

MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

RIEMANN MANİFOLDLARININ
HARMONİK DÖNÜŞÜMLERİ ÜZERİNE

78348

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BEKİR TANAY

Danışman

Prof. Dr. HASAN ÖZEKES

Haziran, 1998

MUĞLA

78348

TC. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMAN YÖN MERKEZİ

MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

RIEMANN MANİFOLDLARININ
HARMONİK DÖNÜŞÜMLERİ ÜZERİNE

BEKİR TANAY

Fen Bilimleri Enstitüsünde

"Yüksek Lisans"

Diploması Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 22 Haziran 1998

Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 15 Temmuz 1998

Tezin Danışmanı : Prof. Dr. Hasan ÖZEKES

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Yavuz GÜNDÜZALP

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Ali BEKMEZCİ

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Gazi İREZ

Haziran, 1998

MUĞLA

YEMİN

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum "Riemann Manifoldlarının Harmonik Dönüşümleri Üzerine" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynaklarda gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanmış olduğumu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

BEKİR TANAY



YÜKSEK ÖĞRETİM KURULU DÖKÜMANTASYON MERKEZİ
TEZ VERİ GİRİŞ FORMU

YAZARIN

Soyadı : TANAY

Adı : BEKİR

Kayıt No :

TEZİN ADI

Türkçe : Riemann Manifoldlarının Harmonik Dönüşümleri Üzerine

Y.Dil : On Harmonic Maps of Riemannian Manifolds

TEZİN TÜRÜ : Yüksek Lisans

TEZİN KABUL EDİLDİĞİ

Üniversite : Muğla Üniversitesi

Fakülte : Fen - Edebiyat Fakültesi

Enstitü : Fen Bilimleri Enstitüsü

Diğer Kuruluşlar :

Tarih : 15 Temmuz 1998

TEZ YAYINLANMIŞSA

Yayınlanan :

Basım Yeri :

Basım Tarihi :

ISBN :

TEZ YÖNETİCİSİNİN

Soyadı Adı : ÖZEKES, Hasan

Ünvanı : Profesör Doktor

TEZİN YAZILDIĞI DİL : Türkçe

TEZİN SAYFA SAYISI : 40

TEZİN KONUSU (KONULARI)

- 1) Manifoldlar, Tensörler, Lif demetleri,
- 2) Harmonik dönüşümler.
- 3)

TÜRKÇE ANAHTAR KELİMELER

- 1) Diferensiyellenebilir manifoldlar,
- 2) Harmonik dönüşümler,
- 3) Gerilme alanı.

İNGİLİZCE ANAHTAR KELİMELER

- 1) Differentiable manifolds,
- 2) Harmonic maps,
- 3) Tension field.

- 1) Tezimden fotokopi yapılmasına izin vermiyorum.
- 2) Tezimden dipnot gösterilmek şartıyla bir bölümünün fotokopisi alınabilir.
- 3) Kaynak gösterilmek şartıyla tezimin tamamının fotokopisi alınabilir.

Yazarın İmzası :



Tarih: 15.07.1998

İÇİNDEKİLER

	<u>sayfa</u>
ÖNSÖZ.....	II
ÖZET.....	III
ABSTRACT.....	IV
1. MANİFOLDLAR HAKKINDA GENEL BİLGİLER	
1.0. Giriş.....	1
1.1. Manifoldlar.....	1
1.2. Tensörler.....	9
1.3. Lif demetleri.....	20
2. HARMONİK DÖNÜŞÜMLER	
2.0. Giriş.....	23
2.1. Harmonik Dönüşümler	23
2.2. Normal koordinatlar.....	27
2.3. Bir dönüşümün enerjisi.....	32
2.4. Harmonik dönüşümlerin bileşkesi.....	35
3. SONUÇ	
KAYNAKLAR.....	40

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, ilgili literatür taranmış ve Riemann manifoldlarının harmonik dönüşümleri konusunda yapılan çalışmaların bir kısmı üzerinde durulmuştur.

Bu çalışmanın seçiminde ve çalışma süresince bilimsel görüş ve düşüncelerinden büyük ölçüde yararlandığım, değerli hocam sayın Prof. Dr. Hasan Özekes'e, ayrıca, eleştirileriyle bu çalışmaya katkıda bulunan, hocam Prof. Dr. Yavuz Gündüzalp'e ve çalışma esnasında yardımlarını esirgemeyen, sevgili eşim Nefide Tanay'a teşekkür ederim.

Bekir TANAY

ÖZET

Bu çalışmada, 1964 yılında James Eells ve J.H. Sampson'un yazdığı, "Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds" adlı temel bir makale ile başlayan, "Riemann manifoldlarının harmonik dönüşümleri teorisi" üzerinde durulmuştur.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde; diferensiyellenebilir manifoldlar, Riemann metriği, afin ve Riemann konneksiyonları, tensörler, lif demetleri gibi bazı temel kavramlar ve bunlarla ilgili teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde ise, harmonik dönüşümün tanımı ve varlığı, normal koordinatlardaki ifadesi, bir dönüşümün enerji integrali, harmonik dönüşümlerin bileşkesinin de harmonik olması için gerekli şartlar, gibi konular detaylı olarak verilmiş ve harmonik dönüşümlerin küçük boyutlardaki uygulamaları ele alınmıştır.

ABSTRACT

In this study, the theory called harmonic maps of Riemannian manifolds based on a fundamental paper written by J. Eells and J.H. Sampson in 1964, is considered.

This study consists of two chapters. In the first chapter, some basic theorems and definitions such as differentiable manifolds, Riemannian metric, affine and Riemannian connections, tensors and fiber bundles are given. In the second chapter, the definition and the existence of the harmonic maps, the energy integral of a map and the composition of the two harmonic maps are given in details and some examples in small dimensions are dealt with.

1. MANİFOLDLAR HAKKINDA GENEL BİLGİLER

1.0. GİRİŞ

Bu bölümde ; manifoldlar, manifoldlar arasındaki diferensiyel dönüşümler, daldırma ve gömme kavramları, yönlendirme, Lie parantezi, Riemann metriği, afin ve Levi-Civita (Riemann) konneksiyonları gibi kavramlar, [1]'deki şekilde verilmiştir.

Ayrıca, kovaryant ve kontravaryant tensörler, tensörlerin temel işlemleri, Christoffel sembolleri, kovaryant türev gibi tensörlerdeki temel kavramlar [9] ve [10]'daki gibi verilmiş ve diferensiyel geometride sıkça kullanılan tensör çarpımı kavramı kısaca açıklanmıştır.[2].

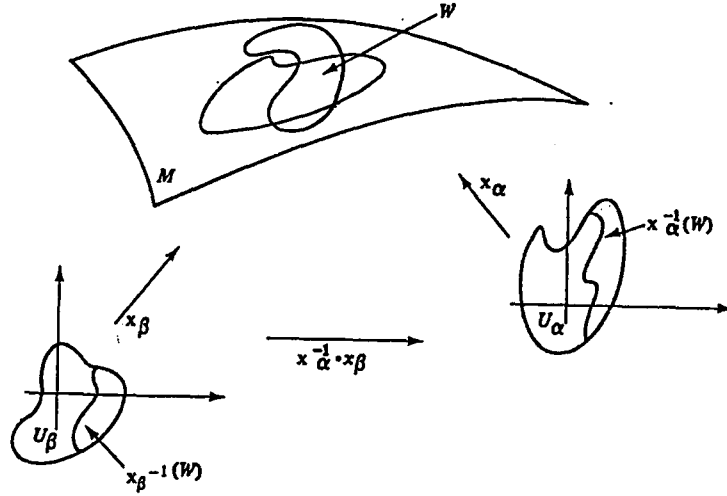
Son olarak da, lif demetleri ile ilgili tanımlar üzerinde durulmuştur.[7].

