

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

78732

AKIŞKANLARDA ENERJİ ve MOMENTUM TAŞINMASI



Savaş UĞUR
Yüksek lisans Tezi
Fizik Ana Bilim Dalı
Konya, 1998

YÜKSEK
DOKÜMANI

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AKIŞKANLARDA ENERJİ ve MOMENTUM TAŞINMASI

Savaş UĞUR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANA BİLİM DALI

Bu tez 11. 09. 1998 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Rıza Oğul

Rıza OĞUL
Prof. Dr.
(Danışman)

Ahmet Sarıkoç

Ahmet SARIKOÇ
Yrd. Doç. Dr.
(Üye)

Zeki Kartal

Zeki KARTAL
Yrd. Doç. Dr.
(Üye)

70932

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

AKIŞKANLARDA ENERJİ ve MOMENTUM TAŞINMASI

Savaş UĞUR

Selçuk Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Ana Bilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Rıza OĞUL
1998, 49 Sayfa.Jüri: Prof. Dr. Rıza OĞUL
Yrd. Doç. Dr. Ahmet SARIKOÇ
Yrd. Doç. Dr. Zeki KARTAL

Bu çalışmada, basınç, ortalama serbest yol, momentum ve enerjinin taşınmasını açıklayan transport katsayılarını ve gazlardaki yayılma teorisini ele aldık. Gazlar için Maxwell dağılım fonksiyonunu inceledik. Parçacıkları sert küreler gibi düşünerek, gazlarda viskozluk, ısı-iletkenlik ve difüzyon katsayılarını seyrek gaz limitinde hesapladık. Ayrıca seyrek gaz limitinde iki cisim çarpışmalarını içine alan bir kinetik denklem olan Boltzmann denklemini türettik.

ANAHTAR KELİMELEER: Maxwell dağılımı, ortalama serbest yol, seyrek gaz, viskozluk, ısı iletkenliği, difüzyon.

ABSTRACT

Master Thesis

TRANSPORT OF ENERGY and MOMENTUM IN LIQUIDS

Savaş UĞUR

Selçuk University

Graduate School of Natural and Applied Science

Department of Physics

Supervisor : Prof. Dr. Rıza OĞUL

1998, 49 Page

Jury: Prof. Dr. Rıza OĞUL
Yrd. Doç. Dr. Ahmet SARIKOÇ
Yrd. Doç. Dr. Zeki KARTAL

In this study, we have investigated fundamentals of kinetic theory of gases, such as pressure, mean free path and transport of momentum and energy also diffusion in gases. We have also investigated Maxwell distribution function for gases. Viscosity, heat conductivity and diffusion coefficients have been described for hard sphere particles and in the dilute gas limit effect of two body collisions is included on the basis of Boltzmann equation.

KEY WORDS: Maxwell distrubution, mean free path, dilute gase, viscosity, heat conductivity, diffusion.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünde yapılmıştır. Bu çalışmanın yapılması sırasında büyük teşvik ve yardımlarını gördüğüm hocam Sayın Prof. Dr. Rıza OĞUL'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER**Sayfa No**

1. GİRİŞ.....	1
2. GAZLARDA TEMEL KİNETİK KAVRAMLAR.....	2
2.1. İdeal Gazın Basıncı.....	2
2.2. Ortalama Serbest Yol	4
3. MAXWELL HIZ DAĞILIMI.....	8
3.1. Maxwell Hız Dağılımının Sonuçlarının Çok Atomlu Moleküller İçin Geçerliliği	11
3.2. Maxwell Hız Dağılımının Geçerliliği.....	12
3.2.1. Bir Hız Bileşiminin Dağılımı	12
3.2.2. Molekül Hızlarının Dağılımı	15
4. AKIŞKANLARDA TRANSPORT OLAYLARI.....	17
4.1. Viskozluk ve Momentum Taşınması.....	17
4.1.1. Viskozluk Katsayısının Tanımı	18
4.1.2. Seyrek Bir Gaz İçin Viskozluk Katsayısının Hesaplanması.....	20
4.2. Sıcaklık İletkenliği ve Enerjinin Taşınması	23
4.2.1. Sıcaklık İletkenlik Katsayısının Tanımı	23
4.2.2. Seyrek Bir Gaz İçin Sıcaklık İletkenlik Katsayısının Hesaplanması.....	24
4.3. Kendiliğinden Yayılma (Difüzyon) Katsayısı.....	27
4.3.1. Seyrek Bir Gaz İçin Kendiliğinden Yayılma Katsayısının Hesaplanması..	29
5. İKİ CİSİM ÇARPIŞMALARI ve BOLTZMANN DENKLEMİ.....	31
6. SONUÇLAR ve TARTIŞMA	39
6.1. Bir Gazın Klasik İncelenmesinin Geçerliliği	39
6.2. Viskozluk, Sıcaklık İletkenliği, Difüzyon Katsayılarının Hesaplanmasında Yapılan Varsayımlar ve Bu Katsayıların Karşılaştırılmaları.....	40
7. KAYNAKLAR.....	43

1. GİRİŞ

Kinetik Teori özellikle akışkanlar dinamiği, ısı iletimi ve difüzyon gibi termodinamik yönden dengesizlik durumları gösteren bazı makroskobik olayları, taneciklerin aralarındaki mikroskobik etkileşmelere dayanarak modellendirilip açıklamak amacını güder. (McQuarrie 1973) Kinetik Teori, özellikle, seyreltilmiş gazlardaki dengesizlik olaylarının mikroskopik analizinde başarı sağlamış gerek difüzyonda gerekse ısı akımında olduğu gibi enerjinin ya da maddenin taşınmasını taneciklerin mekaniğine bağlamıştır. Gazların Kinetik Teorisinde makroskopik fiziksel büyüklükler çok sayıda gaz molekülünün hareketi üzerinden alınmış ortalama değerler olarak elde edilirler.

Kinetik teori, nükleer fizik, atom ve molekül fiziği ve katıhal fiziği gibi alanlarda uygulanmaktadır. Örnek olarak, gazların kinetik teorisi kullanılarak nükleer maddenin transport katsayılarının hesaplanması verilebilir. (Danielewicz 1984, Oğul ve Malfliet 1987, Oğul ve Özmen 1991, Oğul ve Özmen 1995)

Akışkanlarda momentum ve enerji taşınmasını ele alacağımız bu çalışmada, ikinci bölümde gazlarla ilgili temel kinetik kavramları inceledik. Üçüncü bölümde Maxwell hız dağılımını, gaz moleküllerinin davranışlarını açıklayabilmek amacıyla inceledik. Maxwell hız dağılımının geçerli olacağı şartları tartıştık. Dördüncü bölümde akışkanlarda meydana gelen taşınma olaylarını ayrı ayrı alt başlıklar halinde ele aldık. Beşinci bölümde de seyrek gaz limitinde iki cisim çarpışmalarını içine alan ve dengede olmayan bir gazın zamanla değişimini ele alan bir kinetik denklemin türetilmesini verdik. Sonuçlar ve tartışma bölümünde ise yapılan çalışmada varılan sonuçları sunduk ve karşılaştırmalar yaptık.

2. GAZLARDA TEMEL KİNETİK KAVRAMLAR

Akışkanlarda momentum ve enerji taşınmasını ele alacağımız bu çalışmada, öncelikle gazlarla ilgili temel kinetik kavramları gözden geçirmekte fayda vardır. Böylelikle sistemi oluşturan mikroskopik taneciklerin mikrofiziksel hareketlerinden yola çıkarak sistemin makroskobik davranışlarını açıklayabiliriz. (Reif 1977)

2.1. İdeal Gazın Basıncı

Bir gaz bir kutu içine kapatıldığında gaz moleküllerinin kabın duvarlarına sürekli çarpması ile duvarın her alan elemanı üzerine bir kuvvet etki eder. Birim alana düşen kuvvete gazın p basıncı denir. Gazın basıncını moleküler nicelikler cinsinden hesaplayabiliriz. Her biri m kütleli N molekülü bir gazı ele alalım. Gazın V hacminde dikdörtgenler prizması şeklinde bir kutuda kapatıldığını düşünelim. Birim hacmindeki molekül sayısı $n \equiv N/V$ ile gösterilir. Kutunun kenarları x, y, z eksenlerine paralel olsun. X eksenine dik olan duvarın A alanına kısa bir t zamanı içinde çarpan molekül sayısını ; kutu içindeki moleküllerin hepsinin $\bar{v}$ ortalama hızıyla hareket ettiğini varsayarak ve moleküller gelişigüzel doğrultularda hareket edeceklerinden moleküllerin $\frac{1}{6}n$ tanesinin $+x$ yönünde x eksen boyunca hareket edeceklerini düşünerek hareketi $+x$ yönünde olan moleküllerin bir t zamanı içinde $+x$ yönünde $\bar{v} \cdot t$ kadar yol alacaklarını söyleyebiliriz. Moleküller duvarın A alanına $\bar{v} \cdot t$ uzaklığında ise t zaman sonra duvara çarpacaklardır. Fakat moleküllerin A alanına uzaklığı $\bar{v} \cdot t$ den fazla ise çarpışma olmayacaktır. Bu durumda t süresinde duvarın A alanına çarpan ortalama molekül sayısı, $+x$ yönünde hareket eden ve taban alanı A ,

uzunluğu $\bar{v} \cdot t$ olan silindir içindeki moleküllerin ortalama sayısı olacaktır, şeklinde hesaplarız. Bu sonucu, $\frac{1}{6}n$ ile silindirin $A \cdot \bar{v} \cdot t$ hacmini çarparak elde ederiz. Bulunan bu sonucu A alanına ve t zamanına bölerek birim zamanda duvarın birim alanına çarpan J_0 ortalama molekül sayısını

$$J_0 = \frac{1}{6} \frac{n \bar{v} t A}{A t} = \frac{1}{6} n \bar{v} \quad (1)$$

olarak elde ederiz.

