	Pseudo-Modal Yöntemi.....	35
1.4.5.1.1.	Doğal Frekanslar, Campbell Diyagramı, Kararsızlık Bölgesi.....	36
1.4.5.1.2.	Sistemin Uyarım Kuvvetlerine Cevabı.....	38
1.4.5.1.2.1.	Sabit Kuvvet Olması Hali.....	38
1.4.5.1.2.2.	Kütle Dengesizliği Olması Hali.....	38
1.4.5.1.2.3.	Asenkronize Kuvvet Olması Hali.....	39
1.4.5.1.2.4.	Harmonik Kuvvet Olması Hali.....	40
1.4.5.2.	Direkt Yöntem.....	41
1.4.5.2.1.	Doğal Frekanslar, Campbell Diyagramı, Kararsızlık Bölgesi.....	41
1.4.5.2.2.	Uyarım Kuvvetlerine Cevabı.....	43
2.	YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	44
2.1.	Giriş.....	44
2.2.	Kullanılan Yazılımlar.....	44
2.2.1.	RotorInsa Yazılımı.....	44
2.2.1.1.	Ön İşlem Bölümü.....	45
2.2.1.1.1.	Giriş.....	45
2.2.1.1.2.	Yazılımın Tanıtımı.....	47
2.2.1.2.	Son İşlem Bölümü.....	49
2.2.2.	ANSYS Yazılımı.....	50
2.3.	Problemler.....	52
2.3.1.	Problem 1: İki Disk ve Mil Sistemi.....	53
2.3.1.1.	RotorInsa Yazılımı ile Çözüm.....	54
2.3.1.2.	ANSYS Yazılımı ile Çözüm.....	58
2.3.2.	Problem 2: Kademeli Mil ve Disk sistemi.....	59
2.3.2.1.	RotorInsa Yazılımı ile Çözüm.....	59
2.3.2.2.	ANSYS Yazılımı ile Çözüm.....	63
2.3.3.	Problem 3: Üç Disk ve Mil Sistemi.....	63
2.3.3.1.	RotorInsa Yazılımı ile Çözüm.....	64
2.3.3.2.	ANSYS Yazılımı ile Çözüm.....	68
2.3.4.	Problem 4: Endüstriyel Rotor.....	68
2.3.4.1.	RotorInsa Yazılımı ile Çözüm.....	68
2.3.4.2.	ANSYS Yazılımı ile Çözüm.....	74

3.	BULGULAR.....	75
3.1.	Giriş.....	75
3.2.	Problemler.....	75
3.2.1.	İki Disk ve Eş Dağılımlı Milden Oluşan Sistemin Modal Analizi.....	75
3.2.1.1.	RotorInsa Yazılımı ile Elde Edilen Bulgular.....	75
3.2.1.2.	ANSYS Yazılımı ile Elde Edilen Bulgular.....	77
3.2.2.	Tek Disk ve Kademeli Milden Oluşan Sistemin Modal Analizi.....	78
3.2.2.1.	RotorInsa Yazılımı ile Elde Edilen Bulgular.....	78
3.2.2.2.	ANSYS Yazılımı ile Elde Edilen Bulgular.....	80
3.2.3.	Üç Disk ve Bir Milden Oluşan Sistemin Modal Analizi.....	81
3.2.3.1.	RotorInsa Yazılımı ile Elde Edilen Bulgular.....	81
3.2.3.2.	ANSYS Yazılımı ile Elde Edilen Bulgular.....	83
3.2.4.	Endüstriyel Rotor Sisteminin Modal Analizi.....	84
3.2.4.1.	RotorInsa Yazılımı ile Elde Edilen Bulgular.....	84
3.2.4.2.	ANSYS Yazılımı ile Elde Edilen Bulgular.....	89
3.3.	Modal Değerlerin Karşılaştırılması.....	90
4.	İRDELEME.....	92
5.	SONUÇLAR.....	93
6.	KAYNAKLAR.....	94
7.	ÖZGEÇMİŞ.....	96

ÖZET

Rotorların çoğu genellikle kompleks geometrilere sahiptir. Bu da analitik modelleme yaparak rotorun dinamik davranışının belirlenmesini zorlaştırır. Bu amaçla sonlu elemanlar yöntemi gibi güçlü yaklaşım yöntemleri kullanılarak sistemin analizi yapılır. Sonlu elemanlar yöntemi, denklem sistemlerinin çözümü aşamasında denklem indirgemesine olanak tanıyarak hem zaman tasarrufu hem de ekonomiklik sağlamaktadır.

Bu çalışmada, sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak bazı rotor sistemlerinin dinamik analizi yapılmıştır. İlk bölümde rotor sistemleriyle ilgili literatürde bulunan çalışmalar, rotor modeli çeşitleri ve hesaplama teknikleri özetlenmiştir. Ayrıca ilk bölümde, rotor sistemi elemanları incelenerek karakteristik özellikleri belirtilmiş ve rotor sistemleriyle ilgili denklem takımları yazılarak ilgili denklem çözümleri açıklanmıştır. İkinci bölümde, kullanılan iki farklı yazılıma ait işlem basamakları verilerek ele alınan dört farklı tipteki rotor sisteminin tanıtımı yapılmıştır. Üçüncü bölümde, ilgili rotor sistemlerine ait problemlerin çözümü yapılarak elde edilen doğal frekans değerleri ve mod şekilleri verilmiştir. Her iki yazılımla elde edilen analiz sonuçlarının birbirine çok yakın olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler : Rotor Sistemleri, Rotordinamiği, Sonlu Elemanlar Yöntemi, Modal Analiz

SUMMARY

Finite Element Analysis of Rotor Systems

Because of having complex configurations, it is hard to predict the dynamic behaviours of the rotors analytically. Thus, using powerful approach methods such as finite element is developed for analysing the system. Finite Element Method enables both time saving and economy for solving the equations by enabling reduction in the system equations.

In this study, the dynamic behaviours of some rotor systems were solved by the finite element method. In the first chapter, some literature studies in the field of rotordynamics, the kind of rotor types and computational techniques were summarized. In addition, the elements of rotor systems were discussed, their set of equations were written and the solution of the system equations were explained. In the second chapter, the application procedure were given for two different softwares used and four different types of rotor problems in consideration were explained. In the third chapter, the solution of the problems were done, and the natural frequencies and the mode shapes were given. It was seen that the results obtained from both softwares were very close.

Key Words : Rotor Systems, Rotordynamics, Finite Element Method,
Modal Analysis

ÖNSÖZ

Yapılan bu çalışmada rotor sistemlerinin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak dinamik analizi yapılmıştır.

Çalışma konumu seçerek, benden yardımlarını esirgemeyen danışman hocam sayın Doç.Dr. Muzaffer DOĞAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca lisans yıllarımda sonlu elemanlar dünyasıyla tanışmamı sağlayan sayın hocam Prof.Dr. Sami KARADENİZ'e, problemlerin çözüm aşamasında internet aracılığıyla destek veren sayın Prof.Dr. Alain BERLIOZ'a, Arş.Gör. Vahap VAHABOĞLU'na, Arş.Gör. Hasan GEDİKLİ'ye ve Arş.Gör. Süleyman ÖZGEN'e katkılarından dolayı çok teşekkür ederim.

Ve sevgili ailem ve güzel dostlarım hep yanımdaydınız. Asıl alkışım sizin için.

Trabzon, Temmuz 2002

Birgül AŞCIOĞLU

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Dönen elastik bir mil üzerinde bulunan diskin referans sistemleri...	15
Şekil 2. Geometrik merkezin(C) koordinatları ve mil üzerinde herhangi bir nokta(B).	17
Şekil 3. Yatağın yay ve sönüm elemanları cinsinden gösterimi	21
Şekil 4. Kütle dengesizliği.....	22
Şekil 5. Mil sonlu elemanı.....	25
Şekil 6. İkili rotor modeli.....	33
Şekil 7. RotorInsa programına ait geometri örneği.....	45
Şekil 8. Operasyon diyagramı.....	46
Şekil 9. Rotorun geometrik tanıtımı.....	47
Şekil 10. Yazılımın ana sayfası.....	47
Şekil 11. RotorInsa programının son işlem kısmına ait ana menünün gösterimi.	49
Şekil 12. MASS21 elemanının yapısı.....	50
Şekil 13. BEAM3 elemanına ait iki boyutlu elastik kirişin şematik gösterimi.	51
Şekil 14. COMBIN14 elemanına ait yay- sönüm elemanının şematik gösterimi.....	51
Şekil 15. PIPE 16 eleman.....	52
Şekil 16. İki disk ve eş çaplı mil sistemi.....	53
Şekil 17. İki disk ve eş çaplı mil sistemine ait sınır şartları.....	56
Şekil 18. İki disk ve mil sisteminin sonlu eleman gösterimi.....	57
Şekil 19. Kademeli mil ve disk sisteminin şematik gösterimi.....	59
Şekil 20. Kademeli disk ve mil sisteminin sonlu eleman gösterimi.....	62
Şekil 21. Üç disk ve eş çaplı mil sistemi.....	64

Şekil 22.	Üç disk ve mil sisteminin sonlu eleman gösterimi.....	66
Şekil 23.	Endüstriyel rotor sisteminin şematik gösterimi.....	69
Şekil 24.	Endüstriyel rotorun sonlu eleman gösterimi.....	72
Şekil 25.	İki disk ve mil sisteminin RotorInsa programı yardımıyla oluşturulan şematik gösterimi.....	76
Şekil 26.	İki disk ve milden oluşan sistemin birinci mod değeri.....	76
Şekil 27.	İki disk ve milden oluşan sistemin ikinci mod şeklinin gösterimi.....	77
Şekil 28.	İki disk ve eş dağılımlı milden oluşan sisteminin ANSYS yazılımında kullanılan eleman şekli.....	78
Şekil 29.	İki disk ve eş dağılımlı milden oluşan sistemin ANSYS yazılımı kullanılarak yapılan modal analiz sonucu elde edilen birinci mod şekli.	78
Şekil 30.	İki disk ve eş dağılımlı milden oluşan sistemin ANSYS yazılımı kullanılarak yapılan modal analiz sonucu elde edilen ikinci mod şekli.	78
Şekil 31.	Bir disk ve kademeli milden oluşan sistemin sonlu elemanlar gösterimi.	79
Şekil 32.	Bir disk ve kademeli milden oluşan sistemin birinci mod şeklinin gösterimi.	79
Şekil 33.	Bir disk ve kademeli milden oluşan sistemin ikinci mod şeklinin gösterimi.	80
Şekil 34.	Tek disk ve kademeli mil sisteminin ANSYS yazılımında kullanılan eleman şekli.	80
Şekil 35.	Tek disk ve kademeli mil sisteminin ANSYS yazılımı kullanılarak yapılan modal analiz sonucu elde edilen birinci mod şekli.....	81
Şekil 36.	Tek disk ve kademeli mil sisteminin ANSYS yazılımı kullanılarak yapılan modal analiz sonucu elde edilen ikinci mod şekli.....	81
Şekil 37.	Üç disk ve bir milden oluşan sistemin sonlu elemanlar gösterimi... .	82
Şekil 38.	Üç disk ve bir milden oluşan sistemin birinci mod şeklinin gösterimi.	82
Şekil 39.	Üç disk ve bir milden oluşan sistemin ikinci mod şeklinin gösterimi.	83

Şekil 40.	Üç disk ve eş dağılımlı milden oluşan sisteminin ANSYS yazılımında kullanılan eleman şekli.....	83
Şekil 41.	Üç disk ve eş dağılımlı milden oluşan sistemin ANSYS yazılımı kullanılarak yapılan modal analiz sonucu elde edilen birinci mod şekli.....	84
Şekil 42.	Üç disk ve eş dağılımlı milden oluşan sistemin ANSYS yazılımı kullanılarak yapılan modal analiz sonucu elde edilen ikinci mod şekli.....	84
Şekil 43.	Endüstriyel rotorun sonlu elemanlar gösterimi	84
Şekil 44.	Endüstriyel rotorun birinci modunun gösterimi.....	85
Şekil 45.	Endüstriyel rotorun ikinci modunun gösterimi.....	86
Şekil 46.	Endüstriyel rotora ait Campbell diyagramı.	87
Şekil 47.	Endüstriyel rotorun birinci moda göre 5000 (rpm) çalışma hızındaki durumu.....	87
Şekil 48.	Endüstriyel rotorun ikinci moda göre 5000 (rpm) çalışma hızındaki durumu.....	88
Şekil 49.	Endüstriyel rotorun birinci moda göre 30000 (rpm) çalışma hızındaki durumu.....	88
Şekil 50.	Endüstriyel rotorun birinci moda göre 30000 (rpm) çalışma hızındaki durumu.....	89
Şekil 51.	Endüstriyel rotor sisteminin ANSYS yazılımında kullanılan eleman şekli.....	90
Şekil 52.	Endüstriyel rotor sisteminin ANSYS yazılımı kullanılarak yapılan modal analizi sonucu elde edilen birinci mod değeri.....	90
Şekil 53.	Endüstriyel rotor sisteminin ANSYS yazılımı kullanılarak yapılan modal analizi sonucu elde edilen ikinci mod değeri.....	90

TABLO DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. Problemlere ait malzeme özellikleri.....	53
Tablo 2. RotorInsa yazılımında kullanılan birinci probleme ait bölüm uzunlukları.....	54
Tablo 3. İki disk ve milden oluşan sisteme ait mil özellikleri.....	55
Tablo 4. İki disk ve milden oluşan sistemde bulunan disklerin özellikleri....	55
Tablo 5. İki disk ve mil sisteminde oluşturulan bölümlere eleman atanması..	56
Tablo 6. Birinci problemin RotorInsa yazılımından elde edilen veri dosyası.	57
Tablo 7. RotorInsa yazılımında kullanılan ikinci probleme ait bölüm uzunlukları.....	60
Tablo 8. Adımlı mil ve disk sistemine ait mil özellikleri.....	60
Tablo 9. Adımlı mil ve disk sisteminde bulunan diskin özellikleri.....	61
Tablo 10. Adımlı mil ve disk sisteminde oluşturulan bölümlere eleman atanması.....	61
Tablo 11. İkinci problemin RotorInsa yazılımından elde edilen veri dosyası...	62
Tablo 12. RotorInsa yazılımında kullanılan üçüncü probleme ait bölüm uzunlukları.....	64
Tablo 13. Üç disk ve eş çaplı mil sistemine ait mil özellikleri.....	64
Tablo 14. Üç disk ve eş çaplı mil sisteminde bulunan diskin özellikleri.....	64
Tablo 15. Üç disk ve eş çaplı mil sisteminde oluşturulan bölümlere eleman atanması.....	66
Tablo 16. Üçüncü problemin RotorInsa yazılımından elde edilen veri dosyası.....	67
Tablo 17. RotorInsa yazılımında kullanılan dördüncü probleme ait bölüm uzunlukları.....	70
Tablo 18. Endüstriyel rotor sistemine ait mil özellikleri.....	70
Tablo 19. Endüstriyel rotor sisteminde bulunan diskin özellikleri.....	71

XIII

Tablo 20.	Endüstriyel rotor sisteminde oluşturulan bölümlere eleman atanması.....	71
Tablo 21.	Dördüncü problemin RotorInsa yazılımından elde edilen veri dosyası.....	73
Tablo 22.	Birinci problem için elde edilen doğal frekans değerleri.....	75
Tablo 23.	İki disk ve mil sisteminin ANSYS yazılımı kullanılarak bulunan modal analiz sonuçları.....	77
Tablo 24.	İkinci problem için elde edilen doğal frekans değerleri.....	79
Tablo25.	Tek disk ve kademeli mil sisteminin ANSYS yazılımı kullanılarak bulunan modal analiz sonuçları.....	80
Tablo 26.	Üçüncü problem için elde edilen RotorInsa ile elde edilen doğal frekans değerleri.....	81
Tablo 27.	Üç disk ve bir milden oluşan sistemin ANSYS çözümünden elde edilen doğal frekans değerleri.....	83
Tablo 28.	Endüstriyel rotor sistemi için RotorInsa yazılımından elde edilen doğal frekans değerleri tablosu.....	85
Tablo 29.	Endüstriyel rotorun 25000 (rpm) hızındaki 2 farklı mod değeri için frekans değerleri	85
Tablo 30.	Dördüncü problem için ANSYS yazılımı ile bulunan frekans değerleri.....	89
Tablo 31.	Ele alınan problemlerin birinci mod frekanslarının karşılaştırılması.....	91

SEMBOL DİZİNİ

q_i	Genelleştirilmiş bağımsız koordinatlar
$\dot{q}_i$	Genelleştirilmiş bağımsız koordinatların zamana bağlı türevi
$\dot{\delta}$	δ yerdeğişiminin zamana bağlı türevi
$\ddot{\delta}$	δ yerdeğişiminin zamana bağlı ikinci mertebeden türevi
ω_{R/R_0}	Ani açısal hız
ω_{R/R_0}^R	Sistemin açısal hız vektörü
$\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$	ψ, θ, ϕ açılarının zamana bağlı türevleri
Δ	Özvektör
ε	B noktasının birim şekil değişimi
δ	Rotor üzerinde verilen bir düğüm noktasının yerdeğişimi
ω	Açısal hız
ρ	Yoğunluk
σ	Gerilme
τ	Hacim
ψ, θ, ϕ	Disk'in x, y, z eksenleri boyunca yaptığı açılar
$\Omega = \dot{\phi}$	Açısal hız
$\lambda = 1/r$	Özdeğerin tersi
α_i	Modal sönüm faktörü
ε_l	Lineer şekil değişimi
ε_{nl}	Lineer olmayan şekil değişimi
ε^T	Şekil değişiminin transpozisyonu
δW	Dış kuvvetlerce yapılan virtüel iş

$\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$	u, v ve w yerdeğişimlerinin zamana bağlı türevleri
$\ddot{u}, \ddot{w}$	u ve w yerdeğişimlerinin zamana bağlı ikinci mertebeden türevleri
$\ddot{\theta}, \ddot{\psi}$	θ ve ψ açılarının zamana bağlı ikinci mertebeden türevleri
a	Kayma miktarı
B	Disk üzerinde rastgele bir nokta
C	M_5 matrisinden dolayı ortaya çıkan kütle matrisi
$c_{xx}, c_{xz}, c_{zz}, c_{zx}$	Yatağın sönüm katsayıları
d	Dengelenmemiş kütlelerin milin geometrik merkezinden uzaklığı
D_1	Disk iç çapı
D_2	Disk dış çapı
E	Elastisite modülü
f	Kuvvet
$F(t)$	Kuvvet vektörü
F_0	Sabit eksenel kuvvet
F_u, F_w	u ve w eksenlerine göre eksenel kuvvetler
h	Disk kalınlığı
I	Atalet merkezi
I_0	Atalet tansörü
I_{Dx}, I_{Dy}, I_{Dz}	Disk x, y, z yönlerindeki atalet momentleri
I_x, I_y	x ve y yönlerindeki kesit atalet momentleri
K	Katılık matrisi
K_1, K_2	Klasik katılık matrisler
K_3, K_4	Eksenel kuvvetlere bağlı olarak ortaya çıkan katılık matrisleri
K_c	K_1 ve K_2 matrislerinden dolayı ortaya çıkan matris

K_F	K_3 ve K_4 matrislerinden dolayı ortaya çıkan matris
$k_{xx}, k_{xz}, k_{zz}, k_{zx}$	Yatağın yay katsayıları
L	Milin uzunluğu
M	M_1 ve M_2 matrislerinden dolayı ortaya çıkan kütle matrisi
M_1, M_2	Klasik kütle matrisleri
M_3, M_4	Atalet momentinden dolayı ortaya çıkan kütle matrisleri
M_5	Jiroskobik etkiden dolayı ortaya çıkan kütle matrisi
M_D	Disk in kütlesi
M_s	M_3 ve M_4 matrisinden dolayı ortaya çıkan kütle matrisi
m_u	Dengelenmemiş kütle
N	Serbestlik derecesi
$N_1(y), N_2(y)$	Eğilme halindeki kirişin tipik yer değiştirme fonksiyonları
p	Pseudo-modal yöntemi için yerdeğişimi
q_i	Genelleştirilmiş bağımsız koordinatlar
r	Özdeğer
R	Diske bağlı koordinat merkezi
R_0	Uzay koordinat merkezi
R_1, R_2	Yataklar üzerinde birinci ve ikinci rotora ait reaksiyon kuvvetleri
S	Milin kesit alanı
S_r	Kesite bağlı indirgenmiş alan
t	Zaman
T	Transpozisyon sembolü
T_D	Disk in kinetik enerjisi
T_s	Milin kinetik enerjisi
T_u	Dengelenmemiş kütle nin toplam kinetik enerjisi

U	Şekil değıştirme enerjisi
u^*, w^*	Geometrik merkezin x ve z eksenlerine göre yerdeğışimi
u, v, w	Rotorun yerdeğıştirme bileşenleri.
U_1, U_2	Şekil değıştirme enerjisi bileşenleri
U_s	Toplam şekil değıştirme enerjisi
w_x, w_y, w_z	x, y, z eksenlerine göre diskin yer değıştirmesi
x, y, z	Rotorun durum değışkenleri
X, Y, Z	Uzay koordinatları



1. GENEL BİLGİLER

1.1 Giriş

Dönen makineler güç iletimi alanında günümüz modern dünyasında yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Uygulamaları; güç santrallerinde, turbo makinelerde, petrokimya alanında, uçaklarda, deniz araçlarında, otomobillerde, takım tezgâhlarında ve diğer bir çok alanda karşımıza çıkmaktadır. Güçlü bir tasarım ve güvenilir çalışma şartları için, bir çok araştırmacı ve mühendis rotordinamiği alanında çalışmalar yapmışlardır.

Rotor Dinamiği, makinelerin ve bileşenlerinin dönme hareketi gösteren parçalarından kaynaklanan ivmelenmeler sonucu ortaya çıkan dinamik davranışları inceleyen bir bilim dalıdır. Önemi günden güne hızlı bir şekilde artmaktadır. Makine parçalarının birbirleriyle olan etkileşimlerinin incelenmesinin asıl nedeni, düzgün olmayan çalışma ortamlarından dolayı ortaya çıkabilecek hataları ve titreşimleri incelemek ve böylece makine parçalarının zarar görmelerini engellemektir. Lineer rotor dinamiği alanında yapılan bir çok çalışma doğal, dengelenmemiş ve geçici titreşim durumlarıyla ilgilidir.

Basit rotor sistemleri kesin sonuç verebilecek olan analitik yöntemlerle analiz edilebilirler. Fakat endüstride kullanılan kompleks rotor sistemlerinde analitik olarak analiz yapmak oldukça zordur. Bu nedenle sistemlerin davranışlarını incelemek için bazı yaklaşık yöntemler kullanılır.

Sonlu elemanlar yöntemi gibi güçlü yaklaşım yöntemleri, karışık yapıların analizi için uygun yöntemlerdir. Birçok durumda, iyi bir rotor modeli analizi yapmada bilinmeyen yer değişimleri için oldukça geniş ve lineerleştirilmiş diferansiyel denklem takımlarına ihtiyaç vardır. Fakat elde edilen bu denklem takımlarının hesaplanması oldukça zaman alıcı ve dolayısıyla da ekonomik değildir. Bu nedenle indirgemeye izin veren denklem takımlarını elde etmemizi sağlayan yöntemlere ihtiyaç vardır. Bunu sağlayan klâsik yöntemlerden bir tanesi bu yolla sistemin hesaplanmasını sağlayan modal analiz yöntemidir. Burada istenilen durum sisteme ait diferansiyel denklemlerden oluşan grubu indirgemektir. Bu yöntemin başarılı bir uygulaması için sistemle ilgili özdeğer probleminin çözümü gerekir.

Rotordinamiğinde, kontrol denklemlerinin bağımsız bir şekilde eklenmemiş olmalarından ötürü, klâsik modal analizi bu denklemleri çözmede yetersiz kalır. Sistem matrisleri, başlangıç koordinat şartlarında yapılandırılırsalar, jiroskobik etkiler, iç sönüm ve mil yataklarının simetrik olmayan terimlerinden dolayı yan-simetrik parçalar tarafından karakterize edilirler. Bir başka tarafta, sistem matrisleri sabit dönen koordinatlarda gösterilirlerse, koriolis terimlerine ve dış sönüme bağlı olarak tıpkı jiroskobik etkiler ve yatak özelliklerine bağlı olan periyodik parametrelerden dolayı yan simetrik parçalar olarak gösterilirler. Bu durum modal analizi oldukça zorlaştırır. Bir başka zorluk ise dönme hızına bağlı olarak ortaya çıkar. İndirgeme yöntemi Guyan indirgemesi ve parçalı mod karması gibi denklem takımlarının indirgenmelerinde kullanılabilirler.

1.2. Literatür Taraması

Rotordinamiği sistemlerinin tipik analizleri serbest titreşim doğal frekanslarının bulunmasını, çevrim modlarının ve bu modların kararlılık karakteristiklerinin belirlenmesini içerir. Rotor sistemlerinin kritik hızları dönme hızlarında olduğu gibi belirlenir. Bu durum rezonans durumunun oluşumunu engellemek için sistemin doğal frekanslarının belirlenmesini sağlar.