1.1. MANİFOLDLAR

Tanım 1.1.1 : (*n boyutlu diferensiyellenebilir manifold*)

$M \neq \emptyset$ bir küme, $\{x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M \mid x_\alpha^{-1} \text{ } U_\alpha \text{ } \mathbb{R}^n \text{ de açık küme}\}$ dönüşüm ailesi verilsin. Bu takdirde;

i.) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M,$



Şekil 1 : Diferensiyellenebilir Manifold

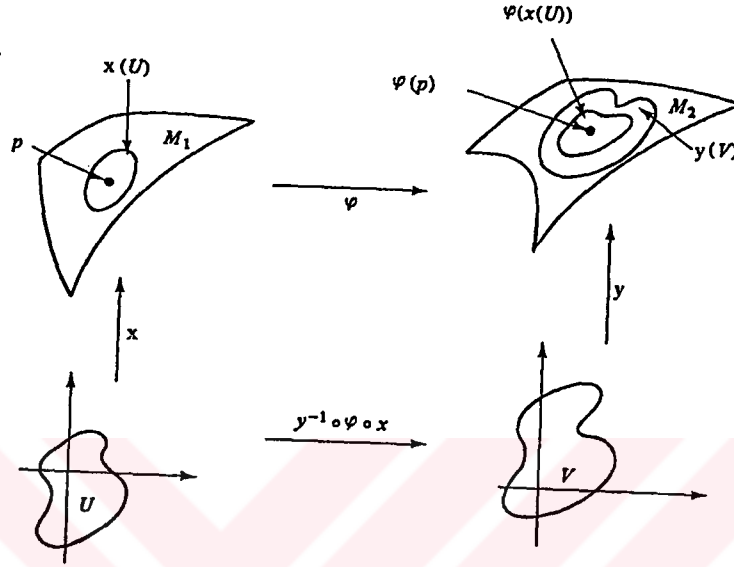
ii.) $W = x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$ olan her α, β çifti için $x_\alpha^{-1}(W_\alpha)$ ve $x_\beta^{-1}(W_\beta)$ açık kümeler ve ayrıca $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ dönüşümü diferensiyellenebilir,

iii.) $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ ailesi (i) ve (ii) şartlarını sağlayan maksimal aile,

şartları sağlanırsa, M kümesine n boyutlu *diferensiyellenebilir manifold* denir (Şekil 1). Burada, $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ şartını sağlayan (U_α, x_α) ikilisine, M 'nin p noktasındaki bir *parametrizasyonu* (veya koordinat sistemi), $x_\alpha(U_\alpha)$ ' ya da p 'nin *koordinat komşuluğu* denir. Ayrıca, yukarıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ ailesine de *diferensiyellenebilir yapı* denir.

Tanım 1.1.2 : M_1^n ve M_2^m sırasıyla n ve m boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ bir dönüşüm olsun. Eğer, $\varphi(p)$ noktasında $y : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$ şeklinde verilen parametrizasyona karşılık, $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ şartını sağlayan $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ parametrizasyonu varsa ve, $y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dönüşümü $x^{-1}(p)$ noktasında diferensiyellenebilir ise, φ dönüşümüne $p \in M$ noktasında *diferensiyellenebilirdir* denir.

Eğer, φ M_1 'nin bütün noktalarında diferensiyellenebilir ise φ 'ye *diferensiyellenebilir dönüşüm* denir (Şekil 2).



Şekil 2 : Diferensiyellenebilir dönüşüm

Not: M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. $p \in M$ noktasındaki teğet vektörlerin oluşturduğu düzleme *teğet uzay* denir ve $T_p M$ ile gösterilir. Ayrıca, dual teğet uzay ise $T_p^* M$ ile gösterilir.

Önerme 1.1.3 : M_1^n ve M_2^m sırasıyla n ve m boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Bu takdirde her $p \in M_1$ ve $v \in T_p M_1$ için

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_1; \alpha(0) = p, \dot{\alpha}(0) = v$$

şartlarını sağlayan bir eğri seçelim. $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right\}$ ve $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_0 \right\}$ aileleri sırasıyla $T_p M_1$ ve $T_{\varphi(p)} M_2$ uzaylarının bazı olmak üzere

$$d\varphi_p(v) = \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) \dot{x}_i(0) \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

şeklinde verilen $d\varphi$ dönüşümü lineer dönüşümdür ve buna φ 'nin p noktasındaki *diferensiyeli* adı verilir. Burada,

$$\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right)$$

bir $m \times n$ matrisini ve $\dot{x}_j(0)$ 'da n elemanlı bir sütun matrisini göstermektedir.

Tanım 1.1.4 : M_1^n ve M_2^m sırasıyla n ve m boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ bir dönüşüm olsun. Eğer, φ diferensiyellenebilir, 1-1 ve φ^{-1} diferensiyellenebilir ise φ dönüşümüne *diffeomorfizm* denir. Eğer, $p \in M_1$ için p 'nin bir U komşuluğu ve $\varphi(p)$ 'nin bir V komşuluğu $\varphi : U \rightarrow V$ diffeomorfizm olacak şekilde varsa φ 'ye *lokal diffeomorfizm* denir.

Tanım 1.1.5 : M_1^n ve M_2^m sırasıyla n ve m boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Eğer, her $p \in M_1$ için

$$d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$$

dönüşümü 1-1 ise φ 'ye *daldırma* (immersiyon) denir. Buna ilaveten, eğer,

$$\varphi : M_1 \rightarrow \varphi(M_1)$$

homeomorfizm ise $(\varphi(M_1))$ 'deki topoloji M_2 'nin alt uzay topolojisidir) φ 'ye *gömme* (embedding) denir. Eğer, $M_1 \subset M_2$ ve $i : M_1 \rightarrow M_2$ bir gömme ise M_1 'e M_2 'nin alt manifoldu denir. Eğer, $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^m$ bir daldırma ($n \leq m$ olduğu açıktır) ise $m - n$ sayısına φ daldırmasının *ko-boyutu* denir.

Tanım 1.1.6 : M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer, M 'de her α, β için

$$x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$$

şartını sağlayan ve $\det(d(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)) \neq 0$ olan bir $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ diferensiyellenebilir yapısı var ise M 'ye *yönlendirilebilir*, aksi halde *yönlendirilemez* denir. Eğer, yukarıdaki şartları sağlayan diferensiyellenebilir yapı var ise bu yapıya M 'nin *bir yönlendirilişi* denir.

Eğer, yukarıdaki şartları sağlayan iki diferensiyellenebilir yapının birleşimi de yukarıdaki şartları sağlıyor ise, bu iki diferensiyellenebilir yapı *aynı yönlendirmeyi* belirler.

Eğer, M yönlendirilebilir ve bağlantılı ise M üzerinde kesinlikle iki ayrık yönlendiriliş vardır.

M_1 ve M_2 diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ diffeomorfizm olsun. Bu takdirde

$$M_1 \text{ yönlendirilebilirdir} \Leftrightarrow M_2 \text{ yönlendirilebilirdir}$$

Eğer, M_1 ve M_2 bağlantılı ve yönlendirilebilir iseler φ M_2 üzerinde, M_2 'deki ilk yönlendiriliş ile *çakışabilen* veya *çakışamayan* bir yönlendirme belirler. Birinci durumda φ yönlendirilişi *taşıyor*, diğer durumda ise *ters çeviriyor* denir.

Eğer M , $V_1 \cap V_2$ kesişimleri bağlantılı olan V_1 ve V_2 gibi iki koordinat komşuluğu ile örtülebiliyor ise M yönlendirilebilirdir.

Tanım 1.1.7 : M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerindeki bir X vektör alanı her $p \in M$ 'ye bir $X(p) \in T_p M$ vektörünü karşılık

getiren bir eşleştirmedir. Dönüşüm olarak düşündüğümüzde, X vektör alanı M 'den TM teğet demetine giden dönüşüm olarak karşımıza çıkar. Eğer, $X : M \rightarrow TM$ dönüşümü diferensiyellenebilir ise X vektör alanına diferensiyellenebilirdir denir.

Lemma 1.1.8 : M diferensiyellenebilir manifold, X ve Y M üzerinde diferensiyellenebilir vektör alanları olsunlar. M üzerindeki reel değerli C^∞ fonksiyonlarının kümesini $D(M)$ ile ve M üzerinde C^∞ sınıftan vektör alanlarının kümesini de $X(M)$ ile gösterelim. Bu takdirde her $f \in D(M)$ için

$$[X, Y]f = (XY - YX)f$$

olan tek türlü bir $[X, Y]$ vektör alanı vardır. Bu vektör alanına X ve Y 'nin Lie parantezi adı verilir.

Önerme.1.1.9 : M diferensiyellenebilir manifold, $X, Y, Z \in X(M)$ ve $f, g \in D(M)$ olsunlar. Bu takdirde;

a.) $[X, Y] = -[Y, X]$ (*anti simetriklik*)

b.) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (*lineerlik*)

c.) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (*Jacobi özdeşliği*)

d.) $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$

şartları geçerlidir.

