

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**M^n ÜZERİNDE $aF^K + \lambda^r F^T = 0$ ŞARTINI
SAĞLAYAN GENEL $F_{a,\lambda}(K, T)$ – YAPISI VE BU
YAPIYLA İLGİLİ LİFT PROBLEMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Öğrencinin Adı SOYADI : Ahmet BAHADIR

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Haşim ÇAYIR

Aralık 2022
GİRESUN

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**M^n ÜZERİNDE $aF^K + \lambda^r F^T = 0$ ŞARTINI
SAĞLAYAN GENEL $F_{a,\lambda}(K, T)$ – YAPISI VE BU
YAPIYLA İLGİLİ LİFT PROBLEMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ahmet BAHADIR

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 26/12/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Oğuz OĞUR
Jüri Başkanı

Doç. Dr. Haşim ÇAYIR
Üye

Doç. Dr. Ali ÇAKMAK
Üye

Doç Dr. Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Ahmet BAHADIR

26/12/2022

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım sırasında değerli bilgi ve tecrübeleri ile bana yol gösteren her aşamada yardımını gördüğüm hocam, sayın Doç. Dr. Haşim ÇAYIR'a teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER.....	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	IV
ÖZET	V
SUMMARY	VI
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	3
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM	7
3.1. Diferansiyellenebilir Manifoldlar.....	7
3.2. Tensör Alanı	7
3.3. Kotanjant Demet	9
BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	11
4.1. Kotanjant Demetteki Sonuçlar	11
4.1.1. Kotanjant Demet Üzerinde $\alpha F^K + \lambda^r F^T = 0$ Şartını Sağlayan Genel $F_{\alpha,\lambda}(K, T)$ –Yapısının Yatay Lifti	11
4.1.2. Kotanjant Demet $T^*(M^n)$ Üzerinde $(F^K)^H$ Nijenhuis Tensörleri.....	13
4.1.3. $T^*(M^n)$ Üzerinde $\alpha F^K + \lambda^r F^T = 0$ Yapısının Liftlerine Göre Vektör Ve Kovektör Alanlarına Uygulanan Tachibana Operatörleri	15
4.1.4. $(F^K)^H$ Üzerinde Sasakian Metriğinin Pürlük Koşulları.....	18
4.2. Tanjant Demetteki Sonuçlar.....	20
4.2.1. Tanjant Demet $T(M^n)$ Üzerinde $\alpha F^K + \lambda^r F^T = 0$ Yapısının Tam Lifti.....	20

4.2.2. Tanjant Demet $T(M^n)$ Üzerinde $\alpha(F^K)^C + \lambda^r(F^T)^C = 0$ Yapısının İntegrallenebilirlik Şartları	22
4.2.3. Tanjant Demet $T(M^n)$ Üzerinde $\alpha(F^K)^C + \lambda^r(F^T)^C = 0$ Yapısına Göre Sasakian Metriğinin pürlük şartları	27
4.2.4. Tanjant Demet $T(M^n)$ Üzerinde $F_{\alpha,\lambda}(K, T)$ –Yapısının Yatay Lifti	30
4.2.5. Tanjant Demet $T(M^n)$ Üzerinde $\alpha(F^K)^H + \lambda^r(F^T)^H = 0$ Yapısının İntegrallenebilirlik Şartları	32
 BÖLÜM 5. SONUÇ	 36
 KAYNAKLAR	 37
ÖZGEÇMİŞ	39

SİMGELER VE KISALTMALAR

M	: n – Boyutlu Manifold
M^n	: n – Boyutlu Diferansiyellenebilen Manifold
F, ϕ	: (1,1) Tipli Tensör Alanı
C^k	: k Sınıfından Diferensiyellenebilen Cümleler Kümesi
ξ	: Vektör Alanı
X^H	: Vektör Alanının Yatay Lifti
X^V	: Vektör Alanının Dikey Lifti
X^C	: Vektör Alanının Tam Lifti
$T(M^n)$	: Tanjant demeti
$T^*(M^n)$	: Kotanjant demeti
$[X, Y]$	: X ve Y Vektör Alanlarının Lie Parantezi
L_X	: X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
ω, η	: 1 –Form
ω^V	: 1 –Formun Dikey Lifti
ω^C	: 1 –Formun Tam Lifti
φ_ϕ	: Tachibana Operatörü
ψ_ϕ	: Vishnevskii Operatörü

M^n ÜZERİNDE $aF^K + \lambda^r F^T = 0$ ŞARTINI SAĞLAYAN GENEL $F_{a,\lambda}(K, T)$ – YAPISI VE BU YAPIYLA İLGİLİ LİFT PROBLEMLERİ

ÖZET

Bu tezin amacı daha önce elde edilmiş olan yapıları kapsayan genel yapı denklemini elde etmektir. Bu bağlamda çalışma 3 temel bölümden meydana gelmiştir. İlk bölümde M^n manifoldu üzerinde $aF^K + \lambda^r F^T = 0$, ($F \neq 0, K \geq 3, T \geq 1$ ve $(K \geq T)$), K ve T tam sayı, a ve λ sıfırdan farklı karmaşık sayılar, r sonlu tam sayılardır) şartını sağlayan genel $F_{a,\lambda}(K, T)$ – yapısını tanımlayarak bazı özel örnekler verilmeye çalışıldı.

İkinci bölümde $aF^K + \lambda^r F^T = 0$ şartını sağlayan genel $F_{a,\lambda}(K, T)$ – yapısının yatay liftlerinin Nijenhuis tensörünü hesaplayarak integrallenebilirlik şartları elde edildi. Daha sonra kotanjant demet içerisinde genel $F_{a,\lambda}(K, T)$ – yapısının horizontal liftlerine göre vektör ve kovektör alanlarına uygulanan Tachibana operatörünün sonuçları elde edildi. Ek olarak yapının horizontal liftlerine göre Sasaki metriğinin pürlük şartları gösterilmeye çalışıldı. En son kısım içerisinde ise ikinci bölüm içerisinde elde edilen tüm sonuçlar tanjant demet üzerindeki genel $F_{a,\lambda}(K, T)$ – yapısının tam ve yatay liftlerine göre araştırıldı.

Anahtar kelimeler: F –Yapısı, İntegrallenebilirlik Şartları, Tachibana Operatörü, liftler, Sasakian metriği, tanjant ve kotanjant demet

THE GENERAL $F_{\alpha,\lambda}(K, T)$ – STRUCTURE SATISFYING $\alpha F^K + \lambda^r F^T = 0$ ON M^n AND LIFTS PROBLEMS ASSOCIATED WITH THIS STRUCTURE

SUMMARY

In this thesis our aim is to get the general structure equation which covers previously acquired structures. In this context this paper consists of three main sections. In the first section, we define the general $F_{\alpha,\lambda}(K, T)$ –structure satisfying $\alpha F^K + \lambda^r F^T = 0$, ($F \neq 0, K \geq 3, T \geq 1$ and $(K \geq T)$, K and T integer, α and λ are non zero complex numbers, r finite integer) on manifold M^n and studied to give some special examples. The second part, we find the integrability conditions by calculating Nijenhuis tensors of the horizontal lifts of the general $F_{\alpha,\lambda}(K, T)$ – structure satisfying $\alpha F^K + \lambda^r F^T = 0$. Later, we get the results of Tachibana operators applied to vector and covector fields according to the horizontal lifts of the general $F_{\alpha,\lambda}(K, T)$ – structure in cotangent bundle $T^*(M^n)$. In addition, we have studied to show the purity conditions of Sasakian metric with respect to the horizontal lifts of the structure. In the final section, all results obtained in the second section were investigated according to the complete and horizontal lifts of the general $F_{\alpha,\lambda}(K, T)$ – structure on tangent bundle $T(M^n)$.

Keywords: F –structure, Integrability conditions, Tachibana operators, lifts, Sasakian metric, tangent and cotangent bundles

BÖLÜM 1. GİRİŞ

M^n manifoldu üzerinde tensörel yapıların integrallenebilirliği için tanjant ve kotanjant demete genişletilmesi son 50 yıl içinde araştırma konusu olarak aktif bir şekilde incelenmiştir. İlk olarak Kentaro Yano ve onun çalışma grubu tarafından başlatılmıştır. Yano ve Ishihara'nın (1973) çalışması buna örnek olarak verilebilir. M^n , n boyutlu diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde birçok yapı vardır. İlk olarak, Ishihara ve Yano (Ishihara, Yano, 1964) $F^3 + F = 0$ şartını sağlayan F yapısının integrallenebilirlik şartlarını elde etmiştir. Andreou (1983) $F^5 + F = 0$ şartını sağlayan bir F yapısının integrallenebilirlik şartları üzerinde çalıştı. Daha sonra, Nivas ve Prasad (1985) $F_a(5,1)$ – yapısı üzerinde çalıştı. Ayrıca $F_\lambda(7,1)$ – yapısı M^n den $T^*(M^n)$ 'ye Das, Nivas ve Pathak (2005) tarafından genişletilmiştir. 1989 yılında Gupta (1998) $K \geq 2$ pozitif bir tam sayı olmak üzere $F^K + F = 0$ şartını sağlayan daha genel $F(K, 1)$ – yapısı üzerinde çalıştı. Ek olarak, Singh tarafından $F^{(2K+S)} + F^S = 0$ ($F \neq 0, K \geq 1$ sabit tam sayı, $S \geq 1$ sabit tek tam sayı) şartını sağlayan $F(2K + S, S)$ – yapısını ve bunun üzerinde çalıştı. Singh, Pandey ve Khare (2016) tarafından $F(2K+S, S)$ – yapısının tam ve yatay liftleri ile M^n den $T(M^n)$ tanjant demete genişletilmiştir. Daha sonraki zamanlarda Upadhyay ve Grag (1985) ve Upadhyay ve Gupta sırasıyla $F^p - F^{p-q} = 0$ ($F \neq 0; p, q$ tek sayı; I birim afinor) şartını sağlayan $F(p, -(p-q))$ – yapısı ve $F^K - F^{K-2} = 0$, ($F \neq 0; I$ birim afinor) şartını sağlayan $F(K, -(K-2))$ – yapısı üzerinde çalıştılar. 2004 yılında, Nivas ve Saxena (2004) $F^4 + \lambda^r F^2 = 0$ ($F \neq 0, \lambda$ sıfırdan farklı kompleks bir sayı, r sonlu tam sayı) şartını sağlayan $HSU - (4,2)$ – yapısının tam ve yatay liftleri üzerinde çalıştılar. Daha sonra, Dube (1998), $F^{2v+4} + F^2 = 0, F \neq 0$ şartını sağlayan $F(2v + 4, 2)$ – yapısı üzerinde çalışmıştır.

