

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**LOKAL KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
DÖNÜŞÜM OPERATÖRLERİ YARDIMIYLA ÇÖZÜMLERİ**

Neslihan Sabriye DEMİREL

Doktora Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

ŞUBAT 2023

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

**LOKAL KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DÖNÜŞÜM
OPERATÖRLERİ YARDIMIYLA ÇÖZÜMLERİ**

Tez Yazarı

Neslihan Sabriye DEMİREL

Danışman

Prof. Dr. Reşat YILMAZER

ŞUBAT 2023

ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Başlığı:	Lokal Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Dönüşüm Operatörleri Yardımıyla Çözümleri
Yazarı:	Neslihan Sabriye DEMİREL
İlk Teslim Tarihi:	02.01.2023
Savunma Tarihi:	13.02.2023

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Prof. Dr. Reşat YILMAZER Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	<i>İmza</i> Onayladım
Başkan:	Prof. Dr. Mustafa İNÇ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Doç. Dr. Asif YOKUŞ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Doç. Dr. Sertaç GÖKTAŞ Mersin Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Doç. Dr. Tolga AKTÜRK Ordu Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza

Prof. Dr. Burhan ERGEN
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “ Lokal Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Dönüşüm Operatörleri Yardımıyla Çözümleri” Başlıklı Doktora Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

13.02.2023

Neslihan Sabriye DEMİREL



ÖNSÖZ

Doktora tezimde ele almış olduğum lokal kesirli dönüşüm operatörleri matematik ve fen bilimleri alanında kendine yeni bir alan bulan konudur. Kullandığım bu dönüşümler fraktal kümelerde tanımlı çeşitli lokal kesirli diferansiyel denklemlere uygulanarak çözümler bulunabilir ve geliştirilebilir. Böylece diferansiyel denklemlerin uygulama alanları göz önüne alındığında birçok çalışma alanı bulacağı görülür.

Yapmış olduğum çalışmanın hazırlanmasında ve düzenlenmesinde bana destek olan, her zaman beni destekleyen, bilgilerinden faydalandığım ve yardımlarını esirgemeyen beni sabırla destekleyen danışmanım sayın hocam Prof. Dr. Reşat YILMAZER'e teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

Bu süreçte her zaman yanımda bulunan, maddi manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, yaşadığım stresi beraber göğüslediğim ve bana sabırla yaklaşan eşim Mehmet DEMİREL'e, annem Ayşe KÜÇÜKER'e, babam Lütfi KÜÇÜKER'e, kardeşlerim Aslıhan EREN ve Oğuzhan KÜÇÜKER'e olmak üzere bütün aileme teşekkürlerimi sunarım.

Neslihan Sabriye DEMİREL
ELAZIĞ, 2023

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
TABLolar LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	x
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Kesirli Hesap Teorisinde Yapılan Çalışmalar	2
1.2. Lokal Kesirli Hesap İle İlgili Yapılan Çalışmalar	10
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	16
2.1. Gamma Fonksiyonu.....	16
2.2. Beta Fonksiyonu	18
2.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu	18
2.4. Hata Fonksiyonları	19
2.5. Fraktallar ve Fraktal Boyutlar.....	20
2.6. Cantor Kümesi.....	21
2.7. Lokal Kesirli Türev	22
2.8. Lokal Kesirli İntegral.....	26
3. LOKAL KESİRLİ FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ	30
4. LOKAL KESİRLİ LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ.....	40
5. SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN LOKAL KESİRLİ ÇÖZÜMÜ	52
6. HELMHOLTZ DENKLEMİNİN LOKAL KESİRLİ ÇÖZÜMÜ.....	64
7. SONUÇLAR	68
KAYNAKLAR.....	69
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Lokal Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Dönüşüm Operatörleri Yardımıyla Çözümleri

Neslihan Sabriye DEMİREL

Doktora Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Şubat 2023, Sayfa: x + 70

Bu çalışmada lokal kesirli operatörler yardımıyla lokal kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmeyi amaçladık. Bunun için lokal kesirli Fourier dönüşümü ve lokal kesirli Laplace dönüşümünü kullandık.

Tezimizin birinci ve ikinci bölümlerinde lokal kesirli hesaplamalar hakkında literatür taraması yaptık, çalışmamız için gerekli olan temel tanım ve teoremleri verdik. Çalışmamızın ilk orijinal bölümünde lokal kesirli operatörler yardımıyla unified Schrödinger denklemi ile homojen olan ve homojen olmayan lokal kesirli Schrödinger denklemlerinin çözümlerini elde ettik. Çalışmamızın diğer orijinal kısmında ise benzer şekilde lokal kesirli operatörler yardımıyla homojen olan ve homojen olmayan lokal kesirli Helmholtz denklemlerinin genel çözümlerini bulduk.

Anahtar Kelimeler: Kesirli Türev ve İntegraller (Diferintegraller), Lokal kesirli Türev ve İntegraller, Gamma Fonksiyonu, Beta Fonksiyonu, Schrödinger Denklemi, Helmholtz Denklemi.

ABSTRACT

Solutions of Local Fractional Differential Equations with Transform Operators

Neslihan Sabriye DEMİREL

Ph.D. Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

February 2023, Pages: x + 70

This study looks on finding solutions of local fractional differential equations with transforms operators. For this purpose, we use local fractional Fourier transforms and local fractional Laplace transforms.

In the first and second chapters, we review the literature about local fractional calculus and we give some definitions, functions and theorems of fractional calculus and local fractional calculus used for this thesis. First original chapter of our study, we analyze solutions of unified local fractional Schrödinger equation, homogeneous local fractional Schrödinger equation and non-homogeneous local fractional Schrödinger equation with local fractional operators. Second original chapter of our study, we analyze solutions of homogeneous local fractional Helmholtz equation and non-homogeneous local fractional Helmholtz equation with local fractional operators.

Keywords: Fractional Derivative and Integrals (*Differintegrals*), Local Fractional Calculus, Gamma Function, Beta Function, Schrödinger Equation, Helmholtz Equation.

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1.1. Weistrass Fonksiyonu	10
Şekil 2.1. $\alpha, \beta = 1$ için Mittag-Leffler Fonksiyonu	19
Şekil 2.2. Cantor Kümesi	22



TABLÖLAR LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 2.1. Gamma Fonksiyonu İçin Bazı Önemli Değerler.....	17
Tablo 2.2. Önemli Bazı Fonksiyonların Lokal Kesirli Türevi	25
Tablo 2.3. Bazı Önemli Fonksiyonların Lokal Kesirli İntegrali	28



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\Gamma(x)$	: Gamma fonksiyonu
$B(p, q)$	: Beta fonksiyonu
$D^\alpha f = f_\alpha$	: Keyfi mertebeden türev ($\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\alpha > 0$)
$D^{-\beta} f = I^{-\beta} F = f_{-\beta}$	: Keyfi mertebeden integral ($\beta \in \mathbb{R}$ ve $\beta > 0$)
α	: Alfa
β	: Beta
ε	: Epsilon
δ	: Delta
τ	: Tau
φ, ψ	: Phisi
σ	: Sigma
γ	: Gamma
Ω, ω	: Omega

1. GİRİŞ

1924 yılında Varşova’da dünyaya gelen Benoit Mandelbrot, IBM firmasında çalışmak için Amerika’ya taşındı. Burada bilgisayar yardımıyla bazı bağıntıları formüle edip tanım kümesini belirledikten sonra nesnelerin grafiklerini çiziyordu fakat formülize edilemeyen dağlar, bulutlar, ağaçlar gibi birçok nesnenin bilgisayarda grafiğini çizmek mümkün olmuyordu. Doğadaki birçok nesneler matematiksel eğriler olan daire, dörtgen, üçgen, küre, sinüs dalgaları gibi düzgün geometrik şekillerle tanımlamak imkânsızdı. Klasik Öklid geometride kullanılan şekiller nokta, doğru, daire, çokgen gibi şekillerden ibaretti ve bu yüzden farklı yapılardan oluşan desenlerin incelenmesinde ve araştırılmasında yetersiz kalıyordu. Mandelbrot bu karmaşıklığı gidermek için *fraktal* kavramını ortaya atmıştır. Latince kırılmış veya parçalanmış anlamına gelen ‘*fractus*’ kelimesi köküne sahip *fraktal* kavramını ilk olarak ‘*The Fractal Geometry of Nature*’ kitabında kullanmıştır [1]. Buradaki *fraktal* kavramı ise matematik alanında çoğunlukla kendine benzeme veya tekrar etme özelliği gösteren karmaşık geometrik şekillerin ortak adıdır (Falconer, 2014). Fraktal geometri kendi kendini tekrar ederek sonsuza kadar küçülen veya büyüyen şekilleri, kendine benzer bir nesnede nesneyi oluşturan parçaları inceler. Düzensiz şekilli ayrıntılar ya da desenler giderek küçülen ölçeklerde (kendini oluşturan alt bölümlerde) yinelenir ve tamamen soyut nesnelerde bu olay sonsuza kadar sürebilir (Yılmaz, 2013). Başka bir ifadeyle her parça bir üst parçanın ve hatta cismin bütününe benzerdir (Falconer, 2014).

Fraktalların çeşitli algoritmalar yardımıyla bilgisayar ortamında kullanabilir olması coğrafyadan matematiğe birçok farklı alanda kendine yer bulmasına neden olmuştur. (Stevens, 1990). Biyoloji, tıp, ekonomi, finans, astronomi vb. birçok alanda yaygın olarak kullanılan fraktal geometri (Eren, 2009) günümüzde doğal bilimlerde de oldukça büyük bir ilgi uyandırmıştır. Yerküre şekillerinin tanımlanmasında ya da incelenmesinde Öklid geometrisi yerine fraktalların kullanılması çok daha yararlı olduğu inancı yaygınlaşmaya başlamıştır (Hamilton vd., 1992; Tarboton, 1996; Zhou, 2004; Shaikh vd., 2010; Shaohui ve Zhongping, 2013; Karle ve Kolwankar, 2015).

Fraktallar genel olarak geometrik ve rastgele (geometrik olmayan-kompleks) fraktal olmak üzere iki guruba ayrılırlar. Geometrik fraktallar, geometrik ve kendine benzer özellik gösterirken rastgele fraktallar kendine birebir benzeme özelliği göstermeyen şekillerdir (Yılmaz, 2013; Falconer, 2014). Rastgele fraktalların tüm ölçeklerinde rastgelelik vardır. Bu tip nesneler daha çok doğada görülür ve bu nedenle doğanın simülasyonunda rastgele fraktallar kullanılır (Yılmaz, 2013). Ayrıca fraktallar çarpıcı düzensizlik ve dinamik yüzeyler olarak tanımlanmıştır [2]. Bunun sonucu olarak fraktallar diferansiyellenemeyen fonksiyonlar olarak tanımlanırlar [3].

Kesirli hesap özel fonksiyonlardan, kontrol teorisine, kimyasal fizikten, anormal difüzyona kadar birçok alanda kendine uygulama alanı bulmuştur. Kesirli hesap ve fraktal hesap arasındaki

genel ilişki ilk olarak Tatom tarafından gösterilmiştir [4]. Ayrıca reel sayılardaki fraktal kümeleri üzerinde yapılan çalışmalar hesaplamalar Parvate ve Gangal tarafından yapılmıştır [5].

Şimdi ilk olarak birçok bilim dalında önemli uygulama alanları bulunan kesirli hesap analizi ile ilgili yapılan çalışmaları ve daha sonra ise diferansiyellenemeyen fonksiyonların çözümlerini bulurken birçok yararı bulunan lokal kesirli analiz ile yapılan çalışmaları inceleyelim.

1.1. Kesirli Hesap Teorisinde Yapılan Çalışmalar

Leibniz'in yanı sıra birçok önemli bilim adamının ilgisini çeken kesirli hesap ile ilgi pek çok çalışmalar yapılmıştır. *G.W.Leibniz* (1695-1697), $d^{1/2}x$ ifadesinin $x^2\sqrt{dx}:x$ e eşit alınabileceğini ve daha sonra sonsuz serilerin kesirli hesaplamayı ifade edebileceğini varsaymıştır. *L.Euler* (1730), ise serilerin interpolasyonunun birçok alanda önemli bir yere sahip olabileceğinden bahsetmiştir.

J.L.Lagrange (1772), geliştirmiş olduğu,

$$\frac{d^a}{d\mu^a} \frac{d^b}{dx^b} \psi = \frac{d^{a+b}\psi}{d\mu^{a+b}}$$

biçiminde tanımlı mertebesi tamsayı olan diferansiyel operatörler için geçerli olan kuralların a ve b sabitlerinin kesirli olduğunda da geçerli olup olmadığını sorgulamaya başlamıştır.

S.F.Lacroix (1819), tümevarımdan faydalananarak $\psi = \mu^a$ ve $a > 0$ tamsayısı için μ^a nin b . mertebeden türevini

$$\frac{d^b\psi}{d\mu^b} = \frac{a!}{(a-b)!} \mu^{a-b}, a \geq b$$

olacak biçimde geliştirmiştir. Daha sonra gamma fonksiyonunu kullanarak,

$$\frac{d^b\psi}{d\mu^b} = \frac{\Gamma(a+1)}{(a-b)!} \mu^{a-b}$$

bulmuştur. Ayrıca $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ olmak üzere $\psi = \mu$ ve $b = 1/2$ alarak,

$$\frac{d^{1/2}\psi}{d\mu^{1/2}} = \frac{2\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}}$$

elde etmiştir.

J.B.J.Fourier (1822),

$$\psi(\mu) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \cos p(\mu - \alpha) dp$$

eşitliği ile keyfi mertebeli türevlerden bahsetmiştir. $\eta \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$\frac{d^\eta}{d\mu^\eta} \cos p(\mu - a) = p^\eta \cos \left[p(\mu - a) + \frac{1}{2} \eta \pi \right]$$

elde edip, daha sonra bunu da genelleştirip η yerine keyfi ϑ değerini alarak,

$$\frac{d^\vartheta}{d\mu^\vartheta} \psi(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} p^\vartheta \cos \left[p(\mu - \alpha) + \frac{1}{2} \vartheta \pi \right] dp$$

denklemini oluşturmuştur. *Fourier*, ϑ sayısını pozitif veya negatif olacak biçimde herhangi bir değer almıştır.

Kesirli işlemleri ilk olarak *N.H.Abel* (1823) isimli bilim adamı kullanmıştır. Bunu ise *Abel*, bir integral denklemin çözümünde kesirli hesabı kullanarak oluşturmuştur. *Abel*'in integral denklemi,

$$k = \int_0^\mu (\mu - t)^{1/2} \psi(t) dt$$

biçiminde olup, bu denklemin sağ tarafına $\sqrt{\pi} [d^{-1/2} / d\mu^{-1/2}] \psi(\mu)$ uygulamış ve

$$\frac{d^{1/2}}{d\mu^{1/2}} k = \sqrt{\pi} \psi(\mu)$$

formülünü bulmuştur. Böylece $\psi(\mu)$ 'i belirleyerek kesirli hesapta önemli bir başarı sağlamıştır.

H.T.Davis (1927), kesirli hesap operatörlerini tanımlamada kullanılan çeşitli notasyonları incelemiş,

$$\frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^\mu (\mu - t)^{v-1} \psi(t) dt$$

matematiksel eşitliğini tanımlamak için ${}_c D_\mu^{-v} \psi(\mu)$ notasyonunu kullanmış ve

$${}_c D_\mu^{1/2} u + \lambda u = \psi(\mu)$$

biçimindeki gibi kesirli üsse sahip bazı diferansiyel denklemlerin çözümünü elde etmek için bu notasyonu kullanmıştır.

J. Liouville (1832-1834), $(d^{1/2}/d\mu^{1/2})e^{2\mu}$ ifadesini ele alarak kesirli operatörleri kullanmış, mekanik ve geometrinin bazı problemlerini çözmüştür. Ayrıca keyfi mertebeden türevler için,

$$D^v e^{a\mu} = a^v e^{a\mu}$$

tanımını oluşturmuştur.

$$\psi(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n \mu}, \quad \text{Re}(a_n) > 0$$

$$D^v \psi(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^v e^{a_n \mu}$$

biçimindeki seride, bir $\psi(\mu)$ fonksiyonunun keyfi türevinin açık olarak yazılabileceğini düşünmüş ve gamma fonksiyonu ile ilişkili olan,

$$I = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-\mu u} du, \quad \alpha > 0 \text{ ve } \mu > 0$$

belirli integralini kullanarak ikinci bir tanım elde etmeyi planlamıştır. Burada $\mu u = t$ alarak,

$$I = \mu^{-\alpha} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \mu^{-\alpha} \Gamma(\alpha)$$

veya

$$\mu^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} I$$

formüllerini bulmuştur. Bu son denkleme D^v operatörünü uygulamış ve

$$D^v \mu^{-\alpha} = \frac{(-1)^v}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} u^{\alpha+v-1} e^{-\mu u} du$$

$$D^v \mu^{-\alpha} = \frac{(-1)^v \Gamma(\alpha + v)}{\Gamma(\alpha)} \mu^{-\alpha-v}$$

tanımlarını elde etmiştir.

$$\frac{d^n \psi}{d\mu^n} = 0$$

denkleminin

$$\psi_c = c_0 + c_1 \mu + c_2 \mu^2 + \dots + c_{n-1} \mu^{n-1}$$

biçiminde tamamlayıcı bir çözüme sahip olduğu görülmüştür ve keyfi u değeri için,

$$\frac{d^u \psi}{d\mu^u} = 0$$

denkleminin de tamamlayıcı bir çözüme sahip olup olmadığını tartışmıştır.

D.F.Gregory (1841), operatörler hesabı tanımının kurucusudur.

$$\psi(\mu, \xi) = Ae^{\mu ap^{1/2}} + Be^{-\mu ap^{1/2}}$$

biçiminde tanımlı $\psi(x, t)$ fonksiyonu için

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu^2} = a^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi}$$

olacak şekilde ısı denklemini vermiştir.

B.Riemann (1847), Taylor serilerini genelleştirerek kesirli integral tanımını,

$$\frac{d^{-\nu}}{d\mu^{-\nu}} \psi(\mu) = D^{-\nu} \psi(\mu) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^{\mu} (\mu - t)^{\nu-1} f(t) dt$$

biçiminde tanımlamıştır. Bu tanıma tamamlayıcı bir fonksiyon eklemiş ve burada, integralin alt limiti olan c 'nin ve tamamlayıcı fonksiyonun değeri '0' alınarak, kesirli integrasyon tanımına uygun olacak biçime getirilmiştir.

C.J.Hargreave (1848), $n \notin \mathbb{Z}^+$ olmak şartıyla n . mertebeden genelleştirilmiş Leibniz türevi üzerine çalışmalar da bulunmuş ve , D^n n . mertebeden diferansiyel operatör, D^{v-n} kesirli bir operatör ve $\binom{v}{n}$ de $\Gamma(v+1)/n! \Gamma(v-n+1)$ olmak üzere

$$D^v \psi(\mu) \varphi(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{v}{n} D^v \psi(\mu) D^{v-n} \varphi(\mu)$$

formülünü elde etmiştir.

A.K.Grünwald (1867), μ in bilinen fonksiyonu için

$$\theta = \int_0^{\mu} (\mu - t)^v f(t) dt$$

formülünü elde etmiştir.

A.V.Letnikov (1868),

$$[D^q D^p \psi(\mu)]_{\mu_0}^\mu = [D^{q+p} \psi(\mu)]_{\mu_0}^\mu$$

eşitliğini ispatlamıştır. Ayrıca, Cauchy integral formülünden yararlanarak,

$$D^n \psi(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{\psi(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}} d\omega$$

tanımını oluşturmuş ve n yerine $v \in \mathbb{R}$ yazarak,

$$D^v \psi(z) = \frac{\Gamma(v+1)}{2\pi i} \int_c \frac{\psi(\omega)}{(\omega - z)^{v+1}} d\omega$$

formülünü elde etmiştir.

O. Heaviside (1892), mühendislere çok faydalı olan kablolardaki elektrik akımının iletkenlik teorisindeki metotlarını kullanmıştır. a^2 bir sabit ve ψ ise sıcaklık olmak üzere bir boyutlu ısı denklemini,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu^2} = a^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi}$$

olacak biçimde almış ve $\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = p$ alarak,

$$D^2 \psi = a^2 p \psi$$

elde etmiş ve

$$p^{1/2} = \frac{d^{1/2}}{d\mu^{1/2}} = D^{1/2}$$

eşitlikleriyle doğru sonuçlar elde etmiştir.

E.Post (1919), kesirli hesap operatörleri ile alakalı iki probleme iki farklı çözüm üretmeye çalışmıştır. İlkinde

$${}_c D_x^{-\nu} \psi(\mu) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^{\mu} (\mu - t)^{\nu-1} \psi(t) dt$$

biçiminde tanımlı Liouville'in kesirli mertebeli integrasyon tanımını, $c = -\infty$ alarak çözmüş. Diğer çözümünde ise Riemann tanımından faydalanmıştır.