$[X, Y]$ parantezi; X 'in integral eğrileri yani X 'in izi boyunca Y 'nin türevi olarak da düşünülebilir.

Tanım 1.1.10 : (*Riemann Metriği*)

Bir diferensiyellenebilir manifold üzerindeki Riemann metriği; her $p \in M$ 'yi, $T_p M$ 'de diferensiyellenebilir bir şekilde değişen, (simetrik, bilinear ve pozitif definit) bir \langle, \rangle_p iç çarpım ile eşleştirilmesidir. Eğer, $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, p noktasının bir civarında $x(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in x(U)$ ve

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x(x_1, \dots, x_n)) = dx_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$$

şartlarını sağlayan bir parametrizasyon ise

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

ifadesi U üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyondur.

Riemann metriğinin diferensiyellenebilirliğini aşağıdaki şekilde de ifade edebiliriz;

M 'nin bir V komşuluğunda diferensiyellenebilir olan X, Y vektör alanları için $\langle X, Y \rangle$ fonksiyonu V üzerine diferensiyellenebilir ise *Riemann metriği diferensiyellenebilirdir* denir. Bu tanım ilk verilen tanıma denktir. Buradaki $g_{ij} (= g_{ji})$ fonksiyonuna *Riemann metriğinin* $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ koordinat sistemindeki lokal gösterimi veya metriğin *bileşenleri* adı verilir.

Tanım 1.1.11 : Bir Riemann metriğiyle diferensiyellenebilir bir manifolda *Riemann manifoldu* adı verilir.

Tanım 1.1.12 : M, N manifoldlar ve $f : M \rightarrow N$ diffeomorfizm olsun.

i.)Eğer, her $p \in M$ ve her $u, v \in T_p M$ için

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$$

sağlanıyor ise f fonksiyonuna *izometri* denir.

ii.)Eğer, f fonksiyonu $a \in M$ noktasının bir U komşuluğunda,

$f : U \rightarrow f(U) \subset N$ için (i) şartını sağlıyor ise f fonksiyonuna *lokal izometri* denir.

Tanım 1.1.13 : (*Afin konneksiyon*)

M diferensiyellenebilir manifold, $X, Y, Z \in X(M)$ ve $f, g \in D(M)$ için aşağıdaki şartları sağlayan

$$\nabla : X(M) \times X(M) \rightarrow X(M) \quad , \quad (X, Y) \rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümüne *Afin konneksiyon* denir. Afin konneksiyonun şu özellikleri vardır.

i.) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

ii.) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

iii.) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

Tanım 1.1.14 : M diferensiyellenebilir manifold ve ∇ M üzerinde bir Afine konneksiyon olsun. Her $X, Y \in X(M)$ için ;

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$$

sağlanıyorsa ∇ *simetriktir* denir.

Tanım 1.1.15 : ∇ Riemann manifoldu üzerinde Afine konneksiyon olmak üzere,

Riemann metrik ∇ ile uyumludur $\Leftrightarrow X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$

Teorem 1.1.16 : (*Levi—Civita*)

M Riemann manifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan bir ∇ Afine konneksiyon vardır,

i.) ∇ simetriktir,

ii.) ∇ Riemann metrikle uyumludur.

Bu konneksiyona *Riemann konneksiyonu* denir.

1.2. TENSÖRLER

Tanım 1.2.1 : (*Kovaryant ve Kontravaryant tensörler*)

A^1, \dots, A^n ve $\bar{A}^1, \dots, \bar{A}^n$ büyüklükleri (x^1, \dots, x^n) ve $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ koordinat sistemlerinde verilsinler. Eğer, A^i ile \bar{A}^j arasında

$$\bar{A}^p = \sum_{q=1}^n \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} A^q, \quad p = 1, 2, \dots, n$$

veya Einstein toplama kuralına göre

$$\bar{A}^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} A^q$$

şeklinde bir ilişki varsa; bunlara *mertebesi (veya rangı) bir olan kontravaryant tensörün bileşenleri* denir. Aksi belirtilmediği sürece tez boyunca Einstein toplama kuralı kullanılacaktır.

Diğer taraftan, A_1, \dots, A_n ve $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$ büyüklükleri (x^1, \dots, x^n) ve $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ koordinat sistemlerinde n tane büyüklükler olsun. Eğer, A_i ile A_j arasında

$$\bar{A}_p = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p} A_q, \quad p, q = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde bir ilişki varsa; bunlara *mertebesi (veya rangı) bir olan kovaryant tensörün bileşenleri* denir.

Not : Mertebesi bir olan tensörler vektörlerdir.

Benzer şekilde, eğer, A_s^q gibi n^2 tane büyüklükle \bar{A}_r^p gibi n^2 tane büyüklük arasında

$$\bar{A}_r^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^r} A_s^q$$

şeklinde bir ilişki varsa; bunlara *mertebesi 2 olan karma tensörün bileşenleri* denir. Bu ifadeler genelleştirilebilir, örneğin :

$$\bar{A}_{ij}^{prmn} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^n} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} A_{kl}^{qsn}$$

ifadesi ,

3. mertebeden kontravaryant,
2. mertebeden kovaryant,
5. mertebeden karma tensördür.

Tanım 1.2.2 : (Skalerler veya invaryantlar)

x^k ve \bar{x}^k aralarında koordinat dönüşümü olan, iki koordinat sistemi ve Φ , x^k koordinat sisteminde bir fonksiyon olsun. Φ 'nin yukarıdaki koordinat dönüşümüne göre \bar{x}^k 'daki fonksiyonel değeri de $\bar{\Phi}$ olsun.

Eğer, $\Phi = \bar{\Phi}$ ise Φ 'ye bu koordinat dönüşümüne göre *skaler* veya *invariantır* denir. Bir skalere, sıfır ranklı tensör de denir.

Tanım 1.2.3 : (*Tensör alanı*)

n boyutlu bir uzayın her noktasını, bir kurala göre bir tensöre eşleştiren ifadeye *tensör alanı* denir. Bu ifade, eğer tensörün rangı sıfır ise, *skaler alan*, rangı bir ise *vektör alanıdır*.

Tanım 1.2.4 : Eğer

$$A_{kl}^{qsn} = A_{kl}^{sqn}$$

ise bu tensör q ve s *kontravaryant indislerine göre simetriktir* denir. Benzer şekilde,

$$A_{kl}^{qsn} = A_{lk}^{qsn}$$

ise, bu tensör k ve l *kovaryant indislerine göre simetriktir* denir. Herhangi iki kovaryant veya herhangi iki kontravaryant indise göre simetrik olan tensöre *simetriktir* denir.

Eğer

$$A_{kl}^{qsn} = -A_{kl}^{sqn}$$

ise, bu tensör q ve s *kontravaryant indislerine göre anti-simetriktir* denir. Benzer şekilde

$$A_{kl}^{qsn} = -A_{lk}^{qsn}$$

ise, bu tensör k ve l *kovaryant indislerine göre anti-simetriktir* denir. Herhangi iki kovaryant veya herhangi iki kontravaryant indise göre anti-simetrik olan tensöre *anti-simetriktir* denir.

Tanım 1.2.5: Tensörlerle ilgili temel işlemler;

i.) Toplama ve Çıkarma :

Aynı sayıda kovaryant ve kontravaryant indisi olan tensörler toplanabilir veya çıkarılabilir. Sonuç yine aynı rank ve tipte bir tensördür.