Rotordinamiği alanında ilk çalışma Rankine [1] tarafından 1869 yılında yapılmıştır. Rankine, dönen koordinatlarda denklemlerin çıkarılması ile ilgili çalışmalar yaparken unuttuğu koriolis ivmesi sonucu ortaya çıkan büyük bir hatanın mühendisler tarafından yaklaşık yarım yüzyıl boyunca yapılmasına neden olmuştur. Daha sonra Jeffcott [7] esnek, yüksek hızda çalışan ve kütle dengesizliğine sahip olan bir mil ile rotor modellemesi yapmıştır. İngiliz araştırmacı tarafından yapılan bu ilk Jeffcott modellemesinin ardından model, dengelenmemiş diskler taşıyan ve düzgün dağılımlı kütsüz esnek mil ve uç noktalarında sürtünmesiz yataklarla desteklenmiş olarak modellenmiştir. Basit bir dönme halli makine için, bu basitleştirilmiş modelleme kabul edilebilirdir. Jeffcott modeli rotorun kritik hızlarını ve kütle dengesizliğinden kaynaklanan eş zamanlı hareket içerir. Bunlar günümüz rotordinamiğinde kompleks problemlerin analiz edilmesinde geçerliliği olan önemli durumlardır.

Esnek dönme elemanların rijit kütle karakterlerini göstermek için, Stodola (1927) ve Green (1948) [1] rijit-kütle modeli kullanarak dönme eylemsizliğini ve jiroskobik çifti dahil etmişlerdir. Rijit disk milin orta noktasında bulunmuyorsa, Stodola-Green modeli yaklaşık bir çözüm sağlar. Stodola-Green modeli çoklu parçaya sahip modellerin gelişimini sağlamıştır.

Dönen makinelerle ilgili yapılmış olan en erken çalışmalar ilk kritik hızın altındaki değerlerde yapılan işlemleri kapsamaktadır. İşlemlerde güvenli bir çalışma ortamı sağlamak için en yüksek çalışma hızı doğal frekans değerinin altında olacak şekilde seçilirdi.

Günümüz modern dönen makinelerinde her ne kadar yüksek hızlarda çalışılması gerekiyorsa da ilk kritik hızın altındaki değerlerde ağır yük ve hafif miller ile çalışılır. Bu performans gereksinimleri son yirmi sene içinde rotordinamiği ile ilgili daha çok çalışmalar yapılmasını gerektirmiştir.

Yapılan çalışmalar; dengelenmemiş cevaplarla ilgili, (Gupta,1993; Yu ve Craggs, 1995), dengeleme (Craggs, 1986; Ehrich, 1990), kararlılık (Ehrich, 1991; Muszynska ve Grant, 1991; Taylor, 1993), yatakların hidrodinamiği (Lund, 1987; Rouvas ve Childs, 1993), millerin çatlak analizi (Nelson ve Nataraj, 1986; Papadopoulos ve Dimarogonas, 1992), burulma titreşimleri (Schwibinger ve Nordmann, 1990; Yu, 1991 ve 1994), bağlı titreşimler (Diken ve Tadjbakhsh, 1989; Muszynska,1993), ve makine sağlığını izleme (Bently, 1986; Laws ve Muszynska, 1987) [2] konularını kapsamaktadır.

Sonlu elemanların rotor sistemlerinin gösterimi için kullanımı kompleks problemlerin formüle edilmesini olanaklı kılar. Sabit rotor-yatak sistemleri bir çok değişik matematiksel yöntemlerle analiz edilmiştir. Ruhl'un [1] sonlu elemanlar modeli kullanarak turbo-rotor sisteminin kararlılığını ve dengelenmemiş cevabını incelemiş olması, rotor dinamiği problemleri üstüne bir çok sonlu elemanlar yaklaşımı yapılmasına öncü olmuştur. Oluşturduğu modelde yalnızca elastik burulma enerjisi ve öteleme kinetik enerjisi ihtiva edilmiştir. İlk yapılan çalışmalarda dönme eylemsizliği etkileri, jiroskobik momentler, kayma deformasyonları, eksenel yükleme ve iç sönüm ihmal edilmiştir. Thorkildsen [1] ilk olarak çalışmalarına dönme eylemsizliğini ve jiroskobik momenti eklemiştir.

Polk [1] çalışmalarında Rayleigh kiriş sonlu elemanlar modelini kullanmıştır. Thomas ve Dokumacı [1] basit sonlu elemanlar kullanarak bükülmüş kanat titreşimini incelemişlerdir. Krishna Murty [1] sonlu elemanlar tekniğini kullanarak dönel yapıdaki elemanların analizini yapmıştır. Chivens ve Nelson [1] esnek bir diskin dönme durumlu mil-disk sistemlerinde çapraz eğilmenin doğal frekanslarını ve kritik hızlarını nasıl etkilediklerini incelemişlerdir.

Rotor - yatak sistemlerinin analizinde sonlu elemanlar yönteminin kullanımı ve temel kavramı ve dönel sonlu mil elemanlarının hareket denklemlerinin gelişimi Nelson ve McVaugh [3] tarafından yapılmıştır. Yapılan bu çalışmada dönme eylemsizliği etkileri, jiroskobik momentler ve tutarlı kütle matrisi yaklaşımı kullanılarak eksenel yüklemeler göz önüne alınmıştır. Buna ilaveten eleman ve sistem denklemleri hem sabit ve hem de dönen referans sistemleri alınarak gösterilmiştir. Zorzi ve Nelson [4], Lagrange hareket denklemlerini sabit koordinatlı olarak gösterebilmek için rotor-yatak sistemlerinin modellenmesinde sonlu elemanlar yaklaşımını kullanmışlardır.

Rotor sistemlerinin tasarım ve gelişim süreçlerinde dikkate alınması gereken noktalardan biri de eksenel dönme momentinin etkisidir. Krishna Murty ve Sridhara Murty [1] sonlu elemanlar yöntemi kullanarak rotorların doğal titreşim analizlerine yönelik çalışmalar yapmışlardır. Nelson [1], sonlu dönel mil elemanını Timoshenko kiriş teorisi kullanarak modellemiştir. Nelson yaptığı bu çalışmada dönme eylemsizliği, jiroskobik moment, eksenel yükleme, kayma deformasyonu, iç sönüm ve viskoz sönüm etkilerini bulmayı aynı model üzerinde denemiştir.

Lineer hareket denklemlerinin çözümünde yapılan analizlerin bir çoğunda buna benzer biçimler kullanılmıştır. Ancak bazen lineer olmayan durumlardan dolayı doğru sonuç elde etmek için yeterli bilgi sahibi olunulamamıştır. Böylece ister fiziksel koordinatlarda ister modal koordinatlarda olsun bir çok genel yaklaşım lineer olmayan hareket denklemlerinin konfigürasyonunda kullanılmıştır. Diferansiyel denklem grupları lineer olmadığından, analitik çözüm elde etmek imkansızdır. Bu özel durumlar bilinen kapalı form çözümleriyle birliktedir. Bir çok araştırmacı 25 yılı aşkın süredir sonlu elemanlar yöntemini kullanarak rotor-yatak sistemlerinin dinamiği üzerindeki değişik faktörleri araştırmaktadırlar. Şimdiye

kadar yapılan çalışmalar içinde bütün sınır şartları dahil edilerek yapılan her hangi bir çalışma bulunmamaktadır.

Rotor-yatak sistemlerinin dinamiğinin analizi için kullanılan yaygın yaklaşım yöntemlerinden biride transfer matris yöntemidir. Bu yöntem yüksek dereceden çoklu mile sahip rotor sistemlerinde olduğu gibi zincire benzer tiplerdeki yapıların analizinde kullanılır. Bu yöntem ilk defa Holzer tarafından burulma titreşimleri alanında uygulanmıştır. Daha sonradan araştırmacılar yaptıkları çalışmada kirişlerin ve rotor sistemlerinin son titreşimlerine bu analizi uygulamışlardır. Prohl, direkt yöntemi genişleterek değişken mil kesitlerine çoklu diskleri de dahil ederek kompleks millerin eş zamanlı dönmelerini hesaplamıştır. Prohl yöntemi günümüzde halen kullanılan en iyi transfer matris yöntemlerinden biridir ve kompleks rotor-yatak sistemlerinde yaygın kullanım alanı bulunmaktadır. Çok yakın bir zamanda Rao [2], ilerletilmiş zamanlı transfer matris tekniği kullanarak rotor sistemlerini analiz etmiştir. Yapılan ilave çalışmalar sayesinde de dünya çapındaki motor üreticileri ve rotordinamiği uzmanları bu tip yöntemlerin yaygın bir şekilde kullanılmasını sağlamışlardır.

Yapılan çalışmalar içerisinde kullanılan yaygın yöntemlerden bir tanesi de rotor-yatak sistemlerinin davranışlarının incelenmesini sağlayan deneysel modal analiz yöntemidir. Deneysel modal analizinde, sistemin; kütle, katılık ve sönüm gibi modal özellikleri deneysel olarak elde edilir ve bu da rotorun dinamik karakteristiklerinin elde edilmesini sağlar. Berthier, Ferraris ve Lalanne [5] rotor sistemlerinin davranışlarını rotor modlarını dikkate alacak şekilde sonlu elemanlar yöntemini kullanarak incelemişlerdir. Glasgow ve Nelson [6] kompleks model analizi kullanarak aynı isimli modal parçalı mod yöntemi üzerinde çalışmışlardır.

Yatakların lineer olmayan davranışlarının sonlu elemanlar yöntemi kullanarak hesaba katılması Fawzi M.A ve El-Saeidy [8] tarafından yapılmıştır. Rotorların dinamik davranışını belirlenirken jirokobik etkiler, kayma deformasyonları, sistemin sönüm durumu analize katılmıştır.

Viskoelastik bir şekilde yataklanmış rotor-mil sistemlerin dinamik analizi ise N.H. Shabaneh ve Jean W.Zu [9] tarafından yapılmıştır. Bu modelleme yapılırken Timoshenko kiriş modeli kullanılmıştır.

1.3. Rotorların Modellenmesi

Dönen makinelerde, rotor ya da miller temel fonksiyonel parçalardır. Dinamik cevap rotorun geometrisine ve özelliklerine bağlıdır. Bu da başlangıç şartlarının, elastik durumun, jiroskobik ve sönüm kuvvetlerinin dinamik durum içinde incelenmesini gerektirir. Milin modellenmesine ait çalışma, model tiplerinin seçimini ve bilgisayar tekniklerinin birbirine oldukça ilişkide olmasını gerektirir.

Rotorların birçoğu genellikle karmaşık geometrilere sahiptirler. Bu da doğal olarak analitik modelleme yaparak rotorun dinamik davranışının belirlenmesini zorlaştırır. Aşağıda belirtilen iki yön ile ilgili açık bir karşılıklı bilgilendirme vardır.

- a) Analizler yoluyla elde edilmiş bir çok sonuçla birlikte verilmiş basit bir model: Çoğu zaman kapalı form halindedir. (Bu tip özellikler tasarım yapılırkenki amaçları karşılayacak olan bir tasarım parametresini anlamaya yöneliktir.)
- b) Yeterli ölçüde tanımlanmış rotor ve ona bağlı parametrelerin özelliklerini içeren model: Bu tip modeller sayısal yöntemlerin kullanımlarını gerekli hale getirmektedir. Bu da belirli tipteki rotorların davranışlarını daha iyi tahmin etmeyi sağlar.
- c) Çoğu zaman, her iki analizde gerekli olur. Modelin geometrisi, model ile ilgili başka çalışmalardan kazanılan deneyim yardımıyla ve analizin amacına uygun olarak belirlenir.

Örneğin, rotorun rijit kütle hareketi dönme hızına yakın frekans değerlerine sahipse ve bunun yanında eğilme modlarındaki frekans değerlerinden uzaksa, tek disk tanımı yeterli olur. Dönme hızı yüksek eğilme modlarında ise, tasarlanmış model en azından bu modu içerecek şekilde olmalıdır.

Tek diske sahip rotor gösterimleri yalnızca nitelik çalışmaları ve genel sonuçların bulunmasında kullanılabilir.

Rotorların gerçek geometrileri, tıpkı yüksek hızlı turbomotorlarda olduğu gibi tek kütleli ya da tek diskli olarak düşünülemez. Kütle ve katılıkların dağılımı devamsız ve oldukça düzensizdir. Aynı düzensizlik rotor üzerinde bulunan kuvvetlerin dağılım karakteristiklerinde de görülür [10].

1.3.1 Model Çeşitleri

Genel olarak, parçalı parametrelili ve sürekli (yayıllı) parametrelili modeller olmak üzere iki çeşit modelleme çeşidinden bahsedilir. Fiziksel bakış açısına göre en doğru model sürekli model olmasına rağmen parçalı parametrelili modellerin kullanımı hesaplama gerektiren işlemlerde daha elverişli bir durum oluşturur. Sürekli modeller için az sayıda kapalı form çözümleri bulunmuş olmasına rağmen, sonlu elemanlar tekniği sürekli modellerin parçalı ve değişken çözümlere sahip olmalarına olanak verir.

Parçalı parametrelili sahip modellerde, mil; kütsüz yaylarla birleştirilmiş ve bir çok rijit parçaların birleşimiyle basitleştirilmiştir. Rijit yapılar parçalı kütle, çevresel kütle momenti ve kütsel polar atalet momentine sahiptirler. Bu durum hangi tip titreşimin düşünülmesi gerektiğine bağlıdır. Bunun gibi yaylar da eğilme, burulma ve eksenel katılığa sahip olabilir.

Jeffcott rotoru eğilme titreşiminin geçerli olduğu durumda en basit parçalı parametreye sahip modeldir. Noktasal kütle orta noktada bir yere getirilmiştir ve kütsel atalet momentinin olmadığı düşünülmüştür. Eğer rotorun eklenmiş yatak destek elemanlarıyla karşılaştırılınca oldukça rijit olduğu görülürse; efektif kütle, rotorun toplam kütsesi ve efektif katılık tüm yatakların toplam katılığına eşit olur. Rotor, yatak katılığıyla karşılaştırılınca daha esnek bir yapıdaysa, efektif katılık rotorun eğilme katılığıyla belirlenir. Bu durumda, yataklara yakın bulunan kütle orta noktada bulunmasına nazaran daha fazla titreşmez ve yalnızca toplam kütle miktarı efektif kütle olarak düşünülür. Hareket iki ortogonal yönde düşünülür ve böylelikle dönme yörüngesi hesaplanır.

Yüksek titreşim frekansları rotorlarla ilişkili olursa, ek olarak ayırık parçalı rijit kütselerin eklenmesi gerekir. Eğilme davranışı dikkate alınması gerekirse, rijit yapılar noktasal kütselerine sahip ve çevresel ve polar kütsel atalet momentlerini de içerirler. Efektif katılık kütsüz mil bölümlerine basit Euler kiriş teorisini uygulayarak bulunur.

Timoshenko kiriş teorisi (Timoshenko, 1921, 1922, 1955) kesme deformasyonunun hesaba katılmasında kullanılabilir. Burulma titreşimlerinin analizlerinde, bir ya da birden çok parçalı diskler polar kütsel atalet momentleriyle birlikte, kütsel burulma yaylarıyla bağlantılıdır. Bunun gibi, eksenel titreşim analizi için, bir çok noktasal kütsel bloklar kütsel gerilmiş yaylarla birbirine bağlanmışlardır [11].

Parametreleri tanımlamak amacı için her bir rijit yapının matematiksel olarak adi diferansiyel denklemlerle ifade edilmesi gerekir. Böylelikle fiziksel sürekli rotorlar için gerekli olan kısmi diferansiyel denklemlerinin daha güç olan çözümünden kaçınılmış olur. Adi diferansiyel denklemler Newton kanunu ya da Lagrange denkleminin uygulanmasıyla elde edilebilirler.

İkinci yaklaşım rotoru bir sürekli sistem olarak modellemektir. Gerçekte, parçalı kütsel deforme olmadığı ve bağlantı yaylarının kütsel olduğu geçerli bir kabul olmaz. Ne yazık ki rotorun her malzeme bölümü için kütsel ve elastisite ve bunun da ötesinde bu iki özelliklerde noktadan noktaya değişecek şekildedir.

Rotorun konfigürasyonuna bağlı olarak sürekli çubuk teorisi, çubuk eksen boyunca alınan koordinat ve zaman terimleri cinsinden hareket denklemlerinin formüle edilmesinde sıklıkla kullanılır. Kesit alanı, çevresel ve polar atalet momentleri eksenel yönler boyunca değişebilir. Böylelikle, özelliklerin tıpkı kütsel ve elastisite dağılımında olduğu gibi, rotorun cevabının eksenel uzamaya bağlı fonksiyonlar cinsinden olduğu tek boyutlu bir durum oluşur. Eğilme titreşimi analiz edildiğinde, çubuk kiriş olarak adlandırılır. Kiriş yer değişimleri ve eğimleri dikkate alınır. Burulma ve eksenel titreşimler için, kesit alanına ait burulma açıları ve eksenel yer değişimleri sırasıyla düşünülür.

Üç değişik kiriş modeli bulunur. Bunlar: Euler kirişi (ya da Euler-Bernoulli kirişi), Rayleigh kirişi ve Timoshenko kirişidir. Euler kirişi için, ne kesme ne de dönme ataleti, gerçekte olmasına rağmen dikkate alınmaz.

Milin kesit alanı milin uzunluğuyla karşılaştırıldığında oldukça küçük kalırsa Euler kirişi iyi bir seçim olur. Fakat bu durum dönen millerde büyük hatalara neden olabilir. Rotorların eğilme titreşimlerini dikkate aldığımızda dönen durumda olmayan millerde gözükmeyen jiroskobik momentler gözükür. Jiroskobik momentler, dönen millerin dönme

eylemsizlikleriyle orantılıdır. Dönme hızına bağlı olarak, jiroskobik momentler rotorların kritik hızlarında ve doğal frekansları üzerinde etkiye sahiptirler (Dimentberg, 1961; Loewy ve Piarulli, 1969). Euler kiriş teorisi dönen bir mile uygulanırsa, ileri ve geri dönme açılarının aynı büyüklükte olduğu düşünülür. Rayleigh kirişi için, kesme etkisi dönme eylemsizliğinin mevcut olduğu durumlarda ihmal edilir. Timoshenko kiriş teorisi, hem kesme deformasyonunun ve hem de dönme eylemsizlik etkisinin dahil olduğu dönen haldeki millerde yaygın olarak kullanılır (Choi, 1992). Eşit dağılımlı kirişler için Timoshenko kiriş teorisi, Euler ve Rayleigh kiriş modellerine göre doğal frekans değerlerinde ve cevaplarında daha gerçekçi sonuçlar verirler.

Burada her ne kadar Timoshenko kiriş teorisiyle ilgili bazı sınırlamalar yapılmış olsa da sonuç olarak Timoshenko kiriş teorisinin yalnızca ince kirişler için ilk birkaç frekans değerinin hesaplanmasında yeterli olduğu gözükür. Burada kesme düzeltme faktörünün 5/6 civarında olduğu düşünülür (Senthilnathan ve Lee, 1992). Senthilnathan ve Lee (1992) bunun yanında Timoshenko kiriş teorisinin titreşim halindeki kirişlerde gerilme halinin hesaplanmasında yetersiz kaldığını bulmuşlardır. Bilinen bir durumda kiriş ya da çubuk teorisi deformasyon sırasında yapılmış olan kabullenmelere dayalı olmasıdır. Bu kabullenme kademeli kirişler için geçerli olmaz (Vest ve Darlow, 1990). Buna sebep Timoshenko kiriş teorisinin üç boyutlu devamlı durumun tek boyutlu çubuğa dönüştürülmesidir. Cowper (1966), Timoshenko kiriş teorisinin doğruluğunu dinamik analizin ve kesin elastik yaklaşımın kullanılması için uygulamıştır. Burada bazı terimlerin ihmal edildiği bulunmuştur. Böylelikle, gerçeğe yakın bir doğruluk elde etmek için, kabulleri incelenmeli ve devamlı matematiksel model tasarlanmalıdır. Bu durumlarda en iyi model üç boyutlu elastisite modelidir.

Elastisite teorisi (Love, 1927; Timoshenko ve Goodier, 1951) bu modele uygulanabilir. Burada elastik yapılarda iki farklı model tipinin dikkate alınması gereği bulunur. Bunlar; klâsik durum ve Cosserat tipidir (Teodorescu, 1975). Klâsik durum için, yalnızca gerilmeler ve hacim kuvvetleri gözükür ve parça hareketi üç lineer hızlar cinsinden karakterize edilir. Cosserat tipinde ise, ek bağ gerilmeleri ve hacim momentleri ve parçanın hareketi üç açısal hızı içine alacak şekilde altı parametreyle karakterize edilir. Klasik durum elastisite teorisinde sıklıkla kullanılır.

Hareket denklemlerini rotor yapısının her noktasında karşılayan üç yer değişimi u , v ve w ; durum (zaman) değişkenleri x , y , z ve t (zaman)' ye bağlı fonksiyonlardır. Burada yer değişimleri $u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$ ve $w(x,y,z,t)$ koordinatlarda önemli bir rol oynarlar. x , y ve z uzay değişkenleridir. Her x , y ve z değişkenleri sistem içerisindeki herhangi bir bölgede herhangi bir değer alabilir. Böylelikle sistem sonsuz serbestlik derecesine sahip olur (Meirovitch, 1967). Hareket denklemleri yer değişimi terimlerine bağlı olarak Navier denklemleri olarak adlandırılır. Bir çok durumda, sınır şartlarını sağlayan kapalı formda çözümler elde etmek zordur. Burada sonlu elemanlar yöntemi ortaya çıkar ve problemi çözümlür hale getirir [2].

1.3.2 Hesaplama Teknikleri

Etkili bir çözüm elde etmek için, uygun bir hesaplama tekniğini seçilmiş olan bir modelde uygulamak gerekir. Parçalı parametrelili model için, transfer matris yöntemi (TMY) ya da modal analiz yöntemi uygulanabilir. Sürekli model (yayıllı parametrelili model) için üç yaklaşım bulunur. İlki analitik yöntem olup bazı durumlarda çözüme yakın bir değer bulunmasını sağlar. İkincisi mod yöntemi olarak tanımlanır. Üçüncüsü ise sonlu elemanlar yöntemi (SEY) olarak adlandırılır. Bu yöntem mühendislikte kullanılan en yaygın hesaplama tekniğidir. Bazı durumlarda zaman bağımlı sayısal integrasyonlarda geçici ya da lineer olmayan rotor cevaplarında parçalı ya da yayıllı parametrelili modellerle birlikte yararlı olabilir.

TMY içinde, rotor bölümlerinin uç kısımlarıyla ilgili bilinmeyen gruplar arasında bir bağ tanımlanmıştır. Bütün bir sistem için denklem, bağlantılı elemanlar için yapılan başarılı matris tanımlamalarının çarpımlarıyla geçerli hale gelir. Geleneksel TMY yaklaşımında, parçalı parametrelili model sıklıkla kullanılır tıpkı hem kütle ve hem de atalet özelliklerinin kütsüz elastik elemanlarla bağlantısı kurulduğu düşünülen parçalı noktalara kümelenmiş olması gibi. Myklestad (1944) ve Prohl (1945) rotorların kritik hızlarını hesaplayan bir transfer matris formülasyonu geliştirmişlerdir. Lund ve Orcutt (1967) bu transfer matris yöntemini rotorların dengelenmemiş cevaplarını hesaplamada kullanmışlardır. Rao (1987) TMY'ni rotor sistemlerinin geçici analizleri için kullanmıştır. Inagaki (1987) TMY'ni rotor-yatak sistemlerinin esnekliklerinin tayininin belirlenmesinde kullanmıştır.

Hem modelleme hem de hesaplama işlemlerindeki elverişli durumlara rağmen, yaygın TMY iyi sonuçlar vermez. Bilindiği gibi, TMY'ni artırıldığı oranda parçalı kütleli modellerde uygulamak doğal frekansları parçalı kütle sayısını elde etmede etkili değildir. SEY bu karakteristikliğe sahip olacak şekilde daha güvenilir sonuç elde edilmesine olanak sağlar. Yu ve Craggs (1995) sonlu elemanlar formülasyonu üzerine kurulu bir transfer matris tekniği geliştirmişlerdir. Böylelikle küçük matris işlemleri kullanarak TMY tekniğinin kullanımıyla sonlu elemanlar çözümü elde edilmiştir.

Modal analiz bütün sistem için titreşim hareketine ait geliştirilmiş denklemlere uygulanabilir. Böylelikle hem doğal frekanslar ve hem de zorlanmış kuvvetler (Meirovitch, 1967; 1975a) elde edilir. Hem parçalı ve hem de yayılı parametrelili rotor modellerinde, katılık matrisi çapraz durumudur. Modal analiz yöntemini kullanarak, eş zamanlı adi diferansiyel denklem grubu birbirinden bağımsız yapılarak çözümleri elde edilebilir. Bazı durumlarda jiroskobik terimler ihmal edilir ve orantılı ya da küçük sönümlerin rotorun modal analizini kolaylaştırdığı varsayılır (Hablani ve Shrivastava, 1977; Meirovitch, 1975b). Modal analiz kavramı rotorun dengelenmesi durumlarında sıklıkla uygulanır.