Kabın duvarının birim alanına çarpan moleküllerin uyguladıkları ortalama kuvveti de hesaplayabiliriz. Duvara $+x$ yönünde çarpan bir molekülün $\frac{1}{2} m \bar{v}^2$ kinetik enerjisi değişmez. Bu durumda molekülün momentumunun büyüklüğünde sabit kalır. Duvara $m \bar{v}$ momentumuyla çarpan molekül $-m \bar{v}$ momentumuyla yansır. Molekülün toplam momentum değişimi $-m \bar{v} - m \bar{v} = -2m \bar{v}$ olur. Duvarda buna karşılık $+x$ yönünde $2m \bar{v}$ momentumu kazanır. Moleküllerin duvara uyguladıkları ortalama kuvvet Newton'un ikinci kanunu gereğince, duvarın momentumunun moleküller çarpışmalar sonucu ortalama değişme miktarına eşittir. Duvarın birim alanına uygulanan ortalama $\bar{p}$ basıncını

$$\bar{p} = \left[\begin{array}{c} \text{Bir molekül çarpmasıyla} \\ \text{duvarın kazandığı } 2m \bar{v} \\ \text{ortalama momentum} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} \text{Birim zamanda duvarın} \\ \text{birim alanına düşen ortalama} \\ \text{çarpışma sayısı} \end{array} \right]$$

şeklinde ifade ederiz. Böylece

$$\begin{aligned}\bar{p} &\approx 2m \bar{v} \cdot J_0 = 2m \bar{v} \cdot \frac{1}{6} n \bar{v} \\ &\approx \frac{1}{3} n m \bar{v}^2\end{aligned}\quad (2)$$

elde edilir. (Reif 1977)

Sonuçta ; n büyütülüp duvara çarpan molekül sayısı arttırılırsa, $\bar{v}$ arttırılıp moleküllerin duvara daha sık ve daha fazla momentum vermesi sağlanırsa $\bar{p}$ basıncının arttığı görülür.

2.2. Ortalama Serbest Yol

Göz önünde tutulan herhangi bir gazın bir molekülü diğer gaz molekülleri ile gelişi güzel çarpışmalar yapar. Molekülün çarpışması önceki çarpışmalarına bağlı olmaz. Molekülün sonraki çarpışmayı yapmadan önce geçen τ ortalama zamanına molekülün **ortalama serbest zamanı** denir. Aynı şekilde molekülün sonraki çarpışmaya kadar alacağı yola da **ortalama serbest yolu** denir. İdeal gazın basıncı konusunda olduğu gibi burada da moleküllerin gelişigüzel doğrultularda $\bar{v}$ ortalama hızlarıyla hareket ettiklerini düşüneceğiz. Bu yaklaşımla l ortalama serbest yolu ile τ ortalama zamanı arasında

$$l = \bar{v} \cdot \tau \quad (3)$$

bağıntısı yazılabilir. V bağıl hızıyla başka bir A molekülüne yaklaşan bir A molekülünü ele alalım. Bu moleküller sert kürelere benzesin. Moleküllerin saptmadığını ve moleküllerin merkezleri birbirine b uzaklığında olacak şekilde olduğunu varsayalım. Moleküllerin yarıçapları da a ve $\hat{a}$ ise, bu moleküllerin

merkezleri arasındaki R uzaklığı $R > (a + a')$ oldukça moleküllerin birbirleri üzerine etkileri olmayacaktır. Fakat $R < (a + a')$ olunca birbirlerini etkileyecekler ve karşılaşmaları sonrası saçılmaya uğrayacaklar, hızları değişecektir.

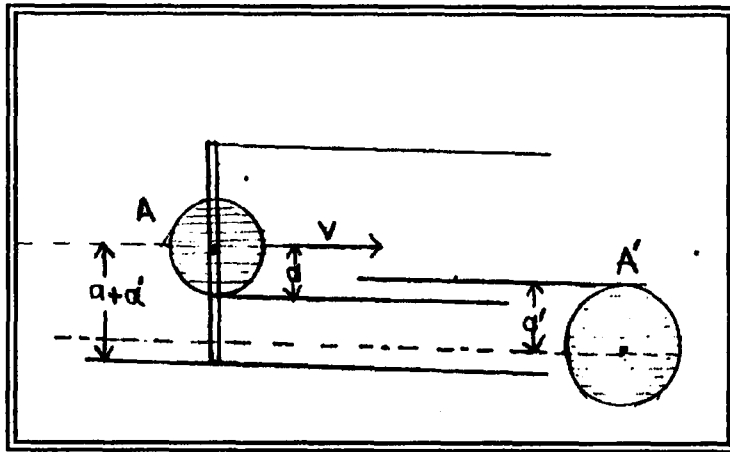
Çarpışmanın olması için A molekülünün kendisiyle birlikte taşıdığı, merkezi A molekülünün merkezi olan, V bağıl hızına dik ve yarıçapı $(a + a')$ olan hayali diskin σ yüzeyince süptürdüğü hacim içinde A molekülünün merkezinin bulunması gerekir. Bu ifadelerden

$$\sigma = \pi (a + a')^2 \text{ ve } a = a' \text{ alınırsa}$$

$$\sigma = \pi (2a)^2 \quad (4)$$

yazılır. (4) de ifade edilen σ yüzeyine moleküller arasındaki çarpışmayı ifade eden **toplam saçılma etki kesiti** adı verilir.

Gerçek moleküller arasındaki kuvvetler daha çok karmaşıktır. Fakat iki gerçek molekül arasındaki çarpışma σ alanı cinsinden yaklaşık değerlendirmelerle hesaplanabilir.



Şekil 2.1. Yarıçaplar a ve a' olan iki sert küre arasındaki bir çarpışmayı açıklayan diyagram a yarıçaplı küre tarafından taşınan hayali diskin yarıçapı $(a + a')$ dır

Birim hacim başına özdeş n molekülden oluşan bir gaz içindeki bir molekülün τ ortalama zamanını yaklaşık olarak bulabiliriz. Toplam saçılma kesiti σ nın bilindiğini varsayalım. Bir A molekülü çarpışacağı başka bir A' molekülüne göre ortalama $\bar{V}$ bağıl hızıyla hareket eder. A molekülünün taşıdığı hayali disk t zamanında bir $\sigma (\bar{V} \cdot t)$ hacmini süpürür. Süpürülen bu hacim başka bir molekülü içine alırsa, $(\sigma \bar{V} t)n = 1$ olacağından t zamanı ortalama serbest τ zamanına eşit olur.

$$\tau = \frac{1}{\sigma \bar{V} n} \quad (5)$$

Bir molekülün daha fazla sayıda molekülle çarpışabileceği şekilde birim hacim başına düşen n molekül sayısı arttıkça ya da iki molekülün çarpışma olasılığını arttıracak şekilde yarıçapları büyüdükçe ya da moleküllerin bağıl hızları arttıkça τ ortalama zamanı küçülür. (3), (5) de ifade edilirse, ortalama serbest yol

$$l = \frac{1}{\bar{v} \sigma \bar{V} n} \quad (6)$$

olarak bulunur. Moleküllerin ikisi de hareket ettiklerinden, $\bar{V}$ ortalama bağıl hızları, $\bar{v}$ bir molekülün ortalama hızından farklıdır.

$$\bar{V} = \bar{v} - \bar{v}'$$

$$\bar{V}^2 = \bar{v}^2 + \bar{v}'^2 - 2\bar{v}\bar{v}' \quad (7)$$

$\bar{v}$ ve $\bar{v}'$ arasındaki açının cosinüsü, hızlar gelişi güzel doğrultularda olduklarından $\bar{v} \cdot \bar{v}' = 0$ alınabilir. Buradan (7) bağıntısı $\bar{V}^2 = \bar{v}^2 + \bar{v}'^2$ şeklini alır. Moleküllerin hızları aynı olduklarından $\bar{v} = \bar{v}'$ alınarak $\bar{V} = \sqrt{2} \bar{v}$ yazabiliriz. Bu sonucu (6)'da yazarak ortalama serbest yolu

$$l \cong \frac{1}{n\sigma\sqrt{2}} \quad (8)$$

şeklinde de ifade edebiliriz. Bir ideal gazın hal denkleminde göre ortalama basıncını $\bar{p} = nkT$ şeklinde yazdığımızdan (8) bağıntısı son olarak

$$l = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma\bar{p}} \quad (9)$$

olarak ifade edilir. (Reif 1977)



3. MAXWELL HIZ DAĞILIMI

V hacminde bir kap içine kapatılmış ve T sıcaklığında dengede olan bir ideal gazı ele alalım. Gaz klasik olarak incelenmeye elverişli olsun. Ele alınan bir gaz molekülü diğer moleküllerden oluşan ve sıcaklığı T olan bir ısı deposuyla değme durumunda ayrı küçük bir sistem meydana getirir. Bu durumda kanonik dağılımı uygulayabiliriz. Molekülün tek atomlu olduğunu ve bir dış kuvvet alanının olmadığını düşünerek bu molekülün enerjisini

$$\epsilon = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad (10)$$

olarak yazarız. Çalışmamız ideal gazlarla olduğundan ele alınan molekülün diğer moleküllele olan etkileşme potansiyel enerjilerinin olmadığını varsayacağız. Molekülün durumu klasik olarak x,y,z konum koordinatları ve P_x, P_y, P_z momentum bileşenleri cinsinden anlatılır. Molekülün r ile r+dr konum p ile p+dp momentum aralığı değişkenleri, büyüklüğü $dx dy dz dp_x dp_y dp_z = d^3r d^3p$ olan faz uzayının bir hacmine karşılık gelir. Burada gerçek uzayın ve momentum uzayının hacim elemanı

$$d^3r = dx dy dz \text{ ve } d^3p = dp_x dp_y dp_z \quad (11)$$

şeklinde ifade edilir. Molekülün konumunun r ile r+dr ve momentumunun p ile p+dp arasındaki aralıkta bulunma olasılığını

$$P(q_1, \dots, p_f) dq_1, \dots, dp_f = C e^{-\beta E(q_1, \dots, p_f)} dq_1, \dots, dp_f$$

kanonik dağılımı kullanılarak

$$P(r,p) d^3r d^3p \propto e^{-\beta(p^2/2m)} d^3r d^3p \quad (12)$$

olarak elde ederiz. (12) de $\beta = 1/kT$ dir. (McQuarrie 1973, Balescu 1975)