M.T.Naraniengar (1919), $\Gamma(n+1)/\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ değerine karşılık gelen $R(n)$ katsayısını oluşturmuş ve

$$D^{1/2}(\mu^n) = R(n)\mu^{n-\frac{1}{2}}$$

denklemini üzerine çalışmıştır.

W.C.Brenke (1922), fizikte kullanmak üzere,

$$\mathcal{Q}(h) = c \int_0^h (h-t)^{1/2} \psi(t) dt$$

biçiminde tanımlı denklem ve bu denklemin uygulamaları üzerine çalışmalar yapmıştır..

M.Riesz (1949), Riemann uzayındaki dalga denklemi, izafiyet teorisi, Lorenz uzayı ve olasılık teorisinde,

$$I^{\nu} \psi(\mu) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{\alpha}^{\mu} (\mu - t)^{\nu-1} \psi(t) dt$$

şeklindeki kesirli integralin çeşitli özelliklerinden bahsetmiştir.

N.Stuloff (1950),

$$\Delta^{\alpha} \mu_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} \mu_{n+\nu}$$

eşitliği ile kesirli mertebenin farklarını ele almıştır.

B.Kuttner (1953),

$$\frac{d^n}{d\mu^n} \frac{1}{\Gamma(n-k)} \int_0^\mu (\mu-t)^{n-k-1} \psi(t) dt$$

ve

$$(-1)^n \frac{d^n}{d\mu^n} \frac{1}{\Gamma(n-k)} \int_0^\mu (t-\mu)^{n-k-1} \psi(t) dt$$

biçiminde tanımlı iki integral arasındaki ilişkiyi incelemiştir.

M.Caputo (1967),

$${}_a^C D_t^\alpha \psi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t \frac{\psi^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}$$

biçiminde tanımlı formülü oluşturmuştur.

K.B.Oldham ve *J.Spainer* (1970),

$$\frac{d^{1/2} \psi(t)}{dt^{1/2}}$$

şeklinde adi diferansiyel olarak ifade ettikleri $\frac{1}{2}$ mertebeli operatör yardımıyla elektrokimyasal kinetikleri açıklayabilecekleri yeni bir yöntem bulduklarını ileri sürmüşlerdir.

K.S.Miller ve *B.Ross* (1993),

$$D^{\bar{\alpha}} \psi(t) = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \dots D^{\alpha_n} \psi(t), \bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

eşitliğini oluşturmuşlardır [6-11].

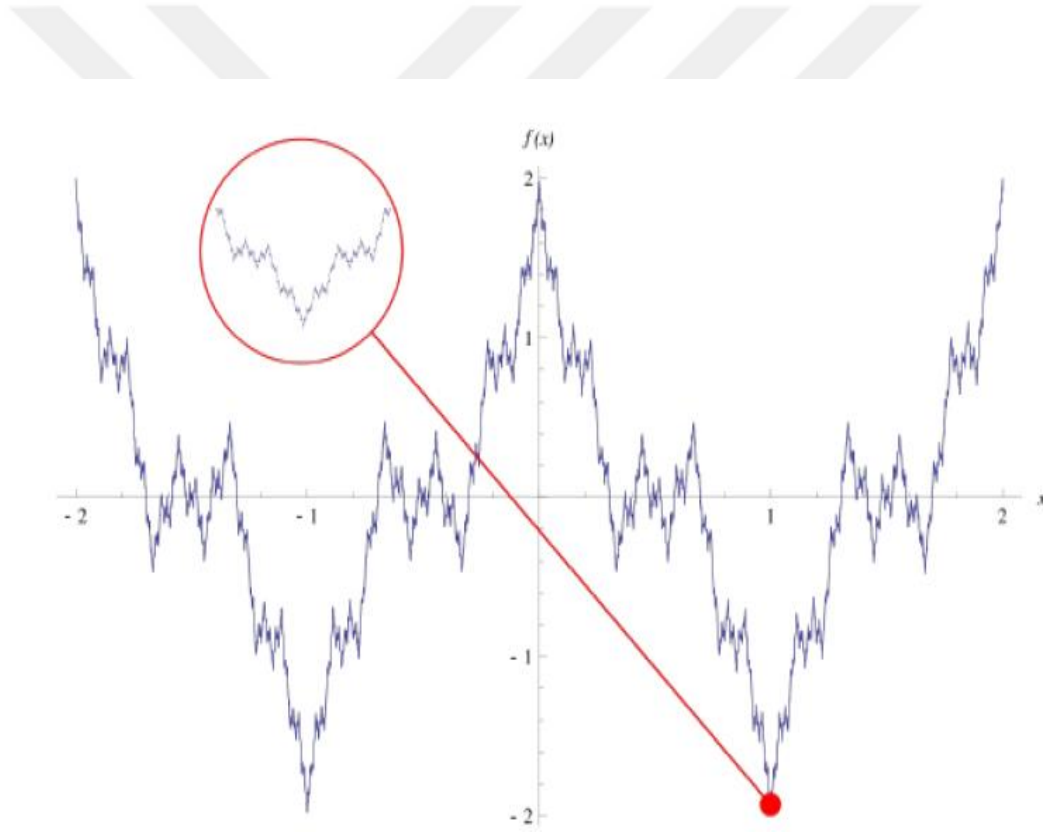
1695'den beri, fen ve mühendislik bilimlerini içeren birçok teori ve uygulama alanlarında kullanılan kesirli hesap tekniği ve bu teknik üzerine yapılan çalışmalar; fizik, kimya, mühendislik vb. alanlarda çeşitli uygulama sahalarına olanak vermiştir. İletim hatları teorisi, izafiyet teorisi, elektromanyetik teorisi, esneklik teorisi, ısı transferi, difüzyon, robot teknolojisi, PID kontrol sistemleri, Schrödinger denklemi, dalga denklemi, malzeme birimi, sıvıların kimyasal analizi, insan kemiğinde yayılan ultrasonik dalgalar, ses dalgaları, mekanik problemleri, biyolojik sistemlerin elektriksel hareketi, elektrokimyasal kinetikler vb. birçok uygulamada kesirli türev ve integrallerden yararlanılarak ilerleme sağlanmıştır.

1.2. Lokal Kesirli Hesap İle İlgili Yapılan Çalışmalar

Kesirli türev operatörleri lokal olmayan operatörlerdir fakat fraktallar lokal bir ölçekleme özelliğine sahip kümelerdir. Ayrıca daha önceki yıllarda, sürekli bir fonksiyonun en az bir noktada türevlenebilir olması gerektiği kanısı yaygındı. Bu görüş, 1872 yılında Karl Weierstrass [12] tarafından kurulan her yerde sürekli ama hiçbir yerde diferansiyellenemeyen

$$W_\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin \lambda^k t$$

fonksiyonu ile değişmiştir.



Şekil 1.1. Weierstrass fonksiyonu

Şekil 1.1’de görüldüğü gibi Weierstrass fonksiyonu ve benzer özelliklere sahip fonksiyonlar şekilde görüldüğü gibi genellikle fraktallara benzerler. Bundan dolayı bu fonksiyonlara fraktal fonksiyonlar denir. Klasik analiz, böyle düzensiz eğri ve düzlemleri sınıflandırılmasında ve incelenmesinde yetersiz kalmıştır. Kısaca fraktallar üzerindeki olayları tanımlamak ve sürekli ama hiçbir yerde türevlenemeyen fonksiyonların davranışlarını incelemek için yeni bir analize ihtiyaç

duyulmuştur. Lokal kesirli analiz yani fraktal analiz bu ihtiyaca cevap veren matematiğin bir dalı olmuştur.

Bu analiz bilim adamları ve mühendislerin büyük ölçüde dikkatini çekmiştir. Bu nedenle lokal kesirli türev tanımının farklı yaklaşımları oluşmuş ve bunun sonucunda birçok lokal kesir analizi ortaya çıkmıştır. İlk olarak lokal kesirli türev operatörü 1990'lı yıllarda Kolwankar ve Gangal tarafından Riemann-Liouville tanımının yeniden normalleşmesi sonucunda oluşturulmuştur [12-14]. Kolwankar ve Gangal fraktal kümelerinde tanımlı lokal kesirli türevi

$${}_{\mu_0}D_{\mu}^{\alpha} = \left. \frac{d^{\alpha}\psi(\mu)}{d\mu^{\alpha}} \right|_{\mu=\mu_0} = \lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \frac{d^{\alpha}(\psi(\mu) - \psi(\mu_0))}{d(\mu - \mu_0)^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

biçiminde tanımlamıştır [13,14]. Bu tanım matematik ve mühendislikte geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Ayrıca Kolwankar ve Gangal fraktal kümelerinde tanımlı lokal kesirli integrali

$${}_{\mu_0}I_{\mu}^{\alpha} = \int_a^b \psi(\mu) d^{\alpha}\mu = \lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \sum_{i=0}^{N-1} \psi(\mu_i^*) \frac{d^{-\alpha}I_{d\mu_i}}{d(\mu_{i+1} - \mu_i)}$$

olacak biçimde tanımlamış ve $I_{d\mu_i}, [\mu_i, \mu_{i+1}]$ aralığında tanımlı bileşke fonksiyon ve $\mu_i^*, [\mu_i, \mu_{i+1}]$ aralığında uygun noktalar ve $i = 0, 1, \dots, N-1, \mu_0 = a, \mu_N = m$ için $[\mu_i, \mu_{i+1}] [a, b]$ aralığının parçalanışdır [13-14].

Genel olarak farktalların hareketini anlamak için Parvate ve Gangal fraktal türevi

$${}_{\mu_0}D_{\mu}^{\alpha} = \left. \frac{d^{\alpha}\psi(\mu)}{d\mu^{\alpha}} \right|_{\mu=\mu_0} = F - \lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \frac{\psi(\mu) - \psi(\mu_0)}{S_F^{\alpha}(\mu) - S_F^{\alpha}(\mu_0)}$$

biçiminde tanımlamışlardır. Burada $F - \lim_{\mu \rightarrow \mu_0} F$ matematiksel ifadesi fraktal kümesindeki noktalar boyunca $\psi(\mu)$ fonksiyonunun limitinin notasyonudur [5]. Daha sonra Parvate ve Gangal fraktal integrali

$${}_{\mu_0}I_{\mu}^{\alpha} = \int_a^b \psi(\mu) d_F^{\alpha}\mu = \sum_{i=0}^{N-1} \psi(\mu_j) S_F^{\alpha}(\mu_{j+1}) - S_F^{\alpha}(\mu_j), \quad 0 < \alpha \leq 1$$

olarak göstermişlerdir [5]. Bu sırada Adda ve Cresson lokal kesirli türevi

$${}_{\mu_0}D_{\mu}^{\alpha} = \left. \frac{d^{\alpha}\psi(\mu)}{d\mu^{\alpha}} \right|_{\mu=\mu_0} = \lim_{\mu \rightarrow \mu_0} {}_{\mu_0}D_{y,-\sigma}^{\alpha} [\sigma(\psi - \psi(\mu_0))(\mu)]$$

biçiminde tanımladığını ileri sürdüler. Buradaki $\sigma = \pm$ ve $D_{y,-\sigma}^{\alpha}$ Riemann-Liouville türev operatörüdür [14,15]. Daha sonra ise Riemann-Liouville türev operatörü ile lokal kesirli operatör arasındaki ilişki anlaşılmıştır [16].

Parvate ve Gangal, fraktal türevi kullanılarak

$${}_{\mu_0}D_{\mu}^{\alpha} = \left. \frac{d^{\alpha}\psi(\mu)}{d\mu^{\alpha}} \right|_{\mu=\mu_0} = \lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \frac{\Gamma(1+\alpha)[\psi(\mu) - \psi(\mu_0)]}{(\mu - \mu_0)^{\alpha}}$$

elde edilir ki bu denklemde

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

Euler Gamma fonksiyonu olmak üzere $\Delta^{\alpha}[f(x) - f(x_0)] = \Gamma(1+\alpha)[\psi(\mu) - \psi(\mu_0)]$ olacak biçimde Gao, Yang ve Kang'ın lokal kesirli türev notasyonu olan

$${}_{\mu_0}D_{\mu}^{\alpha} = \left. \frac{d^{\alpha}\psi(\mu)}{d\mu^{\alpha}} \right|_{\mu=\mu_0} = \lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \frac{\Delta^{\alpha}[\psi(\mu) - \psi(\mu_0)]}{(\mu - \mu_0)^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (1.1)$$

denklemine eşittir. Benzer şekilde Parvate ve Gangal fraktal integralini kullanarak

$${}_{\mu_0}I_{\mu}^{\alpha} = \int_a^b \psi(\mu) d^{\alpha}\mu = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \psi(t_j^*)(t_{j+1} - t_j)$$

bulunur. $0 < \alpha \leq 1$ için $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ ve $\Delta t = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_j, \dots\}$ ve $j = 0, 1, \dots, N-1$, $t_0 = a$ ve $t_N = b$ için $[t_j, t_{j+1}]$ aralığı $[a, b]$ aralığının bir parçalanışı olmak üzere Gao, Yang ve Kang'ın lokal kesirli integrali

$${}_{\mu_0}I_{\mu}^{\alpha}\psi(\mu) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b \psi(t)(dt)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} \psi(t_j)(\Delta t_j)^{\alpha}$$

biçiminde tanımlanmıştır.

(1.1) denklemini kullanarak Chen

$$\mu_0 D_\mu^\alpha = \frac{d^\alpha \psi(\mu)}{d\mu^\alpha} \Big|_{\mu=\mu_0} = \lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \frac{\psi(\mu) - \psi(\mu_0)}{\mu^\alpha - \mu_0^\alpha}$$

fraktal türevini oluşturmuştur. Burada denklem $(\mu_{i+1} - \mu_i)^\alpha = \mu_{i+1}^\alpha - \mu_i^\alpha$ olmak üzere kesirli küme teorisini sağlar [15]. Gao, Yang ve Kang lokal kesirli türev notasyonu olan

$$H^\alpha(F \cap (\mu, \mu_0)) = (\mu - \mu_0)^\alpha = \frac{K}{\Gamma(1 + \alpha)} L_0^\alpha$$

kullanarak He, mühendislikte uygulama alanları oluşturmak için

$$\mu_0 D_\mu^\alpha = \frac{d^\alpha \psi(\mu)}{d\mu^\alpha} \Big|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\psi(\mu) - \psi(\mu_0)}{KL_0^\alpha}$$

yeni bir fraktal türevini oluşturmuştur [18].

Xiao-Jun Yang lokal kesirli hesap üzerinde çalışarak lokal kesirli Fourier serisini oluşturmuştur. $\psi(\mu)$ fonksiyonu 2π periyotlu ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere lokal kesirli hesabı genişleterek

$$a_n = \frac{1}{\pi^\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\mu) \cos_\alpha(n\pi) (dt)^\alpha$$

$$b_n = \frac{1}{\pi^\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\mu) \sin_\alpha(n\pi) (dt)^\alpha$$

Fourier sabitleri olmak üzere

$$\psi(\mu) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos_\alpha(n\pi)^\alpha + b_n \sin_\alpha(n\pi)^\alpha)$$

olacak biçimde lokal kesirli Fourier seriyi tanımlamıştır [16]. Bunun ile birlikte $k \in \mathbb{Z}$ ve

$$C_K = \frac{1}{(2\pi)^\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\mu) E_\alpha(-i^\alpha (k\mu)^\alpha) (d\mu)^\alpha$$

Fourier katsayısı olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun Mittag-Leffler formunun lokal kesirli Fourier serisini ise

$$\psi(\mu) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k E_{\alpha}(i^{\alpha}(k\mu)^{\alpha})$$

olarak tanımlamıştır [16]. Ayrıca Yang, $\psi(\mu)$ $2l$ periyotlu bir fonksiyon ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$a_k = \frac{1}{l^{\alpha}} \int_{-l}^l \psi(\mu) \cos_{\alpha} \frac{\pi^{\alpha}(k\mu)^{\alpha}}{l^{\alpha}} (d\mu)^{\alpha}$$

$$b_k = \frac{1}{l^{\alpha}} \int_{-l}^l \psi(\mu) \sin_{\alpha} \frac{\pi^{\alpha}(k\mu)^{\alpha}}{l^{\alpha}} (d\mu)^{\alpha}$$

Fourier katsayıları için lokal kesirli Fourier serisinin genelleştirilmiş kesirli trigonometrik formunu

$$\psi(\mu) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos_{\alpha} \frac{\pi^{\alpha}(k\mu)^{\alpha}}{l^{\alpha}} + b_k \sin_{\alpha} \frac{\pi^{\alpha}(k\mu)^{\alpha}}{l^{\alpha}} \right)$$

biçimde tanımlamıştır [16]. Diğer taraftan $\psi(\mu)$ $2l$ periyotlu bir fonksiyon ve $k \in \mathbb{Z}$ için

$$C_k = \frac{1}{(2l)^{\alpha}} \int_{-l}^l \psi(\mu) E_{\alpha} \left(\frac{-\pi^{\alpha} i^{\alpha} (k\mu)^{\alpha}}{l^{\alpha}} \right) (d\mu)^{\alpha}$$

Fourier katsayısı olmak üzere lokal kesirli Fourier serisinin kompleks genelleştirilmiş Mittag-Leffler formunu

$$\psi(\mu) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k E_{\alpha} \left(\frac{\pi^{\alpha} i^{\alpha} (k\mu)^{\alpha}}{l^{\alpha}} \right)$$

şeklinde göstermiştir [16]. Diğer taraftan lokal kesirli sürekli $\psi(\mu)$ fonksiyonunun Yang-Fourier dönüşümünü

$$F_{\alpha}\{\psi(\mu)\} = f_{\omega}^{F,\alpha}(\omega) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\alpha}(i^{\alpha}\omega^{\alpha}\mu^{\alpha})\psi(\mu)(d\mu)^{\alpha}$$

biçiminde tanımlamıştır. Yakınsaklık için gerekli koşul

$$\left| \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\alpha}(i^{\alpha} \omega^{\alpha} \mu^{\alpha}) \psi(\mu) (d\mu)^{\alpha} \right| \leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\mu)| (d\mu)^{\alpha} = \|\psi\|_{1,\alpha} < \infty$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Kesirli lokal Fourier dönüşümün tersini ise Yang

$$\psi(\mu) = F_{\alpha}^{-1} \left(f_{\omega}^{F,\alpha}(\omega) \right) = \frac{1}{(2\pi)^{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\alpha}(i^{\alpha} \omega^{\alpha} x^{\alpha}) f_{\omega}^{F,\alpha}(\omega) (d\omega)^{\alpha}$$

olarak ifade etmiştir ve $\psi(\mu)$ lokal kesirli sürekli bir fonksiyondur.

$\psi(\mu)$ lokal kesirli sürekli bir fonksiyon, $s^{\alpha} \in \mathcal{R}^{\alpha}$ olmak üzere $0 < \alpha \leq 1$ için Yang-Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}_{\alpha}\{\psi(\mu)\} = f_{\omega}^{\mathcal{L},\alpha}(\omega) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{\infty} E_{\alpha}(-s^{\alpha} x^{\alpha}) \psi(\mu) (d\mu)^{\alpha}$$

biçiminde tanımlanmıştır, buradaki yakınsaklık için gerekli koşul

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{\infty} |\psi(\mu)| (d\mu)^{\alpha} < k < \infty$$

şeklinde. Ayrıca Yang-Laplace dönüşümünün tersi ise

$$\mathcal{L}_{\alpha}^{-1}\{f_s^{\mathcal{L},\alpha}(s)\} = \psi(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\alpha}} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} E_{\alpha}(s^{\alpha} x^{\alpha}) \psi_s^{\mathcal{L},\alpha}(s) (ds)^{\alpha}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Lokal kesirli hesap üzerinde yapılan bu çalışmaların sonucundan kompleks düzlemde tanımlı gerçek dünyada görülen olayları temel alan çeşitli diferansiyellenemeyen fonksiyonların çözümünü bulmak için faydalandığı görülmüştür. Özellikle mühendislik ve bilimde oluşan diferansiyellenemeyen fonksiyonlar basit lokal kesirli hesap veya kısmi diferansiyel denklemler tarafından modellenir. Bu yüzden bu hesaplama uygulamalı bilim ve matematiksel fizik gibi alanlarda çalışan araştırmacılar için önemli ve dikkat çekicidir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. (Lineer Dönüşüm) V ve W , aynı $\mathbb{F}$ skaler cismi üzerinde vektör uzayları olsun. Bir $T : V \rightarrow W$ dönüşümü $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve $x, y \in V$ için, $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ özelliğini sağlarsa T 'ye bir *lineer dönüşüm* adı verilir. Lineer bir dönüşüm aynı zamanda sürekli ise bu durumda lineer dönüşüm yerine *lineer operatör* veya kısaca *operatör* ifadesi de kullanılır [24].