Örneğin :

$$A_{kl}^{qsn} + B_{kl}^{qsn} = D_{kl}^{qsn}$$

veya benzer şekilde

$$A_{kl}^{qsn} - B_{kl}^{qsn} = C_{kl}^{qsn}$$

yazılabilir.

ii.) Dış Çarpım ;

İki tensörün dış çarpımı rangı bu iki tensörün rankları toplamına eşit olan bir tensördür. Örneğin ;

$$A_{kl}^{qsn} \cdot B_m^{ij} = C_{klm}^{qsnij}$$

yazılabilir. Her tensör rangı daha küçük olan iki tensörün dış çarpımı olarak elde edilemez. Bu yüzden tensörlerin bölümü, her zaman mümkün değildir.

iii.) Daraltma (kontraksiyon) ;

Eğer, bir tensörün bir kovaryant indisi, kontravaryant indislerden birine eşitlenir ve eşit indisler üzerinden toplama yapılırsa, yapılan bu işleme *daraltma* denir ve elde edilen tensör, ilk tensörün rangından iki az ranklı bir tensör olur. Örneğin: A_{kl}^{qsn} gibi rangı 5 olan karma bir tensörde $q = k$ alınarak

$$A_{ql}^{qsn} = A_l^{sn}$$

şeklinde rangı 3 olan bir tensör elde edilir.

iv.) İç Çarpım ;

İki tensörün dış çarpımını bir daraltma takip ederse yeni bir tensör elde edilir ve bu işleme, bu iki tensörün *iç çarpımına* denir. Örneğin:

$$A_{str}^{pq} \text{ ve } B_m^{cnk}$$

5. ve 4. mertebeden karma tensörleri göz önüne alalım. Bunların dış çarpımı,

$$A_{str}^{pq} \cdot B_m^{cnk} |_{t=k} = C_{strm}^{pqcnk} |_{t=k} = C_{srm}^{pqcn}$$

şeklinde 7. mertebeden yeni bir karma tensördür.

Not : Tensörlerin iç ve dış çarpımları birleşmeli ve değişmelidir

v.) Bölüm Kuralı ;

Bir X büyüklüğünün tensör olup olmadığı bilinmiyor olsun. Keyfi bir tensör ile X 'in iç çarpımı bir tensör ise, X 'de bir tensördür. Bu kurala *bölüm kuralı* denir.

Tanım 1.2.6 : (*Metrik tensör*)

(x, y, z) dik koordinat sisteminde, ds yay uzunluğunun diferensiyeli

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ifadesinden elde edilir. Genel eğrisel koordinatlarda ise bu ifade;

$$ds^2 = \sum g_{pq} du_p du_q , \quad p, q = 1, 2, 3$$

şeklindedir. Koordinatları (x^1, \dots, x^n) olan n boyutlu uzayda ise bu ifade,

metrik formi diye adlandırılan

$$ds^2 = g_{pq} dx^p dx^q, \quad p, q = 1, 2, \dots, n$$

kuadratik form şeklindedir. Burada rangı iki olan kovaryant tensörün bileşenleri olan simetrik g_{pq} elemanlarına *metrik* veya *esas tensör* denir.

Tanım 1.2.7 : (*Eşlenik* veya *karşıt tensörler*)

Elemanları g_{pq} olan tensörün determinantı $g = |g_{pq}|$ olsun ve $g \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$g^{pq} = \frac{g_{pq} \text{'nün kofaktörü}}{g}$$

eşitliği ile tanımlanan g^{pq} , rangı 2 olan simetrik kontravaryant bir tensör olup g_{pq} 'nün *eşlenik* veya *karşıt tensörü* diye adlandırılır.

Kolayca gösterilebilir ki

$$g^{pq} \cdot g_{rq} = \delta_r^p$$

ifadesi gerçekleşmektedir.

Tanım 1.2.8 : (*Eş Tensörler*)

Bir A_{pq} tensörü verildiğinde, bu tensörün indisleri yükseltilerek veya indirilerek yeni tensörler elde dlebilir. Örneğin: A_{pq} 'nün indisleri yükseltilerek,

$$A^p_{\cdot q} = A^p_q \text{ veya } A^{pq} = A^{pq}$$

gibi yeni tensörler elde edilebilir. Bu yeni tensörler verilen tensörün g_{pq} metrik tensör veya eşleniği g^{pq} ile iç çarpımını oluşturmak suretiyle elde edilebilir. Yani bu yeni elde edilen tensörleri;

$$A_{.q}^p = A_q^p = g^{rp} \cdot A_{rq} \quad \text{veya} \quad A_{..}^{pq} = A^{pq} = g^{rp} g^{sq} \cdot A_{rs}$$

şeklinde hesaplayabiliriz. İşte bu şekilde elde edilen yeni tensörlere, ilk tensörün *eş tensörleri* adı verilir.

Tanım 1.2.9 : (*Bir vektörün modülü ve vektörler arasındaki açı*)

A^p ve B_q tensörlerinin iç çarpımı olan $A^p \cdot B_q$, bir skalerdir. A^p veya A_p vektörünün L modülü;

$$L^2 = A^p A_p = g^{pq} A_p A_q = g_{pq} A^p A^q$$

şeklinde tanımlanır. A^p ve B_p arasındaki açı ise;

$$\cos \theta = \frac{A^p B_p}{\sqrt{(A^p A_p)(B^p B_p)}}$$

ile tanımlanır.

Önerme 1.2.10 : (*Christoffel sembolleri*)

Aşağıdaki semboller, sırasıyla 1. ve 2. *Christoffel sembolleri* diye adlandırılır;

$$[pq, r] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r} \right\} ,$$

$$\Gamma_{pq}^s = g^{sr} [pq, r] .$$

Tanım 1.2.11 : (*Christoffel sembollerinin dönüşüm kuralları*)

Yukarıdaki Christoffel sembolleri için aşağıdaki dönüşüm kuralları geçerlidir;

$$\overline{[jk, m]} = [pq, r] \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} + g_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}$$

$$\overline{\Gamma}_{jk}^n = \Gamma_{pq}^s \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^q} \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}$$

Tanım 1.2.12 : (*Jeodezikler*)

Riemann uzayında $x^r = x^r(t)$ eğrisi üzerinde bulunan t_1 ve t_2 noktaları arasındaki s yay uzunluğu, n boyutlu uzaydaki

$$ds^2 = g_{pq} dx^p dx^q$$

kuadratik metrik formu gözönüne alınarak,

$$s = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{pq} \frac{dx^p}{dt} \frac{dx^q}{dt}} dt$$

denklemleri ile verilir. Bu mesafeyi minimum kılan uzaydaki eğriye, uzayın *jeodeziği* denir. Jeodezikler,

$$\frac{d^2 x^r}{ds^2} + \Gamma_{pq}^r \frac{dx^p}{ds} \frac{dx^q}{ds} = 0$$

diferensiyel denklem sisteminden bulunabilir. Örneğin : Bir düzlemin jeodeziği doğrular, bir küre yüzeyinin jeodeziği ise büyük çemberlerdir.

Tanım 1.2.13 : (*Kovaryant türev*)

Bir A_p kovaryant tensörün x^q doğrultusundaki *kovaryant türevi*;

$$A_{p;q} = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \Gamma_{pq}^s A_s$$

şeklinde tanımlanır ve burada $A_{p;q}$, rangı 2 olan kovaryant tensördür. Diğer taraftan A^p kontravaryant tensörün x^q doğrultusundaki *kovaryant türevi*;

$$A^p_{;q} = \frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \Gamma_{qs}^p A^s$$

şeklinde tanımlanır ve burada $A^p_{;q}$, rangı 2 olan karma bir tensördür. Benzer şekilde kovaryant türev, rangı daha büyük olan tensörler için,

$$A^p_1 \dots p_m_{r_1 \dots r_n ; q} = \frac{\partial A^p_1 \dots p_m_{r_1 \dots r_n}}{\partial x^q} - \Gamma_{r_1 q}^s A^p_1 \dots p_m_{s r_2 \dots r_n} - \dots - \Gamma_{r_n q}^s A^p_1 \dots p_m_{r_1, r_2 \dots r_{n-1} s}$$

$$+ \Gamma_{qs}^p A^s p_2 \dots p_m_{r_1 \dots r_n} + \dots + \Gamma_{qs}^{p_m} A^p_1 \dots p_{m-1} s_{r_1 \dots r_n}$$

şeklinde genişletilebilir. Tensörlerin toplamı ve çarpımının kovaryant türevi ile ilgili kurallar, normal diferensiyel kurallar ile aynıdır.

Tanım 1.2.14 : (*Intrinsik veya mutlak türev*)

A_p tensörünün $x^q = x^q(t)$ eğrisi doğrultusunda *intrinsik türevi*, A_p 'nin kovaryant türevi ile $\frac{dx^q}{dt}$ 'nin iç çarpımı olarak tanımlanır. Yani,

$$\frac{\delta A_p}{\delta t} = A_{p;q} \frac{dx^q}{dt} = \frac{dA_p}{dt} - \Gamma_{pq}^r A_r \frac{dx^q}{dt}$$

olur. Benzer şekilde, A^p 'nin intrinsik türevi;

$$\frac{\delta A^p}{\delta t} = A^p_{;q} \frac{dx^q}{dt} = \frac{dA^p}{dt} + \Gamma^p_{qr} A^r \frac{dx^q}{dt}$$

şeklindedir.

