

T.C.
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GECİKMELİ KESİRLİ MERTEBEDEN
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK
ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YASEMİN AYHAN KAYA

OCAK 2023

MUĞLA

T.C.
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GECİKMELİ KESİRLİ MERTEBEDEN
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK
ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YASEMİN AYHAN KAYA

OCAK 2023

MUĞLA

MUGLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEZ ONAYI

YASEMİN AYHAN KAYA tarafından hazırlanan **GEÇİKMELİ KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ** başlıklı tezinin, 17/01/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans derecesi için gerekli şartları sağladığı oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

TEZ SINAV JURİSİ

Prof. Dr. Mustafa GÜLSU (**Jüri Başkanı, Danışman**)

İmza:

Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Doç. Dr. Yalçın ÖZTÜRK (**Üye**)

İmza:

Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Dr. Öğr. Üyesi Hatice YALMAN KOŞUNALP (**Üye**)

İmza:

Matematik Anabilim Dalı,
Bandırma Onyedi Eylül Üniversitesi, Bandırma

ANA BİLİM DALI BAŞKANLIĞI ONAYI

Prof. Dr. Mustafa GÜLSU

İmza:

Matematik Anabilim Dalı Başkanı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Prof. Dr. Mustafa GÜLSU

İmza:

Danışman, Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Savunma Tarihi: 17/01/2023

Tez çalışmalarım sırasında elde ettiğim ve sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgelerin tarafımdan bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde edildiğini; akademik ve bilimsel etik kurallarına uygun olduğunu beyan ederim. Ayrıca, akademik ve bilimsel etik kuralları gereği bu tez çalışması sırasında elde edilmemiş başkalarına ait tüm orijinal bilgi ve sonuçlara atıf yapıldığını da beyan ederim.

Yasemin AYHAN KAYA

17/01/2023



ÖZET

GEÇİKMELİ KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

Yasemin AYHAN KAYA

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa GÜLSU

Ocak 2023, 58 sayfa

Bu tez çalışmasında gecikmeli kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için, Caputo ve Riemann Liouville kesirli türev ve Adams-Bashforth-Moulton algoritmasıyla yaklaşık sayısal yöntemler araştırılmıştır. Burada adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümü için Euler Yöntemi ve Trapezoidal Quadrature yöntemlerinin bir kombinasyonu kullanılmıştır. Ardından Newton-Cotes formülünün özelleştirilmiş hali olan Simpson yöntemi ve Lagrange polinomu ile yapılan yaklaşımın arasındaki ilişki incelenmiştir. Lineer ve lineer olmayan gecikmeli diferansiyel denklemler için de Adımlar yöntemiyle ve Volterra - Fredholm İntegral Denklemleri incelenmiştir. Gecikme terimi; sabit ve zamanla değişen olmak üzere iki farklı durumda ele alınmıştır. Yaklaşımların sonucunda başlangıç koşullarına ve gecikme miktarına göre en uygun tekniği seçen bir algoritma elde edilmiştir. Farklı yöntemlerin kullanılması ile elde edilen sonuçlar karşılaştırılmış ve tüm hesaplamalarda Maple programı kullanılmıştır. Böylece analitik ve nümerik sonuçların yeteri kadar yakın olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Gecikmeli Kesirli Diferansiyel Denklemler, Caputo - Riemann Liouville Kesirli Türevi , Euler Yöntemi, Trapezoidal Quadrature Yöntemi, Nümerik çözümler.

ABSTRACT

APPROXIMATE SOLUTIONS OF DELAYED FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Yasemin AYHAN KAYA

Master of Science (M.Sc.)

Graduate School of Natural and
Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa GÜLSU

January 2023, 58 pages

In this thesis, it is aimed to find an approximate solution with Caputo-Riemann Liouville fractional derivative definition and Adams-Bashforth-Moulton for fractional order differential equations. Here, a combination of Euler's Method and Trapezoidal Quadrant methods is used for approximate solution of ordinary differential calculations.. Then, the relationship between Simpson's method, which is a customized version of the Newton-Cotes formula, and the approach made with the Lagrange polynomial is examined. For linear and non-linear delayed differential equations, the Steps method and Volterra - Fredholm Integral Equations were investigated. The delay term , it has been handled in two different situations, constant and time varying. As a result, of approaches, an algorithm that chooses the most suitable technique according to the initial conditions and amount of delay has been obtained. The results obtained by using different methods were compared and the Maple program was used in all calculations. Thus, it has been shown analytical and numerical results are close enough.

Keywords: Delayed Fractional Differential Equations, Caputo-Riemann Liouville Fractional Derivative, Euler's Method, Trapezoidal Quadrature Method, Numerical Solutions.

ÖNSÖZ

Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi değerli danışman hocam Prof. Dr. Mustafa Gülsu'ya, çalışmalarım boyunca değerli yardımlarıyla beni yönlendirdiği ve fikirleriyle yol gösterdiği için en içten ve sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim. Ayrıca bugüne kadar benim en iyi şekilde yetişmem için eğitim hayatımda desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen, sevgili anne ve babama sonsuz teşekkürlerimi sunarken sevgili eşime de bu süreçteki anlayışı için çok teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	1
1. GİRİŞ	1
1.1. Tarihi Gelişim.....	1
1.2. Problemin Tanıtılması	3
2. KAYNAK ÖZETLERİ	5
2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler.....	5
2.1.1. Gamma fonksiyonu.....	6
2.1.2. Beta fonksiyonu	6
2.1.3. Riemann Liouville kesirli türevi	6
2.1.4. Caputo kesirli türevi.....	7
2.1.5. Riemann Liouville kesirli integrali	7
2.1.6. Lagrange polinomları.....	8
2.1.7. Volterra-Fredholm integral denklemleri	9
2.1.8. Dikdörtgen yöntemi ile sayısal integrasyon.....	10
2.1.9. Yamuklar yöntemi ile sayısal integrasyon	11
2.1.10. Euler yöntemi.....	13
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	13
3.1. Adi Diferansiyel Denklemler için Tek Adım Adams-Bashforth-Moulton Yöntemi	14
3.2. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler için Adams-Bashforth-Moulton Yöntemi	16
3.3. Gecikmeli Kesirli Diferansiyel Denklemler için Adams-Bashforth-Moulton Yöntemi	21
3.3.1. Gecikmeli diferansiyel denklemler için Adams-Bashforth-Moulton yöntemi.....	21
3.3.2. Gecikmeli kesirli diferansiyel denklemler için Adams-Bashforth-Moulton yöntemi	25
3.4. Çözümün Kontrolü ve Hata Analizi	26
4. BULGULAR VE İRDELEME.....	27

4.1. Adi Diferansiyel Denklemler için Tek Adım Adams-Bashforth-Moulton Yöntemi ile Uygulamaları	27
4.2. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler için Adams-Bashforth-Moulton Yöntemi ile Uygulamaları	35
4.3. Gecikmeli Kesirli Diferansiyel Denklemler için Adams-Bashforth-Moulton Yöntemi ile Uygulamaları	42
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	61
KAYNAKLAR	62
ÖZGEÇMİŞ.....	64



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. $h = 0.01$ için Örnek 4.1.1 'in ABM ve Euler çözümlerinin karşılaştırılması.....	26
Çizelge 4.2. $h = 0.01, 0.05$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.1.1 'in çözümlerinin karşılaştırılması.....	27
Çizelge 4.3. $h = 0.01$ için Örnek 4.1.1 'in ABM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	28
Çizelge 4.4. $h = 0.01$ için Örnek 4.1.2 'nin ABM ve Euler çözümlerinin karşılaştırılması.....	30
Çizelge 4.5. $h = 0.01$ ve $h = 0.05$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.1.2 'nin çözümlerinin karşılaştırılması.....	31
Çizelge 4.6. $h = 0.01$ için Örnek 4.1.2 'nin ABM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	32
Çizelge 4.7. $\alpha = 2$ ve $h = 0.05$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.2.1'in yaklaşık çözümleri.....	35
Çizelge 4.8. $\alpha = 1.25$ ve $h = 0.05$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.2.1'in yaklaşık çözümleri.....	36
Çizelge 4.9. $\alpha = 2$ ve $h = 0.05$ için Örnek 4.2.1'in ABM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	37
Çizelge 4.10. $\alpha = 0.66$ ve $h = 0.1$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.2.2'nin yaklaşık çözümleri.....	39
Çizelge 4.11. $\alpha = 1.25$ ve $h = 0.1$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.2.2'nin yaklaşık çözümleri.....	40
Çizelge 4.12. $\alpha = 0.2, \tau = 0.75$ ve $h = 0.1$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.3.1'in yaklaşık çözümleri.....	42
Çizelge 4.13. $\alpha = 0.2, \tau = 1$ ve $h = 0.1$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.3.1'in yaklaşık çözümleri.....	43
Çizelge 4.14. $\alpha = 0.2, \tau = 0.75$ için Örnek 4.3.1'in ABM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	44

Çizelge 4.15. $\alpha = 0.15, 0.35, 0.65$ ve $\delta=8$ için Örnek 4.3.2'nin SF yöntemi ile yaklaşık çözümleri.....	48
Çizelge 4.16. $\alpha = 0.65$ için Örnek 4.3.2'nin ABM ve SF yöntemi ile yaklaşık çözümleri.....	49
Çizelge 4.17. $\alpha = 0.15, 0.35, 0.65$ için Örnek 4.3.2'nin ABM yöntemi ile yaklaşık çözümleri.....	50
Çizelge 4.18. $\alpha = 0.15, \alpha = 0.35, \alpha = 0.65$ için Örnek 4.3.2'nin SF yöntemi ile yaklaşık çözümleri.....	50
Çizelge 4.19. $\alpha =0.50, \alpha =0.75$ ve $\alpha =1$ için Örnek 4.3.4'ün SF ile çözümleri	50
Çizelge 4.20. $\alpha = 0.50, \alpha =0.75$ ve $\alpha =1$ için Örnek 4.3.4'ün ABM ile çözümleri..	50

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. $f(x)$ fonksiyonun dikdörtgenler yardımıyla sayısal integrasyonu.....	9
Şekil 2.2. $f(x)$ fonksiyonun Yamuklar Yöntemi ile sayısal integrasyonu.....	10
Şekil 2.3. $f(x)$ fonksiyonun Yamuklar Yöntemi ile sayısal integrasyonundan bir kesit.....	11
Şekil 4.1. $h=0.01$ için Örnek 4.1.1 'in ABM ve Euler çözümlerinin karşılaştırılması.	27
Şekil 4.2. $h=0.01$ ve $h=0.05$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.1.1'in yaklaşık çözümleri.....	28
Şekil 4.3. $h=0.01$ için Örnek 4.1.1'in hata grafiği.....	29
Şekil 4.4. $h=0.01$ için Örnek 4.1.2 'nin ABM ve Euler çözümlerinin karşılaştırılması	31
Şekil 4.5. $h=0.01$ ve $h=0.05$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.1.2'nin yaklaşık çözümleri	32
Şekil 4.6. $h=0.01$ için Örnek 4.1.2 'nin ABM ve tam çözümlerinin karşılaştırılması.	33
Şekil 4.7. $h=0.01$ için Örnek 4.1.2'nin hata grafiği.....	33
Şekil 4.8. $\alpha = 2$ ve $h = 0.05$ için Örnek 4.2.1'in ABM yöntemi ile yaklaşık ve tam çözümleri	33
Şekil 4.9. $\alpha = 1.25$ ve $h=0.05$ için Örnek 4.2.1'in ABM yöntemi ile yaklaşık ve tam çözümleri.....	38
Şekil 4.10. $\alpha = 2$ ve $h=0.05$ için Örnek 4.2.1 'nin hata grafiği.....	38
Şekil 4.11. $\alpha = 1.25$ ve $\alpha = 2$ için Örnek 4.2.1 'nin ABM ile yaklaşık çözümleri	38
Şekil 4.12. $\alpha = 0.66$ ve $h=0.1$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.2.2'nin yaklaşık çözümleri.....	41
Şekil 4.13. $\alpha = 1.25$ ve $h=0.1$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.2.2'nin yaklaşık çözümleri.....	41
Şekil 4.14. $\alpha = 0.66$ ve $\alpha = 2$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.2.2'nin yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	41
Şekil 4.15. $\alpha = 0.2$, $\tau = 0.75$ ve $h = 0.1$ için Örnek 4.3.1'in Tam çözümü ve ABM yöntemiyle yaklaşık çözümleri.....	41

Şekil 4.16. $\alpha = 0.2$, $\tau = 1$ ve $h = 0.1$ için Örnek 4.3.1'in Tam çözümü ve ABM yöntemiyle yaklaşık çözümleri.....	41
Şekil 4.17. $\tau = 0.75$ ve $\tau = 1$ için Örnek 4.3.1'nin ABM yöntemiyle yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	49
Şekil 4.18. α 'nın farklı değerleri için Örnek 4.3.2'nin SF yöntemi ile yaklaşık çözümleri	50
Şekil 4.19. $\alpha = 0.65$ için Örnek 4.3.2'nin ABM ve SF yöntemi ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	49
Şekil 4.20. α 'nın farklı değerleri için Örnek 4.3.2'nin ABM yöntemi ile yaklaşık çözümleri	51
Şekil 4.21. $\alpha = 0.15$, $\alpha = 0.35$ ve $\alpha = 0.65$ için Örnek 4.3.2 'nin SF yöntemi ile yaklaşık çözümleri.....	54
Şekil 4.22. $\alpha = 0.75$ için Örnek 4.3.4'in ABM yöntemi ile yaklaşık çözümü.....	57
Şekil 4.23. $\alpha = 0.50$, $\alpha = 0.75$ ve $\alpha = 1$ için Örnek 4.3.4 'in ABM yöntemi ile yaklaşık çözümleri.....	58

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\Gamma(x)$	Gama Fonksiyonu
$B(x, y)$	Beta Fonksiyonu
$D_t^\alpha f(x)$	Riemann Liouville Kesirli Türevi
$D_*^\alpha f(x)$	Caputo Kesirli Türevi
ABM	Adams-Bashforth-Moulton Yöntemi
y_e	Tam Çözüm
SF	Sonlu Fark

1. GİRİŞ

1.1. Tarihi Gelişim

Farklı bilim dallarında ortaya çıkan problemlere ait matematiksel modellerin oluşturulması uygulamalı matematikte karşılaşılan en önemli problemlerden biri olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu çeşit problemler adi diferansiyel denklemler, kısmi türevli diferansiyel denklemler ve bu çeşit denklemlerin yetersiz kaldığı durumlarda kesirli mertebeden diferansiyel denklemler ile modellenenbilmektedirler.

Kesirli diferansiyel ve gecikmeli kesirli diferansiyel denklemler birçok farklı fiziksel olayları tanımlamada daha gerçekçi ve daha başarılı olduğundan son yıllarda birçok araştırmacı tarafından ilgi odağı haline gelmiştir. Bu tip denklemlerin analitik çözümleri denklemlerin yapısına göre değişmekle birlikte birçok modele karşı gelen denklemler analitik olarak çözülememektedir. Özellikle analitik olarak çözülemeyen denklemler için geliştirilen nümerik yöntemler bilgisayar teknolojilerinin gelişmesiyle birlikte büyük bir ivme kazanmış ve birçok araştırmacının ilgi alanı haline gelmiştir.

Kesirli türev kavramı ilk kez 1695'te Leibnitz ve L'Hopital tarafından ele alınmıştır. Liouville (1832) fonksiyonları üstel olarak seriye açmış ve q . mertebeden (q pozitif tamsayı) türevini terim terim serilerle tanımlamıştır. Riemann(1853) belirli integral içeren ve tamsayı olmayan üstel kuvvet serilerine uygulanabilen bir tanım vermiştir. Grünwald ve Krug, Liouville ve Riemann'ın sonuçlarını ilk birleştiren bilim adamlarıdır. Daha sonraları kesirli türev ve kesirli integral için birçok tanım verilmiştir. L.Euler, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Grünwald, Letnikov, Caputo tanımları bu tanımlardan bazıları olarak verilebilir. Riemann-Liouville ile Caputo anlamında kesirli türev tanımları en çok kullanılan tanımlardır. Caputo kesirli türev ve kesirli integrali başlangıç koşullarının uygunluğundan dolayı modelleme ve uygulamalarda daha sık kullanılır.

Kesirli hesaplama eski bir matematik problemidir. Yaklaşık 300 yıldır pür matematik problemi olarak düşünülmüştür. Uzun bir geçmişe sahip olmasına rağmen, fizik ve mühendislik gibi alanlar için uzun bir süre uygulama alanı bulunamamıştır. Bununla birlikte son yıllarda, kesirli hesaplama bilim adamlarının dikkatini uygulama açısından artan bir şekilde çekmeye başlamıştır. Birçok bilim adamı, sürekli zaman modellemesi alanlarında, fizik, kimya ve mühendislik alanlarında kullanmışlardır. Ayrıca, kesirli türevlerin hafıza ile ilgili modellemelerde iyi bir araç olduğu ifade edilmektedir. Son zamanlarda, bu operatörlerin matematiksel teorik ve uygulamaları ile fen ve mühendislik problemlerine uygulanabilirliği çekici konular olarak kabul edilmeye başlanmıştır.

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için gerçekleştirilen ilk yaklaşım, 1950'li yılların öncesine dayanan ve adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için kullanılan bir metodu baz alır. Bu metot Euler Yöntemi olarak adlandırılır ve bilinen en basit yaklaşımdır. Euler yönteminin yanı sıra, adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde kullanılan Trapez Yöntemi, Runge-Kutta Yöntemi, RK-4 Metodu gibi yöntemler gecikmeli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için de kullanılmıştır.

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için pek çok yazılım gerçekleştirilmiştir (Paul, 1991, 1995, 2000; Shampine & Thompson, 2000a,b). Literatür incelendiğinde pek çok algoritmaya ulaşmak mümkündür, ancak programların tümünde özel bir teknik kullanılmıştır. Bilinen tüm nümerik teknikleri içinde barındıran ve fonksiyon türüne, başlangıç koşullarına ve gecikme miktarına göre en uygun tekniği seçen bir yazılım henüz mevcut değildir.

Son yıllarda gecikmeli kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri başlangıç koşulları ile birlikte çözmek için birçok araştırmacı tarafından etkili yöntemlerin geliştirilmesine çalışılmıştır. Bunlardan bazıları homotopi pertürbasyon yöntemi, varyasyonel iterasyon metodu ve Adomian ayrışım metodu gibi nümerik iterasyon teknikleri olarak verilebilir. Bu iteratif yöntemlerin hepsi başlangıç çözümlerine ve verilen koşullara hassastır.