Bu tez içerisinde bizim amacımız daha önce elde edilmiş olan yapıları kapsayan genel yapı denklemini elde etmektir. Bu bağlamda bu araştırma üç ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, M^n manifoldu üzerinde $\alpha F^K + \lambda^r F^T = 0$, ($F \neq 0, K \geq 3, T \geq 1$ ve $(K \geq T)$, K ve T tam sayı, α ve λ sıfırdan farklı kompleks sayılar, r sonlu

tam sayı) şartını sağlayan genel $F_{\alpha,\lambda}(K, T)$ –yapısı tanımlandı. İkinci bölümde, $\alpha F^K + \lambda^r F^T = 0$ şartını sağlayan genel $F_{\alpha,\lambda}(K, T)$ –yapısının yatay liftlerinin Nijenhuis tensörünü hesaplayarak integrallenebilirlik koşulları bulunmuştur. Daha sonra, $T^*(M^n)$ kotanjant demeti içerisinde genel $F_{\alpha,\lambda}(K, T)$ – yapısının yatay liftlerine göre vektör ve kovektör alanlarına Tachibana operatörü uygulanıp vektör ve kovektör alanlarına uygulanan Tachibana operatörünün sonuçları elde edilmiştir. Ek olarak, yapının yatay liftlerine göre Sasaki metriğinin pürlük şartları gösterilmiştir. Son bölümde, ikinci bölümde araştırılan ve elde edilen tüm sonuçlar $T(M^n)$ tanjant demet üzerinde $F_{\alpha,\lambda}(K, T)$ –yapısının tam ve yatay liftlerine göre araştırılmıştır.



BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

M^n , C^∞ sınıfından diferansiyellenebilir bir manifold olsun ve F ise aşağıdaki şartı sağlayan sıfırdan farklı $(1,1)$ tipli bir tensör alanı olsun

$$\alpha F^K + \lambda^r F^T = 0, \quad (2.1)$$

burada $F \neq 0, K \geq 3, T \geq 1$ ve $(K \geq T)$, α ve λ sıfırdan farklı kompleks sayılar, r sonlu tam sayıdır. F değeri M^n nin her yerinde sabit r rankına sahiptir. Biz böyle bir yapıyı r ranklı $F_{\alpha,\lambda}(K, T)$ – yapısı olarak adlandırırız.

M^n üzerinde I birim tensör alanı olmak üzere l ve m operatörleri

$$l = -\frac{\alpha F^{K-T}}{\lambda^r}, m = I + \frac{\alpha F^{K-T}}{\lambda^r} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır. (2.2) ile tanımlanan l ve m operatörleri aşağıdaki şartları sağlar.

$$\begin{aligned} l^2 &= -\frac{\alpha^2 F^{2K-2T}}{\lambda^{2r}} = \frac{\alpha F^{2K-T}}{\lambda^r} \frac{\alpha F^{-T}}{\lambda^r} \\ &= -\frac{\alpha F^{2K-T}}{\lambda^r} F^{-K} \\ &= -\frac{\alpha F^{K-T}}{\lambda^r} \\ &= l, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} m^2 &= I^2 + 2 \frac{\alpha F^{K-T}}{\lambda^r} + \frac{\alpha^2 F^{2K-2T}}{\lambda^{2r}} \\ &= I + 2 \frac{\alpha F^{K-T}}{\lambda^r} + \frac{\alpha^2 F^{2K-T}}{\lambda^r} \frac{\alpha F^{-T}}{\lambda^r} \\ &= I + 2 \frac{\alpha F^{K-T}}{\lambda^r} - \frac{\alpha F^{2K-T}}{\lambda^r} F^{-K} \\ &= I + 2 \frac{\alpha F^{K-T}}{\lambda^r} - \frac{\alpha F^{K-T}}{\lambda^r} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$= I + \frac{\alpha F^{K-T}}{\lambda^r}$$

$$= m,$$

$$l + m = I, lm = ml = 0,$$

$$Fl = lF = F, Fm = mF = 0, \quad (2.5)$$

burada I birim tensör alanıdır.

Sonuç olarak, eğer $F \neq 0$ şartını sağlayan (1,1) tipli bir tensör alanı varsa, o zaman sırasıyla l ve m ye karşılık M^n üzerinde L ve M gibi iki tamamlayıcı dağılım vardır. F nin rankı sabit ve her yerde r 'ye eşit olsun. O zaman, L ve M nin boyutu sırasıyla n ve $n - r$ dir. Biz böyle bir yapıyı $F_{\alpha,\lambda}(K, T)$ – yapısı olarak adlandırırız ve n boyutlu M^n manifoldunu $F_{\alpha,\lambda}(K, T)$ –manifoldu olarak adlandırırız.

M^n manifoldu üzerinde $\alpha F^K + \lambda^r F^T = 0$ ($F \neq 0, K \geq 3, T \geq 1$ ve $(K \geq T)$, α ve λ sıfırdan farklı kompleks sayılar, r sonlu tamsayı) şartı ile verilen M^n manifoldu içerisinde (1,1) tipli ψ tensör alanını $\psi = l - m = -I - 2 \frac{\alpha F^{K-T}}{\lambda^r}$ şeklinde elde ederiz ve bu (1,1) tipli tensör alanı bir almost product yapıdır.

Şimdi, M^n manifoldu üzerinde $\alpha F^K + \lambda^r F^T = 0$ ($F \neq 0, K \geq 3, T \geq 1$, α ve λ sıfırdan farklı kompleks sayılar, r sonlu tamsayı) şartını sağlayan genel $F_{\alpha,\lambda}(K, T)$ – yapısı için birkaç örnek verelim:

Örnek 2.1. $F \neq 0, K = 3, T = 1$ ve $\alpha = \lambda^r = 1$ için, $F^3 + F = 0$ (Ishihara ve Yano, 1964) şartını sağlayan $F(3,1)$ –yapısını elde ederiz. Ek olarak, (2.2) şartını kullanarak l ve m operatörleri

$$l = -\frac{\alpha F^{K-T}}{\lambda^r} = -F^2 \text{ ve } m = I + \frac{\alpha F^{K-T}}{\lambda^r} = I + F^2,$$

$$l^2 = l, m^2 = m, lm = ml = 0, l + m = I, \\ Fl = lF = F, Fm = mF = 0.$$

şeklinde tanımlanır. (1,1) tipli ψ tensör alanı $\psi = l - m = -I - 2\frac{\alpha F^{K-T}}{\lambda^r} = -I - 2F^2$ bir almost product yapısı verir. Burada I, M^n üzerinde birim tensör alanıdır.

Örnek 2.2. $F \neq 0, K = K, T = 1$ ve $\alpha = \lambda^r = 1$ için $F^K + F = 0$ (Gupta, 1998) şartını sağlayan $F(K, 1)$ -yapısını elde ederiz. Ek olarak, (2.2) şartını kullanarak l ve m operatörleri;

$$l = -\frac{\alpha F^{K-T}}{\lambda^r} = -F^{K-1} \text{ ve } m = I + \frac{\alpha F^{K-T}}{\lambda^r} = I + F^{K-1}, \\ l^2 = l, m^2 = m, lm = ml = 0, l + m = I, \\ Fl = lF = F, Fm = mF = 0.$$

şeklinde tanımlanır. (1,1) tipli ψ tensör alanı $\psi = l - m = -I - 2\frac{\alpha F^{K-T}}{\lambda^r} = -I - 2F^{K-1}$ bir almost product yapısı verir. Burada I, M^n üzerinde birim tensör alanıdır.

Örnek 2.3. $F \neq 0, K = 2v + 4 (v \geq 0), T = 2$ ve $\alpha = \lambda^r = 1$ için $F^{2v+4} + F^2 = 0$ (Dube, 1998) şartını sağlayan $F(2v + 4, 2)$ - yapısını elde ederiz. Ek olarak, (2.2) şartını kullanarak l ve m operatörleri

$$l = -\frac{\alpha F^{K-T}}{\lambda^r} = -F^{2v+2} \text{ ve } m = I + \frac{\alpha F^{K-T}}{\lambda^r} = I + F^{2v+2}, \\ l^2 = l, m^2 = m, lm = ml = 0, l + m = I, \\ Fl = lF = F, Fm = mF = 0.$$

şeklinde tanımlanır. (1,1) tipli ψ tensör alanı $\psi = l - m = -I - 2\frac{\alpha F^{K-T}}{\lambda^r} = -I - 2F^{2v+2}$ bir almost product yapısı verir. Burada I, M^n üzerinde birim tensör alanıdır.

Örnek 2.4. $F \neq 0, K = 4, T = 2$ ve $\alpha = 1$ ve $\lambda^r = 1$ (λ sıfırdan farklı kompleks sayı, r sonlu tam sayı) için $F^4 + \lambda^r F^2 = 0$ (Nivas ve Saxena, 2004) şartını sağlayan $HSU - (4,2) -$ yapısını elde ederiz. Ek olarak, (2.2) şartını kullanarak l ve m operatörleri

$$l = -\frac{\alpha F^{K-T}}{\lambda^r} = -\frac{F^2}{\lambda^r} \text{ ve } m = I + \frac{\alpha F^{K-T}}{\lambda^r} = I + \frac{F^2}{\lambda^r},$$

$$l^2 = l, m^2 = m, lm = ml = 0, l + m = I,$$

$$Fl = lF = F, Fm = mF = 0$$

şeklinde tanımlanır. $(1,1)$ tipli ψ tensör alanı $\psi = l - m = -I - 2\frac{\alpha F^{K-T}}{\lambda^r} = -I - 2\frac{F^2}{\lambda^r}$

bir almost product yapısı verir. Burada I, M^n üzerinde birim tensör alanıdır.

Benzer yolları kullanarak diğer yapıları elde edebiliriz. (Andruou, 1983; Nivas ve Prasad, 1985 ; Upadhyay ve Grag, 1985 ; Nivas ve Saxena, 2004 ; Lovejoy ve Nivas, 2005 ; Singh ve ark., 2016)

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Diferansiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 3.1.1. Eğer X Hausdorff uzayının n –boyutlu ϕ_a haritalarının U_a bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$X = \bigcup_{a \in A} U_a, \text{ (A-indisler kümesi)}$$

ise X e n –boyutlu topolojik manifold veya sadece n –boyutlu manifold denir.

Tanım 3.1.2. M , sayılabilir baza sahip Hausdorff uzay olsun. Eğer, M üzerinde n –boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ yapısı verilmişse M uzayına n – boyutlu C^∞ sınıfından diferansiyellenebilir manifold veya düzgün manifold denir ve M^n ile gösterilir(Bishop ve Goldberg, 1968).

3.2. Tensör Alanı

Tanım 3.2.1. M^n , C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_q^p(M)$ her $m \in M^n$ noktasındaki (p, q) tipli tensör uzayı olsun. M^n manifoldunun her $m \in M^n$ noktasına $T_q^p(M)$ tensör uzayından bir $t_q^p(M)$ tensörü karşılık getiren T fonksiyonuna (p, q) tipli tensör alanı denir(Bishop ve Goldberg, 1968).