Not : Bir tensörün kovaryant türevi manifoldun intrinsik geometrisi ile ilgilidir. Sadece manifoldda bağlı olup, dış uzayla ilgili değildir.

Yukarıda kısaca tanımlamaya çalıştığımız, tensörlerin diferensiyel geometride sıkça kullanılan "tensör çarpımı" kavramını tanımlamaya çalışalım.

Tanım 1.2.15 : (Çok lineer formlar)

X_1, \dots, X_n, Y R üzerinde vektör uzayları ve $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer, f dönüşümü her $x_i, \hat{x}_i \in X_i, i \in \{1, \dots, n\}$ ve $a \in R$ için;

i.) $f(x_1, \dots, (x_i + \hat{x}_i), \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)$

ii.) $f(x_1, \dots, ax_i, \dots, x_n) = af(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$

şartlarını sağlıyorsa f 'ye çok lineer dönüşüm denir. $X_1 \times \dots \times X_n$ 'den Y 'ye giden çok lineer dönüşümlerin ($\{f \mid f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y \text{ çok lineer dönüşüm}\}$) kümesi,

$$L(X_1, \dots, X_n; Y)$$

şeklinde gösterilir. Ayrıca özel olarak $X_i = X, i \in \{1, \dots, n\}$ ise

$$L(X_1, \dots, X_n; Y) = L\left(\underbrace{X, \dots, X}_{n \text{ tane}}; Y\right) = L^n(X, Y)$$

şeklinde gösterilebilir. Bu durumda eğer $f \in L^n(X, R)$ ise f 'ye *çok lineer form* denir.

Tanım 1.2.16 : X bir vektör uzayı olsun.

$$X^* = \{f : X \rightarrow R \mid f \text{ lineer}\}$$

kümesine X 'in *dualı* denir. Dikkat edilirse $X^* = L(X, R)$ 'dir.

Tanım 1.2.17 : X_1, \dots, X_n vektör uzayları ve X_1^*, \dots, X_n^* 'de bunların dual uzayları olsun. Bu takdirde

$$\otimes : X_1^* \times \dots \times X_n^* \rightarrow L(X_1, \dots, X_n; R)$$

$$(g_1, \dots, g_n) \mapsto \otimes(g_1, \dots, g_n) = g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_n$$

ile verilen ve

$$(g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_n)(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1) g_2(x_2) \dots g_n(x_n)$$

şeklinde tanımlanan \otimes dönüşümüyle, $g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_n$ ifadesine g_1, \dots, g_n elemanlarının *tensor çarpımı* denir. Bunu daha da genişletecek olursak, yani $g_i \in X_i^*$ elemanları için X_i^* uzaylarının tensor çarpımı ise

$$X_1^* \otimes \dots \otimes X_n^* = L(X_1, \dots, X_n; R)$$

şeklinde tanımlanır. Bu ifade aşağıdaki şartları sağlar;

i.)

$$\otimes : X_1^* \times \dots \times X_n^* \rightarrow X_1^* \otimes \dots \otimes X_n^*$$

dönüşümü çok lineer dönüşümdür,

ii.) Y vektör uzayı için eğer

$$f : X_1^* \times \dots \times X_n^* \rightarrow Y$$

dönüşümü çok lineer ise, $f = \hat{f} \circ \otimes$ olan bir tek

$$\hat{f} : X_1^* \otimes \dots \otimes X_n^* \rightarrow Y$$

lineer dönüşümü vardır.

Şimdi yukarıdaki tanımların ışığı altında, herhangi sayıda vektör uzaylarının tensör çarpımını aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz.

Tanım 1.2.18 : X_1, \dots, X_n vektör uzayları ve $\otimes : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X$

Tanım 1.2.17 (i) ve Tanım 1.2.17 (ii) şartlarını sağlayan bir dönüşüm olsun.

Bu durumda X uzayına X_1, \dots, X_n uzaylarının *tensör çarpımı* denir ve $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ şeklinde gösterilir.

1.3. LİF DEMETLERİ

Tanım 1.3.1 : (*Vektör Demeti*)

M ve N iki diferensiyellenebilir manifold ve $\pi : N \rightarrow M$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Bu durumda (π, N, M) üçlüsüne, aşağıdaki şartlar sağlanırsa n boyutlu vektör demeti denir. Burada N 'ye toplam uzay, M 'ye baz ve R^n 'e de lif denir.

i.) π örtendir,

ii.) M 'in bir tane, $(U_i)_{i \in I}$ örtüsü ve her $x \in U_i$ için

$$h_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$$

$$\pi^{-1}(x) \mapsto h_i(\pi^{-1}(x)) = \{x\} \times \mathbb{R}^n$$

difeomorfizmalar vardır,

iii.) ve bu difeomorfizmalar, $i, j \in J$ için;

$$h_i \circ h_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$$

$$(x, v) \mapsto h_i \circ h_j^{-1}(x, v) = (x, g_{ij}(x).v)$$

sağlanır. Burada

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_n \mathbb{R}$$

diferensiyellenebilir dönüşümlerdir. h_i dönüşümlerine, vektör demetinin *lokal travilizasyonu* denir.

Tanım 1.3.2 : M bağlantılı bir manifold ve $\pi : V \rightarrow M$, M üzerinde diferensiyellenebilir sonlu ranklı bir vektör demeti olsun. V 'nin diferensiyellenebilir kesitlerinin vektör uzayını, yani;

$$\sigma : M \rightarrow V, \pi \circ \sigma = I_M$$

şartını sağlayan diferensiyellenebilir σ dönüşümlerinin vektör uzayını $C^\infty(V)$ ile göstereceğiz.

2. HARMONİK DÖNÜŞÜMLER

2.0. GİRİŞ

Bu bölümde; 1964 yılında J. Eels ve J. H. Sampson tarafından yazılan bir makale [3] ile başlayan ve daha sonra yine J. Eels ve L. Lemaire tarafından geliştirilen [4],[5],[6], Riemann manifoldlarının harmonik dönüşümleri teorisi [3] ve [12] baz alınarak verilmeye çalışılmıştır.

Özetle, gerilme alanı tanımlanmış ve bir dönüşümün harmonik olma şartı verilmiştir. Normal koordinatlar tanımlanarak, bu koordinatlarda harmonik olma şartı ifade edilmiş ve küçük boyutlarda örnekler verilmeye çalışılmıştır.[8],[11]. Bir dönüşümün enerjisi tanımlanmış bununla beraber harmonik dönüşümün varlığı ve tekliği teoremlerle ifade edilmiştir. Ayrıca, iki harmonik dönüşümün bileşkesinin de harmonik olması için gerekli şartlar araştırılmış olup örnekler üzerinde durulmuştur.

Bu bölümde yapılan çalışmalar, hem lokal koordinatlarda hem de koordinatlardan bağımsız olarak ifade edilmeye çalışılmıştır.

2.1. HARMONİK DÖNÜŞÜMLER

M^m, N^n sınırı olmayan düzgün (C^∞), bağlantılı Riemann manifoldlar ve g, h 'da sırasıyla bu manifoldların Riemann metrikleri olsun ve ayrıca bu

manifoldlar üzerinde Levi-Civita konneksiyonları olsun.

M 'nin p noktasının bir komşuluğundaki düzgün lokal koordinatlarını (x^1, \dots, x^m) ile gösterelim. Eğer $p, (0, 0, \dots, 0)$ koordinatlarına sahipse, bu koordinatlara p 'de *merkezlenmiştir* denir. Benzer şekilde (u^1, \dots, u^n) ile de N 'deki düzgün lokal koordinatları gösterelim. Bu koordinatlardaki M ve N manifoldları üzerindeki metrikleri sırasıyla,

$$g = g_{ij} dx^i dx^j \quad \text{ve} \quad h = h_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$$

olarak yazabiliriz.

$f : M \rightarrow N$, C^2 sınıftan bir dönüşüm ve TM, TN 'de M ve N manifoldlarının teğet demetleri olsun. f dönüşümü, M üzerinde bir demet olan f^*TN *geriçekme* demetini oluşturmak için kullanılabilir. TM demetinden f^*TN demetine giden, r -lineer dönüşümlerin M üzerindeki demetini $L^r(TM, f^*TN)$ ile gösterelim. M üzerindeki bir E vektör demetinin düzgün kesitlerinin vektör uzayını da $C^\infty(E)$ ile gösterelim.

