

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**





KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde

Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : / /

Tezin Savunma Tarihi : / /

Tez Danışmanı :

Trabzon

ÖNSÖZ

Doktora eğitimim boyunca desteğiyle ve sabrıyla beni öneri ve görüşleriyle yönlendiren çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ömer Pekşen'e en içten duygularıyla teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Hayatım boyunca her zaman yanımda olan başta kıymetli annem Ayşe Demircan ve kıymetli babam Muharrem Demircan olmak üzere tüm aileme ve bu süreçte verdikleri destek için Türk Hava Kurumu Üniversitesi'ndeki arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak sevgili eşim Ali Kemal Bekar ve oğlum Kemal Can Bekar'a çok teşekkür ederim. Sizin desteğiniz çok önemliydi. Gösterdiğiniz anlayış için minnettarım.

Nurcan DEMİRCAN BEKAR

Trabzon 2023

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Dual Düzlemsel Eğrilerin Denklik Problemi” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Ömer PEKŞEN’in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 03/02/2023

Nurcan DEMİRCAN BEKAR

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VII
SUMMARY	VIII
SEMBOLLER DİZİNİ	IX
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş	1
1.2. Tezin Amacı, Kapsamı ve Yöntemi	3
1.3. Dual Sayıların Özellikleri ve Temel Tanımlar	3
1.4. D^+ ve D_1 Lineer Hareket Grupları ile $T - Yollar$	12
1.5. Düzlemsel Bir $T - Yolun D^+$ Lineer Hareket Grubuna Göre İnvaryantları	19
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	25
2.1. Düzlemsel Bir $T - Yolun D_1$ Lineer Hareket Grubuna Göre İnvaryantları	25
2.2. Düzlemsel $T - Yolların$ Dual Hareket Gruplarına Göre İnvaryantları	32
2.3. <i>Regüler</i> $T - Yolların$ Dual Denklik Problemi.....	43
2.4. Düzlemsel $T - Yolların$ Dual Varlık Teoremleri.....	57
2.5. Dual Düzlemsel Eğrilerin Tipleri ve İnvaryant Parametrizasyonları	62
2.6. Dual Düzlemsel Eğrilerin Tam İnvaryantlar Sistemi ve Teklik Teoremleri	79
3. İRDELEME.....	86
4. SONUÇLAR.....	87
5. ÖNERİLER	88

6. KAYNAKLAR.....	89
ÖZGEÇMİŞ	



Doktora Tezi

ÖZET

DUAL DÜZLEMSEL EĞRİLERİN DENKLİK PROBLEMİ

Nurcan DEMİRCAN BEKAR

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Ömer PEKŞEN
2023, 91 Sayfa

Bu tez çalışmasında amaçlanan, D dual sayılar ve $G = \mathbb{T}\mathbb{D}^+, \mathbb{T}\mathbb{D}, \mathbb{T}\mathbb{D}_1, \mathbb{T}\mathbb{D}_1^+, \mathbb{R}^2$ 2 –boyutlu reel uzayında D cebiri tarafından üretilen gruplar olmak üzere; G grupları için \mathbb{R}^2 'deki parametrik eğrilerin (T –yolların) ve eğrilerin G –denklik problemlerinin çözümünü, invaryant teori yöntemi kullanarak bulmaktır.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, cebir alanında kullanılan temel tanım, teorem ve sonuçlar ile G –denklik ve G –invariant fonksiyon tanımları, D dual sayılar cebirinden elde edilen lineer hareket grupları ve bu gruplara göre invariantlar verilmektedir. İkinci bölüm altı alt bölümden oluşmaktadır. İlkinde, D_1 lineer hareket grubundan elde edilen \mathbb{D}_1^+ ve \mathbb{D}_1 lineer hareket gruplarına göre; ikincisinde, $\mathbb{T}\mathbb{D}^+, \mathbb{T}\mathbb{D}, \mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ ve $\mathbb{T}\mathbb{D}_1$ dual gruplarına göre T –yolların invariantları belirlenmektedir. Üçüncüsünde, *regüler*, *dejenere regüler* ve *dejenere olmayan T –yolların invariantları* kullanılarak denklik koşulları verilmektedir. Dördüncüsünde, $\mathbb{T}\mathbb{D}^+, \mathbb{T}\mathbb{D}, \mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ ve $\mathbb{T}\mathbb{D}_1$ dual hareket gruplarına göre *regüler*, *dejenere regüler* ve *dejenere olmayan T –yolların varlık ve teklik teoremi* yani invariantları bilinen T –yolların denklemlerinin bulunabileceği gösterilmektedir. Beşincisinde, *dejenere olmayan eğrilerin denklik probleminin dual düzlemsel T –yolların denklik problemine indirgendiği* gösterilmektedir. Sonuncusunda, $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$ ve $\mathbb{T}\mathbb{D}$ dual hareket gruplarına göre *dejenere olmayan eğrilerin tam invariantlar sistemi* belirlenmekte ve teklik teoremleri verilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Dual Sayılar, Parametrik Eğri, T –Yol, Eğri, İnvaryant.

PhD. Thesis

SUMMARY

EQUIVALENCE PROBLEM OF DUAL PLANAR CURVES

Nurcan DEMİRCAN BEKAR

Karadeniz Tehnical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Ömer PEKŞEN
2023, 91 Pages

This thesis is devoted to solution of problems of global G –equivalence of parametric curves (T –*paths*) and curves in 2 –dimensional real vector space \mathbb{R}^2 for the groups $G = \mathbb{T}\mathbb{D}^+, \mathbb{T}\mathbb{D}, \mathbb{T}\mathbb{D}_1, \mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ which generated by the algebra D of dual numbers in \mathbb{R}^2 .

This thesis consists of two chapters. In the first chapter, some basic definitions, theorems and results used in algebra, such as definitions of G –*equivalence* and G –*invariant function*, groups of linear motion obtained from the algebra D and invariants are given according to these groups. The second chapter consists of six subsections. Invariants of T –*paths* are expressed in the first subsection according to the linear motion groups \mathbb{D}_1^+ and \mathbb{D}_1 from the linear group D_1 and in the second subsection according to the dual motion groups $\mathbb{T}\mathbb{D}^+, \mathbb{T}\mathbb{D}, \mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ and $\mathbb{T}\mathbb{D}_1$. In the third, the equivalence conditions are given using invariants of the *regular*, degenerate *regular* and non-degenerate T –*paths*. In the fourth, with respect to the groups $\mathbb{T}\mathbb{D}^+, \mathbb{T}\mathbb{D}, \mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ and $\mathbb{T}\mathbb{D}_1$ existence and uniqueness theorem, that is, with given functions as invariants the equations of the *regular*, degenerate *regular* and non-degenerate T –*paths* can be found. In the fifth, the equivalence problem of non-degenerate curves is reduced to the equivalence problem of dual planar T –*paths*. In the last, system of the complete invariants of non-degenerate curves are determined and uniqueness theorems are given according to the dual motion groups $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$ ve $\mathbb{T}\mathbb{D}$.

Key Words: Dual Numbers, Parametric Curves, T –*Path*, Curve, Invariant.

SEMBOLLER DİZİNİ

D	: Dual Sayılar Halkası
A	: $A = a + \varepsilon a_*$ dual sayısı
A^{-1}	: $A = a + \varepsilon a_*$ dual sayısının tersi
ReA	: $A = a + \varepsilon a_*$ dual sayısının reel kısmı
\bar{A}	: $A = a + \varepsilon a_*$ dual sayısının eşleniği
$S(A)$: $S(A) = S_A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix}$, $A = a + \varepsilon a_*$ dual sayısının matris gösterimi
ε	: Karesi “0” olan dual sayı
Ω	: $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
D^+	: $D^+ = \{(a, a_*), a \neq 0, a, a_* \in \mathbb{R}\}$ kümesi
D_1	: $D_1 = \{(a, a_*), a = \bar{1}, a_* \in \mathbb{R}\}$ kümesi
\mathbb{R}	: Reel Sayılar Kümesi
\mathbb{R}^n	: n –boyutlu Reel Uzay
$[A \ B]$: A ve B ’nin bileşenlerinden oluşan matrisin determinantı
$A \stackrel{G}{\sim} B$: A elemanı B elemanına G –denktir
\cup	: Birleşim işlemi
$\alpha(t)$: $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ parametrik eğri (T –yol)
$\xi(s)$: Eğri
\mathbb{D}^+	: $\mathbb{D}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix}, a \neq 0, a, a_* \in \mathbb{R} \right\}$ matris kümesi
\mathbb{D}^-	: $\mathbb{D}^- = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, a \neq 0, a, a_* \in \mathbb{R} \right\}$ matris kümesi
\mathbb{D}	: $\mathbb{D}^+ \cup \mathbb{D}^- = \mathbb{D}$
TD^+	: $TD^+ = \{F: D \rightarrow D \mid F(B) = AB + C, A \in D^+, \forall B, C \in D\}$ kümesi
$T\mathbb{D}^+$: \mathbb{D}^+ grubunun elemanlarına karşılık gelen matrisler ile birlikte ötelemelere karşılık gelen grup
$T\mathbb{D}^-$: \mathbb{D}^- kümesinin elemanlarına karşılık gelen matrisler ile birlikte ötelemelere karşılık gelen küme
$T\mathbb{D}$: \mathbb{D} grubunun elemanlarına karşılık gelen matrisler ile birlikte