Tanım 3.2.2. $\phi \in \mathfrak{I}_1^1(M^n)$, M^n üzerinde bir afinor alanı olsun, keyfi $X_1, X_2, \dots, X_s \in \mathfrak{I}_0^1(M^n)$ ve $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r \in \mathfrak{I}_1^0(M^n)$ için aşağıdaki şartı sağlayan (r, s) tipli t tensör alanına ϕ e göre pür tensör alanı denir:

$$\begin{aligned}
t(\varphi X_1, X_2, \dots, X_s; \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi}) &= t(X_1, \varphi X_2, \dots, X_s; \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi}) \\
&\vdots \\
&= t(X_1, X_2, \dots, \varphi X_s; \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi}) \\
&= t(X_1, X_2, \dots, X_s; \overset{1}{\varphi \xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi}) \\
&= t(X_1, X_2, \dots, X_s; \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\varphi \xi}, \dots, \overset{r}{\xi}) \\
&\vdots \\
&= t(X_1, X_2, \dots, X_s; \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{r}{\varphi \xi})
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Burada $\varphi, X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $\xi \in \mathfrak{S}_1^0(M^n)$ için,

$$(\overset{1}{\varphi \xi})(X) = \xi(\varphi X) = (\xi \circ \varphi)(X)$$

ile tanımlanan φ nin eşlenik operatörüdür.

$x^1, x^2, \dots, x^n$; M^n de lokal koordinat sistemi olmak üzere, (3.1) de $X_1 = \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, X_s = \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}$ ve $\overset{1}{\xi} = dx^{j_1}, \dots, \overset{r}{\xi} = dx^{j_r}$ alındığında, pür tensör alanı φ_j^i ve $t_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r}$ bileşenleriyle aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$t_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} \varphi_{i_1}^m = t_{i_1 m \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} \varphi_{i_2}^m = \dots = t_{i_1 i_2 \dots m}^{j_1 \dots j_r} \varphi_{i_s}^m = t_{i_1 \dots i_s}^{m j_2 \dots j_r} \varphi_m^{j_1} = t_{i_1 \dots i_s}^{j_1 m \dots j_r} \varphi_m^{j_2} = \dots = t_{i_1 i_2 \dots i_s}^{j_1 j_2 \dots m} \varphi_m^{j_r} \tag{3.2}$$

Vektör, kovektör ve skaler alanlar, kolaylık olması için pür tensör alanları gibi kabul edilir(Salimov, 2013).

Tanım 3.2.3. M^n , C^∞ sınıfından bir manifold ve T_p , her $p \in M^n$ noktasındaki tanjant uzayı olsun. M^n her $p \in M^n$ noktasına T_p uzayından bir X_p vektörü karşılık getiren X vektör değerli fonksiyonuna vektör alanı denir(Salimov ve Mağden, 2008).

3.3. Kotanjant Demet

M^n , n –boyutlu diferensiyellenebilen bir manifold ve $P \in M$ noktasındaki tanjant uzayın $T_P \in T(M)$ dual uzayı olan kotanjant uzayı $T_P^* \in T^*(M)$ olsun. $P \in M$ noktasında $T_P^* \in T^*(M)$ nin herhangi bir elemanı kovektör olarak adlandırılır. O zaman M manifoldu üzerindeki kotanjant demet aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$T^* \in T^*(M) = \bigcup_{P \in M} T_P^*$$

Herhangi bir $\tilde{P} \in T^*(M)$ noktası (bu nokta aynı zamanda $T_P^*(M)$ ninde bir elemanıdır) $\pi: T^*(M) \rightarrow M$ projeksiyon dönüşümü ile $\tilde{P} \rightarrow P$ durumunu alır. Burada M temel(baz) uzaydır ve $\pi^{-1}(P)$ kümesi $T_P^*(M)$ kümesini belirtir ve $P \in M$ üzerinde fibre olarak adlandırılır (Yano ve Ishihara, 1973).

M üzerinde ω kovektör alanı ve X vektör alanının bir U kümesi içinde lokal ifadeleri $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ve $\omega = \omega_i dx^i$ olsun. O zaman ω 'nın vertikal lifti ω^V ile X vektör alanının sırası ile yatay lift ve tam lifti X^H, X^C indirgenmiş koordinatlara göre

$$\omega^V = \omega_i \partial_i,$$

$$X^H = X^i \partial_i + p_h \Gamma_{ij}^h X^j \partial_i$$

$$X^C = X^i \partial_i - p_h \partial_i X^j \partial_i,$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ve Γ_{ij}^h ifadeleri M içerisinde bir ∇ simetrik afin konneksiyonun katsayılarıdır.

$T^*(M)$ üzerinde dikey ve yatay vektör alanlarının Lie parantez (bracketed) işlemi aşağıdaki formüller ile verilir (Yano ve Ishihara, 1973).

$$\begin{cases} [X^H, Y^H] = [X, Y]^H + (p \circ R(X, Y))^V \\ [X^H, \omega^V] = (\nabla_X \omega)^V \\ [\theta^V, \omega^V] = 0 \end{cases}$$

$X, Y \in \mathfrak{X}_0^1(M)$ ve ∇ simetrik konneksiyonu için R eğrilik tensörü

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$$

şeklinde tanımlanır.



BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Kotanjant Demetteki Sonuçlar

4.1.1. Kotanjant Demet Üzerinde $\alpha F^K + \lambda^r F^T = 0$ Şartını Sağlayan Genel $F_{\alpha,\lambda}(K,T)$ – Yapısının Yatay Lifti

M^n manifoldu üzerinde (1,1) tipli iki tensör alanı F, G olsun. Eğer F nin horizontal lifti F^H ile tanımlanırsa (Yano ve Ishihara, 1973 ; Lovejoy ve Nivas, 2005)

$$F^H G^H + G^H F^H = (FG + GF)^H. \quad (4.1)$$

yazılır.

F ve G aynı alınırsa

$$(F^H)^2 = (F^2)^H,$$

elde edilir.

F nin bazı daha yüksek kuvvetleri tarafından (4.1) eşitliğinin içerisinde G nin yerine yukarıdaki hesaplamaya devam edilirse

$$(F^K)^H = (F^H)^K, \quad (F^T)^H = (F^H)^T \quad (4.2)$$

elde edilir. Burada $F \neq 0, K \geq 3, T \geq 1$ ve $(K \geq T)$, a ve λ sıfırdan farklı karmaşık sayılar, r sonlu tam sayıdır.

Ayrıca, G ve H aynı türden tensör alanları ise

$$(G + H)^H = G^H + H^H. \quad (4.3)$$

elde edilir.

$\alpha F^K + \lambda^r F^T = 0$ eşitliğinin her iki tarafının horizontal liftini alırsak

$$\alpha(F^K)^H + \lambda^r (F^T)^H = 0. \quad (4.4)$$

elde edilir.

(4.2) ve (4.3) denklemleri doğrultusunda (Lovejoy ve Nivas, 2005 ; Singh ve ark., 2016)

$$\alpha(F^H)^K + \lambda^r (F^H)^T = 0. \quad (4.5)$$

yazılır.

Önerme 4.1.1.1. g metriği ile M^n bir Riemannian manifoldu olsun. ∇ , Levi-Civita konneksiyonu ve R , Riemannian eğrilik tensörü olsun. O zaman M^n 'nin $T^*(M^n)$ kotanjant demeti üzerinde Lie parantezi aşağıdaki şartları sağlar:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & [\omega^V, \theta^V] = 0, \\ \text{ii)} \quad & [X^H, \omega^V] = (\nabla_X \omega)^V, \\ \text{iii)} \quad & [X^H, Y^H] = [X, Y]^H + \gamma R(X, Y) = [X, Y]^H + (pR(X, Y))^V \end{aligned} \quad (4.6)$$

tüm $X, Y \in \mathfrak{Z}_0^1(M^n)$ ve $\omega, \theta \in \mathfrak{Z}_1^0(M^n)$ (Yano ve Ishihara, 1973) için.

Tanım 4.1.1.1. M^n üzerinde $\alpha F^K + \lambda^r F^T = 0$ şartını sağlayan (1,1) tipli tensör alanı F olsun. M^n nin (1,1) tipli F tensör alanının Nijenhuis tensörü şu şekilde verilir:

$$N_F = [FX, FY] - F[X, FY] - F[FX, Y] + F^2[X, Y] \quad (4.7)$$

herhangi bir $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M^n)$ için (Salimov, 2013 ; Salimov ve Çayır, 2013 ; Çayır, 2015). $N_F(X, Y) = N(X, Y) = 0$ şartı, bu yapılardaki integrallenebilirlik şartı için gereklidir.

N_F Nijenhuis tensörü lokal koordinatlarda şu şekilde tanımlanır.

$$N_{ij}^k \partial_k = (F_i^s \partial_s F_j^k - F_j^l \partial_l F_i^k - \partial_i F_j^l F_l^k + \partial_j F_i^s F_s^k) \partial_k$$

Burada $X = \partial_i, Y = \partial_j, F \in \mathfrak{S}_1^1(M^n)$ şeklindedir.

4.1.2. Kotanjant Demeti $T^*(M^n)$ Üzerinde $(F^K)^H$ Nijenhuis Tensörleri

Teorem 4.1.2.1. $(F^K)^H$ ve F^T nin Nijenhuis tensörleri sırasıyla $\tilde{N}$ ve N şeklinde tanımlanır. Burada, $a(F^K)^H + \lambda^r (F^T)^H = 0$ yapısı, Önerme 4.1.1.1. ve içerisinde ifade edilen (4.6) formülleri ile Nijenhuis tensörünün tanımı göz önüne alındığında aşağıda hesaplanan sonuçlar elde edilir:

- i.
$$\begin{aligned} \tilde{N}_{(F^K)^H (F^K)^H} (X^H, Y^H) &= \frac{\lambda^{2r}}{a^2} \{ [F^T X, F^T Y] - F^T [F^T X, Y] - F^T [X, F^T Y] \\ &\quad + (F^T)^2 [X, Y] \}^H + \lambda \{ R(F^T X, F^T Y) \\ &\quad - R(F^T X, Y) F^T - R(X, F^T Y) F^T \\ &\quad + R(X, Y) (F^T)^2 \} \}. \end{aligned}$$
- ii.
$$\tilde{N}_{(F^K)^H (F^K)^H} (X^H, \omega^V) = \frac{\lambda^{2r}}{a^2} \{ \omega \circ (\nabla_{F^T X} F^T) - (\omega \circ (\nabla_X F^T) F^T) \}^V,$$
- iii.
$$\tilde{N}_{(F^K)^H (F^K)^H} (\omega^V, \theta^V) = 0.$$

İspat:

i. Eğer F^T bir almost kompleks yapı, $(F^T)^2 = -I$ ve $R(F^T X, F^T Y) = R(X, Y)$ ise $(F^K)^H$ yatay liftinin Nijenhuis tensörü sıfırdır.