1.2. Problemin Tanıtılması

Günlük hayatta, her alanda karşılaştığımız problemlerin çözümü için matematiksel modelleme yapılırken, çoğunlukla diferansiyel denklemlerden yararlanılır. Bu amaçla,

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad t \geq t_0 \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

denklemi ile verilen başlangıç değer problemleri kullanılabilir. Burada bu denklem ile verilen başlangıç değer probleminde t_0 başlangıç noktası ve y_0 başlangıç değeri olarak tanımlanır. Adi Diferansiyel Denklemler kullanılarak, modelleme yapılması istenen sistemlerde mevcut gecikmeler daima göz ardı edilir, ancak sistemdeki çok küçük gecikme miktarları bile, sistemin mevcut durumda çok büyük değişiklikler görülmesine neden olabilir. Günlük hayat problemleri; adi diferansiyel denklemler, kısmi türevli diferansiyel denklemler ve bu çeşit denklemlerin yetersiz kaldığı durumlarda kesirli mertebeden diferansiyel denklemler ile modellenenbilmektedirler. Bu nedenle karşılaşılan problemlerin birçoğunun modellenmesi yapılırken, gecikmeli kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin kullanılması daha gerçekçidir. Gecikmeli kesirli mertebeden diferansiyel denklemi;

$$\begin{aligned} D_t^\alpha y(t) &= f(t, y(t), y(t - \tau)), \quad t \geq 0, \quad m - 1 < \alpha \leq m, \\ y(t) &= \varphi(t), \quad t \leq 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

şeklinde verilir. Gecikmeli kesirli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için literatür incelendiğinde pek çok algoritmaya ulaşmak mümkündür. Fakat yazılan algoritmalar her zaman her problemin çözüm fonksiyonuna en uygunu olmayabilir. Bu tez çalışmasında da (1.2) de verilen problemin başlangıç koşulu, gecikme terimi ve kesirli mertebesi dikkate alınarak farklı yöntemlerle yaklaşımlarda bulunulacaktır. Adams-Bashforth-Moulton algoritmasından faydalanılarak en uygun çözüm algoritması oluşturulacaktır. Bulunan yaklaşık sonuçlar, farklı α (kesirli mertebe) ve τ , gecikme terimi değerleri için karşılaştırılıp, tablo ve grafiklerle analiz edilecektir.

Bu amaçla, Gecikmeli kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin nümerik çözümü için, başlangıç değer problemlerinin nümerik çözümlerini elde etmekte kullanılan yöntemlerden olan Adams-Bashforth-Moulton yöntemi uygulanacaktır.

Oluşturulan predictor -corrector yöntemi ile gecikme terimi $y(t - \tau)$ ' ne sabit ve zamanla değişen durumları göz önüne alınarak yaklaşım kurabilmek amaçlanmaktadır. Gecikme teriminin sabit olma durumunda; bazı grid noktaları için gecikme terimi $y(t_n - \tau)$ doğrudan hesaplanabilir iken, bazıları için doğrudan hesaplanamamaktadır. Elde edilen sayısal denklem kapalı olduğundan, doğrudan hesaplanabilmesi için Lineer İnterpolasyon ile gecikme terimine yaklaşımda bulunularak, denklem açık hale getirilmektedir. Gecikme teriminin zamanla değişen durumunda; $\tau = \tau(t)$, gecikme terimine yaklaşımda bulunmak oldukça karmaşıktır. Lineer İnterpolasyon gecikme terimini yaklaşık olarak belirlemek için kullanılmaktadır. $\tau = \tau(t)$, zamanla değişen olduğunda grid noktası da zamanla değişmektedir. Bazı grid noktalarında yaklaşımın doğrudan hesaplanabileceği gibi, bazılarında yöntemin kapalı olmasından dolayı durumların tespiti için algoritmaya başlamadan her adımda grid noktasının özel durum içerip içermediği kontrol edilmektedir. Burada hangi grid noktalarında yöntemin açık hangilerinde kapalı olduğunun belirlenmesine ihtiyaç duyulmaktadır. Tüm bu hesaplamalar için gerekli yöntemler 3.3 'de verilecektir.

Gecikme terimine yaklaşım belirlendikten sonra kesirli mertebeden diferansiyel denklem ve gecikmeli kesirli diferansiyel denklem için çözüm algoritması oluşturulmaktadır. Kesirli mertebeden başlangıç değer problemi,

$$D_*^\alpha y(t) = f(t, y(t)), y^k(0) = y_0(k), k = 0, 1, \dots [\alpha] - 1 \quad (1.3)$$

ve gecikmeli kesirli diferansiyel denklem için çözüm algoritmaları geliştirilmiştir.

Gecikmeli kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için de Adams-Bashforth-Moulton yöntemi ile elde ettiğimiz predictor-corrector algoritması uygulanarak yaklaşık çözümler bulunmuştur.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

2.1.1. Gamma fonksiyonu

Tanım 2.1.: $\Gamma(x)$ ile gösterilen gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_x^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (2.1)$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlanır. Aynı zamanda, Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad (2.2)$$

koşulunu gerçekler. (Podlubny , I. 1999).

2.1.2. Beta fonksiyonu

Tanım 2.2: Beta fonksiyonu, $Re(x) > 0, Re(y) > 0$ olmak üzere

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1 - t)^{y-1} dt \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır. Tanım uyarınca, Beta fonksiyonu $B(x, y) = B(y, x)$ koşulunu sağladığı için simetriktr (Podlubny, I. 1999).

2.1.3. Riemann Liouville kesirli türevi

$f, [a, b]$ üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon ve $m - 1 < \alpha \leq m$ ($m \in N^+$) olmak üzere α . mertebeden Riemann Liouville kesirli türevi

$$D_t^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x - t)^{m-\alpha-1} f(t) dt \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır (Momani, Odibat, 2005).

2.1.4. Caputo kesirli türevi

$f, [a, b]$ üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon ve $m - 1 < \alpha \leq m$, $m \in N$ olmak üzere α . mertebeden Caputo kesirli türevi

$$D_*^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt \quad (2.5)$$

şeklinde verilir (Momani, Odibat, 2005).

2.1.5. Riemann-Liouville kesirli integrali

$f \in C[a, b]$ ve $p > 0$ olmak üzere,

$$aI_x^p f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (x-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (x > a) \quad (2.6)$$

ile tanımlı ifadeye p . mertebeden sol –Riemann-Liouville kesirli integrali,

$$xI_b^p f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_x^b (\tau-x)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (x < b) \quad (2.7)$$

ile tanımlı ifadeye p . mertebeden sağ–Riemann-Liouville kesirli integrali denir. (Canan Ünlü, 2014).

$m - 1 < \alpha \leq m$, $m \in Z$, $\alpha \in R$ ve J_t^α Riemann - Liouville integral operatörü olmak üzere, Caputo anlamında kesirli türeve sahip terime uygulanması

$$J_t^\alpha [D^\alpha f(t)] = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \quad (2.8)$$

şeklinde verilir. (Canan Ünlü, 2014).

2.1.6. Lagrange polinomları

Yaklaşım teorisinde kullanılan pek çok polinom türünden biri de Lagrange Polinomlarıdır. n . dereceden bir polinom için $(n + 1)$ noktadan geçen eğri uydurma işlemi olarak tanımlanabilir.

$k = 0, 1, 2, \dots, n$ değerleri için $L_{n,k}(x)$;

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} \quad (2.9)$$

şeklinde bir fonksiyondur.

Lagrange Polinomu,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n L_{n,k}(x) \cdot f(x_k)$$

şeklinde tanımlanır (John Carroll,2011).

Teorem 2.3: $x_0, x_1, \dots, x_n$ farklı değerler ve $f(x)$ fonksiyonu $(n + 1)$ noktada değeri bilinen bir fonksiyon olmak üzere ,

$$f(x_k) = P(x_k) , k = 0,1,2, \dots , n ,$$

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2, \quad \dots , \quad f(x_n) = y_n$$

olmak üzere, n . dereceden $P(x)$ polinomu mevcuttur. Bu halde $0 \leq k \leq n$ için, n . dereceden bir Lagrange polinomu,

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} \quad .$$

veya

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

olmak üzere $L_{n,k}(x)$ polinomları kullanılarak,

$$P(x) = L_{n,0} \times f(x_0) + L_{n,1} \times f(x_1) + \dots + L_{n,n} \times f(x_n)$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^n L_{n,k} \times f(x_k) \quad (2.10)$$

şeklinde verilir (John Carroll,2011).

2.1.7. Volterra - Fredholm integral denklemleri

İntegral denklemleri integralin sınırlarının değişken veya sabit olmasına göre sınıflandırılırlar. Lineer ve homojen olmasına bakılmaksızın

$$\phi(x) = \int_a^x K(x,t)U(t)dt$$

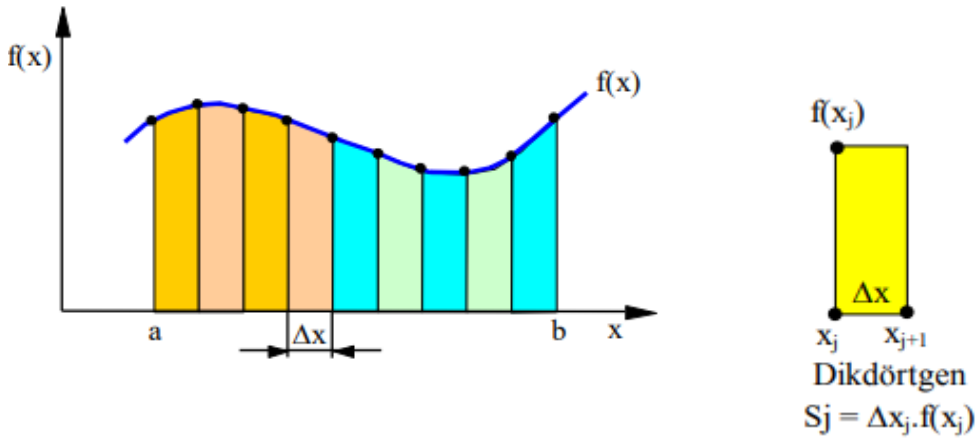
$$U(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)U(t)dt$$

şeklindeki denklemlere *Volterra İntegral* denklemi adı verilir. Bu tür denklemlerde, integral sınırlarından birinde değişken bulunmaktadır. x değişkeninin $x = b$ gibi bir sabite eşit olması halinde

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t) U(t)dt \quad (2.11)$$

şeklindeki denkleme ise *Fredholm İntegral* denklemleri denir, (Nasıykat, 2010)

2.1.8. Dikdörtgenler Yöntemi ile sayısal integrasyon



Şekil 2.1. $f(x)$ fonksiyonun dikdörtgenler yardımıyla sayısal integrasyonu

Bir nokta yaklaşımında veya dikdörtgenler yönteminde, Şekil 2.1'den de görüleceği gibi, $x = a$ için $f(a)$ noktasından x eksenine paralel doğru çizilerek birinci dikdörtgen dilim elde edilir.

$x = a + x$ için $f(a + x)$ noktasından da x eksenine paralel doğru çizilerek ikinci dikdörtgensel dilim elde edilir. Bu şekilde devam edilerek her noktadan x eksenine paralel doğrular çizilir ve dikdörtgensel dilimler elde edilir. İntegralin değeri, bu dikdörtgensel dilimlerin alanlarının toplamına yaklaşık eşittir.

Dilimler farklı x genişliklerinde ise integral

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \sum_{j=1}^n \Delta x_j \cdot f(x_j) = \sum_{j=1}^n S_j \quad (2.12)$$

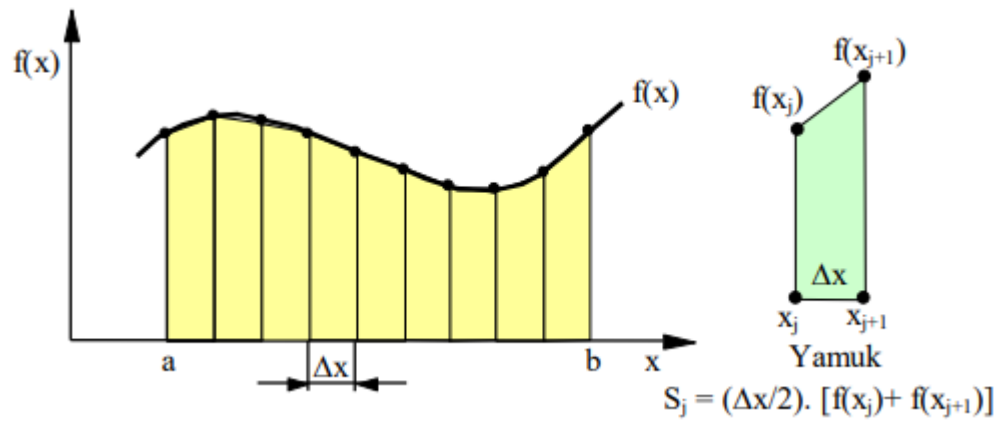
biçimini alır. Dilimler eşit x genişliklerinde ise integral

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \Delta x \cdot \sum_{j=1}^n f(x_j) \quad (2.13)$$

şeklini alır. Bu denklemde n dilim sayısı, $x = (b - a)/n$ olarak verilmiştir, (Özcan Kalenderli,2016)

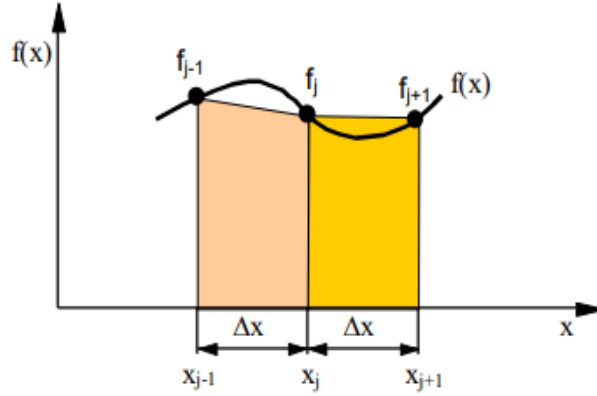
2.1.9. Yamuklar Yöntemi ile sayısal integrasyon

Yamuklar yöntemi olarak bilinen iki nokta yaklaşımında birbiri ardından gelen her iki nokta bir doğru ile birleştirilerek Şekil 2.2'deki gibi yamuk şekilli dilimler elde edilir. Böylece integral, yamukların alanlarının toplamına dönüştürülmüş olur.



Şekil 2.2. $f(x)$ fonksiyonunun Yamuklar yöntemi ile sayısal integrasyonu

Yamuğun alanı, paralel kenarlarının uzunluklarının toplamının bu iki kenar arasındaki uzaklığın yarısı ile çarpımına eşittir. Şekil 2.3 'te, yamuk yöntemi integrasyon bağıntısını elde etmek için Şekil 2.2 'ten iki dilim ayrı olarak yeniden verilmiştir.



Şekil 2.3. $f(x)$ fonksiyonun Yamuklar yöntemi ile sayısal integrasyonundan bir kesit

Şekil 2.3'te her bir dilim için

$$\begin{aligned}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx &\cong \frac{\Delta x}{2}(f_{j-1} + f_j) \\ \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx &\cong \frac{\Delta x}{2}(f_j + f_{j+1})\end{aligned}\quad (2.14)$$

ifadeleri yazılabilir. Bu halde iki dilim için

$$\begin{aligned}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x)dx &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \\ &\cong \frac{\Delta x}{2}(f_{j-1} + f_j) + \frac{\Delta x}{2}(f_j + f_{j+1}) \\ &= \frac{\Delta x}{2}(f_{j-1} + 2f_j + f_{j+1})\end{aligned}\quad (2.15)$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlik benzer şekilde, genelleştirilirse, $f(x)$ fonksiyonunun yamuklar yöntemine göre $a \leq x \leq b$ aralığındaki sayısal integrasyonu

$$\begin{aligned}I = \int_a^b f(x)dx &\cong \frac{\Delta x}{2}[f(a) + 2f(a + \Delta x) + 2f(a + 2\Delta x) + \dots \\ &\quad + 2f(a + (n-1)\Delta x) + f(b)]\end{aligned}\quad (2.16)$$

veya

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \frac{\Delta x}{2}[f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(a + j\Delta x)] \quad (2.17)$$

şeklinde verilir, (Özcan Kalenderli,2016).

Burada n dilim sayısıdır ve genişliği ise

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

dir.

2.1.10. Euler yöntemi

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t))$$

$$y(t_0) = y_0, t \geq t_0$$

diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümünü bulmak amacıyla Taylor Teoremi kullanılarak nümerik sonuçlar için, Euler Yöntemi geliştirilmiştir. Bu amaçla f fonksiyonun Taylor açılımındaki türevleri,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

şeklindedir. Türevlere fark yaklaşımları yapılarak

$$f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) - \frac{hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(\xi_x, h)}{h} = -\frac{1}{2}hf''(\xi_x, h),$$

$$f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{1}{2}hf''(\xi_x, h) = O(h). \quad (2.18)$$

ifadeleri elde edilir. Bu şekilde elde edilen yaklaşımlar (1.1) denkleminde yerine yazılarak

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = f(t, y(t)) + \frac{1}{2}hy''(t_h),$$

(1.1) denklemi ile verilen başlangıç değer problemlerinin yaklaşık çözümü ,

$$y(t+h) = y(t) + hf(t, y(t)) + \frac{1}{2}h^2y''(t_h) \quad (2.19)$$

elde edilir. Burada, $t_n = t_0 + nh$ ve y_0 başlangıç değeri olmak üzere,

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n). \quad (2.20)$$

şeklinde Euler Yöntemi tanımlanır, (Butcher, John C. , 2003).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Adi Diferansiyel Denklemler İçin Tek Adım Adams-Bashforth-Moulton Yöntemi İle Predictor-Corrector Yaklaşımı

Bir boyutlu Adi diferansiyel denklem

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \quad , \quad y(0) = y_0 \quad (3.1)$$

başlangıç koşulu ile tanımlanmış olsun. Burada, $t \in [0, T]$, $t_j = jh$, $j = 0, 1, \dots, N$, $h = \frac{T}{N}$, $y_j = y(t_j)$, $j = 1, \dots, n$ olmak üzere,

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t))$$

denklemini t_n 'den t_{n+1} 'e integre edilirse,

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} dy = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \quad (3.2)$$

ifadesi elde edilir.(3.2) denkleminin sağ tarafındaki integrale Trapezoidal Quadrature yöntemi ile yaklaşımda bulunalım. Bu halde sağ taraftaki integral için

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt = \frac{h}{2} [f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))]$$

yaklaşım yapılırsa,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})] \quad (3.3)$$

ifadesi elde edilir.(3.3) iterasyonu sağ taraftaki y_{n+1} nedeniyle kapalı formda bir denklemdir. Bu terime Euler metodu veya herhangi bir açık yöntem ile

$$y_{n+1}^p = y_n + hf(t_n, y_n) \quad (3.4)$$

olacak şekilde bir yaklaşım yapılsın. Bu halde (3.3) 'de verilen Adams- Bashforth - Moulton yönteminde yaklaşım

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}^p)] \quad (3.5)$$

biçimini alır.