ötelemelere karşılık gelen grup

\mathbb{D}_1^+	: $\mathbb{D}_1^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix}, a = \mp 1, a_* \in \mathbb{R} \right\}$
\mathbb{D}_1^-	: $\mathbb{D}_1^- = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, a = \mp 1, a_* \in \mathbb{R} \right\}$
\mathbb{D}_1	: $\mathbb{D}_1^+ \cup \mathbb{D}_1^-$
TD_1^+	: $TD_1^+ = \{F: D \rightarrow D \mid F(B) = AB + C, A \in D_1, \forall B, C \in D\}$ kümesi
$T\mathbb{D}_1^+$: \mathbb{D}_1^+ grubunun elemanlarına karşılık gelen matrisler ile birlikte ötelemelere karşılık gelen grup
$T\mathbb{D}_1^-$: \mathbb{D}_1^- kümesinin elemanlarına karşılık gelen matrisler ile birlikte ötelemelere karşılık gelen küme
$T\mathbb{D}_1$: \mathbb{D}_1 grubunun elemanlarına karşılık gelen matrisler ile birlikte ötelemelere karşılık gelen grup
$s_\alpha(t)$: α parametrik eğrisinin (T –yolun) yay uzunluğu fonksiyonu
$t_\alpha(s)$: α parametrik eğrisinin (T –yolun) yay uzunluğu fonksiyonunun ters fonksiyonu
$L(\xi)$: ξ eğrisinin tipi
$Ip(\xi)$: ξ eğrisinin tüm invaryant parametrizasyonlarının kümesi
∞	: Sonsuz
$\langle u, v \rangle$: u ile v 'nin iç çarpım işlemi
$ \alpha $: α 'nın mutlak değeri
ϕ	: Boş küme
■	: İspat sonu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Geometri uzayda yer alan her türlü şeklin belli kurallara göre incelenmesini konu alan bir matematik dalıdır. Öklid, “Elementler” adlı kitabında, geometrinin temelini oluşturan çalışması ile tanımlar yapmış, postulat ve aksiyomlar ortaya koymuş ve Öklid Geometrisinin temelini oluşturmuştur. Tanımladığı bu postulatlardan birinin farklılıklara yol açması ile zamanla Öklid dışı geometriler ortaya çıkmıştır. Lobaçevski (Hiperbolik) geometrisi, Riemann (eliptik) geometrisi ve başka yeni geometriler ortaya çıkmıştır. 1872’de Felix Klein geometrilerin, belirli dönüşüm gruplarının etkisi altında değişmeyen özelliklerin incelenmesi ile elde edilebileceğini göstermiştir. Değişmeyen bu özellikler 1850’lerde ortaya atılan invaryant teori ile incelenmeye başlanmıştır. İnvaryant teori alanındaki çalışmalar Weyl [34] ve Dieudonne ve Carrell’in [12] kitaplarını temel almaktadır. İnvaryant teoride noktaların denklik problemi üzerine başlanan çalışmalar daha sonra genişletilerek eğrilere evrilmiştir [16].

Diferensiyel geometri, matematiksel analiz yöntemlerinin çok kullanıldığı bir geometri dalıdır. Bu alanda Guggenheimer [13] ve O’Neill’in [21] kitapları yer almaktadır. Diferensiyel geometride eğriler teorisi uzun yıllar birçok araştırmacı tarafından ele alınmış ve halen daha çalışılmaya devam etmektedir. Eğriler teorisine ait temel çalışmalar Carmo’nun [2] eserinde yer almaktadır. Eğri, uzun yıllardan beri incelenmesine rağmen tanımı konusunda bir uzlaşma yoktur. Birçok kaynakta farklı farklı eğri tanımları verilmektedir. Bu çalışmada, parametrik eğri (T -yol) ve eğri tanımları Aripov ve Khadjiev’in [1] çalışmasındaki gibi alınmaktadır.

İnvaryant teori ve uygulamaları ile ilgili çalışmalara baktığımızda Khadjiev’in [16] \mathbb{R}^n ve \mathbb{C}^n ’deki yolların $SL(n)$ -denkliği ile ilgili çalışması karşımıza çıkar. Khadjiev ve Pekşen’in [20,25] 2004 yılındaki ilk çalışmalarında equi-afin eğrilerin global denklik problemi üzerine, aynı yıl ikincisinde centro-afin eğrilerin global denklik problemi üzerine çalıştıklarını görürüz. Bu alandaki bir başka çalışma ise 2010 yılında Sağiroğlu ve Pekşen’in [29] centro-equiafin eğrilerin global denklik problemi üzerine yaptıkları çalışmadır. Pekşen, Ören ve Khadjiev’in [26] 2012 yılındaki çalışmalarında Pseudo-Öklid geometride eğrilerin

tam invaryantlar sistemi ve invaryant parametrizasyonları üzerine, [18] ise 2013 yılında devam niteliğinde olan eğrilerin varlık teoremleri ile ilgili çalışmalarıdır. Khadjiev ve Ören'in [17,22] Öklid geometrisi üzerinde parametrik eğrilerin (T –yolların) ve eğrilerin global invaryantları üzerine çalışmaları vardır. 2020 yılında benzerlik gruplarına göre parametrik eğrilerin (T –yolların) global diferensiyellenebilir invaryantları üzerine bir çalışma Ören, Khadjiev ve Pekşen [23] tarafından yapılmıştır.

1845-1879 yılları arasında yaşamış olan matematikçi Clifford [3] tarafından iki sıralı çiftten oluşan dual sayılar kavramı tanımlanmıştır. Bu tanımlama yeni çalışma alanları oluşturmuştur. 1901 yılında Study [30] yaptığı çalışma ile birim dual kürenin noktalarının \mathbb{R}^3 'teki yönlü doğrular ile birebir eşleneceğini ispatladı. Buna Study Dönüşümü adı verildi. Hacısalihoğlu [15] 1983 yılında yayınlanan “Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi” adlı kitabında D-modül, dual sayılar halkası üzerinde modül, dual değişkenli fonksiyonlar teorisi, D-modül yardımıyla regle yüzeyler konularını incelemiştir. Dual sayılar üzerine kinematikte, mekanikte, robotikte, mühendislikte, vs. pek çok alanda çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar karşımıza Yang [35] ve Veldkamp'ın [33] eserlerinde çıkmaktadır. Turgut'un [32] dual eğriler üzerine Öklid dışı geometri üzerinde çalışması mevcuttur. İnvaryant teori ve dual sayıların Öklid grubuna göre robotik çalışmalara uygulanması ile ilgili bir doktora tezi Daher [5] tarafından 2013 yılında yapılmıştır.

Bu doktora tezinin oluşmasına yol gösteren çalışmalardan biri, Tomar'ın [31] 2012 yılında ‘Dual Sayılar ve Dual Sayıların 2-Boyutlu Dual Geometriye Uygulamaları’ başlıklı tez çalışmasında 2-boyutlu dual düzlem geometrisinin temel gruplarından biri olan D_1 grubu ve ona izomorf GD_1 matris grubu için noktaların denklik problemlerini incelediği, önemli tanımlar yaptığı ve bulgular elde ettiği çalışmasıdır. Diğer çalışma ise Khadjiev, Ören ve Pekşen'in [19] 2018 yılında yayınlanan ‘Global Invariants of Paths and Curves for the Group of All Linear Similarities in the Two-Dimensional Euclidean Space’ isimli çalışmalarıdır. Bir diğer çalışma ise Sağıroğlu [28] tarafından lineer (benzerlik) gruplarına göre dual sayıların invaryant teori metoduyla ele alındığı bir çalışmadır. Yol gösterici olan bu çalışmalar ile hedeflenen ise; *regüler* parametrik eğri (T –yol) ve eğrilerin G –denklik problemini, basit ama etkili bir yöntem ile, dual sayılar kullanarak çözmektir. $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$ (yani \mathbb{D}^+ lineer grubunun elemanlarına karşılık gelen matrisler ile birlikte ötelemelere karşılık gelen grup) ve $\mathbb{T}\mathbb{D}$ (yani \mathbb{D} grubunun elemanlarına karşılık gelen matrisler ile birlikte ötelemelere karşılık gelen grup) gruplarına göre hem parametrik eğri (T –yol) hem de eğrilerin denklik

problemlerinin incelenmesi bu tezin temelini oluşturmaktadır. Tezden elde edilen bulgularla [6,7,8,9,10,11,24] çalışmaları elde edilmiştir.