2.1. Gamma Fonksiyonu

$\Gamma(z)$ Gamma fonksiyonu integral yardımıyla,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

şeklinde tanımlanır, öyle ki $\text{Re}(z)$ kompleks düzleminin sağ yarı kısmına yakınsar. Gerçekten

$$\begin{aligned} \Gamma(x + iy) &= \int_0^{\infty} t^{x+iy-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} e^{iy \log(t)} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \left[\cos(y \log(t)) + i \sin(y \log(t)) \right] dt \end{aligned}$$

dir. Bu formüldeki köşeli parantez içindeki ifade bütün t için sınırlandırılmıştır; sonsuzdaki yakınsama e^{-t} tarafından sağlanmaktadır ve $t = 0$ 'deki yakınsama için $x = \text{Re}(z) > 1$ olmalıdır.

İntegral yardımıyla Gamma fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \Gamma(z + 1) &= \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt \\ &= [-t^z e^{-t}]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z) \end{aligned}$$

biçiminde yazılır, yani $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ 'dir. Buradan

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z(z-1)\Gamma(z-1) = \dots = z!$$

elde edilir. Bu nedenle bu fonksiyona *faktöriyel fonksiyon* ismi de verilir. Böylece

$$\Gamma(1) = 0! = 1$$

yazılabilir. Genel olarak negatif olmayan n tamsayı değeri için,

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}$$

olup diğer taraftan,

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-4)^n n!}{(2n)!} \sqrt{\pi}$$

yazılır. Gamma fonksiyonunun özellikleri arasında

$$\Gamma(-x) = \frac{-\pi \csc(\pi x)}{\Gamma(x+1)}$$

$$\Gamma(2x) = \frac{4^x \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}}$$

$$\Gamma(nx) = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left[\frac{n^x}{\sqrt{2\pi}}\right]^n \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(x + \frac{k}{n}\right)$$

biçimindeki eşitlikleri de yazılabilir. Bazı önemli değerler Tablo 2.1’de verilmiştir [11].

Tablo 2.1. Gamma fonksiyonu için bazı önemli değerler

$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)\sqrt{\pi},$	$\Gamma(1) = 1$
$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)\sqrt{\pi}$	$\Gamma(-1) = \pm\infty$
$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$	$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}$
$\Gamma(0) = \pm\infty$	$\Gamma(2) = 1$
$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)\sqrt{\pi}$	$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

2.2. Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, (Re(p) > 0, Re(q) > 0)$$

integrali yardımıyla tanımlanır. Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasında

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p, q) \Leftrightarrow B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

bağıntısı vardır [11].

2.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu

$\alpha > 0$ olmak üzere $E_\alpha(\cdot)$ notasyonu ile gösterilen Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

ile verilir. Üstel fonksiyonun genelleştirilmesi olan bu fonksiyon Mittag-Leffler tarafından tanımlanmıştır. Mittag-Leffler fonksiyonları, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinde ortaya çıkar.

$\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ notasyonu ile gösterilen iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

biçiminde tanımlanır. $\alpha = 1$ ve $\beta = 1, 2, \dots, m$ alınırsa

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\}$$

elde edilir.

Bu fonksiyon, 1953 yılında R. P. Agarwal ve Erdelyi tarafından tanımlanmıştır. α ve β parametreleri kullanılarak $E_{\alpha,\beta}(z)$ fonksiyonu bazı bilinen fonksiyonlara dönüşür. Bunlar,

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

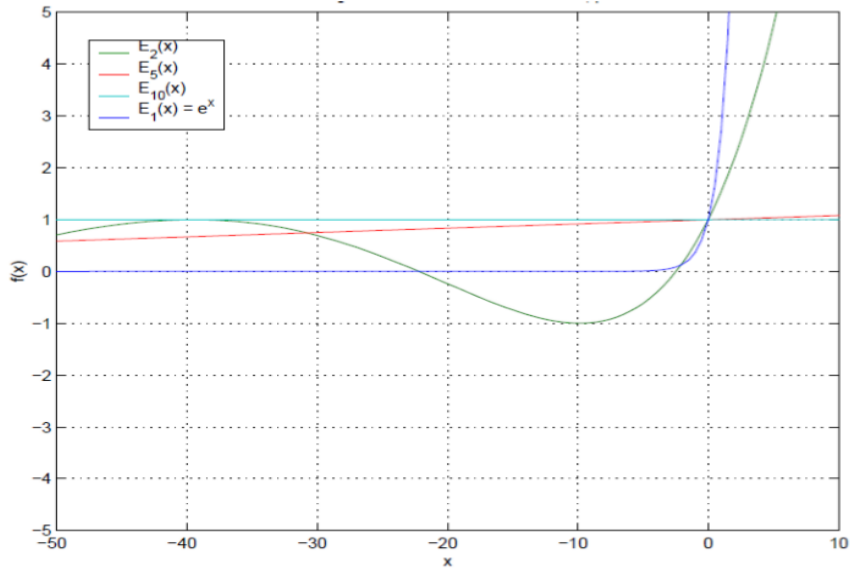
$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}$$

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh z$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh z}{z}$$

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(z)$$

şeklindedir [8,11]. Şimdi şekil 2.1’de $\alpha, \beta = 1$ için Mittag-Leffler fonksiyonun grafiğini verelim.



Şekil 2.1. $\alpha, \beta = 1$ için Mittag-Leffler fonksiyonu

2.4. Hata Fonksiyonu

Gauss hata fonksiyonu olarak da bilinen *Hata Fonksiyonu*

$$erf(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, & x > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^0 e^{-t^2} dt, & x < 0 \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır [10].

2.5. Fraktallar ve Fraktal Boyutlar

Tanım 2.2. $U \subset \mathbb{R}^n$ boş kümeden farklı bir küme olsun.

$$|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$$

kümesine U kümesinin *çapı* denir [25].

Tanım 2.3. $F \subset \mathbb{R}^n$ ve δ pozitif bir reel sayı olsun. Her i için $0 \leq |U_i| \leq \delta$ olmak üzere

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

ise $\{U_i\}$ sayılabilir küme ailesine F kümesine δ –örtüsü denir [25].

Tanım 2.4. $F \subset \mathbb{R}^n$ ve s, δ pozitif reel sayılar olsun. Herhangi bir $\delta > 0$ için

$$H_{\delta}^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i| : \{U_i\}, F \text{ kümesinin bir } \delta - \text{örtüsü} \right\}$$

şeklindedir [25].

Tanım 2.5. (X, d) bir tam metrik uzay ve $A, B \in \mathcal{H}(X)$ olmak üzere,

$$\mathcal{H}(X) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$$

değerine A ve B kümeleri arasındaki *Hausdorff uzaklık* denir [25].

Tanım 2.6. Herhangi bir $F \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\delta}^s(F)$$

ifadesine F kümesinin s –boyutlu Hausdorff ölçüsü denir [25].

Tanım 2.7. Herhangi bir $F \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için

$$\dim(F) = \inf\{s: H^s(F) = 0\}$$

ifadesine F kümesinin Hausdorff boyutu denir [25].

Tanım 2.8. *Fraktal*, topolojik boyutu tam olarak aşan Hausdorff boyutlu bir küme olarak tanımlanır [1].

Tanım 2.9. (X, d) bir metrik uzay ve $A \in \mathcal{H}(X)$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $N(A, \varepsilon)$, A yı örtmek için gerekli olan ε uzunluklu kapalı kutuların minimum sayısı olmak üzere,

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(N(A, \varepsilon))}{\ln 1/\varepsilon} \right)$$

limiti varsa bu limit değerine A 'nın *fraktal boyutu* denir [26].

Ayrıca fraktallar boyutları tamsayı olmayan kümeler ya da neslener olarak da tanımlanır. Bu nedenle bir boyutlu fraktallar koordinatlara bağlı olmayan boyutlarla tanımlanmalıdır ve birçok kesirli boyut tanımı ifade edilmiştir. Bunlardan en eskisi Hausdorff uzayıdır.

2.6. Cantor Kümesi

George Cantor (1845-1918) trigonometrik serileri içeren problemleri çözmek için Cantor kümesini oluşturmuş. Burada her aralığın her yerinde yoğun olmayan, sonsuz, mükemmel bir küme olarak *Cantor üçlü küme* örneğini vermiş ve böylece her mükemmel kümenin her yerde yoğun olması gerekmediğini göstermiştir [25,27].

$K_0 = [0,1]$ aralığı için K_0 aralığını 3 eşit parçaya bölünsün ve ortadaki açık küme olan $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ aralığı kaldırılsın. Geriye kalan kümeye K_1 denilsin. O zaman

$$K_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

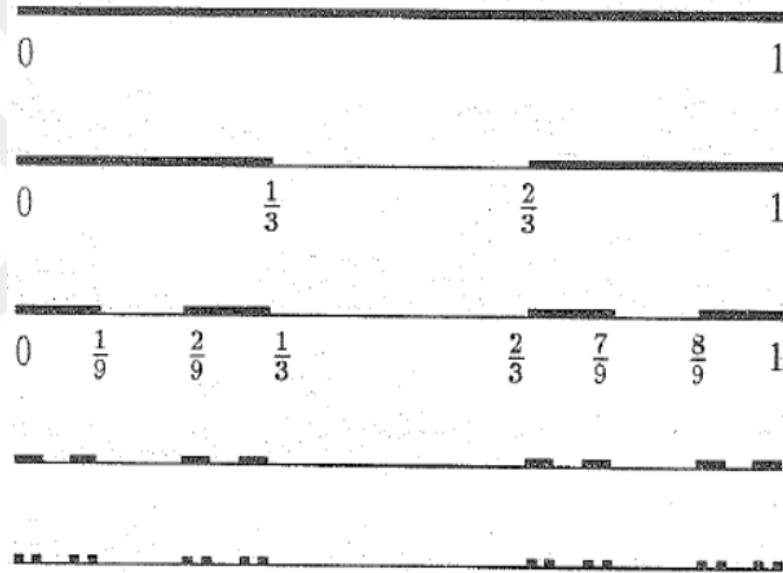
olur. Daha sonra K_1 kümesindeki iki kapalı kümenin her birinin ortasındaki üçte birlik kısım olan açık aralık kaldırılıp geriye kalan kümeye K_2 denilir ve

$$K_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

olur. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere her n adımda bu şekilde devam edip n . Adıma geldiğinde K_n ' deki her bir kapalı kümenin ortasındaki üçte birlik açık aralık kaldırılınsın ve kalan kümeye K_{n+1} denilsin. Hiçbir sınır tanımadan yani n 'yi sonsuza götürerek aynı şekilde işleme devam edilsin. Bu sürecin sonunda

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$$

şeklinde bu sürecin de limit kümesi olan yeni bir küme oluşur. Şekil 2.2'de gibi oluşturulan C olarak gösterilen bu kümeye *Cantor kümesi* denir [25,27].



Şekil 2.2. Cantor kümesi

Diğer taraftan Cantor kümesinin mükemmel olması, hiçbir yerde olmaması, sayılamaz olması, hiçbir aralık içermemesi, kompakt olması gibi önemli özellikleri Cantor kümesini ortaya çıkarır.

2.7. Lokal Kesirli Türev

Bu alt bölümde, tezimiz için gerekli olan lokal kesirli türev ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir [17,30,31].

Tanım 2.10. Kabul edelim ki $\Phi(\mu) \in C_\varepsilon(a, b)$ ve $0 < \varepsilon \leq 1$ olsun. $\sigma > 0$ ve $0 < |\mu - \mu_0| < \delta$ için

$$\Delta^\varepsilon[\Phi(\mu) - \Phi(\mu_0)] \cong \Gamma(1 + \varepsilon)[\Phi(\mu) - \Phi(\mu_0)]$$

olmak üzere

$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu_0) = \left. \frac{d^\varepsilon \Phi(\mu)}{d\mu^\varepsilon} \right|_{\mu=\mu_0} = \lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \frac{\Delta^\varepsilon[\Phi(\mu) - \Phi(\mu_0)]}{(\mu - \mu_0)^\varepsilon} \quad (2.1)$$

biçiminde tanımlı limit vardır ve sonludur. (2.1) denkleminde kullanılan $D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu_0)$ veya $\left. \frac{d^\varepsilon \Phi(\mu)}{d\mu^\varepsilon} \right|_{\mu=\mu_0}$ matematiksel ifadelerine $\mu = \mu_0$ noktasında $\Phi(\mu)$ fonksiyonunun ε . dereceden lokal kesirli türevi denir.

$\Phi(\mu)$ fonksiyonu $[\mu, b)$ aralığında tanımlı ise $\mu = \mu_0$ noktasında $\Phi(\mu)$ fonksiyonunun soldan ε . dereceden soldan lokal kesirli türevi

$$\left. \frac{d^\varepsilon \Phi(\mu)}{d\mu^\varepsilon} \right|_{\mu=\mu_0^-} = \lim_{\mu \rightarrow \mu_0^-} \frac{\Delta^\varepsilon[\Phi(\mu) - \Phi(\mu_0)]}{(\mu - \mu_0)^\varepsilon}$$

şeklinde tanımlıdır. Diğer taraftan $\Phi(\mu)$ fonksiyonu $(a, \mu]$ aralığında tanımlı ise $\mu = \mu_0$ noktasında $\Phi(\mu)$ fonksiyonunun sağdan ε . dereceden lokal kesirli türevi

$$\left. \frac{d^\varepsilon \Phi(\mu)}{d\mu^\varepsilon} \right|_{\mu=\mu_0^+} = \lim_{\mu \rightarrow \mu_0^+} \frac{\Delta^\varepsilon[\Phi(\mu) - \Phi(\mu_0)]}{(\mu - \mu_0)^\varepsilon}$$

şeklinde tanımlıdır.

Kabul edelim ki $\left. \frac{d^\varepsilon \Phi(\mu)}{d\mu^\varepsilon} \right|_{\mu=\mu_0^-}$ ve $\left. \frac{d^\varepsilon \Phi(\mu)}{d\mu^\varepsilon} \right|_{\mu=\mu_0^+}$ tanımlı ve

$$\left. \frac{d^\varepsilon \Phi(\mu)}{d\mu^\varepsilon} \right|_{\mu=\mu_0} = \left. \frac{d^\varepsilon \Phi(\mu)}{d\mu^\varepsilon} \right|_{\mu=\mu_0^-} = \left. \frac{d^\varepsilon \Phi(\mu)}{d\mu^\varepsilon} \right|_{\mu=\mu_0^+}$$

ise $\Phi(\mu)$ fonksiyonunun lokal kesirli türevi vardır.

$0 < \varepsilon \leq 1$ için $\Delta\mu$, μ 'nün artışı ve $\Delta\mu \rightarrow 0$ için $\varpi \rightarrow 0$ olmak üzere $\mu = \mu_0$ noktasında $\Phi(\mu)$ fonksiyonunun fraktal artışı

$$\Gamma(1 + \varepsilon)\Delta^\varepsilon\Phi(\mu_0) = \Delta^\varepsilon(\Phi(\mu) - \Phi(\mu_0)) = D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu_0)(\Delta\mu)^\varepsilon + \varpi(\Delta\mu)^\varepsilon \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır. $0 < \varepsilon \leq 1$ için $\mu = \mu_0$ noktasında $\Phi(\mu)$ fonksiyonunun lokal kesirli diferansiyeli

$$d_\varepsilon \Phi(\mu_0) = D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu_0)(d\mu)^\varepsilon + \varpi(d\mu)^\varepsilon$$

biçiminde tanımlanır. Herhangi bir $\mu \in (a, b)$ noktası için

$$\Phi^{(\varepsilon)}(\mu) = \frac{d^\varepsilon \Phi(\mu)}{d\mu^\varepsilon} = D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu)$$

olur ve bu nedenle $D_\varepsilon(a, b)$ ε -lokal kesirli türev kümesi olarak tanımlanır.

Aşağıda verilen özellik lokal kesirli türev ile süreklilik arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir.

Özellik 2.1. $\Phi(\mu) \in D_\varepsilon(a, b)$ ise $\Phi(\mu) \in C_\varepsilon(a, b)$ olur.

İspat. (2.2) eşitliği kullanılırsa

$$|\Phi(\mu)| = \left| D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu_0) \frac{(\Delta\mu)^\varepsilon}{\Gamma(1+\varepsilon)} + \varpi \frac{(\Delta\mu)^\varepsilon}{\Gamma(1+\varepsilon)} + \Phi(\mu_0) \right| \quad (2.3)$$

elde edilir. Limitin genelleştirilmiş formülü göz önüne alınırsa

$$\lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \Phi(\mu) = \Phi(\mu_0)$$

olur ve herhangi μ değeri için ispat tamamlanmış olur.

Özellik 2.2. $\Phi(\mu) \in D_\varepsilon(a, b)$ ise $\Phi(\mu)$ fonksiyonu $I = (a, b)$ bölgesinde lokal kesirli türeve sahiptir.

İspat. (2.2) eşitliği kullanılırsa $\lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \varpi = 0$ olmak üzere

$$\Delta^\varepsilon \Phi(\mu_0) = D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu_0)(\Delta\mu)^\varepsilon + \varpi(\Delta\mu)^\varepsilon$$

yazılabilir. Burada $\Delta^\varepsilon \Phi(\mu_0)$ ve $(\Delta\mu)^\varepsilon$ yerine sırasıyla $d^\varepsilon \Phi(\mu)$ ve $(d\mu)^\varepsilon$ yazılırsa

$$d^\varepsilon \Phi(\mu) = D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu_0)(d\mu)^\varepsilon + \varpi(d\mu)^\varepsilon$$

elde edilir. $\lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \varpi = 0$ olduğundan ispat tamamlanmış olur.

Özellik 2.3. $\Phi(\mu), \Theta(\mu) \in D_\varepsilon(a, b)$ olmak üzere fraktal kümelerde tanımlı diferansiyellenemeyen fonksiyonların lokal kesirli türev kuralları,

$$a) \quad D^{(\varepsilon)}[\Phi(\mu) \mp \Theta(\mu)] = D^{(\varepsilon)}(\Phi(\mu)) \mp D^{(\varepsilon)}(\Theta(\mu))$$

$$b) D^{(\varepsilon)}[\Phi(\mu)\Theta(\mu)] = D^{(\varepsilon)}[\Phi(\mu)]\Theta(\mu) + D^{(\varepsilon)}[\Theta(\mu)]\Phi(\mu)$$

$$c) D^{(\varepsilon)}\left[\frac{\Phi(\mu)}{\Theta(\mu)}\right] = \frac{D^{(\varepsilon)}[\Phi(\mu)]\Theta(\mu) - D^{(\varepsilon)}[\Theta(\mu)]\Phi(\mu)}{(\Theta(\mu))^2} \quad (\Theta(\mu) \neq 0)$$

şeklinde verilmiştir.

c bir sabit ve $E_\varepsilon(\cdot)$ Mittag-Leffler fonksiyonu olmak üzere fraktal kümesinde tanımlı aşağıdaki diferansiyellenemeyen fonksiyonların kesirli lokal türevleri Tablo 2.2'deki gibidir.

Tablo 2.2. Önemli bazı fonksiyonların lokal kesirli türevi

Fonksiyon	Fonksiyonun Türevi
c	0
$\frac{\mu^{k\varepsilon}}{\Gamma(1+k\varepsilon)}$	$\frac{\mu^{(k-1)\varepsilon}}{\Gamma(1+(k-1)\varepsilon)}$
$E_\varepsilon(\mu^\varepsilon)$	$E_\varepsilon(\mu^\varepsilon)$
$E_\varepsilon(c\mu^\varepsilon)$	$cE_\varepsilon(c\mu^\varepsilon)$
$E_\varepsilon(-\mu^\varepsilon)$	$-E_\varepsilon(-\mu^\varepsilon)$
$E_\varepsilon(\mu^{2\varepsilon})$	$(2\mu)^\varepsilon E_\varepsilon(\mu^{2\varepsilon})$
$E_\varepsilon(c\mu^{2\varepsilon})$	$(2\mu)^\varepsilon cE_\varepsilon(\mu^{2\varepsilon})$
$E_\varepsilon(-\mu^{2\varepsilon})$	$-(2\mu)^\varepsilon E_\varepsilon(-\mu^{2\varepsilon})$
$\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)$	$\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)$
$\sin_\varepsilon(c\mu^\varepsilon)$	$c\sin_\varepsilon(c\mu^\varepsilon)$
$\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)$	$\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)$
$\cos_\varepsilon(c\mu^\varepsilon)$	$c\sin_\varepsilon(c\mu^\varepsilon)$
$\sinh_\varepsilon(\mu^\varepsilon)$	$\cosh_\varepsilon(\mu^\varepsilon)$
$\sinh_\varepsilon(c\mu^\varepsilon)$	$c\cosh_\varepsilon(c\mu^\varepsilon)$
$\cosh_\varepsilon(\mu^\varepsilon)$	$\sinh_\varepsilon(\mu^\varepsilon)$
$\cosh_\varepsilon(c\mu^\varepsilon)$	$c\sinh_\varepsilon(c\mu^\varepsilon)$

Sonuç 2.1. Özel olarak $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\Phi(\mu) = \mu^{(k+1)\varepsilon}$ alınırsa

$$D^{(\varepsilon)}[\Phi(\mu)] = \frac{\Gamma(1+k\varepsilon)}{\Gamma(1+(k-1)\varepsilon)} \mu^{(k-1)\varepsilon}$$

türevi alınır.