Buradan, f dönüşümünün diferensiyeli df 'yi

$$df \in C^\infty(L^1(TM, f^*TN))$$

şeklinde göz önüne alabiliriz. f dönüşümünün 2. temel formu olarak da adlandırılan ∇df kovaryant türevini, yani

$$\nabla df \in C^\infty(L^2(TM, f^*TN))$$

yi oluşturabiliriz. Buradaki ∇ , M ve N manifoldları üzerindeki konneksiyonlarla belirlidir.

Eğer, f dönüşümünün türevinin bileşenleri,

$$f_i^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}$$

ile verilmiş ise, ∇df kovaryant diferensiyeli df 'nin bileşenleri,

$$f_{;ij}^\gamma = \frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k f_k^\gamma + L_{\alpha\beta}^\gamma f_i^\alpha f_j^\beta \quad (1)$$

ile verilir. Burada Γ_{ij}^k ve $L_{\alpha\beta}^\gamma$ ifadeleri sırasıyla M ve N manifoldları için Christoffel sembollerini (Tanım.1.2.10) göstermektedir. Şimdi ∇df 'nin izini

$$\text{Tr} \nabla df (p) = \sum_{i=1}^m \nabla df (e_i, e_i) (p)$$

ile tanımlayalım. Burada $\{e_i\}$ ailesi $p \in M$ 'deki $T_p M$ teğet uzay için ortonormal baz ve görüldüğü gibi

$$\text{Tr} \nabla df \in C^\infty (f^* TN)$$

dir.

Tanım 2.1.1 : f 'nin gerilme alanı $\tau(f)$, f 'nin ikinci esas formunun izi olarak tanımlanır. Yani;

$$\tau(f)(p) = \text{Tr} \nabla df (p) = \sum_{i=1}^m \nabla df (e_i, e_i) (p) \quad (2)$$

yazılır. $\tau(f)$ M 'den TN 'ye $\tau(f)(p) \in T_{f(p)}N$ olan bir dönüşüm olarak düşünülebilir. Bu gibi dönüşümlere f üzerindeki vektör alanları denir.

Önerme 2.1.2 : Lokal koordinatlarda gerilme alanı aşağıdaki şekilde verilir;

$$\tau(f)^\gamma = g^{ij} \left\{ \frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k f_k^\gamma + L_{\alpha\beta}^\gamma f_i^\alpha f_j^\beta \right\} \quad (3)$$

veya

$$\tau(f)^\gamma = \Delta f^\gamma + g^{ij} f_i^\alpha f_j^\beta L_{\alpha\beta}^\gamma \quad (4)$$

burada Δ, M üzerinde tanımlı fonksiyonlar için

$$\Delta u = (\det g_{hk})^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ (\det g_{hk})^{\frac{1}{2}} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right\}$$

şeklinde tanımlanan Laplace-Beltrami operatörü'dür.

Tanım 2.1.3 : Bir C^2 sınıftan $f : M \rightarrow N$ dönüşümü için

$$\tau(f) = 0$$

ise f 'ye *harmoniktir* denir.

Böylece, f 'nin harmonik olması için gerek ve yeter şart (3) veya (4) denklemlerinin sıfır olması, yani ;

$$g^{ij} \left\{ \frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k f_k^\gamma + L_{\alpha\beta}^\gamma f_i^\alpha f_j^\beta \right\} = 0 \quad (6)$$

veya buna denk olan

$$\Delta f^\gamma + g^{ij} f_i^\alpha f_j^\beta L_{\alpha\beta}^\gamma = 0 \quad (7)$$

olmasıdır.

Önerme.2.1.4 : M, N düzgün Riemann manifoldlar, $f : M \rightarrow N$ C^2 sınıftan bir dönüşüm olsun. Bu takdirde

$$\tau(f) = 0 \Rightarrow f \text{ düzgündür.}$$

2.2. NORMAL KOORDİNATLAR

$p \in M$ için

$$\exp_p : T_p M \rightarrow M$$

dönüşümü, her $t \in T_p M$ için p den başlayan, teğet vektörü t olan ve uzunluğu, yönü t tarafından belirlenen jeodezik segmentin son noktasını karşılık getiren dönüşüm olsun. $\exp_p, 0 \in T_p M$ 'nin bir komşuluğunu, $p \in M$ 'nin bir U komşuluğuna difeomorfik olarak taşıyan, örten ve düzgün bir dönüşümdür. Eğer şimdi $T_p M$ için bir baz seçecek olursak, bu baza bağlı olarak bulunacak katsayılar olarak; $q \in U$ noktalarında \exp_p dönüşümünün tersi, yani $\exp_p^{-1}(q)$ 'yu kullanabiliriz. Bu koordinatlara U üzerinde, p 'de merkezlenmiş normal koordinatlar denir. Eğer $T_p M$ 'de seçtiğimiz baz ortonormal ise bu koordinatlara p noktasında ortonormaldir denir.

p noktasındaki normal koordinatlarda şunlar geçerlidir ;

i.) Çatı ortonormal olduğundan metrik tensör

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij}$$

olur.

ii.) Christoffel sembolleri her i, j, k için $\Gamma_{ij}^k = 0$ 'dir. Çünkü p 'den geçen denklemlerin jeodezikleri lineer olduğundan, her $u \in T_p M$ için

$$\Gamma_{ij}^k(p) u^i u^j = 0$$

olur. Böylece aşağıdaki önermeyi elde ederiz.

Önerme 2.2.1 : M için p merkezli, p 'de ortonormal olan, normal koordinatlarda ve N için $f(p)$ merkezli normal koordinatlarda bir

$$f : M \rightarrow N$$

düzgün dönüşümü için,

$$\tau(f)^\gamma(p) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f^\gamma}{(\partial x^i)^2}(p) \quad (8)$$

olur. Böylece; f 'nin harmonik olmasının gerek ve yeter şartı, $p, f(p)$ çifti için, f 'nin p noktasında Euclidean-Laplace denklemini gerçeklediği, böyle bir koordinat sisteminin var olmasıdır.

örnek 1. Varsayalımki N bir disk olsun. Yani her noktada Riemann eğriliği sıfır olsun. Bu takdirde N için her koordinat dönüşümünde

$$L_{\alpha\beta}^\gamma = 0$$

olan bir koordinat örtüsü vardır. Buradan

$$\tau(f)^\gamma = \Delta f^\gamma$$

olur. Bu tür koordinatlarda $\tau(f) = 0$ olduğu açıktır. Özellikle, eğer $N = R^m$ Euclidean uzay ise,

$f : M \rightarrow R^m$ dönüşümü harmoniktir \Leftrightarrow maksimum prensibi gereği $f = sbt$

Örnek 2. Eğer, M ve N bi-invariant Riemann metriklere sahip Lie gruplar ve $f : M \rightarrow N$ bir homomorfizm ise f harmoniktir. M 'nin biriminde bunu göstermek için; M ve N Lie gruplarının etkisiz elemanlarında, normal olan kanonik koordinatları alırsak; f 'nin gösteriminin lineer olduğunu görürüz. Buradanda $\tau(f) = 0$ bulunur (Lemma.3.[3]).

f 'nin esas formu aşağıdaki şekilde hesaplanabilir :

f 'nin esas formunu C^r sınıfından ($0 \leq r \leq \infty$) parametrelenmiş bir yay yardımıyla gösterelim. Bunun için $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, $(-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty)$ açık aralığında N 'ye bir

$$\tilde{\rho} : (\alpha, \beta) \rightarrow N$$

C^r dönüşümü verilsin. Genellikle $\rho = \tilde{\rho}(\alpha, \beta)$ görüntüsüne yay ve $\tilde{\rho}$ 'ya da bu yayın parametrizasyonu denir. Şimdi

$$\tilde{\rho} : (\alpha, \beta) \rightarrow N , s \rightarrow \tilde{\rho}(s)$$

yay uzunluğuna göre parametrelenmiş, C^2 sınıfından bir yay olsun. $\tilde{\rho}$ 'nin hız vektörü; $\tilde{\rho}$ 'nin s vektörüne göre (s doğrultusunda) kovaryant türevidir. Yani bu hız vektörü;

$$\frac{D}{ds} \frac{d\tilde{\rho}}{ds} (s) \in T_{\tilde{\rho}(s)}N$$

dir. Bu hız vektörünü lokal koordinatlarda ise;

$$\left\{ \frac{D}{ds} \frac{d\tilde{\rho}}{ds} \right\}^\gamma = \frac{d^2 \tilde{\rho}^\gamma}{ds^2} - \frac{d\tilde{\rho}^\alpha}{ds} \frac{d\tilde{\rho}^\beta}{ds} L_{\alpha\beta}^\gamma \quad (9)$$

şeklinde ifade edebiliriz. s yay uzunluğunu ölçtüğünden, yani s parametresi yay uzunluğunu gösterdiğinden bu hız vektörü ρ 'nun jeodezik eğrilik vektörüdür.