1.2. Tezin Amacı, Kapsamı ve Yöntemi

Literatür taramasından anlaşılacağı gibi düzlem eğrilerinin tüm dual dönüşüm gruplarına göre invaryantları hakkında kapsamlı bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu tezde amaç düzlem eğrilerinin dual sayılardan elde edilen gruplara göre invaryantları yardımıyla belirlenmesi probleminin çözümünü bulmaktır. Bunun için invaryant teori yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntem diğer yöntemlerden farklı olarak eğrilerin sadece yerel invaryantlarını değil aynı zamanda global invaryantlarının da belirlenmesini sağlamıştır.

Bu amaçla önce Dual Sayılar kümesinin cebirsel özellikleri ortaya konmuştur. Daha sonra belirlenen gruplara göre düzlemsel eğrilerin denklik problemi, invaryant teori yöntemiyle araştırılmıştır. Literatürde eğri kavramı ile parametrik eğri (T -yol) kavramı genellikle ayırt edilmeden kullanılmaktadır. Bu nedenle klasik diferansiyel geometri kitaplarında sadece parametrik eğriler (T -yollar) ele alınmaktadır. Dolayısıyla yalnızca yerel invaryantlar incelenmektedir. Ama biz bu tezde parametrik eğri (T -yol) ve eğri kavramlarını açık bir şekilde ayırt ederek kullanacağız. Böylece global invaryantlar da incelenmiş olmaktadır. Burada eğrinin denklik problemi, invaryant parametrizasyon ile parametrelenmiş parametrik eğrilerin (T -yolların) denklik problemine indirgenmektedir. Eğrilerde eğri tipi kavramı bir global invaryant olarak ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla eğriler tiplerine göre incelenmektedir.

İnvariant teoride en önemli problem denklik problemidir. Aslında diferansiyel geometrinin özel olarak eğriler teorisinin en önemli problemi de denklik problemidir. Bu amaçla dual düzlemde iki eğrinin global denklik koşulları tam olarak belirlenmekte ve ayrıca bu yöntemle, invaryantları verilen eğrilerin belirlenmesi de mümkün olmaktadır.

1.3. Dual Sayıların Özellikleri ve Temel Tanımlar

Bu bölümde cebir alanına ait tezde kullandığımız temel tanımlar verilmektedir ve D dual sayılar cebirinin özellikleri ile ilgili birkaç temel tanım ve önermelerden bahsedilmektedir.

Tanım 1.3.1. Boş olmayan bir G kümesi ile aşağıdaki üç koşula uyan bir

$$\circ: (x, y) \in G \times G \rightarrow x \circ y \in G$$

iç işleminden oluşan (G, \circ) ikilisine bir *grup* denir.

i) “ \circ ” birleşimlidir: $\forall x, y \in G$ için $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

ii) “ \circ ” işlemine göre G de bir tek e birim elemanı vardır: $\forall x \in G$ için $e \circ x = x \circ e = x$

iii) $\forall x \in G$ için “ \circ ” işlemine göre G 'de bir y ters elemanı vardır: $x \circ y = y \circ x = e$.
“ \circ ” işlemine bir grup işlemi denir. Eğer; “ \circ ” işlemi değişimli yani $x \circ y = y \circ x$ ise (G, \circ) grubuna *değişmeli grup* veya *abel grubu* denir.

Tanım 1.3.2. (G, \circ) bir grup ve $G' \subset G$ ve $G' \neq \emptyset$ ise (G', \circ) bir *alt gruptur*. \Leftrightarrow Aşağıdaki

i) (G, \circ) 'nin birim elemanı e ise $e \in G'$,

ii) $\forall x \in G'$ için ters eleman $x' \in G'$,

iii) $\forall x, y \in G'$ için $x \circ y' \in G'$

koşullar sağlanır.

Tanım 1.3.3. (G, \circ) ve $(G', *)$ iki grup ve $\gamma: (G, \circ) \rightarrow (G', *)$ fonksiyonu olmak üzere;
 $\forall g_1, g_2 \in G$ için

$$\gamma(g_1 \circ g_2) = \gamma(g_1) * \gamma(g_2)$$

sağlanıyorsa γ 'ya G 'den G' 'ne bir *grup homomorfizması* denir. γ homomorfizması birebir ve örten ise γ 'ya bir *izomorfizma* denir. Bu durumda; G ile G' izomorfiktir denir ve $G \cong G'$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.4. Boş olmayan bir H kümesi ile bu kümedeki iki “ $\circ, *$ ” iç işleminden oluşan $(H, \circ, *)$ üçlüsünü ele alalım. Eğer (H, \circ) bir abel grubu iken ikinci işlem olan “ $*$ ”, H 'da birleşimli ve birinci işlem üzerine dağılımlı ise $(H, \circ, *)$ üçlüsüne bir *halka* denir. $(H, \circ, *)$ halkasında ikinci işlem “ $*$ ”; değişimli ise halkaya *değişimli halka*, birimli ise de *birimli halka* denir.

Tanım 1.3.5. $(H, \circ, *)$ bir halka olsun. Boştan farklı bir $S \subseteq H$ alt kümesi için $\forall x, y \in S$

olmak üzere; $x \circ y$, $x \circ y'$, $x * y \in S$ ise $(S, \circ, *)$ üçlüsü $(H, \circ, *)$ 'nin bir alt halkasıdır.

Tanım 1.3.6. $(C, \circ, *)$ bir halka olsun ve (C, \circ) abel grubunun birim elemanı e olmak üzere $(C - \{e\}, *)$ bir grup ise $(C, \circ, *)$ üçlüsüne *aykırı cisim* denir. “*” değişimli ise $(C, \circ, *)$ 'ye *değişimli cisim* veya sadece *cisim* denir.

Örnek 1.3.7. \mathbb{R} reel sayılar kümesi, üzerinde tanımlanan “+” toplama işlemi ve “.” çarpma işlemlerine göre bir cisimdir.

Tanım 1.3.8. (V, \oplus) bir abel grup, “+” işlemi toplama ve “.” işlemi çarpma olmak üzere; $(F, +, \cdot)$ bir cisim olsun. $F \times V \rightarrow V$ 'ye tanımlanan bir “ \odot ” işlemi aşağıdaki

$$\text{i) } \forall v \in V \text{ için } 1_F \odot v = v$$

$$\text{ii) } \forall v_1, v_2 \in V \text{ ve } \forall c \in F \text{ için } c \odot (v_1 \oplus v_2) = (c \odot v_1) \oplus (c \odot v_2)$$

$$\text{iii) } \forall v \in V \text{ ve } \forall c_1, c_2 \in F \text{ için } (c_1 + c_2) \odot v = (c_1 \odot v) + (c_2 \odot v)$$

$$\text{iv) } \forall v_1, v_2 \in V \text{ ve } \forall c \in F \text{ için } (c_1 \cdot c_2) \odot v = c_1 \odot (c_2 \odot v)$$

koşulları sağlarsa V kümesine F cismi üzerinde bir *vektör uzayı* denir.

Tanım 1.3.9. [14] Bir M kümesi bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı ise ve ayrıca $M \times M \rightarrow M$ çarpma işlemi $V_1, V_2, V_3 \in M$ olmak üzere;

$$\text{i) } V_1(V_2 + V_3) = V_1V_2 + V_1V_3 ; (V_2 + V_3)V_1 = V_2V_1 + V_3V_1$$

$$\text{ii) } (V_1V_2)V_3 = V_1(V_2V_3)$$

$$\text{iii) } (cV_1)V_2 = V_1(cV_2) = c(V_1V_2), c \in K$$

özelliklerini sağlarsa bu M kümesine K cismi üzerinde bir *cebiri* denir.