$$\begin{aligned}
N_{(F^K)^H(F^K)^H}(X^H, Y^H) &= [(F^K)^H X^H, (F^K)^H Y^H] - (F^K)^H [(F^K)^H X^H, Y^H] \\
&\quad - (F^K)^H [X^H, (F^K)^H Y^H] + (F^K)^H (F^K)^H [X^H, Y^H] \\
&= \frac{\lambda^{2r}}{\alpha^2} \{[(F^T)^H X^H, (F^T)^H Y^H] - (F^T)^H [(F^T)^H X^H, Y^H] \\
&\quad - (F^T)^H [X^H, (F^T)^H Y^H] + ((F^T)^H)^2 [X^H, Y^H]\} \\
&= \frac{\lambda^{2r}}{\alpha^2} \{[F^T X, F^T Y]^H + \gamma R(F^T X, F^T Y) \\
&\quad - (F^T)^H [(F^T X), Y]^H - (F^T)^H \gamma R(F^T X, F^T Y) \\
&\quad - (F^T)^H [X, F^T Y]^H - (F^T)^H \gamma R(X, F^T Y) \\
&\quad + ((F^T)^H)^2 [X, Y]^H + ((F^T)^H)^2 \gamma R(X, Y)\} \\
&= \frac{\lambda^{2r}}{\alpha^2} \{[F^T X, F^T Y] - F^T [F^T X, Y] - F^T [X, F^T Y] \\
&\quad + (F^T)^2 [X, Y]\}^H + \gamma \{R(F^T X, F^T Y) - R(F^T X, Y) F^T \\
&\quad - R(X, F^T Y) F^T + R(X, Y) (F^T)^2\}.
\end{aligned}$$

Eğer ∇ 'nin eğrilik tensörü $R(F^T X, F^T Y) = R(X, Y)$ şartını sağlıyor ve F^T bir almost kompleks yapı ise $(F^K)^H$ integrallenebilir. O zaman, $R(F^T X, Y) = -R(X, F^T Y)$ eşitliği elde edilir. Bundan dolayı $(F^T)^2 = -I$ eşitliği kullanılarak

$$R(F^T X, F^T Y) - R(F^T X, Y) F^T - R(X, F^T Y) F^T + R(X, Y) (F^T)^2 = 0$$

elde edilir. Buradan $N_{(F^K)^H(F^K)^H}(X^H, Y^H) = 0$ yazılır.

ii. Eğer $\nabla F^T = 0$ ise $(F^K)^H$ yatay liftinin Nijenhuis tensörü $N_{(F^K)^H(F^K)^H}(X^H, \omega^V)$ sıfırdır.

$$\begin{aligned}
N_{(F^K)^H(F^K)^H}(X^H, \omega^V) &= [(F^K)^H X^H, (F^K)^H \omega^V] - (F^K)^H [(F^K)^H X^H, \omega^V] \\
&\quad - (F^K)^H [X^H, (F^K)^H \omega^V] + (F^K)^H (F^K)^H [X^H, \omega^V] \\
&= \frac{\lambda^{2r}}{\alpha^2} \{[(F^T)^H X^H, (F^T)^H \omega^V] - (F^T)^H [(F^T)^H X^H, \omega^V] \\
&\quad - (F^T)^H [X^H, (F^T)^H \omega^V] + ((F^T)^H)^2 [X^H, \omega^V]\} \\
&= \frac{\lambda^{2r}}{\alpha^2} \{[(F^T X)^H, (\omega \circ F^T)^V] - (F^T)^H [(F^T X)^H, \omega^V] \\
&\quad - (F^T)^H [X^H, (\omega \circ F^T)^V] + ((F^T)^H)^2 (\nabla_X \omega)^V\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(F^T)^H [X^H, (\omega \circ F^T)^V] + ((F^T)^H)^2 (\nabla_X \omega)^V \} \\
& = \frac{\lambda^{2r}}{\alpha^2} \{ \omega \circ (\nabla_{F^T X} F^T) - (\omega \circ (\nabla_X F^T) F^T)^V \},
\end{aligned}$$

Burada $F^T \in \mathfrak{F}_1^1(M^n)$, $X \in \mathfrak{F}_0^1(M^n)$, $\omega \in \mathfrak{F}_1^0(M^n)$ şeklindedir.

iii. $(F^K)^H$ nin yatay liftinin Nijenhuis tensörü $\tilde{N}_{(F^K)^H (F^K)^H}(\omega^V, \theta^V)$ sıfırdır.

$T^*(M^n)$ üzerinde $\omega \circ F^T, \theta \circ F^T, \omega, \theta \in \mathfrak{F}_1^0(M^n)$ olmak üzere, $[\omega^V, \theta^V] = 0$ olduğu için $(F^K)^H$ nin Nijenhuis tensörü $\tilde{N}_{(F^K)^H (F^K)^H}(\omega^V, \theta^V)$ sıfırdır.

4.1.3. $T^*(M^n)$ Üzerinde $\alpha F^K + \lambda^r F^T = 0$ Yapısının Liflerine Göre Vektör ve Kovektör Alanlarına Uygulanan Tachibana Operatörleri

Tanım 4.1.3.1. $\phi \in \mathfrak{F}_1^1(M^n)$ için, R üzerinde

$$\mathfrak{F}(M^n) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \mathfrak{F}_{r,s}^1(M^n)$$

bir tensör cebridir. $\varphi_\phi|_{r+s>0}: \mathfrak{F}^*(M^n) \rightarrow \mathfrak{F}(M^n)$ dönüşümü eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa Tachibana operatörü ya da φ_ϕ operatörü olarak adlandırılır.

- a) φ_ϕ sabit katsayıya göre lineerdir,
- b) Tüm r ve s 'ler için $\varphi_\phi: \mathfrak{F}^*(M^n) \rightarrow \mathfrak{F}_{s+1}^r(M^n)$,
- c) Tüm $K, L \in \mathfrak{F}^*(M^n)$ için $\varphi_\phi: \left(K \overset{C}{\otimes} L \right) = (\varphi_\phi K) \otimes L + K \otimes \varphi_\phi L$,
- d) Tüm $X, Y \in \mathfrak{F}_0^1(M^n)$ için $\varphi_{\phi X} Y = -(L_Y \phi) X$

burada L_Y, Y ye göre Lie diferansiyellenebilmesidir (Kobayashi ve Nomizu, 1963 ; Çayır, 2016 ; Çayır ve Köseoğlu , 2016).

$$\begin{aligned}
\text{e) } (\varphi_{\phi V} \eta) W &= (d(\iota_W \eta))(\phi V) - \left(d(\iota_W (\eta \circ \phi)) \right) V + \eta((L_W \phi) V) \\
&= \varphi V(\iota_W \eta) - V(\iota_{\phi W} \eta) + \eta((L_W \phi) V)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$\eta \in \mathfrak{S}_1^0(M^n)$ ve $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M^n)$ için $\iota_Y \eta = \eta(Y) = \eta \overset{C}{\otimes} Y \cdot \mathfrak{S}_s^*(M^n)$ afinor alanlarına göre M^n üzerinde (r, s) tipli tüm pür tensör alanlarının modülüdür. $\overset{C}{\otimes}$ bir C kontraksiyonuyla bir tensör çarpımıdır (pür tensör alanlarına uygulanması ile ilgili bkz. (Salimov ve Çayır, 2013)).

Yorum 4.1.3.1. Tanım 2'nin d) şikkından

$$\varphi_{\phi X} Y = [\phi X, Y] - g(YF)X. \quad (4.9)$$

elde edilir. Herhangi bir $f, g \in \mathfrak{S}_0^0(M^n)$ için

$$[FX, gY] = Fg[X, Y] + F(Xg)Y - g(YF)X \quad (4.10)$$

formülünden, $\varphi_{\phi X} Y$ nin X e göre lineer olduğunu fakat Y ye göre lineer olmadığını anlarız (Salimov, 2013).

Teorem 4.1.3.2. $(F^K)^H, T^*(M^n)$ üzerinde $(1,1)$ tipli bir tensör alanı olsun. Eğer $T^*(M^n)$ üzerinde (4.4) ile tanımlanan $\alpha F^K + \lambda^r F^T = 0$ yapısının yatay liftlerine göre vektör alanlarına Tachibana operatörü uygularsa aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

- i. $\varphi_{(F^K)^H X^H} Y^H = \frac{\lambda^r}{\alpha} \left\{ ((L_Y F^T)X)^H + (pR(Y, F^T X))^V - \left((pR(Y, X)) \circ F^T \right)^V \right\},$
- ii. $\varphi_{(F^K)^H X^H} \omega^V = \frac{\lambda^r}{\alpha} \left(((\nabla_X \omega) \circ F^T)^V - (\nabla_{(F^T X)} \omega)^V \right),$
- iii. $\varphi_{(F^K)^H \omega^V} X^H = \frac{\lambda^r}{\alpha} (\omega \circ (\nabla_X F^T))^V,$
- iv. $\varphi_{(F^K)^H \omega^V} \theta^V = 0,$

Sırasıyla; $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M^n)$ için yatay liftler $X^H, Y^H \in \mathfrak{S}_0^1(T^*(M^n))$ ve $\omega, \theta \in \mathfrak{S}_1^0(M^n)$ için dikey liftler $\omega^V, \theta^V \in \mathfrak{S}_0^1(T^*(M^n))$ şeklinde verilir.

İspat:

$$\begin{aligned}
\text{i) } \varphi_{(F^K)^H X^H} Y^H &= -(L_{Y^H} (F^K)^H) X^H \\
&= -(L_{Y^H} (F^K)^H) X^H + (F^K)^H L_{Y^H} X^H \\
&= \frac{\lambda^r}{\alpha} (L_{Y^H} (F^T)^H) X^H - \frac{\lambda^r}{\alpha} (F^T)^H ([Y, X]^H + (pR(Y, X))^V) \\
&= \frac{\lambda^r}{\alpha} \{ (L_{Y^H} F^T X)^H + (pR(Y, F^T X))^V - (F^T L_Y X)^H \\
&\quad - ((pR(Y, X)) \circ F^T)^V \} \\
&= \frac{\lambda^r}{\alpha} \{ ((L_Y F^T) X)^H + (pR(Y, F^T X))^V - (pR(Y, X)) \circ F^T)^V \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii) } \varphi_{(F^K)^H X^H} \omega^V &= -(L_{\omega^V} (F^K)^H) X^H \\
&= -L_{\omega^V} (F^K)^H X^H + (F^K)^H L_{\omega^V} X^H \\
&= \frac{\lambda^r}{\alpha} L_{\omega^V} (F^T X)^H + \frac{\lambda^r}{\alpha} (F^T)^H (\nabla_X \omega)^V \\
&= \frac{\lambda^r}{\alpha} (\nabla_{(F^T X)} \omega)^V + \frac{\lambda^r}{\alpha} ((\nabla_X \omega) \circ F^T)^V \\
&= \frac{\lambda^r}{\alpha} (((\nabla_X \omega) \circ F^T)^V - (\nabla_{(F^T X)} \omega)^V)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{iii) } \varphi_{(F^K)^H \omega^V} X^H &= -(L_{X^H} (F^K)^H) \omega^V \\
&= -L_{X^H} (F^K)^H \omega^V + (F^K)^H L_{X^H} \omega^V \\
&= \frac{\lambda^r}{\alpha} L_{X^H} (\omega \circ F^T)^V - \frac{\lambda^r}{\alpha} (F^T)^H (\nabla_X \omega)^V \\
&= \frac{\lambda^r}{\alpha} (\nabla_X (\omega \circ F^T))^V - \frac{\lambda^r}{\alpha} ((\nabla_X \omega) \circ F^T)^V \\
&= \frac{\lambda^r}{\alpha} (\omega \circ (\nabla_X F^T))^V
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{iv) } \varphi_{(F^K)^H \omega^V} \theta^V &= -(L_{\theta^V} (F^K)^H) \omega^V \\
&= -L_{\theta^V} (F^K)^H \omega^V + (F^K)^H (L_{\theta^V} \omega^V) \\
&= \frac{\lambda^r}{\alpha} L_{\theta^V} (\omega \circ F^T)^V \\
&= 0
\end{aligned}$$