Bu sonucu molekülün r ile $r+dr$ arasında bir konuma ve v ile $v+dv$ arasında bir hıza sahip olma olasılığı olarak düşündüğümüzde, molekülün hızını $v = p/m$ cinsinden ifade ederek

$$p'(r,v) d^3r d^3v \propto e^{-(1/2)\beta m v^2} d^3r d^3v \quad (13)$$

yazarız. Bu sonuca bakarak gaz içindeki bir molekülün konumu ve hızı üzerinde bilgi sahibi olabiliriz. Ayrıca ne kadar molekülün belirli bir aralıkta hıza sahip olduklarını ya da gaz bir karışımsa belli bir cinsten kaç tane molekülün herhangi bir aralıkta hıza sahip olduklarını bulabiliriz. Bir cins molekülleri ele alarak

$$f(v) d^3v \equiv \left[\begin{array}{c} v \text{ ile } v+dv \text{ arasında bir hıza sahip olan bir cins} \\ \text{moleküllerin birim hacim başına düşen ortalama sayısı} \end{array} \right] \quad (14)$$

bulanabilir. Bir ideal gazın N molekülü bağımız olarak hareket ettiklerinden istatistiksel molekül topluluğu oluştururlar. Bu moleküllerin (13) denklemindeki olasılığı ile verilen kesri r ile $r+dr$ aralarındaki bir konuma ve v ile $v+dv$ aralığındaki bir hıza sahip olurlar. (14) denklemindeki $f(v) d^3v$ ortalama sayısı, (13) olasılığını bu cins moleküllerin N toplam sayısı ile çarparak ve d^3r hacim elamanı ile bölerek

$$f(v) d^3v = \frac{NP'(r,v)d^3r d^3v}{d^3r}$$

ya da

$$f(v) d^3v = C e^{-(1/2)\beta m v^2} d^3v \quad (15)$$

elde edilir. Burada C orantı katsayısıdır. (15) denklemine **Maxwell Hız Dağılımı** adı verilir. (13) denklemindeki P' olasılığı ve (15) denklemindeki f ortalama sayısı

molekölün r konumundan bağımsızdır. Molekül dış kuvvet alanlarının yokluğunda uzayda belirli bir konuma sahip olmaz. Aynı şekilde f de yalnız v nin büyüklüğüne bağlıdır. Doğrultuya bağlı değildir. (McQuarrie 1973, Reif 1977)

(15) denklemindeki C sabitini ise aşağıdaki şekilde buluruz. C sabiti, (15) denkleminin mümkün olan tüm hızlar boyunca toplamının birim hacim başına aynı cinsten moleküllerin ortalama toplamı, n sayısını vermesi gerektiğinden

$$n = c \int e^{-(1/2)\beta m v^2} d^3 v$$

$$n = c \iiint e^{-(1/2)\beta m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z$$

$$n = c \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/2)\beta m v_x^2} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/2)\beta m v_y^2} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/2)\beta m v_z^2} dv_z$$

olarak yazılır. Bu üç integralin çözümünde aynı sonucu verir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/2)\beta m v_x^2} dv_x = \left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{1/2}$$

$$c = \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{3/2}$$

elde edilir. Bu sonuç (15) de yerine yazılarak

$$f(v)d^3v = n \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-(1/2)\beta m v^2} d^3v$$

sonucuna ulaşılır.

3.1. Maxwell Hız Dağılımının Sonuçlarının Çok Atomlu Moleküller İçin Geçerliliği

İncelenen gazın çok atomlu moleküller olduğu ele alınırsa, molekülün kütle merkezinin hareketi, kütle merkezi etrafındaki molekül içi dönme ve salınım hareketlerinin kauntum mekaniğine göre incelenmesi gerekliliğine karşılık klasik yaklaşıklığa göre de işleme sokulabilir. (Fetter ve Walecka 1971, Malfliet 1984) Molekülün durumu kütle merkezinin r konumu ve $\vec{p}$ momentumuyla ve molekül içi hareketi anlatan özel S kuantum durumunu belirleyerek anlatılabilir. Bu durumda molekülün enerjisi

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} + \epsilon_s^{(i)} \quad (16)$$

olur. (16) daki $p^2/2m$ terimi molekülün kütle merkezi hareketinin kinetik enerjisi ve diğer terimde S durumunda molekül içi dönme ve salınım hareketi enerjisidir.

Molekülün kütle merkezi konumunun r ile $r+dr$ arasında, kütle merkezi momentumunun p ile $p+dp$ arasında ve molekül için hareketlerin S ile belirtilen durumda bulunmasının olasılığı için

$$P_s(r,p) d^3r d^3p \propto e^{-\beta(p^2/2m + \epsilon_s^{(i)})} d^3r d^3p \propto e^{-\beta p^2/2m} d^3r d^3p e^{-\beta \epsilon_s^{(i)}} \quad (17)$$

yazılabilir. Molekülün iç hareket durumuna bakmadan kütle merkezinin r ile $r+dr$ arasında bir konuma ve p ile $p+dp$ arasında bir momentuma sahip olmasının $P(r,p)$

$d^3r d^3p$ olasılığını bulmak için (17)'yi bütün mümkün S molekül içi durumları üzerine toplamak gerekir. Fakat (17) iki çarpanın çarpımı olduğundan iki çarpanın mümkün bütün değerleri üzerindeki toplam sadece iki çarpan ile çarpılan bir sabit verir. Böylece (17) sonucu molekülün kütle merkezini anlatan (12) şeklindeki bir ifadeye dönüştür. (13) ve (15) ifadeleri bir gazdaki çok atomlu bir molekülün kütle merkezi hareketinin anlatılmasında da geçerliliğini korur.

3.2. Maxwell Dağılımının Geçerliliği

Maxwell hız dağılımı ifadesi bir gaz içindeki moleküllerin hızlarının dağılımını ortaya koyuyordu. Maxwell dağılım ifadesinin sonuçlarından bazılarını ve geçerlilik şartlarını ele alalım.

3.2.1. Bir Hız Bileşiminin Dağılımı

Bir molekülün özel bir doğrultudaki hız bileşenini ele alalım bunun x doğrultusu boyunca olduğunu varsayarak

$$g(v_x) dv_x = \left[\begin{array}{l} \text{Moleküllerin hızlarının } x \text{ bileşeni } v_x \text{ ile } v_x + dv_x \\ \text{arasında bulunan birim hacmindeki molekül sayısı} \end{array} \right]$$

olarak ifade ederiz. Bu sayı hızının bileşeni bu aralıkta olan tüm molekülleri toplayarak elde edilir. Yani

$$g(v_x) dv_x = \int (v_y) \int (v_z) f(v) d^3v$$

olur. Buradaki integral almalar, bu moleküllerin bütün y ve z bileşenleri üzerine yayılır. Böylece (15) den

$$\begin{aligned}
g(v_x)dv_x &= C \int (v_y) \int (v_z) e^{-(1/2)\beta m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z \\
&= C e^{-(1/2)\beta m v_x^2} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2)\beta m(v_y^2 + v_z^2)} dv_y dv_z \\
&= C' e^{-(1/2)\beta m v_x^2} dv_x \quad (18)
\end{aligned}$$

bulunur. (Reif 1977) v_y ve v_z nin bütün değerleri üzerinden integral alma sadece yeni bir orantı sabiti olan C' içinde ifade edebilen bir sabiti verir.

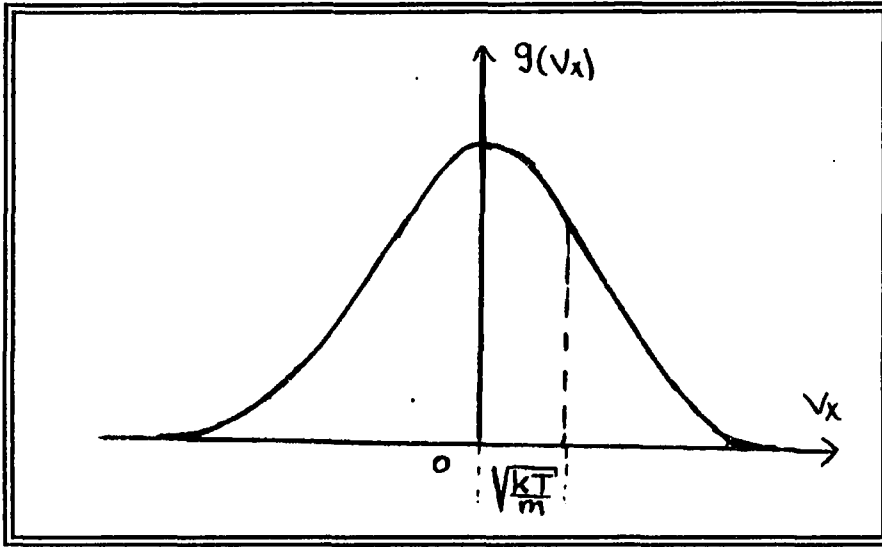
C' sabiti birim hacim başına moleküllerin ortalama toplam sayısının tam olarak n ye eşit olması gerektiğinden

$$n = \int_{-\infty}^{+\infty} g(v_x)dv_x = C' \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2)\beta m v_x^2} dv_x$$

yazılarak bulunabilir. Buradan

$$C' = n \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{1/2}$$

elde edilir.



Şekil 3.1. Hızının x bileşeni v_x ile $v_x + dv_x$ arasında olan moleküllerin birim hacim başına $g(v_x)dv_x$ ortalama sayısını gösteren Maxwell dağılımı

(18) sonucu, v_x hız bileşeninin $v_x = 0$ değeri etrafında simetrik olarak dağıldığını gösterir. Bir molekülün hızının x bileşeni negatif olacağı olasılıkta pozitifte olabileceğinden, bir molekülün herhangi bir hız bileşeninin ortalama değerinin daima sıfır, yani $\bar{v}_x = 0$ olması gerekir.

Şekilde de görüleceği gibi $v_x = 0$ olduğunda $g(v_x)$ in maksimum değer aldığı ve v_x büyüdükçe ani olarak azaldığı gösterilebilir. $|\beta m v_x^2| \gg 1$ oluncada önemsenmeyecek kadar küçülür. Yani $|v_x| \gg \left(\frac{kT}{m}\right)^{1/2}$ olduğunda $g(x) \rightarrow 0$ olur.

Bu durumda $g(v_x)$ in dağılımı, T mutlak sıcaklığı küçülürse, $v_x = 0$ yakınında artarak tepelenir. Bu durum bir molekülün ortalama kinetik enerjisinin $T \rightarrow 0$ 'a gittiğinde azaldığı olgusunu yansıtır. (Reif 1977) Bütün hız bileşenleri, durumun simetrisi gereğince tam olarak eşdeğer olduğundan v_y ve v_z hız bileşenleri için de aynı sonuçlar geçerli olur.