Teorem 2.1 (Lokal kesirli Rolle's Teoremi). Kabul edelim ki $\Phi(\mu) \in C_\varepsilon[a, b]$, $\Phi(\mu) \in D_\varepsilon(a, b)$ ve $\Phi(a) = \Phi(b)$ olsun. O zaman $\varepsilon, (0, 1]$ aralığında tanımlı olmak üzere

$$\Phi^\varepsilon(\mu_0) = 0$$

şartını sağlayan bir $\mu_0 \in (a, b)$ noktası vardır.

Teorem 2.2. Kabul edelim ki $\Phi(\mu) \in C_\varepsilon[a, b]$ ve $\Phi(\mu) \in D_\varepsilon(a, b)$ olsun. $\varepsilon \in (0, 1]$ için

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi^\varepsilon(\mu_0) \frac{(b-a)^\varepsilon}{\Gamma(1+\varepsilon)}$$

olacak biçimde bir $\mu_0 \in (a, b)$ noktası vardır.

Teorem 2.3. Kabul edelim ki $\Phi(\mu) \in C_\varepsilon[a, b]$ ve $\Phi(\mu) \in D_\varepsilon(a, b)$ olsun. $\lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \Phi(\mu) = 0$, $\lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \Omega(\mu) = 0$ ve K ya reel bir sayıyı ya da $-\infty, \infty$ sembollerinden birini ifade etmek üzere

$$\frac{\lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \Phi^\varepsilon(\mu)}{\lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \Omega^\varepsilon(\mu)} = K \text{ oluyorsa } \frac{\lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \Phi(\mu)}{\lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \Omega(\mu)} = K$$

olur.

2.8. Lokal Kesirli İntegral

Bu alt bölüm tezimiz için gerekli olan lokal kesirli integral ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir [17,30,31].

Tanım 2.11. Kabul edelim ki $\varphi(\mu) \in C_\varepsilon[a, b]$ ve $0 < \varepsilon \leq 1$ olsun. $\mu_0 = a < \mu_0 < \dots < \mu_{N-1} < \mu_N$ ve $\Delta\mu_k = \mu_{k+1} - \mu_k$ olmak üzere $[a, b]$ aralığının $[\mu_j, \mu_{j+1}]$ ($j = 0, 1, \dots, N-1$) şeklinde bir örüntüsü olsun. Bu durumda $\varphi(\mu)$ fonksiyonunun *lokal kesirli integrali*

$${}_a I_b^{(\varepsilon)} \varphi(\mu) = \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_a^b \varphi(\mu) (d\mu)^\varepsilon = \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \lim_{\Delta\mu_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{N-1} \varphi(\mu_k) (\Delta\mu_k)^\varepsilon$$

şeklinde tanımlanır. Burada Γ , Gamma fonksiyonudur. Bu tanımlardan yararlanarak $\varphi(\mu) \in C_\varepsilon[a, b]$ ve $\varphi(\mu)$, $[a, b]$ kapalı aralığında lokal kesirli türeve sahip olmak üzere aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- a) $a = b$ ise ${}_a I_b^{(\varepsilon)} \varphi(\mu) = 0$ dir.
- b) $a < b$ ise ${}_a I_b^{(\varepsilon)} \varphi(\mu) = -{}_b I_a^{(\varepsilon)} \varphi(\mu)$ dir.
- c) $\varepsilon = 0$ ise ${}_a I_b^{(\varepsilon)} \varphi(\mu) = \varphi(\mu)$ dir.

Özellik 2.4. $\varphi(\mu), \varphi_1(\mu), \varphi_2(\mu) \in D_\varepsilon(a, b)$ olmak üzere fraktal kümelerde tanımlı diferansiyellenemeyen fonksiyonların lokal kesirli integral kuralları aşağıdaki gibi verilmiştir.

- a) ${}_a I_b^{(\varepsilon)} [\varphi_1(\mu) + \varphi_2(\mu)] = {}_a I_b^{(\varepsilon)} (\varphi_1(\mu)) + {}_a I_b^{(\varepsilon)} (\varphi_2(\mu))$
- b) c sabit bir sayı olmak üzere ${}_a I_b^{(\varepsilon)} [c\varphi(\mu)] = c {}_a I_b^{(\varepsilon)} [\varphi(\mu)]$
- c) ${}_a I_b^{(\varepsilon)} 1 = \frac{(b-a)^\varepsilon}{\Gamma(1+\varepsilon)}$
- d) $\varphi(\mu) \geq 0$ ise ${}_a I_b^{(\varepsilon)} \varphi(\mu) \geq 0$ dir.
- e) $|{}_a I_b^{(\varepsilon)} \varphi(\mu)| \leq {}_a I_b^{(\varepsilon)} |\varphi(\mu)|$
- f) $a < b < c$ ise ${}_a I_b^{(\varepsilon)} \varphi(\mu) = {}_a I_c^{(\varepsilon)} \varphi(\mu) + {}_c I_b^{(\varepsilon)} \varphi(\mu)$ dir.
- g) $\varphi(\mu)$ fonksiyonunun en küçük ve en büyük değerleri sırasıyla T ve Π olmak üzere ${}_a I_b^{(\varepsilon)} \varphi(\mu) \in \left[T \frac{(b-a)^\varepsilon}{\Gamma(1+\varepsilon)}, \Pi \frac{(b-a)^\varepsilon}{\Gamma(1+\varepsilon)} \right]$ olur.

Teorem 2.4 (Lokal Kesirli İntegral İçin Ortalama Değer Teoremi). Kabul edelim ki $\varphi(\mu) \in C_\varepsilon[a, b]$ olsun.

$${}_a I_b^{(\varepsilon)} \varphi(\mu) = \varphi(\xi) \frac{(b-a)^\varepsilon}{\Gamma(1+\varepsilon)}$$

olmak üzere (a, b) aralığında bir ξ noktası vardır.

Teorem 2.5. Kabul edelim ki $\varphi(\mu) \in C_\varepsilon[a, b]$ olsun. $\mu \in (a, b)$ için $\Phi(\mu) = {}_a I_\mu^{(\varepsilon)} \varphi(\mu)$ eşitliğini sağlayan $\Phi(\mu)$ fonksiyonu var ise

$$\frac{\partial^\varepsilon \Phi(\mu)}{\partial \mu^\varepsilon} = \varphi(\mu)$$

olur.

Teorem 2.6 (Lokal Kesirli İntegral İçin Newton-Leibniz Formülü).

$\Phi^\varepsilon(\mu) = \varphi(\mu) \in C_\varepsilon[a, b]$ olduğunu kabul edersek

$${}_a I_b^{(\varepsilon)} \varphi(\mu) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

olur.

Teorem 2.7 (Kısmi Lokal Kesirli İntegrasyon). Kabul edelim ki $\varphi_1(\mu), \varphi_2(\mu) \in C_\varepsilon[a, b]$ ve $\varphi_1(\mu), \varphi_2(\mu) \in D_\varepsilon(a, b)$ olsun. Buradan

$${}_a I_b^{(\varepsilon)} \left\{ \left[\frac{\partial^\varepsilon}{\partial \mu^\varepsilon} \varphi_1(\mu) \right] \varphi_2(\mu) \right\} = [\varphi_1(\mu) - \varphi_2(\mu)]_a^b - {}_a I_b^{(\varepsilon)} \left\{ \varphi_1(\mu) \left[\frac{\partial^\varepsilon}{\partial \mu^\varepsilon} \varphi_2(\mu) \right] \right\}$$

biçiminde yazılır.

Teorem 2.8 (Lokal Kesirli Taylor Teoremi). Kabul edelim ki $D^{((k+1)\varepsilon)}\varphi(\mu) \in C_\varepsilon(a, b)$ olsun. Her $\mu \in (a, b)$ ve $k = 0, 1, \dots, n$ için $a < \mu_0 < \xi < \mu < b$ olmak üzere lokal kesirli Taylor teoremi

$$\varphi(\mu) = \sum_{k=0}^n \frac{D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu_0)}{\Gamma(1 + \varepsilon)} (\mu - \mu_0)^{k\varepsilon} + \frac{D^{((n+1)\varepsilon)}\varphi(\xi)}{\Gamma(1 + (n+1)\varepsilon)} (\mu - \mu_0)^{(n+1)\varepsilon}$$

biçiminde tanımlanır.

c sabit bir sayı ve $E_\varepsilon(\cdot)$ Mittag-Leffler fonksiyonu olmak üzere fraktal kümesinde tanımlı bazı diferansiyellenemeyen fonksiyonların lokal kesirli integralleri Tablo 2.3'deki gibi verilmiştir.

Tablo 2.3. Bazı önemli fonksiyonların lokal kesirli integrali

Fonksiyon	Fonksiyonun İntegral
c sabit sayısı	$\frac{c\mu^{k\varepsilon}}{\Gamma(1 + k\varepsilon)}$
$\frac{\mu^{k\varepsilon}}{\Gamma(1 + k\varepsilon)}$	$\frac{\mu^{(k+1)\varepsilon}}{\Gamma(1 + (k+1)\varepsilon)}$
$E_\varepsilon(\mu^\varepsilon)$	$E_\varepsilon(\mu^\varepsilon) - 1$
$E_\varepsilon(c\mu^\varepsilon)$	$\frac{cE_\varepsilon(\mu^\varepsilon) - 1}{c}$
$\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)$	$-[\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon) - 1]$
$\sin_\varepsilon(c\mu^\varepsilon)$	$\frac{-[\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon) - 1]}{c}$

Tablo 2.3. (Devam)

$\cos_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})$	$\sin_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})$
$\cos_{\varepsilon}(c\mu^{\varepsilon})$	$\frac{\sin_{\varepsilon}(c\mu^{\varepsilon})}{c}$
$\frac{\mu^{k\varepsilon}}{\Gamma(1+k\varepsilon)}\sin_{\varepsilon}(c\mu^{\varepsilon})$	$-\frac{1}{c}\left[\frac{\mu^{k\varepsilon}}{\Gamma(1+k\varepsilon)}\cos_{\varepsilon}(c\mu^{\varepsilon})-\frac{1}{c}\sin_{\varepsilon}(c\mu^{\varepsilon})\right]$
$\frac{\mu^{k\varepsilon}}{\Gamma(1+k\varepsilon)}\cos_{\varepsilon}(c\mu^{\varepsilon})$	$\frac{1}{c}\left[\frac{\mu^{k\varepsilon}}{\Gamma(1+k\varepsilon)}\sin_{\varepsilon}(c\mu^{\varepsilon})-\frac{1}{c}(\cos_{\varepsilon}(c\mu^{\varepsilon})-1)\right]$
$E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})\sin_{\varepsilon}(c\mu^{\varepsilon})$	$\frac{E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})[\sin_{\varepsilon}(c\mu^{\varepsilon})-c\cos_{\varepsilon}(c\mu^{\varepsilon})]+c}{1+c^2}$
$E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})\cos_{\varepsilon}(c\mu^{\varepsilon})$	$\frac{E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})[\sin_{\varepsilon}(c\mu^{\varepsilon})-c\cos_{\varepsilon}(c\mu^{\varepsilon})]-1}{1+c^2}$

3. LOKAL KESİRLİ FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde tezimiz için gerekli olan lokal kesirli Fourier dönüşümü ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir [17,30,31].

Tanım 3.1. $\phi(\tau)$ fonksiyonu $2L$ periyotlu bir fonksiyon olsun. $k \in \mathbb{N}$ için

$$A(0, \varepsilon) = \frac{1}{L^\varepsilon} \int_{-L}^L \phi(\tau) (d\tau)^\varepsilon$$

$$A(k, \varepsilon) = \frac{1}{L^\varepsilon} \int_{-L}^L \phi(\tau) \cos_\varepsilon \left(\frac{\pi k \tau}{L} \right)^\varepsilon (d\tau)^\varepsilon$$

ve

$$B(k, \varepsilon) = \frac{1}{L^\varepsilon} \int_{-L}^L \phi(\tau) \sin_\varepsilon \left(\frac{\pi k \tau}{L} \right)^\varepsilon (d\tau)^\varepsilon$$

lokal kesirli Fourier sabitleri olmak üzere $\phi(\tau)$ 'nin genelleştirilmiş *lokal kesirli Fourier serisi*

$$\phi(\tau) \sim \frac{A(0, \varepsilon)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A(k, \varepsilon) \cos_\varepsilon \left(\frac{\pi k \tau}{L} \right)^\varepsilon + B(k, \varepsilon) \sin_\varepsilon \left(\frac{\pi k \tau}{L} \right)^\varepsilon \right]$$

biçiminde tanımlıdır.

Buradan hareketle $\phi(\tau)$ fonksiyonu 2π periyotlu bir fonksiyon olmak üzere $k \in \mathbb{N}$ için $\phi(\tau)$ 'nin genelleştirilmiş *lokal kesirli Fourier serisi*

$$\phi(\tau) \sim \frac{A(0, \varepsilon)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A(k, \varepsilon) \cos_\varepsilon(k\tau)^\varepsilon + B(k, \varepsilon) \sin_\varepsilon(k\tau)^\varepsilon]$$

biçiminde tanımlıdır.

Tanım 3.2. $\phi(\tau)$ fonksiyonu $2L$ periyotlu bir fonksiyon olsun. $k \in \mathbb{N}$ için

$$\varphi(k, \varepsilon) = \frac{1}{(2L)^\varepsilon} \int_{-L}^L \phi(\tau) E_\varepsilon \left(-\frac{\pi^\varepsilon i^\varepsilon (k\tau)^\varepsilon}{L} \right) (d\tau)^\varepsilon \quad (3.1)$$

lokal kesirli Fourier sabitleri olmak üzere $\phi(\tau)$ 'nin genelleştirilmiş *lokal kesirli Fourier dönüşümü*

$$\phi(\tau) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k, \varepsilon) E_{\varepsilon} \left(\frac{\pi^{\varepsilon} i^{\varepsilon} (k\tau)^{\varepsilon}}{L} \right) \quad (3.2)$$

biçiminde tanımlıdır.

Buradan hareketle $\phi(\tau)$ fonksiyonu 2π periyotlu bir fonksiyon olmak üzere $k \in \mathbb{N}$ için lokal kesirli Fourier sabitleri

$$\varphi(k, \varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^{\varepsilon}} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\tau) E_{\varepsilon}(-i^{\varepsilon} (k\tau)^{\varepsilon}) (d\tau)^{\varepsilon} \quad (3.3)$$

olmak üzere $\phi(\tau)$ 'nin genelleştirilmiş *lokal kesirli Fourier serisi*

$$\phi(\tau) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k, \varepsilon) E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon} (k\tau)^{\varepsilon}) \quad (3.4)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.3. $1 \leq \varepsilon < \infty$ ve $1 \leq \nu < \infty$ için ν -normu altında *genelleştirilmiş* $L_{\nu, \varepsilon}[R]$ uzayı

$$\|\theta\|_{\nu, \varepsilon} = \left(\frac{1}{\Gamma(1 + \varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} |\theta(\tau)|^{\nu} (d\tau)^{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\nu}}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.4. $\theta \in L_{1, \varepsilon}[R]$ ve $\|\theta\|_{1, \varepsilon} < \infty$ için

$$\mathcal{F}[\theta(\tau)] = \Theta(\omega) = \frac{1}{\Gamma(1 + \varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau) E_{\varepsilon}(-i^{\varepsilon} \tau^{\varepsilon} \omega^{\varepsilon}) (d\tau)^{\varepsilon} \quad (3.5)$$

biçiminde tanımlı $\mathcal{F}$ operatörüne *lokal kesirli Fourier dönüşüm operatörü* denir.

Tanım 3.5.

$$\mathcal{F}^{-1}[\Theta(\omega)] = \theta(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\omega) E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon} \tau^{\varepsilon} \omega^{\varepsilon}) (d\omega)^{\varepsilon} \quad (3.6)$$

biçiminde tanımlı $\mathcal{F}^{-1}$ operatörüne *lokal kesirli ters Fourier dönüşümü* denir.

Teorem 3.1 (Lokal Kesirli Fourier Dönüşüm Operatörü İçin Fourier İntegral Teoremi). $\theta(\tau)$ fonksiyonu $[-\infty, \infty]$ aralığında lokal kesirli sürekliliğe sahip olsun. Buradan

$$\theta(\tau) = \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{(2\pi)^\varepsilon} {}_{-\infty}I_{\infty}^{(\varepsilon)} \left[{}_{-\infty}I_{\infty}^{(\varepsilon)} (\theta(\tau)) E_\varepsilon(-i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon) \right] E_\varepsilon(i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon)$$

elde edilir ve lokal kesirli Fourier dönüşüm operatörü için Fourier integral teoremidir.

Özellik 3.1. (Lokal Kesirli Fourier Dönüşüm Operatörü İçin Lineerlik)

$$\theta_1(\tau), \theta_2(\tau), \Theta_1(\tau), \Theta_2(\tau) \in L_{1,\varepsilon}[R]$$

$$\mathcal{F}[\theta_1(\tau)] = \Theta_1(\omega)$$

ve

$$\mathcal{F}[\theta_2(\tau)] = \Theta_2(\omega)$$

olmak üzere a ve b sabitleri için

$$\mathcal{F}[a\theta_1(\tau) + b\theta_2(\tau)] = a\Theta_1(\omega) + b\Theta_2(\omega) \quad (3.7)$$

eşitliği sağlanır.

İspat Fourier dönüşümün tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[a\theta_1(\tau) + b\theta_2(\tau)] &= \frac{1}{\Gamma(1 + \varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} [a\theta_1(\tau) + b\theta_2(\tau)] E_\varepsilon(-i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon \\ &= a \frac{1}{\Gamma(1 + \varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_1(\tau) E_\varepsilon(-i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon \\ &\quad + b \frac{1}{\Gamma(1 + \varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_2(\tau) E_\varepsilon(-i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon \\ &= a\Theta_1(\omega) + b\Theta_2(\omega) \end{aligned}$$

elde edilir.

Özellik 3.2. (Lokal Kesirli Fourier Dönüşümü İçin Zamanda Kayma) Kabul edelim ki $\theta(\tau), \Theta(\tau) \in L_{1,\varepsilon}[R]$ ve $\mathcal{F}[\theta(\tau)] = \Theta(\omega)$ olsun. a sabit bir sayı olmak üzere

$$\mathcal{F}[\theta(\tau - a)] = E_\varepsilon(-i^\varepsilon a^\varepsilon \omega^\varepsilon) \mathcal{F}[\theta(\tau)]$$

biçiminde tanımlanır.

İspat Fourier dönüşümünün tanımından

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\theta(\tau - a)] &= \frac{1}{\Gamma(1 + \varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau - a) E_\varepsilon(-i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon \\ &= E_\varepsilon(-i^\varepsilon a^\varepsilon \omega^\varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau - a) E_\varepsilon(-i^\varepsilon (\tau - a)^\varepsilon \omega^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon \\ &= E_\varepsilon(-i^\varepsilon a^\varepsilon \omega^\varepsilon) \mathcal{F}[\theta(\tau)] \end{aligned}$$

yazılır ve ispat tamamlanmış olur.

Özellik 3.3 (Lokal Kesirli Fourier Dönüşümü İçin Zamanda Artma). Kabul edelim ki $\theta(\tau) \Theta(\omega) \in L_{1,\varepsilon}[R]$, $\mathcal{F}[\theta(\tau)] = \Theta(\omega)$ ve a sabit bir sayı olsun.

$$\mathcal{F}[\theta(a\tau)] = \frac{1}{a^3} \Theta\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

yazılır.

İspat Fourier dönüşümünün tanımından

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\theta(a\tau)] &= \frac{1}{\Gamma(1 + \varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(a\tau) E_\varepsilon(-i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon \\ &= \frac{1}{a^3} \frac{1}{\Gamma(1 + \varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(a\tau) E_\varepsilon\left(-i^\varepsilon \left(\frac{a\tau}{a}\right)^\varepsilon \omega^\varepsilon\right) (d\tau)^\varepsilon \\ &= \frac{1}{a^3} \Theta\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

bulunur.

Özellik 3.4 (Lokal Kesirli Fourier Dönüşümü İçin Eşlenik). Kabul edelim ki $\theta(\tau), \Theta(\omega) \in L_{1,\varepsilon}[R]$, ve $\mathcal{F}[\theta(\tau)] = \Theta(\omega)$ olsun.

$$\mathcal{F}[\overline{\theta(-\tau)}] = \overline{\mathcal{F}[\theta(\tau)]}$$

yazılır.