Sürekli modelin çözümü için analitik bir yöntem kullanılarak kapalı formda bir çözüm elde etmek idealdir. Kiriş teorisi eş kesit alanlarına sahip rotora uygulandığında, bazı araştırmacılar kritik hızların, doğal frekansların ve normal modların kapalı çözümlerini elde etmişlerdir (Eshleman ve Eubanks, 1969; Huang, 1961; Zu ve Han, 1992). Bununla birlikte hiçbir kapalı forma sahip kiriş çözümü kademeli ya da düzgün dağılımlı olmayan rotor modeli için bulunamamıştır. Üç boyutlu elastisite teorisi rotora modellemede uygulandığında, hareket denklemleri Navier denklemlerine dönüşür. Bu durumda, eğer sınır şartlarına bağlılık varsa analitik bir yaklaşım çok daha kompleks olur. Bir boyutlu elastik dalga yayılım teoremi yalnızca sürekli rotor miline ait burulma problemlerine uygulanabilir. (Mioduchowski ve Faulkner, 1986; Mioduchowski, 1996; Bogacz). Başlangıç ve sınır şartlarına bağlı olarak problemlerin formülasyonu sonucu elde edilen adi diferansiyel denklem takımları sayısal olarak çözülebilir (Mioduchowski, 1990). Sayısal olarak çözülen bu problemler geçici açısal hızları ve gerilmeleri ya da elastik momentleri milin her hangi bir kesit alanı için verir. Bununla birlikte, eğilme problemleri için, dalga analizi çok daha karışık olup, nadiren kullanılır.

Kabul edilen mod yöntemi (KMY) (Meirovitch,1967), Rayleigh-Ritz yöntemine dayanır. Bu yöntem bilindiği gibi devamlı sistemlere uygulanır. Yöntem sistemin şeklinin her hangi bir parçalandırılmasını içermez. Bunun yerine, kabul edilebilir fonksiyonların lineer kombinasyonlarıyla bir kombinasyon yapılarak çözüm elde edilir. Bu lineer kombinasyonlar uzay koordinatlarının fonksiyonudur ve zaman bağımlı genelleştirilmiş koordinatlarla çarpılmıştır. Kabul edilebilir bu fonksiyonların sınır şartlarını sağlamaları gerekir. Yöntemin doğruluğu kabul edilebilir fonksiyonların seçimine bağlıdır. Shiau ve Hwang (1989; 1993) rotor-yatak sistemlerin dinamik analizi için bu yöntemi kullanmışlardır.

SEY'in, mühendislik alanında oldukça yaygın bir kullanım alanı vardır ve sürekli rotorun modellenmesinde başarıyla uygulanabilir (Zienkiewicz, 1971). KMY'den farklı olarak, SEY bütün rotor yerine bağımsız parçalar için koordinat terimleri cinsinden yaklaşık yer değişim fonksiyonlarını ele almaya izin verir. Her eleman için potansiyel ve kinetik enerji tanımları her hangi bir dağıtılmış fiziksel parametrelerde değişiklik yapmadan oluşturulabilir. Lagrange denklemlerini ya da Hamilton prensibini kullanmak her eleman için matris formunda hareket denklemi elde edilmesini sağlar. Sistem matrisinin gösterimi eleman matrislerinin düğümlerde öngörülen uygun girişlerle birleştirilmesi yoluyla elde edilir. Bütün düğüm noktaları için çözümler elde edilebilir. Özel eleman matrisleri formülasyon içinde yer alan yayılı parametrelerin gerçek özelliklerini yansıttığından, SEY tekniği parçalı parametrelili yaklaşıma nazaran daha iyi sonuçlar alınmasını sağlar.

Ruhl ve Booker (1972) SEY'i ilk kez dağıtılmış parametrelere sahip turborotor sistemlerinin dinamik analizinde uygulamışlardır. Euler kiriş teorisi bu çalışmada kullanıldığından, hiçbir jiroskobik moment denklemde yer almamıştır. Nelson ve McVaugh (1976) sonlu elemanlar formülasyonu içinde dönme eylemsizliği ve jiroskobik etkiyi katacak şekilde Rayleigh kiriş teorisini düzenlemişlerdir. Daha sonra, Nelson (1980) dönen Timoshenko kiriş teorisi kullanarak kesme deformasyonunu katmış ve böylelikle detaylı bir sonlu elemanlar matris denklemi elde etmiştir. Eş dağılımlı kesitlere sahip olmayan rotorlar için kiriş teorisine dayalı bir çok sonlu elemanlar formülasyonu içeren yayın yayınlanmıştır (Thomas ve Wilson, 1973; Rouch ve Kao, 1979; Akella ve Craggs,

1986). Kiriş elemanı yerine sürekli model için Geradin ve Kill (1984), Stephenson (1989), Stephenson ve Rouch (1993) katı sonlu elemanlar yaklaşımını kullanarak rotorların dinamik analizini yapmışlardır.

SEY çözümleri modal analiz kullanılarak elde edilebilir. Bu bütün bir sistem için ifade edilirse, sonlu eleman denkleminin matris boyutu ne kadar eleman kullanıldığına bağlı olarak oldukça büyük olur. Toplam sistem matrislerinin boyutunu indirmek amacıyla, parça mod sentez yöntemi sıklıkla kullanılır (Nelson ve Meacham, 1981; Nelson, 1983; Craggs, 1987). Bu yöntemde, rotor modal karakterin elde edildiği küçük alt yapılardan oluşan bir grup haline bölünür. Toplam sistem modeli daha sonra her alt yapı için indirgenmiş parçalı modlarla birlikte oluşturulur. Bu işlem SEY ve KMY'nin bir kombinasyonudur. Bunun yanında matris indirgeme teknikleri vardır. Bunlar matris boyutlarını indirmek için kullanılır (Guyan, 1965; Rouch ve Kao, 1980). SEY formülasyonu üzerine dayalı TMY (Yu ve Craggs, 1995a) yayılı kütle dengesizliğine sahip rotorun cevabını elde etmede başarı ile uygulanmıştır [2].

1.4. Rotor Denklemleri ve Denklem Çözümleri

1.4.1. Rotor Elemanlarının Karakteristik Büyüklükleri

Rotorun temel elemanları disk, mil ve yataklardır. Kütle dengesizlikleri tamamıyla önlenemediği için elemanlar içine dahil edilirler. Kinetik enerji tanımı, diski, mili ve kütle dengesizliklerini tanımlamada oldukça önemlidir. Şekil değiştirme enerjisi mil tanımlamada önemlidir. Yatak kuvvetleri yataklarda ortaya çıkan virtüel işi hesaplamada kullanılır ve böylece mile etki eden karşı kuvvetler elde edilir. Genel rotor denklemleri aşağıda belirtilen adımlarla elde edilir;

- 1- Kinetik enerji (T), şekil değiştirme enerjisi (U) ve dış kuvvetlerce yapılan virtüel iş (δW) sistem elemanları için hesaplanır.
- 2- Sayısal bir yöntem seçilir: Az serbestlik dereceli sistemler için Rayleigh-Ritz yöntemi, mühendislik uygulamaları için ise sonlu elemanlar yöntemi seçilir.
- 3- Lagrange denklemleri aşağıda belirtilen formda uygulanır:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Fq_i \quad (1)$$

Burada N ($1 \leq i \leq N$) serbestlik derecesi, q_i genelleştirilmiş bağımsız koordinatlar, Fq_i genelleştirilmiş kuvvetler ve (*) zamana bağlı türevi gösterir.

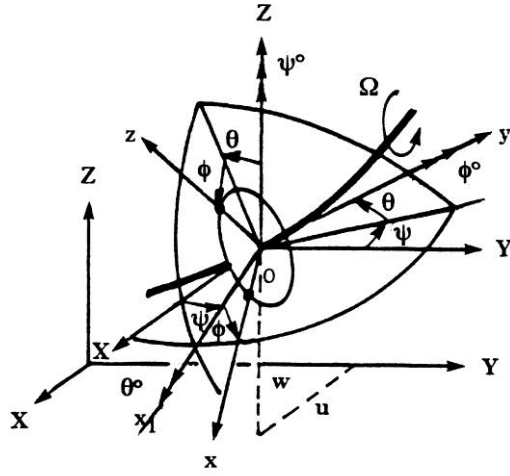
1.4.1.1. Disk

Disk rijit olarak kabul edilir ve yalnızca kinetik enerjisi ile karakterize edilir. $R_0(XYZ)$ uzay koordinatları ve $R(x,y,z)$ ise diske bağlı koordinatlardır. Burada xyz koordinat sistemi XYZ koordinat sistemine ψ , θ , ϕ açıları ile bağlıdır. Diskle ilişkilendirilme öncelikli olarak z boyunca ψ açısında, sonra x boyunca θ açısıyla ve en sonra da y boyunca ϕ açısıyla hareket ettirilerek yapılır. xyz sistemin ani açısal hız vektörü:

$$\omega_{R/R_0} = \dot{\psi}Z + \dot{\theta}x_1 + \dot{\phi}y \quad (2)$$

şeklindedir. Burada Z , x_1 ve y sırasıyla Z , x_1 ve y eksenlerindeki birim vektörlerdir. Diskin O kütle merkezine göre olan kinetik enerjisi R koordinat sistemi kullanılarak hesaplanır. Sistemde açısal hız vektörü böylece;

$$\omega_{R/R_0}^R = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\psi \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (3)$$



Şekil 1. Dönen elastik bir mil üzerinde bulunan diskin referans sistemleri.

Şimdi R_0 'da O 'nun koordinatları u ve w olsun ve Y boyunca k koordinat sabit kabul edilsin. Buna ilaveten diskin kütlesi; m_D ve xyz asal atalet eksenleri olsun. Bu durumda O 'ya göre atalet tansörü:

$$I_{/O} = \begin{bmatrix} I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix} \quad (4)$$

şeklindedir. Diskin kinetik enerji ifadesi ise:

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dz} \omega_z^2) \quad (5)$$

şeklindedir. Disk simetrik olacak şekilde ($I_{Dx} = I_{Dz}$) θ ve ψ açıları küçük ve açısal hız sabit ($\dot{\phi} = \Omega$) olacak şekilde düzenlenirse (1.5) denklemi aşağıdaki şekle dönüşür.

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (6)$$

Burada $\frac{1}{2} I_{Dy} \Omega^2$ terimi sabittir ve denklemler üzerinde hiçbir etkisi yoktur ve sabit açısal hızla dönen diskin enerjisini gösterir. Son terim $I_{Dy} \Omega \dot{\psi} \theta$ ise jiroskobik (Koriolis) etkiyi gösterir.

1.4.1.2. Mil

Mil, dairesel kesit alanına sahip bir kiriş ile gösterilir ve hem şekil değiştirme ve hem de kinetik enerjileri ile karakterize edilir.

1.4.1.2.1. Kinetik Enerji

Mile ait kinetik enerjinin genel formülasyonu disk denkleminin genişletilmesinden elde edilir. L uzunluğunda bir eleman için kinetik enerji ifadesi aşağıdaki şekildedir.

$$T_s = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \quad (7)$$

Burada ρ birim hacmin kütlesi, S kirişin kesit alanı ve I ise nötr eksen boyunca kirişin kesit alanının atalet momentidir. Burada hem S hem de I sabit olarak kabul edilir.

Denklem (7)'nin ilk integrali, kirişin eğilme durumundaki kinetik enerjisinin klasik bir ifadesidir. İkinci integral dönme ataleti etkisini verir (Timoshenko kirişi). Kalan terimlerden $\rho I \Omega^2$ terimi ise sabit ve denklemler üzerinde hiçbir etkisi yoktur ve son integral ise jiroskobik etkiyi gösterir.

1.4.1.2.2. Şekil Değiştirme Enerjisi

Şekil 2’de gösterilen notasyonda; C, kirişin geometrik merkezi, B(x,z) kesit alanında herhangi bir nokta, E malzemenin elastisite modülü, ε ve σ ise sırasıyla birim şekil değişimi ve gerilme, u^* ve w^* ise x, z eksenlerine göre geometrik merkezin yer değişimleridir.

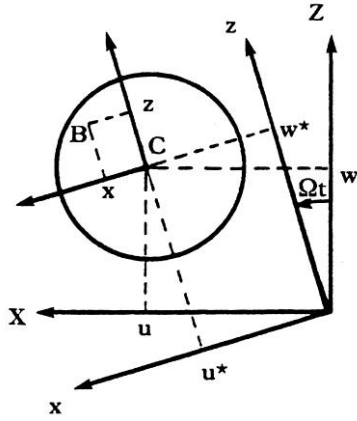
Eğer ikinci mertebeden terimler dahil edilirse; B noktasının boyuna birim şekil değişimi aşağıdaki ifade ile verilir.

$$\varepsilon = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \quad (8)$$

ya da

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_{nl} \quad (9)$$

şeklindedir.



Şekil 2.Geometrik merkezin(C) koordinatları ve mil üzerinde herhangi bir nokta(B)

Burada ε_1 lineer terimleri ve ε_{nl} ise lineer olmayan terimleri gösterir. Şekil değiştirme enerjisi:

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon^T \sigma d\tau \quad (10)$$

Burada T; matris transpozisyon sembolüdür. Gerilme ve şekil değişimleri arasındaki ilişki ise:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (11)$$

Buradan;

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_{\tau} (\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^2) d\tau \quad (12)$$

elde edilir. Kirişin kesit alanının x ve z'ye göre simetrik olmasından dolayı,

$$\int_{\tau} \varepsilon_{nl} \varepsilon_1 dT = 0 \quad (13)$$

Denklem 12'de integral altındaki üçüncü terim ikinci mertebeden olup ihmal edilirse, şekil değiştirme enerjisi:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy \quad (14)$$

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left[x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] dS dy \quad (15)$$

Simetriden dolayı üçüncü terimin integrali sıfıra eşittir.

I_x ve I_z kesit atalet momentleri için:

$$I_x = \int_S z^2 dS \quad (16)$$

$$I_z = \int_S x^2 dS \quad (17)$$

Böylece şekil değiştirme enerjisi:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (18)$$

ifadesi elde edilir.

Eğer mile sabit bir eksenel kuvvet (F_0) etki ederse, ikinci bir ifade milin şekil değiştirme ifadesine ilave edilir.

$$U_2 = \int_0^L \frac{F_0}{S} (\varepsilon_1 + \varepsilon_{nl}) d\tau \quad (19)$$

Simetriye bağlı olarak, integral altındaki ilk terim kesit alanı boyunca kaybolacaktır ve böylelikle (8) ve (9) denklemlerini kullanarak (19) denklemi:

$$U_2 = \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (20)$$

haline gelir.

Toplam şekil değiştirme enerjisi $U_s = U_1 + U_2$:

$$U_s = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (21)$$

şeklinde elde edilir.

Şekil değiştirme enerjisini R_0 koordinat sisteminde u ve w 'nin bir fonksiyonu olarak ifade edebiliriz. Bunun için Şekil 2'den

$$u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \quad (22)$$

$$w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \quad (23)$$

ifadelerini kullanarak (21) denklemini aşağıdaki şekle dönüştürebiliriz.

$$\begin{aligned}
U_s = & \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \\
& + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy
\end{aligned} \quad (24)$$

Sonuç olarak en çok karşılaşılan simetrik mil ($I_x = I_z = I$) için şekil değiştirme enerjisi ifadesi:

$$U_s = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (25)$$

şeklinde elde edilir.

1.4.1.3. Yataklar

Yatağın katılık ve viskoz sönüm terimlerinin bilindiği kabul edildiğinde (şekil3), mile etki eden yay ve sönüm kuvvetlerinin virtüel işi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\delta W = & -k_{xx} u \delta u - k_{xz} w \delta u - k_{zz} w \delta w - k_{zx} u \delta w \\
& - c_{xx} \dot{u} \delta u - c_{xz} \dot{w} \delta u - c_{zz} \dot{w} \delta w - c_{zx} \dot{u} \delta w
\end{aligned} \quad (26)$$

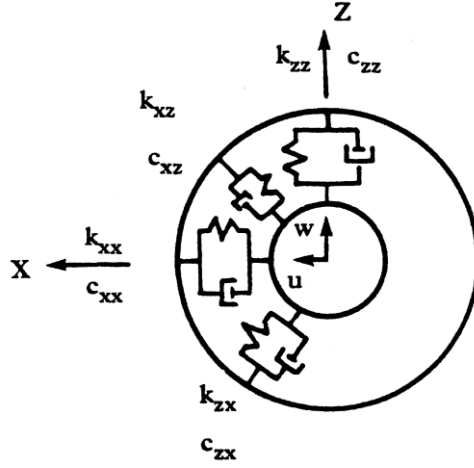
veya:

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w \quad (27)$$

Buradaki F_u ve F_w genelleştirilmiş kuvvetin bileşenleridir. Matris formda, (26) ve (27) denklemleri:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (28)$$

halini alır.



Şekil 3. Yatağın yay ve sönüm elemanları cinsinden gösterimi

Sıklıkla $k_{xx} \neq k_{zz}$ ve $c_{xx} \neq c_{zz}$ ve buna ilaveten de $k_{xz} \neq k_{zx}$ ve $c_{xz} \neq c_{zx}$ durumu çok yaygındır.

R koordinat sisteminin yer değiştirmelerine bağlı olarak elde etmek için yalnızca k_{xx} ve k_{zz} nin sıfırdan farklı olduğu kabul edilirse, virtüel iş:

$$\begin{aligned} \delta W = & -k_{xx} (u^* \cos \Omega t + w^* \sin \Omega t) (\delta u^* \cos \Omega t + \delta w^* \sin \Omega t) \\ & -k_{zz} (-u^* \sin \Omega t + w^* \cos \Omega t) (-\delta u^* \sin \Omega t + \delta w^* \cos \Omega t) \end{aligned} \quad (29)$$

veya

$$\begin{aligned} \delta W = & - \left[(k_{xx} \cos^2 \Omega t + k_{zz} \sin^2 \Omega t) u^* + \frac{\sin 2\Omega t}{2} (k_{xx} - k_{zz}) w^* \right] \delta u^* \\ & - \left[(k_{xx} \sin^2 \Omega t + k_{zz} \cos^2 \Omega t) w^* + \frac{\sin 2\Omega t}{2} (k_{xx} - k_{zz}) u^* \right] \delta w^* \end{aligned} \quad (30)$$

elde edilir.

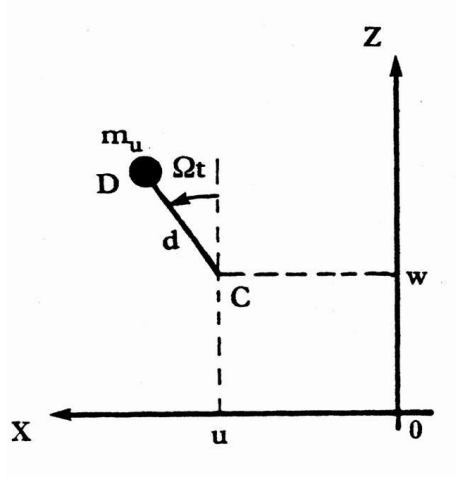
(30) denklemi gösterir ki: eğer $k_{xx} \neq k_{zz}$ ise, yataklamadan dolayı oluşan terimler R koordinat sistemi içinde zamana bağıllık gösterirler. Bu da denklemin çözümünde büyük zorluklar yaratır. Bu durumda rotor denklemi uzay referans(R_0) sistemine göre yazılmalıdır.

1.4.1.4. Dengelenmemiş Kütle

Dengelenmemiş kütle m_u ile gösterilir ve milin geometrik merkezinden d mesafede bir yerde bulunur. Bu kütlenin kinetik enerjisinin(T_u) hesaplanması gerekir. Kütle y eksenine dik bir düzlemde bulunur ve koordinatları y eksenine boyunca sabittir(Şekil 4). R_0 koordinat sistemine göre kütlenin koordinatları:

$$OD = \begin{vmatrix} u + d \sin \Omega t \\ \text{sabit} \\ w + d \cos \Omega t \end{vmatrix} \quad (31)$$

şeklinde yazılır.



Şekil 4. Kütle dengesizliği

Buradan, hız vektörü

$$V = \frac{dOD}{dt} = \begin{vmatrix} \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} - d\Omega \sin \Omega t \end{vmatrix} \quad (32)$$

ve kütlenin kinetik enerjisi ise:

$$T_u = \frac{m_u}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d \dot{u} \cos \Omega t - 2\Omega \dot{w} d \sin \Omega t) \quad (33)$$

elde edilir. Burada $m_u \Omega^2 d^2 / 2$ terimi sabit olup, denklem üzerinde bir etkisi yoktur. m_u kütlesi rotorun kütlesine göre oldukça küçüktür. Böylece kinetik enerji ifadesi:

$$T_u \cong m_u \Omega d \dot{u} (\cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \quad (34)$$

olarak yazılabilir.

Lagrange denkleminin uygulanması merkezkaç kuvvet vektörünü verir.

1.4.2. Rotor Elemanlarının Sonlu Elemanları

1.4.2.1. Disk

Disk verilmiş bir düğüm noktası için dört serbestlik derecesine sahiptir. Bunlardan ikisi u ve w yerdeğiştirmeleri, diğeri ikisi ise X ve Z eksenleri etrafındaki θ ve ψ eğimleridir. Eğer disk merkezindeki düğüm noktasının yer değıştirme vektörü δ ise:

$$\delta = [u, w, \theta, \psi]^T \quad (35)$$

şeklinde yazılır.

Lagrange denklemlerinin (6) denkleminde uygulanması aşağıdaki denklem takımını verir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Burada ilk matris klasik kütle matrisi ve ikinci matris ise jiroskobik matristir.

1.4.2.2. Mil

Mil, sabit bir dairesel kesit alanına sahip olan bir kiriş olarak modellenir. Kullanılan sonlu eleman iki düğüm noktasına sahiptir. Böylece matrisler dördü yerdeğışimi ve diğeri dördü de dönme olacak şekilde sekizinci mertebeden olurlar (Şekil 5). Bu dört yer değışimi ve dört dönme değışkenleri arasındaki ilişkiler aşağıdaki şekildedir.

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (37)$$

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (38)$$

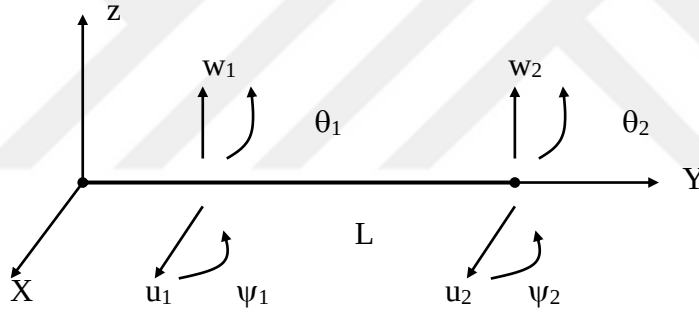
Düğüm noktası yerdeğiştirme vektörü ise:

$$\delta = [u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2]^T \quad (39)$$

Verilen bu vektöre, X ve Z yönlerinde ki δu ve δw yer değişimleri dahildir. Yani,

$$\delta_u = [u_1, \psi_1, u_2, \psi_2]^T \quad (40)$$

$$\delta_w = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2]^T \quad (41)$$



Şekil 5. Mil sonlu elemanı.

Sonlu eleman aşağıdaki bağıntılardan kurulur.

$$u = N_1(y)\delta u \quad (42)$$

$$w = N_2(y)\delta w \quad (43)$$

Burada $N_1(y)$ ve $N_2(y)$ eğilme durumundaki kirişin tipik birer yer değiştirme fonksiyonlarıdır:

$$N_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (44)$$

$$N_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (45)$$

Mile ait kinetik enerji bağıntısı (7) eşitliği kullanılarak aşağıdaki formda elde edilir.

$$\begin{aligned} T = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L \left[\delta \dot{u}^T N_1^T N_1 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T N_2^T N_2 \delta \dot{w} \right] dy \\ & + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left[\delta \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \dot{w} \right] dy \\ & - 2\rho I \Omega \int_0^L \delta \dot{u}^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta w dy + \rho I L \Omega^2 \end{aligned} \quad (46)$$

(44) ve (45) denklemlerini ve türevlerini (46) denklemi içine koyup integre edersek aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \delta \dot{u}^T M_1 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^T M_2 \delta \dot{w} + \frac{1}{2} \delta \dot{u}^T M_3 \delta \dot{u} \\ & + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^T M_4 \delta \dot{w} + \Omega \delta \dot{u}^T M_5 \delta w + \rho I L \Omega^2 \end{aligned} \quad (47)$$

Burada M_1 ve M_2 matrisleri klasik kütle matrisleridir, M_3 ve M_4 ise dönme atalet etkisini gösterir. M_5 ise jirokobik etkiyi verir. Son terim sabit olduğu için işlemlere dahil edilmeyecektir. (47) denkleminde Lagrange denklemlerini uygularsak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = (M + M_s) \ddot{\delta} + C \dot{\delta} \quad (48)$$

Burada M ve M_s matrisleri sırasıyla M_1 , M_2 ve M_3 , M_4 ve C matrisi ise M_5 den elde edilir. Bu matrisler ise:

$$M = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 156 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & 22L & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$M = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$C = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Milin şekil değıştirme enerjisi (42), (43) ve (25) denkleminde elde edilir. Bu da:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\delta u^T \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta u + \delta w^T \frac{d^2 N_2^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w \right] dy \\ + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\delta u^T \frac{dN_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta u + \delta w^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta w \right] dy \quad (52)$$

İntegrasyon işleminden sonra U aşağıdaki şekle dönüşür.

$$U = \frac{1}{2} \delta u^T K_1 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^T K_2 \delta w + \frac{1}{2} \delta u^T K_3 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^T K_4 \delta w \quad (53)$$

Burada K_1 ve K_2 , klasik katılık matrisleridir. K_3 ve K_4 aksenal kuvvetlere bağılı olarak ortaya çıkan matrislerdir. Kayma etkisini dikkate almak gerekir. Kayma etkisi aşağıda tanımlanan a büyüklüğü ile hesaba katılır.

$$a = \frac{12EI}{GS_r L^2} \quad (54)$$

Kayma modülü:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (55)$$

Burada ν , Poisson oranı ve S_r ($\approx S$) ise kesite ait indirgenmiş alanı gösterir.