3.2.2. Molekül Hızlarının Dağılımı

Aynı cins molekülleri göz önüne alalım. Hızları v ile $v+dv$ arasında olan birim hacimdeki moleküllerin ortalama sayısını, hızları bu aralıkta olan bütün molekülleri, hızlarının doğrultularını göz önüne almadan toplayarak bulabiliriz. Yani

$$F(v)dv = \int f(v) d^3v \quad (19)$$

olur. İntegral üzerindeki işaret $v < |v| < v+dv$ şartını sağlayan bütün hızlar üzerinden integralin alındığını gösterir, iç yarıçapı v dış yarıçapı $v+dv$ olan bu küresel kabul içindeki hız uzayında sona eren tüm hız vektörlerini kapsar. (19) un tüm integral alındığı bölgede dv sonsuz küçük ve $f(v)$, yalnız v 'nin büyüklüğüne bağlı olduğundan, $f(v)$ fonksiyonu sabit $f(v)$ değerine eşit olur ve integral dışına alınabilir. Kalan kısım ise yarıçapı v kalınlığı dv olan bir küresel kabuğun hız uzayındaki hacmini gösterir. Böylece (19) integrali

$$F(v) dv = 4\pi f(v) v^2 dv \quad (20)$$

olarak yazılır. (15) denklemini kullanılarak

$$F(v) dv = 4\pi C e^{-(1/2)\beta m v^2} v^2 dv \quad (21)$$

sonucuna ulaşılır. (21) de ifade edilen C daha önce bulunan $C = n \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{3/2}$ dir.

(21) bağıntısı hızların Maxwell dağılımını gösterir. Molekülün faz uzayının hacmi v^2 ile orantılıdır ve büyür.

$F(v)dv$ bütün mümkün olan $v = |v|$ hızları için toplanırsa, sonuçta birim hacim başına moleküllerin n toplam ortalama sayısı

$$\int_0^{\infty} F(v) dv = n \quad (22)$$

bulunabilir. (22) integralinin alt limiti tanım gereğince bir molekülün $v \equiv |v|$ hızının negatif olamayacağını gösterir, $\frac{dF}{dv} = 0$ kullanılarak molekülün en olası hızı bulunabilir. En olası hız $v = \bar{v}$ özel halidir. Bu şart (21) de uygulanırsa

$$(-\beta m v e^{-(1/2)\beta m v^2}) v^2 + e^{-(1/2)\beta m v^2} (2v) = 0$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2}{\beta m}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (23)$$

sonucu elde edilir.

4. AKIŞKANLARDA TRANSPORT OLAYLARI

Dengede bulunan sistemlerin denge durumları çok önemli olmakla beraber, bunlar çoğunlukla özel durumlardır. Pek çok problem dengede olmayan sistemleri ele alır. Dengede olmayan sistemlerle yapılan çalışma, sistemi en son denge durumuna götürmede etkin olan somut etkileşmelerle çalışmayı gerektirir. (Balescu 1975, Oğul ve Malfliet 1987, Oğul ve Özmen 1991)

Dengesiz süreçlerin açıklanması, denge durumundakinden daha zordur. Bir gaz içindeki moleküller karşılıklı etkileşmelerde birbirleri üzerine etkide bulunurlar. Bu gaz önceden dengede değilse, etkileşmeler Maxwell hız dağılımının gerçekleştiği en son denge durumuna doğru gider. Bu gazın incelenmesi ise, gaz aşağıdaki şartlar yerine gelecek şekilde yeterince seyrek ise özel olarak basitleşir.

1. Gaz molekülleri arasındaki çarpışmalar arasında geçen zaman, bir çarpışma süresinden çok daha büyük olmalıdır.
2. Gaz molekülleri arasında üçlü çarpışma, iki parçacık çarpışmasına kıyasla çok seyrek olarak meydana gelmelidir. Böylelikle çarpışmaların analizi kolaylaşır.
3. Moleküller arasındaki ortalama uzaklık bir molekülün tipik de Broglie dalga boyuna göre büyük olmalıdır.

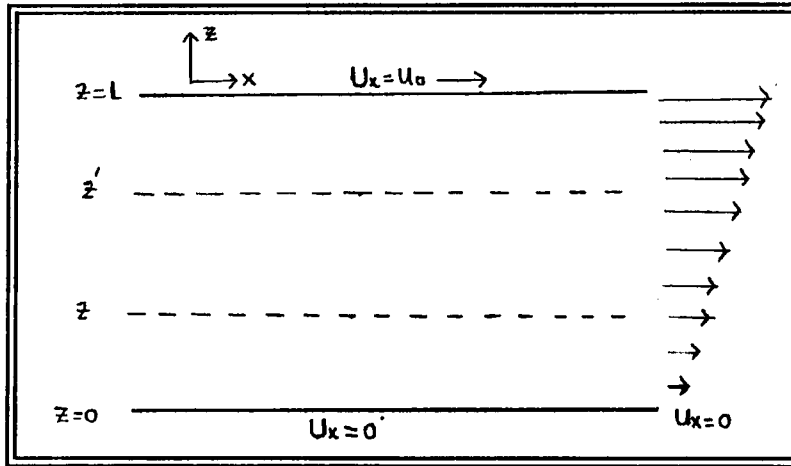
4.1. Viskozluk ve Momentum Taşınması

Durgun bir akışkan içine daldırılan ve üzerine bir kuvvetin etki etmediği bir cisim ele alalım. Cisim dengede ise durgundur. Cisim akışkan içinde hareket ediyorsa dengede değildir. Denge durumuna ulaşma sıvı moleküllerin hareketli cisim üzerine net sürtünme kuvveti uygulamasıyla meydana gelir. Bu kuvvet cismin hızıyla orantılıdır. Bu kuvvetin gerçek büyüklüğüne akışkanın **viskozluğu** denir.

4.1.1. Viskozluk Katsayısının Tanımı

Bir akışkan içerisinde normal z doğrultusunu gösteren bir düzlemi ele alalım. Bu düzlemin altındaki akışkanın, düzlemin üstündeki akışkana birim yüzey başına bir ortalama P_z kuvveti etki ettireceğini görürüz. Düzlemin üstündeki akışkanda düzlemin altındaki akışkana ortalama bir $-P_z$ kuvveti etki ettirir. Düzleme normal ortalama kuvvet yani P_z 'nin z bileşeni tam olarak akışkan içindeki $\bar{p}$ ortalama basıncı ile ölçülür. Yani $P_{zz} = \bar{p}$ olur. Akışkan dengede olduğunda simetri gereğince bu kuvvetin düzleme paralel ortalama bileşeni olmaz. Yani $P_{zx} = 0$ olur. Akışkanın U ortalama hızının akışkanın her yerinde aynı olmadığı dengesizlik durumunda ise, akışkanın x doğrultusunda zamana bağlı olmayan bir U_x ortalama hızı olduğunu ve U_x in büyüklüğünün de $U_x = U_x(z)$ şeklinde z ye bağlı olduğunu düşünelim. Bu durum akışkan L aralıklı iki levha arasında olduğunda elde edilir. $z = 0$ daki levha durgun ve $z = L$ deki levhada x yönünde U_0 sabit hızıyla hareket edecektir. Levhalar arasındaki akışkanın tabakaları sıfır ile U_0 arasında değişen farklı ortalama U_x hızlarına sahip olacaklardır. Bu durumdaki akışkanda hareketli levha üzerine denge durumuna dönebilmek için onu yavaşlatıcı bir kuvvet uygulayacaktır. Yani $z =$ sabit düzlemin altındaki bir akışkan tabakası, üzerindeki akışkan tabakasına teğet bir P_{zx} kuvveti etki ettirir.

$$P_{zx} \equiv \left[\begin{array}{l} \text{Düzlemin altındaki akışkanın düzlemin üstündeki akışkana} \\ \text{etki ettirdiğini, } x \text{ doğrultusunda ve düzlemin birim yüzeyi başına} \\ \text{ortalama kuvvet} \end{array} \right] \quad (24)$$



Şekil 4.1 İki levha arasında bulunan bir akışkan aşağıdaki levha durgun yukarıdaki levha ise x yönünde U_0 hızıyla hareketledir. Bu durumda akışkan içinde bir $\partial U_x / \partial z$ hız gradienti vardır

$U_x(z)$ nin z ye bağlı olmadığı denge durumunda $P_{zx} = 0$ idi. $\frac{\partial U_x}{\partial z} \neq 0$ olduğu şimdiki dengesizlik halinde ise P_{zx} 'in, U_x 'in z ye göre türevlenebilen bir fonksiyonu olması gereklidir. U_x , z den bağımsız olduğundan bu fonksiyon sıfır olamaz. Fakat $\frac{\partial U_x}{\partial z}$ in çok küçük olduğu kabul edilirse P_{zx} in Taylor serisine açılımındaki ilk terimin uygun bir yaklaşım olması gerekir. Yani

$$P_{zx} = -\eta \frac{\partial U_x}{\partial z} \quad (25)$$

yazarız. P_{zx} kuvveti z den bağımsız bir sabit olduğundan (25) den $\frac{\partial U_x}{\partial z} = \text{sabit}$

olduğu çıkabilir. $\frac{\partial U_x}{\partial z} = \frac{U_0}{L}$ alınarak $P_{zx} = -\eta \frac{U_0}{L}$ sonucuna ulaşılır.

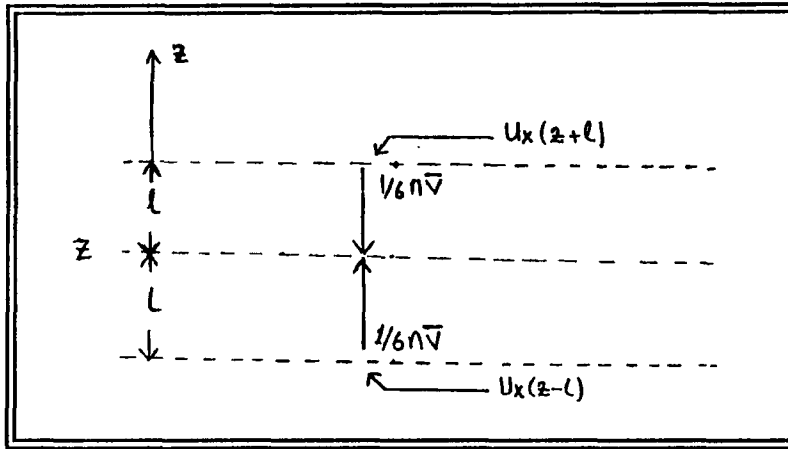
Buradaki η orantı sabitine akışkanın **viskozluk katsayısı** denir. U_x hızı artan z ile artarsa düzlemin altındaki akışkan, üstündeki akışkanı yavaşlatmaya çalışır. Bu durumda $-x$ yönünde bir kuvvet etki ettirir. $\frac{\partial U_x}{\partial z} > 0$ olursa $P_{zx} < 0$ olur. P_{zx} kuvveti ile $\frac{\partial U_x}{\partial z}$ hız gradienti arasındaki (25) bağıntısı hız gradienti çok büyük değilse, pek çok sıvı ve gaz için mükemmel sonuçlar verir.