K cismi özel olarak \mathbb{R} reel sayılar cismi alınmış ise M 'ye *reel cebiri* denir.

Tanım 1.3.10. [14] M cebirinin boştan farklı bir alt kümesi N olmak üzere; N , cebiri olmak üzere özelliklerini sağlıyorsa N 'ye M 'nin bir *alt cebiri* denir.

Tanım 1.3.11. [31] $\forall a, a_* \in \mathbb{R}$ için bir sıralı ikiliyi (a, a_*) olarak alalım. Bu sıralı ikililerin $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesini D ile gösterelim.

Tanım 1.3.12. [31] $(a, a_*), (b, b_*) \in D$ olmak üzere; D üzerinde toplama işlemi

$$+: D \times D \rightarrow D; (a, a_*) + (b, b_*) = (a + b, a_* + b_*)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.3.13. [31] $(a, a_*), (b, b_*) \in D$ olmak üzere; D üzerinde çarpma işlemi

$$\cdot: D \times D \rightarrow D; (a, a_*) \cdot (b, b_*) = (ab, ab_* + a_*b)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.3.14. [31] $(a, a_*), (b, b_*) \in D$ olmak üzere; D üzerinde eşitlik,

$$(a, a_*) = (b, b_*) \Leftrightarrow a = a_* \text{ ve } b = b_*$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.3.15. Üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri bulunan $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesine *dual sayılar kümesi* denir. D dual sayılar kümesinin elemanları *dual sayı* olarak ifade edilir. $A = (a, a_*)$, $B = (b, b_*)$ ve $C = (c, c_*)$,... şeklinde sembollerle gösterilir.

Tanım 1.3.16. D dual sayılar kümesi \mathbb{R} cismine izomorf $\{(a, 0); a \in \mathbb{R}\} \subset D$ alt kümesini bir alt cisim olarak kapsar. Buna göre; $(a, 0)$ dual sayısı a sayısına izomorftur ve $(a, 0) = a$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.17. $(1, 0) = 1$ dual sayısına D 'nin üzerinde tanımlanan çarpma işlemine göre *birim elemanı* veya D 'deki *reel birim* denir.

Tanım 1.3.18. $(0, 1)$ dual sayısı ε ile gösterilir. $\varepsilon^2 = \varepsilon$. $\varepsilon = (0, 1)$. $(0, 1) = 0$ olduğu açıktır.

Tanım 1.3.19. $(0, 0)$ dual sayısına D 'nin üzerinde tanımlanan toplama işlemine göre *birim elemanı* denir ve $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ izomorfizmine karşılık geldiği "0" reel sayısı ile gösterilir.

Teorem 1.3.20. $A = (a, a_*) \in D$ dual sayısı $A = (a, a_*) = a + \varepsilon a_*$ şeklinde tek türlü yazılabilir.

İspat: D dual sayılar kümesi üzerinde tanımlanan toplama işlemine göre; $A = (a, a_*) = (a, 0) + (0, a_*)$ olarak tanımlanabilir. Buradan $(a, a_*) = (a, 0) + (0, a_*) = (a, 0) + (0, 1)(a_*, 0)$ yazılır. Tanım 1.3.16. ve Tanım 1.3.18. kullanılarak $(a, a_*) = (a, 0) + (0, a_*) = (a, 0) + (0, 1)(a_*, 0) = a + \varepsilon a_*$ olup $A = (a, a_*) \in D$ dual sayısının $A = (a, a_*) = a + \varepsilon a_*$ şeklinde yazılabildiği gösterilir.

Şimdi bu gösterimin tekliline bakalım: $A = (a, a_*) = a + \varepsilon a_*$ yazılışı tek türüdür. Ancak $A = (a, a_*)$ 'nin bir başka gösterimi $A = (a, a_*) = b + \varepsilon b_*$ şeklinde olsun. O halde buradan; $(a, a_*) = a + \varepsilon a_* = b + \varepsilon b_*$ olup eşitlik tanımından $a = b$ ve $a_* = b_*$ elde edilir. O halde; $A = (a, a_*) = a + \varepsilon a_*$ şeklinde tek türlü yazılır. ■

$A = a + \varepsilon a_* \in D$ şeklindeki elemanlar $A = \begin{pmatrix} a \\ a_* \end{pmatrix}$ sütun matris olarak gösterilebilir.

Tanım 1.3.21. [31] $\lambda \in \mathbb{R}, A = (a, a_*) \in D$ için bir dış işlem,

$$\mathbb{R} \times D \rightarrow D; \lambda A = \lambda(a, a_*) = (\lambda a, \lambda a_*)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.3.22. Dual sayılar kümesi;

$$D = \{(a, a_*) = a + \varepsilon a_*, a, a_* \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\}$$

olmak üzere; $(D, +, \cdot)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır ancak cisim değildir.

İspat: Önce D dual sayılar kümesinden elde edilen $(D, +, \cdot)$ üçlüsünün birimli ve değişmeli bir halka olduğunu gösterelim.

i) $(D, +)$ abel gruptur.

- +: $D \times D \rightarrow D$ biçiminde tanımlandığından kapalılık açık olup birleşimlidir. Şöyle

ki; $A = (a, a_*)$, $B = (b, b_*)$ ve $C = (c, c_*) \in D$ olmak üzere;

$$(A + B) + C = ((a, a_*) + (b, b_*)) + (c, c_*) = (a + b, a_* + b_*) + (c, c_*) = (a + b + c, a_* + b_* + c_*) \quad (1)$$

ve

$$A + (B + C) = (a, a_*) + ((b, b_*) + (c, c_*)) = (a, a_*) + (b + c, b_* + c_*) = (a + b + c, a_* + b_* + c_*) \quad (2)$$

dir. Buradan (1) ve (2) eşitlikleri ile istenen elde edilir.

- $\forall A = (a, a_*) \in D$ için $E + A = A + E = A$ olacak şekilde bir tek $E \in D$ vardır. $(e, e_*) + (a, a_*) = (a, a_*)$ ise $(e + a, e_* + a_*) = (a, a_*)$ olup eşitlik tanımından $e + a = a$ ve $e_* + a_* = a_*$ olup buradan $e = 0$ ve $e_* = 0$ olup $(0, 0) = 0 \in D$ birim elemanı elde edilir.

- $\forall A = (a, a_*) \in D$ için “+” işlemine göre D 'de bir tek $Y = (y, y_*) \in D$ ters elemanı vardır öyle ki; $A + Y = Y + A = E$ 'dir. $(a, a_*) + (y, y_*) = (0, 0)$ olup $(a + y, a_* + y_*) = (0, 0)$ ise $a + y = 0$ ve $a_* + y_* = 0$ 'dir. Buradan $y = -a$ ve $y_* = -a_*$ olup $Y = (-a, -a_*) \in D$ elde edilir. Tekliği açıktır.

- “+” toplama işlemi değişmelidir. $\forall A = (a, a_*)$ ve $\forall B = (b, b_*) \in D$ için $A + B = B + A$ 'dır öyle ki $A + B = (a, a_*) + (b, b_*) = (a + b, a_* + b_*) = (b + a, b_* + a_*) = (b, b_*) + (a, a_*) = B + A$ elde edilir.

ii) “.” çarpma işlemi birleşimlidir.

$\therefore D \times D \rightarrow D$ biçiminde tanımlandığından kapalılık açık olup birleşimlidir. Şöyle ki; $A = (a, a_*)$, $B = (b, b_*)$ ve $C = (c, c_*) \in D$ olmak üzere;

$$(A.B).C = ((a, a_*) . (b, b_*)) . (c, c_*) = (ab, ab_* + a_*b) . (c, c_*) = (a.b.c, abc_* + ab_*c + a_*bc) \quad (3)$$

ve

$$A.(B.C) = (a, a_*) . ((b, b_*) . (c, c_*)) = (a, a_*) . (bc, bc_* + b_*c) = (abc, abc_* + ab_*c + a_*bc) \quad (4)$$

dir. Buradan (3) ve (4) eşitlikleri ile istenen elde edilir.

iii) “.” çarpma işlemi “+” toplama işlemi üzerine dağılımlıdır.