4.1.4. $(F^K)^H$ Üzerinde Sasakian Metriğinin Pürlük Koşulları

Tanım 4.1.4.1. $T^*(M^n)$ üzerinde Sg Sasaki metriği aşağıdaki üç eşitlik ile tanımlanır.

$${}^Sg(\omega^V, \theta^V) = (g^{-1}(\omega, \theta))^V = g^{-1}(\omega, \theta) \circ \pi, \quad (4.11)$$

$${}^Sg(\omega^V, Y^H) = 0, \quad (4.12)$$

$${}^Sg(X^H, Y^H) = (g(X, Y))^V = g(X, Y) \circ \pi. \quad (4.13)$$

Her $x \in M^n$ için $g^{-1} = (g^{ij})$ skaler çarpımı $\pi^{-1}(x) = T_x^*(M^n)$ kotanjant uzayı üzerinde

$$g^{-1}(\omega, \theta) = g^{ij} \omega_i \theta_j$$

şeklinde tanımlanır. Burada $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M^n)$ ve $\omega, \theta \in \mathfrak{S}_1^0(M^n)$ için. $T^*(M^n)$ üzerinde (0,2) tipli herhangi bir tensör alanı X^H ve ω^V (Yano ve Ishihara, 1973) vektör alanlarıyla belirlenir ve Sg (4.11), (4.12) ve (4.13) denklemleriyle verilir.

Teorem 4.1.4.1. $T^*(M^n)$ kotanjant demeti, Sg Sasaki metriği ve (4.4) ile tanımlanan (1,1) tipli $(F^K)^H$ tensör alanıyla tanımlansın. Sg Sasaki metriği eğer $F^T = I$ ($I, (1,1)$ tipli birim tensör alanı) ise $(F^K)^H$ 'ye göre pürdür.

İspat: Eğer $S(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$ ise

$$S(\tilde{X}, \tilde{Y}) = {}^Sg((F^K)^H \tilde{X}, \tilde{Y}) - {}^Sg(\tilde{X}, (F^K)^H \tilde{Y}).$$

ω^V, θ^V ya da X^H, Y^H liftlerinin tüm $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ vektör alanları için eğer $S(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$ ise o zaman $S = 0$ dır. $(F^H)^K + \lambda^r (F^H)^T = 0$ ve (4.11), (4.12), (4.13) denklemleri vasıtasıyla

$$\begin{aligned}
\text{i) } S(\omega^V, \theta^V) &= {}^S g((F^K)^H \omega^V, \theta^V) - {}^S g(\omega^V, (F^K)^H \theta^V) \\
&= {}^S g(-\frac{\lambda^r}{\alpha} (F^T)^H \omega^V, \theta^V) - {}^S g(\omega^V, -\frac{\lambda^r}{\alpha} (F^T)^H \theta^V) \\
&= -\frac{\lambda^r}{\alpha} ({}^S g((\omega \circ F^T)^V, \theta^V) - {}^S g(\omega^V, (\theta \circ F^T)^V)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii) } S(X^H, \theta^V) &= {}^S g((F^K)^H X^H, \theta^V) - {}^S g(X^H, (F^K)^H \theta^V) \\
&= {}^S g(-\frac{\lambda^r}{\alpha} (F^T)^H X^H, \theta^V) - {}^S g(X^H, -\frac{\lambda^r}{\alpha} (F^T)^H \theta^V) \\
&= -\frac{\lambda^r}{\alpha} ({}^S g((F^T X)^H, \theta^V) - {}^S g(X^H, (\omega \circ F^T)^V)). \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{iii) } S(X^H, Y^H) &= {}^S g((F^K)^H X^H, Y^H) - {}^S g(X^H, (F^K)^H Y^H) \\
&= {}^S g(-\frac{\lambda^r}{\alpha} (F^T)^H X^H, Y^H) - {}^S g(X^H, -\frac{\lambda^r}{\alpha} (F^T)^H Y^H) \\
&= -\frac{\lambda^r}{\alpha} ({}^S g((F^T X)^H, Y^H) - {}^S g(X^H, (F^T Y)^H)).
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $F^T = I$ ise o zaman ${}^S g, (F^K)^H$ ye göre pürdür.

4.2. Tanjant Demetteki Sonuçlar

4.2.1. Tanjant Demet $T(M^n)$ Üzerinde $\alpha F^K + \lambda^r F^T = 0$ Yapısının Tam Lifti

M , C^∞ sınıfından n boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold, $T_P(M^n)$ 'de M^n nin bir P noktasındaki tanjant uzayı olsun. Bu takdirde

$$T(M^n) = \bigcup_{P \in M^n} T_P(M^n) \quad (4.14)$$

ifadesi M manifoldu üzerinde bir tanjant demettir.

C^∞ sınıfından tüm tensör alanlarının kümesini $T_s^r(M^n)$ ve M manifoldu üzerindeki tanjant demeti $T(M^n)$ ile gösterelim. $T_1^1(M^n)$ 'nin bir F elemanının tam lifti F^C local bileşenleri ile F_i^h şeklinde gösterilir (Yano ve Patterson, 1967).

$$F^C = \begin{bmatrix} F_i^h & 0 \\ \delta_i^h & F_i^h \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$\alpha F^K + \lambda^r F^T = 0$ ($F \neq 0, K \geq 3, T \geq 1$ ve $(K \geq T)$, α ve λ sıfırdan farklı karmaşık sayılar, r sonlu tam sayı) şartını sağlayan genel $F_{\alpha, \lambda}(K, T)$ – yapısını oluşturan F 'nin tam liftinin sonuçlarını elde edeceğiz.

$F, G \in T_1^1(M^n)$ olsun. O zaman (Yano ve Patterson, 1967)

$$(FG)^C = F^C G^C. \quad (4.16)$$

elde edilir.(4.16) denkleminde G nin yerine F yazıldığında,

$$(FF)^C = F^C F^C \text{ veya } (F^2)^C = (F^C)^2. \quad (4.17)$$

elde edilir.(4.16) denkleminde $G = F^4$ yazıldığında

$$(FF^4)^C = F^C (F^4)^C$$

elde edilir.(4.17) denkleminde de

$$(F^5)^C = (F^C)^5 .$$

elde edilir.

F nin yüksek dereceli mertebelerinde (4.16) denklemi içerisinde G yerine yukarıdaki süreç devam ettirildiğinde

$$\begin{aligned} (F^K)^C &= (F^C)^K, \\ (F^T)^C &= (F^C)^T, \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $(F \neq 0, K \geq 3, T \geq 1 \text{ ve } (K \geq T))$ şeklindedir.

Eğer G ve H aynı tipli tensör alanları ise o zaman

$$(G + H)^C = G^C + H^C . \quad (4.18)$$

yazılır. $\alpha F^K + \lambda^r F^T = 0$ denkleminin her iki tarafının tam liftini aldığımız zaman

$$(\alpha F^K + \lambda^r F^T)^C = 0$$

elde edilir.(4.18) ve $I^C = I$ kullanarak

$$\begin{aligned} \alpha(F^K)^C + \lambda^r(F^T)^C &= 0 . \\ \alpha(F^C)^K + \lambda^r(F^C)^T &= 0 . \end{aligned} \quad (4.19)$$

elde edilir.

(1,1) tipli F yapısı M^n manifoldu içerisinde r rankına sahip olsun. O zaman l nin tam lifti $l^C = -\frac{\alpha}{\lambda^r}(F^{K-T})^C$ ve m 'nin tam lifti $m^C = I + \frac{\alpha}{\lambda^r}(F^{K-T})^C$, $T(M^n)$ içerisinde

tamamlayıcı izdüşüm tensörleridir. Burada $T(M^n)$ içerisinde sırasıyla l^C ve m^C tarafından oluşturulan iki tane L^C ve M^C tamamlayıcı dağılımları vardır.

Önerme 4.2.1.1. $T(M^n)$ üzerinde ψ , (1,1) tipli tensör alanı

$$\psi = l^C - m^C = -2 \frac{\alpha}{\lambda^r} (F^{K-T})^C - I$$

bir almost product yapı belirtir.

İspat:

$$l^C = -\frac{\alpha^2}{\lambda^r} (F^{K-T})^C, m^C = I + \frac{\alpha^2}{\lambda^r} (F^{K-T})^C \text{ ve } \psi = l^C - m^C = -2 \frac{\alpha}{\lambda^r} (F^{K-T})^C - I$$

ifadeleri için

$$\begin{aligned} \psi^2 &= 4 \frac{\alpha^2}{\lambda^{2r}} (F^{2K-2T})^C + 4 \frac{\alpha^2}{\lambda^{2r}} (F^{K-T})^C + I \\ &= 4 \frac{\alpha}{\lambda^r} (F^{2K-T})^C \left(\frac{\alpha}{\lambda^r} F^{-T} \right)^C + 4 \frac{\alpha}{\lambda^r} (F^{K-T})^C + I \\ &= 4 \frac{\alpha}{\lambda^r} (F^{2K-T})^C (-F^{-K})^C + 4 \frac{\alpha}{\lambda^r} (F^{K-T})^C + I \\ &= -4 \frac{\alpha}{\lambda^r} (F^{K-T})^C + 4 \frac{\alpha}{\lambda^r} (F^{K-T})^C + I \\ &= I, \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\psi \in \mathfrak{S}_1^1(T(M^n))$, $I = (1,1)$ tipli birim tensör alanıdır.

4.2.2. Tanjant Demet $T(M^n)$ Üzerinde $\alpha(F^K)^C + \lambda^r(F^T)^C = 0$ Yapısının İntegrallenebilirlik Şartları

Tanım 4.2.2.1. Bir Riemannian manifoldu üzerinde X ve Y herhangi iki vektör alanları olsun (Yano ve Ishihara, 1973)

$$[X^H, Y^H] = [X, Y]^H - (R(X, Y)u)^V,$$

$$[X^H, Y^V] = (\nabla_X Y)^V,$$

$$[X^V, Y^V] = 0,$$

elde edilir. Burada $R, R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$ şeklinde tanımlanan g 'nin Riemannian eğrilik tensörüdür. Ek olarak, $T(M^n)$ üzerinde dikey lift u^V ve yatay lift u^H aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$u^V = u^i(\partial_i)^V = u^i \partial_i, u^H = u^i(\partial_i)^H = u^i \delta_i,$$

Burada $\delta_i = -u^j \Gamma_{ji}^s \partial_s$ şeklindedir. Ayrıca u^V , $T(M^n)$ üzerinde kanonikal ya da Liouville vektör alanı olarak da adlandırılır.