Diğer bir deyişle (3.4) ifadesi

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n))] \quad (3.6)$$

şeklinde yazılır. (3.4) ile verilen ifade yöntemimiz için öngörme, (3.5) için verilen ifade ise düzeltme olarak adlandırılır. Bu yaklaşımlar, kesirli mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemler için genişletilmiştir, (Zhen Wang, 2013).

3.2. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler İçin Adams-Bashforth-Moulton Yöntemi

$$D_*^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad \alpha > 0 \quad (3.7)$$

kesirli diferansiyel denklemi ,

$$y^{(k)}(0) = y_0^{(k)} \quad k = 0, 1, \dots, [\alpha] - 1 \quad (3.8)$$

başlangıç koşulu ile birlikte verilmiş olsun. D_*^α , Caputo anlamında diferansiyel operatör, $J^{n-\alpha}$, $n - \alpha$. dereceden Riemann-Liouville İntegral operatörü olmak üzere,

$$D_*^\alpha z(t) = J^{n-\alpha} D^n z(t) , \quad (3.9)$$

özelliliği gerçekleşir. Burada $n = [\alpha]$, yani α 'dan büyük en küçük tamsayıdır. D^n , n. mertebeden klasik (adi) diferansiyel operatörüdür. $\mu > 0$ olmak üzere J^μ , μ . dereceden Riemann – Liouville integral operatörü,

$$J^\mu z(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^t (t - u)^{\mu-1} z(u) du \quad (3.10)$$

şeklinde tanımlanır (Z. Dahmani, F. Ahmad, M. Sarıkaya, M. Kırıs, 2014).

Buradaki yaklaşım sürekli bir fonksiyonun (3.7) ile verilen başlangıç değer probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul (3.10) ile verilen denklemin de bir çözümü olması anlamında (3.7) denkleminin (3.10) ifadesine denk olmasına dayanır.

(3.7) denklemi ile verilen başlangıç değer probleminin çözümü, Volterra İntegral denklemine

$$y(t) = \sum_{v=0}^{[\alpha]-1} y_0^{(v)} \frac{t^v}{v!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u, y(u)) du \quad (3.11)$$

eşdeğerdir, (N. J. Ford, A. D. Freed, K. Diethelm, 2001).

Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılacak yaklaşımı belirtirken, önce birinci dereceden denklemler için klasik tek adımlı Adams - Bashforth – Moulton algoritmasını oluşturalım;

$$\begin{aligned} Dy(t) &= f(t, y(t)), \\ y(0) &= y_0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

f fonksiyonunun $[0, T]$ aralığında tek bir çözümü olduğu varsayalım.

(3.1) 'de Adi Diferansiyel Denklemlerin tek adım Adams-Bashforth- Moulton ile çözümü için predictor- corrector yaklaşımına benzer şekilde kesirli diferansiyel denklem için de tekrar edilebilir.

$\{ t_j = jh : j = 0, 1, \dots, N \}$ N tamsayı ve $h = \frac{T}{N}$, $y_i \approx y(t_j)$ ($j = 1, 2, \dots, k$)

olmak üzere, (4.2) denklemine benzer olarak;

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(z, y(z)) dz \quad (3.13)$$

(3.12) denkleminin $[t_{k+1}, t_k]$ aralığında integrali alınarak (3.13) ifadesi elde edilir.

(3.12) denkleminin sağ tarafına, Trapezoidal Quadrature formülü uygulanırsa,

$$\int_a^b g(z) dz \approx \frac{b-a}{2} (g(a) + g(b)) \quad (3.14)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})] \quad (3.15)$$

(3.15) denklemi elde edilir ve bu tek adımlı Adams-Moulton metodunun kapalı formudur. Burada (3.1) ile verilen y_{k+1}^p , ön yaklaşımı,

$$y_{k+1}^p = y_k + hf(t_k, y_k) \quad (3.16)$$

yerine konursa,

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}^p)] \quad (3.17)$$

yaklaşımı elde edilir.

Predictor-Corrector Algoritması

-
- | | |
|---------|--|
| Adım 1. | j, h, k, m, α, N değerleri girilir. |
| Adım 2. | Predictor değeri (3.16) denklemi ile hesaplanır. |
| Adım 3. | $f(t_{k+1}, y_{k+1}^p)$ sayısal değeri hesaplanır. |
| Adım 4. | Corrector değeri (3.17) denklemi ile hesaplanır. |
| Adım 5. | $f(t_{k+1}, y_{k+1})$ sayısal değeri hesaplanır. |
-

şeklinde verilir. Bulunan sonuç, sonraki integrasyon adımında kullanılmak üzere depolanır. Adi diferansiyel denklemler için oluşturulan şema bazı değişiklikler ile Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için de oluşturulur. Kesirli mertebeden diferansiyel denklemi,

$$D_*^\alpha y(t) = f(t, y(t))$$

şeklinde verilmiş olsun. Yukarıda verilen kesirli mertebeden diferansiyel denklemi integre edilirse (3.11) uyarınca,

$$y(t) = \sum_{v=0}^{[\alpha]-1} y_0^{(v)} \frac{t^v}{v!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u, y(u)) du$$

ifadesi elde edilir. Denklemin sağ tarafındaki integrale, t_j ($j = 0, 1, \dots, k+1$) ; ağırlık fonksiyonuna göre $(t_{k+1} - z)^{\alpha-1}$ için product trapezoidal quadrature formülünü uyarınca,

$$\int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} g(z) dz \approx \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(z) dz \quad (3.18)$$

yaklaşım yapılsın. Burada

$$\int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(z) dz = \sum_{j=0}^{k+1} a_{j,k+1} g(t_j) \quad (3.19)$$

ve

$$a_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} \times \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha, & j = 0 \\ ((k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1}), & 1 \leq j \leq k \\ 1, & j = k+1 \end{cases} \quad (3.20)$$

şeklinde elde edilir (K. Diethelm, N. J. Ford, A. D. Freed, 2001).

Yukarıda elde edilen (3.18), (3.19), (3.20) denklemleri, (3.11) denkleminde yerine konursa,

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{[\alpha]-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{j=0}^{k+1} a_{j,k+1} f(t_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, y_{k+1}^p) \right) \quad (3.21)$$

kesirli mertebeden tek adım Adams- Moulton yöntemi için corrector formülü elde edilir (K. Diethelm, N. J. Ford, A. D. Freed, 2004). Yöntem açık olmadığından, denklemin sağ tarafındaki y_{k+1}^p terimi, Predictor formülü ile hesaplanır. Bu amaçla, (3.11) denkleminin sağ tarafındaki integral için product rectangle kuralı uygulanırsa,

$$\int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} g(z) dz = \sum_{j=0}^{k+1} b_{j,k+1} g(t_j) \quad (3.22)$$

$$b_{j,k+1} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} dz = \frac{(t_{k+1} - t_j)^\alpha - (t_{k+1} - t_{j+1})^\alpha}{\alpha}$$

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha) \quad (3.23)$$

(3.21) denklemindeki y_{k+1}^p değeri, kesirli Adams- Bashforth metodu ile ,

$$y_{k+1}^p = \sum_{j=0}^{[\alpha]-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{j=0}^{k+1} b_{j,k+1} f(t_j, y_j) \right) \quad (3.24)$$

elde edilir, (K. Diethelm, N. J. Ford, A. D. Freed, 2004).

Böylece (3.23) ve (3.26) eşitlikleri birlikte göz önünde bulundurularak kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünü veren tek adımlı kesirli Adams-Bashforth-Moulton metodu elde edilir.

3.3. Gecikmeli ve Gecikmeli Kesirli Diferansiyel Denklemler için Adams-Bashforth-Moulton Yöntemi

3.3.1. Gecikmeli Diferansiyel Denklemler için Adams-Bashforth-Moulton Yöntemi

Gecikmeli kesirli diferansiyel denklemi

$$D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)), \quad t \geq 0, \quad m - 1 < \alpha \leq m, \quad (3.27)$$

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \leq 0$$

başlangıç koşulları ile verilmiş olsun. (3.27) gecikmeli kesirli diferansiyel denklemindeki $y(t - \tau)$ gecikme terimi, τ 'nın sabit ve zamanla değişen olma durumları olmak üzere, 2 farklı durum için incelenmektedir.

Durum 1: (τ sabit)

Herhangi bir z değeri için t_{i-z} bir t_n grid noktası olmayabilir. Örneğin,

$$(m - \delta)h = \tau, \quad 0 \leq \delta < 1$$

olsun. Bu halde, $\delta = 0$ iken, $y(t_n - \tau)$ terimine,

$$\delta = 0 \Rightarrow (m - 0).h = \tau$$

$$mh = \tau$$

olur. Yani, $y(t_n - \tau) = y(t_n - mh)$ gerçekleşir. Bu halde $y(t_n - z)$ terimine

$$y(t_n - \tau) = \begin{cases} y_{n-m}, & n > m \\ \varphi_n, & n \leq m \end{cases} \quad (3.28)$$

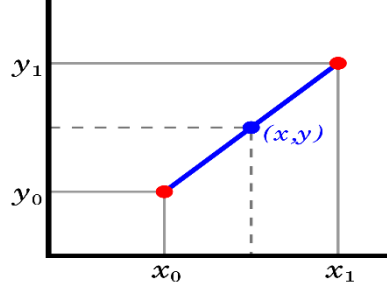
şeklinde yaklaşılabilir.

$0 < \delta < 1$ iken, $y(t_n - \tau)$ doğrudan hesaplanamaz. Burada önemli olan ve dikkate alınması gereken husus gecikme teriminin istenilen aralık içerisinde bir grid noktasına karşılık geliyor olmasıdır. Karşılık gelmiyor olması da o grid noktası için y değerini hesaplayamadığımız anlamına gelmektedir.

$(m-1)h < z < mh$ olmak üzere, $V_{n+1}, y(t_{n+1} - z)$ için

$$V_{n+1} = \delta y_{n-m+2} + (1 - \delta)y_{n-m+1} \quad (3.29)$$

koşulunu gerçekleyen bir yaklaşım olsun. Burada, V_{n+1} yaklaşımı; $y(t_{n+1} - \tau)$ en yakın iki nokta ile İnterpolasyon ile oluşturulmaktadır.



$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$y = y_0 + (x - x_0) \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

İki nokta interpolasyonu kullanılarak, $(m-2)$ ve $(m-1)$ noktaları ile yaklaşık olarak lineer İnterpolasyon,

$$y(t_{n+1} - \tau) = y_{n-(m-1)} + \delta(y_{n-(m-2)} - y_{n-(m-1)})$$

$$= \delta y_{n-(m-2)} + y_{n-(m-1)} - \delta y_{n-(m-1)}$$

$$y(t_{n+1} - \tau) = \delta y_{n-(m-2)} + (1 - \delta)y_{n-(m-1)}$$

$$V_{n+1} = \delta y_{n-m+2} + (1 - \delta)y_{n-m+1}$$

şeklinde yazılabilir. $m > 1$ ise, sayısal denklemi açık formda olduğundan, doğrudan hesaplanabilmektedir, (Zhen Wang,2013).

Durum 2: (τ zamanla değişen)

$\tau = \tau(t)$ zamanla değişen bir fonksiyon ve $V_{n+1}, y(t_{n+1} - \tau)$ 'e bir yaklaşım ve

$$\tau(t_{n+1}) = (m_{n+1} - \delta_{n+1})h, \quad m_{n+1} \in \mathbb{Z}^+, \quad \delta_{n+1} \in [0,1).$$

olsun. Bu halde,

$(m_{n+1} - 2, m_{n+1} - 1)$ noktaları için

$$\begin{aligned} y(t_{n+1} - \tau(t_{n+1})) &= y_{n-(m_{n+1}-1)} + \delta_{n+1}(y_{n-(m_{n+1}-2)} - y_{n-(m_{n+1}-1)}) \\ &= y_{n-m_{n+1}+1} + \delta_{n+1}(y_{n-m_{n+1}+2}) - \delta_{n+1}(y_{n-m_{n+1}+1}) \\ &= \delta_{n+1}(y_{n-m_{n+1}+2}) + (1 - \delta_{n+1})(y_{n-m_{n+1}+1}) \\ V_{n+1} &= \delta_{n+1}(y_{n-m_{n+1}+2}) + (1 - \delta_{n+1})(y_{n-m_{n+1}+1}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

ifadeleri elde edilir.

$m = 1$ ve $\delta \neq 0$ olduğunda (3.29) denkleminin sağ tarafındaki ilk terim de δy_{n+1} olacağından, denklem kapalı formda olur. Bu terim (3.4) ile verilen predictor yardımıyla elde edilecektir. τ sabit ve zamanla değişen parametre iken yaklaşım algoritmaları ,

τ sabit iken:

$$m = 2;$$

$$V_{n+1} = \delta y_n + (1 - \delta)y_{n-1}$$

$$m = 1;$$

$$V_{n+1} = \delta y_{n+1} + (1 - \delta)y_n$$

$$m = 0;$$

$$V_{n+1} = \delta y_{n+2} + (1 - \delta)y_{n+1}$$

$\tau = \tau(t)$ iken:

$$m_{n+1} = 2;$$

$$V_{n+1} = \delta_{n+1}y_n + (1 - \delta_{n+1})y_{n-1}$$

$$m_{n+1} = 1;$$

$$V_{n+1} = \delta_{n+1}y_{n+1} + (1 - \delta_{n+1})y_n$$

$$m_{n+1} = 0;$$

$$V_{n+1} = \delta_{n+1}y_{n+2} + (1 - \delta_{n+1})y_{n+1}$$

şeklinde verilir. $m = 0$ ve $m = 1$ durumlarında τ 'nın her iki durumu için de denklem kapalıdır. Bu durumda τ sabit iken; $m > 1$ ve τ zamanla değişen iken; $m_{n+1} > 1$ olup olmadığı, algoritmaya başlamadan önce m değerinin kontrol edilmesi gerekmektedir.

3.3.2. Gecikmeli Kesirli Diferansiyel Denklemler için Adams-Bashforth-Moulton Yöntemi

Gecikmeli kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için gecikmeli diferansiyel denklemlerin ve kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözüm algoritmaları oluşturulmuştur. Bu amaçla Adams- Bashforth-Moulton yöntemi kullanılmıştır. (1.2) ile verilen, Gecikmeli kesirli mertebeden başlangıç değer problemi için predictor-corrector şeması ile oluşturulan algoritma,

$$y_{n+1} = \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_k \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} f(t_{n+1}, y_{n+1}^p, v_{n+1}) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, y_j, v_j) , \quad (3.31)$$

$$v_{n+1} = \begin{cases} \delta y_{n-m+2} + (1 - \delta) y_{n-m+1} , & m > 1 \\ \delta y_{n+1}^p + (1 - \delta) y_n , & m = 1 \end{cases} ,$$

$$y_{n+1}^p = \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_k \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_j, v_j) \right)$$

$$b_{j,n+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((n - j + 1)^\alpha - (n - j)^\alpha)$$

$$a_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} \times$$

$$\begin{cases} n^{\alpha+1} - (n - \alpha)(n + 1)^\alpha , & j = 0 \\ ((n - j + 2)^{\alpha+1} + (n - j)^{\alpha+1} - 2(n - j + 1)^{\alpha+1}) , & 1 \leq j \leq n \\ 1 , & j = n + 1 \end{cases} \quad (3.32)$$

verilir , (Zhen Wang, 2013).

3.4. ÇÖZÜMÜN KONTROLÜ VE HATA ANALİZİ

(1.1) ile verilen gecikmeli kesirli mertebeden diferansiyel denklemin predictor-corrector yöntemi ile yaklaşık çözümü (3.31) ile verilmektedir. Bu durumda (3.31) ile verilen yaklaşık çözüm (1.1) denklemini yaklaşık olarak sağlamalıdır. Bu halde $\forall t = t_i, i = 0, 1, 2, \dots, N$ için

$$E(t_i) = |D_t^\alpha y(t_i) - f(t, y(t_i), y(t_i - \tau))| \cong 0$$

şeklindedir veya,

$$E(t_i) \leq 10^{-k_i} (k_i, herhangi bir pozitif tamsayı)$$

olmalıdır. Eğer maksimum $10^{-k_i} = 10^{-k}$ (k , herhangi bir pozitif tamsayı) önceden belirlenirse N nokta sayısı t_i noktalarının her birindeki $E(t_i)$ değeri alınan 10^{-k} 'dan küçük oluncaya kadar arttırılır. Diğer taraftan hata fonksiyonu (1.1) denklemini için,

$$E(t) = D_t^\alpha y(t) - f(t, y(t), y(t - \tau))$$

şeklinde ifade edilir. Eğer bu fonksiyonun grafiği n nokta sayısı artarken t eksenine yaklaşıyorsa çözümün hatası asimptotik olarak sıfıra yaklaşıyor demektir.

4. BULGULAR VE İRDELEME

Bu bölümde; kesirli mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemlere farklı α ve τ değerleri için yukarıda verilen yöntemler uygulanmıştır. Farklı değerler için elde edilen sonuçlar tablolar ve grafikler ile analiz edilmiştir. Ayrıca bu sonuçlardan faydalanılarak yöntemin kullanışlılığı ve tutarlılığı incelenmiştir. Çözüm algoritmalarında Maple ve Matlab programları kullanılmıştır.

4.1. Adi Diferansiyel Denklemlerin tek adım Adams-Bashforth-Moulton Yöntemi ile Uygulamaları

Örnek 4.1.1. (James F. Epperson, 2013)

Başlangıç değer problemi,

$$y' = -y + \sin t, \quad y(0) = 1.$$

şeklinde verilmiş olsun. Bu problemin tam çözümü,

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)$$

şeklindedir. Denklemin $t_n = t_0 + nh$ olmak üzere $h = \frac{1}{4}$ ve $\frac{1}{8}$ gibi değerleri için Euler ve tek adım Adams - Bashforth- Moulton yöntemiyle nümerik çözümlerini araştıralım.