$A = (a, a_*)$, $B = (b, b_*)$ ve $C = (c, c_*) \in D$ olmak üzere; $(A + B).C = (A.C) + (B.C)$ ve $C.(A + B) = (C.A) + (C.B)$ ’dir öyle ki;

$$(A + B).C = ((a, a_*) + (b, b_*)) . (c, c_*) = (a + b, a_* + b_*) . (c, c_*) = ((a + b).c, (a + b)c_* + a_*c + b_*c) = (ac + bc, ac_* + bc_* + a_*c + b_*c) \quad (5)$$

ve

$$(A.C) + (B.C) = ((a, a_*) . (c, c_*)) + ((b, b_*) . (c, c_*)) = (ac, ac_* + a_*c) + (bc, bc_* + b_*c) = (ac + bc, ac_* + a_*c + bc_* + b_*c) \quad (6)$$

dir. Buradan (5) ve (6) eşitlikleri ile istenen elde edilir. $C.(A + B) = (C.A) + (C.B)$ benzer şekilde gösterilir.

iv) “.” çarpma işleminin birim elemanı $(1,0)$ ’dır.

$\forall A = (a, a_*) \in D$ için $E.A = A.E = A$ olacak şekilde bir tek $E \in D$ vardır. $(e, e_*) . (a, a_*) = (a, a_*)$ ise $(e.a, ea_* + e_*a) = (a, a_*)$ olup eşitlik tanımından $e.a = a$ ve $ea_* + e_*a = a_*$ olup buradan $e = 1$ ve $e_* = 0$ olup $(1,0) = 0 \in D$ “.” çarpma işlemine göre birim elemanı elde edilir.

v) “.” çarpma işlemi değişimlidir.

$\forall A = (a, a_*)$ ve $\forall B = (b, b_*) \in D$ için $A.B = B.A$ ’dır öyle ki $A.B = (a, a_*) . (b, b_*) = (ab, ab_* + a_*b) = (ba, ba_* + b_*a) = (b, b_*) . (a, a_*) = B.A$ elde edilir. O halde; $(D, +, .)$ dual sayılar kümesi birimli ve değişmeli bir halkadır.

Şimdi $(D, +, .)$ birimli ve değişmeli dual sayılar halkasının cisim olmadığını

gösterelim. $(D/\{(0,0)\})$ ikilisi “.” çarpma işlemi üzerinde bir grup olmalı ancak burada ters eleman özelliği sağlanmıyor. Şöyle ki; $\forall A = (a, a_*) \in D$ için $A.Y = Y.A = (1,0)$ olacak şekilde D 'de bir tek $Y = (y, y_*) \in D$ elemanı vardır ve $(a, a_*) \cdot (y, y_*) = (ay, ay_* + a_*y) = (1,0)$ 'dir. Buradan $ay = 1$ ve $ay_* + a_*y = 0$ olup $y = \frac{1}{a}$ ve $y_* = \frac{-a_*}{a^2}$ elde edilir. $a = 0 \in D$ elemanı için ters eleman bulunamaz. O halde; $(D/\{(0,0)\})$ 'nin “.” çarpma işlemine göre grup olma özelliği sağlanmaz. Dolayısıyla; $(D, +, \cdot)$ birimli ve değişmeli halkası cisim değildir. ■

Tanım 1.3.23. $A = a + \varepsilon a_* \in D$ dual sayısı için A elemanının reel kısmı

$$ReA = a$$

ile gösterilir.

Önerme 1.3.24. $A = a + \varepsilon a_*, B = b + \varepsilon b_* \in D$ olmak üzere;

$$Re(AB) = (ReA)(ReB)$$

'dir.

İspat: Açıktır. ■

Tanım 1.3.25. [31] $A = a + \varepsilon a_* \in D$ olmak üzere;

$$\bar{A} = a - \varepsilon a_* \in D$$

elemanına A dual sayısının eşleniği denir.

Önerme 1.3.26. $A = a + \varepsilon a_* \in D$ olmak üzere;

$$A + \bar{A} = 2a \in \mathbb{R},$$

$$(ReA)^2 = A\bar{A} = a^2 \in \mathbb{R}$$

'dir.

İspat: Açıktır. ■

Önerme 1.3.27. $A = a + \varepsilon a_* \in D$ olmak üzere; A 'nın tersi

$$A^{-1} \text{ vardır. } \Leftrightarrow \operatorname{Re}A \neq 0.$$

Bu durumda;

$$A^{-1} = \frac{\bar{A}}{(\operatorname{Re}A)^2}$$

ve

$$(\operatorname{Re}A)^{-1} = \frac{1}{\operatorname{Re}A}$$

'dir. Ayrıca $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ olmak üzere;

$$\bar{A} = \Omega A$$

olur.

İspat: Açıktır. ■

Önerme 1.3.28. $A = a + \varepsilon a_*, B = b + \varepsilon b_* \in D$ olmak üzere;

$$\text{i) } \operatorname{Re}(\Omega A) = \operatorname{Re}A$$

$$\text{ii) } \operatorname{Re}((\Omega A)(\Omega B)) = (\operatorname{Re}A)(\operatorname{Re}B) = \operatorname{Re}(AB)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: $A = a + \varepsilon a_*, B = b + \varepsilon b_* \in D$ olmak üzere;

i) $\operatorname{Re}(\Omega A) = \operatorname{Re}(a - \varepsilon a_*) = a = \operatorname{Re}(a + \varepsilon a_*) = \operatorname{Re}A$ olup istenen elde edilir.

ii) $\Omega A = \bar{A}$ ve $\Omega B = \bar{B}$ olduğundan

$$(\Omega A)(\Omega B) = \bar{A}\bar{B} = (a - \varepsilon a_*)(b - \varepsilon b_*) = ab + \varepsilon(-ab_* - a_*b)$$

elde edilir. Buradan; Önerme 1.3.24. kullanılarak;

$$Re((\Omega A)(\Omega B)) = ab = (ReA)(ReB) = Re(AB)$$

elde edilir. ■

1.4. D^+ ve D_1 Lineer Hareket Grupları ile T –Yollar

İnvariant teori, belli bir grup etkisi altında değişmeyen özelliklerin incelenmesidir. Bu bölümde G –denklik ve G –invariant fonksiyon gibi temel tanımlar verilmektedir. Ayrıca D dual sayılar cebirinden elde edilen D^+ ve D_1 lineer hareket grupları ifade edilmektedir.

D dual sayılar halkasının

$$D^+ = \{(a, a_*), a \neq 0, a, a_* \in \mathbb{R}\}$$

ve

$$D_1 = \{(a, a_*), a = \mp 1, a_* \in \mathbb{R}\}$$

alt kümeleri, $(a, a_*) \cdot (b, b_*) = (ab, ab_* + a_*b)$ ile tanımlanan çarpma işlemine göre birer değişmeli grup oluşturur. Bir $A = (a, a_*) \in \mathbb{R}^2$ elemanı için $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü $S(A) = S_A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix}$ olmak üzere;

$$\mathbb{D}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix}, a \neq 0, a, a_* \in \mathbb{R} \right\}$$

ve

$$\mathbb{D}^- = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, a \neq 0, a, a_* \in \mathbb{R} \right\}$$

matris kümelerini tanımlayalım. $\mathbb{D}^+ \cup \mathbb{D}^-$ kümesini \mathbb{D} ile gösterelim.

D^+ grubu, \mathbb{D}^+ grubuna izomorftur. Gerçekten;

$$S: D^+ \rightarrow \mathbb{D}^+,$$

$a \neq 0, A = a + \varepsilon a_* \in D^+, S(A) = S(a, a_*) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix}$ olarak tanımlanan S dönüşümü bir grup izomorfizmasıdır. Gerçekten; $\forall A, B \in D^+$ olmak üzere;

i) $S(A + B) = S(A) + S(B)$ 'dir. $S(A + B) = \begin{pmatrix} a + b & 0 \\ a_* + b_* & a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ b_* & b \end{pmatrix} = S(A) + S(B)$ elde edilir.

ii) $S(A \cdot B) = S(A) \cdot S(B)$ 'dir. $S(A \cdot B) = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ ab_* + a_*b & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 \\ b_* & b \end{pmatrix} = S(A) \cdot S(B)$ elde edilir.

iii) S dönüşümü birebirdir. $S(A) = S(B)$ iken $A = B$ midir? $S(A) = S(B)$ ise $\begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ b_* & b \end{pmatrix}$ olup matrislerin eşitliğinden $a = b$ ve $a_* = b_*$ olup $A = (a, a_*) = (b, b_*) = B$ elde edilir.

iv) S dönüşümü örtendir. \mathbb{D}^+ 'dan alınan $\begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix}$ matrise karşılık D^+ kümesinde bir tek $A = (a, a_*)$ dual sayısı vardır. Böylece iddia ispatlanmış olur. Aynı zamanda; $\forall B \in \mathbb{R}^2$ için;

$$S_A B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab \\ a_*b + ab_* \end{pmatrix} = AB$$

olur.