4.1.2. Seyrek Bir Gaz İçin Viskozluk Katsayısının Hesaplanması

Seyreltilmiş gaz durumunda viskozluk katsayısı kolayca hesaplanabilir. (Reif 1977) Gazın ortalama bir U_x hız bileşeni olduğunu ve U_x 'in z nin fonksiyonu olduğunu varsayalım. Gaz içinde sabit bir z düzlemini göz önünde tutarak, düzlemin bir yanından öbürüne etki eden P_{zx} kuvvetini ; düzlemin üzerindeki moleküllerin momentumunun, bu düzlemin altındaki moleküllerin momentumundan biraz daha büyük bir x bileşeni olduğuna dikkat ederek anlayabiliriz. Gaz molekülleri z düzleminin bir yanından diğer yanına geçtikçe kendileriyle beraber momentumlarının bir x bileşenini de taşırlar. Düzlemin altındaki gaz, düzlemin yukarisından gelen moleküllerin getirdikleri momentumun x bileşeni nedeniyle, x doğrultusunda momentum kazanır.

Bunun terside doğrudur. Newton'un ikinci kanunu gereğince bir sistem üzerine etki eden kuvvet bu sistemin momentumunun zamanla değişme hızına eşittir. Bu durumda

$$P_{zx} \equiv \left[\begin{array}{l} \text{Düzlemin yukarisından gelen momentumun } x \text{ bileşeninin} \\ \text{ } z \text{ düzlemini geçen moleküllerin net momentum taşımaları} \\ \text{ } \text{nedeniyle birim zamanda, düzlemin birim alanı başına artması.} \end{array} \right] \quad (26)$$



Şekil 4.2. Bir düzleme geçen moleküllerin momentum taşınması

olarak yazarız. Bütün moleküllerin ortalama $\bar{v}$ hızıyla hareket ettiklerini varsayarsak z düzleminin birim alanını, birim zamanda yukardan aşağı ve aşağıdan yukarı doğru geçen $\frac{1}{6} n \bar{v}$ molekül olacaktır. Fakat l ortalama serbest yolun tanımı gereğince düzlemi aşağıdan yukarıya ve yukarıdan aşağıya geçen moleküllerin ortalama olarak z düzleminin l kadar altında ve üstünde son çarpışmaya uğrayacaklarını göz önünde tutmalıyız.

Ortalama $U_x = U_x(z)$ hızı z nin fonksiyonu olduğundan $(z-l)$ konumundaki moleküllerin hızının x bileşeni ortalaması $U_x(z-l)$ olacaktır. Bu durumda m kütleli bir molekül $mU_x(z-l)$ momentumunun ortalama x bileşenini z düzleminin bir yanından öbür yanına taşır. Sonuçta

$$\left[\begin{array}{l} \text{Düzlemi yukarıya doğru geçen momentumun} \\ \text{birim zaman ve birim alan başına taşınan} \\ \text{ortalama } x \text{ bileşeni} \end{array} \right] = \frac{1}{6} n \bar{v} [m U_x(z-l)] \quad (27)$$

yazarız. Aynı şekilde son çarpışmaya (z+1) konumunda uğrayan molekül için ise

$$\left[\begin{array}{l} \text{Düzlemi aşağı doğru geçen momentumun} \\ \text{birim zaman ve birim alan başına taşınan} \\ \text{ortalama x bileşeni} \end{array} \right] = \frac{1}{6} \bar{n} \bar{v} [m U_x(z+1)] \quad (28)$$

yazarız. (27) denkleminde (28) denklemi çıkararak momentumun ortalama x bileşeninin birim zaman ve birim alan başına düzlemin aşağısından yukarısına net momentum miktarı taşınmasını, yani P_{zx} kuvvetini

$$\begin{aligned} P_{zx} &= \left(\frac{1}{6} \bar{n} \bar{v} \right) [m U_x(z-1)] - \left(\frac{1}{6} \bar{n} \bar{v} \right) [m U_x(z+1)] \\ &= \frac{1}{6} \bar{n} \bar{v} m [U_x(z-1) - U_x(z+1)] \end{aligned} \quad (29)$$

olarak elde ederiz. 1 ortalama serbest yolu çok küçük olduğundan iyi bir yaklaşımla

$$U_x(z+1) = U_x(z) + \frac{\partial U_x}{\partial z} l$$

$$U_x(z-1) = U_x(z) - \frac{\partial U_x}{\partial z} l$$

alıp, sonuçları (29) de yazarsak

$$P_{zx} = \frac{1}{6} \bar{n} \bar{v} m \left(-2 \frac{\partial U_x}{\partial z} l \right) \equiv -\eta \frac{\partial U_x}{\partial z} \quad (30)$$

elde ederiz. Buradan viskozite katsayısını,

$$\eta = \frac{1}{3} \bar{n} v m l \quad (31)$$

buluruz. Bulunan (31) sonucunda $l = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma}$ ortalama serbest yolunu kullanarak viskozluk katsayısını

$$\eta = \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{\bar{n} m \bar{v}}{\sigma} \quad (32)$$

olarak elde ederiz. Eş bölüşüm teoremini göz önünde tutarak, simetri gereğince

$$\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2 \text{ olacağından } \bar{v}^2 = \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2 = 3\bar{v}_x^2 = \frac{3kT}{m} \text{ yazarız } \bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

olacağından bir molekülün ortalama hızı yalnız T sıcaklığına bağlı olur. Viskozluk katsayısının n ye bağlı olmadığı, verilen bir sıcaklıkta gazın $\bar{P} = nkT$ basıncında bağlı olmadığı görülebilir. Gaz moleküllerinin sayısı iki katına çıkarılsa bile her molekülün ortalama serbest yolu yarıya ineceğinden momentum taşınmasının net hızı değişmeyecektir. (Oğul ve Malfliet 1987)

4.2. Sıcaklık iletkenliği ve Enerjinin Taşınması

4.2.1. Sıcaklık İletkenlik Katsayısının Tanımı

Sıcaklığın her yerinde düzgün olmadığı $T = T(z)$ olacak şekilde T sıcaklığının z koordinatının bir fonksiyonu olduğu bir maddeyi ele alalım. Cisim sıcaklık dengesine ulaşmak için mutlak sıcaklığın fazla olduğu yerden az olduğu yere doğru bir ısı akımıyla karşılaşır. Bir z = sabit düzlemi ele alalım. Bu durumda, Q_z

$$Q_z = \left[\begin{array}{c} + z \text{ yönünde birim zamanda düzlemin} \\ \text{birim alanını geçen ısı} \end{array} \right]$$

ifade edecektir. Q_z niceliğine z yönündeki ısı akısı yoğunluğu adı verilir. Sıcaklık düzgün olursa $Q_z = 0$ olur. Düzgün değilse, bundan önceki viskozluk konusunda olduğu gibi Q_z nın $\frac{\partial T}{\partial z}$ sıcaklık gradienti ile orantılı olması gerekir. Bu durumda sıcaklık gradienti çok büyük olmamalıdır. bu şartlarda

$$Q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (33)$$

yazılabilir. k orantı sabitine ele alınan maddenin sıcaklık iletkenlik katsayısı denir. Isı yüksek olduğu yerden az olduğu yere doğru akacağından $\frac{\partial T}{\partial z} > 0$ ise $Q_z < 0$ olur.

4.2.2. Bir Seyrek Gaz İçin Sıcaklık İletkenlik Katsayısının Hesaplanması

Gaz içinde, $T = T(z)$ olduğu bir $z = \text{sabit}$ düzlemini göz önüne aldığımızda ısı taşınması, moleküllerin bir düzlemi aşağıdan yukarıya ve yukarıdan aşağıya geçmesi sebebiyle olur. $\frac{\partial T}{\partial z} > 0$ olursa yukarıdan gelen bir molekülün ortalama $\bar{\epsilon}(T)$ enerjisi aşağıdan gelen bir molekülün ortalama $\bar{\epsilon}(T)$ enerjisinden daha büyük olur. Sonuçta düzlemin yukarısındaki bölgeden altındaki bölgeye net bir enerji taşınması meydana gelir. Birim zamanda bu düzlemin birim alanını aşağıdan yukarıya ve yukarıdan aşağıya doğru geçen molekül sayısı birbirine eşit ve

$\frac{1}{6} n \bar{v}$ olacaktır. Burada ifade edilen n , z ile gösterilen düzlemde birim hacim başına moleküllerin ortalama sayısıdır.

Z düzlemini aşağıdan geçen moleküller, ortalama olarak bu düzlemin altında l serbest yolu uzaklıkta son çarpışmaya uğrarlar. Fakat T sıcaklığı z nin fonksiyonu olduğundan bir molekülün $\bar{\epsilon}$ enerjisi T ye ve molekülün son çarpışma konumu olan z ye bağlı olur. Bu durumda $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(z)$ olarak ifade edebiliriz.