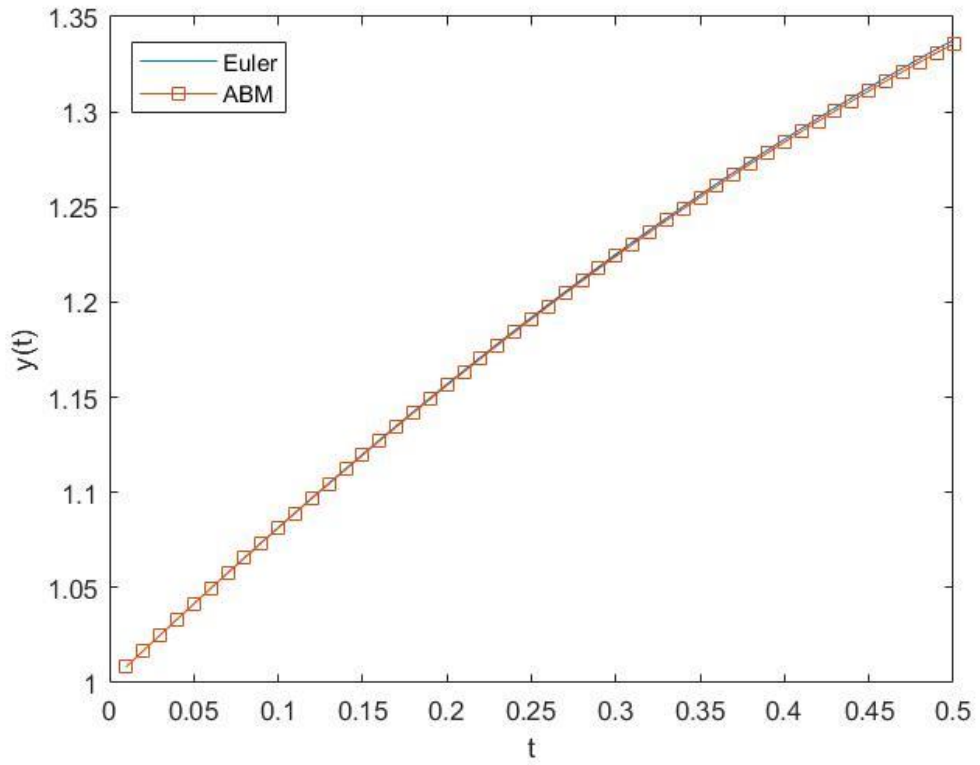
Tek adım Adams – Bashforth – Moulton yöntem algoritması;

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n)))$$

şeklinde verilir.

Çizelge 4.1: $h=0.01$ için Örnek 4.1.1 'in ABM ve Euler çözümlerinin karşılaştırılması

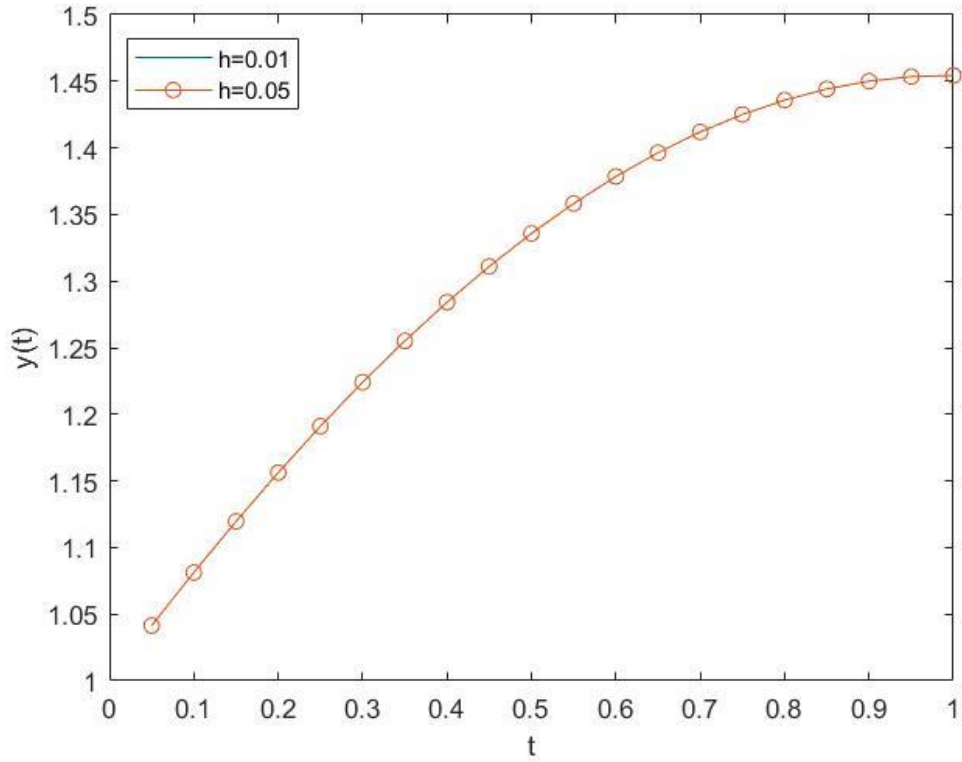
t	$Euler$	ABM
0.01	1.0084147	1.0083873
0.02	1.0167746	1.0167192
0.03	1.0250787	1.0249947
0.04	1.0333263	1.0332131
0.05	1.0415164	1.0413734
0.06	1.0496481	1.0494748
0.07	1.0577205	1.0575164
0.08	1.0657329	1.0654973
0.09	1.0736844	1.0734167
0.10	1.0815740	1.0812737



Şekil 4.1: $h=0.01$ için Örnek 4.1.1 'in ABM ve Euler çözümlerinin karşılaştırılması

Çizelge 4.2: $h=0.01$ ve $h=0.05$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.1.1'in yaklaşık çözümleri

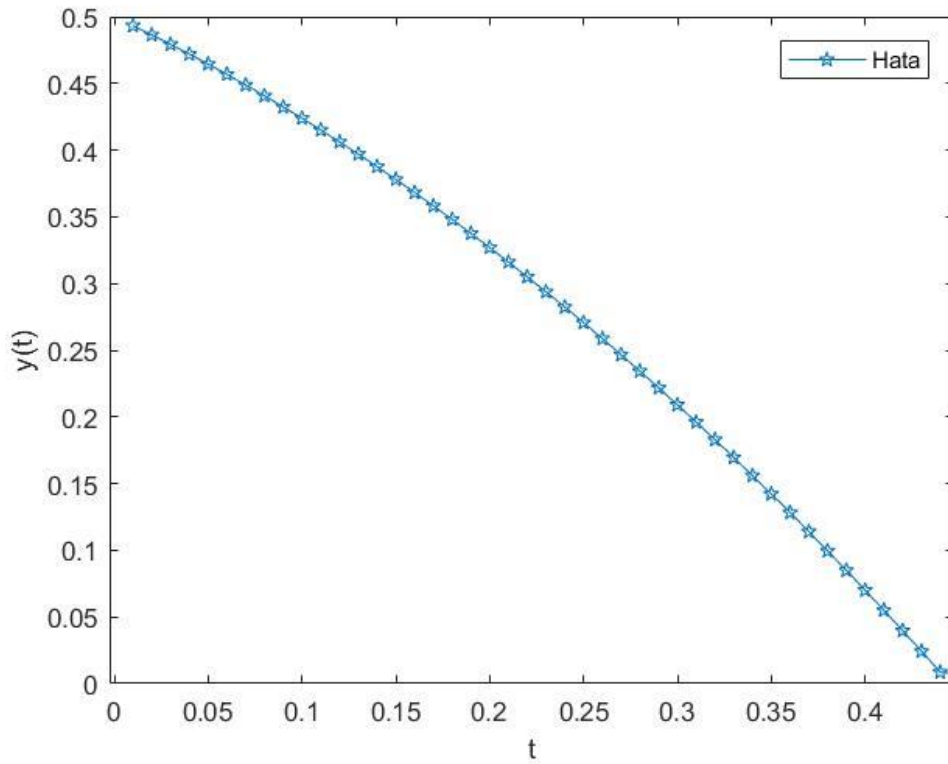
t	$h = 0.01$	$h = 0.05$
0.05	1.0413734	1.0413731
0.10	1.0812737	1.0812733
0.15	1.1195943	1.1195941
0.20	1.1562328	1.1562332
0.25	1.1910922	1.1910932
0.30	1.2240810	1.2240830
0.35	1.2551145	1.2551177
0.40	1.2841148	1.2841193
0.45	1.3110110	1.3110170
0.50	1.3357394	1.3357471



Şekil 4.2: $h=0.01$, 0.05 için ABM yöntemiyle Örnek 4.1.1'in yaklaşık çözümleri

Çizelge 4.3. $h = 0.01$ için Örnek 4.1.1'in ABM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması

t	ABM	$y_e \rightarrow tam\text{çözüm}$	$Error$ $ y_e - ABM $
0.40	1.2841148	1.2140877	0.0700272
0.41	1.2896645	1.2346911	0.0549734
0.42	1.2951295	1.2554192	0.0397103
0.43	1.3005092	1.2762712	0.0242380
0.44	1.3058032	1.2972464	0.0085569
0.45	1.3110110	1.3183439	0.0073329
0.46	1.3161320	1.3395630	0.0234310
0.47	1.3211658	1.3609029	0.0397371
0.48	1.3261120	1.3823628	0.0562508
0.49	1.3309700	1.4039419	0.0729719
0.50	1.3357394	1.4256394	0.0898999



Şekil 4.3. $h = 0.01$ için Örnek 4.1.1'in hata grafiği

Örnek 4.1.2. (James F. Epperson, 2013)

Başlangıç değer problemi,

$$y' = y - t^2 + 1, \quad y(0) = 0.5$$

şeklinde verilmiş olsun. Bu problemin tam çözümü,

$$y(t) = t^2 + 2t + 1 - \frac{e^t}{2}$$

şeklindedir. Denklemin $t_n = t_0 + nh$ olmak üzere $h = 0.01, 0.05$ değerleri için Euler ve tek adım Adams-Bashforth-Moulton yöntemiyle nümerik çözümlerini araştıralım.

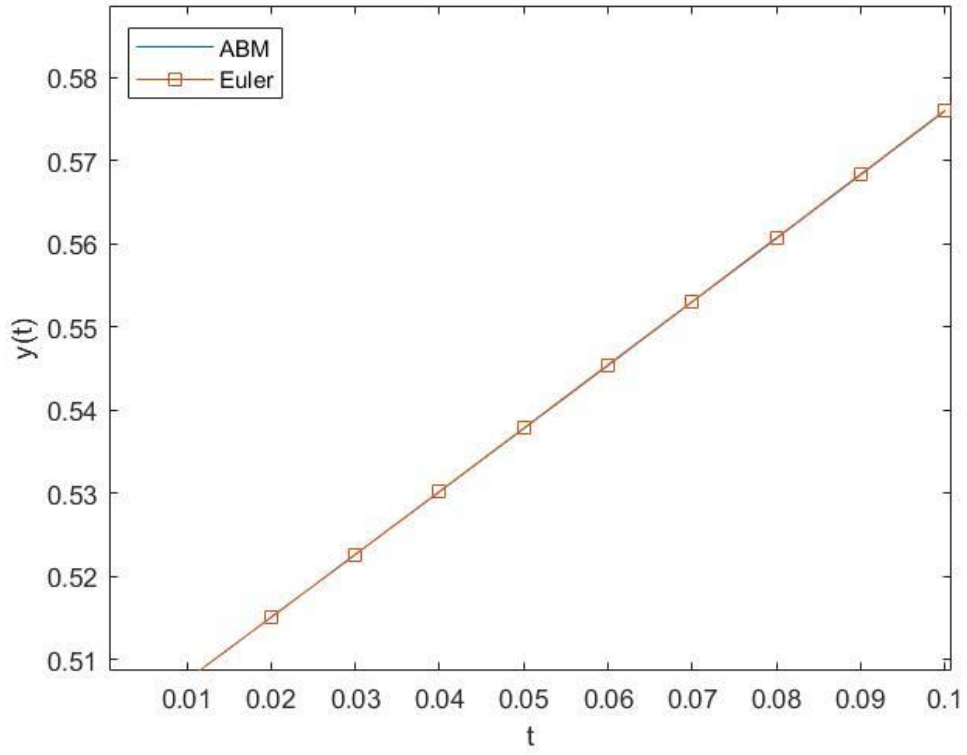
Tek adım Adams – Bashforth – Moulton yöntem algoritması;

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n)))$$

şeklinde verilir.

Çizelge 4.4: $h=0.01$ için Örnek 4.1.2 'nin ABM ve Euler çözümlerinin karşılaştırılması

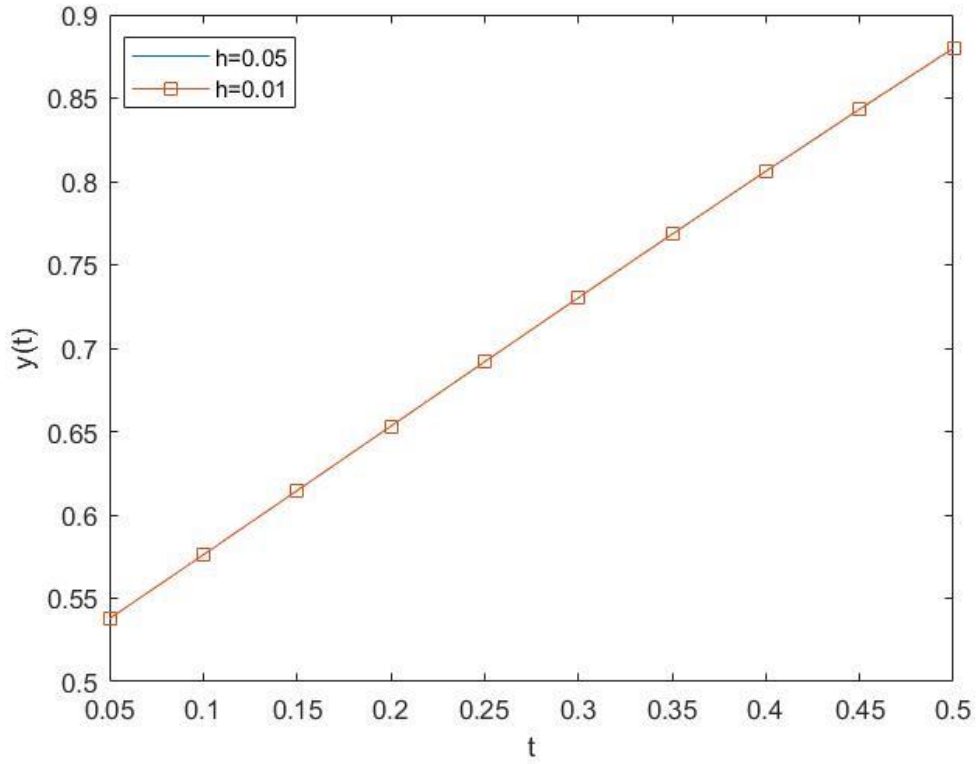
t	$Euler$	ABM
0.01	0.5075000	0.5075122
0.02	0.5150244	0.5150481
0.03	0.5225719	0.5226062
0.04	0.5301411	0.5301851
0.05	0.5377306	0.5377837
0.06	0.5453391	0.5454003
0.07	0.5529651	0.5530338
0.08	0.5606074	0.5606828
0.09	0.5682646	0.5683460
0.10	0.5759354	0.5760219



Şekil 4.4: $h=0.01$ için Örnek 4.1.2 'nin ABM ve Euler çözümlerinin karşılaştırılması

Çizelge 4.5: $h=0.01$ ve $h=0.05$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.1.2'nin yaklaşık çözümleri

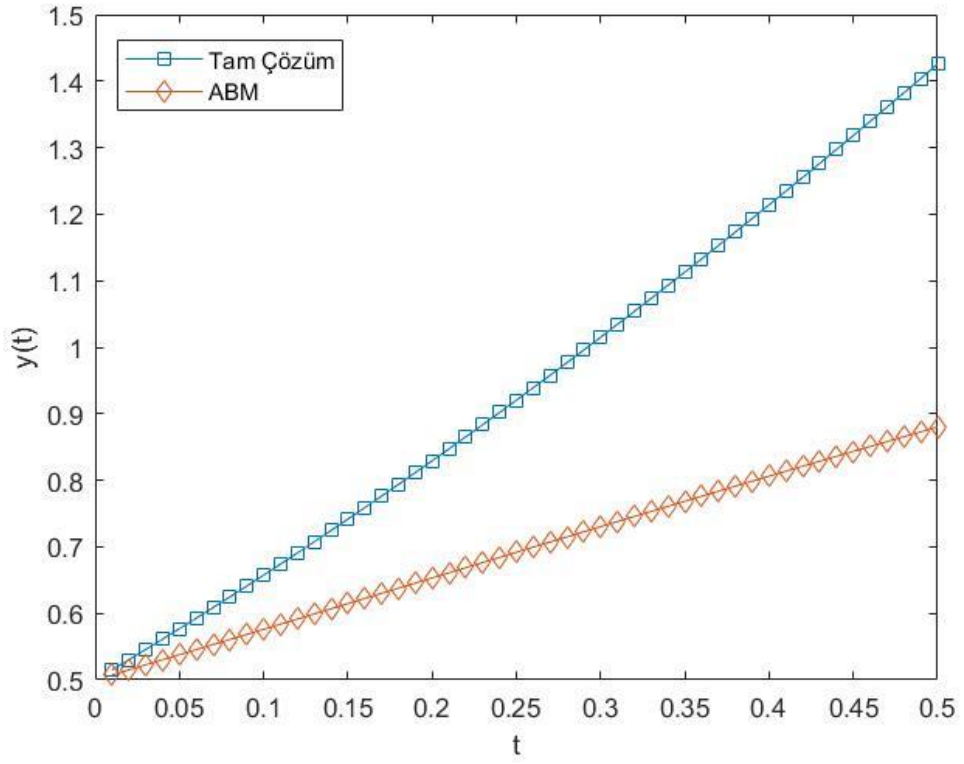
t	$h = 0.01$	$h = 0.05$
0.05	0.5377837	0.5377773
0.10	0.5760219	0.5760081
0.15	0.6145481	0.6145257
0.20	0.6532018	0.6531697
0.25	0.6918306	0.6917880
0.30	0.7302920	0.7302381
0.35	0.7684550	0.7683892
0.40	0.8062010	0.8061229
0.45	0.8434247	0.8433342
0.50	0.8800347	0.8799318