Kayma etkisi hesaba katıldığında bir K_S matrisi ortaya çıkar, ancak burada anlatılmamıştır. Bu matris klasik katılık matrisi içine dahil edilir. Klasik katılık matrisi K_C : K_1 , K_2 ve K_S den, K_F matrisi ise K_3 ve K_4 matrislerinden oluşmuştur. Eğer Lagrange denklemlerini (53) denkleminde uygularsak aşağıdaki formülasyonlar:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = K \delta \quad (56)$$

$$K = K_C + K_F \quad (57)$$

elde edilir.

Matrisel gösterimler ise aşağıdaki şekillerdedir.

$$K_c = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 0 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & -6L & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 0 & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (58)$$

(Eğer $a=0$ olursa (24) denklemi eğilme durumundaki kirişin klasik katılık matrisi olur.)

$$K_F = \frac{F}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & 3L & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -L^2 & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ 36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & -3L & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & 4L^2 & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (59)$$

1.4.2.3. Yataklar

Matrisler doğrudan (26) ve (27) denklemlerinden aşağıda verildiği şekilde elde edilirler.

$$F_u = -k_{xx}u - k_{xz}w - c_{xx}\dot{u} - c_{xz}\dot{w} \quad (60)$$

$$F_w = -k_{zz}w - k_{zx}u - c_{zz}\dot{w} - c_{zx}\dot{u} \quad (61)$$

milin yatak içerisindeki kısmında (muylu) ki eğilme etkileri ihmal edilebileceğinden ($F_\theta = F_\psi = 0$), yukarıdaki denklemler aşağıdaki matris formunda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_\theta \\ F_w \\ F_\psi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \theta \\ w \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (62)$$

İlk matris katılık matrisi ikincisi ise viskoz sönüm matrisidir. Bu matrisler genellikle asimimetriktir ($k_{xz} \neq k_{zx}$ ve $c_{xz} \neq c_{zx}$) ve matrisler dönme hızına bağlı olarak değişiklik gösterirler.

1.4.2.4. Kütle Dengesizliği

Kütle dengesizliğinin kinetik enerjisinin genel ifadesi (34) denklemi ile verilmiştir. Lagrange eşitliklerini bu denkleme uygularsak:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} - \frac{\partial T}{\partial \delta} = -m_u d\Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (63)$$

elde edilir. Buradan

$$\delta = [u, w]^T \quad (64)$$

elde edilir.

(63) ifadesi $t=0$ durumunda z eksenini boyunca bulunan kütle dengesizliğine karşılık gelir. Endüstriyel rotorlarla çalışıldığında, bir çok kütle dengesizliğinin hesaba katılması gerekir. $t=0$ için z eksenine göre α açısal konumunda kuvvetler aşağıdaki duruma dönüşürler.

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = m_u d\Omega^2 \begin{bmatrix} \sin(\Omega t + \alpha) \\ \cos(\Omega t + \alpha) \end{bmatrix} \quad (65)$$

Bu form aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = F_2 \sin \Omega t + F_3 \cos \Omega t \quad (66)$$

Burada F_2 ve F_3 kuvvetleri aşağıdaki şekillerdedirler.

$$F_2 = m_u d\Omega^2 \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$F_3 = m_u d\Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (68)$$

1.4.3. Tekli Rotorlar için Hareket Denklemleri

Lagrange denklemleri tekli rotora uygulandığında genel sistem denklemi aşağıdaki formda elde edilir.

$$M\ddot{\delta} + C(\dot{\delta}) + K\delta = F(t) \quad (69)$$

ve

$$F(t) = F_1 + F_2 \sin \Omega t + F_3 \cos \Omega t + F_4 \sin \omega t + F_5 \cos \omega t + F_6 \sin \omega t + F_7 \cos \omega t \quad (70)$$

şeklindedir. Burada δ bütün yerdeğişimlerini içine alan bir vektördür. M simetrik kütle matrisidir. C asimetrik matristir. Bu asimetrik matris Ω 'nın bir fonksiyonu olan simetrik olmayan jirokobik matrisi ve yatak karakteristiklerine bağlı olan bir asimetrik matrisi içerir. K katılık matrisi olup sıklıkla yatak karakteristiklerine bağlı olarak asimetriktir. $F(t)$ ise kuvvet vektörüdür. Bu vektör sabit vektör F_1 (statik kuvvete karşılık olarak) kütle dengesizliklerine bağlı kuvvetler F_2 , F_3 , asenkronize kuvvetler F_4 , F_5 ve harmonik kuvvetler F_6 ve F_7 'den oluşur.

1.4.4. Eş Eksenli Çoklu Rotorlar İçin Hareket Denklemleri

Şekil 6'da miller arası yataklarla birbirine bağlanmış iki eş eksenli rotor sistemi gösterilmiştir. Bu iki rotor R_1 ve R_2 , Ω_1 ve Ω_2 gibi farklı hızlarda dönerler.

Birinci rotor için u_1 ve w_1 yer değişimleri ve ikinci rotor için u_2 ve w_2 yer değişimleri dönme eksenini üzerindeki aynı noktaya karşılık gelir. Ara yatağın kısa olduğu düşünülürse, eğim etkisi ihmal edilebilir. Şimdi R_1 ve R_2 'yi sırasıyla yatakların üzerinde birinci rotor ve ikinci rotora ait reaksiyonlar olarak düşünersek ve eğer,

$$R_1 = \begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1z} \end{bmatrix} \quad (71)$$

ve

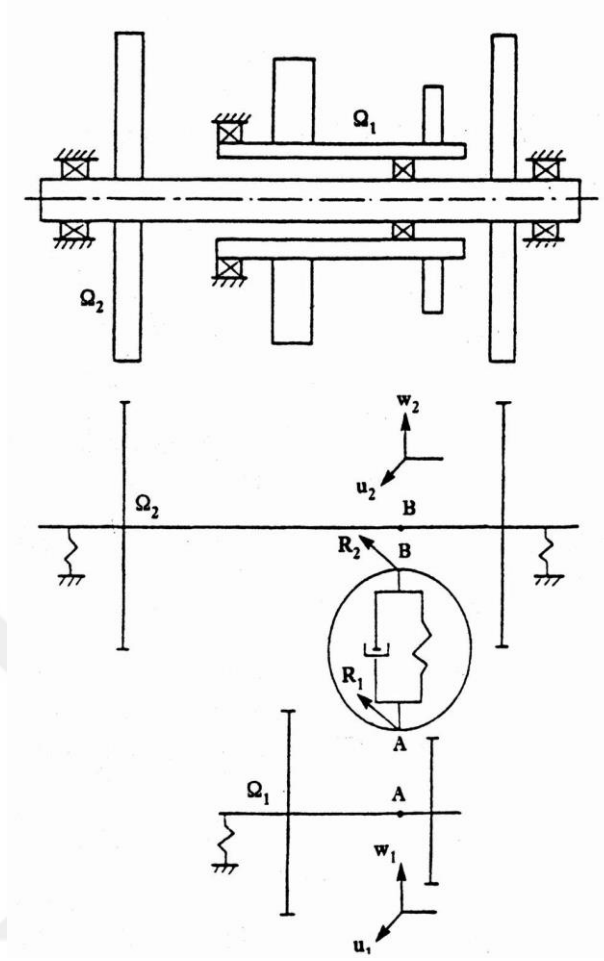
$$R_{1x} = F_{u1} \quad (72)$$

$$R_{1z} = F_{w1} \quad (73)$$

olursa,

$$R_1 = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ w_1 - w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 - \dot{u}_2 \\ \dot{w}_1 - \dot{w}_2 \end{bmatrix} \quad (74)$$

şeklinde olur.



Şekil 6. İkili rotor modeli.

Bu form aşağıdaki şekle dönüştürülebilir.

$$R_1 = K \begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ w_1 - w_2 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} \dot{u}_1 - \dot{u}_2 \\ \dot{w}_1 - \dot{w}_2 \end{bmatrix} \quad (75)$$

Burada K ve C matrisleri:

$$K = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \quad (77)$$

şeklindedirler.

Yatak kütlesi ihmal edilirse

$$R_1 + R_2 = 0 \quad (78)$$

olur. Böylece sonuç olarak,

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & -C \\ -C & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} \quad (79)$$

elde edilir. Şimdi T ve U, kinetik ve şekil değiştirme enerjileri her bir rotor için hesaplanabilir. Lagrange denklemleri uygulanırsa:

$$\text{Rotor 1: } M_1 \ddot{\delta}_1 + C_1(\Omega_1) \dot{\delta}_1 + K_1 \delta_1 = F_1(t) - R_1 \quad (80)$$

$$\text{Rotor 2: } M_2 \ddot{\delta}_2 + C_2(\Omega_2) \dot{\delta}_2 + K_2 \delta_2 = F_2(t) - R_2 \quad (81)$$

elde edilir. Burada M_1 , M_2 , C_1 , C_2 , K_1 , K_2 , $F_1(t)$, ve $F_2(t)$ matrisleri (1.4.1) bölümünde tarif edilen tipte matrisler ve δ_1 ve δ_2 düğüm noktası yer değişimleridir. (79), (80) ve (81) denklemlerinden R_1 ve R_2 yok edilirse aşağıdaki genel denklem elde edilir.

$$M \ddot{\delta} + C(\Omega_1, \Omega_2) \dot{\delta} + K \delta = F(t) \quad (82)$$

Burada M simetrik kütle matrisi, C asimetric matris, K asimetric katılık matrisi ve δ ise düğüm noktası yer değişim vektörüdür.

Bu üç matris M, C ve K: sırasıyla M_1 ve M_2 : C_1 ve C_2 : ve K_1 , K_2 matrislerinin birleştirilmesinden oluşur. Buna ilaveten sistemin işleyiş özelliklerine bağlı olarak:

$$\Omega_1 = a\Omega_2 + b \quad (83)$$

sisteme dahil olur. Burada a ve b sisteme ait bilinen sabitlerdir.

(82) eşitliği (83) hareket denkleminde yerine konursa aşağıdaki genel denklem formu elde edilir.

$$M\ddot{\delta} + C(\Omega)\dot{\delta} + K\delta = F(t) \quad (84)$$

Bu denklem (69) denkleminin aynısıdır. Sonuç olarak tekli rotor ve çoklu rotor denklemleri aynı tipte olmaktadır.

1.4.5. Hareket Denklemlerinin Çözümü

Sistemin genel denklem ifadesinin elde edilmesinden sonra aşağıda verilen durumlar öncelikli inceleme konusu olur.

- Dönme hızının bir fonksiyonu olarak doğal frekanslar, Campbell diyagramı ve kararsızlık bölgeleri.
- Eylemsizlikten doğan kuvvet etkileri: kütle dengesizliği, asenkronize kuvvet, harmonik kuvvet.

Genel olarak sistemin serbestlik derecesi indirgenir. Burada sistemin çözümü için kullanılan iki klasik yöntem pseudo-modal yöntemi ve direkt yöntem incelenecektir.

1.4.5.1. Pseudo-Modal Yöntemi

Pseudo-Modal yöntemi bilgisayarla problemi çözme sürecinde daha az zaman ve hafıza ihtiyacı nedeniyle büyük kolaylık sağlar. Sonuçlar direkt yöntemle elde edilen sonuçlara çok yakın olacak şekilde elde edilir. Buna ilaveten denklem takımlarında modal sönümün dahil olmasına olanak sunar. Bu durum sönüm değerinin oldukça küçük olduğu durumlarda, mekanizmanın sönümünün bilinmediği durumlarda ortaya çıkar. Bu yöntemde modal durum için (84) denkleminde aşağıdaki denklem tanımlaması yapılır:

$$M\ddot{\delta} + K^*\delta = 0 \quad (85)$$

Burada M kütle matrisi, K^* ise K dan elde edilen bir katılık matrisidir. Bu katılık matrisinde yataklardan dolayı ortaya çıkan k_{xz} ve k_{zx} değerleri ihmal edilmiştir. Kabul edilen n adet mod şekli kolaylıkla iteratif tekniklerle elde edilir. Matrisin ilk n modu aşağıdaki şekildedir:

$$\phi = [\phi_1, \dots, \phi_n] \quad (86)$$

Bu denklem yeni bir denklem takımı elde etmede kullanılır.

$$\delta = \phi p \quad (87)$$

(86) denklemini ϕ^T ile çarparsak:

$$\phi^T M \phi \ddot{p} + \phi^T C(\Omega) \phi \dot{p} + \phi^T K \phi p = \phi^T F(t) \quad (88)$$

Daha sonra sönüm durumu sistem denklemlerine, tek dereceli sistemle (kütle, yay, viskoz sönüm elemanı) benzerlik kurularak dahil edilir. c_i terimleri matris($\phi_i^T C \phi$) üzerine diyagonal olarak eklenir.

$$c_i = 2\alpha_i \sqrt{\phi_i^T K \phi_i \cdot \phi_i^T M \phi_i} \quad (89)$$

α_i değerleri (modal sönüm faktörü) makine tasarımcısının deneyimine bağlı olarak dikkate alınır.

1.4.5.1.1. Doğal Frekanslar, Campbell Diyagramı, Kararsızlık Bölgesi

(88) denkleminin dış kuvvetler olmadan çözümü:

$$\phi^T M \phi \ddot{p} + \phi^T C(\Omega) \phi \dot{p} + \phi^T K \phi p = 0 \quad (90)$$

şeklindedir. Bu denklem farklı Ω değerleri için çözülür. Seçilen form:

$$p = Pe^{rt} \quad (91)$$

şeklinde olursa (56) denklemi aşağıdaki hale dönüşür:

$$[r^2 m + rc + k]P = 0 \quad (92)$$

Burada,

$$m = \phi^T M \phi = \text{diag}\{\phi_i^T M \phi_i\} \quad (93)$$

$$k = \phi^T K \phi = \text{diag}\{\phi_i^T K^* \phi_i\} + \phi_i^T K^{**} \phi_i \quad (94)$$

ve

$$K^{**} = K - K^* \quad (95)$$

buna ilaveten,

$$c = \phi^T C \phi + \text{diag}\{C_i\} \quad (96)$$

şeklindedir.

(92) denklemi aşağıdaki formda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -k^{-1}m & -k^{-1}c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} rP \\ P \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} rP \\ P \end{bmatrix} \quad (97)$$

(97) e ait olan öz değerler / öz vektörler (doğal frekanslar ve mod şekilleri) kompleks büyüklüklerdir ve Q.R. algoritması kullanılarak çözülebilir. Özdeğerler $-\alpha_i \omega_i / (1 - \alpha_i^2)^{1/2} \pm j\omega_i$ tipindedirler. Burada ω_i frekans, α_i ise viskoz sönüm faktörüdür.

Eğer $-\alpha_i \omega_i / (1 - \alpha_i^2)^{1/2} > 0$ ise sistem kararsız durumdadır. Elde edilen sonuçlardan, Campbell diyagramı çizilebilir ve kritik hızlar belirlenebilir.

1.4.5.1.2. Sistemin Uyarım Kuvvetlerine Cevabı

Burada sürekli durum cevabı hesaplanır. Böylece (84) denkleminin genel çözümünde $F(t)=0$ durumunun kullanılmasına gerek kalmaz.

1.4.5.1.2.1. Sabit Kuvvet Olması Hali

$$K \delta = F_1 \quad (98)$$

Denklem iyi bilinen Gaussian yöntemiyle doğrudan çözülür.

1.4.5.1.2.2. Kütle Dengesizliği Olması Hali

Çözümü yapılacak denklemler

$$m\ddot{p} + c\dot{p} + kp = f_2 \sin \Omega t + f_3 \cos \Omega t \quad (99)$$

ve

$$f_2 = \phi^T F_2 \quad (100)$$

$$f_3 = \phi^T F_3 \quad (101)$$

şeklindedir. Çözüm aşağıdaki şekilde alınır.

$$p = p_2 \sin \Omega t + p_3 \cos \Omega t \quad (102)$$

Bu çözüm formu denklemden yerine yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} k - m\Omega^2 & -\Omega c \\ \Omega c & k - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (103)$$

matrisini verir. (103) denkleminde verilen sistem Ω değerleri için çözülür ve $p_2(\Omega)$ ve $p_3(\Omega)$ değerleri (87) denklemiyle ilişkili olarak yer değiştirme vektörünü verir.

$$\delta = \phi[p_2(\Omega)\sin\Omega t + p_3(\Omega)\cos\Omega t] \quad (104)$$

1.4.5.1.2.3. Asenkronize Kuvvet Olması Hali

Çözümü yapılacak denklemler:

$$m\ddot{p} + c\dot{p} + kp = f_4 \sin s\Omega t + f_5 \cos s\Omega t \quad (105)$$

ve

$$f_4 = \phi^T F_4 \quad (106)$$

$$f_5 = \phi^T F_5 \quad (107)$$

şeklindedirler.

Çözüm olarak aşağıdaki denklem alınır.

$$p = p_4 \sin s\Omega t + p_5 \cos s\Omega t \quad (108)$$

Bu çözüm şekli denklemde yerine konursa,

$$\begin{bmatrix} k - m(s\Omega)^2 & -s\Omega c \\ s\Omega c & k - m(s\Omega)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} \quad (109)$$

matrisini verir. Bu sistem Ω 'nın her hangi bir değeri için çözülür ve aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\delta = \phi[p_4(s\Omega)\sin s\Omega t + p_5(s\Omega)\cos s\Omega t] \quad (110)$$

1.4.5.1.2.4. Harmonik Kuvvet Olması Hali

Çözümü yapılacak denklemler:

$$m\ddot{p} + c\dot{p} + kp = f_6 \sin \omega t + f_7 \cos \omega t \quad (111)$$

ve

$$f_6 = \phi^T F_6 \quad (112)$$

$$f_7 = \phi^T F_7 \quad (113)$$

şeklindedirler.

Çözüm olarak aşağıdaki denklem alınır.

$$p = p_6 \sin \omega t + p_7 \cos \omega t \quad (114)$$

Bu çözüm denklemde yerine konursa:

$$\begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -\omega c \\ \omega c & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} \quad (115)$$

matrisini verir. Bu sistem ω 'nin her hangi bir değeri için çözülür ve aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\delta = \phi[p_6(\omega)\sin \omega t + p_7(\omega)\cos \omega t] \quad (116)$$

Burada sistem sabit bir Ω dönme hızında hareket eder ve uyarım frekansı ω değişir.

1.4.5.2. Direkt Yöntem

Bu yöntemde sisteme ait denklem sayısı yukarıda açıklanan yöntemde olduğu gibi indirgenmez ve N serbestlik derecesi muhafaza edilir.

1.4.5.2.1. Doğal Frekanslar, Campbell Diyagramı, Kararsızlık Bölgesi

Sistem denklemleri hiçbir dış kuvvet olmaksızın çözülür. Çözüm için seçilen form aşağıdaki şekildedir:

$$\delta = \Delta e^{rt} \quad (117)$$

Bu formu aşağıdaki denklem takımına yerleştirirsek:

$$M\ddot{\delta} + C\dot{\delta} + K\delta = 0 \quad (118)$$

burada $C=C(\Omega)$,

$$(r^2 M + rC + K)\Delta = 0 \quad (119)$$

denklemleri elde ederiz.

$$M\Delta = M\Delta \quad (120)$$

benzerliğini kullanmak bize (119) denklemiyle birleştirilmiş haldeki aşağıdaki formu verir.

$$\begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\Delta \\ \Delta \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\Delta \\ \Delta \end{bmatrix} \quad (121)$$

(121) denklemi aşağıda verildiği gibi daha kullanışlı bir şekilde yazılabilir:

$$AX = \lambda BX \quad (122)$$

Burada,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \quad (123)$$

$$B = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix} \quad (124)$$

$$\lambda = 1/r \quad (125)$$

$$X = \begin{bmatrix} r\Delta \\ \Delta \end{bmatrix} \quad (126)$$

(121) denklemi ile tanımlanan problemin öz değer ve öz vektör çözümleri eş zamanlı iteratif teknikle elde edilir. Bu teknik düşük değerli öz değerlerin elde edilmesinde oldukça etkilidir. Özdeğerler / özvektörler oldukça kompleks büyüklüklerdir. A ve B matrisleri gerçekte matris olduklarından ötürü öz değerler kompleks eşlenik çift olmalıdırlar. İki en düşük öz değeri düşünürsek:

$$r_1 = -\frac{\alpha_1 \omega_1}{\sqrt{1 - \alpha_1^2}} \pm j\omega_1 \quad (127)$$

ve bununla ilgili olarak da öz vektörler,

$$\Delta_1 = R \pm jI_1 \quad (128)$$

şeklinde olur. Burada kompleks mod şeklini anlamak açık değildir. Bunun için serbest hareket durumuna geri dönmek gerekir. Buna bağlı olan çözüm:

$$\begin{aligned} \delta = & (R_1 + jI_1) \exp\left(-\frac{\alpha_1 \omega_1}{\sqrt{1 - \alpha_1^2}} + j\omega_1\right) t \\ & + (R_1 - jI_1) \exp\left(-\frac{\alpha_1 \omega_1}{\sqrt{1 - \alpha_1^2}} - j\omega_1\right) t \end{aligned} \quad (129)$$

şeklindedir. Denklem aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\delta = \exp\left(-\frac{\alpha_1 \omega_1}{\sqrt{1-\alpha_1^2}}\right) t [(R_1 + jI_1)(\cos \omega_1 t + j \sin \omega_1 t) + (R_1 + jI_1)(\cos \omega_1 t - j \sin \omega_1 t)] \quad (130)$$

Buradan

$$\delta = 2 \exp\left(-\frac{\alpha_1 \omega_1}{\sqrt{1-\alpha_1^2}}\right) t [(R_1 \cos \omega_1 t - I_1 \sin \omega_1 t)] \quad (131)$$

elde edilir.

(131) ifadesi hiçbir kompleks büyüklük içermez. Exponansiyel terim zamana bağlı olarak zaman ilerledikçe kararlı sistem için sıfır değerine yaklaşır. Büyüklük

$$\frac{\delta}{2 \exp(\dots)t} = R_1 \cos \omega_1 t - I_1 \sin \omega_1 t \quad (132)$$

moddur. Genel olarak bir yapıda ki düğüm noktası değeri için, yer değiştirme elemanları,

$$u = u_r \cos \omega_1 t + u_i \sin \omega_1 t \quad (133)$$

$$w = w_r \cos \omega_1 t + w_i \sin \omega_1 t \quad (134)$$

şeklinde ve yörüngeler ise elips biçimindedir. Kritik hızlarda, dengesizlikten ötürü rotor şekilleri serbest harekette gözükten mod şekillerine benzer.

1.4.5.2.2. Uyarım Kuvvetlerine Cevabı

Önceki analizde olduğu gibi, sürekli durum cevabı ilk olarak hesaplanır ve pseudo-modal yönteminde olduğu gibi işlem akışına devam edilir. Ancak burada bütün hesaplamalarda serbestlik dereceleri indirgenmeden kullanılır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Giriş

Yapılan bu tez çalışmasında rotor sistemlerine ait olarak farklı özelliklere sahip dört adet örnek ele alınmış ve bu örneklerin RotorInsa ve ANSYS paket programları yardımıyla analizi yapılarak sistemlerin doğal frekansları elde edilmiştir. İlk problem sabit çapa sahip bir mil ve farklı kütlelerden oluşan iki diskten oluşmuş olup basit olarak mesnetlenmiş durumdadır. İkinci problemde kademeli mil ve tek disk kullanılmıştır. Üçüncü problem, eş dağılıma sahip bir mil ve farklı kütlelere sahip üç diskten oluşmuş olup yine basit olarak mesnetlenmiş durumdadır. Dördüncü problemde ise endüstride karşımıza çıkabilecek olan düzgün dağılımlı mil ve farklı kütlelere sahip diskler ele alınmış ve ayrıca yatak özellikleri dahil edilmiştir.

RotorInsa ve ANSYS paket programları yardımıyla ilk üç problemin modal analizi yapılmış ve modlar ve doğal frekanslar belirlenmiştir. İlk üç problemin modellenmesinden elde edilen değerler, P.H.Mathuria'nın teorik, MATLAB programı kullanarak yapmış olduğu sonlu elemanlar analizi ve Transfer Matris Yöntemi çözüm sonuçlarıyla elde ettiği doğal frekans değerleriyle karşılaştırılmıştır [13-14].

Son problemde ise yine RotorInsa ve ANSYS paket programları kullanılarak modal analiz yapılarak teorik verilerle mukayese edilmiştir.