F , (1.1) tipli tensör alanı ve $F \in \mathfrak{S}_1^1(M^n)$ olsun. O zaman (1.2) tipli F nin Nijenhuis tensörü N_F aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$N(V, W) = [FV, FW] - F[FV, W] - F[V, FW] + F^2[V, W] \quad (4.20)$$

$T(M^n)$ içerisinde F^C nin Nijenhuis tensörü N^C olsun. O zaman

$$N^C(X^C, Y^C) = [F^C X^C, F^C Y^C] - F^C[F^C X^C, Y^C] - F^C[X^C, F^C Y^C] + (F^2)[X^C, Y^C]$$

denklemini yazılır.

$F \in \mathfrak{S}_1^1(M^n)$ ve herhangi $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M^n)$ için,

$$[X^C, Y^C] = [X, Y]^C, F^C X^C = (FX)^C \quad (4.21)$$

$$(X + Y)^C = X^C + Y^C$$

yazılır. (2.5) ve (4.21) den;

$$F^C l^C = (Fl)^C = F^C \quad (4.22)$$

$$F^C m^C = (Fm)^C = 0$$

elde edilir.

Teorem 4.2.2.1. Aşağıdaki özdeşlikler elde edilir.

$$a) m^c N^c(l^c X^c, l^c Y^c) = m^c[F^c X^c, F^c Y^c]$$

$$b) m^c N^c(X^c, Y^c) - m^c[F^c X^c, F^c Y^c]$$

$$c) N^c(m^c X^c, m^c Y^c) = (F^c)^2[m^c X^c, m^c Y^c]$$

$$d) m^c N^c((\alpha F^K + \lambda^r F^T)^c X^c, (\alpha F^K + \lambda^r F^T)^c Y^c) = m^c N^c[l^c X^c, l^c Y^c]$$

İspat: (1.2), (2.15) ve (2.17) eşitlikleri kullanılarak kolaylıkla sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.2.2.2. Herhangi bir $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M^n)$ için aşağıdaki şartlar denktir.

$$i) m^c N^c(X^c, Y^c) = 0$$

$$ii) m^c N^c(l^c X^c, l^c Y^c) = 0$$

$$iii) m^c N^c((\alpha F^K + \lambda^r F^T)^c X^c, (\alpha F^K + \lambda^r F^T)^c Y^c) = 0$$

İspat: Yukarıdaki teorem içerisinde $d)$ eşitliğinin sonucu olarak eğer tüm $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M^n)$ için

$$N^c(l^c V^c, l^c W^c) = 0$$

ise ancak ve ancak

$$N^c((\alpha F^K + \lambda^r F^T)^c V^c, (\alpha F^K + \lambda^r F^T)^c W^c) = 0$$

şeklindedir.

$a)$ ve $b)$ eşitliklerinin sağ tarafı Teorem 4.2.2.2 içerisinde eşittir ve en son eşitlikten de anlaşıldığı gibi $(i), (ii)$ ve (iii) şartları da eşittir.

Teorem 4.2.2.3. Eğer M^n içerisinde M integrallenebilirse M^n manifoldu içerisindeki M nin $T(M^n)$ içerisindeki tam lifti integrallenebilirdir.

İspat: $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M^n)$ ve $l = I - m$ için F integrallenebilirse ancak ve ancak (Yano ve Ishihara, 1973)

$$l(mV, mW) = 0, \quad (4.23)$$

(4.21) kullanılarak her iki tarafın tam liftini aldığımızda

$$l^C(m^C V^C, m^C W^C) = 0,$$

elde edilir. Burada tüm $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M^n)$ ve $l^C = (I - m)^C = I - m^C$ tam lifti m^C için tamamlayıcı izdüşüm tensörüdür.

Teorem 4.2.2.4. M^n manifoldu içerisinde bir M dağılımının $T(M^n)$ içerisindeki tam lifti M^C integrallenebilirdir eğer $l^C N^C(m^C X^C, m^C Y^C) = 0$ ise veya tüm $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M^n)$ için $N^C(m^C X^C, m^C Y^C) = 0$ ise.

İspat: Herhangi $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M^n)$ için $N(mV, mW) = 0$ ise (Yano ve Ishihara, 1973) ancak ve ancak M^n manifoldu içerisinde M dağılımı integrallenebilirdir.

$$m^C N^C(l^C X^C, l^C Y^C) = m^C [F^C X^C, F^C Y^C] \text{ şartı sayesinde}$$

$$N^C(m^C X^C, m^C Y^C) = (F^C)^2 [m^C X^C, m^C Y^C]$$

elde edilir. Her iki taraf l^C ile çarpıldığı zaman

$$l^C N^C(m^C X^C, m^C Y^C) = (F^C)^2 l^C [m^C X^C, m^C Y^C]$$

elde edilir. (2.2) denklemi vasıtasıyla yukarıdaki bağıntıdan

$$l^C N^C(m^C X^C, m^C Y^C) = 0. \quad (4.24)$$

elde edilir. Ayrıca

$$l^C N^C(m^C X^C, m^C Y^C) = 0. \quad (4.25)$$

elde edilir. (4.24) ve (4.25) e ek olarak

$$(l^C + m^C)N^C(m^C X^C, m^C Y^C) = 0$$

yazılabilir. $l^C + m^C = I^C = I$ olduğundan dolayı

$$N^C(m^C X^C, m^C Y^C) = 0$$

elde edilir.

Teorem 4.2.2.5. M^n içerisinde L dağılımı integrallenebilir ve tüm $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M^n)$ için $mN(X, Y) = 0$ olsun. Tüm $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M^n)$ için Teorem 4.2.2.3'ün şartlarından herhangi birisi sağlanır ise ancak ve ancak L^C dağılımı $T(M^n)$ içerisinde integrallenebilir.

İspat: M^n içerisinde L dağılımı integrallenebilir ancak ve ancak $mN(lX, lY) = 0$ ise. Buradan L^C dağılımı $T(M^n)$ içerisinde integrallenebilir ancak ve ancak

$$m^C N^C(l^C X^C, l^C Y^C) = 0$$

olmak üzere Teorem 4.2.2.2'nin d) şikkını kullanarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.2.6. F, M^n içerisinde kısmi integrallenebilirse ancak ve ancak M^n içerisinde F nin bir $(\alpha F^K + \lambda^r F^T) -$ yapısının tam lifti $T(M^n)$ içerisinde kısmen integrallenebilir.

İspat: M^n içerisindeki F nin $(\alpha F^K + \lambda^r F^T) -$ yapısı kısmen integrallenebilir ancak ve ancak herhangi $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M^n)$ için

$$N(lX, lY) = 0 \quad (4.26)$$

şartının olması halinde (2.1) ve (4.7) eşitlikleri ışığında

$$N^C(l^C X^C, l^C Y^C) = (N(lX, lY))^C$$

elde edilir. $N(lX, lY) = 0$ olması halinde ancak ve ancak $N^C(m^C X^C, m^C Y^C) = 0$ denklemi elde edilir. Ayrıca Teorem 4.2.2.3.'ten $N^C(l^C X^C, l^C Y^C) = 0$ ifadesi $N^C((F^{2K+S} + F^S)^C X^C, (F^{2K+S} + F^S)^C Y^C) = 0$ ifadesine denktir.

Teorem 4.2.2.7. M^n içerisinde F kısmi integrallenebilirse ancak ve ancak $T(M^n)$ içerisinde F nin bir $(\alpha F^K + \lambda^r F^T) -$ yapısının tam lifti olan F^C kısmi integrallenebilir.

İspat:

Bir $(\alpha F^K + \lambda^r F^T) -$ yapısının integrallenebilir olması için gerekli ve yeterli şart herhangi iki $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M^n)$ için

$$N(V, W) = 0. \quad (4.27)$$

şartının sağlanmasıdır. Teorem 4.2.2.2. vasıtasıyla, $N^C(X^C, Y^C) = (N(X, Y))^C$ elde edilir.

4.2.3. Tanjant Demet $T(M^n)$ Üzerinde $\alpha(F^K)^C + \lambda^r(F^T)^C = 0$ Yapısına Göre Sasakian Metriğinin Pürlük Şartları

Tanım 4.2.3.1. Sg Sasaki metriği, $T(M^n)$ tanjant demet üzerinde bir (pozitif tanımlı) Riemannian metriğidir. Öyleki M^n üzerinde verilen bir Riemannian metriğinden türetilmiştir ve tüm $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M^n)$ için aşağıdaki şekilde tanımlanır (Salimov, 2013).

$$\begin{aligned}
Sg(X^H, Y^H) &= g(X, Y), \\
Sg(X^H, Y^V) &= {}^S g(X^V, Y^H) = 0, \\
Sg(X^V, Y^V) &= {}^S g(X, Y)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Teorem 4.2.3.1. Eğer $\nabla F^T = 0$ ve $F^T = \frac{\lambda^r}{\alpha} I$ şartları sağlanırsa, ${}^S g$ Sasaki metriği $(F^K)^c$ ye göre pürdür. Burada $I, (1,1)$ tipli birim tensör alanıdır.

İspat: Eğer $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}, X^V, Y^V$ veya X^H, Y^H olmak üzere $S(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$ ise $S = 0$ dır. Burada

$$S(\tilde{X}, \tilde{Y}) = {}^S g((F^K)^c \tilde{X}, \tilde{Y}) - {}^S g(\tilde{X}, (F^K)^c \tilde{Y})$$

şeklinde ifade edilir.

$$\begin{aligned}
i) \quad S(X^V, Y^V) &= {}^S g((F^K)^c X^V, Y^V) - {}^S g(X^V, (F^K)^c Y^V) \\
&= -\frac{\lambda^r}{\alpha} \{Sg((F^T X)^V, Y^V) - {}^S g(X^V, (F^T Y)^V)\} \\
&= -\frac{\lambda^r}{\alpha} \{(g(F^T X, Y))^V - (g(X, F^T Y))^V\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ii) \quad S(X^V, Y^H) &= {}^S g((F^K)^c X^V, Y^H) - {}^S g(X^V, (F^K)^c Y^H) \\
&= \frac{\lambda^r}{\alpha} {}^S g(X^V, F^T Y)^H - (\nabla_Y F^T) Y^H \\
&= \frac{\lambda^r}{\alpha} {}^S g(X^V, \nabla_Y F^T) Y^H \\
&= \frac{\lambda^r}{\alpha} (g(X, ((\nabla F^T)u) Y^V)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iii) \quad S(X^H, Y^H) &= {}^S g((F^K)^c X^H, Y^H) - {}^S g(X^H, (F^K)^c Y^H) \\
&= -\frac{\lambda^r}{\alpha} {}^S g((F^T)^c X^H, Y^H) + \frac{\lambda^r}{\alpha} {}^S g(X^H, (F^T)^c Y^H) \\
&= -\frac{\lambda^r}{\alpha} {}^S g((F^T X)^H + (\nabla_Y F^T) X^H, Y^H) \\
&\quad + \frac{\lambda^r}{\alpha} {}^S g(X^H, (F^T Y)^H + (\nabla_Y F^T) Y^H) \\
&= -\frac{\lambda^r}{\alpha} \{g((F^T X), Y)^V - g(X, (F^T Y))^V\}
\end{aligned}$$

Teorem 4.2.3.2. Sırasıyla, φ_φ Tanım 4.1.3.1.'de belirtilen Tachibana operatörü ve $a(F^K)^C + \lambda^r (F^T)^C = 0$ yapısı da (4.19) denklemi ile ifade edilen yapı olsun. Eğer $L_Y F^T = 0$ ise o zaman $(F^K)^C$ ye göre tüm sonuçlar sıfırdır.