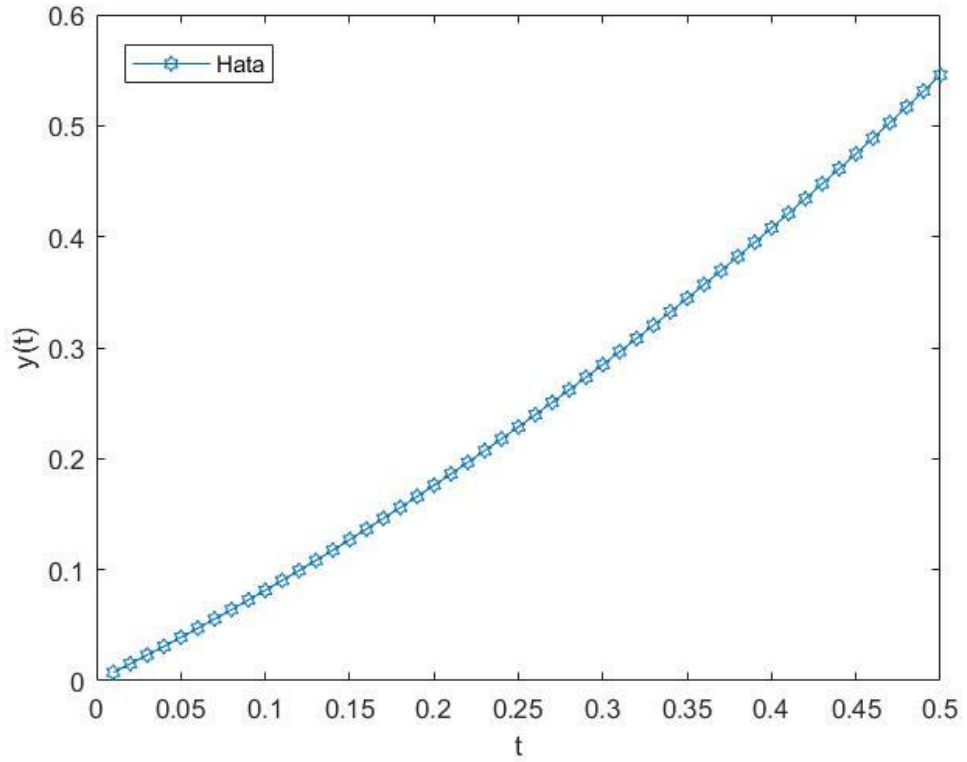
Şekil 4.5: $h=0.01$ ve $h=0.05$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.1.2'nin yaklaşık çözümleri

Çizelge 4.6: $h=0.01$ için Örnek 4.1.2 'nin ABM ve tam çözümlerinin karşılaştırılması

t	ABM	$y_e \rightarrow tam\ çözüm$	$Error$ $ y_e - ABM $
0.01	0.5075122	0.5150749	0.0075627
0.02	0.5150481	0.5302993	0.0152513
0.03	0.5226062	0.5456727	0.0230666
0.04	0.5301851	0.5611946	0.0310095
0.05	0.5377837	0.5768645	0.0390808
0.06	0.5454003	0.5926817	0.0472814
0.07	0.5530338	0.6086459	0.0556121
0.08	0.5606828	0.6247565	0.0640736
0.09	0.5683460	0.6410129	0.0726669
0.10	0.5760219	0.6574145	0.0813926



Şekil 4.6: $h=0.01$ için Örnek 4.1.2 'nin ABM ve tam çözümlerinin karşılaştırılması



Şekil 4.7: $h=0.01$ için Örnek 4.1.2 'nin hata grafiği

4.2. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Adams-Bashforth-Moulton Yöntemi ile Uygulamaları

Örnek 4.2.1: (K. Diethelm, N.J.Ford, A. D. Freed, 2001)

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemi,

$$D_*^\alpha y(t) = \frac{40320}{\Gamma(9-\alpha)} t^{8-\alpha} - 3 \frac{\Gamma\left(5+\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(5-\frac{\alpha}{2}\right)} t^{4-\frac{\alpha}{2}} + \frac{9}{4} \Gamma(\alpha+1) + \left(\frac{3}{2} t^{\frac{\alpha}{2}} - t^4\right)^3 - [y(t)]^{\frac{3}{2}}$$

başlangıç koşulları;

$$y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

ile verilmiş olsun. Denklemin tam çözümü,

$$y(t) = t^8 - 3t^{4+\alpha/2} + \frac{9}{4} t^\alpha$$

şeklinde. Başlangıç değer problemimiz

$t_j \{j = 0, 1, 2, \dots, N\}$, $t_j = jh$, $h = \frac{T}{N}$ ve N , bir tamsayı olmak üzere Adams-Bashforth-Moulton algoritmasını uygulayarak çözelim. $n=3$ için çözüm algoritması:

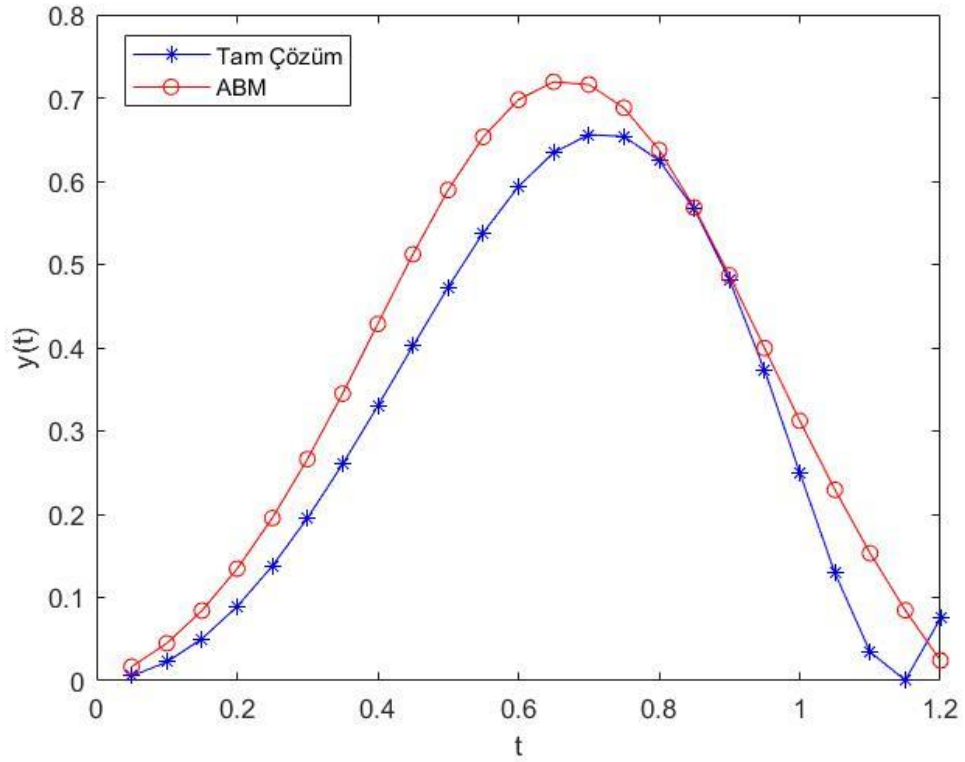
Predictor-Corrector çözüm algoritması

-
- | | |
|---------|--|
| Adım 1. | j, h, k, m, α, N değerleri girilir. |
| Adım 2. | $b_{j,k+1}$ sayısal değeri bulunur. |
| Adım 3. | y_{k+1}^p sayısal değeri bulunur. |
| Adım 4. | $a_{j,k+1}$ sayısal değeri bulunur. |
| Adım 5. | y_{k+1} değeri bulunur. |
-

şeklinde verilir.

Çizelge 4.7: $\alpha=2$ ve $h=0.05$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.2.1'in yaklaşık çözümleri

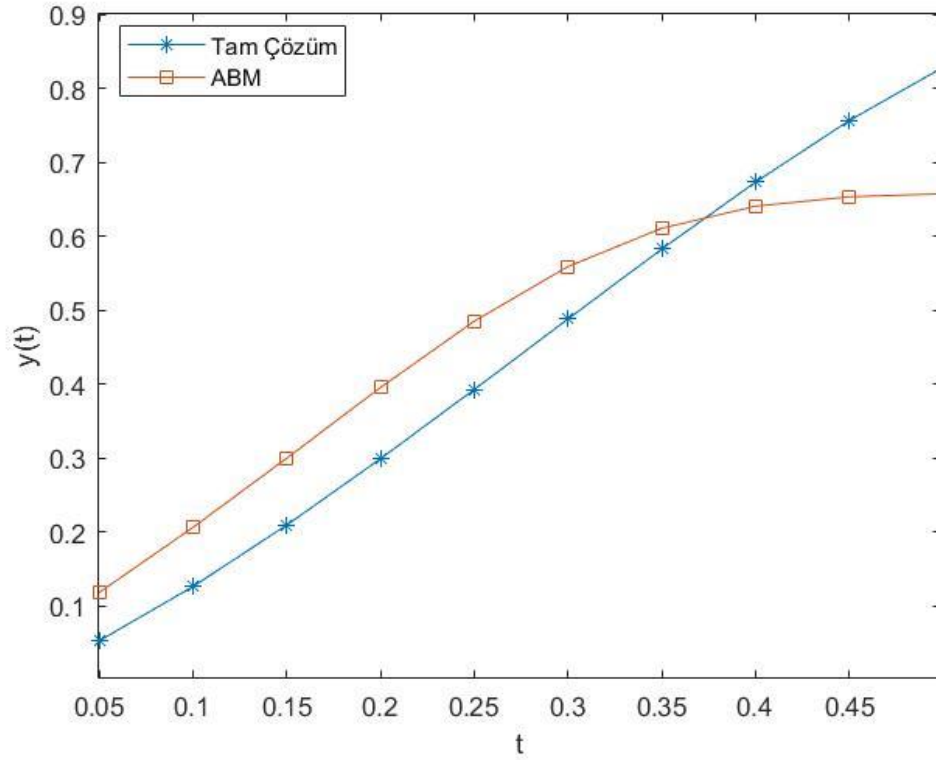
t	ABM	$y_e \rightarrow tam \text{ çözüm}$
0.05	0.0168703	0.0056241
0.10	0.0449579	0.0224700
0.15	0.0841986	0.0503974
0.20	0.1344463	0.0890426
0.25	0.1953422	0.1377106
0.30	0.2660497	0.1952756
0.35	0.3448304	0.2600936
0.40	0.4285275	0.3299354
0.45	0.5122104	0.4019481
0.50	0.5894135	0.4726562



Şekil 4.8: $\alpha=2$ ve $h=0.05$ için Örnek 4.2.1'in ABM yöntemi ile yaklaşık ve tam çözümleri

Çizelge 4.8: $\alpha=1.25$ ve $h=0.05$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.2.1'in yaklaşık çözümleri

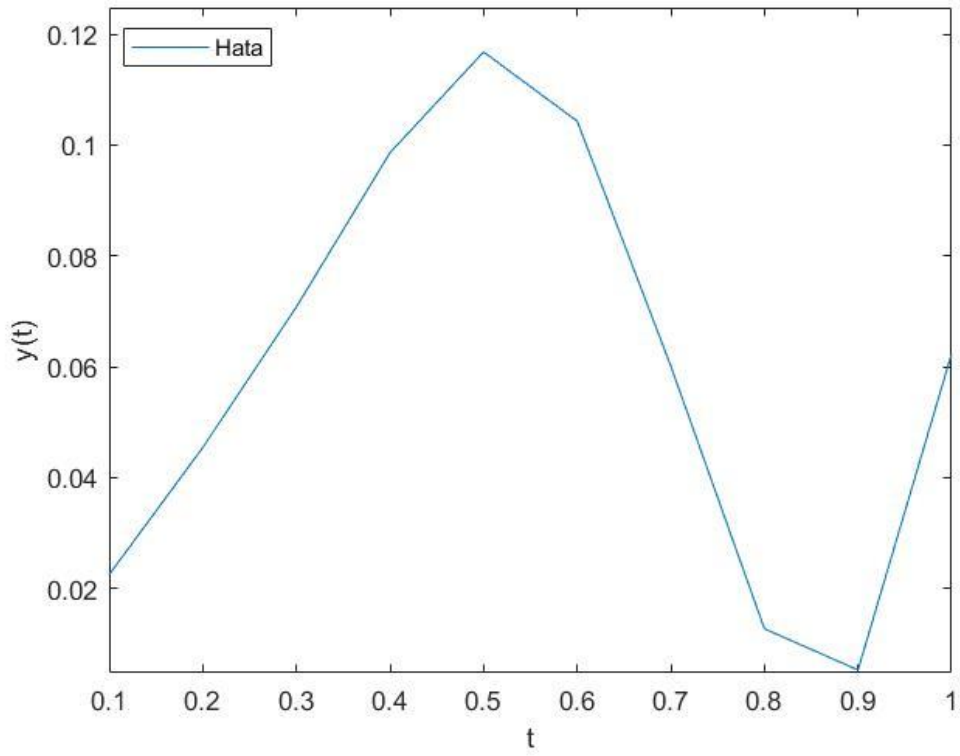
t	ABM	$y_e \rightarrow tam \text{ çözüm}$
0.05	0.1183941	0.0531951
0.10	0.2063890	0.1264557
0.15	0.2998819	0.2095736
0.20	0.3954617	0.2991803
0.25	0.4851184	0.3928357
0.30	0.5590177	0.4881715
0.35	0.6107410	0.5825811
0.40	0.6405616	0.6730830
0.45	0.6533200	0.7562715
0.50	0.6547537	0.8283360



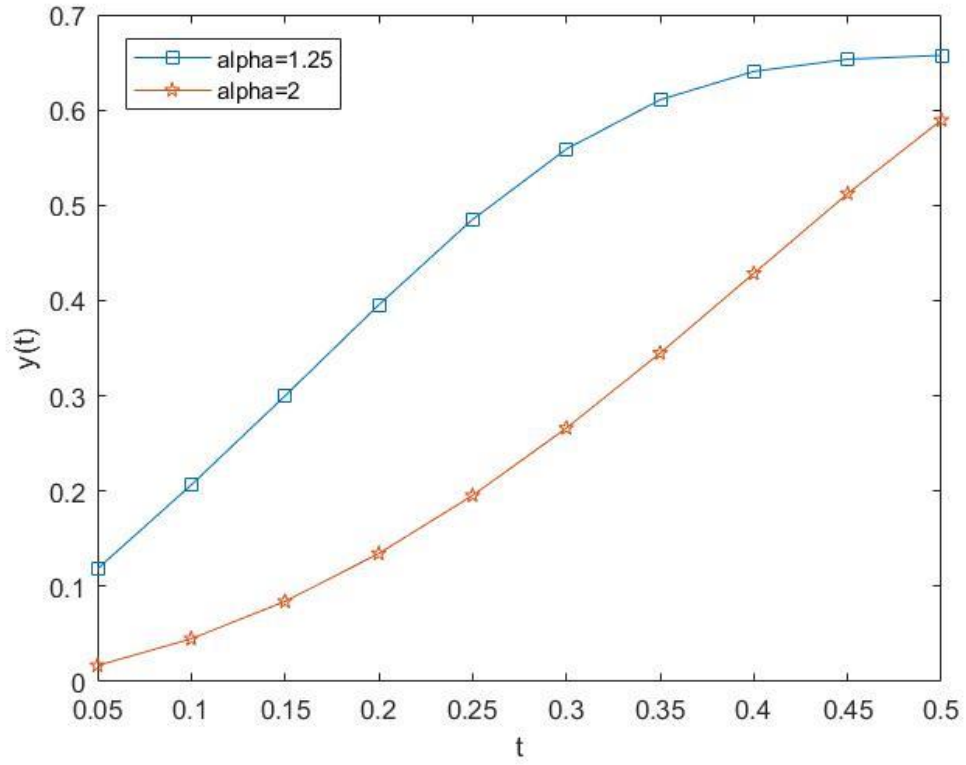
Şekil 4.9: $\alpha=1.25$ ve $h=0.05$ için Örnek 4.2.1'in ABM yöntemi ile yaklaşık ve tam çözümleri

Çizelge 4.9: $\alpha = 2$ ve $h=0.05$ için Örnek 4.2.1 'nin ABM ve tam çözümlerinin karşılaştırılması

t	ABM	$y_e \rightarrow tam\ çözümler$	$Error$ $ y_e - ABM $
0.10	0.0449579	0.0224700	0.0224879
0.20	0.1344463	0.0890426	0.0454037
0.30	0.2660497	0.1952756	0.0707741
0.40	0.4285275	0.3299354	0.0985921
0.50	0.5894135	0.4726562	0.1167572
0.60	0.6977995	0.5935162	0.1042833
0.70	0.7160528	0.6559380	0.0601148
0.80	0.6374469	0.6247322	0.0127148
0.90	0.4867781	0.4814972	0.0052809
1.00	0.3122927	0.2500000	0.0622927



Şekil 4.10: $\alpha = 2$ ve $h=0.05$ için Örnek 4.2.1 'nin hata grafiği



Şekil 4.11: $\alpha = 1.25$ ve $\alpha = 2$ için Örnek 4.2.1 'nin ABM ile yaklaşık çözümleri

Örnek 4.2.2: (R.Douafia, S.Abdelmalek,2019)

Kesirli mertebeden diferansiyel denklem,

$$D_*^\alpha y(t) = \frac{2y(t-2)}{1+y(t-2.6)^{9.65}} - y(t)$$

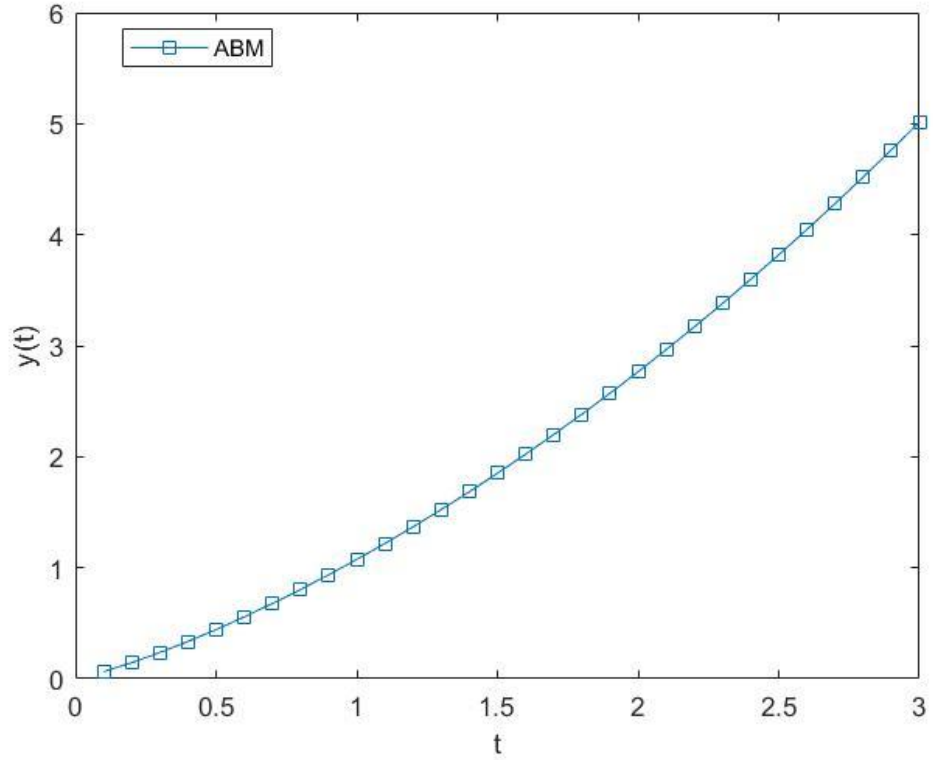
başlangıç koşulları;

$$y(t) = 0.5, \quad t \leq 0.$$

ile verilmiş olsun.