2.2. Kullanılan Yazılımlar

2.2.1 RotorInsa Yazılımı

Kullanılan paket programı iki bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm ön işlem bölümü olarak adlandırılıp, problemin geometrisinin oluşturulması ve gerekli olan sınır şartlarının girilmesini sağlar. İkinci bölümde ise elde edilen geometrik verilerin yine ilk bölümde hesaplanması istenen şartlara bağlı olarak ikinci bölümde çözümü yapılır.

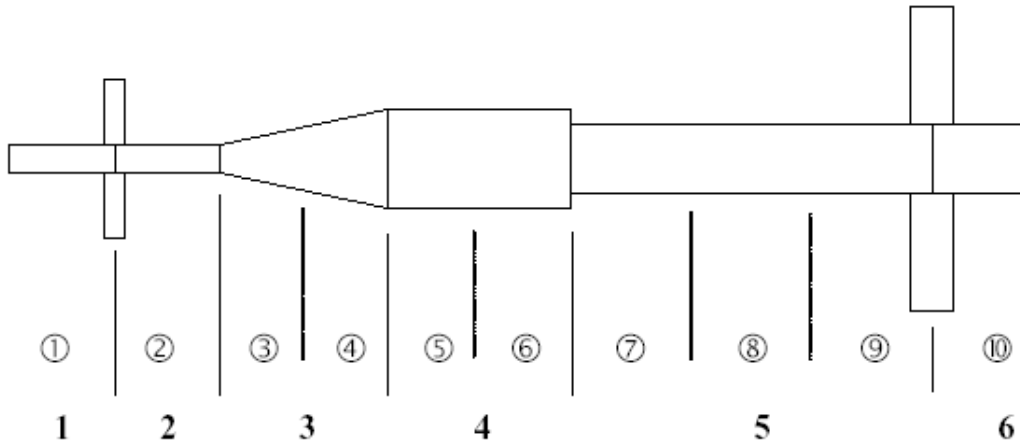
2.2.1.1. Ön işlem Bölümü

RotorInsa ön işlem yazılımı, rotorların eğilme durumundaki lineer dinamik davranışını analiz etmek için geliştirilmiş bir bilgisayar programıdır.

2.2.1.1. 1. Giriş

Ön işlem kısmı RotorInsa rotor dinamiği yazılımı için gerekli olan veri dosyasının oluşturulmasını sağlar. RotorInsa programının ön işlem kısmında *.dat uzantılı dosya oluşturulur. Ön işlem kısmında işlemlere rotorun geometrik tanıtımı ile başlanır.

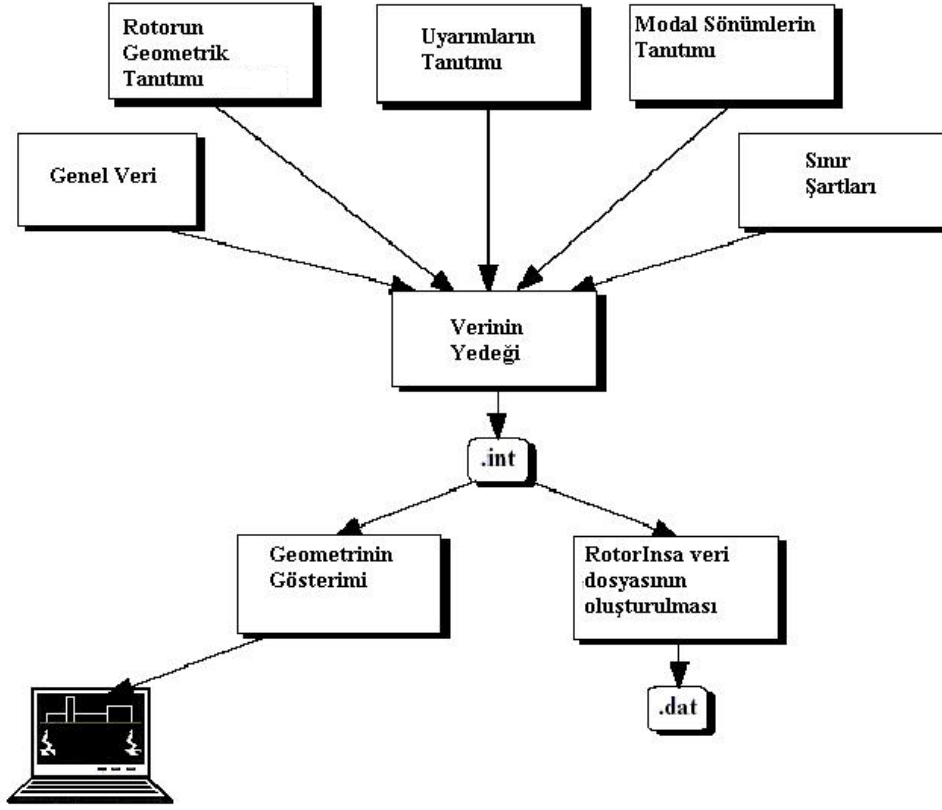
Geometrik tanıtım bölümlerle belirlenir (Şekil 7).



Şekil 7. RotorInsa programına ait geometri örneği

Rotor, Şekil 7’de gösterildiği gibi 6 parçaya bölünmüştür. Her bölüme kendine has fiziksel özellikler(milin, diskin, yatakların karakteristikleri vb.) atanabilir. RotorInsa programında veri dosyası oluştururken otomatik ağ oluşturma araçları bölümleri boyutlarına bağlı olarak bir çok sonlu elemanlara ayırır.

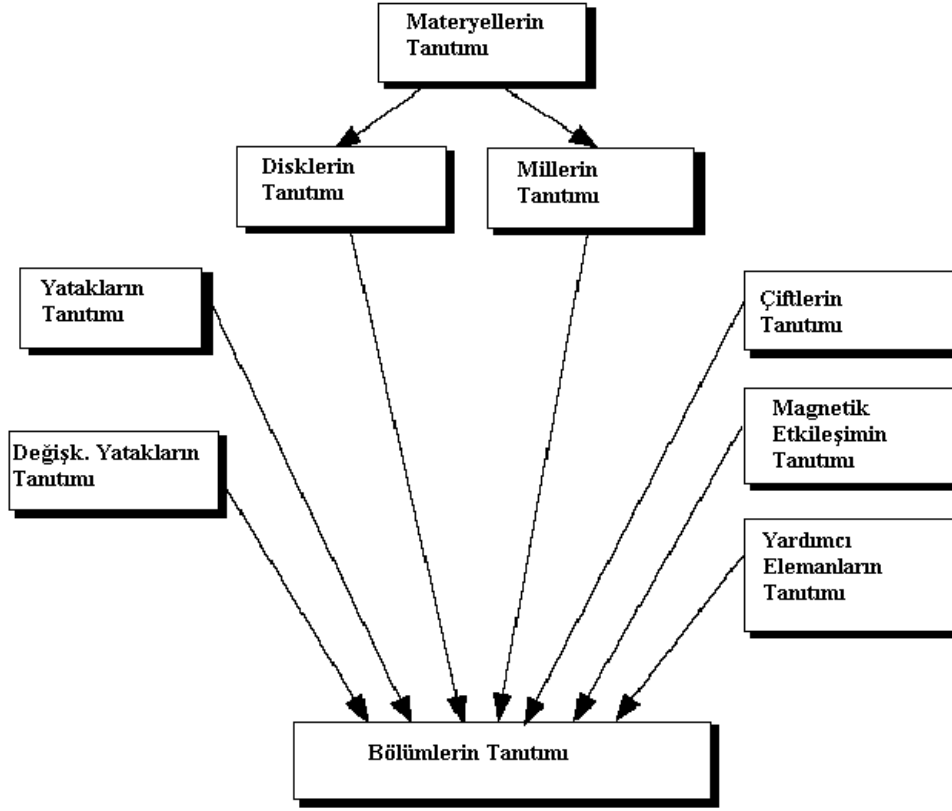
Aşağıdaki diyagram (Şekil 8) RotorInsa ön işlem programının nasıl çalıştığını göstermektedir.



Şekil 8. İşlem diyagramı

Ortalama veri ön işlem kısmında .int uzantılı dosya olarak depolanır. Böylelikle rotorun görüntüsünü her zaman için görebilme olasılığı oluşur. Tanımlama yapıldığında yazılım .dat uzantılı bir dosyayı RotorInsa yazılımında kullanmak üzere üretir.

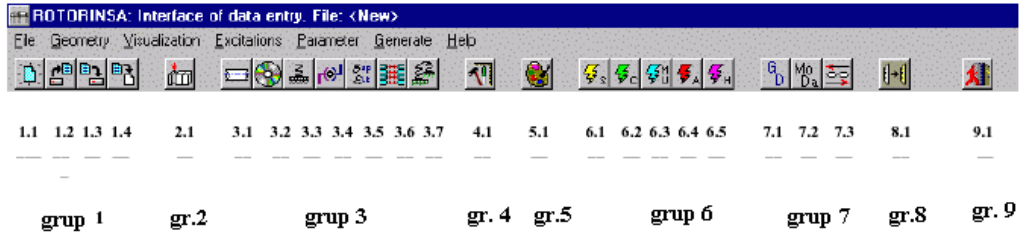
Aşağıdaki akış diyagramı (Şekil 9) rotorun geometrik yapısını tanımlamada kullanılır.



Şekil 9. Rotorun geometrik tanıtımı

2.2.1.1. 2. Yazılımın Tanıtımı

Yazılımla ilgili ana sayfa tanıtımı Şekil 10’da gösterilmiştir.



Şekil 10. Yazılımın ana sayfası

Butonlar ise 9 grupta listelenebilir.

Grup 1: Dosya

Buton 1.1 : Yeni bir geometrik tanımlama başlatır.

Buton 1.2 : Yeni ya da eski bir geometrik tanımlama dosyası açar.

Buton 1.3 : Çalışılmakta olan dosyayı başka bir dosya ismiyle kaydeder.

Grup 2: Bölüm

Buton 2.1: Bölüm oluşturur, işler ve değiştirir.

Grup 3: Eleman

Buton 3.1: Milleri oluşturur, işler, değiştirir ve kaldırır.

Buton 3.2: Diskleri oluşturur, işler, değiştirir ve kaldırır.

Buton 3.3: Yatakları oluşturur, işler, değiştirir ve kaldırır.

Buton 3.4: Bağlantıları oluşturur, işler, değiştirir ve kaldırır.

Buton 3.5: Yardımcı elemanları oluşturur, işler, değiştirir ve kaldırır.

Buton 3.6: Lineerleştirilmiş manyetik etkileşimleri oluşturur, işler, değiştirir ve kaldırır.

Buton 3.7: Değişken milleri oluşturur, işler, değiştirir ve kaldırır.

Grup 4: Malzeme

Buton 4.1: Malzemeyi oluşturur, işler, değiştirir ve kaldırır.

Grup 5: Görünüm

Buton 5.1: Sistemin geometrik tanımlamasını grafik modda gösterir.

Grup 6: Uyarıların Tanıtımı

Buton 6.1: Statik uyarım

Buton 6.2: Campbell uyarımı

Buton 6.3: Dengelenmemiş kütle uyarımı

Buton 6.4: Asenkronize uyarım

Buton 6.5: Harmonik uyarım

Grup 7: Tamamlayıcı veri

Buton 7.1: Genel verinin tanıtımı(bütün bölümler için)

Buton 7.2: Modal sönümlerin tanıtımı

Buton 7.3: Sınır şartlarının tanıtımı

Grup 8: RotorInsa veri dosyasının tanımlanması

Buton 8.1: Sonuç dosyasının adının tanımlanması (.dat uzantılı)

Grup 9: RotorInsa yazılımından çıkma

Buton 9.1: Çıkış

2.2.1.2. Son İşlem Bölümü

Ön işlem bölümünde elde edilen .dat uzantılı dosya kullanılarak son işlem bölümünde hesaplamalar yapılır. Son işlem bölümünde rotor programında hesaplama yapabilmek için elde edilen dat uzantılı dosyaların aynı klasör içinde bulunması gerekir.

Oluşturulan veri dosyası aşağıdaki işlem adımlarından sonra sonuçları verebilecek duruma gelir. Programın ana menüsü Şekil 11’de gösterilmiştir.

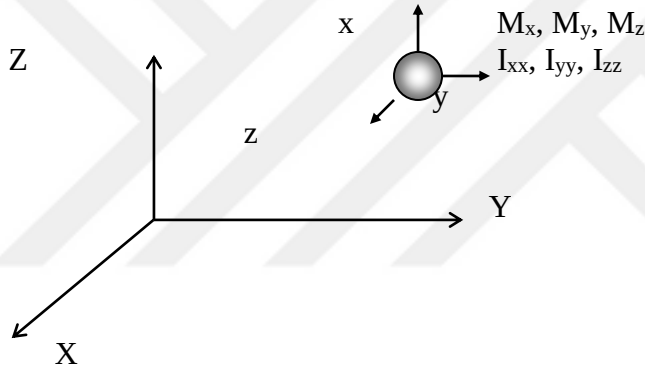
1.	VERİ DOSYASININ DOSYA İSMİNİ GİRİNİZ
2.	GEOMETRİYİ GÖSTERİNİZ (.dat)
3.	ANALİZİ GERÇEKLEŞTİRİNİZ(.dat ve .arc)
4.	SONUÇLARI GÖSTERİNİZ(.tra)
5.	SON
SEÇİMİNİZİ YAPINIZ : ... ↵	

Şekil 11. RotorInsa programının son işlem kısmına ait ana menüsü

2.2.2 ANSYS Yazılımı

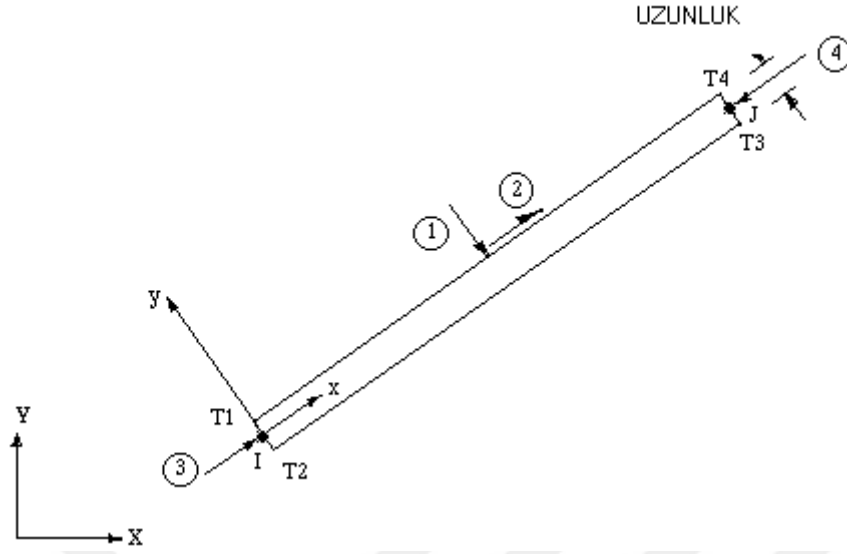
ANSYS yazılımı üç kısımdan oluşur. Bunlar ön işlem bölümü, çözüm bölümü ve sonuç bölümleridir. Ön işlem bölümünde, problemlerin çözümünde kullanılan eleman tipleri ve özellikleri aşağıda açıklanmıştır.

MASS21: Bu eleman tipi (Şekil 12) 6 serbestlik derecesine kadar çıkabilen bir nokta elemanıdır. Bu serbestlik dereceleri x, y ve z yönlerinde dönmeler ve yine x, y ve z yönlerinde ki yer değişimlerinden oluşur. Bu eleman tipi için tek düğüm noktası tanımlı yeterlidir. Malzeme özellikleri girilmesi gerekmez. Eleman sabitleri olarak kütleler (MASSX, MASSY, MASSZ) ve atalet momentleri (I_{xx} , I_{yy} ve I_{zz}) girilir.



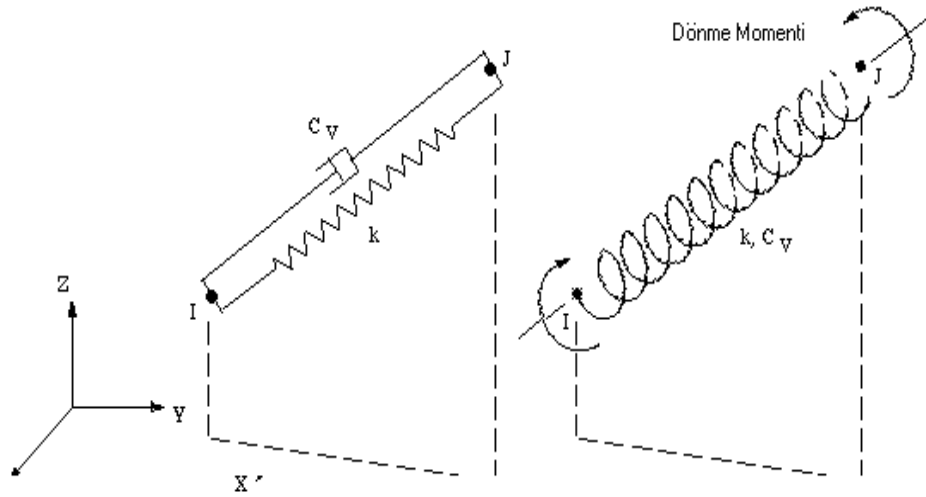
Şekil 12. MASS21 elemanının yapısı

BEAM3(2-D Elastik Kiriş): Bu eleman tipi (Şekil 13) burulma, basınç ve eğilme kapasitesine sahiptir. Her düğüm noktasında üç serbestlik derecesi bulunur. x ve y yönlerinde yer değişimi ve z eksenini boyunca dönme gösterir. I ve J düğüm noktalarından oluşur. Eleman özellikleri olarak alan, atalet momenti(I_{zz}), uzunluk gibi eleman özellikleri girilebilir. Bunun yanında malzeme özellikleri olarak elastisite modülü, yoğunluk, sönüm durumu girilir.



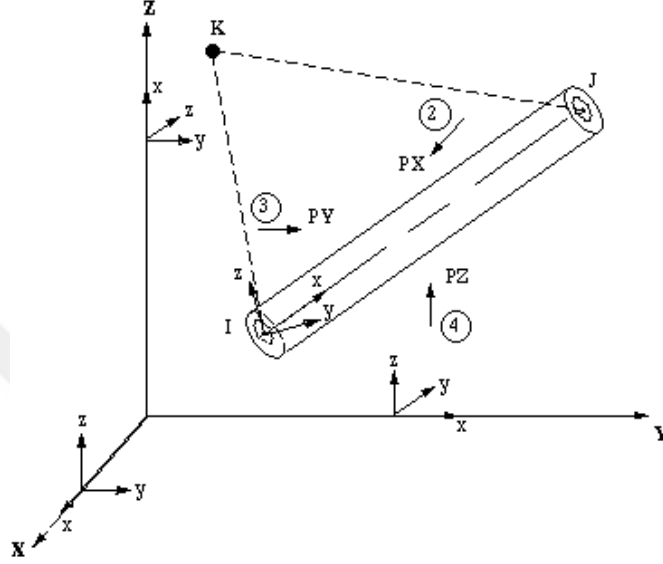
Şekil 13. BEAM3 elemanına ait iki boyutlu elastik kirişin şematik gösterimi

COMBIN14 (Yay-Sönüm): Bu eleman tipi burulma özelliğine sahip fakat kütleye sahip değildir. Kütle (MASS21 elemanı) eklenerek dahil edilir. Malzeme özelliklerinin girilmesine gerek yoktur. Eleman özellikleri için ise yay katsayısı ve sönüm katsayısı girilir.



Şekil 14. COMBIN14 elemanına ait yay- sönüm elemanının şematik gösterimi

PIPE16 (Elastik Düz Boru): Bu eleman tipi (Şekil 15) eksenel olmayan bir eleman tipi olup, 6 serbestlik derecesine sahiptir. Üç boyutlu kiriş elemana benzer özellikler gösterip, simetrik ve standart boru geometrisinden dolayı modellemede basitlik sağlar.



Şekil 15. PIPE 16 eleman

2.3. Problemler

Analizi yapılan problemler dört kısımdan oluşmaktadır. Bunlar sırasıyla:

1. İki disk ve milden oluşan sistem
2. Kademeli mil ve tekli diskten oluşan sistem
3. Üniform mil ve farklı kütleli üç diskten oluşan sistem
4. Üniform mil, farklı kütlelere sahip diskler ve yatak elemanlarından oluşan sistem

şeklinde. Problemler iki farklı yazılımla çözümlenerek elde edilen sonuçlar, teorik sonuçlar, P.H.Matruria'nın MATLAB programıyla oluşturduğu sonlu elemanlar yazılımından elde ettiği sonuçlar, Transfer Matris Yöntemi sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Dört problem için geçerli olan malzeme özellikleri aşağıda (Tablo 1) verilmiştir.

Tablo 1. Problemlere ait malzeme özellikleri

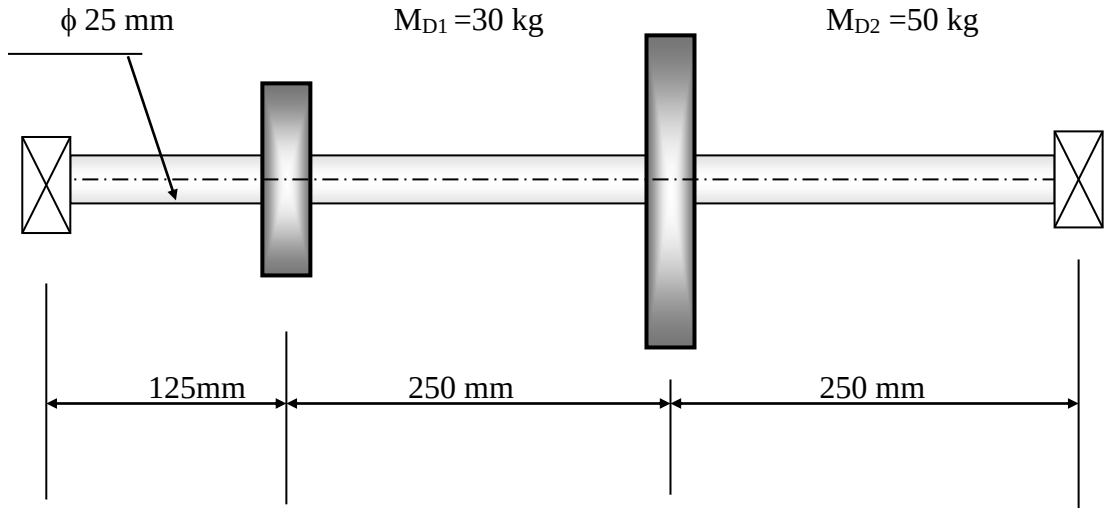
Elastisite Modülü (E)	:	2.10^{11} Pa
Yoğunluk (ρ)	:	7800 kg/m^3
Poisson Oranı (ν)	:	0.3

Şimdi problemleri daha detaylı bir şekilde inceleyelim.

2.3.1 Problem 1: İki disk ve mil sistemi

Ele alınan ilk problem Şekil 16'da gösterildiği gibi eş çaplı bir mil ve farklı kütlelere sahip iki diskten oluşmuştur. Sistem basit mesnetli olarak yataklanmıştır.

Problem başlangıç olarak RotorInsa yazılımıyla ve daha sonra da ANSYS ile aşağıdaki şekillerde çözülerek doğal frekans değerleri bulunmuştur.



Şekil 16. İki disk ve eş çaplı mil sistemi

Problemin farklı yazılımlarla çözülürken izlenen işlem adımları aşağıdaki şekildedir.

2.3.1.1 RotorInsa Yazılımı ile Çözüm

Problemin RotorInsa yazılımı kullanılarak çözümüne öncelikli olarak ön işlem kısmında geometri oluşturularak başlanılmıştır. 7 düğüm noktasından oluşacak şekilde sistemin geometrisi oluşturulmuştur. Ön işlem kısmında elde edilen veri dosyası kullanılarak çözüm gerçekleştirilmiş ve de doğal frekans değerleri bulunmuştur.

İşlem Adımları:

1. Malzeme özelliklerini tanımlama

Malzeme özellikleri Tablo 1’de verildiği gibi girilir.

2. Bölümlerinin tanıtımı

Sistem 6 parçaya bölünmüştür. Aşağıdaki tabloda(Tablo 2) sistemin her bölümüne ait uzunluklar verilmiş, ayrıca hangi bölümün hangi parçaya bağlantılı olduğu gösterilmiştir.

Tablo 2. RotorInsa yazılımında kullanılan birinci probleme ait bölüm uzunlukları

Bölüm	Uzunluk(mm)	Bağlantılı Olduğu Bölüm
1	62.5	-
2	62.5	1 (sağ taraf)
3	125	2 (sağ taraf)
4	125	3 (sağ taraf)
5	125	4 (sağ taraf)
6	125	5 (sağ taraf)

3. Millerin Tanıtımı

Problemde yalnızca bir mil kullanılmıştır. Mile ait özellikler sabit olup yazılımda aşağıdaki şekilde (Tablo 3) girilmiştir.

Tablo 3. İki disk ve milden oluşan sisteme ait mil özellikleri

Mil Numarası	Sol çap	Sağ çap
1	25 mm	25 mm

4. Disklerin Tanıtımı

Disklere ait olan özellikler aşağıdaki tabloda (Tablo 4) verilmiştir.