Önerme 2.2.3 : $T_p M$ 'de bir birim vektör e ve γ 'da p noktasında e 'ye teğet olan jeodezik olsun. γ 'yi s 'ye göre parametrelendirelim ve

$$s \rightarrow \tilde{\gamma}(s)$$

bu parametrizasyonu gösterebiliriz. Buradan $T_{f(p)} N$ 'nin bir vektörü olarak düşünebileceğimiz $\nabla df(e, e)$, parametrelenmiş,

$$f \circ \tilde{\gamma} : s \rightarrow f(\tilde{\gamma}(s))$$

yayının hız vektörüdür. Bu hız vektörüne basitçe $f(\gamma)$ 'nin hız vektörü diyeceğiz.

İspat : (x^1, \dots, x^n) p -merkezli, p 'de ortonormal olan normal koordinatlar ve γ x^1 -eksenine göre parametrelenmiş, e 'ye teğet olan jeodezik olsun. Buradan (1) denklemi yardımıyla $\nabla df(e, e)$ 'nin katsayılarını,

$$f_{;11}^\gamma = \frac{\partial^2 f^\gamma}{(\partial x^1)^2} - \Gamma_{11}^k f_k^\alpha + L_{\alpha\beta}^\gamma f_1^\alpha f_1^\beta$$

olarak hesaplarız. Fakat koordinatlar normal olduğundan, her k için,

$$\Gamma_{11}^k(p) = 0$$

dir. Dolayısıyla yukarıdaki eşitlik,

$$f_{;11}^\gamma = \frac{\partial^2 f^\gamma}{(\partial x^1)^2} - L_{\alpha\beta}^\gamma f_1^\alpha f_1^\beta$$

haline gelir. Ayrıca x^1 γ boyunca yay uzunluğunu ölçtüğünden, (9) denklemiyle karşılaştırıldığında bunun $f \circ \tilde{\gamma}$ 'nin hız vektörünün katsayıları olduğu görülür.

Önerme 2.2.4 : $\{e_1, \dots, e_m\}$, $T_p M$ 'de bir ortonormal baz ve $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ $p \in M$ noktasında sırasıyla e_1, \dots, e_m 'ye teğet olan jeodezikler olsun. Bu takdirde;

f harmoniktir $\Leftrightarrow f(\gamma_i), i \in \{1, \dots, m\}$ ifadesinin hız vektörlerinin ortalaması sıfırdır.

İspat :

$$\begin{aligned}\tau(f)(p) &= \text{Tr} \nabla df(p) = \sum_{i=1}^m \nabla df(e_i, e_i)(p) \\ &= m \text{ defa } f(\gamma_i) \text{'nin hız vektörlerinin ortalaması}\end{aligned}$$

olur. Böylece harmonik dönüşümlerin, jeodezikleri jeodezıklere resmettiğini görmüş oluruz.

Harmonik dönüşümlere güzel bir örnek de 2. esas formları sıfır olan dönüşümlerdir. Bu tür dönüşümler total jeodezikler olarak adlandırılırlar. ∇df 'nin yukarıdaki notasyonundan şunu söyleyebiliriz;

Bir dönüşüm total jeodeziktir \Leftrightarrow Bu dönüşüm lineer olarak jeodezikleri jeodezıklere resmeder.

Not :

i.) Eğer $N = R$ ise yani $f = M \rightarrow R$ şeklinde ise bu f fonksiyonun harmonik olması şartı bu fonksiyonun Δf Laplasiyeninin sıfır olmasıdır.

ii.) Eğer $M = R$ ise $\tau(f)(p), f: R \rightarrow N$ parametrelenmiş yayının jeodezik eğriliğidir. Buradan;

f harmoniktir $\Leftrightarrow f$ jeodezik belirler.

Böylece, harmonik dönüşüm problemi bazan genelleştirilmiş elastik bant problemi olarak adlandırılır.

2.3. BİR DÖNÜŞÜMÜN ENERJİSİ

Şimdi, harmonik dönüşümü bir başka yolla, bir fonksiyonelin ekstremleri olarak hesaplayalım. Bu hesaplama için M 'nin kompakt, yönlendirilmiş ve N 'nin de kompakt olduğunu varsayalım.

Tanım 2.3.1 : Bir $f : M \rightarrow N$ C^2 dönüşümünün enerji integrali, negatif olmayan

$$E(f) = \frac{1}{2} \int_M \|df\|^2 *1 \quad (10)$$

sayısıdır. Burada $*1$, M üzerinde metrik ve yönlendirme tarafından kanonik olarak belirlenmiş hacim m -form'u ve $\| \cdot \|$ ise M ve N 'nin metrikleri tarafından belirlenmiş, $L^1(TM, f^*TN)$ demeti üzerindeki normu göstermektedir. Açık olarak;

$$\|df\|^2(p) = \sum_{i=1}^m \|df(e_i)\|_N^2(p) \quad (11)$$

Burada $\{e_i\}$, T_pM 'in bir ortonormal bazı ve $\| \cdot \|_N$, $T_{f(p)}N$ teğet uzayda, N 'deki metrik tarafından belirlenen normu göstermektedir.

Bu ifade lokal koordinatlarda ise şu şekli alır;

her i için

$$\|df(e_i)\|_N^2(p) = h_{\alpha\beta} f_i^\alpha f_i^\beta$$

olur ve buradan

$$\|df\|^2(p) = g^{ij} h_{\alpha\beta} f_i^\alpha f_j^\beta$$

yazılabilir. Buradan şu önermeyi yazabiliriz.

Önerme 2.3.2 : Bir $f : M \rightarrow N$ C^2 dönüşümünün harmonik olması için gerek ve yeter şart bu fonksiyonun, $E(f)$ enerji integralinin bir ekstremalı olmasıdır.

$\{e_1, \dots, e_m\}$ $T_p M$ 'deki ortonormal teğet vektörlerin bir kümesi olsun. (10) denklemindeki $E(f)$ enerji integralinin

$$\|df\|^2(p)$$

integrantına, f 'nin oluşturduğu

$$\frac{\|df(e_i)\|_N}{\|e_i\|_M}$$

uzunluğundaki gerilmelerinin, kareleri toplamı olarak bakabiliriz. Böylece $E(f)$ 'yi minimize etmeyi, f 'nin gerilmelerinin minimize edilmiş olarak düşünebiliriz.

Şimdi herhangi bir dönüşümün, harmonik dönüşüme dönüştürülüp dönüştürülemeyeceği sorusunu inceleyelim.

Teorem 2.3.3 : (*Varlık teoremi*)

Eğer, M kompakt, bağlantılı, düzgün bir Riemann manifold ve N kompakt, bağlantılı ve pozitif olmayan kesit eğriliğe sahip, düzgün bir Riemann Manifold ise $M \rightarrow N$ dönüşümlerinin her homotopi sınıfları bir tane harmonik dönüşüm içerir. (Burada, M üzerindeki yönlendirme varsayımı gerekli değildir.)

Teorem 2.3.4 : (*Teklik teoremi*)

M kompakt, bağlantılı, düzgün bir Riemann Manifoldu ve N kompakt, bağlantılı ve kesin negatif kesit eğriliği olan bir düzgün Riemann Manifoldu olsun.

Eğer $f : M \rightarrow N$ harmonik ise aşağıdaki iki durum olmadığı müddetçe, f kendi homotopi sınıfı içindeki tek harmonik dönüşümdür.