Çizelge 4.10: $\alpha=0.66$ ve $h=0.1$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.2.2'nin yaklaşık çözümleri

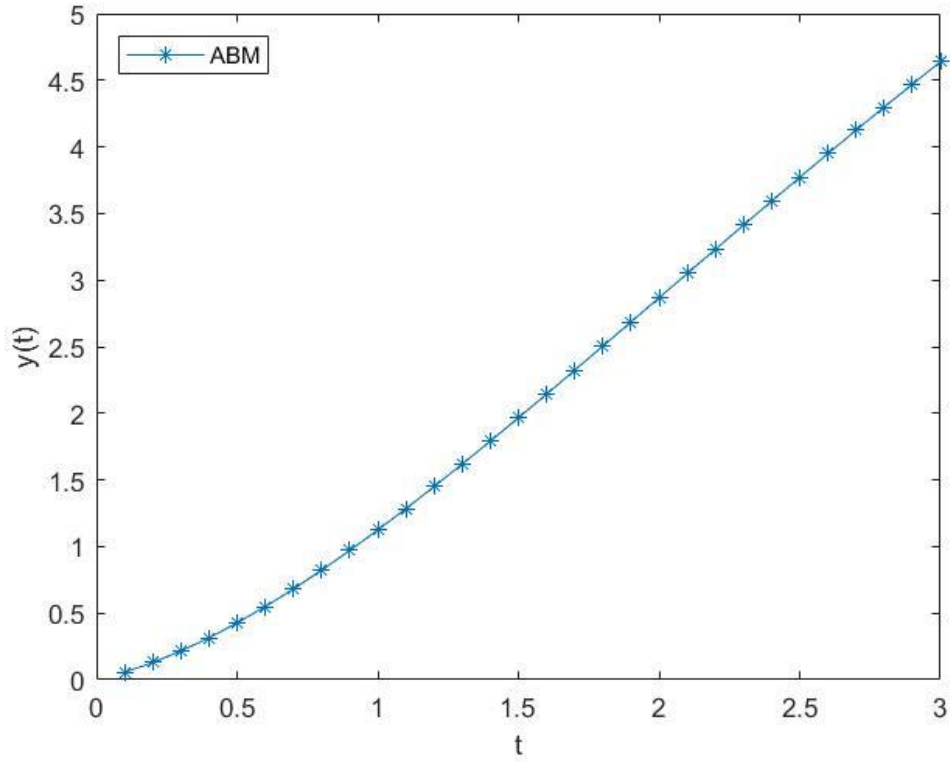
t	ABM
0.10	0.0643490
0.20	0.1450548
0.30	0.2362201
0.40	0.3358902
0.50	0.4430245
0.60	0.5569912
0.70	0.6773791
0.80	0.8039086
0.90	0.9363849
1.00	1.0746704



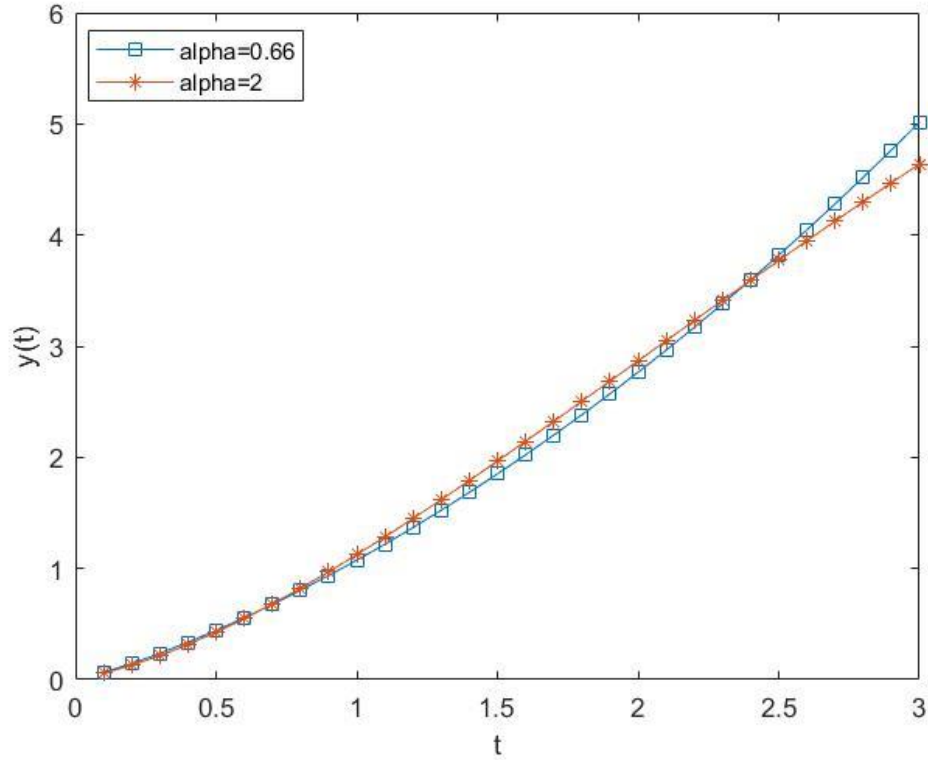
Şekil 4.12: $\alpha=0.66$ ve $h=0.1$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.2.2'nin yaklaşık çözümleri

Çizelge 4.11: $\alpha=1.25$ ve $h=0.1$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.2.2'nin yaklaşık çözümleri

t	ABM
0.10	0.0569710
0.20	0.1288046
0.30	0.2150714
0.40	0.3146904
0.50	0.4264048
0.60	0.5489441
0.70	0.6810921
0.80	0.8217153
0.90	0.9697706
1.00	1.1243047



Şekil 4.13: $\alpha=1.25$ ve $h=0.1$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.2.2'nin yaklaşık çözümleri



Şekil 4.14: $\alpha=0.66$ ve $\alpha=2$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.2.2'nin yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

4.3. Gecikmeli Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Adams-Bashforth-Moulton Yöntemi ile Uygulamaları

Örnek 4.3.1: (Zhen Wang,2013)

Gecikmeli kesirli mertebeden diferansiyel denklemi,

$$D_*^\alpha y(t) = \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha} - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha} + 2\tau t - \tau^2 - \tau - y(t) + y(t-\tau),$$

$$\alpha \in (0,1),$$

$$y(t) = 0, t \leq 0$$

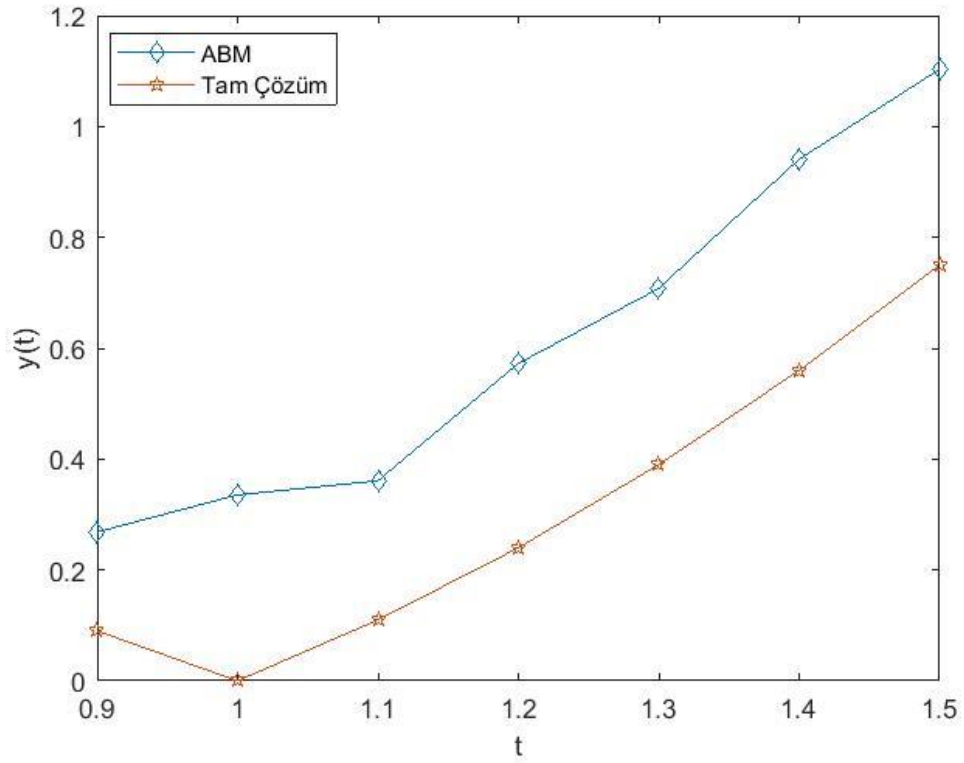
koşulu ile birlikte verilmiş olsun. Bu denklemin tam çözümü,

$$y(t) = t^2 - t$$

dir. $t \in [0, T]$ için $t_j = jh, j = 0, 1, \dots, N$ ve $h = T/N$ 'dir. Farklı α (kesirli mertebe), h ve τ (gecikme terimi) için ABM ile çözümü aşağıdaki tablo ve grafiklerde verilmiştir.

Çizelge 4.12: $\alpha = 0.2$, $\tau = 0.75$ ve $h = 0.1$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.3.1'in yaklaşık çözümleri

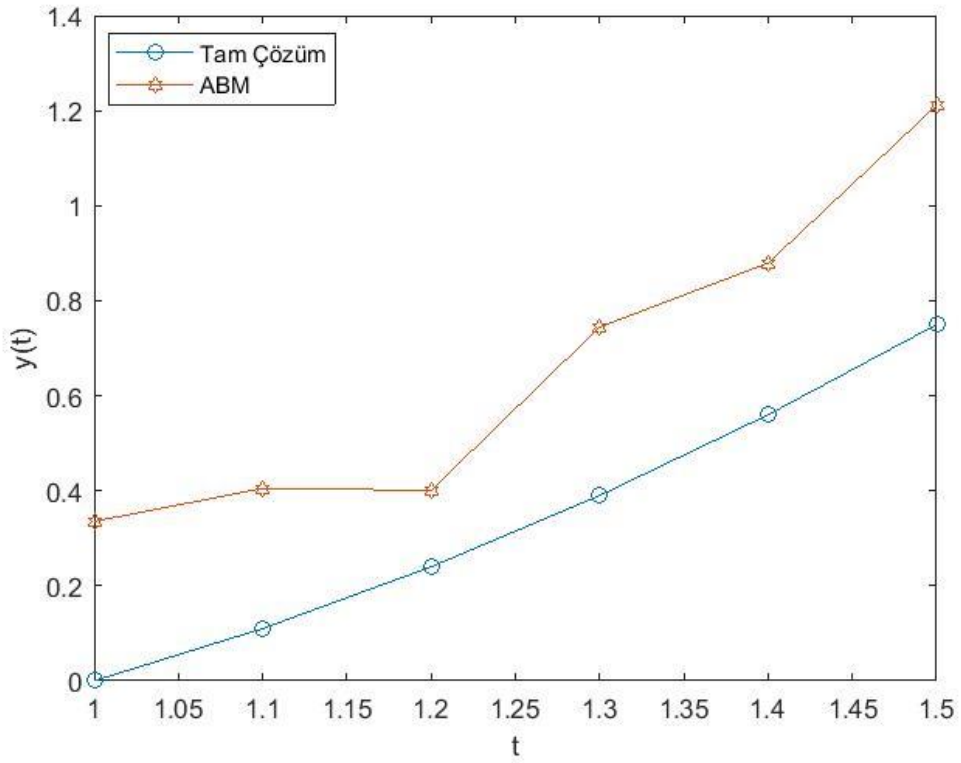
t	ABM	$y_e \rightarrow tam\ çözümleri$
0.50	0.2011674	0.2500000
0.60	0.1664970	0.2400000
0.70	0.4723122	0.2100000
0.80	0.5861446	0.1600000
0.90	0.2684511	0.0900000
1.00	0.3354894	0.0000000
1.10	0.3609720	0.1100000
1.20	0.5725823	0.2400000
1.30	0.7080236	0.3900000
1.40	0.9411018	0.5600000
1.50	1.1032177	0.7500000



Şekil 4.15: $\alpha = 0.2$, $\tau = 0.75$ ve $h = 0.1$ için Örnek 4.3.1'in Tam çözümü ve ABM yöntemiyle yaklaşık çözümleri

Çizelge 4.13: $\alpha = 0.2$, $\tau = 1$ ve $h = 0.1$ için ABM yöntemiyle Örnek 4.3.1'in yaklaşık çözümleri

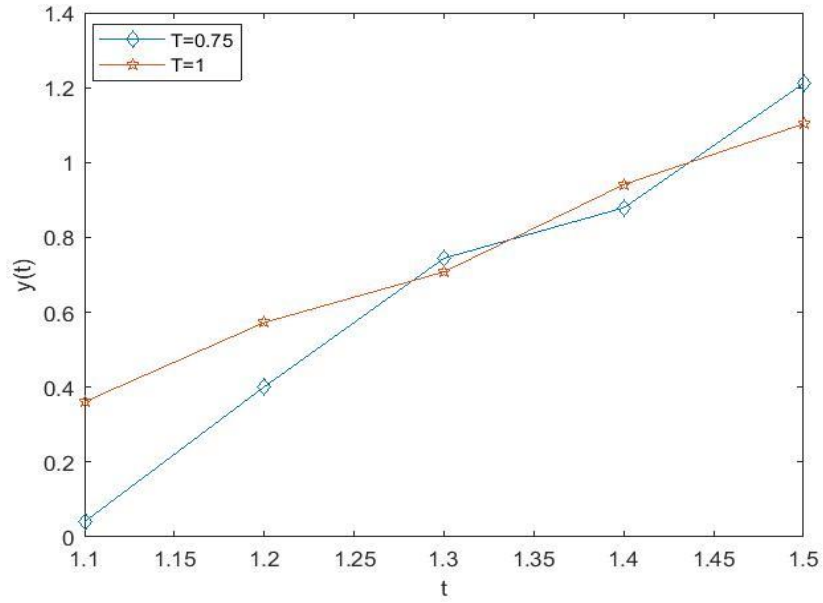
t	$y_e \rightarrow tam\ çözümler$	ABM
0.50	0.2500000	0.2011674
0.60	0.2400000	0.1664970
0.70	0.2100000	0.4723122
0.80	0.1600000	0.5861446
0.90	0.0900000	0.2684511
1.00	0.0000000	0.3354894
1.10	0.1100000	0.4049963
1.20	0.2400000	0.4009596
1.30	0.3900000	0.7444543
1.40	0.5600000	0.8793224
1.50	0.7500000	1.2111101



Şekil 4.16: $\alpha = 0.2$, $\tau = 1$ ve $h = 0.1$ için Örnek 4.3.1'in Tam çözümü ve ABM yöntemiyle yaklaşık çözümleri

Çizelge 4.14: $\alpha = 0.2$ ve $\tau=0.75$ için Örnek 4.3.1 'nin ABM ve tam çözümlerinin karşılaştırılması

t	ABM	$y_e \rightarrow tam\ çözümler$	$Error$ $ y_e - ABM $
1.10	0.3609720	0.1100000	0.2509720
1.20	0.5725823	0.2400000	0.3325823
1.30	0.7080236	0.3900000	0.3180236
1.40	0.9411018	0.5600000	0.3811018
1.50	1.1032177	0.7500000	0.3532177
1.10	0.3609720	0.1100000	0.2509720
1.20	0.5725823	0.2400000	0.3325823
1.30	0.7080236	0.3900000	0.3180236
1.40	0.9411018	0.5600000	0.3811018
1.50	1.1032177	0.7500000	0.3532177



Şekil 4.17: $\tau=0.75$ ve $\tau=1$ için Örnek 4.3.1'in ABM yöntemiyle yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Örnek 4.3.2: (Behrouz P.Moghaddam, Zeynab S. Mostaghim, 2013)

Gecikmeli kesirli mertebeden diferansiyel denklemi,

$$D_x^\alpha y(x) = ry(x) \left(\frac{k - y(x - \delta)}{k + rcy(x - \delta)} \right)$$

$$y(x) = 0.5, -\delta \leq x \leq 0$$

koşulu ile birlikte verilmiş olsun. Riemann – Liouville kesirli integral tanımı (4.1) uyarınca x'e göre integrasyon alınır , gerekli işlemler yapılırsa,

$$y(b) = 0.5r \left[\frac{k - 0.5}{k + 0.5rc} \right] \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha + 2)} b^\alpha$$

elde edilir.Bu problem için sonlu fark algoritması,

$$L^N y_i = \begin{cases} \text{for } i = 1, \dots, N \\ \left(\frac{h^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^i [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] D_{+y_{i-j}} \right) \\ - \frac{rky_i}{k + rcy_{i-m}} + \frac{ry_i y_{i-m}}{k + rcy_{i-m}} = 0 \end{cases}$$

$$y_{i+1} = y_i - \sum_{j=1}^i [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] y_{i+1-j} + \sum_{j=1}^i [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] y_{i-j} + \frac{rkh^\alpha \Gamma(2-\alpha) y_i}{k + rcy_{i-m}} - \frac{rh^\alpha \Gamma(2-\alpha) y_i y_{i-m}}{k + rcy_{i-m}}$$

şeklindedir.