İspat Fourier dönüşümü yardımıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\overline{\theta(-\tau)}] &= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\theta(-\tau)} E_{\varepsilon}(-i^{\varepsilon} \tau^{\varepsilon} \omega^{\varepsilon})(d\tau)^{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\theta(\tau) E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon} \tau^{\varepsilon} \omega^{\varepsilon})} (d\tau)^{\varepsilon} \\ &= \overline{\frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(-\tau) E_{\varepsilon}(-i^{\varepsilon} (-\tau)^{\varepsilon} \omega^{\varepsilon})(d\tau)^{\varepsilon}} \\ &= \overline{\frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau) E_{\varepsilon}(-i^{\varepsilon} \tau^{\varepsilon} \omega^{\varepsilon})(d\tau)^{\varepsilon}} \\ &= \overline{\mathcal{F}[\theta(\tau)]} \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Özellik 3.5 (Lokal Kesirli Fourier Dönüşümünün Ötelenmesi). Kabul edelim ki $\theta(\tau), \Theta(\omega) \in L_{1,\varepsilon}[R]$, $\mathcal{F}[\theta(\tau)] = \Theta(\omega)$ ve a sabit bir sayı olsun.

$$\mathcal{F}[E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon} a^{\varepsilon} \tau^{\varepsilon}) \theta(\tau)] = \Theta(\omega - a)$$

olur.

İspat Fourier dönüşümün yardımıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon} a^{\varepsilon} \tau^{\varepsilon}) \theta(\tau)] &= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon} a^{\varepsilon} \tau^{\varepsilon}) \theta(\tau) E_{\varepsilon}(-i^{\varepsilon} \tau^{\varepsilon} \omega^{\varepsilon})(d\tau)^{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau) E_{\varepsilon}(-i^{\varepsilon} \tau^{\varepsilon} (\omega - a)^{\varepsilon})(d\tau)^{\varepsilon} \\ &= \Theta(\omega - a) \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Özellik 3.6 (Lokal Kesirli Fourier Dönüşümünün Dualitesi). Kabul edelim ki $\theta(\tau), \Theta(\omega) \in L_{1,\varepsilon}[R]$ ve $\mathcal{F}[\theta(\tau)] = \Theta(\omega)$ olsun.

$$\mathcal{F}[\theta(-\tau)] = \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{(2\pi)^\varepsilon} \mathcal{F}[\Theta(\tau)]$$

biçiminde tanımlanır.

İspat Fourier dönüşümün yardımıyla

$$\mathcal{F}^{-1}[\Theta(\omega)] = \theta(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\omega) E_\varepsilon(i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon) (d\omega)^\varepsilon$$

olduğunu biliyoruz. Burada τ ve ω 'yı yer değiştirildiğinde

$$\Theta(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau) E_\varepsilon(i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon$$

bulunur. ω yerine $-\omega$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \Theta(-\omega) &= \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{(2\pi)^\varepsilon} \left[\frac{1}{\Gamma(1 + \varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau) E_\varepsilon(-i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon \right] \\ &= \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{(2\pi)^\varepsilon} \mathcal{F}[\theta(\tau)] \end{aligned}$$

olur ve böylece ispatlanır.

Özellik 3.7 (Lokal Kesirli Fourier Dönüşümünün Birleşimi).

$$\theta_1(\tau), \theta_2(\tau), \Theta_1(\omega), \Theta_2(\omega) \in L_{1,\varepsilon}[R]$$

$$\mathcal{F}[\theta_1(\tau)] = \Theta_1(\omega)$$

ve

$$\mathcal{F}[\theta_2(\tau)] = \Theta_2(\omega)$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta_1(\omega) \Theta_2(\omega) E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon} \tau^{\varepsilon} \omega^{\varepsilon})(d\omega)^{\varepsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_2(\eta) \theta_1(\eta - \tau)(d\eta)^{\varepsilon}$$

yazılır.

İspat

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_1(\omega) \Theta_2(\omega) E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon} \tau^{\varepsilon} \omega^{\varepsilon})(d\omega)^{\varepsilon} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_1(\omega) E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon} \tau^{\varepsilon} \omega^{\varepsilon}) \left[\frac{1}{\Gamma(1 + \varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_2(\eta) E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon} \eta^{\varepsilon} \omega^{\varepsilon})(d\eta)^{\varepsilon} \right] (d\omega)^{\varepsilon} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta_2(\eta)(d\eta)^{\varepsilon} \left[\frac{1}{\Gamma(1 + \varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_1(\omega) E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon} (\eta - \tau)^{\varepsilon} \omega^{\varepsilon})(d\omega)^{\varepsilon} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta_2(\eta) \Theta_1(\eta - \tau)(d\eta)^{\varepsilon} \end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.

$$\theta_1(\tau), \theta_2(\tau), \Theta_1(\omega), \Theta_2(\omega) \in L_{1,\varepsilon}[R]$$

$$\mathcal{F}[\theta_1(\tau)] = \Theta_1(\omega)$$

ve

$$\mathcal{F}[\theta_2(\tau)] = \Theta_2(\omega)$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta_1(\omega) \Theta_2(\omega)(d\omega)^{\varepsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_1(\eta) \theta_2(\eta)(d\eta)^{\varepsilon}$$

biçiminde yazılır.

İspat Özellik 3.7’de $\tau = 0$ alınırsa ispat kolayca görülür.

Teorem 3.2.

$$\theta(\tau), \Theta(\omega) \in L_{1,\varepsilon}[R]$$

$$\mathcal{F}[\theta(\tau)] = \Theta(\omega)$$

ve

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \theta(\tau) = 0$$

olmak üzere

$$\mathcal{F}[\theta^{(\varepsilon)}(\tau)] = (i\omega)^\varepsilon \mathcal{F}[\theta(\tau)] = i^\varepsilon \omega^\varepsilon \mathcal{F}[\theta(\tau)] \quad (3.8)$$

biçiminde yazılır.

İspat Lokal kesirli Fourier dönüşümün tanımından yararlanarak

$$\mathcal{F}[\theta^{(\varepsilon)}(\tau)] = \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} \theta^{(\varepsilon)}(\tau) E_\varepsilon(-i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon$$

biçiminde yazılır. $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \theta(\tau) = 0$ olduğunu göz önüne alarak lokal kesirli türevin kısmi integrasyonunu kullanılırsa

$$\mathcal{F}[\theta^{(\varepsilon)}(\tau)] = [\theta(\tau) E_\varepsilon(i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon)]_{-\infty}^{\infty} - \frac{i^\varepsilon \omega^\varepsilon}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau) E_\varepsilon(i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon$$

bulunur. Böylece

$$\mathcal{F}[\theta^{(\varepsilon)}(\tau)] = i^\varepsilon \omega^\varepsilon \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau) E_\varepsilon(i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon$$

olup Lokal kesirli Fourier dönüşümün tanımından

$$\mathcal{F}[\theta^{(\varepsilon)}(\tau)] = (i\omega)^\varepsilon \mathcal{F}[\theta(\tau)] = i^\varepsilon \omega^\varepsilon \mathcal{F}[\theta(\tau)]$$

bulunur.

Sonuç 3.2. Teorem 3.2'den yararlanarak $k \in \mathbb{N}$ için

$$\theta^{((k-1)\varepsilon)}(0) = \theta^{((k-2)\varepsilon)}(0) = \dots = \theta^{(\varepsilon)}(0) = \theta(0)$$

olmak üzere

$$\mathcal{F}[\theta^{(k\varepsilon)}(\tau)] = (i\omega)^{k\varepsilon} \mathcal{F}[\theta(\tau)] \quad (3.9)$$

yazılır.

Teorem 3.2.

$$\theta(\tau), \Theta(\omega) \in L_{1,\varepsilon}[R]$$

$$\mathcal{F}[\theta(\tau)] = \Theta(\omega)$$

ve

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} {}_{-\infty}I_{\tau}^{(\varepsilon)} \theta(\tau) = 0$$

olmak üzere

$$\mathcal{F} \left[{}_{-\infty}I_{\tau}^{(\varepsilon)} \theta(\tau) \right] = \frac{1}{(i\omega)^{\varepsilon}} \mathcal{F}[\theta(\tau)]$$

dır.

Teorem 3.3.

$$\theta(\tau), \Theta(\omega) \in L_{1,\varepsilon}[R]$$

$$\mathcal{F}[\theta(\tau)] = \Theta(\omega)$$

olmak üzere

$$\mathcal{F}[\tau^{\varepsilon} \theta(\tau)] = i^{\varepsilon} \Theta(\omega)$$

biçiminde yazılır.

Tanım 3.6. $\theta_1(\tau)$ ve $\theta_2(\tau)$ fonksiyonlarının lokal kesirli integral operatörü yardımıyla *lokal kesirli konvolüsyonu*

$$(\theta_1 * \theta_2)(\tau) = \theta_1(\tau) * \theta_2(\tau)$$

$$\begin{aligned}
&= {}_{-\infty}I_{\infty}^{(\varepsilon)}[\theta_1(t)\theta_2(\tau-t)] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_1(t)\theta_2(\tau-t)(dt)^{\varepsilon}
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.7. Lokal kesirli $\Theta_1(\varpi)$ ve $\Theta_2(\varpi)$ *Fourier operatörlerinin lokal kesirli konvolüsyonu*

$$(\Theta_1 * \Theta_2)(\varpi) = \Theta_1(\varpi) * \Theta_2(\varpi)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{(2\pi)^{\varepsilon}} {}_{-\infty}I_{\infty}^{(\varepsilon)}[\Theta_1(\varpi)\Theta_1(\omega-\varpi)] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_1(\varpi)\Theta_1(\omega-\varpi)(d\varpi)^{\varepsilon}
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 3.4. (Lokal Kesirli Fourier Dönüşümünün Parseval Teoremi)

$$\theta(\tau) \in L_{1,\varepsilon}[R],$$

$$\mathcal{F}[\theta(\tau)] = \Theta(\omega)$$

olmak üzere

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma(1+\varepsilon)}} \int_{-\infty}^{\infty} |\theta(\tau)|^2 (d\tau)^{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(1+\varepsilon)}} \int_{-\infty}^{\infty} |\Theta(\omega)|^2 (d\omega)^{\varepsilon}$$

bulunur.

4. LOKAL KESİRLİ LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde tezimiz için gerekli olan lokal kesirli Laplace dönüşümü ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir [17,30,31].

Tanım 4.1. $\theta \in L_{1,\varepsilon}[R]$ ve $\|\theta\|_{1,\varepsilon} < \infty$ için

$$\mathcal{L}[\theta(\tau)] = \Theta(s) = \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \theta(\tau) E_\varepsilon(-\tau^\varepsilon s^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon \quad (4.1)$$

biçiminde tanımlı $\mathcal{L}$ operatörüne *lokal kesirli Laplace dönüşüm operatörü* denir.

Tanım 4.2.

$$\mathcal{L}^{-1}[\Theta(s)] = \theta(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^\varepsilon} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \Theta(s) E_\varepsilon(\tau^\varepsilon s^\varepsilon) (ds)^\varepsilon \quad (4.2)$$

biçiminde tanımlı $\mathcal{L}^{-1}$ operatörüne *ters lokal kesirli Laplace dönüşümü* denir.

Özellik 4.1. (Lokal Kesirli Laplace Dönüşümün Lineerliği)

$$\theta_1(\tau), \theta_2(\tau), \Theta_1(s), \Theta_2(s) \in L_{1,\varepsilon}[R_+]$$

$$\mathcal{L}[\theta_1(\tau)] = \Theta_1(s)$$

ve

$$\mathcal{L}[\theta_2(\tau)] = \Theta_2(s)$$

olmak üzere a ve b sabitleri için

$$\mathcal{L}[a\theta_1(\tau) + b\theta_2(\tau)] = a\Theta_1(s) + b\Theta_2(s) \quad (4.3)$$

olur.

İspat Lokal kesirli Laplace dönüşümünün tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[a\theta_1(\tau) + b\theta_2(\tau)] &= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty [a\theta_1(\tau) + b\theta_2(\tau)] E_\varepsilon(-\tau^\varepsilon s^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon \\ &= a \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \theta_1(\tau) E_\varepsilon(-\tau^\varepsilon s^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +b \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \theta_2(\tau) E_\varepsilon(-\tau^\varepsilon s^\varepsilon)(d\tau)^\varepsilon \\
& = a\Theta_1(s) + b\Theta_2(s)
\end{aligned}$$

olup lineerliği gösterilir.

Özellik 4.2. (Lokal Kesirli Laplace Dönüşümü İçin Zamanda Kayma) Kabul edelim ki $\theta(\tau) \in L_{1,\varepsilon}[R_+]$ ve $\mathcal{L}[\theta(\tau)] = \Theta(s)$ olsun. a sabit bir sayı olmak üzere

$$\mathcal{L}[\theta(\tau - a)] = E_\varepsilon(-i^\varepsilon s^\varepsilon) \mathcal{L}[\theta(\tau)]$$

biçimindedir.

İspat Lokal kesirli Laplace dönüşümün tanımından

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\theta(\tau - a)] &= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \theta(\tau - a) E_\varepsilon(-\tau^\varepsilon s^\varepsilon)(d\tau)^\varepsilon \\
&= E_\varepsilon(-a^\varepsilon s^\varepsilon) \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \theta(\tau - a) E_\varepsilon(-(\tau - a)^\varepsilon s^\varepsilon)(d\tau)^\varepsilon \\
&= E_\varepsilon(-i^\varepsilon s^\varepsilon) \mathcal{L}[\theta(\tau)]
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Özellik 4.3. (Lokal Kesirli Laplace Dönüşümü İçin Zamanda Artma) Kabul edelim ki $\theta(\tau) \in L_{1,\varepsilon}[R_+]$, $\mathcal{L}[\theta(\tau)] = \Theta(s)$ ve a sabit bir sayı olsun.

$$\mathcal{L}[\theta(a\tau)] = \frac{1}{a^3} \Theta\left(\frac{s}{a}\right)$$

biçiminde yazılır.

İspat Lokal kesirli Laplace dönüşümünün tanımını kullanarak

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\theta(a\tau)] &= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \theta(a\tau) E_\varepsilon(-\tau^\varepsilon s^\varepsilon)(d\tau)^\varepsilon \\
&= \frac{1}{a^3} \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \theta(a\tau) E_\varepsilon\left(-\left(\frac{a\tau}{a}\right)^\varepsilon s^\varepsilon\right)(da\tau)^\varepsilon
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a^3} \Theta\left(\frac{s}{a}\right)$$

elde edilir.

Özellik 4.4 (Lokal Kesirli Laplace Dönüşümünün Ötelenmesi). Kabul edelim ki $\theta(\tau) \in L_{1,\varepsilon}[R_+]$, $\mathcal{L}[\theta(\tau)] = \Theta(s)$ ve a sabit bir sayı olsun.

$$\mathcal{L}[E_\varepsilon(a^\varepsilon \tau^\varepsilon) \theta(\tau)] = \Theta(s - a)$$

biçiminde yazılır.

İspat Lokal kesirli Laplace dönüşümünün tanımını kullanarak

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[E_\varepsilon(a^\varepsilon \tau^\varepsilon) \theta(\tau)] &= \frac{1}{\Gamma(1 + \varepsilon)} \int_0^\infty E_\varepsilon(a^\varepsilon \tau^\varepsilon) \theta(\tau) E_\varepsilon(-\tau^\varepsilon s^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 + \varepsilon)} \int_0^\infty \theta(\tau) E_\varepsilon(-(s - a)^\varepsilon \tau^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon \\ &= \Theta(s - a) \end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1. $\theta(\tau) \in L_{1,\varepsilon}[R_+]$ ve $\mathcal{L}[\theta(\tau)] = \Theta(s)$ olduğunu kabul edelim. O halde

$$\mathcal{L}[\theta^{(\varepsilon)}(\tau)] = s^\varepsilon \mathcal{L}[\theta(\tau)] - \theta(0) \quad (4.4)$$

biçimindedir.

İspat İlk olarak lokal kesirli Laplace dönüşümünün yardımıyla

$$\mathcal{L}[\theta^{(\varepsilon)}(\tau)] = \frac{1}{\Gamma(1 + \varepsilon)} \int_0^\infty \theta^{(\varepsilon)}(\tau) E_\varepsilon(-\tau^\varepsilon s^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon$$

yazılır. Lokal kesirli kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\mathcal{L}[\theta^{(\varepsilon)}(\tau)] = [\theta(\tau) E_\varepsilon(a^\varepsilon \tau^\varepsilon)]_0^\infty + \frac{s^\varepsilon}{\Gamma(1 + \varepsilon)} \int_0^\infty \theta(\tau) E_\varepsilon(-\tau^\varepsilon s^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon$$

elde edilir ve $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \theta(\tau) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\theta^{(\varepsilon)}(\tau)] &= \frac{s^\varepsilon}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \theta(\tau) E_\varepsilon(-\tau^\varepsilon s^\varepsilon)(d\tau)^\varepsilon - \theta(\tau) \\ &= s^\varepsilon \mathcal{L}[\theta(\tau)] - \theta(0)\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Buradan hareketle $k \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{L}[\theta^{(k\varepsilon)}(\tau)] = s^{k\varepsilon} \mathcal{L}[\theta(\tau)] - s^{(k-1)\varepsilon} \theta(0) - s^{(k-2)\varepsilon} \theta^\varepsilon(0) - \dots - \theta^{((k-1)\varepsilon)}(0) \quad (4.5)$$

yazılabilir.

Teorem 4.2. $\theta(\tau) \in L_{1,\varepsilon}[R_+]$, $\mathcal{L}[\theta(\tau)] = \Theta(s)$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} {}_0I_t^\varepsilon \theta(\tau) = 0$ olduğunu kabul edelim.

Buradan

$$\mathcal{L}[\theta^\varepsilon(\tau)] = \frac{1}{s^\varepsilon} \mathcal{L}[\theta(\tau)]$$

elde edilir.

Teorem 4.3. $\theta(\tau) \in L_{1,\varepsilon}[R_+]$ ve $\mathcal{L}[\theta(\tau)] = \Theta(s)$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\mathcal{L}[\tau^\varepsilon \theta(\tau)] = \Theta^{(\varepsilon)}(s)$$

yazılır.

Tanım 4.3. Lokal kesirli $\theta_1(\tau)$ ve $\theta_2(\tau)$ Laplace operatörlerinin lokal kesirli konvolüsyonu

$$\begin{aligned}(\theta_1 * \theta_2)(\tau) &= \theta_1(\tau) * \theta_2(\tau) \\ &= {}_0I_\infty^{(\varepsilon)}[\theta_1(\tau)\theta_2(\tau-t)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \theta_1(t)\theta_2(\tau-t)(dt)^\varepsilon\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 4.4.

$$\theta_1(\tau), \theta_2(\tau), \in L_{1,\varepsilon}[R_+]$$

$$\mathcal{L}[\theta_1(\tau)] = \Theta_1(s)$$

ve

$$\mathcal{L}[\theta_2(\tau)] = \Theta_2(s)$$

olmak üzere

$$\mathcal{L}[\theta_1(\tau) * \theta_2(\tau)] = \Theta_1(s)\Theta_2(s)$$

ya da

$$\theta_1(\tau) * \theta_2(\tau) = \mathcal{L}^{-1}[\Theta_1(s)\Theta_2(s)]$$

olup bu denklemler eşit olarak

$$\frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \theta_1(t)\theta_2(\tau-t) (dt)^\varepsilon = \frac{1}{(2\pi)^\varepsilon} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \Theta_1(s)\Theta_2(s)E_\varepsilon(i^\varepsilon s^\varepsilon)(ds)^\varepsilon$$

yazılır.

Teorem 4.5.

$$\theta_1(\tau), \theta_2(\tau) \in L_{1,\varepsilon}[R_+]$$

$$\mathcal{L}[\theta_1(\tau)] = \Theta_1(s)$$

ve

$$\mathcal{L}[\theta_2(\tau)] = \Theta_2(s)$$

olmak üzere

$$\mathcal{L}[\theta_1(\tau) * \theta_2(\tau)] = \Theta_1(s)\Theta_2(s)$$

ya da

$$\theta_1(\tau) * \theta_2(\tau) = \mathcal{L}^{-1}[\Theta_1(s)\Theta_2(s)]$$

olup bu denklemler eşit olarak

$$\frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \theta_1(\tau) \theta_2(\tau) E_\varepsilon(-i^\varepsilon s^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon = \frac{1}{(2\pi)^\varepsilon} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \Theta_1(\tilde{s}) \Theta_2(s-\tilde{s}) (ds)^\varepsilon$$

yazılır.

Teorem 4.6 (Lokal Kesirli Laplace Operatörü İçin Konvolüsyon Teoremi). Kabul edelim ki

$$\theta_1(\tau), \theta_2(\tau) \in L_{1,\varepsilon}[R_+]$$

$$\mathcal{L}[\theta_1(\tau)] = \Theta_1(s)$$

ve

$$\mathcal{L}[\theta_2(\tau)] = \Theta_2(s)$$

olsun. Buradan

$$\frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \theta_1(\tau) \overline{\theta_2(\tau)} (d\tau)^\varepsilon = \frac{1}{(2\pi)^\varepsilon} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \Theta_1(s) \overline{\Theta_2(s)} (ds)^\varepsilon$$

olur.