Tablo 4. İki disk ve milden oluşan sistemde bulunan disklerin özellikleri

Disk	Kütle M_D (kg)	Dış çap D_2 (mm)	İç çap D_1 (mm)	Kalınlık h (mm)	Atalet Momenti $(I_{x/z})(\text{kg.m}^2)$	Atalet Momenti $(I_y) (\text{kg.m}^2)$
1	30	328	100	50	0.227392	0.442283
2	50	382	100	60	0.502601	0.975202

Burada birinci disk için atalet momenti değerleri aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$I_{Dx} = I_{Dz} = \frac{M_D}{12} (3R_2^2 + R_1^2 + h^2) = \frac{30}{12} (3(0.164)^2 + 3(0.05)^2 + 0.05^2) = 0.227392 \text{ kg.m}^2$$

$$I_{Dy} = \frac{M_D}{2} (R_1^2 + R_2^2) = \frac{30}{2} (0.05^2 + 0.164^2) = 0.442283 \text{ kg.m}^2$$

İkinci disk içinde aynı işlem adımlarından geçilerek atalet momentleri hesaplanır.

5. Bölümlere eleman atanması

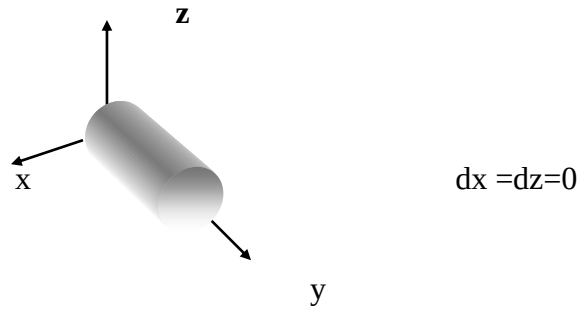
Oluşturulan bölümlere sistem geometrisinden uzaklaşmayacak şekilde Tablo 5’de gösterildiği gibi mil ve disk elemanları atanmıştır.

Tablo 5. İki disk ve mil sisteminde oluşturulan bölümlere eleman atanması

Bölüm	Yüklenen Elemanlar
1	Mil
2	Mil +Disk 1
3	Mil
4	Mil +Disk 2
5	Mil
6	Mil

6. Sınır Şartları

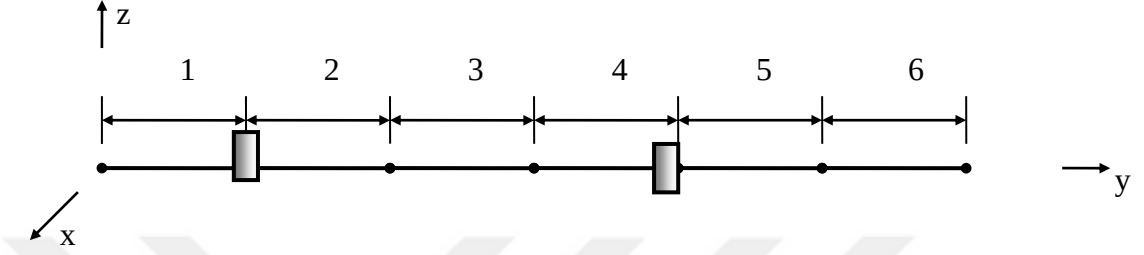
Sistem Şekil17’de gösterildiği gibi uç noktalarından x ve z yönlerinde sınırlandırılmıştır.



Şekil 17. İki disk ve eş çaplı mil sistemine ait sınır şartları

7. Sonlu Eleman Modeli

İki disk ve milden oluşan rotor sistemi aşağıda Şekil 18’de gösterildiği gibi 6 bölüme ayrılarak çözümü yapılmıştır.



Şekil 18. İki disk ve mil sisteminin sonlu eleman gösterimi

9. Elde edilen veri dosyası

Ön işlem sonucunda aşağıda Tablo 6’de verilen .dat uzantılı veri dosyası elde edilmiştir.

Tablo 6. Birinci problemin Rotorİnsa yazılımından elde edilen veri dosyası

Veri Dosyası Değerleri	Açıklama	Ek Açıklama
5,7,2,4,1,0,0,1,	Genel veriler	Hangi tür analiz yapılacağını gösterir. Burada Modal Analiz seçilmiştir.
1,0, 2,0.0625, 3,0.125, 4,0.25, 5,0.375, 6,0.5, 7,0.625,	Düğüm Noktaları	Sistem bölümlerine göre oluşan düğüm noktaları değerleri ve koordinatlarını verir.
99999		
1,1,1,0,0, 7,1,1,0,0,	Sınır Şartları	1. ve 7. düğüm noktaları x ve z yönünde mesnetlenmiştir.
99999		

Tablo 6'nın devamı

1,6, 1,1,2,1,1,1, 2,2,3,1,2,2, 3,3,4,1,3,3, 4,4,5,1,4,4, 5,5,6,1,5,5, 6,6,7,1,6,6,	Mil Elemanı	Mil elemanına ait özellikleri gösterir.
2,2, 7,3,0,1,7, 8,5,0,1,8,	Disk Elemanı	Disk elemanının yerleşimini gösterir.
99999		
1,2e+11,7800,0.3,	Malzeme Özellikleri	Malzemeye ait elastisite modülü, yoğunluk ve poisson oranı girilir.
1,0.0125,0,0.,2., 2,0.0125,0,0.,2., 3,0.0125,0,0.,2., 4,0.0125,0,0.,2., 5,0.0125,0,0.,2., 6,0.0125,0,0.,2., 7,30.0001,0.227392,0.442283,1., 8,50.0004,0.502601,0.975202,1.,	Geometrik Özellikler	Mil ve diske ait geometrik özellikler girilir.
99999		
99999		
99999		
0,0,30000,5000,	Dönme hızı ve artım miktarı	
99999		
99999		

9. Veri dosyasının koşturulması

Elde edilen veri dosyası daha sonra yazılımın son işlem kısmında koşturulmuştur.

2.3.1.2 ANSYS Yazılımı ile Çözüm

Ele aldığımız iki disk ve mil sisteminin modal analizi ANSYS yazılımı kullanılarak iki farklı eleman tipine göre yapılmıştır. İlk çözümde eleman tipi olarak BEAM3 eleman

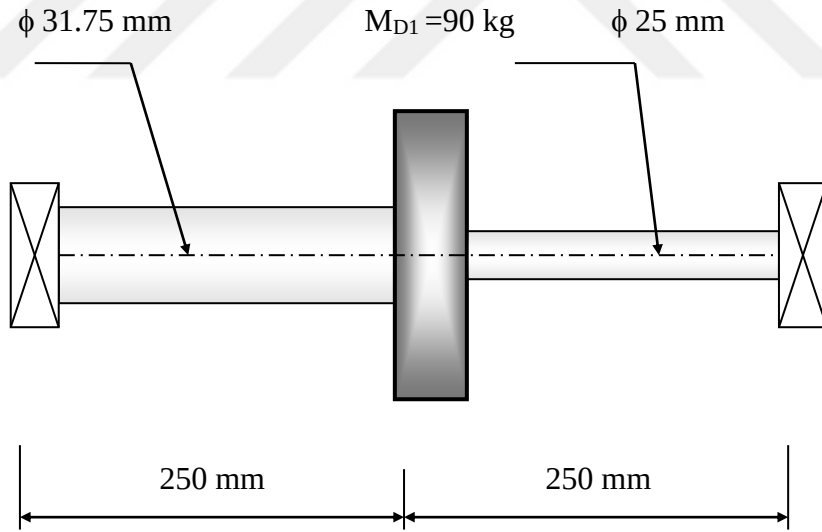
seçilirken ikinci çözüm için kiriş eleman yerine PIPE16 eleman kullanılmıştır. Her iki çözümde de bu eleman tiplerine ek eleman olarak MASS21 eleman seçilmiştir. Modelleme yapılırken her iki eleman tipi kullanımında da öncelikli olarak düğüm noktaları oluşturulmuş ve daha sonra bu düğüm noktaları arasına modellemenin şekline göre elemanlar atanmıştır. Kullanılan eleman özellikleri ikinci bölümde anlatılmıştır.

2.3.2 Problem 2: Kademeli Mil ve Disk sistemi

Problem kademeli bir mile sahip olup tek disklidir. İzlenen adımlar ilk problemde olduğu gibidir.

Problem başlangıç olarak RotorInsa yazılımıyla ve daha sonra da ANSYS ile aşağıdaki şekillerde çözülerek doğal frekans değerleri bulunmuştur.

Problemin şematik çizimi ve ilgili veriler Şekil 19’da gösterilmiştir.



Şekil 19. Kademeli mil ve disk sisteminin şematik gösterimi

2.3.2.1 RotorInsa Yazılımı ile Çözüm

Problemin RotorInsa yazılımı kullanılarak çözümüne öncelikli olarak ön işlem kısmında geometri oluşturularak başlanmıştır.Ön işlem kısmında elde edilen veri dosyası kullanılarak çözüm gerçekleştirilmiş ve doğal frekans değerleri bulunmuştur.

İşlem Adımları:**1- Malzeme özelliklerini tanımlama**

Malzeme özellikleri Tablo 1’de verildiği gibi girilir.

2- Bölümlerinin tanıtımı

Bölüm uzunlukları Tablo 7’ da gösterildiği gibi eşit seçilmiştir.

Tablo 7. RotorInsa yazılımında kullanılan ikinci probleme ait bölüm uzunlukları

Bölüm	Uzunluk(mm)	Bağlantılı Olduğu Bölüm
1	125	-
2	125	1 (sağ taraf)
3	125	2 (sağ taraf)
4	125	3 (sağ taraf)

3- Millerin Tanıtımı

Millerin tanıtımıyla ilgili değerler Tablo 8’de verilmiştir.

Tablo 8. Kademeli mil ve disk sistemine ait mil özellikleri

Mil Numarası	Sol çap	Sağ çap
1	31.75 mm	31.75 mm
2	25 mm	25 mm

4- Disklerin Tanıtımı

Diske ait değerler Tablo 9’da verilmiştir.

Tablo 9. Kademeli mil ve disk sisteminde bulunan diskin özellikleri

Disk	Kütle M_D (kg)	Dış çap D_2 (mm)	İç çap D_1 (mm)	Kalınlık h (mm)	Atalet Momenti $(I_{x/z})(kg.m^2)$	Atalet Momenti $(I_y) (kg.m^2)$
1	90	386	100	100	.929517	1.70903

5- Bölümlere eleman atanması

RotorInsa yazılımında sistem belli bölümlere ayrılır ve her bölüm parçasına sistemin gerçek geometrisinden uzaklaşamayacak şekilde elemanlar atanır. Bölümlere eleman atılması Tablo 10'de gösterilmiştir.

Tablo 10. Kademeli mil ve disk sisteminde oluşturulan bölümlere eleman atanması

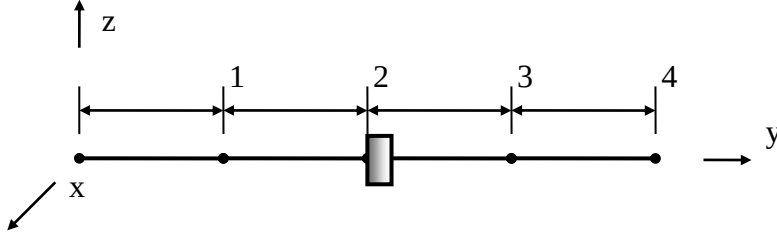
Bölüm	Yüklenen Elemanlar
1	Mil
2	Mil +Disk 1
3	Mil
4	Mil

6- Sınır Şartları

Sistem uç noktalarından x ve z yönlerinde sınırlandırılmıştır (Şekil 17).

7- Sonlu Eleman Modeli

Tek disk ve kademeli milden oluşan sistem aşağıda gösterildiği gibi 4 bölüme ayrılarak çözümü yapılmıştır. Şekil 20' de sistemin sonlu eleman bölümleri gösterilmiştir.



Şekil 20. Kademeli mil ve disk sisteminin sonlu eleman gösterimi

8. Elde edilen veri dosyası

Ele alınan problemin RotorInsa yazılımından elde edilen veri dosyası Tablo 13’de gösterilmiştir.

Tablo 11. İkinci problemin RotorInsa yazılımından elde edilen veri dosyası

Veri Değerleri	Açıklama	Ek Açıklama
5,9,2,,4,1,0,0,1,	Genel veriler	Hangi tür analiz yapılacağını gösterir. Burada Modal Analiz seçilmiştir.
1,0, 2,0.0625, 3,0.125, 4,0.1875, 5,0.25, 6,0.3125, 7,0.375, 8,0.4375, 9,0.5,	Düğüm Noktaları	Sistem bölümlerine göre oluşan düğüm noktaları değerleri ve koordinatlarını verir.
99999		
1,1,1,0,0, 9,1,1,0,0,	Sınır Şartları	1. ve 7. düğüm noktaları x ve z yönünde mesnetlenmiştir
99999		
1,8, 1,1,2,1,1,1, 2,2,3,1,1,1, 3,3,4,1,2,2, 4,4,5,1,2,2, 5,5,6,1,3,3, 6,6,7,1,3,3, 7,7,8,1,4,4, 8,8,9,1,4,4,	Mil Elemanı	Mil elemanına ait özellikleri gösterir.

Tablo 11'in devamı

2,1, 9,5,0,1,5, 99999	Disk Elemanı	Disk elemanının yerleşimini gösterir.
1,2e+11,7800,0.3,	Malzeme Özellikleri	Malzemeye ait elastisite modülü, yoğunluk ve poisson oranı girilir.
1,0.015875,0,0.,2., 2,0.015875,0,0.,2., 3,0.0125,0,0.,2., 4,0.0125,0,0.,2., 5,90.0006,0.929517,1.70903,1., 99999 99999 99999	Geometrik Özellikler	Mil ve diske ait geometrik özellikler girilir.
0,0,30000,5000, 99999	Dönme hızı ve artım miktarı	

9. Veri dosyasının koşturulması

Elde edilen veri dosyası daha sonra son işlem kısmında koşturulmuştur.

2.3.2.2. ANSYS Yazılımı ile Çözüm

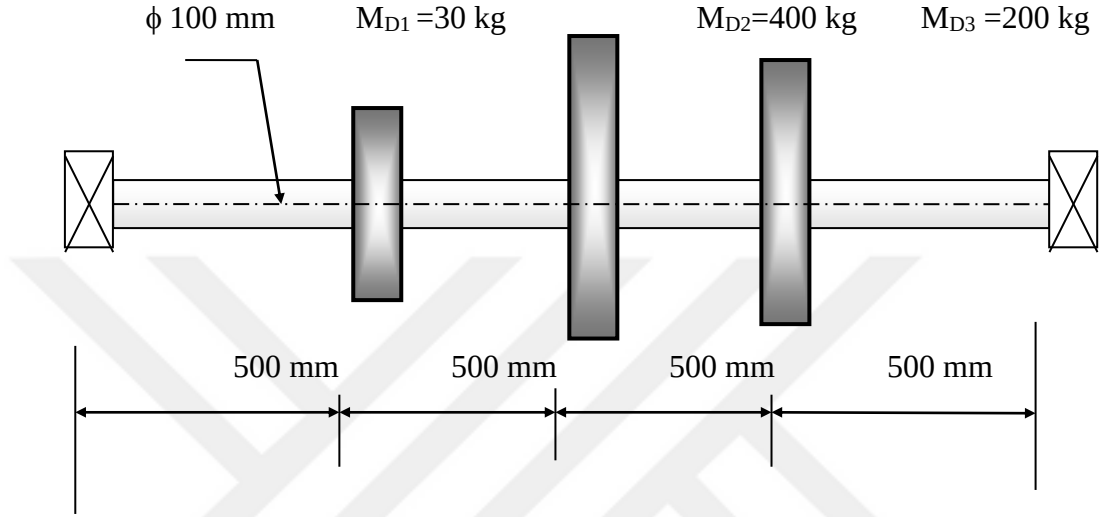
Tek disk ve kademeli milden oluşan sistem ANSYS yazılımı kullanılarak çözülürken önceki problemde de bahsedildiği gibi iki farklı eleman tipinde analiz yapılmıştır. İlk eleman tipi olarak BEAM3 elemanı daha sonra ise PIPE16 elemanı kullanılmıştır. Modelleme de öncelikli olarak 3 düğüm noktası oluşturulmuş ve daha sonra eleman atanmıştır. BEAM3 elemanı kullanılırken milin düzgün dağılımlı olmamasından ötürü iki farklı eleman sabiti kullanılmıştır.

2.3.3 Problem 3: Üç disk ve mil sistemi

Üçüncü problemde ise üç diskli bir mil sistemi incelenmiştir. Sistem basit mesnetli olarak yataklanmıştır.

Problem başlangıç olarak RotorInsa yazılımıyla ve daha sonra da ANSYS ile aşağıdaki şekillerde çözülerek doğal frekans değerleri bulunmuştur.

Problemin şematik çizimi ve ilgili veriler Şekil 21’de gösterilmiştir.



Şekil 21. Üç disk ve eş çaplı mil sistemi

2.3.3.1 RotorInsa Yazılımı ile Çözüm

Problemin RotorInsa yazılımı kullanılarak çözümüne öncelikli olarak ön işlem kısmında geometri oluşturularak başlanılmıştır.Ön işlem kısmında elde edilen veri dosyası kullanılarak çözüm gerçekleştirilmiş ve de doğal frekans değerleri bulunmuştur.

İşlem Adımları:

1- Malzeme özelliklerini tanımlama

Malzeme özellikleri Tablo 1’de verildiği gibi girilir.

2- Bölümlerinin tanıtımı

Bölümler ve ilgili uzunlukları Tablo 12’de gösterildiği gibi seçilmiştir.

Tablo 12. RotorInsa yazılımında kullanılan üçüncü probleme ait bölüm uzunlukları

Bölüm	Uzunluk(mm)	Bağlantılı Olduğu Bölüm
1	250	-
2	250	1 (sağ taraf)
3	250	2 (sağ taraf)
4	250	3 (sağ taraf)
5	250	4 (sağ taraf)
6	250	5 (sağ taraf)
7	250	6 (sağ taraf)
8	250	7 (sağ taraf)

3- Millerin Tanıtımı

Millerin tanıtımı ile ilgili değerler Tablo 13’de verilmiştir.

Tablo 13. Üç disk ve eş çaplı mil sistemine ait mil özellikleri

Mil Numarası	Sol çap	Sağ çap
1	100 mm	100 mm

4- Disklerin Tanıtımı

Disklere ait olan özellikler aşağıda Tablo 14’de verilmiştir.

Tablo 14. Üç disk ve eş çaplı mil sisteminde bulunan disklerin özellikleri

Disk	Kütle M_D (kg)	Dış çap D_2 (mm)	İç çap D_1 (mm)	Kalınlık h (mm)	Atalet Momenti $(I_{x/z})(kg.m^2)$	Atalet Momenti $(I_y) (kg.m^2)$
1	100	416	100	100	1.2286	2.39053
2	400	580	100	200	9.99514	17.3236
3	200	477	100	150	3.34558	5.94117

5- Bölümlere eleman atanması

Bölümlere eleman atanması Tablo 15’de gösterildiği gibi yapılmıştır.

Tablo 15. Üç disk ve eş çaplı mil sisteminde oluşturulan bölümlere eleman atanması

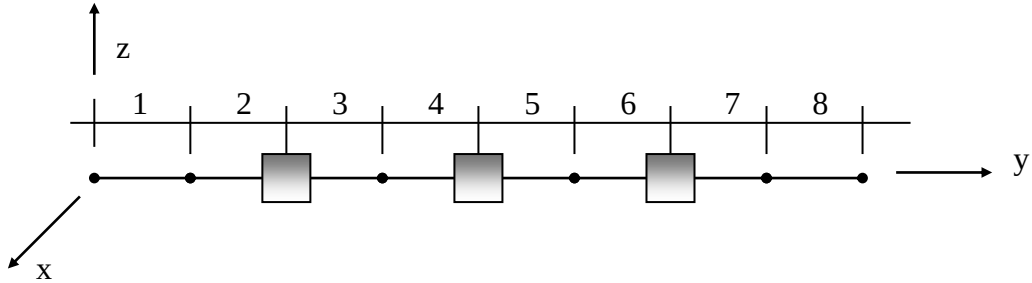
Bölüm	Yüklenen Elemanlar
1	Mil
2	Mil +Disk 1
3	Mil
4	Mil +Disk 2
5	Mil
6	Mil + Disk 3
7	Mil
8	Mil

6- Sınır Şartları

Sistem uç noktalarından x ve z yönlerinde sınırlandırılmıştır (Şekil 17).

7- Sonlu Eleman Modeli

Üç disk ve milden oluşan rotor sistemi aşağıda Şekil 22’de gösterildiği gibi 8 bölüme ayrılarak çözümü yapılmıştır.



Şekil 22. Üç disk ve mil sisteminin sonlu eleman gösterimi

8- Elde edilen veri dosyası

Problemin RotorInsa yazılımından elde edilen veri dosyası Tablo 16’da verilmiştir.

Tablo 16. Üçüncü problemin RotorInsa yazılımından elde edilen veri dosyası

Veri Değerleri	Açıklama	Ek Açıklama
5,9,2.,4,1,0,0,1, 1,0, 2,0.1, 3,0.2, 4,0.35, 5,0.5, 6,0.75, 7,1, 8,1.15, 9,1.,3, 99999	Genel veriler	Hangi tür analiz yapılacağını gösterir. Burada Modal Analiz seçilmiştir.
1,0,0,0,0, 9,0,0,0,0, 99999	Sınır Şartları	1. ve 7. düğüm noktaları x ve z yönünde mesnetlenmiştir
1,8, 1,1,2,1,1,1, 2,2,3,1,2,2, 3,3,4,1,3,3, 4,4,5,1,4,4, 5,5,6,1,5,5, 6,6,7,1,6,6, 7,7,8,1,7,7, 8,8,9,1,8,8, 2,3, 9,3,0,1,9, 10,5,0,1,10, 11,7,0,1,11, 99999	Mil Elemanı	Mil elemanına ait özellikleri gösterir.
	Disk Elemanı	Disk elemanının yerleşimini gösterir.
1,2e+11,7800,0.3,	Malzeme Özellikleri	Malzemeye ait elastisite modülü, yoğunluk ve poisson oranı girilir.

Tablo 16'nın devamı

1,0.05,0.,2.,		
2,0.05,0,0.,2.,		
3,0.05,0,0.,2.,		
4,0.05,0,0.,2.,		
5,0.05,0,0.,2.,	Geometrik	Mil ve diske ait geometrik özellikler girilir.
6,0.05,0,0.,2.,	Özellikler	
7,0.05,0,0.,2.,		
8,0.05,0,0.,2.,		
9,100,1.2286,2.39053,1.,		
10,400,9.9951417,3236,1.,		
11,200,3.34558,5.94117,1.,		
99999		
99999		
99999		
	Dönme hızı ve	
0,0,30000,5000,	artım miktarı	
99999		
99999		
99999		

9- Veri dosyasının koşturulması

Elde edilen veri dosyası yazılımın son işlem kısmında koşturulmuştur.

2.3.3.2 ANSYS Yazılımı ile Çözüm

Ele aldığımız üç disk ve mil sisteminin modal analizi ANSYS yazılımı kullanılarak iki farklı eleman tipine göre yapılmıştır. İlk çözümde eleman tipi olarak BEAM3 eleman seçilirken ikinci çözüm için giriş eleman yerine PIPE16 eleman kullanılmıştır. Her iki çözümde de bu eleman tiplerine ek eleman olarak MASS21 eleman seçilmiştir.

2.3.4 Problem 4: Endüstriyel Rotor

Son olarak ise endüstride sıklıkla rastlanabilecek bir rotor sistemi çözülerek doğal frekans değerleri bulunmuştur.

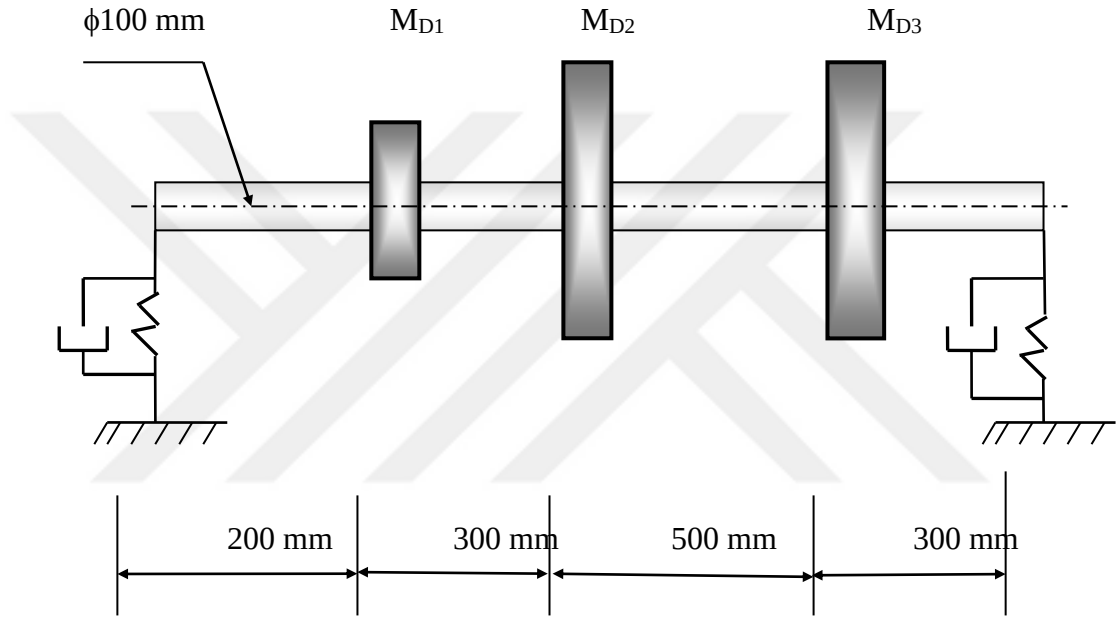
Sisteme ait malzeme özellikleri Tablo 1' de verilmiştir. Yatak özellikleri ise:

$$k_{xx} = 5 \times 10^7 \text{ N/m}, k_{zz} = 7 \times 10^7 \text{ N/m}, k_{xz} = k_{zx} = 0$$

$$c_{xx} = 5 \times 10^2 \text{ N/m/s}, c_{zz} = 7 \times 10^2 \text{ N/m/s}, c_{xz} = c_{zx} = 0$$

şeklindedir. Probleme ilgili diğer bilgiler detaylı olarak RotorInsa yazılımı kullanılarak yapılan çözümde anlatılmıştır.