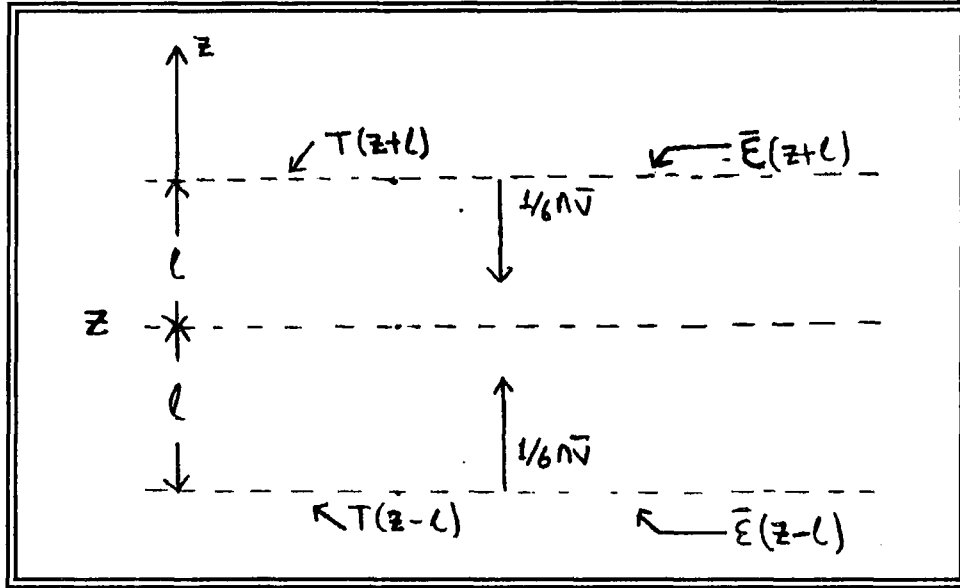
Sonuçta düzlemi aşağıdan geçen moleküller kendileriyle beraber bundan önceki çarpışmalarında $(z-l)$ konumunda aldıklarını $\bar{\epsilon}(z-l)$ ortalama enerjisini taşırlar. Bu ifadeden sonra

$$\left[\begin{array}{l} \text{Birim zamanda, düzlemin birim alanını} \\ \text{aşağıdan geçen ortalama enerji} \end{array} \right] = \frac{1}{6} n \bar{v} \bar{\epsilon}(z-l) \quad (34)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Birim zamanda, düzlemin birim alanını} \\ \text{yukarıdan geçen ortalama enerji} \end{array} \right] = \frac{1}{6} n \bar{v} \bar{\epsilon}(z+l) \quad (35)$$

yazılır. (34) denkleminde (35) denklemini çıkararak düzlemi $+z$ yönünde aşağıdan geçen Q_z net enerji akışı bulunabilir.

$$\begin{aligned} Q_z &= \frac{1}{6} n \bar{v} [\bar{\epsilon}(z-l) - \bar{\epsilon}(z+l)] \\ &= \frac{1}{6} n \bar{v} \left[(\bar{\epsilon}(z) - l \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial z}) - (\bar{\epsilon}(z) + l \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial z}) \right] \\ &= \frac{1}{3} n \bar{v} l \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \quad (36)$$



Şekil 4.3. Bir düzlemi geçen moleküllerin enerji taşınması

Sonucuna ulaşırız. (36) denkleminde $c \equiv \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial T}$ tanımını yaparak

$$Q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (37)$$

elde ederiz. Daha önce bulunan $l = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$ sonucunu da kullanarak

$$k = \frac{c \bar{v}}{3\sqrt{2}\sigma} \quad (38)$$

bulunur. (McQuarrie 1973)

4.3. Kendiliğinden Yayılma (Difüzyon) Katsayısı

Aynı moleküllerden oluşan bir maddenin bazı moleküllerinin işaretlendiğini varsayalım. İşaretli moleküllerin birim hacim başına ortalama sayısı n_1 olsun. Herhangi bir denge halinde işaretli moleküller verilen hacimde homojen olarak dağılmış olacaklardır. Fakat molekül dağılımının $n_1 = n_1(z)$ olacak şekilde z ye bağlı olduklarını düşünerek, molekül dağılımının homojen olmadığı bir durumu ele alalım. İşaretli moleküller bu dengesizlik halinden, düzgün olarak dağılacakları son denge durumuna ulaşmak için hareket edeceklerdir. Yine bir $z = \text{sabit}$ düzlemini göz önünde tutarak bu işaretli parçacıkların J_z akı yoğunluğunu ;

$$J_z = \left[\begin{array}{l} \text{Düzlemin birim alanını } +z \text{ yönünde birim} \\ \text{zamanda geçen işaretli moleküllerin ortalama sayısı} \end{array} \right]$$

olarak yazarız. n_1 dağılımı düzgünse $J_z = 0$ olacaktır. n_1 dağılımının düzgün olmadığı varsayılırsa, J_z akı yoğunluğunun işaretli moleküllerin $\frac{\partial n_1}{\partial z}$ derişiklik gradienti ile orantılı olması gerekir. Böylece

$$J_z = -D \frac{\partial n_1}{\partial z} \quad (39)$$

bağıntısını yazabiliriz. (39) denklemindeki D orantı katsayısına maddenin **kendiliğinden yayılma katsayısı** denir.

$$\frac{\partial n_1}{\partial z} > 0 \text{ durumunda işaretli moleküller derişimi eşitlemek için } -z \text{ yönünde}$$

akırlar. Bu durumda $J_z < 0$ olur.

t anında z konumunda yerleşmiş birim hacimdeki işaretli moleküllerin ortalama sayısını $n_1(z,t)$ ile göstererek, tek boyutlu dz kalınlığında ve A alanında bir madde dilimini ele alalım. İşaretli moleküllerin toplam sayısı değişmeyeceğinden birim zamanda bu dilim içerisindeki işaretli moleküllerin sayısındaki artma, birim

zamanda bu dilimden $(z+dz)$ deki yüzey yoluyla çıkan işaretli moleküllerin sayısındaki azalmaya eşit olacaktır. Bu ifademizi matematiksel olarak

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_l A dz) = A J_z(z) - A J_z(z+dz)$$

$$\frac{\partial n_l}{\partial t} dz = J_z(z) - \left(J_z(z) + \frac{\partial J_z}{\partial z} dz \right)$$

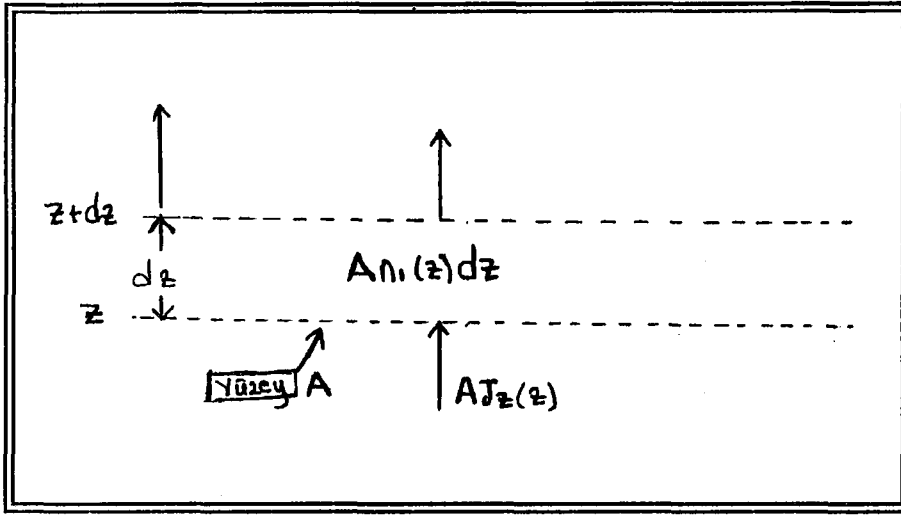
ya da

$$\frac{\partial n_l}{\partial t} = - \frac{\partial J_z}{\partial z} \quad (40)$$

yazabiliriz. $J_z = -D \frac{\partial n_l}{\partial z}$ ifadesinide kullanarak (40) bağıntısını

$$\frac{\partial n_l}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 J_z}{\partial z^2} \quad (41)$$

olarak gösterebiliriz. (Reif 1977) Bu diferansiyel denklem **yayılma denklemi** olarak bilinir.



Şekil 4.4. Yayılma sırasında işaretli moleküllerin sayısının korunduğunu gösteren diagram

4.3.1. Seyrek Bir Gaz İçin Kendiliğinden Yayılma Katsayısının Hesaplanması

Daha önce ki hesaplamalarımızda yaptığımız gibi gaz içindeki bir $z = \text{sabit}$ düzlemini ele alalım. Bu düzlem $n_1 = n_1(z)$ ye bağlı olacağından ele alınan düzlemin birim alanını birim zamanda aşağıdan geçen işaretli moleküllerin ortalama sayısı

$\frac{1}{6} n_1 \bar{v}(z-l)$ ye eşit ve düzlemi aynı şartlarda yukarıdan geçen moleküllerin ortalama

sayısında $\frac{1}{6} n_1 \bar{v}(z+l)$ olacaktır. z düzleminin birim alanını $+z$ yönünde aşağıdan geçen

işaretli moleküllerin net akısını

$$J_z = \frac{1}{6} n_1 \bar{v}(z-l) - \frac{1}{6} n_1 \bar{v}(z+l)$$

$$= \frac{1}{6} \bar{v} [n_1(z-l) - n_1(z+l)] = \frac{1}{6} \bar{v} (-2 \frac{\partial n_1}{\partial z} l)$$

olarak ya da

$$J_z = -D \frac{\partial n_1}{\partial z} \quad (42)$$

şeklinde elde ederiz. Burada $D = \frac{1}{3} \bar{v} l$ dir. (42) bağıntısından görüleceği gibi J_z akı yoğunluğu derişiklik gradienti ile orantılıdır. D yi açık olarak ifade etmek için daha önce hesaplanılan $\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$ ve $l = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma} = \frac{kT}{\sqrt{2}n\sigma}$ bağıntıları yerine yazılırsa

$$D = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{P\sigma} \sqrt{\frac{(kT)^3}{m}} \quad (43)$$

sonucu elde edilir. (Reif 1977)

5. İKİ CİSİM ÇARPIŞMALARI ve BOLTZMANN DENKLEMİ

Daha önce biz bir gazın d yarıçaplı sert kürelerden oluştuğunu varsaymıştık. Şimdi iki cisim çarpışmalarını içine alan bir kinetik denklemi türetmek için gazı nokta parçacıklar (hacimsiz) olarak gözönüne alacağız. Dengede olmayan gazın zamanla değişimini en iyi şekilde açıklayan kinetik denklem Boltzmann denklemidir. (McQuarrie 1973, Reif 1977) Burada, Boltzmann denkleminin detaylı bir türetilişi yerine terimlerin ne anlama geldiği verilmekle yetinilecektir. Boltzmann denklemi seyrek gazlar için geçerlidir. Daha doğrusu nükleonların dalga boyu sistemin (çekirdeğin) boyutlarından çok küçük olduğu durumda Boltzmann denklemi çok kullanışlıdır. Parçacıklar $(\vec{r}_i, \vec{p}_i)$ koordinatlarıyla (kanonik-koordinatlar) tanımlanırlar. Faz uzayında bir $f_N(r_1, r_2, \dots, r_N, P_1, P_2, \dots, P_N, t)$ N -parçacık dalga fonksiyonuyla sistemin zamanla değişimi incelenir. $F_N dr_1 \dots dr_N dp_1 \dots dp_N$ büyüklüğü sistemin herhangi bir t anında, faz uzayındaki $(r_1, \dots, P_N)$ noktası etrafındaki $dr_1 \dots dp_N$ durumunda bulunma ihtimali olarak verilir. F_N dağılım fonksiyonunun zamana bağlı davranışı Liouville denklemi ile verilir. (McQuarrie 1973, Balescu 1975) Boltzmann denklemi türetilirken aşağıdaki varsayımlar yapılmıştır.