Benzer şekilde;

$$\mathbb{D}_1^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix}, a = \mp 1, a_* \in \mathbb{R} \right\}$$

ve

$$\mathbb{D}_1^- = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, a = \mp 1, a_* \in \mathbb{R} \right\}$$

matris kümelerini tanımlayalım. $\mathbb{D}_1^+ \cup \mathbb{D}_1^-$ kümesini \mathbb{D}_1 ile gösterelim.

D_1 grubu, \mathbb{D}_1^+ grubuna izomorftur. Gerçekten;

$$S: D_1 \rightarrow \mathbb{D}_1^+,$$

$a = \bar{+}1$, $A = a + \varepsilon a_* \in D_1$, $S(A) = S(a, a_*) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix}$ olarak tanımlanan S dönüşümü bir grup izomorfizmasıdır. Aynı zamanda; $\forall B \in \mathbb{R}^2$ için

$$S_A B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab \\ a_* b + ab_* \end{pmatrix} = AB$$

eşitliği sağlanır.

Buradan sonra G ; D^+ veya D_1 olarak alınacaktır.

Tanım 1.4.1. [31] $(G, *)$ bir grup ve M bir küme olsun. Bir

$$\phi: G \times M \rightarrow M$$

dönüşümü $\forall g \in G$ ve $\forall m \in M$ için $\phi(g, m) = gm$ şeklinde tanımlansın. $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall m \in M$ için aşağıdaki

$$\text{i) } (g_1 * g_2)m = g_1(g_2 m)$$

$$\text{ii) } e, G\text{'nin birim elemanı olmak üzere; } em = m.$$

koşullar sağlanıyorsa ϕ 'ye G grubunun M kümesi üzerindeki bir *etkisi* (*hareketi*) denir ve $G: M$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.4.2. G bir grup, M bir küme ve $G: M$ etkisi verilmiş olsun. $\forall m_1, m_2 \in M$ için $m_2 = gm_1$ olacak şekilde $g \in G$ varsa m_1 ve m_2 elemanları G -denktir denir ve $m_1 \stackrel{G}{\sim} m_2$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.3. G bir grup, M bir küme ve $G: M$ etkisi verilmiş olsun. $\forall g \in G$ ve $\forall m \in M$ için $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(gm) = f(m)$ eşitliği sağlanırsa, f fonksiyonuna G -invariant fonksiyon denir.

Yukarıdaki tanımda M yerine $D \times D = D^2$, G yerine D olarak invaryant fonksiyon, $\forall g \in G$ ve $\forall A, B \in D$ için $F(gA, gB) = F(A, B)$ olarak yazılabilir. Ayrıca $\forall H \in \mathbb{D}^+$ veya \mathbb{D}_1^+ ve $\forall A, B \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere bir $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun \mathbb{D}^+ , \mathbb{D}_1^+ -invariant fonksiyon olması demek $f(gA, gB) = f(A, B)$ eşitliğinin sağlanması demektir.

Tanım 1.4.4. [31] G bir grup, M bir küme ve $G: M$ etkisi verilmiş olsun. $\omega = \{f_i: 1, \dots, k\}$ bir G -invariant fonksiyonlar sistemi olsun. $\forall m_1, m_2 \in M$ için $i = 1, \dots, k$ ve $f_i(m_1) = f_i(m_2)$ iken $m_1 \stackrel{G}{\sim} m_2$ ise ω sistemine G -invariant fonksiyonların bir *tam sistemi* denir.

Tanım 1.4.5. [27] V ve W aynı bir F cismi üzerinde tanımlanan iki vektör uzayı olsunlar. Bir $L: V \rightarrow W$ dönüşümü için aşağıdaki

- i) $\forall v_1, v_2 \in V$ için $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$
- ii) $\forall \lambda \in F$ ve $\forall v \in V$ için $L(\lambda v) = \lambda L(v)$

aksiyomlar sağlanıyor ise bu dönüşüme bir *lineer dönüşüm* denir. Bir lineer dönüşüme *homomorfizm* de denir.

Eğer; $V = W$ ise; $L: V \rightarrow V$ lineer dönüşümüne V 'nin bir *lineer endomorfizmi* denir.

Eğer; $L: V \rightarrow W$ lineer dönüşümü üzerine (örten) ise bir *lineer epimorfizm* denir.

Eğer; $L: V \rightarrow W$ lineer dönüşümü birebir ve üzerine (örten) ise bir *lineer izomorfizm* denir.

Eğer; $L: V \rightarrow V$ lineer dönüşümü birebir ve üzerine (örten) ise bir *lineer otomorfizm* denir.

Tanım 1.4.6. [27] V ve W aynı bir F cismi üzerinde tanımlanan sonlu boyutlu iki vektör uzayı olsunlar. Her $L: V \rightarrow W$ lineer dönüşüme matris karşılık gelir.

Tanım 1.4.7. [4] \mathbb{R}^n 'den \mathbb{R}^n 'ye tüm otomorfizmlere karşılık gelen matrislerin kümesi $GL(n, \mathbb{R})$ ile gösterilir. Bu küme, matrislerin çarpım işlemine göre bir gruptur. Bu grup $n \geq 2$ için değişmeli değildir.

Burada inceleyeceğimiz lineer gruplar $GL(n, \mathbb{R})$ 'nin altgruplarıdır.

Tanım 1.4.8. $A_1, A_2, B_1, B_2 \in D$ olmak üzere; $B_1 = gA_1, B_2 = gA_2$ olacak şekilde $g \in G$ varsa $A = \{A_1, A_2\}$ ve $B = \{B_1, B_2\}$ sistemlerine G -denktir denir ve $\{A_1, A_2\} \stackrel{G}{\sim} \{B_1, B_2\}$ ile gösterilir.

Önerme 1.4.9. $F: D^2 = D \times D \rightarrow D$ ve $f_1, f_2: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere; $F(A, B) = f_1(A, B) + \varepsilon f_2(A, B)$ fonksiyonu D^+ veya D_1 -invarianttir. $\Leftrightarrow f_1, f_2$ \mathbb{D}^+ veya \mathbb{D}_1^+ -invarianttir.

İspat: (\Rightarrow) $F: D^2 = D \times D \rightarrow D$ fonksiyonu D^+ veya D_1 -invariant olsun. Bu durumda; $\forall A, B \in D$ olmak üzere bir $g \in D^+$ veya D_1 vardır öyle ki $F(gA, gB) = F(A, B)$ sağlanır. Aynı zamanda $F(gA, gB) = f_1(gA, gB) + \varepsilon f_2(gA, gB)$ olduğundan Tanım 1.3.14. kullanılarak $f_1(gA, gB) = f_1(A, B)$ ve $f_2(gA, gB) = f_2(A, B)$ elde edilir. O halde; f_1 ve f_2 fonksiyonları D^+ veya D_1 -invariant olur. $A = a + \varepsilon a_* \in D^+$ veya $D_1, B = b + \varepsilon b_* \in D$, olmak üzere; bir $H = \begin{pmatrix} h & 0 \\ h_* & h \end{pmatrix} \in \mathbb{D}^+$ veya \mathbb{D}_1^+ için $A \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ a_* \end{pmatrix}$ ve $B \rightarrow \begin{pmatrix} b \\ b_* \end{pmatrix}$ temsilini kullanırsak $HA = \begin{pmatrix} h & 0 \\ h_* & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ha \\ h_*a + ha_* \end{pmatrix}$ ve $HB = \begin{pmatrix} h & 0 \\ h_* & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hb \\ h_*b + hb_* \end{pmatrix}$ olduğundan; $f_1(HA, HB) = f_1(A, B)$ ve $f_2(HA, HB) = f_2(A, B)$ elde edilir. $\forall H \in \mathbb{D}^+$ veya $\mathbb{D}_1^+, \forall A, B \in D$ olduğundan f_1 ve f_2 \mathbb{D}^+ veya \mathbb{D}_1^+ -invarianttir.