Problemin şematik çizimi Şekil 23’de gösterilmiştir.



Şekil 23. Endüstriyel rotor sisteminin şematik gösterimi

2.3.4.1 RotorInsa Yazılımı ile Çözüm

Problemin RotorInsa yazılımı kullanılarak çözümüne öncelikli olarak ön işlem kısmında geometri oluşturularak başlanmıştır.Ön işlem kısmında elde edilen veri dosyası kullanılarak çözüm gerçekleştirilmiş ve doğal frekans değerleri bulunmuştur.

İşlem Adımları:

1. Malzeme özelliklerini tanımlama

Malzeme özellikleri Tablo 1’de verildiği gibi girilir.

2. Bölümlerinin tanıtımı

Bölümlerin tanıtımı Tablo 17’de gösterilmiştir.

Tablo 17. RotorInsa yazılımında kullanılan dördüncü probleme ait bölüm uzunlukları

Bölüm	Uzunluk(mm)	Bağlantılı Olduğu Bölüm
1	100	-
2	100	1 (sağ taraf)
3	150	2 (sağ taraf)
4	150	3 (sağ taraf)
5	250	4 (sağ taraf)
6	250	5 (sağ taraf)
7	150	6 (sağ taraf)
8	150	7 (sağ taraf)

3. Millerin Tanıtımı

Millerin tanıtımı Tablo 18’de verilmiştir.

Tablo 18. Endüstriyel rotor sistemine ait mil özellikleri

Mil Numarası	Sol çap	Sağ çap
1	100 mm	100 mm

4. Disklerin Tanıtımı

Problemde disklerle ait kalınlıklar, dış çap ve iç çap değerleri verilmiştir. Disklerin kütlesi ve atalet momentleri aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

Birinci diskin kütlesi ve atalet momentleri için hesap örneği yapılmıştır. Diğer disklerinde aynı şekilde kütle ve atalet momentleri hesaplanmıştır. Sonuç değerleri Tablo 19’da verilmiştir.

Disk in kütlesi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$M_{D1} = \pi(R_2^2 - R_1^2)h \rho = 14.5801 \text{ kg}$$

Tablo 19. Endüstriyel rotor sisteminde bulunan diskin özellikleri

Disk	Kütle M_D (kg)	Dış çap D_2 (mm)	İç çap D_1 (mm)	Kalınlık h (mm)	Atalet Momenti $(I_{x/z})(\text{kg.m}^2)$	Atalet Momenti $(I_y) (\text{kg.m}^2)$
1	14.5801	240	100	50	0.066386	0.12302
2	45.9458	400	100	50	0.497746	0.976348
3	55.135	400	100	60	0.602349	1.17162

5. Bölümlere eleman atanması

Bölümlere eleman atanması Tablo 20’de gösterildiği gibi yapılmıştır.

Tablo 20. Endüstriyel rotor sisteminde oluşturulan bölümlere eleman atanması

Bölüm	Yüklenen Elemanlar
1	Mil +Yatak1
2	Mil +Disk 1
3	Mil
4	Mil +Disk 2
5	Mil
6	Mil + Disk 3
7	Mil
8	Mil +Yatak 2

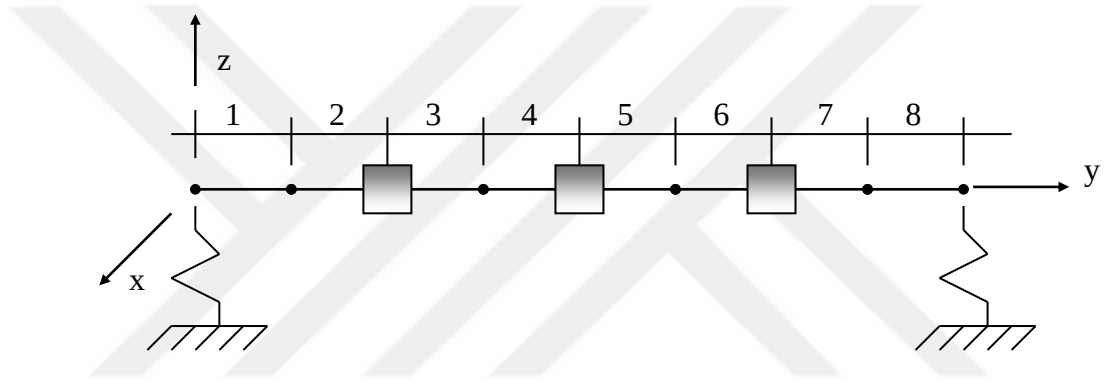
RotorInsa yazılımında sistem belli bölümlere ayrılır ve her bölüm parçasına sistemin gerçek geometrisinden uzaklaşlamayacak şekilde elemanlar atanır.

6. Sınır Şartları

Sistem uç noktalarından x ve z yönlerinde sınırlandırılmamıştır.

7. Sonlu Eleman Modeli

Üç disk ve ve milden oluşan rotor sistemi Şekil 24’de gösterildiği gibi 8 bölüme ayrılarak çözümü yapılmıştır.



Şekil 24. Endüstriyel Rotorun sonlu eleman gösterimi

8. Elde edilen veri dosyası

RotorInsa yazılımından elde edilen veri dosyası Tablo 21’de verilmiştir.

Tablo 21. Dördüncü problemin RotorInsa yazılımından elde edilen veri dosyası

Veri Değerleri	Açıklama	Ek Açıklama
5,9,2.,4,1,0,0,1, 1,0, 2,0.1, 3,0.2, 4,0.35, 5,0.5, 6,0.75, 7,1, 8,1.15, 9,1.3, 99999	Genel veriler	Hangi tür analiz yapılacağını gösterir. Burada Modal Analiz seçilmiştir.
1,0,0,0,0, 9,0,0,0,0, 99999	Sınır Şartları	1. ve 7. düğüm noktaları x ve z yönünde mesnetlenmiştir
1,8, 1,1,2,1,1,1, 2,2,3,1,2,2, 3,3,4,1,3,3, 4,4,5,1,4,4, 5,5,6,1,5,5, 6,6,7,1,6,6, 7,7,8,1,7,7, 8,8,9,1,8,8, 2,3, 9,3,0,1,9, 10,5,0,1,10, 11,7,0,1,11, 3,2, 12,1,0,0,12,13, 13,9,0,0,12,13, 99999	Mil Elemanı	Mil elemanına ait özellikleri gösterir.
2,3, 9,3,0,1,9, 10,5,0,1,10, 11,7,0,1,11, 3,2, 12,1,0,0,12,13, 13,9,0,0,12,13, 99999	Disk Elemanı	Disk elemanının yerleşimini gösterir. Yatak elemanlarına ait özellikleri gösterir.
1,2e+11,7800,0.3, Malzeme Özellikleri 99999	Malzeme Özellikleri	Malzemeye ait elastisite modülü, yoğunluk ve poisson oranı gösterilmiştir.
0,0,30000,5000, 99999	Dönme hızı ve artım miktarı	

9. Veri dosyasının koşturulması

Elde edilen veri dosyası daha sonra son işlem kısmında koşturulmuştur.

2.3.4.2 ANSYS Yazılımı ile Çözüm

Ele aldığımız üç disk ve mil sisteminin modal analizi ANSYS yazılımı kullanılarak iki farklı eleman tipine göre yapılmıştır. İlk çözümde eleman tipi olarak BEAM3 eleman seçilirken ikinci çözüm için kiriş eleman yerine PIPE16 eleman kullanılmıştır. Her iki çözümde de bu eleman tiplerine ek eleman olarak MASS21 eleman ve yataklar için ise COMBIN14 eleman seçilmiştir.



3. BULGULAR

3.1. Giriş

Ele alınan dört farklı problemin modal analizi RotorInsa ve ANSYS programları kullanılarak yapılmıştır.

Problemlerin çözümü olarak rotorun çeşitli çalışma hızlarındaki doğal frekans değerleri ve mod şekilleri elde edilmiştir. Endüstriyel rotor problemi için ek olarak Campell diyagramı da verilmiştir. Ayrıca problemlerin birinci mod doğal frekans değerlerinin diğer bazı yöntemlerle bulunmuş olan değerleri ile bir karşılaştırılması yapılmıştır.

3.2. Problemler

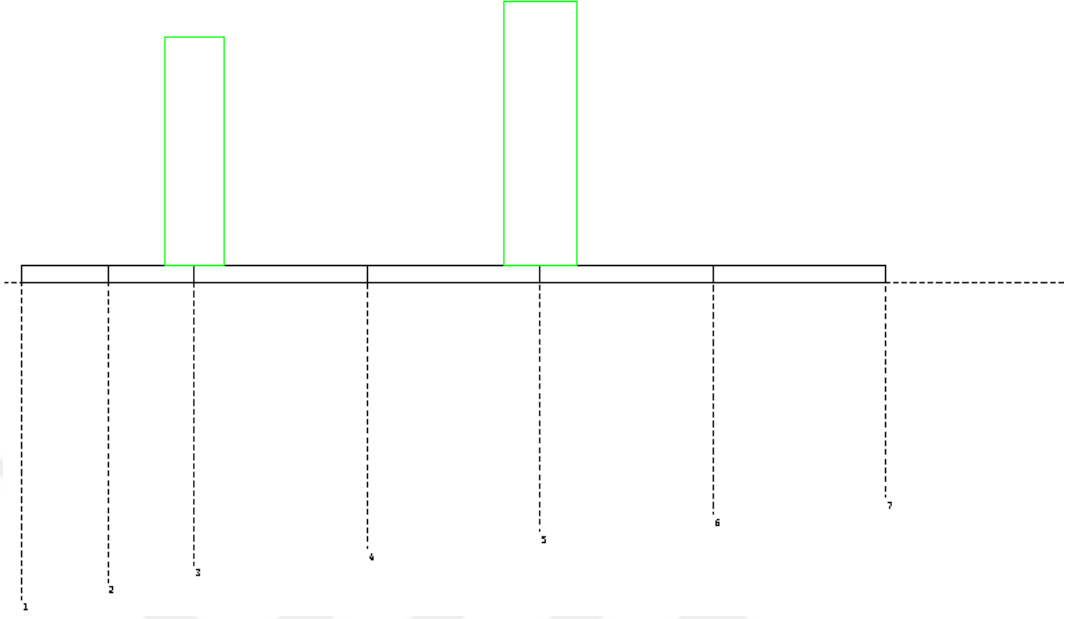
3.2.1. İki Disk ve Eş Dağılımlı Milden Oluşan Sistemin Modal Analizi

3.2.1.1. RotorInsa Yazılımı İle Elde Edilen Bulgular

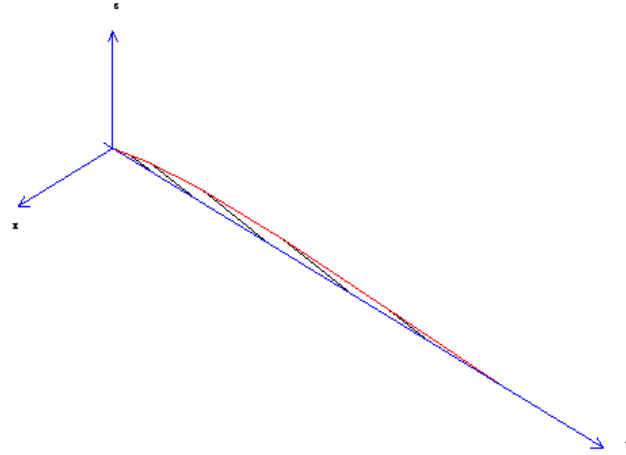
Sistemin RotorInsa programı yardımıyla oluşturulan sonlu elemanlar gösterimi Şekil 25’de gösterilmiştir. Veri dosyasında istenilen modal analizi yazılımının son işlem kısmında yapılarak Tablo 22’de verilmiş olan modlara karşılık gelen doğal frekans değerleri bulunmuştur. İlgili mod şekilleri birinci mod için Şekil 26’da ve ikinci mod için Şekil 27’de verilmiştir. Program sonucu elde edilen sonuç dosyalarının görüntülenebilmesi için Ghostview programı kullanılmıştır.

Tablo 22. Birinci problem için elde edilen doğal frekans değerleri

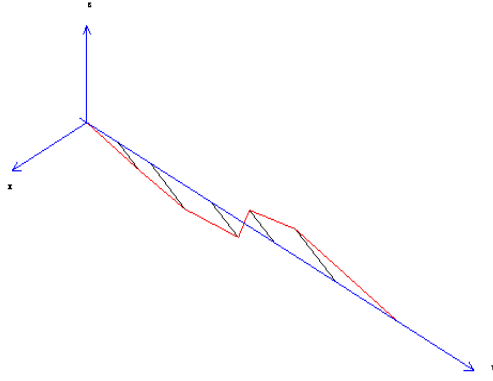
Mod	Doğal Frekans Değerleri
1	17.64 Hz
2	56.43 Hz



Şekil 25. İki disk ve mil sisteminin RotorInsa programı yardımıyla oluşturulan sonlu elemanlar gösterimi



Şekil 26. İki disk ve milden oluşan sistemin birinci mod şeklinin gösterimi



Şekil 27. İki disk ve milden oluşan sistemin ikinci mod şeklinin gösterimi

3.2.1.2. ANSYS Yazılımı İle Elde Edilen Bulgular

Sistemin ANSYS yazılımında kullanılan sonlu eleman şekli Şekil 28’de gösterilmiştir. Problemin ANSYS yazılımı ile elde edilen doğal frekans değerleri birinci ve ikinci mod için Tablo 23’de verilmiştir. İlgili mod şekilleri ise Şekil 29 ve Şekil 30’da gösterilmiştir.

Tablo 23. İki disk ve mil sisteminin ANSYS yazılımı kullanılarak bulunan doğal frekans değerleri

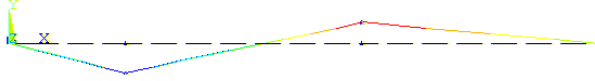
Mod	Doğal Frekans Değerleri	
	BEAM3	PIPE16
1	17.663 Hz	17.619 Hz
2	56.582 Hz	56.315 Hz



Şekil 28. İki disk ve eş dağılımlı milden oluşan sisteminin ANSYS yazılımında kullanılan eleman şekli.



Şekil 29. İki disk ve eş dağılımlı milden oluşan sistemin ANSYS yazılımı kullanılarak yapılan modal analiz sonucu elde edilen birinci mod şekli.



Şekil 30. İki disk ve eş dağılımlı milden oluşan sisteminin ANSYS yazılımı kullanılarak yapılan modal analiz sonucu elde edilen ikinci mod şekli.

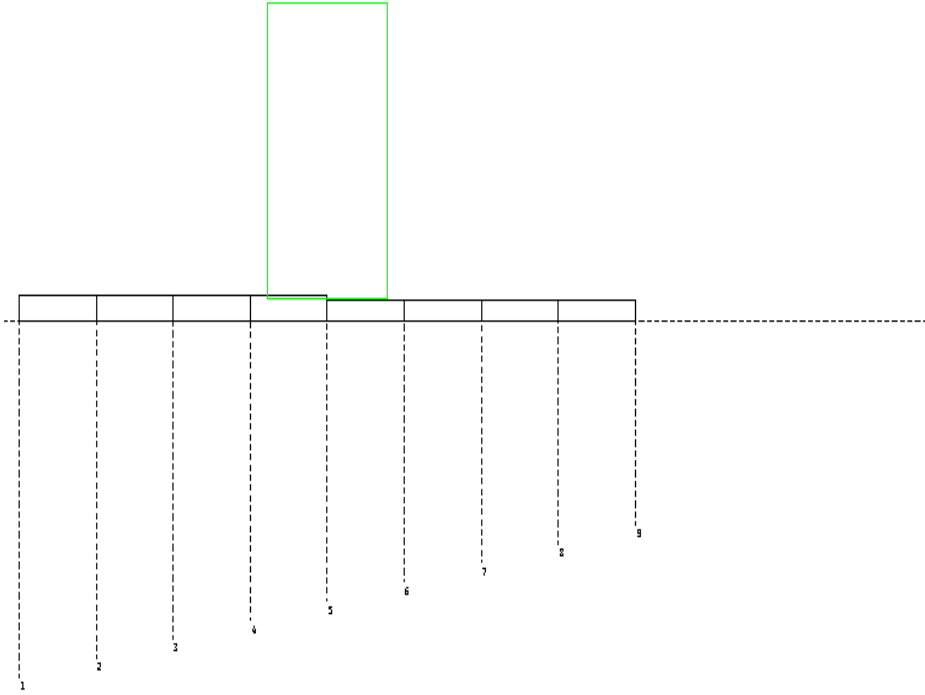
3.2.2. Tek Disk ve Kademeli Milden Oluşan Sistemin Modal Analizi

3.2.2.1. RotorInsa Yazılımı İle Elde Edilen Bulgular

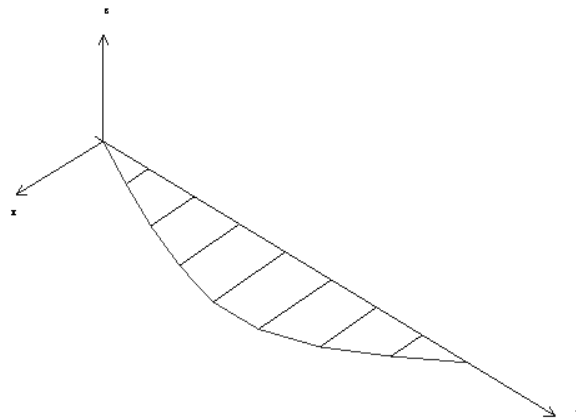
RotorInsa programı yardımıyla oluşturulan sonlu elemanlar gösterimi Şekil 31’de gösterilmiştir. Veri dosyasında istenilen modal analizi yazılımın son işlem kısmında yapılarak Tablo 24’de verilmiş olan modlara karşılık gelen doğal frekans değerleri bulunmuştur. İlgili mod şekilleri birinci mod için Şekil 32’de ve ikinci mod için Şekil 33’de verilmiştir.

Tablo 24. İkinci problem için elde edilen doğal frekans değerleri

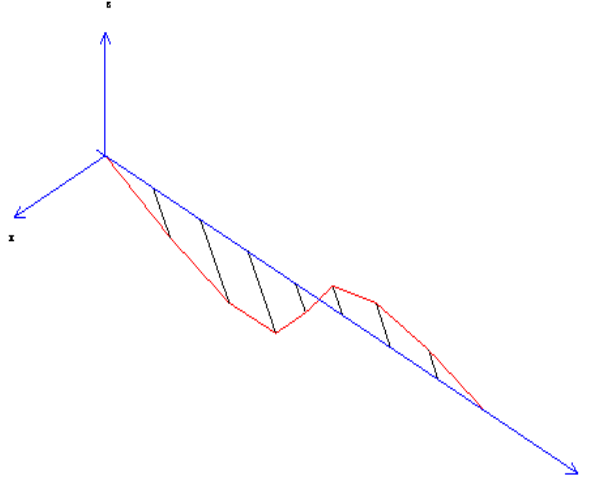
Mod	Doğal Frekans Değerleri
1	23.70 Hz
2	68.03 Hz



Şekil 31. Bir disk ve kademeli milden oluşan sistemin sonlu elemanlar gösterimi.



Şekil 32. Bir disk ve kademeli milden oluşan sistemin birinci mod şeklinin gösterimi.



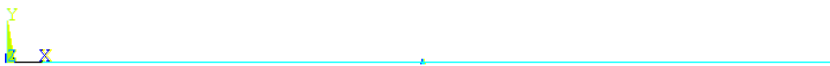
Şekil 33. Bir disk ve kademeli milden oluşan sistemin ikinci mod şeklinin gösterimi.

3.2.2.2. ANSYS Yazılımı İle Elde Edilen Bulgular

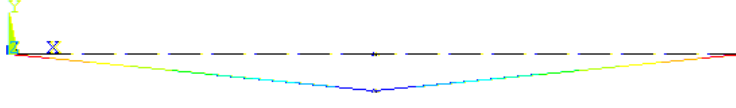
Sistemin ANSYS yazılımında kullanılan sonlu eleman şekli Şekil 34’de gösterilmiştir. Problemin ANSYS yazılımı ile elde edilen doğal frekans değerleri birinci ve ikinci mod için Tablo 25’de verilmiştir. İlgili mod şekilleri ise Şekil 35 ve Şekil 36’da gösterilmiştir.

Tablo 25. Tek disk ve kademeli mil sisteminin ANSYS yazılımı kullanılarak bulunan modal analiz sonuçları.

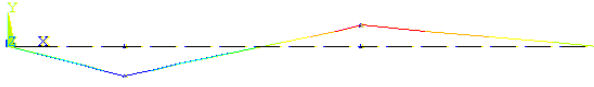
Mod	Doğal Frekans Değerleri	
	BEAM3	PIPE16
1	23.874 Hz	23.744 Hz
2	68.309 Hz	67.825 Hz



Şekil 34. Tek disk ve kademeli mil sisteminin ANSYS yazılımında kullanılan eleman şekli.



Şekil 35. Tek disk ve kademeli mil sisteminin ANSYS yazılımı kullanılarak yapılan modal analiz sonucu elde edilen birinci mod şekli.



Şekil 36. Tek disk ve kademeli mil sisteminin ANSYS yazılımı kullanılarak yapılan modal analiz sonucu elde edilen ikinci mod şekli.

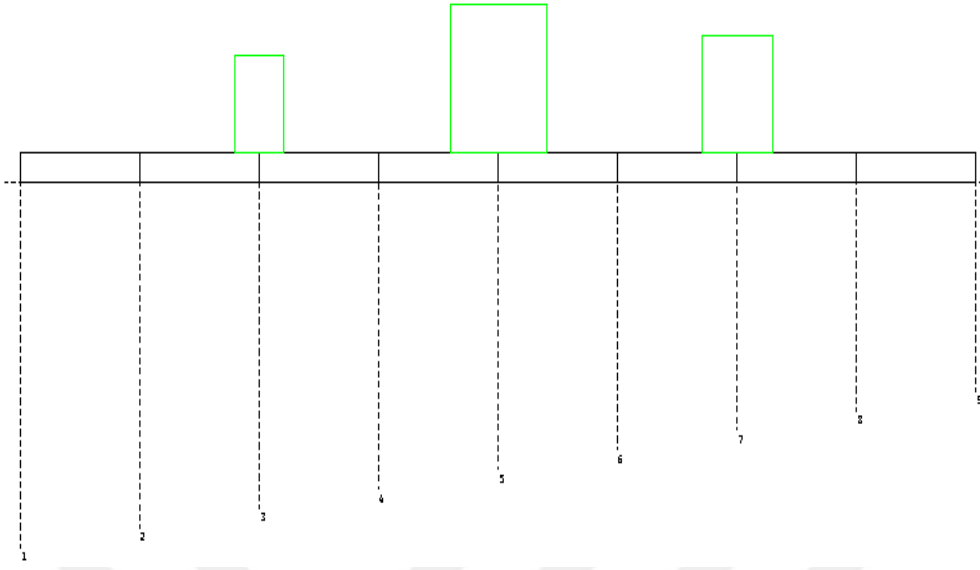
3.2.3. Üç Disk ve Bir Milden Oluşan Sistemin Modal Analizi

3.2.3.1. RotorInsa Yazılımı İle Elde Edilen Bulgular

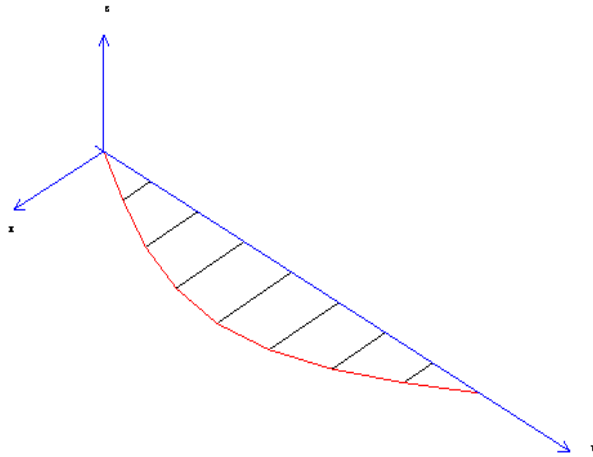
RotorInsa programı yardımıyla oluşturulan sonlu elemanlar gösterimi Şekil 37’de gösterilmiştir. Veri dosyasında istenilen modal analizi yazılımın son işlem kısmında yapılarak Tablo 26’da verilmiş olan modlara karşılık gelen doğal frekans değerleri bulunmuştur. İlgili mod şekilleri birinci mod için Şekil 38’de ve ikinci mod için Şekil 39’da verilmiştir.