Burada $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M^n), X^C, Y^C \in \mathfrak{S}_0^1(T(M^n))$ ve $X^V, Y^V \in \mathfrak{S}_0^1(T(M^n))$ 'dir.

$$\begin{aligned} i) \quad \varphi_{(F^K)^C X^C} Y^C &= + \frac{\lambda^r}{\alpha} ((L_Y F^T) X)^C, \\ ii) \quad \varphi_{(F^K)^C X^C} Y^V &= + \frac{\lambda^r}{\alpha} ((L_Y F^T) X)^V, \\ iii) \quad \varphi_{(F^K)^C X^V} Y^C &= + \frac{\lambda^r}{\alpha} ((L_Y F^T) X)^V, \\ iv) \quad \varphi_{(F^K)^C X^V} Y^V &= 0 \end{aligned}$$

İspat:

$$\begin{aligned} i) \quad \varphi_{(F^K)^C X^C} Y^C &= -(L_Y^C (F^K)^C) X^C \\ &= -\frac{\lambda^r}{\alpha} \{L_Y^C (F^T X)^C + (F^T)^C L_Y^C X^C\} \\ &= \frac{\lambda^r}{\alpha} ((L_Y F^T) X)^C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \quad \varphi_{(F^K)^C X^C} Y^V &= -(L_Y^V (F^K)^C) X^C \\ &= -L_Y^V (F^K)^C X^C + (F^K)^C L_Y^V X^C \\ &= -\frac{\lambda^r}{\alpha} \{-L_Y^V (F^T X)^C + (F^T)^C L_Y^V X^C\} \\ &= \frac{\lambda^r}{\alpha} ((L_Y F^T) X)^V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iii) \quad \varphi_{(F^K)^C X^V} Y^C &= -(L_Y^C (F^K)^C) X^V \\ &= -L_Y^C (F^K)^C X^V + (F^K)^C L_Y^C X^V \\ &= -\frac{\lambda^r}{\alpha} \{-L_Y^C (J^T V)^u + (J^T)^C L_Y^C V^u\} \\ &= \frac{\lambda^r}{\alpha} ((L_Y F^T) X)^V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iv) \quad \varphi_{(F^K)^C X^V} Y^V &= -(L_Y V (F^K)^C) X^V \\
&= -L_Y V (F^K)^C X^V + (F^K)^C L_Y V X^V \\
&= 0
\end{aligned}$$

Teorem 4.2.3.3. Eğer $Y \in M$ için $L_Y F^T = 0$ ise o zaman Y 'nin tam lifti Y^C , $\alpha(F^K)^C + \lambda^r (F^T)^C = 0$ yapısına göre $T(M^n)$ üzerinde bir almost holomorfik vektör alanıdır.

İspat:

$$\begin{aligned}
i) \quad (L_Y C (F^K)^C) X^C &= L_Y C (F^K)^C X^C - (F^K)^C L_Y C X^C \\
&= -\frac{\lambda^r}{\alpha} \{L_Y C (F^T X)^C - (F^T)^C L_Y C X^C\} \\
&= -\frac{\lambda^r}{\alpha} ((L_Y C F^T) X)^C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ii) \quad (L_Y C (F^K)^C) X^V &= L_Y C (F^K)^C X^V - (F^K)^C L_Y C X^V \\
&= -\frac{\lambda^r}{\alpha} \{L_Y C (F^T X)^V - (F^T)^C L_Y C X^V\} \\
&= -\frac{\lambda^r}{\alpha} ((L_Y F^T) X)^V
\end{aligned}$$

4.2.4. Tanjant Demet $T(M^n)$ Üzerinde $F_{\alpha, \lambda}(K, T)$ – Yapısının Yatay Lifti

M^n manifoldunun U koordinat komşuluğu içerisinde A noktasındaki F 'nin bileşenleri F_i^h olsun. O zaman F 'nin yatay lifti F^H , $T(M^n)$ üzerinde (1,1) tipli bir tensör alanıdır. $\pi^{-1}(U)$ içerisinde F_B^A bileşenleri

$$F^H = F^C - \gamma(\nabla F) = \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ -\Gamma_t^h F_i^t + \Gamma_i^t F_t^h & F_i^h \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

şeklinde verilir.

M^n manifoldu üzerinde (1,1) tipinde iki tensör alanı F ve G olsun. Eğer F nin yatay lifti F^H şeklinde tanımlanırsa

$$(FG)^H = F^H G^H. \quad (4.30)$$

yazılır. F ve G özdeş olarak alırsa

$$(FG)^H = F^H G^H. \quad (4.31)$$

elde edilir. (4.31) denkleminin her iki tarafını F^H ile çarpılırsa

$$(F^H)^3 = (F^3)^H$$

elde edilir. Buradan

$$(F^H)^4 = (F^4)^H, (F^H)^5 = (F^5)^H \quad (4.32)$$

yazılır. Bu şekilde devam edilirse, $aF^K + \lambda^r F^T = 0$ eşitliğinin her iki tarafının yatay lifti alındığında

$$a(F^K)^H + \lambda^r (F^T)^H = 0 \quad (4.33)$$

elde edilir. (4.32) 'den

$$a(F^H)^K + \lambda^r (F^H)^T = 0.$$

yazılır.

4.2.5. Tanjant Demet $T(M^n)$ Üzerinde $\alpha(F^K)^H + \lambda^r(F^T)^H = 0$ Yapısının İntegrallenebilirlik Şartları

Teorem 4.2.5.1. Eğer F^T 'nin Nijenhuis tensörü sıfır ve

$$\begin{aligned} & \{-(\hat{R}(F^T X, F^T Y)u) + (F^T(\hat{R}(F^T X, Y)u)) + (F^T(R(X, F^T Y)u)) - \\ & ((F^T)^2(\hat{R}(X, Y)u))\}^V = 0 \quad \text{ise} \quad F^K \quad \text{nın} \quad \text{yatay} \quad \text{liftinin} \quad \text{Nijenhuis} \quad \text{tensörü} \\ & N_{(F^K)^H(F^K)^H}(X^H, Y^H) \text{ sıfırdır.} \end{aligned}$$

İspat:

$$\begin{aligned} N_{(F^K)^H(F^K)^H}(X^H, Y^H) &= [(F^K)^H X^H, (F^K)^H Y^H] - (F^K)^H[(F^K)^H X^H, Y^H] \\ &\quad - (F^K)^H[X^H, (F^K)^H Y^H] + (F^K)^H(F^K)^H[X^H, Y^H] \\ &= \frac{\lambda^{2r}}{\alpha} \{([F^T X, F^T Y] - (F^T)[F^T X, Y] \\ &\quad - (F^T)[X, F^T Y] - (F^T)(F^T)[X, Y])^H \\ &\quad - (\hat{R}(F^T X, F^T Y)u)^V + (F^T(\hat{R}(F^T X, Y)u))^V \\ &\quad + (F^T(\hat{R}(V, F^T W)u))^u - ((F^T)^2(\hat{R}(V, W)u))^u\} \\ &= \frac{\lambda^{2r}}{\alpha} \{(N_{F^T F^T}(X, Y))^H - (\hat{R}(F^T X, F^T Y)u)^V \\ &\quad + (F(\hat{R}(F^T X, Y)u))^V + (F(\hat{R}(X, F^T Y)u))^V \\ &\quad - ((F^T)^2(\hat{R}(X, Y)u))^V\}, \end{aligned}$$

Burada $\hat{R}$, $\hat{V}$, $\hat{V}_V W = \nabla_W V + [V, W]$ ile tanımlanan afin konneksiyon ∇ 'nın eğrilik tensörüdür ve u , Tanım 4.2.3.1. de belirtilen bir vektör alanıdır.

Teorem 4.2.5.2. Eğer F^T Nijenhuis tensörü sıfır ve $\nabla F^T = 0$ ise F^K nın yatay liftinin Nijenhuis tensörü $N_{(F^K)^H(F^K)^H}(X^H, Y^V)$ sıfırdır.

İspat:

$$\begin{aligned} N_{(F^K)^H(F^K)^H}(X^H, Y^V) &= [(F^K)^H X^H, (F^K)^H Y^V] - (F^K)^H[(F^K)^H X^H, Y^V] \\ &\quad - (F^K)^H[X^H, (F^K)^H Y^V] + (F^K)^H(F^K)^H[X^H, Y^V] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda^{2r}}{\alpha} \{ ([F^T X, F^T Y]^V - (F^T)[F^T X, Y]^V - (F^T[X, F^T Y])^V \\
&\quad + ((F^T)^2[X, Y])^V + (\nabla_{F^T Y} F^T X)^V - (F^T(\nabla_Y F^T X))^V \\
&\quad - (F^T(\nabla_{J^T W} V))^u + ((F^T)^2 \nabla_W V)^u \} \\
&= \frac{\lambda^{2r}}{\alpha} \{ (N_{F^T F^T}(X, Y))^V - (\nabla_{F^T Y} F^T)X \\
&\quad - (F^T((\nabla_Y F^T)X))^V \}
\end{aligned}$$

Teorem 4.2.5.3. F^K nın yatay liftinin Nijenhuis tensörü

$$N_{(F^K)^H (F^K)^H}(X^V, Y^V) = 0$$

şeklindedir.

İspat: $X, Y \in M$ için $[X^V, Y^V] = 0$ olduğundan dolayı, kolaylıkla

$$N_{(F^K)^H (F^K)^H}(X^V, Y^V) = 0$$

elde edilir.

Teorem 4.2.5.4. Eğer $F^T = \frac{\lambda^r}{\alpha} I$ ise ${}^S g$ Sasakian metriği $(F^K)^H$ ye göre pürdür.