- Parçacıklar nokta parçacıklar olarak ele alınıp çarpışmalar arasında geçen sürenin çarpışma süresinden çok büyük olduğu gözönüne alınmıştır.
- Sadece iki-cisim çarpışmaları gözönüne alınmıştır.
- Boltzmann'ın Moleküler Kargaşalık Kabulü: İki parçacık çarpışırken her defasında birbirleriyle bağlantısız olarak biraraya gelirler. Çarpışmadan sonra da kuvvetli bir şekilde bağlantılıdır.

Bu kabullerden sonra Boltzmann denklemini yazmadan önce denklemdeki çarpışma terimi $(\partial f / \partial t)_{\text{çarp.}}$ hakkında kısa bir bilgi verelim. Faz uzayındaki $(\vec{r}, \vec{v}_j)$ noktasındaki $dr dv_j$ hacim elemanındaki j -parçacıklarının sayısı $f_j dr dv_j$ ile verilir. Çarpışma olmasaydı bu parçacıklar dt süresi içinde $(\vec{r} + \vec{v}_j dt, \vec{v}_j + \vec{a} dt)$ noktasına varacaklardı. Bu durumda $f_j(\vec{r}, \vec{v}_j, t) = f_j(\vec{r} + \vec{v}_j dt, \vec{v}_j + \vec{a} dt, t + dt)$ olacaktı yani, $(\partial f / \partial t)_{\text{çarp.}} = 0$ olacaktı. Aslında, parçacıklar arasında çarpışma olduğu için $(\partial f / \partial t)_{\text{çarp.}} \neq 0$ bağıntısı geçerlidir. Bu durumda Boltzmann denklemi aşağıdaki gibi yazılır: (McQuarrie 1973, Balescu 1975, Oğul ve Malfliet 1987)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{r}} + \bar{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{v}}\right) \cdot f(\bar{r}, \bar{v}, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{çarp}}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{çarp}} = \iiint d^3 v_1 \cdot d^3 v'_1 \cdot d^3 \dot{v}'_1 \cdot W(v, v_1 | v', v'_1) \{f'_1 f'_1 - f f_1\} \quad (44)$$

Burada W çarpışma ihtimalidir ve diferensiyel çarpışma tesir kesiti ile doğru orantılıdır. Aynı zamanda W çarpışan parçacıkların çarpışmadan önceki ve sonraki momentumlarına bağlıdır. $\bar{r}$ parçacıkların koordinatlarını $\bar{v}$ hızını ve $\bar{a}$ da ivmesini gösterir ve dış potansiyelle aşağıdaki bağıntıyı sağlar:

$$m \cdot \bar{a} = - \frac{\partial}{\partial \bar{r}} U(\bar{r}, t) \quad (45)$$

Böylece Boltzmann denklemi $(\partial f / \partial t)_{\text{çarp}}$ terimiyle iki-cisim dinamiğini ve $\bar{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{v}} f$ terimiyle de tek-cisim dinamiğini içine alır. Boltzmann denklemini aşağıdaki gibi de yazabiliriz:

$$\frac{\partial f(\bar{r}, \bar{v}, t)}{\partial t} = - \bar{v} \cdot \frac{\partial f(\bar{r}, \bar{v}, t)}{\partial \bar{r}} - \bar{a} \cdot \frac{\partial f(\bar{r}, \bar{v}, t)}{\partial \bar{v}} + \left(\frac{\partial f(\bar{r}, \bar{v}, t)}{\partial t}\right)_{\text{çarp}} \quad (46)$$

Bu denklem $d^3 r \cdot d^3 v$ hacim elemanındaki $f(\bar{r}, \bar{v}, t) d^3 r \cdot d^3 v$ parçacık sayısının zamanla çarpışma ve akı nedeniyle değişimini açıklar. Burada akı,

$$s = - \bar{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} - \bar{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} \quad (47)$$

şeklinde tanımlanır ve f 'nin faz uzayındaki yerel değişimini açıklar. Aynı zamanda kütle, momentum ve kinetik enerji korunumunun sonucu olarak $\Psi(\vec{v}) = 1$, $\vec{v}$, $(1/2)\vec{v}^2$ büyüklükleri

$$\int d^3v \Psi(\vec{v}) \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{carp}} = 0 \quad (48)$$

bağıntısını sağlarlar. Burada n parçacık sayısı yoğunluğu olmak üzere,

$$\bar{\psi}(\vec{r}, t) \equiv \frac{\int d^3v \psi f}{\int d^3v f} = \frac{1}{n} \int d^3v \psi f \quad (49)$$

tanımı yapılırsa Boltzmann denklemi kullanılarak aşağıdaki korunum denklemleri elde edilir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\rho u_{\alpha}) = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{\alpha} u_{\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_{\alpha}} \right) = \rho a_i - \sum_j \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{\rho} \right) + \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{Q}{\rho} \right) \right] + \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = - \sum_{ij} p_{ij} D_{ij} \quad (50)$$

Burada aşağıdaki gösterimler kullanılmıştır:

$$n(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v$$

Parçacık sayısı yoğunluğu

$\rho(\vec{r}, t) = mn$	Kütle yoğunluğu	
$u_i(\vec{r}, t) = \bar{v}_i$	Ortalama hız	
$u_i = v_i - u_i$	Termal hız	
$Q(\vec{r}, t) = (1/2)\rho \bar{U}^2$	Termal enerji yoğunluğu	
$P_{ij}(\vec{r}, t) = \rho \bar{U}_i \bar{U}_j$	Basınç tensörü	
$q_i(\vec{r}, t) = (1/2)\rho \bar{U}_i \bar{U}^2$	Isı akımı yoğunluğu	
$D_{ij}(\vec{r}, t) = (1/2) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$	Gerilme tensörü	(51)

Yukarıdaki denklemlerdeki P_{ij} ve q_i büyüklüklerinin hesaplanması için bu büyüklüklerin yoğunluk, ortalama hız ve sıcaklık cinsinden açıklanması gerekir. Bunun için de $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ 'nin çözülmesi gerekir. Boltzmann denkleminin yerel dengedeki çözümü Maxwell dağılım fonksiyonudur:

$$f^0(\vec{r}, \vec{v}, t) = n(\vec{r}, t) \left(\frac{m}{2\pi kT(\vec{r}, t)} \right)^{3/2} \cdot \exp \left[- \frac{m(\vec{v} - \vec{u}(\vec{r}, t))^2}{2kT(\vec{r}, t)} \right] \quad (52)$$

P_{ij} ve q_i büyüklüklerini hesaplamak için (52) denklemini kullanılırsa

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \rho \bar{U}_i \bar{U}_j = p \delta_{ij}, & P &= nkT \\ q_i &= (1/2) \rho \bar{U}_i \bar{U}^2 = 0, & Q &= (3/2) p \end{aligned} \quad (53)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu durumda (50) denklemleri aşağıdaki Euler denklemlerine indirgenir.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho \vec{a} - \text{grad } \bar{p}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho T^{-3/2}) = 0 \quad (54)$$

Denge civarında, Boltzmann denkleminin çözümü Chapman-Enskog çözümü ile verilir. (Danielewicz 1984)

$$f = f^0 + f^0 \phi(\vec{r}, \vec{v}, t) \quad (55)$$

(55) eşitliği Boltzmann denkleminde yerine konulup ϕ 'den daha yüksek mertebeli terimler ihmal edilirse ($\phi^2, \phi^3, \dots$ gibi) ve Boltzmann-II teoremi kullanılırsa Lineer hale getirilmiş Boltzmann denklemi elde edilir.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \vec{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right) f^0 = f^0 C(\phi)$$

$$C(\phi) = \iiint d^3 v_1 d^3 v' d^3 v'_1 \cdot W(\vec{v} \vec{v}_1 | \vec{v} \vec{v}'_1) f_1^0 \left\{ \phi' + \phi'_1 - \phi - \phi_1 \right\} \quad (56)$$

Burada f^0 denge durumundaki dağılım fonksiyonudur ve (52) denklemi ile verilir. Denklem (54)'ün sol tarafının logaritmik olarak türevi alınarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} + a_{\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{\alpha}}\right) f^0 &= \left\{ \frac{1}{nT^{-3/2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\right) nT^{-3/2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{n(v-v_{\alpha})^2}{2kT^2} \left\{ \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + v_{\alpha} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_{\alpha}} \right\} + \frac{m}{kT} (v-v_{\alpha}) \left(\frac{\partial v_{\alpha}}{\partial t} + v_{\alpha} \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \right) - \frac{m a_{\alpha}}{kT} (v-v_{\alpha}) \right\} \cdot f^0
\end{aligned} \quad (57)$$

(54) denklemlerinden faydalanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (\rho T^{-3/2}) &= -u_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\rho T^{-3/2}) \\
\frac{\partial \Gamma}{\partial t} &= -u_{\alpha} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_{\alpha}} - \frac{2}{3} T \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \\
\frac{\partial u_i}{\partial t} &= -u_{\beta} \frac{\partial u_i}{\partial x_{\alpha}} + a_i - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i}
\end{aligned} \quad (58)$$

Aynı zamanda basınç için aşağıdaki bağıntılar yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x_i} &= kT \frac{\partial n}{\partial x_i} + kn \frac{\partial T}{\partial x_i} \\
\frac{\partial}{\partial x_i} (n \cdot T^{-3/2}) &= T^{-3/2} \frac{\partial n}{\partial x_i} - (3/2) \cdot n \cdot T^{-5/2} \frac{\partial T}{\partial x_i}
\end{aligned} \quad (59)$$

(58) ve (59) denklemleri (57) denkleminde yerine konulursa ve $u_i = v_i - u_i$ bağıntısı kullanılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + a_\alpha \frac{\partial}{\partial v_\alpha}\right) f^0 = f^0 \left\{ \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} u_\alpha \left(\frac{mU^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \right\} + \frac{m}{kT} D_{\alpha\beta} (u_\alpha u_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} U^2) \quad (60)$$

Denklem (56)'daki ϕ 'nin çözümü bilinirse momentum akısı P_{ij} ve ısı akısı q_i hesaplanabilir:

$$P_{ij} = p \delta_{ij} - 2\eta \left(D_{ij} - \frac{1}{3} D_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \right) \quad (61)$$