Tablo 26. Üçüncü problem için elde edilen RotorInsa ile elde edilen doğal frekans değerleri.

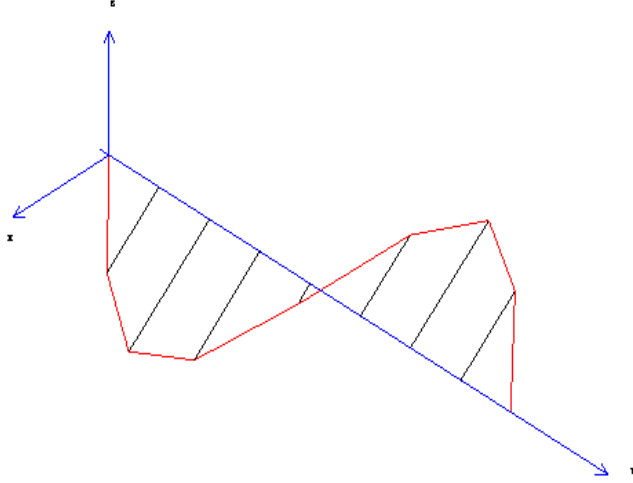
Mod	Doğal Frekans Değerleri
1	15.60 Hz
2	71.17 Hz



Şekil 37. Üç disk ve bir milden oluşan sistemin sonlu elemanlar gösterimi.



Şekil 38. Üç disk ve bir milden oluşan sistemin birinci mod şeklinin gösterimi.



Şekil 39. Üç disk ve bir milden oluşan sistemin ikinci mod şeklinin gösterimi.

3.2.3.2. ANSYS Yazılımı İle Elde Edilen Bulgular

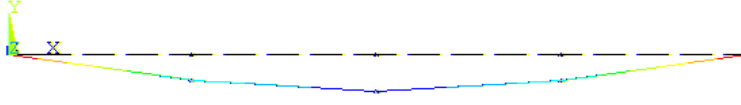
Sistemin ANSYS yazılımında kullanılan sonlu eleman şekli Şekil 40’da gösterilmiştir. Problemin ANSYS yazılımı ile elde edilen doğal frekans değerleri birinci ve ikinci mod için Tablo 27’de verilmiştir. İlgili mod şekilleri ise Şekil 41 ve Şekil 42’de gösterilmiştir.

Tablo 27. Üç disk ve bir milden oluşan sistemin ANSYS çözümünden elde edilen doğal frekans değerleri.

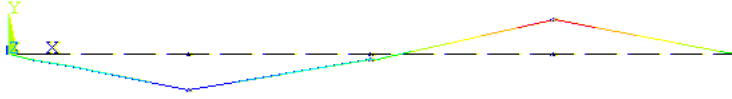
Mod	Doğal Frekans Değerleri	
	BEAM3	PIPE16
1	15.634 Hz	15.569 Hz
2	71.639 Hz	70.823 Hz



Şekil 40. Üç disk ve eş dağılımlı milden oluşan sisteminin ANSYS yazılımında kullanılan eleman şekli



Şekil 41. Üç disk ve eş dağılımlı milden oluşan sistemin ANSYS yazılımı kullanılarak yapılan modal analiz sonucu elde edilen birinci mod şekli



Şekil 42. Üç disk ve eş dağılımlı milden oluşan sistemin ANSYS yazılımı kullanılarak yapılan modal analiz sonucu elde edilen ikinci mod şekli.

3.2.4. Endüstriyel Rotor Sisteminin Modal Analizi

3.2.4.1. RotorInsa Yazılımı İle Elde Edilen Bulgular

RotorInsa programı yardımıyla oluşturulan sonlu elemanlar gösterimi Şekil 43’de gösterilmiştir. Veri dosyasında istenilen modal analizi yazılımının son işlem kısmında yapılarak Tablo 28’de verilmiş olan modlara karşılık gelen doğal frekans değerleri bulunmuştur. İlgili mod şekilleri birinci mod için Şekil 44’de ve ikinci mod için Şekil 45’de verilmiştir. Buna ilave olarak sistemin farklı çalışma hızlarındaki çözümleri yapılarak elde edilen Campbell diyagramı Şekil 46’da gösterilmiştir. Rotorun 5000 (rpm) ve 30000 (rpm) çalışma hızlarındaki birinci ve ikinci mod şekilleri sırasıyla Şekil 47, Şekil 48 ve Şekil 49, Şekil 50’ de gösterilmiştir.

Ayrıca problemin farklı sayıda düğüm noktası alınarak yapılan çözümünden elde edilen sonuçlar Tablo 29’ da verilmiştir.

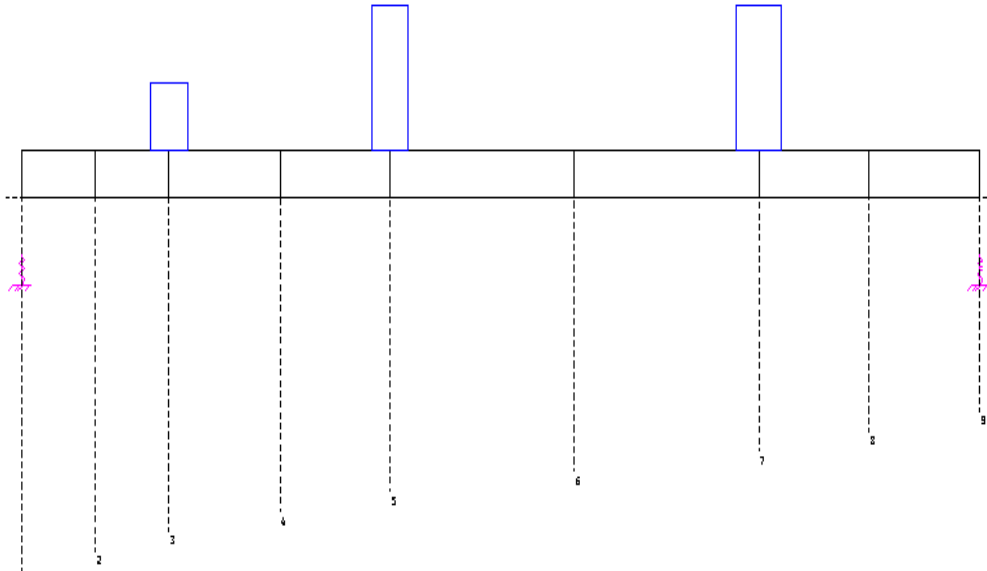
Tablo 28. Endüstriyel rotor sistemi için RotorInsa yazılımından elde edilen doğal frekans değerleri tablosu

Mod	Doğal Frekans Değerleri
1	60.62 Hz
2	169.50 Hz

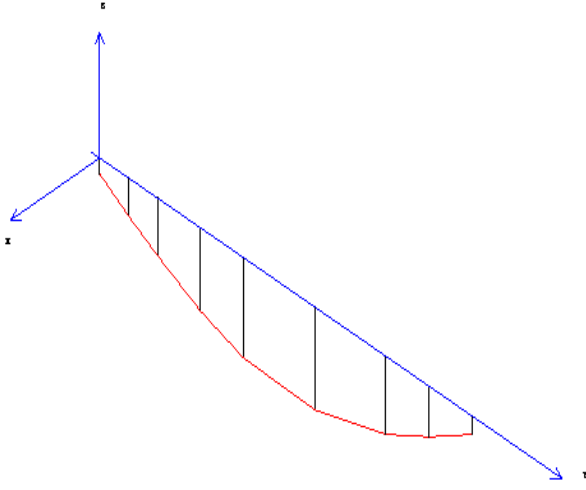
Aşağıdaki tabloda ise farklı düğüm noktalarında çözülen problem için elde edilen doğal frekans değerleri verilmiştir.

Tablo 29. Endüstriyel rotorun 25000 rpm hızındaki 2 farklı mod değeri için frekans değerleri

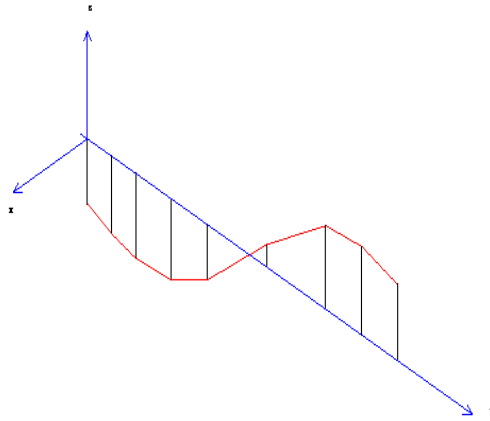
Mod Değerleri	Referans Değeri (Hz)	6 Düğüm Noktası için (Hz)	8 Düğüm Noktası için (Hz)	9 Düğüm Noktası için (Hz)
1	67.20	67.28	67.26	67.26
2	193.6	196.45	196.45	195.82



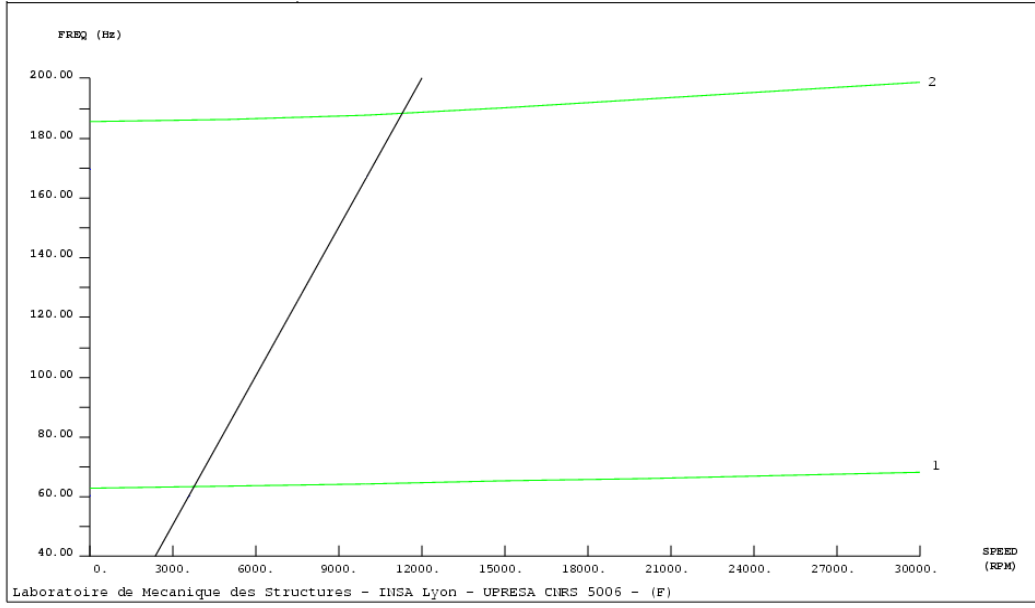
Şekil 43. Endüstriyel rotorun sonlu elemanlar gösterimi.



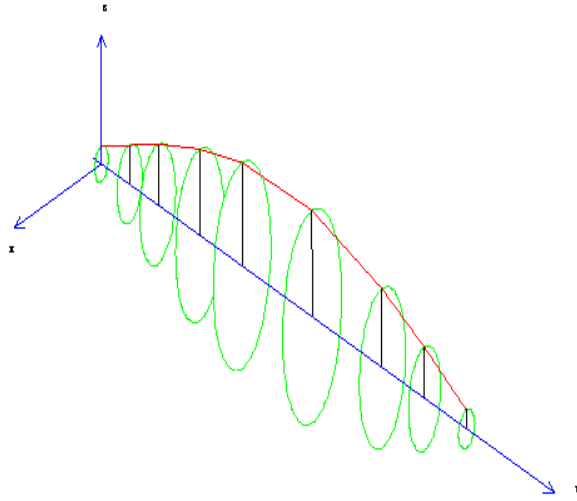
Şekil 44. Endüstriyel rotorun birinci modunun gösterimi.



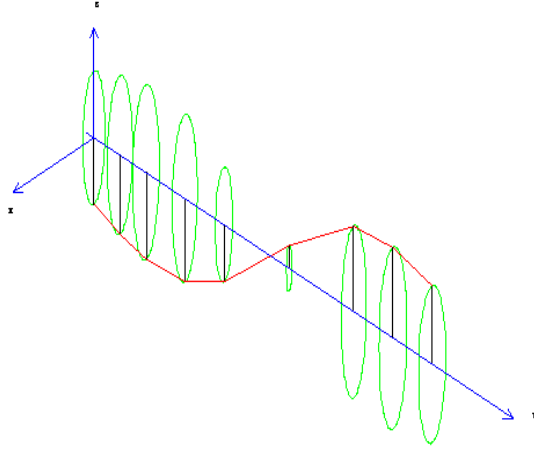
Şekil 45. Endüstriyel rotorun ikinci modunun gösterimi.



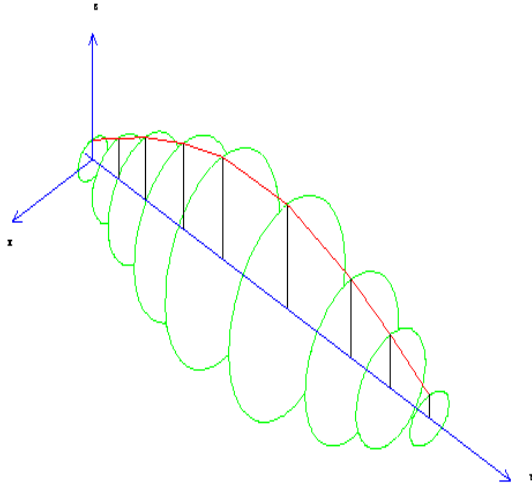
Şekil 46. Endüstriyel rotora ait Campbell diyagramı.



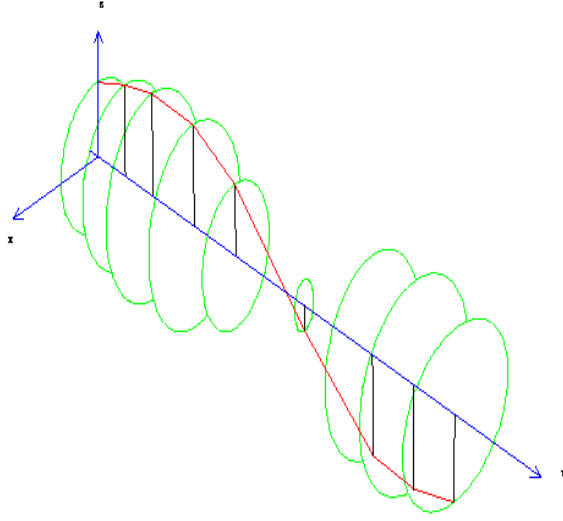
Şekil 47. Endüstriyel rotorun birinci moda göre 5000 rpm çalışma hızındaki durumu.



Şekil 48. Endüstriyel rotorun ikinci moda göre 5000 rpm çalışma hızındaki durumu.



Şekil 49. Endüstriyel rotorun birinci moda göre 30000 rpm çalışma hızındaki durumu.



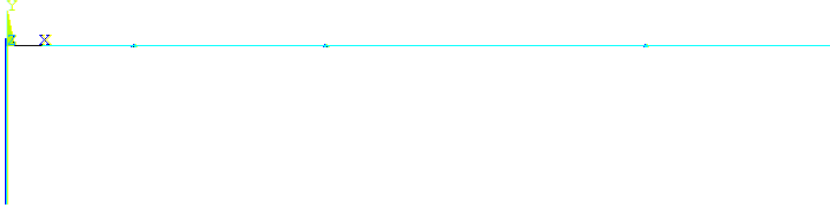
Şekil 50. Endüstriyel rotorun ikinci moda göre 30000 rpm çalışma hızındaki durumu.

3.2.4.2. ANSYS Yazılımı ile Elde Edilen Bulgular

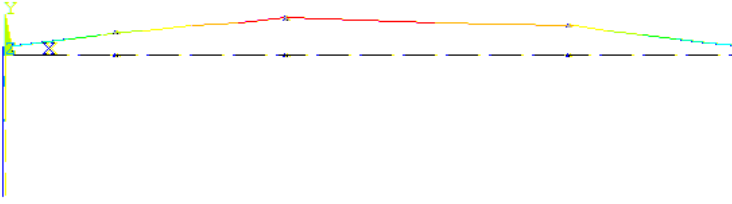
Sistemin ANSYS yazılımında kullanılan sonlu eleman şekli Şekil 51’de gösterilmiştir. Problemin ANSYS yazılımı ile elde edilen doğal frekans değerleri birinci ve ikinci mod için Tablo30’da verilmiştir. İlgili mod şekilleri ise Şekil 52 ve Şekil 53’de gösterilmiştir.

Tablo 30. Dördüncü problem için ANSYS yazılımı ile bulunan frekans değerleri

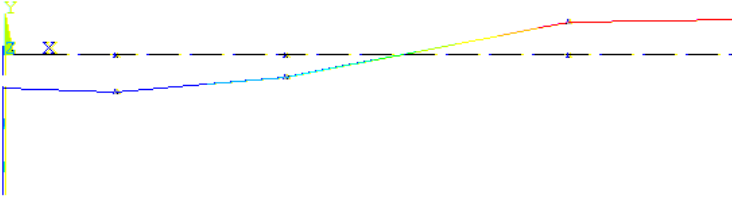
Mod	Doğal Frekans Değerleri	
	BEAM3	PIPE16
1	60.861 Hz	60.444
2	171.30 Hz	168.72



Şekil 51. Endüstriyel rotor sisteminin ANSYS yazılımında kullanılan eleman şekli



Şekil 52. Endüstriyel rotor sisteminin ANSYS yazılımı kullanılarak yapılan modal analizi sonucu elde edilen birinci mod şekli.



Şekil 53. Endüstriyel rotor sisteminin ANSYS yazılımı kullanılarak yapılan modal analizi sonucu elde edilen ikinci mod şekli.

3.3. Modal Değerlerin Karşılaştırılması

P.H.Mathuria'nın MATLAB programı kullanarak yaptığı sonlu elemanlar analizi, teorik çözüm, Dunkerly, Rayleigh ve Transfer Matris Yöntemi (TMY) yöntemlerini kullanarak birinci mod frekans değerlerini ilk üç problem için bulmuştur. Bu nedenle karşılaştırma yaparken yalnızca ilk üç problem için elde edilen değerler P.H.Mathuria'nın sonuçlarıyla

karşılaştırılmıştır. Son problemde ise karşılaştırmalar yalnızca RotorInsa ve ANSYS çözümleri arasında yapılmıştır. Toplu karşılaştırma durumu Tablo 31’ de gösterilmiştir.

Tablo 31. Ele alınan problemlerin birinci mod frekanslarının karşılaştırılması

PROBLEM	DUNKERLY (Hz)	RAYLEIGH (Hz)	TMY (Hz)	MATLAB (Hz)	Yapılan Çalışmalar		
					ROTORINSA (Hz)	ANSYS	
						BEAM3 (Hz)	PIPE16 (Hz)
1	17.86	19.90	18.34	18.42	17.64	17.663	17.619
2	-	24.66	24.28	24.31	23.70	23.874	23.744
3	16.17	-	16.52	15.70	15.60	15.634	15.569
4	-	-	-	-	60.860	60.861	60.444

4. İRDELEME

Bu çalışmada dört farklı rotor sisteminin RotorInsa ve ANSYS yazılımları kullanılarak modal analizi yapılmıştır.

İki disk ve milden oluşan sistemin modal analizi sonucu RotorInsa çözümünden ilk mod frekans değeri, 17.64 Hz ikinci mod frekans değeri ise 71.17 Hz olarak bulunmuştur. Aynı problemin ANSYS yazılımıyla çözümünde ise BEAM3 elemanı kullanıldığında RotorInsa'dan elde edilen değere oldukça yakın değer (İlk mod:17.634 Hz – İkinci mod:71.639 Hz) bulunduğu görülmüştür. PIPE16 eleman mil modellenmesi için seçildiğinde BEAM3 elemanına oranla RotorInsa sonucuna daha az yakınsamıştır. Kademeli mil ve diskten oluşan sistem ve üç disk ve milden oluşan sistemlerin modal analizlerinde de benzer sonuçlar görülmüştür.

Endüstriyel rotor sisteminin RotorInsa yazılımından elde edilen sonuçları yine ANSYS yazılımından elde edilen sonuçlar ile durağan durum ($\Omega=0$) için benzerlik göstermiştir. Sistemin durağan durum için Tablo 28' de verilen doğal frekans değerleri, 25000 (rpm) çalışma hızı için Tablo 29' da verilen frekans değerleri ile karşılaştırıldığında özellikle ikinci mod frekans değerleri farklılık göstermektedir. Buna neden dinamik durumda ortaya çıkan jiroskobik etkidir. Bu durum, yani, doğal frekansların çalışma hızı ile değişimi Campbell diyagramı ile gösterilmiştir. Tablo 29' da 6, 8 ve 9 düğüm noktaları için elde edilen frekans değerleri görülmektedir. Burada referans değerine en yakın sonuç 9 düğüm noktasında görülmüştür. Düğüm noktası arttıkça referans değere daha da yaklaşmıştır.

Kullanılan yazılımlara bağlı olarak modelleme aşaması değişiklik göstermiştir. ANSYS yazılımında endüstriyel rotorun modelleme aşamasında sınır şartları girilmesi gerekirken RotorInsa'da uç kısımların sabitlenmesine gerek kalmamıştır.

6. KAYNAKLAR

1. Amirtharajah, J.S. , ‘Critical Speeds and Unbalance Response of Cantilever-Sleeve rotors Using Finite Elements with Efficient Higher Order basis Functions’, Ph.D Thesis, Concordia University, 1999.
2. Junyao Yu, J., ‘Dynamic Analysis of Rotor-Bearing Systems Using Three – Dimensional Solid Finite Elements’, Ph.D Thesis, Edmanton, 1997.
3. Nelson, H.D., Mc Vaugh, J.M., The Dynamics of Rotor Bearing Systems Using Finite Elements, ASME J. Eng. Ind. , 98 (1976).
4. Zorzi, E.S., Nelson, H.D., The Dynamics of Rotor Bearing Systems with Axial Torque: A Finite Element Approach, ASME J. Mech. Des., 102 (1980).
5. Berthier, P., Ferraris, G., Lalanne, M., Prediction of Critical Speeds, Unbalance and Nonsynchronous Forced Response of Rotors, 53th Shock and Vib. Bull., 1983.
6. Glasgw, D.A, Nelson, H.D., Stability Analysis of Rotor-Bearing Systems Using Component Mode Synthesis, ASME J. Mech. Des., 102 (1980).
7. Dimarogonas, A.d., Vibration for Engineers, Prentice Hall, New Jersey, 1992.
8. F.M.A., El-Saeidy, Finite Element Modeling of a Rotor Shaft Rolling Bearing System with Consideration of Bearing Nonlinearities, Journal of Vibration and Control 4, 5(1998) 541-602.

9. Shabareh, N.H, W.Z., Jen, Dynamic of Rotor-Shaft System with Viscoelastically Supported Bearings, Mechanism and Machine Theory, 35(2000) 1313-1330.

10. Andrew D., Dimarogonas, Stephen A., Paipetis, Analytical Methods in Rotor Dynamics.

11. Thomas, J., Habbas, , B.A., Finite Element Model for Dynamic Analysis of Timoshenko Beam, Journal of Sound and Vibration , 41, 3(1975) 291-299.

12. Lalanne, M., Ferraris, G., Rotordynamics Prediction in Engineering, John Wiley & Sons Ltd., England, 1998.

13. Mathuria, P., ‘ Lateral Natural Frequency of a Rotor System by Transfer Matris Method’, Indian Institute of Technology, Bombay, www.vibrationdata.com.

14. Mathuria, P., ‘ Lateral Natural Frequency of a Rotor System by Finite Element Method’, Indian Institute of Technology, Bombay, www.vibrationdata.com.

15. Fredric, F.E., Handbook of Rotordynamics, McGraw Hill, New York, 1992.

16. Lalanne, M., Ferraris, G., ROTORINSA User Manuel, John Wiley & Sons Ltd., England, 2000.

7. ÖZGEÇMİŞ

Birgöl AŞCIOĞLU, 1978 yılında Trabzon'da doğdu. 1995 yılında Trabzon Anadolu Ticaret Meslek Lisesi, Bilgi-İşlem bölümünden mezun oldu. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Makine Mühendisliği bölümüne girdi. Temmuz 1999'da bu bölümden mezun oldu. Eylül 1999'da K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği Anabilim dalında Yüksek Lisansa başladı. Aralık 1999'da K.T.Ü. Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim dalında Araştırma Görevlisi olarak atandı. İyi derecede İngilizce bilmektedir.