Teorem 4.7 (Lokal Kesirli Laplace Dönüşüm Operatörünün Başlangıç Değer Teoremi). Kabul edelim ki

$$\mathcal{L}[\theta(\tau)] = \Theta(s)$$

$$\mathcal{L}[\theta^\varepsilon(\tau)] = s^\varepsilon \mathcal{L}[\theta(\tau)] - \theta(0)$$

olsun. O zaman

$$\lim_{\tau \rightarrow 0_+} \theta(\tau) = \theta(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}[\theta(\tau)]$$

olur.

4.2. Lokal Kesirli Laplace Dönüşümün Sinyal Analize Uygulanışı

Örnek 4.1. $\tau > 0$ olmak üzere $\theta(\tau) = 1$ için

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[1] &= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^{\infty} E_{\varepsilon}(-\tau^{\varepsilon} s^{\varepsilon})(d\tau)^{\varepsilon} \\
&= \frac{1}{s^{\varepsilon}}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

elde edilir.

Örnek 4.2. $\tau > 0$ olmak üzere Cantor kümesinde tanımlı $\theta(\tau) = E_{\varepsilon}(a^{\varepsilon} \tau^{\varepsilon})$ için

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[E_{\varepsilon}(a^{\varepsilon} \tau^{\varepsilon})] &= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^{\infty} E_{\varepsilon}(a^{\varepsilon} \tau^{\varepsilon}) E_{\varepsilon}(-\tau^{\varepsilon} s^{\varepsilon})(d\tau)^{\varepsilon} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^{\infty} E_{\varepsilon}(-\tau^{\varepsilon} (s - a)^{\varepsilon})(d\tau)^{\varepsilon} \\
&= \frac{1}{s^{\varepsilon} - a^{\varepsilon}}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

bulunur.

Örnek 4.3. μ ve η sabit sayılar olmak üzere örnek 4.2' de $a^{\varepsilon} = \mu^{\varepsilon} + i^{\varepsilon} \eta^{\varepsilon}$ için

$$\mathcal{L}[E_{\varepsilon}((\mu^{\varepsilon} + i^{\varepsilon} \eta^{\varepsilon}) \tau^{\varepsilon})] = \frac{1}{s^{\varepsilon} - (\mu^{\varepsilon} + i^{\varepsilon} \eta^{\varepsilon})} \tag{4.8}$$

elde edilir.

Örnek 4.4. μ ve η sabit sayılar olmak üzere örnek 4.2' de $a^{\varepsilon} = \mu^{\varepsilon} - i^{\varepsilon} \eta^{\varepsilon}$ için

$$\mathcal{L}[E_{\varepsilon}((\mu^{\varepsilon} - i^{\varepsilon} \eta^{\varepsilon}) \tau^{\varepsilon})] = \frac{1}{s^{\varepsilon} - (\mu^{\varepsilon} - i^{\varepsilon} \eta^{\varepsilon})} \tag{4.9}$$

biçiminde yazılır.

Örnek 4.5. Örnek 4.1' de $\mu = 0$ için

$$\mathcal{L}[E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon} \eta^{\varepsilon} \tau^{\varepsilon})] = \frac{1}{s^{\varepsilon} - i^{\varepsilon} \eta^{\varepsilon}} \tag{4.10}$$

olur.

Örnek 4.6. Örnek 4.2' de $\mu = 0$ için

$$\mathcal{L}[E_{\varepsilon}(-i^{\varepsilon}\eta^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon})] = \frac{1}{s^{\varepsilon} + i^{\varepsilon}\eta^{\varepsilon}} \quad (4.11)$$

elde edilir.

Örnek 4.7. $\tau > 0$ olmak üzere Cantor kümesinde tanımlı $\theta(\tau) = \cos_{\varepsilon}(\eta^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon})$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos_{\varepsilon}(\eta^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon})] &= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^{\infty} \cos_{\varepsilon}(\eta^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon}) E_{\varepsilon}(-\tau^{\varepsilon}s^{\varepsilon})(d\tau)^{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^{\infty} \left[\frac{E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon}\eta^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon}) + E_{\varepsilon}(-i^{\varepsilon}\eta^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon})}{2} \right] E_{\varepsilon}(-\tau^{\varepsilon}s^{\varepsilon})(d\tau)^{\varepsilon} \\ &= \frac{\frac{1}{s^{\varepsilon} - i^{\varepsilon}\eta^{\varepsilon}} + \frac{1}{s^{\varepsilon} + i^{\varepsilon}\eta^{\varepsilon}}}{2} \\ &= \frac{s^{\varepsilon}}{s^{2\varepsilon} + \eta^{2\varepsilon}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

elde edilir.

Örnek 4.8. $\tau > 0$ olmak üzere Cantor kümesinde tanımlı $\theta(\tau) = \sin_{\varepsilon}(\eta^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon})$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin_{\varepsilon}(\eta^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon})] &= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^{\infty} \sin_{\varepsilon}(\eta^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon}) E_{\varepsilon}(-\tau^{\varepsilon}s^{\varepsilon})(d\tau)^{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^{\infty} \left[\frac{E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon}\eta^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon}) - E_{\varepsilon}(-i^{\varepsilon}\eta^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon})}{2} \right] E_{\varepsilon}(-\tau^{\varepsilon}s^{\varepsilon})(d\tau)^{\varepsilon} \\ &= \frac{\frac{1}{s^{\varepsilon} - i^{\varepsilon}\eta^{\varepsilon}} - \frac{1}{s^{\varepsilon} + i^{\varepsilon}\eta^{\varepsilon}}}{2i^{\varepsilon}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\eta^\varepsilon}{s^{2\varepsilon} + \eta^{2\varepsilon}} \quad (4.13)$$

bulunur.

Örnek 4.9. $\tau > 0$ olmak üzere Cantor kümesinde tanımlı $\theta(\tau) = \cosh_\varepsilon(\eta^\varepsilon \tau^\varepsilon)$ için

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}[\cosh_\varepsilon(\eta^\varepsilon \tau^\varepsilon)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \cos_\varepsilon(\eta^\varepsilon \tau^\varepsilon) E_\varepsilon(-\tau^\varepsilon s^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \left[\frac{E_\varepsilon(\eta^\varepsilon \tau^\varepsilon) + E_\varepsilon(-\eta^\varepsilon \tau^\varepsilon)}{2} \right] E_\varepsilon(-\tau^\varepsilon s^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon \\ &= \frac{\frac{1}{s^\varepsilon - \eta^\varepsilon} + \frac{1}{s^\varepsilon + \eta^\varepsilon}}{2} \\ &= \frac{s^\varepsilon}{s^{2\varepsilon} - \eta^{2\varepsilon}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

bulunur.

Örnek 4.10. $\tau > 0$ olmak üzere Cantor kümesinde tanımlı $\theta(\tau) = \sinh_\varepsilon(\eta^\varepsilon \tau^\varepsilon)$ için

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}[\sinh_\varepsilon(\eta^\varepsilon \tau^\varepsilon)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \sinh_\varepsilon(\eta^\varepsilon \tau^\varepsilon) E_\varepsilon(-\tau^\varepsilon s^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \left[\frac{E_\varepsilon(\eta^\varepsilon \tau^\varepsilon) - E_\varepsilon(-\eta^\varepsilon \tau^\varepsilon)}{2} \right] E_\varepsilon(-\tau^\varepsilon s^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon \\ &= \frac{\frac{1}{s^\varepsilon - \eta^\varepsilon} + \frac{1}{s^\varepsilon + \eta^\varepsilon}}{2i^\varepsilon} \\ &= \frac{\eta^\varepsilon}{s^{2\varepsilon} - \eta^{2\varepsilon}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

bulunur.

Örnek 4.11. $\tau > 0$ olmak üzere Cantor kümesinde tanımlı $\theta(\tau) = \frac{\tau^{k\varepsilon}}{\Gamma(1+k\varepsilon)}$ için

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \left[\frac{\tau^{k\varepsilon}}{\Gamma(1+k\varepsilon)} \right] &= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \frac{\tau^{k\varepsilon}}{\Gamma(1+k\varepsilon)} E_\varepsilon(-\tau^\varepsilon s^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon \\
&= \frac{1}{s^\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \frac{\tau^{(k-1)\varepsilon}}{\Gamma(1+(k-1)\varepsilon)} E_\varepsilon(-\tau^\varepsilon s^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon \\
&= \frac{1}{s^{2\varepsilon}} \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \frac{\tau^{(k-2)\varepsilon}}{\Gamma(1+(k-2)\varepsilon)} E_\varepsilon(-\tau^\varepsilon s^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon \\
&= \frac{1}{s^{(k+1)\varepsilon}}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

bulunur.

Örnek 4.12. $\tau > 0$ olmak üzere Cantor kümesinde tanımlı $\theta(\tau) = \frac{\tau^{k\varepsilon}}{\Gamma(1+k\varepsilon)} E_\varepsilon(a^\varepsilon \tau^\varepsilon)$ için

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \left[\frac{\tau^{k\varepsilon}}{\Gamma(1+k\varepsilon)} E_\varepsilon(a^\varepsilon \tau^\varepsilon) \right] &= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \left[\frac{\tau^{k\varepsilon}}{\Gamma(1+k\varepsilon)} E_\varepsilon(a^\varepsilon \tau^\varepsilon) \right] E_\varepsilon(-\tau^\varepsilon s^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon \\
&= \frac{1}{(s-a)^{(k+1)\varepsilon}}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

bulunur.

Örnek 4.13. $\tau > 0$ olmak üzere Cantor kümesinde tanımlı $\theta(\tau) = E_\varepsilon(a^\varepsilon \tau^\varepsilon) \cos_\varepsilon(\eta^\varepsilon \tau^\varepsilon)$ için

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}[E_\varepsilon(a^\varepsilon \tau^\varepsilon) \cos_\varepsilon(\eta^\varepsilon \tau^\varepsilon)] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \left[E_\varepsilon(a^\varepsilon \tau^\varepsilon) \frac{E_\varepsilon(i^\varepsilon \eta^\varepsilon \tau^\varepsilon) + E_\varepsilon(-i^\varepsilon \eta^\varepsilon \tau^\varepsilon)}{2} \right] E_\varepsilon(-\tau^\varepsilon s^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{((s-a)^\varepsilon - i^\varepsilon \eta^\varepsilon)} + \frac{1}{((s-a)^\varepsilon + i^\varepsilon \eta^\varepsilon)}}{2} \\
&= \frac{(s-a)^{2\varepsilon}}{(s-a)^{2\varepsilon} + \eta^{2\varepsilon}}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

olur.

Örnek 4.14. $\tau > 0$ olmak üzere Cantor kümesinde tanımlı $\theta(\tau) = E_\varepsilon(a^\varepsilon \tau^\varepsilon) \sin_\varepsilon(\eta^\varepsilon \tau^\varepsilon)$ için

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}[E_\varepsilon(a^\varepsilon \tau^\varepsilon) \sin_\varepsilon(\eta^\varepsilon \tau^\varepsilon)] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \left[E_\varepsilon(a^\varepsilon \tau^\varepsilon) \frac{E_\varepsilon(i^\varepsilon \eta^\varepsilon \tau^\varepsilon) - E_\varepsilon(-i^\varepsilon \eta^\varepsilon \tau^\varepsilon)}{2i^\varepsilon} \right] E_\varepsilon(-\tau^\varepsilon s^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon \\
&= \frac{\frac{1}{((s-a)^\varepsilon - i^\varepsilon \eta^\varepsilon)} - \frac{1}{((s-a)^\varepsilon + i^\varepsilon \eta^\varepsilon)}}{2} \\
&= \frac{\eta^\varepsilon}{(s-a)^{2\varepsilon} + \eta^{2\varepsilon}}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

elde edilir.

Örnek 4.15. $\tau > 0$ olmak üzere Cantor kümesinde tanımlı $\theta(\tau) = E_\varepsilon(a^\varepsilon \tau^\varepsilon) \cosh_\varepsilon(\eta^\varepsilon \tau^\varepsilon)$ için

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}[E_\varepsilon(a^\varepsilon \tau^\varepsilon) \cosh_\varepsilon(\eta^\varepsilon \tau^\varepsilon)] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \left[E_\varepsilon(a^\varepsilon \tau^\varepsilon) \frac{E_\varepsilon(\eta^\varepsilon \tau^\varepsilon) + E_\varepsilon(-\eta^\varepsilon \tau^\varepsilon)}{2} \right] E_\varepsilon(-\tau^\varepsilon s^\varepsilon) (d\tau)^\varepsilon \\
&= \frac{\frac{1}{((s-a)^\varepsilon - \eta^\varepsilon)} + \frac{1}{((s-a)^\varepsilon + \eta^\varepsilon)}}{2} \\
&= \frac{(s-a)^\varepsilon}{(s-a)^{2\varepsilon} - \eta^{2\varepsilon}}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edilir.

Örnek 4.16. $\tau > 0$ olmak üzere Cantor kümesinde tanımlı $\theta(\tau) = E_{\varepsilon}(a^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon})sinh_{\varepsilon}(\eta^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon})$ için

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}[E_{\varepsilon}(a^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon})sinh_{\varepsilon}(\eta^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon})] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^{\infty} \left[E_{\varepsilon}(a^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon}) \frac{E_{\varepsilon}(\eta^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon}) - E_{\varepsilon}(-\eta^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon})}{2} \right] E_{\varepsilon}(-\tau^{\varepsilon}s^{\varepsilon})(d\tau)^{\varepsilon} \\
&= \frac{\frac{1}{((s-a)^{\varepsilon} - \eta^{\varepsilon})} - \frac{1}{((s-a)^{\varepsilon} + \eta^{\varepsilon})}}{2} \\
&= \frac{\eta^{\varepsilon}}{(s-a)^{2\varepsilon} - \eta^{2\varepsilon}} \tag{4.21}
\end{aligned}$$

bulunur.

5. SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN LOKAL KESİRLİ ÇÖZÜMÜ

Schrödinger denklemi kuantum fizikinin dalga denklemdir ve bir parçacığın belli bir noktada bulunma olasılığını hesaplamakta kullanılır. Lineer kompleks bir dalga denklemi olup bir veya birden fazla parçacığın zaman ve konuma göre dinamiğini vermektedir. Tezimizin bu alt bölümünde Schrödinger denkleminde lokal kesirli operatörler uygulayarak çözümler elde edilmiştir.

Teorem 5.1. $\hbar$ Planck sabiti, m kütle ve $\psi(x, t)$ parçacığın dalga fonksiyonu olsun.

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$|x| \rightarrow \infty, t > 0 \text{ için } \psi(x, t) \rightarrow 0$$

başlangıç koşulları ile tanımlanan ve $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$, $0 < \gamma \leq 1$, $\mu > 0$ olmak üzere

$$\frac{\partial^\alpha \psi(x, t)}{\partial t^\alpha} + a \frac{\partial^\beta \psi(x, t)}{\partial t^\beta} + b \frac{\partial^\gamma \psi(x, t)}{\partial t^\gamma} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^\mu \psi(x, t)}{\partial x^\mu} \quad (5.1)$$

unified lokal kesirli Schrödinger denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & \frac{1}{(2\pi)^\mu} \int_{-\infty}^{\infty} [(1 + a + b)\psi_0^*(k)t^{\alpha-1} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} a^l b^{r-l} t^{(\alpha-\gamma)r + (\gamma-\beta)l} \\ & \times E_{\alpha, (\alpha-\gamma)r + (\gamma-\beta)l + \alpha}^{r+1}(-A|k|^\mu)] E_\mu(i^\mu t^\mu k^\mu)(dk)^\mu \end{aligned}$$

biçimindedir.

İspat. (5.1) denkleminde $\frac{i\hbar}{2m} = A$ olduğu kabul edilirse

$$\frac{\partial^\alpha \psi(x, t)}{\partial t^\alpha} + a \frac{\partial^\beta \psi(x, t)}{\partial t^\beta} + b \frac{\partial^\gamma \psi(x, t)}{\partial t^\gamma} = A \frac{\partial^\mu \psi(x, t)}{\partial x^\mu} \quad (5.2)$$

biçiminde yazılır.

$$\mathcal{L}\{\psi(x, t)\} = \bar{\psi}(x, s)$$

olduğu göz önüne alınarak (5.2) denkleminin her iki tarafına t değişkenine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^\alpha \psi(x,t)}{\partial t^\alpha}\right\} + a\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^\beta \psi(x,t)}{\partial t^\beta}\right\} + b\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^\gamma \psi(x,t)}{\partial t^\gamma}\right\} = A\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^\mu \psi(x,t)}{\partial x^\mu}\right\} \quad (5.3)$$

elde edilir.

Laplace dönüşümünün özelliklerinden yararlanarak (5.3) denklemi

$$\begin{aligned} s^\alpha \bar{\psi}(x,s) - \psi_0(x) + as^\beta \bar{\psi}(x,s) - a\psi_0(x) + bs^\gamma \bar{\psi}(x,s) - b\psi_0(x) \\ = A \frac{\partial^\mu \bar{\psi}(x,s)}{\partial x^\mu} \end{aligned} \quad (5.4)$$

biçiminde yazılır.

(5.4) denklemine x değişkenine göre Fourier dönüşümü uygulansın. Fourier dönüşümünün özellikleri yardımıyla ve

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\bar{\psi}(x,s)\} &= \bar{\psi}^*(k,s), \\ \mathcal{F}\left\{\frac{\partial^\mu \bar{\psi}(x,s)}{\partial x^\mu}\right\} &= -|k|^\mu \bar{\psi}^*(k,s) \end{aligned}$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa, (5.4) denklemi

$$\begin{aligned} s^\alpha \bar{\psi}^*(k,s) - \psi_0^*(k) + as^\beta \bar{\psi}^*(k,s) - a\psi_0^*(k) + bs^\gamma \bar{\psi}^*(k,s) - b\psi_0^*(k) \\ = -A|k|^\mu \bar{\psi}^*(k,s) \end{aligned} \quad (5.5)$$

şeklinde yazılır. (5.5) denklemden $\bar{\psi}^*(k,s)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^*(k,s)\{s^\alpha + as^\beta + bs^\gamma + A|k|^\mu\} &= \psi_0^*(k) + a\psi_0^*(k) + b\psi_0^*(k) \\ \bar{\psi}^*(k,s) &= \frac{\psi_0^*(k)}{s^\alpha + as^\beta + bs^\gamma + A|k|^\mu} + \frac{a\psi_0^*(k)}{s^\alpha + as^\beta + bs^\gamma + A|k|^\mu} \\ &\quad + \frac{b\psi_0^*(k)}{s^\alpha + as^\beta + bs^\gamma + A|k|^\mu} \end{aligned} \quad (5.6)$$

şeklinde elde edilir.

(5.6) denklemine ters Laplace dönüşümünü uygular ve dönüşümün lineerlik özelliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{\bar{\psi}^*(k, s)\} &= \psi_0^*(k) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha + as^\beta + bs^\gamma + A|k|^\mu}\right\} \\
&+ a\psi_0^*(k) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha + as^\beta + bs^\gamma + A|k|^\mu}\right\} \\
&+ b\psi_0^*(k) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha + as^\beta + bs^\gamma + A|k|^\mu}\right\}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

elde edilir.