İspat: Eğer tüm $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ vektör alanları X^V, Y^V veya X^H, Y^H olmak üzere $S(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$ ise $S = 0$ dır. Burada $S(\tilde{X}, \tilde{Y}) = {}^S g((F^K)^C \tilde{X}, \tilde{Y}) - {}^S g(\tilde{X}, (F^K)^C \tilde{Y})$ şeklinde ifade edilir.

$$\begin{aligned}
i) \quad S(X^V, Y^V) &= {}^S g((F^K)^H X^V, Y^V) - {}^S g(X^V, (F^K)^H Y^V) \\
&= -\frac{\lambda^r}{\alpha} \{ {}^S g((F^T X)^V, Y^V) - {}^S g(X^V, (F^T Y)^V) \} \\
&= -\frac{\lambda^r}{\alpha} \{ (g(F^T X, Y))^V - (g(X, F^T Y))^V \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ii) \quad S(X^V, Y^H) &= {}^S g((F^K)^H X^V, Y^H) - {}^S g(X^V, (F^K)^H Y^H) \\
&= \frac{\lambda^r}{\alpha} {}^S g(X^V, F^T Y^H) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iii) \quad S(X^H, Y^H) &= {}^S g((F^K)^H X^H, Y^H) - {}^S g(X^H, (F^K)^H Y^H) \\
&= -\frac{\lambda^r}{\alpha} \{({}^S g((F^T X)^H, Y^H) - {}^S g(X^H, (F^T Y)^H))\} \\
&= -\frac{\lambda^r}{\alpha} \{(g(F^T X), Y)^V - (g(X, (F^T Y)^H))^V\}
\end{aligned}$$

Teorem 4.2.5.5. Sırasıyla, φ_φ Tanım 4.1.3.1. de belirtilen Tachibana operatörü ve $a(F^K)^H + \lambda^r (F^T)^H = 0$ yapısı da (4.33) denkleminde belirtildiği gibi olsun. Eğer $L_Y F^T = 0$ ve $F = \frac{\lambda^r}{\alpha} I$ ise o zaman $(F^K)^H$ ye göre tüm sonuçlar sıfırdır. Burada $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M)$, $X^H, Y^H \in \mathfrak{S}_0^1(T(M^n))$ ve $X^V, Y^V \in \mathfrak{S}_0^1(T(M^n))$ şeklindedir.

$$\begin{aligned}
i) \quad \varphi_{(F^K)^H X^H} Y^H &= \frac{\lambda^r}{\alpha} \{ -((L_Y F^T) X)^H + (\hat{R}(Y, F^T X) u)^V \\
&\quad - (F^T (\hat{R}(Y, X) u))^V \}, \\
ii) \quad \varphi_{(F^K)^H X^H} Y^V &= -\frac{\lambda^r}{\alpha} \{ -((L_Y F^T) X)^V + ((\nabla_Y F^T) X)^V \}, \\
iii) \quad \varphi_{(F^K)^H X^V} Y^H &= -\frac{\lambda^r}{\alpha} \{ -((L_Y F^T) X)^u - ((\nabla_{F^T X} Y)^V + (F^T (\nabla_X Y))^V \}, \\
iv) \quad \varphi_{(F^K)^H X^V} Y^V &= 0,
\end{aligned}$$

İspat:

$$\begin{aligned}
i) \quad \varphi_{(F^K)^H X^H} Y^H &= -(L_{Y^H} (F^K)^H) X^H \\
&\quad - L_{Y^H} (F^K)^H X^H + (F^K)^H L_{Y^H} X^H \\
&= \frac{\lambda^r}{\alpha} [Y, F^T X]^H - \frac{\lambda^r}{\alpha} \gamma \hat{R}[Y, F^T X] \\
&\quad - \frac{\lambda^r}{\alpha} (F^T [Y, X])^H + \frac{\lambda^r}{\alpha} (F^T)^H (\hat{R}(Y, X) u)^V \\
&= \frac{\lambda^r}{\alpha} \{ -((L_Y F^T) X)^H + (\hat{R}(Y, F^T X) u)^V \\
&\quad - F^T (\hat{R}(Y, X) u))^V \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ii) \quad \varphi_{(F^K)^H X^H} Y^V &= -(L_{Y^V} (F^K)^H) X^H \\
&= -L_{Y^V} (F^K X)^H + (F^K)^H L_{Y^V} X^H \\
&= \frac{\lambda^r}{\alpha} [Y, F^T X]^V - \frac{\lambda^r}{\alpha} (\nabla_Y F^T X)^V \\
&\quad - \frac{\lambda^r}{\alpha} (F^T [Y, X])^V + \frac{\lambda^r}{\alpha} (F^T (\nabla_Y X))^V \\
&= -\frac{\lambda^r}{\alpha} \{ -((L_Y F^T) X)^V + ((\nabla_Y F^T) X)^V \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iii) \quad \varphi_{(F^K)^H X^u} Y^H &= -(L_{Y^H} (F^K)^H) X^V \\
&= -L_{Y^H} (F^K X)^V + (F^K)^H L_{Y^H} X^V \\
&= -\frac{\lambda^r}{\alpha} [Y, F^T X]^V + \frac{\lambda^r}{\alpha} (\nabla_{F^T X} Y)^V \\
&\quad - \frac{\lambda^r}{\alpha} (F^T [Y, X])^H - \frac{\lambda^r}{\alpha} (F^T (\nabla_X Y))^V \\
&= -\frac{\lambda^r}{\alpha} \{ -((L_Y F^T) X)^V - (\nabla_{F^T X} Y)^V + (F^T (\nabla_X Y))^V \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iv) \quad \varphi_{(F^K)^H X^V} Y^V &= -(L_{Y^V} (F^K)^H) X^V \\
&= \frac{\lambda^r}{\alpha} L_{Y^V} (F^T X)^V - \frac{\lambda^r}{\alpha} (F^T)^H L_{Y^V} X^V \\
&= 0
\end{aligned}$$

BÖLÜM 5. SONUÇ

$F_{a,\lambda}(K, T)$ – yapısı kotanjant ve tanjant demetlerine taşındı. Sırasıyla kotanjant ve tanjant demetleri içerisinde $F_{a,\lambda}(K, T)$ – yapısının Nijenhuis tensörü hesaplanarak integrallenebilirlik koşulları incelendi ve liftlere göre Tachibana operatörü uygulandı. Ayrıca Sasaki metriğinin pürlük şartları incelendi.



KAYNAKLAR

- Andreou, F. G., 1983. On Integrability Conditions Of A Structure f Satisfying $f^5 + f = 0$, Tensor, N.S., 40: 27-31.
- Çayır, H., 2015. Some Notes On Lifts Of Almost Paracontact Structures, American Review Of Mathematics And Statistics, 3(2.1): 52-60.
- Çayır, H., 2016. Lie Derivatives Of Almost Contact Structure And Almost Paracontact Structure With Respect To X^V and X^H On Tangent Bundle $T(M)$, Proceedings Of The Institute Of Mathematics And Mechanics, 42(2.1): 38-49.
- Çayır, H., 2016. Tachibana And Vishnevskii Operators Applied To X^V And X^H In Almost Paracontact Structure On Tangent Bundle $T(M)$, New Trends In Mathematical Sciences, 4(2.3): 105-115.
- Çayır, H., Köseoğlu, G., 2016. Lie Derivatives Of Almost Contact Structure And Almost Paracontact Structure With Respect To X^C And X^V On Tangent Bundle $T(M)$, New Trends In Mathematical Sciences, 4(2.1): 153-159.
- Dube, K.K., 1998. On A Differentiable Structure Satisfying $F^{2u+4} + F^2 = 0, F \neq 0$ And Of Type (1,1), The Nepali Mathematical Sciences Report, 17(1&2): 99-102.
- Gupta, V. C., 1998. Integrability Conditions Of A Structure F Satisfying $F^K + F = 0$, The Nepali Mathematical Sciences Report, 14(2.2): 55-62.
- Ishihara, S., Yano, K., 1964. On Integrability Conditions Of A Structure f Satisfying $f^3 + f = 0$, Quaterly J. Math., 15: 217-222.
- Kobayashi, S., Nomizu, K., 1963. Foundations Of Differential Geometry, John Wiley & Sons Incorporated, New York, 1-50.
- Das, L.S., Nivas, R., Pathak, V. N., 2005. On Horizontal And Complete Lifts From A Manifold With $f\lambda(7,1)$ –Structure To Its Cotangent Bundle, International Journal Of Mathematics And Mathematical Sciences, 8: 1291-1297.
- Nivas, R., Prasad, C.S., 1985. On A Structure Defined By A Tensor Field ($f \neq 0$) Of Type (1,1) Satisfying $f^5 - a^2f = 0$, The Nepali Mathematical Sciences Report, 10(2.1): 25-30.
- Nivas, R., Saxena, M., 2004. On Complete And Horizontal Lifts From A Manifold With HSU–(4; 2) Structure To Its Cotangent Bundle, The Nepali Mathematical Sciences Report, 23: 35-41.

- Salimov, A.A., 2013. Tensor Operators And Their Applications, Nova Science Publishers, New York, 4-20
- Salimov, A.A., Çayır, H., 2013. Some Notes On Almost Paracontact Structures, Comptes Rendus de l'Académie Bulgare Des Sciences, 66(2.3): 331-338.
- Singh, A., 2009. On CR –Structures F –Structures Satisfying $F^{2K+P} + F^P = 0$, International Journal Contemporary Mathematical Sciences, 4: 1029-1035.
- Singh, A., Pandey, R.K., Khare, S., 2016. On Horizontal And Complete Lifts Of $(1,1)$ Tensor Fields F Satisfying The Structure Equation $F(2K + S, S) = 0$, International Journal Of Mathematics And Soft Computing, 6(2.1): 143-152.
- Upadhyay, M.D., Gupta, V.C., 1976. Integrability Conditions Of A $F(K, -(K - 2))$ –Structure Satisfying $F^K - F^{K-2} = 0, (F \neq 0, I)$, Revista Universidad Nacional De Tucuman, 20(1-2): 31-44.
- Upadhyay, M.D., Garg, A., 1985. Integrability Conditions Of A $F(p, -(p - q))$ –Structure Satisfying $F^p - F^{p-q} = 0, (F \neq 0; p, q \text{ Odd}; I)$, The Nepali Mathematical Sciences Report, 10(2.2): 71-78.
- Yano, K., Patterson, E.M., 1967. Horizontal Lifts From A Manifold To Its Cotangent Bundle, Journal Mathematical Society Japan, 19: 185-198.
- Yano, K., Ishihara, S., 1973. Tangent And Cotangent Bundles, Marcel Dekker Incorporated, New York, 4-20.
- Goldberg, S.I., Bishop, R.L., 1968. Tensor Analysis On Manifolds, Dover Publications Incorporated, New York, Section:1-2.
- Salimov, A., Mağden, A., 2008. Differential Geometry, Actif Publishing Company, Erzurum, 1-35.

ÖZGEÇMİŞ

Ahmet BAHADIR ilk, orta ve lise eğitimini Giresun’da tamamladı. 2013 yılında Görele Anadolu Öğretmen Lisesi’nden mezun oldu. 2013 yılında başladığı Karadeniz Teknik Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü’nü 2018 yılında bitirdi. 2020 yılında Giresun Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı.