n=3 adım için ABM yöntemi ile çözüm algoritması iterasyon yardımı ile ,

$$p := \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{h^k y_0 k}{k!} \right) + \frac{h^\alpha b_1 f(0, y_0)}{\Gamma(\alpha + 1.)}$$

$$y_1 := \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{h^k y_0 k}{k!} \right) + \frac{h^\alpha \left(f \left(h, \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{h^k y_0 k}{k!} \right) + \frac{h^\alpha b_1 f(0, y_0)}{\Gamma(\alpha + 1.)} \right) + \alpha f(0, y_0) + a_1 f(0, y_0) \right)}{\Gamma(\alpha + 2.)}$$

$$\begin{aligned}
y_3 := & y_1 + (2.{}^{(1.-1.\alpha)} - 1.)y_0 + \frac{rk h^\alpha \Gamma(2-\alpha)y_1}{k+rcy_{-3}} - \frac{r h^\alpha \Gamma(2-\alpha)y_1 y_{-3}}{k+rcy_{-3}} - (2.{}^{(1.-1.\alpha)} - 1.) \\
& \left(y_1 - 1. (2.{}^{(1.-1.\alpha)} - 1.)y_1 + (2.{}^{(1.-1.\alpha)} - 1.)y_0 + \frac{rk h^\alpha \Gamma(2.-1.\alpha)y_1}{k+rcy_{-3}} \right. \\
& \left. - \frac{1. r h^\alpha \Gamma(2.-1.\alpha)y_1 y_{-3}}{k+rcy_{-3}} \right) - (3.{}^{(1.-1.\alpha)} - 1. 2.{}^{(1.-1.\alpha)})y_1 \\
& + (3.{}^{(1.-1.\alpha)} - 1. 2.{}^{(1.-1.\alpha)})y_0 + rk h^\alpha \Gamma(2-\alpha) \left(y_1 - (2.{}^{(1.-1.\alpha)} - 1.)y_1 \right. \\
& \left. + (2.{}^{(1.-1.\alpha)} - 1.)y_0 + \frac{rk h^\alpha \Gamma(2-\alpha)y_1}{k+rcy_{-3}} - \frac{r h^\alpha \Gamma(2-\alpha)y_1 y_{-3}}{k+rcy_{-3}} \right) / (k+rcy_{-2}) - r \\
& h^\alpha \Gamma(2-\alpha) \left(y_1 - (2.{}^{(1.-1.\alpha)} - 1.)y_1 + (2.{}^{(1.-1.\alpha)} - 1.)y_0 + \frac{rk h^\alpha \Gamma(2-\alpha)y_1}{k+rcy_{-3}} \right. \\
& \left. - \frac{r h^\alpha \Gamma(2-\alpha)y_1 y_{-3}}{k+rcy_{-3}} \right) y_{-2} / (k+rcy_{-2})
\end{aligned}$$

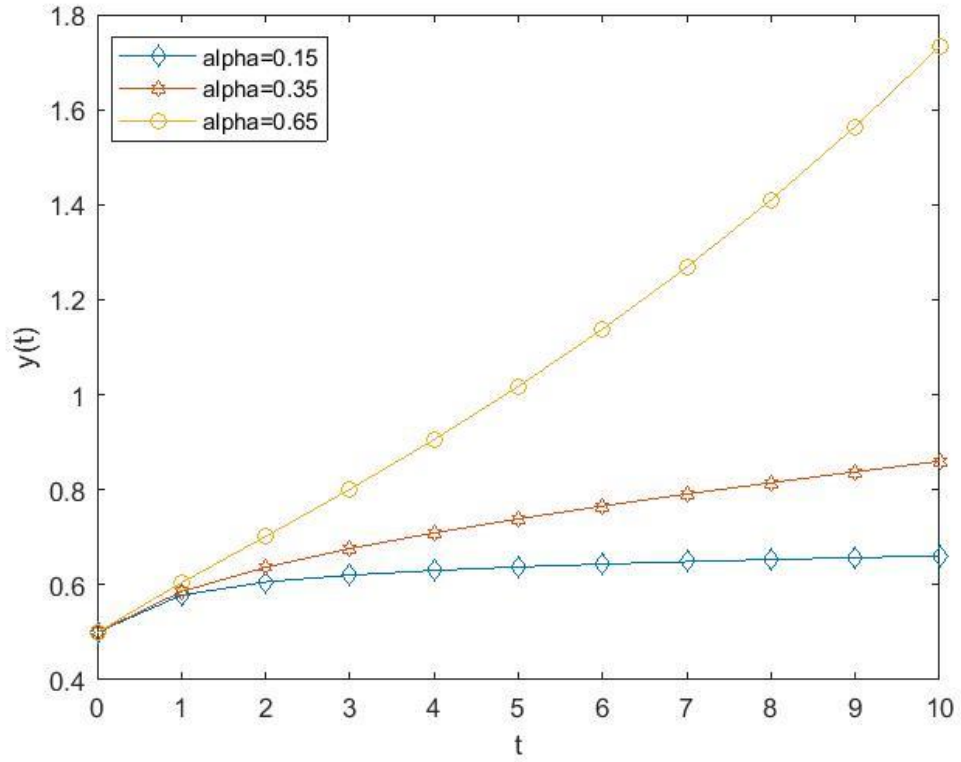
şeklinde elde edilir.

Denkleminin nümerik çözümleri farklı parametreler kullanılarak,

$r = 0.15$, $k = 100$, $\delta = 8$, $m = 4$, $c = 1$, $N = 10$ ve α 'nın farklı değerleri için aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Çizelge 4.15: $\alpha = 0,15, 0,35, 0,65$ ve $\delta = 8$ için Örnek 4.3.2'nin SF ile yaklaşık çözümleri

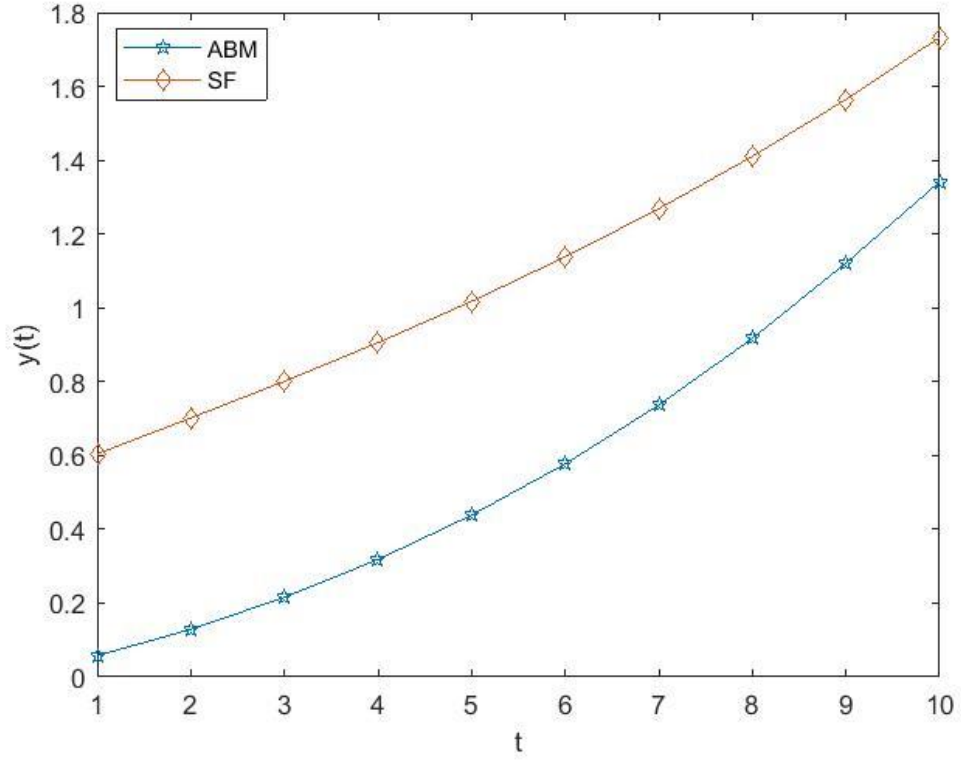
t	$\alpha = 0.15$	$\alpha = 0.35$	$\alpha = 0.65$
1	0.578239	0.585549	0.604274
2	0.605934	0.637044	0.701666
3	0.620494	0.676253	0.800994
4	0.630219	0.709351	0.905617
5	0.637621	0.738824	1.017540
6	0.643587	0.765778	1.138054
7	0.648694	0.791001	1.268521
8	0.653190	0.814943	1.410226
9	0.657223	0.837895	1.564457
10	0.660889	0.860065	1.732545



Şekil 4.18: α 'nın farklı değerleri için Örnek 4.3.2'nin SF yöntemi ile yaklaşık çözümleri

Çizelge 4.16: $\alpha=0.65$ için Örnek 4.3.2'nin ABM ve SF yöntemi ile yaklaşık çözümleri

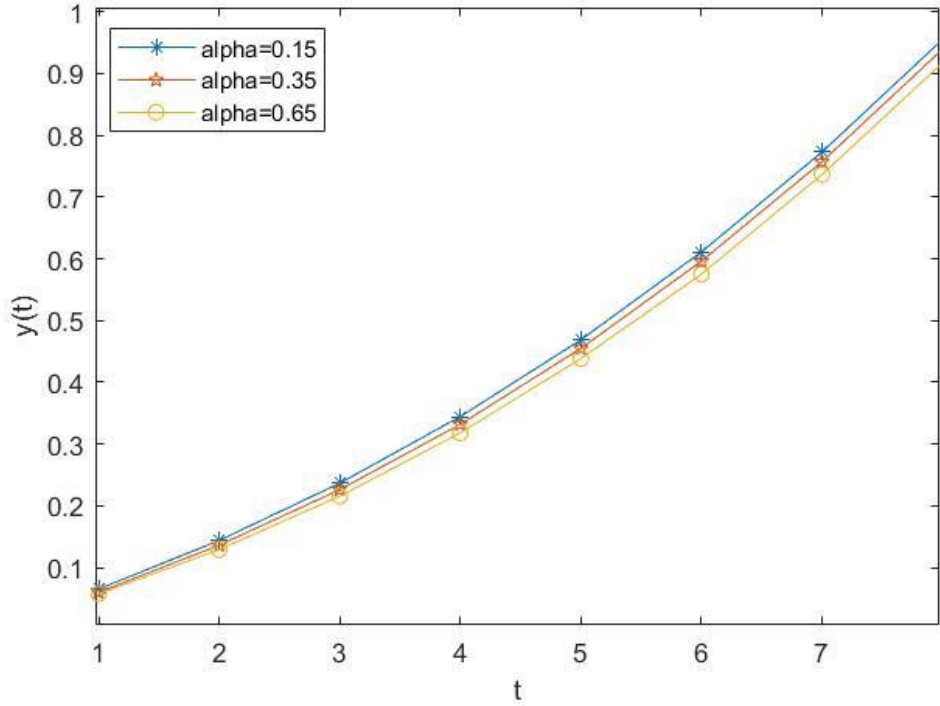
t	ABM	SF
1	0.057508	0.604274
2	0.129082	0.701666
3	0.215566	0.800994
4	0.318190	0.905617
5	0.438290	1.017540
6	0.577248	1.138054
7	0.736475	1.268521
8	0.917401	1.410226
9	1.121465	1.564457
10	1.341405	1.732545



Şekil 4.19: $\alpha=0.65$ için Örnek 4.3.2'nin ABM ve SF yöntemi ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Çizelge 4.17: $\alpha = 0.15$, $\alpha = 0.35$ ve $\alpha = 0.65$ için Örnek 4.3.2 'nin ABM yöntemi ile çözümleri

t	$\alpha = 0.15$	$\alpha = 0.35$	$\alpha = 0.65$
1	0.0651353	0.0600812	0.0575084
2	0.1439142	0.1361678	0.1290825
3	0.2366457	0.2262188	0.2155660
4	0.3445276	0.3320464	0.3181903
5	0.4689072	0.4549207	0.4382901
6	0.6111905	0.5961926	0.5752483
7	0.7728134	0.7572554	0.7364758
8	0.9552287	0.9395283	0.9174012
9	1.1599005	1.1444475	1.1214654
10	1.3883003	1.3734612	1.3501183



Şekil 4.20: α 'nın farklı değerleri için Örnek 4.3.2'nin ABM yöntemi ile yaklaşık çözümleri

Örnek 4.3.3: (Behrouz P.Moghaddam, Zeynab S. Mostaghim, 2013)

Gecikmeli diferansiyel denkleminde,

$$D_x^\alpha y(x) = -dy(x) + cy(x - \delta)(k - c2y(x - \delta))$$

başlangıç koşulları,

$$y(x) = 160 \quad -\delta \leq x \leq 0.$$

ile verilmiş olsun. Örnek 1 ve 2 'dekine benzer şekilde adımlar gerçekleştirilerek,

$$y(b) = \frac{160\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha + 1)} [c(k - 160bz) - d]b^\alpha$$

ifadesi elde edilir. Bu denklem için çözüm algoritması,

$$L^N y_i = \begin{cases} \text{for } i = 1, \dots, N \\ \left(\frac{h^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^i [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] D_{+y_{i-j}} \right) \\ + dy_i - cky_{i-m} + c^2 z(y_{i-m})^2 = 0 \end{cases}$$

$$i = -m, -m + 1, \dots, 0 \quad y_i = 160$$

$$y_{i+1} = (1 - dh^\alpha \Gamma(2 - \alpha) y_i)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^i [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] y_{i+1-j} + \sum_{j=1}^i [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] y_{i-j} \\ & + ck h^\alpha \Gamma(2 - \alpha) y_{i-m} + c^2 z h^\alpha \Gamma(2 - \alpha) (y_{i-m})^2 \end{aligned}$$

şeklinde verilir. N=3 adım için çözüm algoritması aşağıdaki iterasyon ile elde edilir.

$$f := (j+1)^{(1-\alpha)} - j^{(1-\alpha)}$$

$$y_1 := 1 - d h^\alpha \Gamma(2 - \alpha) y_0 + c k h^\alpha \Gamma(2 - \alpha) y_{-m} + c^2 z h^\alpha \Gamma(2 - \alpha) y_{-m}^2$$

$$y_2 := 1$$

$$\begin{aligned} & - d h^\alpha \Gamma(2 - \alpha) (1 - d h^\alpha \Gamma(2 - \alpha) y_0 + c k h^\alpha \Gamma(2 - \alpha) y_{-m} + c^2 z h^\alpha \Gamma(2 - \alpha) y_{-m}^2) \\ & - (2^{(1-1.\alpha)} - 1.) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1 - 1. d h^\alpha \Gamma(2 - 1. \alpha) y_0 + c k h^\alpha \Gamma(2 - 1. \alpha) y_{-m} + c^2 z h^\alpha \Gamma(2 - 1. \alpha) y_{-m}^2) \\ & + (2^{(1-1.\alpha)} - 1.) y_0 + c k h^\alpha \Gamma(2 - \alpha) y_{1-m} + c^2 z h^\alpha \Gamma(2 - \alpha) y_{1-m}^2 \end{aligned}$$

$$y_3 := 1 - d h^\alpha \Gamma(2 - \alpha) (1$$

$$\begin{aligned} & - d h^\alpha \Gamma(2 - \alpha) (1 - d h^\alpha \Gamma(2 - \alpha) y_0 + c k h^\alpha \Gamma(2 - \alpha) y_{-m} + c^2 z h^\alpha \Gamma(2 - \alpha) y_{-m}^2) \\ & - (2^{(1-1.\alpha)} - 1.) \end{aligned}$$

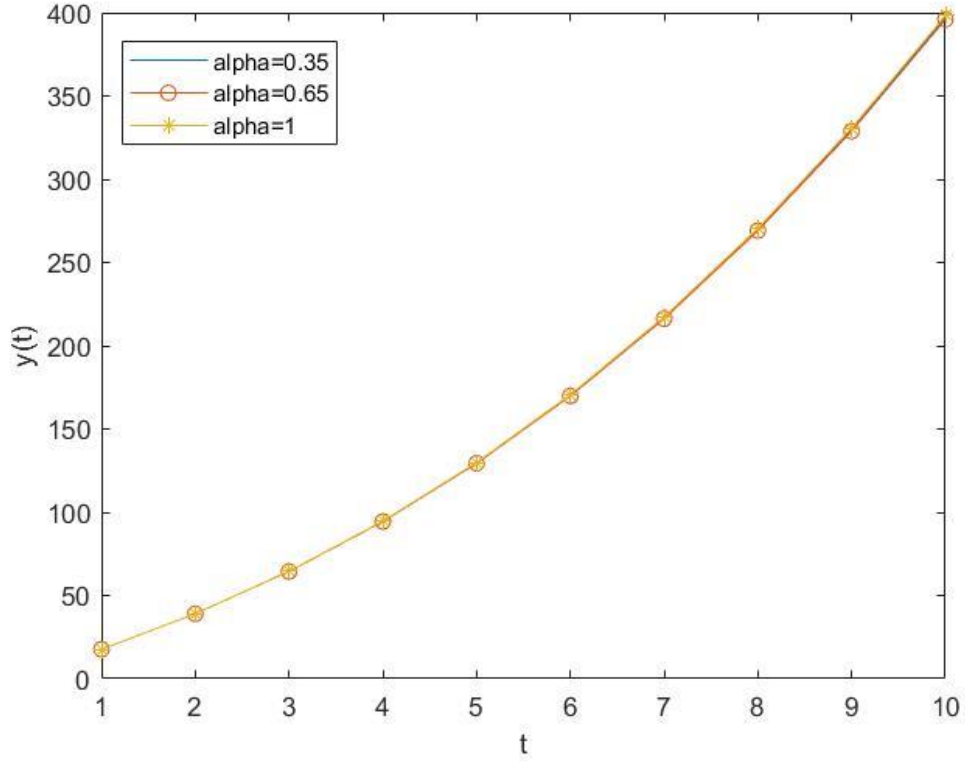
$$\begin{aligned} & (1 - 1. d h^\alpha \Gamma(2 - 1. \alpha) y_0 + c k h^\alpha \Gamma(2 - 1. \alpha) y_{-m} + c^2 z h^\alpha \Gamma(2 - 1. \alpha) y_{-m}^2) \\ & + (2^{(1-1.\alpha)} - 1.) y_0 + c k h^\alpha \Gamma(2 - \alpha) y_{1-m} + c^2 z h^\alpha \Gamma(2 - \alpha) y_{1-m}^2) - \\ & (2^{(1-1.\alpha)} - 1.) (1 - 1. d h^\alpha \Gamma(2 - 1. \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1. - 1. d h^\alpha \Gamma(2. - 1. \alpha) y_0 + c k h^\alpha \Gamma(2. - 1. \alpha) y_{-m} + c^2 z h^\alpha \Gamma(2. - 1. \alpha) y_{-m}^2) - 1. \\
& (2.^{(1. - 1. \alpha)} - 1.) \\
& (1. - 1. d h^\alpha \Gamma(2. - 1. \alpha) y_0 + c k h^\alpha \Gamma(2. - 1. \alpha) y_{-m} + c^2 z h^\alpha \Gamma(2. - 1. \alpha) y_{-m}^2) \\
& + (2.^{(1. - 1. \alpha)} - 1.) y_0 + c k h^\alpha \Gamma(2. - 1. \alpha) y_{1-m} + c^2 z h^\alpha \Gamma(2. - 1. \alpha) y_{1-m}^2) - \\
& (3.^{(1. - 1. \alpha)} - 1. 2.^{(1. - 1. \alpha)}) \\
& (1. - 1. d h^\alpha \Gamma(2. - 1. \alpha) y_0 + c k h^\alpha \Gamma(2. - 1. \alpha) y_{-m} + c^2 z h^\alpha \Gamma(2. - 1. \alpha) y_{-m}^2) + \\
& (2.^{(1. - 1. \alpha)} - 1.) \\
& (1. - 1. d h^\alpha \Gamma(2. - 1. \alpha) y_0 + c k h^\alpha \Gamma(2. - 1. \alpha) y_{-m} + c^2 z h^\alpha \Gamma(2. - 1. \alpha) y_{-m}^2) \\
& + (3.^{(1. - 1. \alpha)} - 1. 2.^{(1. - 1. \alpha)}) y_0 + c k h^\alpha \Gamma(2 - \alpha) y_{2-m} + c^2 z h^\alpha \Gamma(2 - \alpha) y_{2-m}^2
\end{aligned}$$

$c = 1.81, \delta = 3, k = 0.5107, d = 0.147, z = 0.000226$ ve α 'nın farklı değerleri için nümerik sonuçlar aşağıdaki tabloda ve grafikte verilmiştir.