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{\psi}^*(k, s)\} = \psi^*(k, t)$$

eşitliği ve [32] makalesinde verilen

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\rho-1}}{s^\alpha + as^\beta + bs^\gamma + c}; t\right\} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} a^l b^{r-l} t^{(\alpha-\gamma)r + (\gamma-\beta)l + \alpha - \rho} E_{\alpha, (\alpha-\gamma)r + (\gamma-\beta)l + \alpha - \rho + 1}^{r+1}(-ct^\alpha)
\end{aligned}$$

eşitliği gözüne alınsın. Burada $Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0, Re(\gamma) > 0, Re(s) > 0, Re(\rho) > 0$, $\left|\frac{as^\beta + bs^\gamma}{s^\alpha + c}\right| < 1$ ve $E_{\beta, \gamma}^\sigma$ genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonudur. $\rho = 1$ için (5.7) eşitliğini

$$\begin{aligned}
\psi^*(k, t) &= \psi_0^*(k) t^{\alpha-1} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} a^l b^{r-l} t^{(\alpha-\gamma)r + (\gamma-\beta)l} \\
&\times E_{\alpha, (\alpha-\gamma)r + (\gamma-\beta)l + \alpha}^{r+1}(-A|k|^\mu t^\alpha) \\
&+ a\psi_0^*(k) t^{\alpha-1} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} a^l b^{r-l} t^{(\alpha-\gamma)r + (\gamma-\beta)l} \\
&\times E_{\alpha, (\alpha-\gamma)r + (\gamma-\beta)l + \alpha}^{r+1}(-A|k|^\mu t^\alpha) \\
&+ b\psi_0^*(k) t^{\alpha-1} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} a^l b^{r-l} t^{(\alpha-\gamma)r + (\gamma-\beta)l} \\
&\times E_{\alpha, (\alpha-\gamma)r + (\gamma-\beta)l + \alpha}^{r+1}(-A|k|^\mu t^\alpha)
\end{aligned} \tag{5.8}$$

biçiminde yazar ve düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}\psi^*(k, t) &= (1 + a + b)\psi_0^*(k)t^{\alpha-1} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} a^l b^{r-l} t^{(\alpha-\gamma)r+(\gamma-\beta)l} \\ &\quad \times E_{\alpha, (\alpha-\gamma)r+(\gamma-\beta)l+\alpha}^{r+1} (-A|k|^\mu t^\alpha)\end{aligned}\quad (5.9)$$

elde edilir. (5.9) denkleminin ters Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^\mu} \int_{-\infty}^{\infty} [(1 + a + b)\psi_0^*(k)t^{\alpha-1} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} a^l b^{r-l} t^{(\alpha-\gamma)r+(\gamma-\beta)l} \\ &\quad \times E_{\alpha, (\alpha-\gamma)r+(\gamma-\beta)l+\alpha}^{r+1} (-A|k|^\mu t^\alpha)] E_\mu(i^\mu t^\mu k^\mu) (dk)^\mu\end{aligned}\quad (5.10)$$

elde edilir. Elde edilen (5.10) denklemi (5.1) denkleminin çözümüdür.

Sonuç 5.1. $\hbar$ Planck sabiti, m kütle ve $\psi(x, t)$ parçacığın dalga fonksiyonu olsun.

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$|x| \rightarrow \infty, t > 0 \text{ için } \psi(x, t) \rightarrow 0$$

başlangıç koşulları ile tanımlanan ve $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \gamma \leq 1$, $\mu > 0$ olmak üzere

$$\frac{\partial^\alpha \psi(x, t)}{\partial t^\alpha} + b \frac{\partial^\gamma \psi(x, t)}{\partial t^\gamma} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^\mu \psi(x, t)}{\partial x^\mu} \quad (5.11)$$

unified lokal kesirli Schrödinger denkleminin çözümü

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^\mu} \int_{-\infty}^{\infty} [(1 + b)\psi_0^*(k)t^{\alpha-1} \sum_{r=0}^{\infty} (-b)^r t^{(\alpha-\gamma)r} \\ &\quad E_{\alpha, (\alpha-\gamma)r+\alpha}^{r+1} (-A|k|^\mu t^\alpha)] E_\mu(i^\mu t^\mu k^\mu) (dk)^\mu\end{aligned}\quad (5.12)$$

biçimindedir.

İspat. (5.1) denkleminde $a = 0$, $\frac{i\hbar}{2m} = A$ alınırsa

$$\frac{\partial^\alpha \psi(x, t)}{\partial t^\alpha} + b \frac{\partial^\gamma \psi(x, t)}{\partial t^\gamma} = A \frac{\partial^\mu \psi(x, t)}{\partial x^\mu} \quad (5.13)$$

yazılır. (5.13) denklemin her iki tarafına t değişkenine göre lokal Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$s^\alpha \bar{\psi}(x, s) - \psi_0(x) + bs^\gamma \bar{\psi}(x, s) - b\psi_0(x) = A \frac{\partial^\mu \bar{\psi}(x, s)}{\partial x^\mu} \quad (5.14)$$

elde edilir.

Şimdi (5.14) denkleminin x değişkenine göre Fourier dönüşümü uygulanıp düzenlenirse

$$s^\alpha \bar{\psi}^*(k, s) - \psi_0^*(k) + bs^\gamma \bar{\psi}^*(k, s) - b\psi_0^*(k) = -A|k|^\mu \bar{\psi}^*(k, s)$$

biçiminde yazılır ve buradan

$$\bar{\psi}^*(k, s) = \frac{\psi_0^*(k)}{s^\alpha + bs^\gamma + A|k|^\mu} + \frac{b\psi_0^*(k)}{s^\alpha + bs^\gamma + A|k|^\mu} \quad (5.15)$$

elde edilir. (5.15) denkleminin ters Laplace dönüşümünü uygular ve

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\rho-1}}{s^\alpha + bs^\gamma + c}; t \right\} = t^{\alpha-\rho} \sum_{r=0}^{\infty} (-b)^r t^{(\alpha-\gamma)r} E_{\alpha, (\alpha-\gamma)r+\alpha-\rho+1}^{r+1}(-ct^\alpha)$$

eşitliği gözüne alınırsa, $Re(\alpha) > 0, Re(\gamma) > 0, Re(s) > 0, Re(\rho) > 0, \left| \frac{as^\beta + bs^\gamma}{s^\alpha + c} \right| < 1$ olmak üzere $\rho = 1$ için (5.15) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \psi^*(k, t) &= \psi_0^*(k) t^{\alpha-1} \sum_{r=0}^{\infty} (-b)^r t^{(\alpha-\gamma)r} E_{\alpha, (\alpha-\gamma)r+\alpha}^{r+1}(-A|k|^\mu t^\alpha) \\ &\quad + b\psi_0^*(k) t^{\alpha-1} \sum_{r=0}^{\infty} (-b)^r t^{(\alpha-\gamma)r} E_{\alpha, (\alpha-\gamma)r+\alpha}^{r+1}(-A|k|^\mu t^\alpha) \end{aligned}$$

bulunur. Düzenlenirse

$$\psi^*(k, t) = (1+b)\psi_0^*(k) t^{\alpha-1} \sum_{r=0}^{\infty} (-b)^r t^{(\alpha-\gamma)r} E_{\alpha, (\alpha-\gamma)r+\alpha}^{r+1}(-A|k|^\mu t^\alpha) \quad (5.16)$$

elde edilir. Ters lokal Fourier dönüşümü yardımıyla (5.16) dan

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^\mu} \int_{-\infty}^{\infty} [(1+b)\psi_0^*(k) t^{\alpha-1} \sum_{r=0}^{\infty} (-b)^r t^{(\alpha-\gamma)r} \\ &\quad E_{\alpha, (\alpha-\gamma)r+\alpha}^{r+1}(-A|k|^\mu t^\alpha)] E_\mu(i^\mu t^\mu k^\mu)(dk)^\mu \end{aligned} \quad (5.17)$$

elde edilir.

Sonuç 5.2. $\hbar$ Planck sabiti, m kütle ve $\psi(x, t)$ parçacığın dalga fonksiyonu olmak üzere

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$|x| \rightarrow \infty, t > 0 \text{ için } \psi(x, t) \rightarrow 0$$

başlangıç koşulları ile tanımlanan ve $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$, $\mu > 0$ için

$$\frac{\partial^\alpha \psi(x, t)}{\partial t^\alpha} + a \frac{\partial^\beta \psi(x, t)}{\partial t^\beta} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^\mu \psi(x, t)}{\partial x^\mu} \quad (5.18)$$

unified lokal kesirli Schrödinger denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^\mu} \int_{-\infty}^{\infty} [(1+a)\psi_0^*(k)t^{\alpha-1} \sum_{r=0}^{\infty} (-a)^r t^{(\alpha-\beta)r} \\ \times E_{\alpha, (\alpha-\beta)r+\alpha}^{r+1}(-A|k|^\mu)] E_\mu(i^\mu t^\mu k^\mu)(dk)^\mu \end{aligned} \quad (5.19)$$

şeklindedir.

İspat. (5.1) denkleminde $b = 0$, $\frac{i\hbar}{2m} = A$ alınırsa

$$\frac{\partial^\alpha \psi(x, t)}{\partial t^\alpha} + a \frac{\partial^\beta \psi(x, t)}{\partial t^\beta} = A \frac{\partial^\mu \psi(x, t)}{\partial x^\mu} \quad (5.20)$$

yazılır ve (5.18) denkleminin çözümü, sonuç 5.1 de izlenen benzer yolla (5.19) şeklinde elde edilir.

Teorem 5.2. $x \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$ ve $0 < \varepsilon \leq 1$ için

$$\frac{\partial^\varepsilon \psi(x, \tau)}{\partial \tau^\varepsilon} = \frac{-\hbar_\varepsilon}{2i^\varepsilon \mu} \frac{\partial^{2\varepsilon} \psi(x, \tau)}{\partial x^{2\varepsilon}} \quad (5.21)$$

lokal kesirli Schrödinger denklemini

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\psi(x, \tau) \rightarrow 0 \text{ öyle ki } |x| \rightarrow \infty, \tau > 0 \quad (5.22)$$

başlangıç şartıyla birlikte göz önüne alalım. Burada $\hbar$ Planck sabiti, μ kütle ve $\psi(x, t)$ parçacığın dalga fonksiyonudur. O zaman (5.22) başlangıç şartlarını sağlayan (5.21) denkleminin çözümü

$$\psi(x, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^*(\omega) E_{\varepsilon, \varepsilon}(-K|\omega|^{2\varepsilon} \tau^\varepsilon) E_\varepsilon(i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon) (d\omega)^\varepsilon$$

formunda elde edilir. Burada $K = \frac{-\hbar_\varepsilon}{2i^\varepsilon \mu}$ ve E ise Mittag-Leffler fonksiyonudur.

İspat (5.21) denkleminin her iki tarafına τ değişkenine göre Laplace dönüşümü uygulayarak (5.22) başlangıç koşulları kullanılırsa

$$s^\varepsilon \bar{\psi}(x, s) - \psi_0(x) = K \frac{\partial^{2\varepsilon} \bar{\psi}(x, s)}{\partial x^{2\varepsilon}} \quad (5.23)$$

elde edilir.

(3.9) eşitliği yardımıyla x değişkenine göre (5.23) eşitliğine Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$s^\varepsilon \bar{\psi}^*(\omega, s) - \psi_0^*(\omega) = -K|\omega|^{2\varepsilon} \bar{\psi}^*(\omega, s)$$

elde edilir. Denklem $\bar{\psi}^*(\omega, s)$ için çözülürse

$$\bar{\psi}^*(\omega, s) = \frac{\psi_0^*(\omega)}{s^\varepsilon + K|\omega|^{2\varepsilon}} \quad (5.24)$$

bulunur. (5.24)' den $\psi(x, \tau)$ fonksiyonunu elde etmek için sırasıyla önce ters Laplace dönüşümü ve sonra ters Fourier dönüşümü uygulanır.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\varepsilon-1}}{\gamma + s^\sigma}; \tau \right\} = \tau^{\sigma-\varepsilon} E_{\sigma, \sigma-\varepsilon+1}(-\gamma \tau^\sigma) \quad (5.25)$$

olup, burada $E_{\varepsilon, \sigma}(r)$ Mittag-Leffler fonksiyonudur ve

$$E_{\varepsilon, \sigma}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{\Gamma(n\varepsilon + \sigma)}, \quad \varepsilon, \sigma \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(\varepsilon) > 0, \quad \operatorname{Re}(\sigma) > 0$$

ile ifade edilir.

(5.25) yardımıyla (5.24)'den

$$\psi^*(\omega, \tau) = \psi_0^*(\omega) E_{\varepsilon, \varepsilon}(-K|\omega|^{2\varepsilon} \tau^\varepsilon) \quad (5.26)$$

elde edilir. (5.26) denkleminin ters lokal Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \psi(x, \tau) &= \mathcal{F}^{-1}(\psi_0^*(\omega) E_{\varepsilon, \varepsilon}(-K|\omega|^{2\varepsilon} \tau^\varepsilon); x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^*(\omega) E_{\varepsilon, \varepsilon}(-K|\omega|^{2\varepsilon} \tau^\varepsilon) E_\varepsilon(i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon) (d\omega)^\varepsilon \end{aligned}$$

çözümü elde edilir.

Sonuç 5.3. $x \in \mathbb{R}$ ve $\tau > 0$ için

$$\frac{\partial \psi(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{-\hbar}{2i\mu} \frac{\partial^2 \psi(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (5.27)$$

Schrödinger denklemini

$$\begin{aligned} \psi(x, 0) &= \psi_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ \psi(x, \tau) &\rightarrow 0 \text{ öyle ki } |x| \rightarrow \infty, \tau > 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

şartları ile birlikte ele alalım. O zaman (5.27) denkleminin (5.28) şartlarıyla birlikte çözümü

$$\psi(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^*(\omega) E_{1,1}(-K|\omega|^2 \tau) E_1(i\tau \omega) d\omega$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 5.3. $\hbar$ Planck sabiti, μ kütle ve $\psi(x, t)$ parçacığın dalga fonksiyonu ve $v(x)$ potansiyel fonksiyonu olmak üzere

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x)$$

$$\psi(x, \tau) \rightarrow 0 \text{ öyle ki } |x| \rightarrow \infty, \tau > 0$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir boyutlu

$$\frac{-\hbar_\varepsilon^2}{2\mu} \frac{\partial^{2\varepsilon} \psi(x, \tau)}{\partial x^{2\varepsilon}} + v(x) \psi(x, \tau) = i^\varepsilon \hbar_\varepsilon \frac{\partial^\varepsilon \psi(x, \tau)}{\partial \tau^\varepsilon} \quad (5.29)$$

lokal kesirli Schöndinger denkleminin çözümü

$$\psi(x, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^*(\omega) E_{\varepsilon, \varepsilon}\{(-K|\omega|^{2\varepsilon} + M\bar{v}^*(\omega))\tau^\varepsilon\} E_\varepsilon(i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon)(d\omega)^\varepsilon$$

biçimindedir. Burada $K = \frac{-\hbar_\varepsilon}{2i^\varepsilon \mu}$, $M = \frac{1}{i^\varepsilon \hbar_\varepsilon}$ ve E ise Mittag-Leffler fonksiyonudur.

İspat (5.29) eşitliğinin her iki tarafını $i^\varepsilon \hbar_\varepsilon$ ile bölünürse

$$\frac{-\hbar_\varepsilon}{2i^\varepsilon \mu} \frac{\partial^{2\varepsilon} \psi(x, \tau)}{\partial x^{2\varepsilon}} + \frac{v}{i^\varepsilon \hbar_\varepsilon} \psi(x, \tau) = \frac{\partial^\varepsilon \psi(x, \tau)}{\partial \tau^\varepsilon} \quad (5.30)$$

denklemini elde edilir. (5.30) eşitliğinde $\frac{-\hbar_\varepsilon}{2i^\varepsilon \mu} = K$ ve $\frac{1}{i^\varepsilon \hbar_\varepsilon} = M$ olduğunu kabul edilirse

$$K \frac{\partial^{2\varepsilon} \psi(x, \tau)}{\partial x^{2\varepsilon}} + M v(x) \psi(x, \tau) = \frac{\partial^\varepsilon \psi(x, \tau)}{\partial \tau^\varepsilon}$$

biçiminde yazılır. Bu denkleminin her iki tarafına lokal Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$K \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^{2\varepsilon} \psi(x, \tau)}{\partial x^{2\varepsilon}} \right\} + M \mathcal{L} \{ v(x) \psi(x, \tau) \} = \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^\varepsilon \psi(x, \tau)}{\partial \tau^\varepsilon} \right\} \quad (5.31)$$

elde edilir.

$$\mathcal{L} \{ \psi(x, \tau) \} = \bar{\psi}(x, s)$$

olduğu kabul edilirse,

$$\mathcal{L} \{ v(x) \psi(x, \tau) \} = \int_0^\infty v(x) \psi(x, \tau) e^{-s\tau} d\tau = v(x) \bar{\psi}(x, s)$$

olup Laplace dönüşümünün özelliği kullanılırsa

$$K \frac{\partial^{2\varepsilon} \bar{\psi}(x, s)}{\partial x^{2\varepsilon}} + M v(x) \bar{\psi}(x, s) = s^\varepsilon \bar{\psi}(x, s) - \psi_0(x) \quad (5.32)$$

elde edilir.

$\mathcal{F}$ Fourier operatörü olmak üzere

$$\mathcal{F}\{\bar{\psi}(x, s)\} = \bar{\psi}^*(\omega, s)$$

olduğu kabul edilsin. Fourier dönüşümünün özellikleri yardımıyla

$$\mathcal{F}\left\{K \frac{\partial^{2\varepsilon} \bar{\psi}(x, s)}{\partial x^{2\varepsilon}}\right\} = -K|\omega|^{2\varepsilon} \bar{\psi}^*(\omega, s),$$

$$\mathcal{F}\{Mv(\omega) \bar{\psi}(x, s)\} = Mv^*(\omega) \bar{\psi}^*(\omega, s)$$

olup (5.32) denkleminde Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$-K|\omega|^{2\varepsilon} \bar{\psi}^*(\omega, s) + Mv^*(\omega) \bar{\psi}^*(\omega, s) = s^\varepsilon \bar{\psi}^*(\omega, s) - \psi_0^*(\omega) \quad (5.33)$$

elde edilir. (5.33) denkleminde $\bar{\psi}^*(\omega, s)$ yalnız bırakılırsa

$$\bar{\psi}^*(\omega, s) = \frac{\psi_0^*(\omega)}{K|\omega|^{2\varepsilon} - Mv^*(\omega) + s^\varepsilon} \quad (5.34)$$

bulunur.

Şimdi (5.34) denkleminde ters Laplace dönüşümü uygulansın. Buradan

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{\psi}^*(\omega, s)\} = \psi_0^*(\omega) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{K|\omega|^{2\varepsilon} - Mv^*(\omega) + s^\varepsilon}\right\} \quad (5.35)$$

yazılır.

(4.7)'den

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\varepsilon + a}\right\} = E_\varepsilon(-a\tau^\varepsilon)$$

olmak üzere, (5.35) denkleminde $a = K|\omega|^{2\varepsilon} - Mv^*(\omega)$ olduğu kabul edilirse

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{K|\omega|^{2\varepsilon} - Mv^*(\omega) + s^\varepsilon}\right\} = E_{\varepsilon, \varepsilon}\{(-K|\omega|^{2\varepsilon} + Mv^*(\omega))\tau^\varepsilon\} \quad (5.36)$$

bulunur. Böylece

$$\psi^*(\omega, \tau) = \psi_0^*(\omega) E_{\varepsilon, \varepsilon}\{(-K|\omega|^{2\varepsilon} + Mv^*(\omega))\tau^\varepsilon\} \quad (5.37)$$

olacak biçimde yazılır.

Burada (5.37) denkleminin ters Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$\psi(x, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^*(\omega) E_{\varepsilon, \varepsilon} \{(-K|\omega|^{2\varepsilon} + M\nu^*(\omega))\tau^\varepsilon\} E_\varepsilon(i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon)(d\omega)^\varepsilon$$

bulunur ve böylece (5.29) denkleminin çözümü elde edilir.

Örnek 5.1. $x \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$ ve $0 < \varepsilon \leq 1$ için

$$\frac{\partial^\varepsilon \psi(x, \tau)}{\partial \tau^\varepsilon} = \frac{-\hbar_\varepsilon}{2i^\varepsilon \mu} \frac{\partial^{2\varepsilon} \psi(x, \tau)}{\partial x^{2\varepsilon}} \quad (5.38)$$

lokal kesirli Schrödinger denklemini Fourier dönüşümü yardımıyla çözüünüz. Burada $\hbar$ Planck sabiti, μ kütle ve $\psi(x, t)$ parçacığın dalga fonksiyonudur.

Çözüm. (5.38) denkleminin x değişkenine göre lokal kesirli Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{\partial^\varepsilon \psi(x, \tau)}{\partial \tau^\varepsilon} + \frac{\hbar_\varepsilon}{2i^\varepsilon \mu} i^{2\varepsilon} \omega^{2\varepsilon} \psi(\omega, \tau) = 0$$

olur. Buradan

$$\frac{\partial^\varepsilon \psi(x, \tau)}{\partial \tau^\varepsilon} - \frac{\hbar_\varepsilon}{2\mu} |\omega|^{2\varepsilon} \psi(\omega, \tau) = 0 \quad (5.39)$$

şeklinde lokal kesirli diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü ile

$$\psi(\omega, \tau) = E_\varepsilon \left(\frac{\hbar_\varepsilon}{2\mu} |\omega|^{2\varepsilon} \tau^\varepsilon \right) \quad (5.40)$$

elde edilir. Ters lokal Fourier dönüşümü yardımıyla

$$\psi(x, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} E_\varepsilon \left(\frac{\hbar_\varepsilon}{2\mu} |\omega|^{2\varepsilon} \tau^\varepsilon \right) E_\varepsilon(i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon)(d\omega)^\varepsilon$$

olacak şekilde (5.38) denkleminin çözümü bulunur. Burada E , Mittag-Leffler fonksiyonudur.