(\Leftarrow) f_1 ve f_2 \mathbb{D}^+ veya \mathbb{D}_1^+ -invariant olsun. Bu durumda; $\forall H \in \mathbb{D}^+$ veya $\mathbb{D}_1^+, \forall A, B \in D$ olmak üzere; $f_1(HA, HB) = f_1(A, B)$ ve $f_2(HA, HB) = f_2(A, B)$ 'dir.

$$HA = \begin{pmatrix} ha \\ h_*a + ha_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & 0 \\ h_* & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a_* \end{pmatrix} = (h + \varepsilon h_*)(a + \varepsilon a_*) \text{ ve}$$

$$HB = \begin{pmatrix} hb \\ h_*b + hb_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & 0 \\ h_* & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b_* \end{pmatrix} = (h + \varepsilon h_*)(b + \varepsilon b_*) \text{ olup buradan } \forall H \in D^+ \text{ veya}$$

$D_1, \forall A, B \in D$ olmak üzere; $f_1(HA, HB) = f_1(A, B)$ ve $f_2(HA, HB) = f_2(A, B)$ elde edilir.

O halde; $F(HA, HB) = f_1(HA, HB) + \varepsilon f_2(HA, HB) = f_1(A, B) + \varepsilon f_2(A, B) = F(A, B)$ olduğundan F fonksiyonu D^+ veya D_1 -invarianttir. ■

Tanım 1.4.10. $A = a + \varepsilon a_* \in D, B = b + \varepsilon b_* \in D$ olmak üzere;

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ a_* & b_* \end{pmatrix} = ab_* - a_*b = [A \ B]$$

ile gösterilir.

Önerme 1.4.11. $A = a + \varepsilon a_* \in D$, $B = b + \varepsilon b_* \in D$ ve $ReA = a \neq 0$ olsun. Bu takdirde;

$$\text{i) } BA^{-1} = \frac{ReB}{ReA} + \varepsilon \frac{[AB]}{(ReA)^2} \text{ ve } S_{BA^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{ReB}{ReA} & 0 \\ \frac{[AB]}{(ReA)^2} & \frac{ReB}{ReA} \end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } \det(S_{BA^{-1}}) = \frac{(ReB)^2}{(ReA)^2}, \det(S_{BA^{-1}}) \neq 0 \Leftrightarrow ReB \neq 0$$

sağlanır.

İspat: i) $a = ReA \neq 0$ olduğundan A^{-1} vardır. Önerme 1.3.27.'den $A^{-1} = \frac{\bar{A}}{(ReA)^2}$ 'dir. Buna göre;

$$\begin{aligned} BA^{-1} &= B \frac{\bar{A}}{(ReA)^2} \\ &= (b + \varepsilon b_*) \frac{(a - \varepsilon a_*)}{a^2} \\ &= \frac{ab - \varepsilon b a_* + \varepsilon b_* a}{a^2} \\ &= \frac{b}{a} + \frac{\varepsilon(ab_* - a_*b)}{a^2} \\ &= \frac{ReB}{ReA} + \varepsilon \frac{[A B]}{(ReA)^2} \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) $ReA \neq 0$ olduğundan

$$S_{BA^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{ReB}{ReA} & 0 \\ \frac{[A B]}{(ReA)^2} & \frac{ReB}{ReA} \end{pmatrix}$$

olup

$$\det(S_{BA^{-1}}) = \frac{(ReB)^2}{(ReA)^2}$$

elde edilir.

$$\det(S_{BA^{-1}}) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}B \neq 0$$

olduğu açıktır. ■

Tanım 1.4.12. $A \in G$, $B \in D$ olmak üzere; $f: D^2 \rightarrow D$, $f(\Omega A, \Omega B) = f(A, B)$ ise f 'ye Ω –invariant denir.

Tanım 1.4.13. $A \in G$, $B \in D$ olmak üzere; bir $f(A, B)$ fonksiyonu G –invariant ve Ω –invariant ise $f(A, B)$ fonksiyonu $(G \cup \Omega)$ –invarianttır.

Tanım 1.4.14. [1] $T = (a, b) \mathbb{R}$ 'de bir açık aralık olsun. Bir $\alpha: T \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\forall t \in T$ için $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ şeklindeki $C^{(2)}$ –fonksiyonuna düzlemde bir parametrik eğri (T –yol) denir. G bir grup, $\alpha(t)$ bir T –yol ise $F \in G$ için $F\alpha(t)$ de \mathbb{R}^2 'de bir T –yoldur.

Tanım 1.4.15. G bir grup olsun. $\forall t \in T$ ve bir $g \in G$ için $\beta(t) = g\alpha(t)$ olsun. Bu takdirde; $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ T –yollarına G –denk denir ve $\alpha(t) \stackrel{G}{\sim} \beta(t)$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.16. $\forall g \in G$, $\forall t \in T$ için $\alpha(t), \beta(t), \dots, \theta(t)$ sonlu sayıda T –yollar olmak üzere; eğer $f(g\alpha(t), g\beta(t), \dots, g\theta(t)) = f(\alpha(t), \beta(t), \dots, \theta(t))$ sağlanıyorsa $\alpha(t), \beta(t), \dots, \theta(t)$ T –yolların f fonksiyonuna G –invariant denir.

$\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ \mathbb{R}^2 'de bir T –yol olsun. $\alpha(t)$ 'nin 1. türevi $\alpha'(t) = (x'(t), x'_*(t))$ 'dir. $\alpha(t)$ ve $\alpha'(t)$ 'nin elemanlarının determinanı

$$\det \begin{pmatrix} x(t) & x'(t) \\ x_*(t) & x'_*(t) \end{pmatrix} = [\alpha(t) \ \alpha'(t)]$$

ile gösterilir. $\operatorname{Re}\alpha(t) = x(t)$ 'dir.

Tanım 1.4.17. \mathbb{R}^2 'de bir T –yol $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ olsun. Eğer; $\forall t \in T$ için $\operatorname{Re}\alpha(t) \neq 0$ ise yani $\forall t \in T$ için $x(t) \neq 0$ ise $\alpha(t)$ 'ye c -regüler T –yol denir.

Sonuç 1.4.18. $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ \mathbb{R}^2 'de T –yollar olsun. $\alpha(t)$ c -regüler bir T –yol ve $\alpha(t) \stackrel{c}{\sim} \beta(t)$ ise $\beta(t)$ de c -regüler bir T –yoldur.

İspat: Açıktır. ■

Örnek 1.4.19. $T = (1, \infty)$ olmak üzere; \mathbb{R}^2 'de bir T –yol $\alpha(t) = (\ln t + t, t^2 + 3t + 2)$ alalım. $\forall t \in T$ için; $Re\alpha(t) = \ln t + t \neq 0$ olduğundan $\alpha(t)$ c -regüler T –yoldur.

1.5. Düzlemsel Bir T –Yolun D^+ Lineer Hareket Grubuna Göre İnvaryantları

Bu bölümde D dual sayılar cebirinden elde edilen D^+ lineer hareket grubuna göre invaryantlar ifade edilmektedir. Düzlemsel T –yolların D^+ ve \mathbb{D}^+ gruplarına göre üreteç invaryantları belirlenmektedir.

Önerme 1.5.1. [28] $\forall A \in D^+, \forall B \in D$ olmak üzere;

- i) $F: D \times D \rightarrow D, F(A, B) = \frac{B}{A} = BA^{-1}$ dual fonksiyonu, \mathbb{D}^+ –invaryanttır.
- ii) $f_1: D \times D \rightarrow \mathbb{R}, f_1(A, B) = \frac{ReB}{ReA}$ reel fonksiyonu, \mathbb{D}^+ –invaryanttır.
- iii) $f_2: D \times D \rightarrow \mathbb{R}, f_2(A, B) = \frac{[A B]}{(ReA)^2}$ reel fonksiyonu, \mathbb{D}^+ –invaryanttır.
- iv) $f_3: D \times D \rightarrow \mathbb{R}, f_3(A, B) = \frac{[A B]^2}{(ReA)^4}$ reel fonksiyonu, \mathbb{D}^+ –invaryanttır.