Çizelge 4.18: $\alpha = 0.15, \alpha = 0.35$ ve $\alpha = 0.65$ için Örnek 4.3.2 'nin SF yöntemi ile çözümleri

t	$\alpha = 0.15$	$\alpha = 0.35$	$\alpha = 0.65$
5	140.96965	144.03365	150.90728
6	136.80455	127.62833	137.71678
7	159.90555	158.07255	148.89835
8	117.07348	120.15375	139.46614
9	178.02257	155.30285	145.22879
10	98.653611	119.49577	141.09088



Şekil 4.21: $\alpha = 0.35$, $\alpha = 0.65$ ve $\alpha = 1$ için Örnek 4.3.3'in SF yöntemi ile yaklaşık çözümü

Örnek 4.3.4: (Behrouz P.Moghaddam, Zeynab S. Mostaghim, 2013)

Gecikmeli kesirli diferansiyel denklemi,

$${}^0D_x^\alpha y(x) = -\frac{1}{\varepsilon} y(x) + \frac{1}{\varepsilon} y(x)y(x - \delta)$$

başlangıç koşulları ;

$$y(x) = 0.9 \quad -\delta \leq x \leq 0.$$

ile verilmiş olsun. Yukarıdaki işlemlere benzer şekilde adımlar uygulanırsa,

$$y(b) = \left[-\frac{0.1}{\varepsilon} + \frac{(0.1)^2}{\varepsilon} \right] \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha + 1)} b^\alpha$$

ifadesi elde edilir.

Bu denklem için çözüm algoritması,

$$L^N y_i = \begin{cases} \text{for } i = 1, \dots, N \\ \left(\frac{h^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^i [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] D_{+} y_{i-j} \right) \\ + \frac{1}{\varepsilon} y_i - \frac{1}{\varepsilon} y_i y_{i-m} = 0 \end{cases}$$

$$i = -m, -m+1, \dots, 0 \quad y_i = 0.9$$

$$y_{i+1} = \left(1 - \frac{h^\alpha}{\varepsilon} \Gamma(2-\alpha) [1 - y_{i-m}] \right) y_i - \sum_{j=1}^i [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] y_{i+1-j} + \sum_{j=1}^i [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] y_{i-j}$$

şeklinde verilir. N=3 adım için çözüm algoritması aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$f := (j+1)^{(1-\alpha)} - j^{(1-\alpha)}$$

$$y_1 := \left(1 - \frac{h^\alpha \Gamma(2-\alpha) (1 - y_{-m})}{\varepsilon} \right) y_0$$

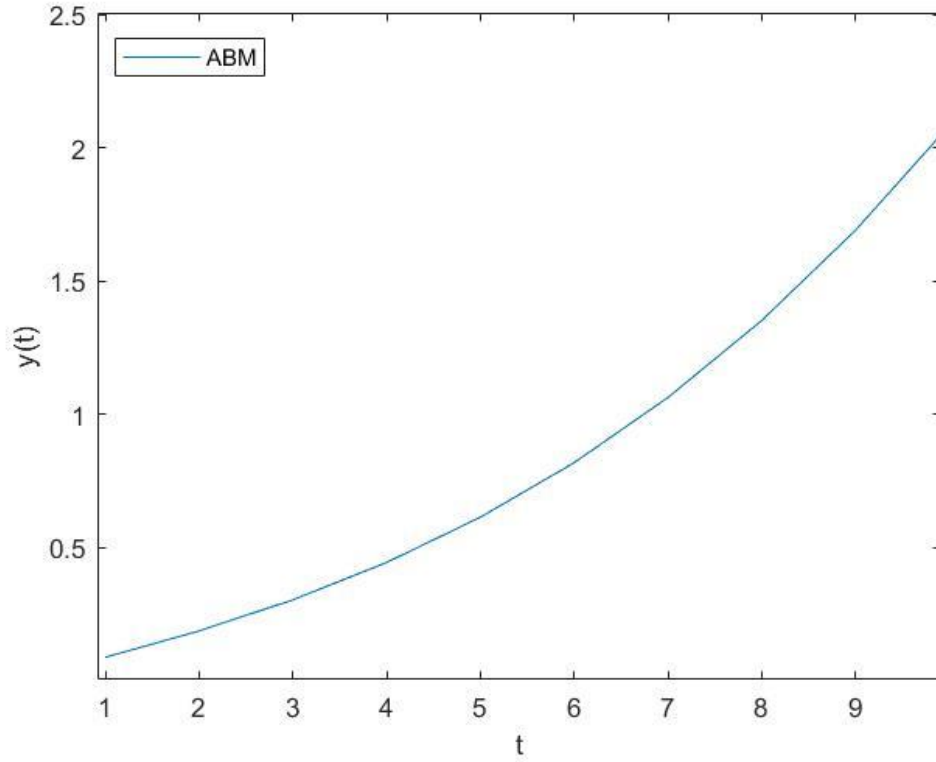
$$y_2 := \left(1 - \frac{h^\alpha \Gamma(2-\alpha) (1 - y_{1-m})}{\varepsilon} \right) \left(1 - \frac{h^\alpha \Gamma(2-\alpha) (1 - y_{-m})}{\varepsilon} \right) y_0 - (2^{(1-1.\alpha)} - 1.) \left(1 - \frac{1. h^\alpha \Gamma(2.-1.\alpha) (1.-1.y_{-m})}{\varepsilon} \right) y_0 + (2^{(1.-1.\alpha)} - 1.) y_0$$

$$\begin{aligned}
y_3 := & \left(1 - \frac{h^\alpha \Gamma(2-\alpha)(1-y_{2-m})}{\varepsilon}\right) \left(\left(1 - \frac{h^\alpha \Gamma(2-\alpha)(1-y_{1-m})}{\varepsilon}\right) \left(1 - \frac{h^\alpha \Gamma(2-\alpha)(1-y_{-m})}{\varepsilon}\right) y_0 \right. \\
& - (2.{}^{(1,-1,\alpha)} - 1.) \left(1 - \frac{1. h^\alpha \Gamma(2.-1.\alpha)(1.-1.y_{-m})}{\varepsilon}\right) y_0 + (2.{}^{(1,-1,\alpha)} - 1.) y_0 \Big) - \\
& (2.{}^{(1,-1,\alpha)} - 1.) \left(\left(1 - \frac{1. h^\alpha \Gamma(2.-1.\alpha)(1.-1.y_{1-m})}{\varepsilon}\right) \left(1 - \frac{1. h^\alpha \Gamma(2.-1.\alpha)(1.-1.y_{-m})}{\varepsilon}\right) y_0 \right. \\
& - 1. (2.{}^{(1,-1,\alpha)} - 1.) \left(1 - \frac{1. h^\alpha \Gamma(2.-1.\alpha)(1.-1.y_{-m})}{\varepsilon}\right) y_0 + (2.{}^{(1,-1,\alpha)} - 1.) y_0 \Big) \\
& - (3.{}^{(1,-1,\alpha)} - 1. 2.{}^{(1,-1,\alpha)}) \left(1 - \frac{1. h^\alpha \Gamma(2.-1.\alpha)(1.-1.y_{-m})}{\varepsilon}\right) y_0 \\
& + (2.{}^{(1,-1,\alpha)} - 1.) \left(1 - \frac{1. h^\alpha \Gamma(2.-1.\alpha)(1.-1.y_{-m})}{\varepsilon}\right) y_0 \\
& + (3.{}^{(1,-1,\alpha)} - 1. 2.{}^{(1,-1,\alpha)}) y_0
\end{aligned}$$

$\lambda = 0.2, \delta = 6, m = 4, N = 10$ ve α 'nın farklı değerleri için nümerik sonuçlar aşağıdaki tabloda ve grafikte verilmiştir.

Çizelge 4.19: $\alpha = 0.50, \alpha = 0.75$ ve $\alpha = 1$ için Örnek 4.3.4 'in SF ile çözümleri

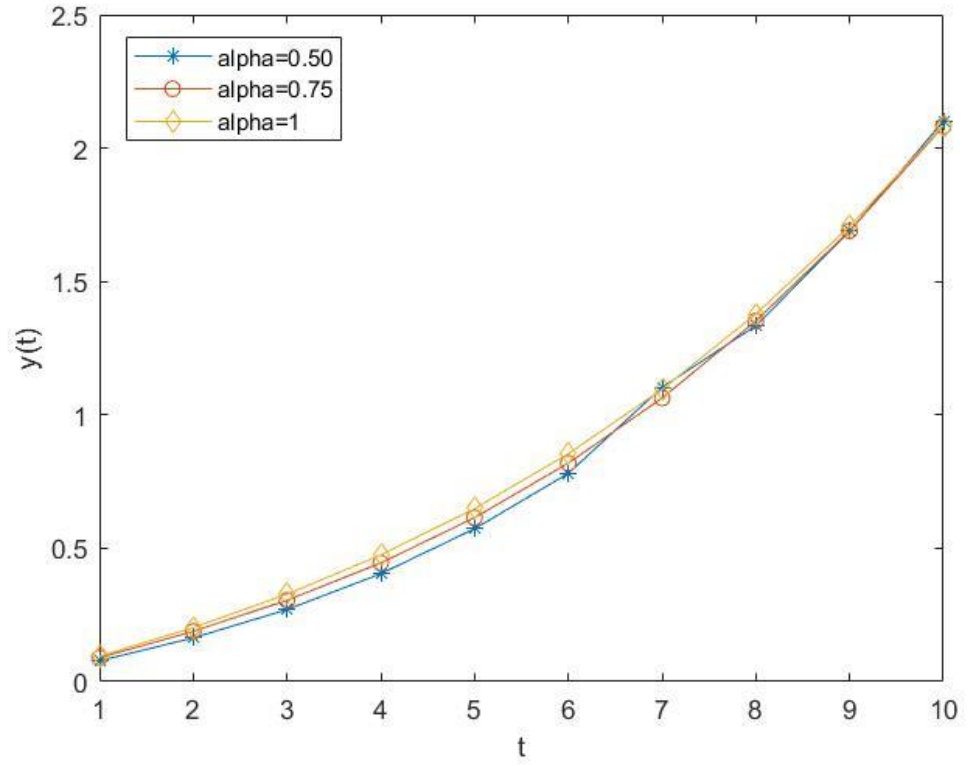
t	$\alpha = 0.50$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 1$
1	0.5011971	0.6115840	0.6750000
2	0.4442992	0.4701655	0.5062500
3	0.3977466	0.3828432	0.3796872
4	0.3657258	0.3229255	0.2847658
5	0.3411175	0.2791345	0.2135741



Şekil 4.22: $\alpha = 0.75$ için Örnek 4.3.4'in ABM yöntemi ile yaklaşık çözümü

Çizelge 4.20: $\alpha = 0.50$, $\alpha = 0.75$ ve $\alpha = 1$ için Örnek 4.3.4 'in ABM yöntemi ile çözümleri

t	$\alpha = 0.50$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 1$
1	0.0780405	0.0894991	0.0949500
2	0.1638024	0.1883408	0.2026000
3	0.2701174	0.3047502	0.3276500
4	0.4044600	0.4449903	0.4748000
5	0.5728818	0.6146760	0.6487500
6	0.7807355	0.8190701	0.8542000
7	1.1032953	1.0632077	1.0958500
8	1.3341843	1.3519620	1.3784000
9	1.6888732	1.6900829	1.7065550
10	2.1013089	2.0822222	2.0850000



Şekil 4.23: $\alpha = 0.50$, $\alpha = 0.75$ ve $\alpha = 1$ için Örnek 4.3.4 'in ABM yöntemi ile yaklaşık çözümleri

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada gecikmeli kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için predictor - corrector yöntemi incelenmiştir. Caputo Kesirli Türevi ve Riemann-Liouville İntegral formülleri gecikmeli kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere uygulanmıştır.

Birinci bölümde gecikmeli kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin tarihçesi hakkında genel bilgi, ikinci bölümde kesirli mertebeden türev tanımları ve integral tanımları ile ilgili kaynak özetleri verilmiştir. Üçüncü bölümde adi diferansiyel denklemler, kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, gecikmeli diferansiyel denklemler ve gecikmeli kesirli diferansiyel denklemler için yöntem analizi yapılmıştır. Dördüncü bölümde ise üçüncü bölümde yöntem analizi yapılan diferansiyel denklemler için uygulamalar yapılmıştır. Yöntemin kullanışlılığı için farklı α ve h değerleri için yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Elde edilen yaklaşık çözümler çizelge ve grafiklerle değerlendirilmiştir. Çizelgelerde farklı α ve h değerleri için yaklaşık çözümler karşılaştırılmıştır ve bu çözümler grafikler üzerinde incelenmiştir. Tüm hesaplamalarda Maple ve Matlab bilgisayar programlarından yararlanılmıştır.

Gecikmeli Kesirli Diferansiyel Denklemlerin çözümü için, Adams-Bashforth-Moulton yönteminden yararlanılarak açıklanan predictor-corrector metodunun farklı yöntemler ile çözülen Gecikmeli Kesirli Diferansiyel Denklemler ile uyumu sonuçların karşılaştırılmasıyla gözlemlenmiştir. Adi Diferansiyel Denklemlerin çözümü için kullanılan predictor-corrector metoduyla Euler metodunun çözümlerinin uyumlu olduğu tablolarda gösterilmiştir. Uygulamalı matematikte gecikme ve kesirli mertebeden terimler içeren diğer diferansiyel denklemler için de predictor-corrector metodunun uygun olduğu düşünülmektedir.

KAYNAKLAR,

- Wang Zhen, (2013) A Numerical Method for Delayed Fractional-Order Differential Equations, Journal of Applied Mathematics Volume 2013, Article ID 256071,7 pages.
- Diethelm, K. ve Ford, N. J., Freed A. (2004) Detailed error analysis for a fractional Adams method, Kluwer Academic Publishers, Numerical Algorithms 36: 31-52.
- Ch. Lubich, (1985) Fractional Linear Multistep Methods for Abel-Volterra Integral Equations of the Second Kind, Mathematics of Computation, Vol.45, No.172, pp.463-469.
- Douaifia R. ve Abdelmalek S. (2019) A Predictor-Corrector Method for Fractional Delay-Differential System, Commun Nonlinear Anal. 6(1),78-88 Research Article.
- Diethelm, K. ve Ford, N. J., Freed A. (2001) A Predictor-Corrector Approach for the Numerical Solution of Fractional Differential Equations
- R.F. Cameron ve S. Mckee (1984) Product integration methos for second-kind Abel İntegral equations, Journal of Computational and Applied Mathematics 11, 1-10.
- Wazwaz A.M, (2010) The combined Laplace transform–Adomian decomposition method for handling nonlinear Volterra integro–differential equations, Volume 216, Issue 4, , Pages 1304-1309.
- Hayes A.P., (2011) The Adams-Bashforth-Moulton Integration Methods Generalized to an Adaptive Grid, 04469-5709, USA
- Coşkun E.(2018) Diferansiyel Denklemler için Sonlu Fark Yöntemleri, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Ders Notu, Bölüm 2.
- Daftardar V. ve Babakhani A. (2004) Analysis of a system of fractional differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.293, no.2 pp.511-522

- Diethelm, K. ve Ford, N. J. ,Freed A., Luchko Yu. (2005) Algorithms for the fractional calculus: a selection of numerical methods, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , vol.194, no.6-8, pp. 743-773
- Diethelm, K. ve Ford, N. J. (2002) Analysis of Fractional Differential Equations, J. Math. Anal. Appl., 265, in press.
- Ünlü, Canan. (2014), Kesirli Türevli Diferansiyel Denklemler Ve Çözüm Yöntemleri, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, pp. 29
- Suthar,D. L. Tsegaye T. (2017) , Riemann Liouville Fractional Integrals and Differential Formula Involving Multiindex Bessel Function, Math. Sci. Lett. 6, No. 3, 233-237 (2017) 233, Mathematical Sciences Letters An International Journal
- Podlubny, I. (1999), Fractional Differential Equations. Academic, New York.
- Behrouz P. Moghaddam ve Zeynab S. Mostaghim (2013), A numerical method based on finite difference for solving fractional delay differential equations, Journal of Taibah University for Science 7, 120–127
- Kalendarlı, Ö. (2016), Sayısal Yöntemler, Sayısal İntegrasyon Yöntemleri, Sayfa: 1 – 5
- Nasıykat A. (2010), Volterra 3.Cins Lineer İntegral Denklemler Sistemi, Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü
- John Carroll, (2011), Interpolation & Polynomial Approximation Lagrange Interpolating Polynomials, Numerical Analysis (9th Edition), Brooks/Cole, Cengage Learning
- Zaid O. ve Shaher M. (2008), Numerical methods for nonlinear partial differential fractional order, Applied Mathematical Modelling 32 (2008) 28–39

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Ad Soyad : Y***** A**** K***
Uyruk : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi: K*****, **.**.1***
Medeni Hali : Evli
Telefon : 0542 5** ****
E-posta : y*****n@outlook.com

Eğitim

Alınan Derece	Aldığı Kurum/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lise	Yunus Emre Anadolu Lisesi	2013
Lisans	Ege Üniversitesi	2019

Yabancı Dil(ler)

Dil (İngilizce, vs)	Başlangıç	Orta	İleri
Yazma		X	
Konuşma	X		
Anlama	X		
Okuma		X	