Örnek 5.2. $x \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$ ve $0 < \varepsilon \leq 1$ için

$$\frac{\partial^\varepsilon \psi(x, \tau)}{\partial \tau^\varepsilon} = \frac{-\hbar_\varepsilon}{2i^\varepsilon \mu} \frac{\partial^{2\varepsilon} \psi(x, \tau)}{\partial x^{2\varepsilon}} \quad (5.41)$$

lokal kesirli Schrödinger denklemini

$$\psi(x, 0) = 0 \quad (5.42)$$

başlangıç şartıyla birlikte lokal kesirli Laplace dönüşümü yardımıyla çözünüz. Burada $\hbar$ Planck sabiti, μ kütle, $\psi(x, t)$ parçacığın dalga fonksiyonudur.

Çözüm. (5.41) denkleminde $\alpha^\varepsilon = \frac{\hbar_\varepsilon}{2i^\varepsilon \mu}$ olduğu kabul edilirse,

$$\frac{\partial^\varepsilon \psi(x, \tau)}{\partial \tau^\varepsilon} = -\alpha^\varepsilon \frac{\partial^{2\varepsilon} \psi(x, \tau)}{\partial x^{2\varepsilon}}$$

biçiminde yazılır. (5.41) denkleminde τ değişkenine göre lokal kesirli Laplace dönüşümü uygulanır ve (5.42) başlangıç şartı göz önüne alınırsa

$$s^\varepsilon \psi(x, s) + \alpha^\varepsilon \frac{\partial^{2\varepsilon} \psi(x, s)}{\partial x^{2\varepsilon}} = 0$$

bulunur. Buradan

$$\frac{\partial^{2\varepsilon} \psi(x, s)}{\partial x^{2\varepsilon}} + \left(\frac{s}{\alpha}\right)^\varepsilon \psi(x, s) = 0 \quad (5.43)$$

olur. Elde edilen (5.43) denklemi çözülürse

$$\psi(x, s) = \xi_1(s) \cos_\varepsilon \left(\left(\frac{s}{\alpha}\right)^{\varepsilon/2} x^\varepsilon \right) + \xi_2(s) \sin_\varepsilon \left(\left(\frac{s}{\alpha}\right)^{\varepsilon/2} x^\varepsilon \right) \quad (5.44)$$

elde edilir. Ters lokal Laplace dönüşümü yardımıyla

$$\begin{aligned} \psi(x, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^\varepsilon} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \left\{ \xi_1(s) \cos_\varepsilon \left(\left(\frac{s}{\alpha}\right)^{\varepsilon/2} x^\varepsilon \right) \right. \\ \left. + \xi_2(s) \sin_\varepsilon \left(\left(\frac{s}{\alpha}\right)^{\varepsilon/2} x^\varepsilon \right) \right\} E_\varepsilon(\tau^\varepsilon s^\varepsilon) (ds)^\varepsilon \end{aligned} \quad (5.45)$$

biçiminde (5.41) denkleminin çözümü bulunur. Burada E , Mittag-Leffler fonksiyonudur.

6. HELMHOLTZ DENKLEMİNİN LOKAL KESİRLİ ÇÖZÜMÜ

Helmholtz denklemi, Hermann Von Helmholtz tarafından bulunmuştur. Fizikte özellikle elektromanyetik ve akışkanlar dinamiğinde karşılaşılan ikinci dereceden eliptik bir kısmi türevli differensiyel denklemdir. Tezimizin bu alt bölümde ise zamanla harmonik değişim gösteren elektromanyetik ve akustik dalgalara uyarlanmış ortamlardaki alan dağılımını modellemek için kullanılan Helmholtz denkleminin lokal kesirli operatörler uygulayarak çözümler elde edilmiştir.

Teorem 6.1.

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x) \quad (6.1)$$

$$\psi_\tau(x, 0) = 0$$

başlangıç koşulları altındaki iki boyutlu

$$\frac{\partial^{2\varepsilon} \psi(x, \tau)}{\partial x^{2\varepsilon}} + \frac{\partial^{2\varepsilon} \psi(x, \tau)}{\partial \tau^{2\varepsilon}} + a^2 \psi(x, \tau) = 0 \quad (6.2)$$

homojen Helmholtz denkleminin çözümü

$$\psi(x, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\psi_0^*(\omega) \cosh_\varepsilon \left(\left(\sqrt{|\omega|^{2\varepsilon} - a^2} \right) \tau^\varepsilon \right) \right) E_\varepsilon(i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon) (d\omega)^\varepsilon$$

biçimindedir. Burada a sabit bir sayıdır.

İspat.

$$\mathcal{L}\{\psi(x, \tau)\} = \bar{\psi}(x, s)$$

olduğu göz önüne alarak (6.2) denkleminin τ bağımsız değişkenine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{\partial^{2\varepsilon} \bar{\psi}(x, s)}{\partial x^{2\varepsilon}} + s^{2\varepsilon} \bar{\psi}(x, s) - s^\varepsilon \psi_0(x) - \psi_\tau(x, 0) + a^2 \bar{\psi}(x, s) = 0 \quad (6.3)$$

yazılır. (6.1) başlangıç koşulları göz önüne alındığında (6.3) denklemi

$$\frac{\partial^{2\varepsilon} \bar{\psi}(x, \tau)}{\partial x^{2\varepsilon}} + s^{2\varepsilon} \bar{\psi}(x, s) - s^\varepsilon \psi_0(x) + a^2 \bar{\psi}(x, s) = 0 \quad (6.4)$$

biçiminde yazılır.

(6.4) denkleminde lokal Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$-|\omega|^{2\varepsilon} \bar{\psi}^*(\omega, s) + s^{2\varepsilon} \bar{\psi}^*(\omega, s) - s^\varepsilon \psi_0^*(\omega) + a^2 \bar{\psi}^*(\omega, s) = 0 \quad (6.5)$$

biçiminde yazılır. (6.5) denkleminde $\bar{\psi}^*(\omega, s)$ fonksiyonu,

$$\bar{\psi}^*(\omega, s) = \frac{s^\varepsilon \psi_0^*(\omega)}{s^{2\varepsilon} - |\omega|^{2\varepsilon} + a^2} \quad (6.6)$$

şeklinde elde edilir. (6.6) denkleminde ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{\psi}^*(\omega, s)\} = \psi_0^*(\omega) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^\varepsilon}{s^{2\varepsilon} - |\omega|^{2\varepsilon} + a^2}\right\}$$

elde edilir ve $|\omega|^{2\varepsilon} - a^2 = c^{2\varepsilon}$ olduğu kabul edilirse

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{\psi}^*(\omega, s)\} = \psi_0^*(\omega) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^\varepsilon}{s^{2\varepsilon} - c^{2\varepsilon}}\right\} \quad (6.7)$$

yazılır. (4.14) yardımıyla (6.7) denklemi

$$\bar{\psi}(\omega, s) = \psi_0^*(\omega) \cosh_\varepsilon\left(\left(\sqrt{|\omega|^{2\varepsilon} - a^2}\right) \tau^\varepsilon\right) \quad (6.8)$$

biçiminde yazılır.

(6.8) denkleminde Ters Fourier dönüşümünü uygulanırsa

$$\psi(x, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\psi_0^*(\omega) \cosh_\varepsilon\left(\left(\sqrt{|\omega|^{2\varepsilon} - a^2}\right) \tau^\varepsilon\right) \right) E_\varepsilon(i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon) (d\omega)^\varepsilon$$

bulunur ve elde edilen bu denklemi (6.1) başlangıç koşullarıyla verilen (6.2) denkleminin lokal kesirli çözümüdür.

Teorem 6.2.

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x) \quad (6.9)$$

$$\psi_\tau(x, 0) = 0$$

başlangıç koşulları altında

$$\frac{\partial^{2\varepsilon}\psi(x, \tau)}{\partial x^{2\varepsilon}} + \frac{\partial^{2\varepsilon}\psi(x, \tau)}{\partial \tau^{2\varepsilon}} + a^2\psi(x, \tau) = f(x, \tau) \quad (6.10)$$

iki boyutlu Helmholtz denkleminin lokal kesirli çözümü

$$\begin{aligned} \psi(x, \tau) = & \frac{1}{(2\pi)^\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(\psi_0^*(x) \cosh_\varepsilon \left((\sqrt{|\omega|^{2\varepsilon} - a^2}) \tau^\varepsilon \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{(2\pi)^\varepsilon} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{\bar{f}^*(\omega, s)}{s^{2\varepsilon} - \omega^{2\varepsilon} + a^2} E_\varepsilon(\tau^\varepsilon s^\varepsilon)(ds)^\varepsilon \right] E_\varepsilon(i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon)(d\omega)^\varepsilon \end{aligned}$$

biçimindedir. Burada a sabit bir sayıdır.

İspat.

$$\mathcal{L}\{\psi(x, \tau)\} = \bar{\psi}(x, s)$$

olduğu göz önüne alarak (6.10) denkleminin τ bağımsız değişkenine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{\partial^{2\varepsilon}\bar{\psi}(x, \tau)}{\partial x^{2\varepsilon}} + s^{2\varepsilon}\bar{\psi}(x, s) - s^\varepsilon\psi_0(x) - \psi_\tau(x, 0) + a^2\bar{\psi}(x, s) = \bar{f}(x, s) \quad (6.11)$$

bulunur. (6.9) başlangıç koşulları göz önüne alındığında (6.11) denklemi

$$\frac{\partial^{2\varepsilon}\bar{\psi}(x, \tau)}{\partial x^{2\varepsilon}} + s^{2\varepsilon}\bar{\psi}(x, s) - s^\varepsilon\psi_0(x) + a^2\bar{\psi}(x, s) = \bar{f}(x, s) \quad (6.12)$$

biçiminde yazılabilir.

$\mathcal{F}$ dönüşümü lokal Fourier dönüşüm olmak üzere (6.12) denkleminin lokal Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$-|\omega|^{2\varepsilon}\bar{\psi}^*(\omega, s) + s^{2\varepsilon}\bar{\psi}^*(\omega, s) - s^\varepsilon\psi_0^*(x) + a^2\bar{\psi}^*(\omega, s) = \bar{f}^*(\omega, s) \quad (6.13)$$

bulunur.

(6.13) denkleminde $\bar{\psi}^*(\omega, s)$ fonksiyonunu,

$$\bar{\psi}^*(\omega, s) = \frac{s^\varepsilon \psi_0^*(x) + \bar{f}^*(\omega, s)}{s^{2\varepsilon} - |\omega|^{2\varepsilon} + a^2} \quad (6.14)$$

biçiminde elde edilir. (6.14) denkleminde $|\omega|^{2\varepsilon} - a^2 = c^{2\varepsilon}$ olduğunu kabul edip, ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{\psi}^*(\omega, s)\} = \psi_0^*(x) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^\varepsilon}{s^{2\varepsilon} - c^{2\varepsilon}}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\bar{f}^*(\omega, s)}{s^{2\varepsilon} - c^{2\varepsilon}}\right\}$$

bulunur. (6.14) ve ters Laplace dönüşümün formülü yardımıyla

$$\bar{\psi}(\omega, s) = \psi_0^*(x) \cosh_\varepsilon(c^\varepsilon \tau^\varepsilon) + \frac{1}{(2\pi)^\varepsilon} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{\bar{f}^*(\omega, s)}{s^{2\varepsilon} - c^{2\varepsilon}} E_\varepsilon(\tau^\varepsilon s^\varepsilon)(ds)^\varepsilon \quad (6.15)$$

biçiminde yazılır. (6.15) denkleminde ters Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \psi(x, \tau) &= \frac{1}{(2\pi)^\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} [(\psi_0^*(x) \cosh_\varepsilon(c^{2\varepsilon} \tau^\varepsilon)) \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^\varepsilon} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{\bar{f}^*(\omega, s)}{s^{2\varepsilon} - c^{2\varepsilon}} E_\varepsilon(\tau^\varepsilon s^\varepsilon)(ds)^\varepsilon] E_\varepsilon(i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon)(d\omega)^\varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\omega^{2\varepsilon} - a^2 = c^{2\varepsilon}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \psi(x, \tau) &= \frac{1}{(2\pi)^\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi_0^*(x) \cosh_\varepsilon\left(\left(\sqrt{|\omega|^{2\varepsilon} - a^2}\right) \tau^\varepsilon\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(2\pi)^\varepsilon} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{\bar{f}^*(\omega, s)}{s^{2\varepsilon} - \omega^{2\varepsilon} + a^2} E_\varepsilon(\tau^\varepsilon s^\varepsilon)(ds)^\varepsilon \right) E_\varepsilon(i^\varepsilon \tau^\varepsilon \omega^\varepsilon)(d\omega)^\varepsilon \quad (6.16) \end{aligned}$$

elde edilir ve elde edilen (6.16) denklemi (6.9) başlangıç koşullarıyla verilen (6.10) denkleminin lokal kesirli çözümüdür.

7. SONUÇLAR

Fen ve matematik bilim dallarında önemli yer tutan ve kendisine birçok çalışma alanı bulmuş olan kesirli hesap analizi hakkında yapılan bu çalışmada bilgi verilmiş ve yapılan çalışmalar anlatılmıştır. Kesirli hesap analizi lokal geometrik davranış sergileyen fonksiyonlar için kesirli türev uygulanmasında yetersiz kalıyordu ve böylece lokal kesirli analiz geliştirildi. Diferansiyellenemeyen fonksiyonların çözümünü elde etmek için kullanılan ve önemli çalışmalar yapılmış olan fraktal analiz olarak da bilinen lokal kesirli analiz çalışmamız için önemli yere sahiptir. Bu nedenle lokal kesirli analizin tarihsel gelişimi hakkında bilgiler verilmiş, önemli olan tanım ve teoremler yer verilmiştir. Ayrıca orijinal kısımların çözümlerini elde ederken kullandığımız lokal kesirli Fourier dönüşümü ve lokal kesirli Laplace dönüşümü ile ilgili temel tanım ve teoremler de verilmiştir.

Schrödinger denklemi kuantum sistemi hakkında bilgiler veren dalga denklemdir ve kuantum fiziğinin temel denklemlerinden biridir. Tez çalışmasının beşinci bölümünde böylesine önemli bir denkleme lokal kesirli Fourier dönüşümü ve lokal kesirli Laplace dönüşümleri uygulayarak çözümler elde edilmiştir. İlk olarak birleşik lokal Schrödinger denkleminin ve daha sonra yapısında bulunan sabitlerin sıfır olma durumlarına göre elde edilen iki farklı denklemin çözümleri bulunmuştur. Ayrıca $(1 + 1)$ boyutlu lokal kesirli Schrödinger denklemi ele alınarak üç farklı yöntem ile çözümleri elde edilmiştir. Bu çözümler bulunurken lokal kesirli Fourier dönüşümü ve lokal kesirli Laplace dönüşümünden yararlanılmıştır. Böylece lokal dönüşüm operatörleri yardımıyla lokal kesirli Schrödinger denkleminin diferansiyellenemeyen çözümleri bulunmuştur.

Helmholtz denklemi zamanla harmonik değişim gösteren elektromagnetik ve akustik dalgalara uyarlanmış ortamlardaki alan dağılımını modellemek için kullanılan bir denklemdir ve bilim dünyasında önemli bir yeri vardır. Tezin altıncı bölümünde ise matematik ve fen bilimlerinde önemli yer tutan Helmholtz denkleminin lokal kesirli dönüşümler uygulayarak çözümler bulunmuştur. Bunun için homojen ve homojen olmayan lokal kesirli Helmholtz denklemi kullanılmıştır. Çözümler bulunurken lokal kesirli Laplace ve lokal kesirli Fourier dönüşümleri sırasıyla uygulanmış, uygulanırken ise bu dönüşümlerin temel tanım ve teoremleri kullanılmıştır.

Yapılan bu çalışmada lokal kesirli Schrödinger ve Helmholtz denklemlerine lokal kesirli Fourier ve Laplace dönüşümleri uygulanarak denklemlerin çözümlerine ulaşıldı. Çalışmamızda görüldüğü üzere lokal kesirli hesaplamalar diferansiyellenemeyen fonksiyonlara rahatça uygulanmaktadır. Ayrıca kullanılan bu dönüşümler fraktal kümelerde tanımlı çeşitli lokal kesirli diferansiyel denklemlere uygulanarak çözümler bulunabilir ve geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Mandelbrot, B.B. (1982). The Fractal Geometry of Nature, W.H. Freeman, Newyork.
- [2] Family, F., Vicsec, T. (1991). Dynamics of Fractal Surfaces, World Science, Singapore.
- [3] Kolwankar K.M., Gangal, A.D. (1996). Fractional Differentiability of Nowhere Differentiable Functions and Dimensions, Chaos, 6(4), 2006, 5-513.
- [4] Tatom, F. B. (1995). The Relationship between Fractional Calculus and Fractals, 3(1), 217-229.
- [5] Parvate, A., Gangal, A. D. (2009). Calculus on Fractal Subsets of Real Line-I :Formulation, 17(1), 53-81.
- [6] Butzer P.L., Westphal U. (2000). An Introduction to Fractional Calculus, World Scientific Publ., Co, Singapore,.
- [7] Hilfer, R. (2008). Threefold İntoduction to Fractional Derivates, Wiley-VCH, Germany.
- [8] Bayın, S. (2006). Mathematical Methods in Science and Engineering, Wiley-İnterscience, New Jersey.
- [9] Carpinteri, A., Manidardi, F., (Editors). (1997). Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer Verlag, Wien and New York.
- [10] Miller, K., Ross, B. (1993). An İntroduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equation, Wiley Interscience, New York.
- [11] Podlubny, I. (1999). Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, NewYork, London, Tokyo and Toronto.
- [12] Kolwankar, K.M., Gangal. A.D. (1996). Fractional differentiability of nowhere differentiable functions and dimension, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, vol. 6, no. 4, pp. 505-513.
- [13] Kolwankar, K.M. (1998). Studies of Fractal Structures and Processes Using Methods of Fractional Calculus, Arxiv preprint chao-dyn/9811008.
- [14] Kolwankar, K.M., Gangal, A.D. (1997). Hölder Exponents of Irregular Signals and Local Fractional Derivates, Vol. 48,no. 1, pp. 49-68.
- [15] Adda, F.B., Cresson, J. (2001). Fractional Differential and the Schrödinger Equation, 2001.
- [16] Yang, X.J. (2011a). Local Fractional Integral Transforms, Progress in Nonlinear Science,4, 1-225.
- [17] Yang, X.J. (2011b). Local Fractional Functional Analysis and Its Apllications, Asian Academic Publisher Limited, China.
- [18] Chen, Y., Yan, Y., Zhang, K. (2010). On the Local Fractional Derivate, J.Math, Anal. Appl., 352, 17-33.
- [19] He, J.H. (2011). A New Fractal Derivation, Thermal Science, 15(1),145-147.
- [20] Yang, X.J. (2011c). Local Fractional Laplace's Transform Based on the Local Fractional Calculus, In: Proc. Of the CSIE2011, 391-397, Springer.
- [21] Yang, X.j., Liao M.K., Chen, J.W. (2012). A Novel Approach to Procesing Fractal Signals Using the Yang-Fourier Transforms, Procedia Enrg. 29,2950-2954.
- [22] Zhong, W.P., Gao, F., Shen, X.M. (2012). Applications of Yang-Fourier Transforms to Local Fractional Equations with Local Fractional Derivate and Local Fractional Integral, Advanced Materials Research, 416, 306-310.

- [23] Guo, S.M., Mei, L.Q., Li, Y., Sun, Y.F. (2011). The Improved Fractional Sub-Equation Method and Its Applications to the Space-Time Fractional Differential Equations in Fluid Mechanics, Phys. Lett. A. 376(4),407-411.
- [24] Soykan, Y. (2012). Fonksiyonel Analiz, Nobel Akademik Yayıncılık, Ostim-Ankara, 2012.
- [25] Falconer, K. (2004). Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications, John Wiley&Sons.
- [26] Barnsley, M.F. (1988). Superfractals, Cambridge University Press, New York, NY ,USA.
- [27] Kaptanoğlu, T.H. (1993). Cantor Kümeleri, Matematik Dünyası, vol. 4, pp. 15-22.
- [28] Shaver, C. (2010). An Exploration of the Cantor Set, Rose-Human Undergratuade Mathematics Journal, vol. 11, no.1, p.18.
- [29] Vallin, R.W. (2013). The Elements of Cantor set: with Applications, John Wiley&Sons.
- [30] Yang, X.J. (2012). Advanced Local Fractional Calculus and Its Applications, World Science Publisher, New York USA.
- [31] Yang, X.J., Baleanu, D., Srivastava, H.M. (2016). Local Fractional Integral Transforms and Their Applications, Elsevier.
- [32] Saxena, R.K., Mathai, A.M., Haubold, H.J. (2006). Solutions of Fractional Reaction-Diffusion Equations in terms of Mittag-Leffler Functions, Int. J.Sci.
- [33] Yılmaz, R., Demirel, N.S. (2019). On Solutions of Local Fractional Schrödinger Equation, Thermal Science, vol 23, Issue Suppl. 6, Pages: 1929-1934.

ÖZGEÇMİŞ

Neslihan Sabriye DEMİREL

[Redacted]	
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]