- i.) $f \equiv sht$ ise,
- ii.) $f : M \rightarrow N$, $p \in M$ noktalarını γ jeodezik yayına resmediyorsa; burada f , kendisine homotopik bütün harmonik dönüşümlerin f 'nin döndürülmesiyle elde edilen, yani her $f(p)$ noktasının γ üzerinde, sabit bir yönlendirilmiş uzaklığa götürülmesiyle elde edilen bir dönüşümdür. Ve tersine f 'nin döndürülüşü f 'nin homotopi sınıfındaki bir harmonik dönüşümü verir.

Uyarı 2.3.5 :

- i.) Teorem.2.3.4:(teklik teoremindeki)'deki eğrilik varsayımı hafifletilebilir.
- ii.) Teorem.2.3.4:(teklik teoremindeki)'deki şartları sağlayan M, N manifoldları için harmonik dönüşümler, $M \rightarrow N$ dönüşümlerinin her homotopi sınıfları için kanonik gösterimlerini verir. N üzerindeki eğrilik şartı kaldırıldığında bu teklik teoreminin geçerli olup olmadığı halen çözülmemiş temel bir problem olarak durmaktadır.[12]

2.4. HARMONİK DÖNÜŞÜMLERİN BİLEŞKESİ

Lemma 2.4.1 : M, N ve P düzgün Riemann manifoldları olsun. Eğer,

$$f : M \rightarrow N \text{ ve } k : N \rightarrow P$$

herhangi iki düzgün dönüşüm ise f, k dönüşümlerinin bileşkesinin temel formu ve gerilme alanının lokal koordinatlardaki ifadeleri,

$$(k \circ f)_{;ij}^a = k_{\gamma}^a f_{;ij}^{\gamma} + k_{;\alpha\beta}^a f_i^{\alpha} f_j^{\beta} \quad (12)$$

ve

$$\tau(k \circ f)^a = k_{\gamma}^a \tau(f)^{\gamma} + g^{ij} k_{;\alpha\beta}^a f_i^{\alpha} f_j^{\beta} \quad (13)$$

şeklindedir.

M, N ve P düzgün Riemann manifoldları, $f : M \rightarrow N$ ve $k : N \rightarrow P$ herhangi iki düzgün harmonik dönüşüm olsun. Genel olarak harmonik dönüşümlerin $k \circ f$ bileşkesinin de harmonik olmasını beklemeyiz. Yani aşağıdaki örnekte olduğu gibi bileşkeyi oluşturan harmonik dönüşümlerin birinde veya diğerinde bir kısıtlama yapılmazsa bileşke fonksiyonun harmonik olacağını söyleyemeyiz.

Örnek 3 : $T^2(\theta, \varphi)$, $0 \leq \theta, \varphi \leq 2\pi$ ile parametrelenmiş düz 2-toru ve

$$k : T^2 \rightarrow S^3, k(\theta, \varphi) = \frac{(\cos \theta, \sin \theta, \cos \varphi, \sin \varphi)}{\sqrt{2}} \in R^4$$

olsun. Burada k T^2 'den S^3 'e minimal olan fakat total jeodezik olmayan

bir Riemann gömme tanımlar. k 'nin harmonik dönüşüm olduğunu görmek için, $\tau(k)$ 'nin S^3 'e ($k(p) \in R^4$) dik olduğunu gösterelim. T^2 düz olduğundan

$$\tau(k)^\alpha = \frac{\partial^2 k^\alpha}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 k^\alpha}{\partial \varphi^2} = -k^\alpha, \quad (1 \leq \alpha \leq 4)$$

olur. Bu durumda $\tau(k)(p)$, $k(p)$ noktasında S^3 'ün çapı boyunca yönlendirilmiştir.

Diğer taraftan T^2 , S^3 içinde total jeodezik değildir.

$$f : S^1 \rightarrow T^2, \quad f(0) = (\theta, 0)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm T^2 'nin jeodeziğidir. f , $0 \in R^4$ 'ü içeren 2-düzlemde bulunmaz ve buradan f S^3 'ün bir jeodeziği değildir. Özel olarak;

$$f : S^1 \rightarrow T^2 \quad \text{ve} \quad k : T^2 \rightarrow S^3$$

dönüşümleri harmonik olmalarına karşın $k \circ f$ bileşke dönüşümü harmonik değildir.

Simdi $\tau(k \circ f)$ için, koordinatlardan bağımsız bir ifade türetelim. $\tau(f)$ 'nin M 'den TN 'ye bir dönüşüm olarak düşünülebileceğini hatırlarsak, k dönüşümünün türevi dk 'yi, TN 'den TP 'ye ve dk 'nin kovaryant türevi ∇dk 'yi da, $TN \otimes TN$ 'den TP 'ye bir lineer demet dönüşümü olarak kabul edebiliriz. Buradan (13) denklemini

$$\tau(k \circ f) = dk \circ \tau(f) + Tr \nabla dk(df, df) \quad (14)$$

formunda yazılabilir. Burada $\nabla dk(df, df)$ ifadesi

$$TM \otimes TM \xrightarrow{df \otimes df} TN \otimes TN \xrightarrow{\nabla dk} TP$$

bileşkesidir. Böylece $p \in M$ için

$$Tr \nabla dk(df, df)(p) = \sum_{i=1}^n \nabla dk(df(e_i), df(e_i))(p) \quad (15)$$

olur. Burada $\{e_1, \dots, e_n\}$, $T_p M$ için bir ortonormal bazdır.

Sonuç 2.4.2 : Eğer, f harmonik ve k total jeodezik ise $k \circ f$ 'de harmoniktir.

İspat : f harmonik olduğundan $\tau(f) = 0$ dir. Ayrıca k total jeodezik olduğundan $\nabla dk = 0$ olur. Böylece (14) denkleminde

$$\begin{aligned} \tau(k \circ f) &= dk \circ \tau(f) + Tr \nabla dk(df, df) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Yani $k \circ f$ harmoniktir.

3. SONUÇ

Bilindiđi gibi Riemann manifoldları arasındaki dönüşümlerin harmonik olma şartı, gerilme alanının sıfır olmasıdır. Normal koordinatlar kullanıldığında, harmoniklik şartının daha sadeleştirdiği gözlenmiştir. Küçük boyutlarda harmonik dönüşümlerle ilgili örnekler verilmiştir. Son olarak da, iki harmonik dönüşümün bileşkesinin genel olarak harmonik olmadığı gözlenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] M. P. Do Carmo; *Riemann Geometry*, (Birkhauser, 1979)
- [2] C.T.J .Dodson ve T. Poston ; *Tensor Geometry* , (Springer-Verlag, 1977)
- [3] J. Eells, ve J. H. Sampson ; *Harmonic Mappings on Riemannian Manifolds* ,
Amer. J. Math., 89(1964), 109-160
- [4] J. Eells ve L. Lemaire ; *A Report on Harmonic Maps* , Bull.London Math.
Soc., 10 (1978), 1- 68
- [5] J. Eells ve L. Lemaire ; *Selected Topics in Harmonic Maps* , Regional
Conference series in Math., NO : 50, (1983)
- [6] J. Eells ve L. Lemaire ; *Another Report on Harmonic Maps* , Bull. London
Math. soc., 20 (1988), 386 - 524
- [7] S. Gallot , D. Hulin ve J. Lafontaine; *Riemannian Geometry* , (Springer-
Verlag, 1990)
- [8] J. Jost ; *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, (Springer-Verlag, 1995)
- [9] I. S. Sokolnikof ; Çeviren : Dr. Y. Pala; *Tensör Analizi ve Uygulamaları* , (
Uludağ Ü. Basımevi, 1993)
- [10] M. R. Spiegel, Ph.D ; Çeviren : C. Cerit ; *Vektörel Analiz ve Tensör
Analizine Giriş*
- [11] T. J. Willmore ; *Total Curvature in Riemann Geometry*, (Ellis Horwood
Ltd., 1982)
- [12] J. C. Wood, Ph.D thesis ; *Harmonic Mappings Between Surfaces*, Warwick
University, (1974)

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Bekir TANAY

Doğum Yeri : AĞRI

Doğum Yılı : 01.10.1970

Medeni Hali : Evli

EĞİTİM VE AKADEMİK BİLGİLER

Lise : 1984-1988 Anadolu Denizcilik Meslek Lisesi

Lisans : 1989-1993 Karadeniz Teknik Üniversitesi

Yabancı Dil : İngilizce

MESLEKİ BİLGİLER

1994- ... Muğla Üniversitesi araştırma görevlisi

EC YÖNETİMİ VE EKONOMİK KURUMLAR
DOKÜMAN YÖNETİM VE KONTROL