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (62)$$

q_i ve p_{ij} değerlerinin tam olarak hesaplanabilmesi için viskozluk katsayısı η ve ısı iletkenlik katsayısı k ayrıca hesaplanmalıdır. Denklem (61) Newton kanunu, (62) de Fourier kanunu olarak bilinir. Bu iki denklemin türetilişi viskozluk ve ısı iletkenlik katsayıları hesaplanırken verilecektir. Denklem (61)'deki

$$\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} U_\alpha \left(\frac{mU^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \text{ ve } \frac{m}{kT} D_{\alpha\beta} (U_\alpha U_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} U^2)$$

fonksiyonları denklem (56) daki $C(\phi)$ operatörünün özfonksiyonlarıdır. Çünkü bu iki denklemin sol tarafları aynıdır. Bu nedenle $C(\phi)$ 'nin özfonksiyonları Sonine polinomları cinsinden aşağıdaki gibi yazılır. (Fetter ve Walecka 1971, Malfliet 1984)

$$\Psi_{nlm} = N_{nlm} S_{l+1/2}^{(r)}(u^2) u^l Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (63)$$

Burada $S_{l+1/2}^{(r)}$ Sonine (ya da birleşik Laguerre) polinomları, N_{nlm} de normalizasyon katsayılarıdır. $S_n^m(x)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$S_n^m(x) = \sum_{p=0}^m (-x)^p \frac{(n+m)!}{p!(m-p)!(n+p)!} \quad (64)$$

Makwell modeline göre ϕ 'nin çözümü Ψ_{11m} ve Ψ_{02m} 'in lineer kombinezonudur. (McQuarrie 1973)



6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

6.1. Bir Gazın Klasik İncelemesinin Geçerliliği

İdeal gazları klasik olarak ele almak ve böylece Maxwell hız dağılımının geçerli olacağı koşulları incelemekte temel geçerlilik ölçütümüz Heisenberg'in belirsizlik ilkesi olacaktır. Gazlar üzerinde kauntum mekaniksel etkilerin geçersizliği gösterilebilirse, klasik yaklaşıklık geçerli olacaktır. (Reif 1977) Klasik kavramların kullanılması üzerinde, kauntum mekaniği bakımından temel sınırlama Heisenberg belirsizlik ilkesi ile ifade edilir. Bu ilke bir q konum koordinatı ile buna karşılık gelen P momentumunun aynı anda sonsuz doğrulukta belirlenmeyeceğini ifade eder. Yani $\Delta p \cdot \Delta q \geq h/2\pi$ kadar bir belirsizlik kalacağını gösterir. Burada ΔP ve ΔQ sırasıyla momentum ve konumdaki belirsizliği gösterir. Gaz moleküllerinden birinin S_0 ile gösterilen bir minimum uzaklık içinde lokalize edildiğini ve parçacığın momentumunun da P_0 olduğunu düşünerek $S_0 \cdot P_0 \gg h/2\pi$ olacak şekilde S_0 ve P_0 büyükse Heisenberg belirsizlik ilkesinin zorunlu kıldığı sınırlamalar ortadan kalkar. $S_0 \cdot P_0 \gg h/2\pi$ ve $S_0 \gg \lambda_0$ olursa klasik yaklaşım geçerli olur. Burada $\lambda_0 \equiv \frac{h/2\pi}{P_0}$ olarak tanımlanmıştır.

T sıcaklığında bir gaz içindeki m kütleli bir molekülün momentumunun P_0 değeri molekülün en olası $\bar{v}$ hızından bulunabilir.

$$P_0 \approx m \bar{v} = \sqrt{2mkT} \quad (65)$$

Molekülün de Broglie dalga boyuda

$$\lambda_0 = \frac{h/2\pi}{P_0} = \frac{h/2\pi}{\sqrt{2mkT}} \quad (66)$$

olarak bulunur. Klasik yaklaşımda moleküller iyi tanımlanmış yörüngeler boyunca ilerleyen ayırt edilebilir parçacıklar olarak ele alınır. Bir molekülün kendisine en yakın moleküller arasındaki S_0 uzaklığından daha uzak olmayan bir mesafe içinde bulunmasını engelleyen kauntum mekaniksel sınırlamalar yoksa $S_0 \gg \lambda_0$ şartı sağlanır. Moleküllerin S_0 kenarlı küçük küpler olduğu düşünülürse, bu küpler N molekülden oluşan gazın V hacmini doldurur. $S_0^3 \cdot N = V$ olacaktır. Burada $S_0 = (V/N)^{1/3} = n^{-1/3}$ ve $n = (N/V)$ birim hacim başına molekül sayısını ifade eder. Bu durumda klasik yaklaşımın şartı, $S_0 \gg \lambda_0$

$$\frac{\lambda_0}{S_0} \approx \frac{h}{2\pi} \frac{n^{1/3}}{\sqrt{2mkT}} \ll 1 \quad (67)$$

olur. (67) bağıntısı klasik yaklaşımın, gaz n küçük olacak şekilde yeterince seyreltilmişse ve T sıcaklığı yeteri kadar yüksekse ya da moleküllerin m kütleleri çok küçük değilse uygulanabileceğini gösterir. (McQuarie 1973)

6.2. Viskozluk, Sıcaklık İletkenliği, Difüzyon, Katsayılarının Hesaplanmasında Yapılan Varsayımlar ve Karşılaştırmalar

Viskozluk katsayısını hesaplarken yaptığımız iki kabullenme vardır.

a. Gazın iç ya da daha fazla molekülün etkileşmeyecek derecede yeterince seyreltilmiş olduğunu dikkate aldık. Bu kabullenme $l \gg d$ olacak şekilde gazın yoğunluğu yeterince az olursa doğrulanır. Burada d molekülün çapıdır.

b. Gaz molekülleri gazın çeperinden çok başka moleküllerle çarpışacak kadar yoğundur. Bu kabullenmede $l \ll L$ olacak şekilde gaz yoğunluğunun yeterince büyük olmasını gerektirir. (31) denklemi tekrar ele alalım

$n \rightarrow 0$ Mükemmel boşluk sınırında, hareketli levha üzerine etki eden teğet kuvvetin bir gaz molekülü tarafından taşınamamasından dolayı kaybolması gerekir. Molekülün 1 ortalama serbest yolu L kutu boyutuna kadar büyüyeceğinden, moleküller diğer moleküllerden çok kabın duvarlarıyla çarpışır. η viskozluğu sıfıra yaklaşır ve yok olur. η viskozluğunun sıcaklığa bağlılığı $\bar{v}$ hızı gibidir. Yani $\eta \propto T^{1/2}$ olur σ tesir kesiti molekülün $\bar{v}$ ortalama bağıl hızına bağlıdır. $\bar{v}$ bağıl hızı da sıcaklığa $\bar{v} \propto T^{1/2}$ ile bağlı olduğundan σ da sıcaklığa bağlıdır. Bunun sonucu olarak η sıcaklıkla yaklaşık $T^{0.7}$ oranında değişir. Sıcaklık arttığında σ saçılma etki kesiti molekül hızı artacağından azalır. Bu nedenle T sıcaklığı arttıkça $\eta \propto T^{1/2} / \sigma$ viskozluğu sıcaklıkla $T^{1/2}$ den daha hızlı artma eğilimi gösterir.

Gazın viskozluğu sıcaklık arttıkça büyür. Fakat bu davranış sıvıların artan sıcaklıkta, azalan viskozluğundan tamamen farklıdır. Bu farkın nedeni sıvı moleküllerinin birbirine yakın olmasıdır. (Balescu 1975, Reif 1977) Bir sıvı içinde bir düzlemin bir yanından öbür yanına momentum taşınması Bu düzleme yakın moleküller arasındaki direkt kuvvetlerle birlikte bu düzlemi geçen moleküller sebebiyle meydana gelir.

Sıcaklık iletkenlik katsayısı k nın verilen bir T sıcaklığında gazın basıncından bağımsız olduğu daha önce çıkarılan (38) denkleminde görülebilir. Ayrıca (38) bağıntısı yine 1 ortalama serbest yolunun $d \ll l \ll L$ şartını sağladığı bir basınç aralığında geçerlidir. k sıcaklık iletkenlik katsayısı ve η viskozluk katsayısının karşılaştırmasıyla

$$\frac{k}{\eta} = \frac{c}{m} \quad (68)$$

sonucuna varılır.

D kendiliğinden yayılma katsayısının da yukarıda açıklandığı gibi gazın basıncına bağlı olduğu (43) denkleminde açıkça görülür. Sabit bir sıcaklıkta $D \propto 1/n \propto 1/\bar{p}$ olur. Sabit basınçta da σ , T den bağımsız bir sabit olmak üzere

moleküller sert küreler gibi saçılırsa $D \propto T^{3/2}$ sonucu (43) denkleminde açıkça görülür. η viskozite katsayısı ve D kendiliğinden yayılma katsayısı karşılaştırılarak

$$\frac{D}{\eta} = \frac{1}{nm} = \frac{1}{\rho} \quad (69)$$

elde edilir. Burada ρ gazın kütle yoğunluğudur.

Benzer şekilde gazın sıcaklık iletkenlik katsayısı k ile kendiliğinden yayılma katsayısı D karşılaştırılarak ta

$$\frac{D}{k} = \frac{kT}{p c} = \frac{1}{nc} \quad (70)$$

sonucuna ulaşılır.

7. KAYNAKLAR

1. Balescu, R., 1975, Equilibrium and noneq. Statistical Mechanics, Wiley, N.Y.
2. Danielewicz, P., 1984, Transport Properties of Exited Nuclear Matter and the Schock-Wave Profile, Phys. Lett. B V. 146 P. 168-174
3. Fetter, A.L., and Walecka, J.D., 1971, Quantum Theory of Many Particle System, McGraw Hill.
4. Malfliet, R., 1984, Transport Properties of Nuclear Matter at High Temperatures. A. 420. P. 621
5. McQuarrie D. A., 1973, Statistical Mechnics, Harper and Row, New York.
6. Oğul, R., and Malfliet, R., 1987, Kinetic Transport Coefficients of Nuclear Matter, KVI Ann. Rep. p. 63-64.
7. Oğul, R., and Eren, N., 1997, On the Transport Coefficients of Dense Nuclear Matter. Balkan Phys. Lett. V. 5 (1) P. 10-16.
8. Oğul, R., Özmen, A., 1991, Transport Properties of Nuclear Matter at low Temperatures, Doğa Tr., J. Phys., 15, 43-50.
9. Oğul, R., and Özmen, A., 1995, Fermi Liquid Transport Coefficients of Nuclear Matter at Low Temperatures, B. Phys. Lett. V. 3, p. 172-177.
10. Reif, F., 1977, İstatistik Fizik, (Ankara Uni. Basımevi., Ankara., Çev: Erdik, E., Ünal, B.C.)