İspat: $A = a + \varepsilon a_* \in D^+, B = b + \varepsilon b_* \in D$ olmak üzere; bir $H = \begin{pmatrix} h & 0 \\ h_* & h \end{pmatrix} \in \mathbb{D}^+$ için $A \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ a_* \end{pmatrix}$ ve $B \rightarrow \begin{pmatrix} b \\ b_* \end{pmatrix}$ temsilini kullanırsak $HA = \begin{pmatrix} h & 0 \\ h_* & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ha \\ h_*a + ha_* \end{pmatrix}$ ve $HB = \begin{pmatrix} h & 0 \\ h_* & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hb \\ h_*b + hb_* \end{pmatrix}$, dir. Buna göre;

i) $F(A, B) = \frac{B}{A}$ için $F(HA, HB) = \frac{HB}{HA} = \frac{B}{A} = F(A, B)$ olduğu açıktır. O halde fonksiyon \mathbb{D}^+ –invaryanttır.

ii) $f_1(A, B) = \frac{ReB}{ReA}$ için $f_1(HA, HB) = \frac{Re(HB)}{Re(HA)} = \frac{hb}{ha} = \frac{b}{a} = \frac{ReB}{ReA} = f_1(A, B)$ olur. O halde fonksiyon \mathbb{D}^+ –invaryanttır.

$$\begin{aligned}
\text{iii) } f_2(A, B) &= \frac{[A \ B]}{(ReA)^2} \text{ için} \\
f_2(HA, HB) &= \frac{[(HA) \ (HB)]}{(Re(HA))^2} \\
&= \frac{\begin{vmatrix} ha & hb \\ h_*a+ha_* & h_*b+hb_* \end{vmatrix}}{h^2a^2} \\
&= \frac{hh_*ab+h^2ab_*-hh_*ab-h^2a_*b}{h^2a^2} \\
&= \frac{h^2(ab_*-a_*b)}{h^2a^2} \\
&= \frac{ab_*-a_*b}{a^2} \\
&= \frac{[A \ B]}{(ReA)^2} \\
&= f_2(A, B)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde fonksiyon \mathbb{D}^+ *-invarianttir*.

iv) $\frac{[A \ B]}{(ReA)^2}$, \mathbb{D}^+ *-invariant* olduğundan; $\left(\frac{[A \ B]}{(ReA)^2}\right)^2$ de \mathbb{D}^+ *-invarianttir*. ■

Önerme 1.5.2.

- i) $\forall A \in D$ için $Re(\Omega A) = ReA$ ve $(Re(\Omega A))^2 = (ReA)^2$, dir.
- ii) $\forall A \in D^+$, $\forall B \in D$ olmak üzere; $\frac{Re(\Omega B)}{Re(\Omega A)} = \frac{ReB}{ReA}$, dir.
- iii) $\forall A \in D^+$, $\forall B \in D$ olmak üzere; $\frac{[(\Omega A) \ (\Omega B)]^2}{(Re(\Omega A))^4} = \frac{[A \ B]^2}{(ReA)^4}$, dir.

İspat: i) ve ii) Önerme 1.3.28.'den açıktır.

iii) $\forall A \in D^+$ ve $\forall B \in D$ için $Re(\Omega A) = ReA$ ve $(det\Omega)^2 = 1$ kullanılarak;

$$\frac{[(\Omega A) \ (\Omega B)]^2}{(Re(\Omega A))^4} = \frac{(det\Omega[A \ B])^2}{(Re(\Omega A))^4} = (det\Omega)^2 \frac{[A \ B]^2}{(ReA)^4} = \frac{[A \ B]^2}{(ReA)^4}$$

elde edilir. ■

Önerme 1.5.3. $\forall A \in D^+$, $\forall B \in D$ olmak üzere;

- i) $\frac{ReB}{ReA}$
 ii) $\frac{[A B]^2}{(ReA)^4}$

reel fonksiyonları, $(D^+ \cup \Omega)$ –invarianttır.

İspat: i) Önerme 1.5.1. (ii) ve Önerme 1.5.2. (ii)'den açıktır.

ii) Önerme 1.5.1. (iv) ve Önerme 1.5.2. (iii)'den açıktır. ■

Teorem 1.5.4. \mathbb{R}^2 'deki tüm c -regüler $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ T –yollar üzerinde;

- i) $\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$ dual fonksiyonu, \mathbb{D}^+ –invarianttır.
 ii) $\frac{Re\alpha'(t)}{Re\alpha(t)}$ reel fonksiyonu, \mathbb{D}^+ –invarianttır.
 iii) $\frac{[\alpha(t) \alpha'(t)]}{(Re\alpha(t))^2}$ reel fonksiyonu, \mathbb{D}^+ –invarianttır.

İspat: $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ olmak üzere; $Re\alpha(t) = x(t)$ 'dir. $\alpha'(t) = (x'(t), x'_*(t))$ olup $Re\alpha'(t) = x'(t)$ 'dir.

$A = a + \varepsilon a_* \in D^+$ ve $S_A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \in \mathbb{D}^+$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} S_A \alpha(t) &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_*(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax(t) \\ a_*x(t) + ax_*(t) \end{pmatrix} \\ &= (ax(t), a_*x(t) + ax_*(t)) \\ &= ax(t) + \varepsilon(a_*x(t) + ax_*(t)) \end{aligned}$$

olur. Buradan; $Re(S_A \alpha(t)) = ax(t)$ 'dir. Aynı zamanda; $(S_A \alpha(t))' = ax'(t) + \varepsilon(a_*x'(t) + ax'_*(t))$ olup $Re(S_A \alpha'(t)) = ax'(t)$ 'dir. Buna göre;

i) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$ ile tanımlansın.

$$f(S_A \alpha(t)) = \frac{(S_A \alpha(t))'}{S_A \alpha(t)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ax'(t) + \varepsilon(a_*x'(t) + ax'_*(t))}{ax(t) + \varepsilon(a_*x(t) + ax_*(t))} \\
&= \frac{(ax'(t) + \varepsilon(a_*x'(t) + ax'_*(t)))(ax(t) - \varepsilon(a_*x(t) + ax_*(t)))}{(ax(t) + \varepsilon(a_*x(t) + ax_*(t)))(ax(t) - \varepsilon(a_*x(t) + ax_*(t)))} \\
&= \frac{(ax'(t) + \varepsilon a_*x'(t) + \varepsilon ax'_*(t))(ax(t) - \varepsilon a_*x(t) - \varepsilon ax_*(t))}{a^2(x(t))^2} \\
&= \frac{a^2x'(t)x(t) + \varepsilon a^2(x'_*(t)x(t) - x'(t)x_*(t))}{a^2(x(t))^2} \\
&= \frac{a^2(x'(t)x(t) + \varepsilon(x'_*(t)x(t) - x'(t)x_*(t)))}{a^2(x(t))^2} \\
&= \frac{x'(t)x(t) + \varepsilon(x'_*(t)x(t) - x'(t)x_*(t))}{(x(t))^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{x'(t)x(t) + \varepsilon(x'_*(t)x(t) - x'(t)x_*(t))}{(x(t))^2}$ ifadesinin $\frac{(x(t) + \varepsilon x_*(t))'}{x(t) + \varepsilon x_*(t)}$ olduğu açıktır;

$$\begin{aligned}
\frac{(x(t) + \varepsilon x_*(t))'}{x(t) + \varepsilon x_*(t)} &= \frac{x'(t) + \varepsilon x'_*(t)}{x(t) + \varepsilon x_*(t)} \\
&= \frac{(x'(t) + \varepsilon x'_*(t))(x(t) - \varepsilon x_*(t))}{(x(t) + \varepsilon x_*(t))(x(t) - \varepsilon x_*(t))} \\
&= \frac{x'(t)x(t) + \varepsilon(x'_*(t)x(t) - x'(t)x_*(t))}{(x(t))^2}
\end{aligned}$$

Böylece;

$$f(S_A \alpha(t)) = \frac{(S_A \alpha(t))'}{S_A \alpha(t)} = \frac{x'(t)x(t) + \varepsilon(x'_*(t)x(t) - x'(t)x_*(t))}{(x(t))^2} = \frac{(x(t) + \varepsilon x_*(t))'}{x(t) + \varepsilon x_*(t)} = \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = f(\alpha(t))$$

elde edilir ki bu $\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$ fonksiyonunun \mathbb{D}^+ -invariant olduğunu gösterir.

ii) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = \frac{Re \alpha'(t)}{Re \alpha(t)}$ ile tanımlansın.

$$f(S_A \alpha(t)) = \frac{Re(S_A \alpha'(t))}{Re(S_A \alpha(t))} = \frac{ax'(t)}{ax(t)} = \frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{Re \alpha'(t)}{Re \alpha(t)} = f(\alpha(t)) \text{ elde edilir ki bu } \frac{Re \alpha'(t)}{Re \alpha(t)}$$

fonksiyonunun \mathbb{D}^+ -invariant olduğunu gösterir.

iii) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = \frac{[\alpha(t) \ \alpha'(t)]}{(Re \alpha(t))^2} = \frac{\det \begin{pmatrix} x(t) & x'(t) \\ x_*(t) & x'_*(t) \end{pmatrix}}{(x(t))^2}$ ile tanımlansın.

$$\begin{aligned}
f(S_A \alpha(t)) &= \frac{[(S_A \alpha(t)) \ (S_A \alpha'(t))]}{(Re(S_A \alpha(t)))^2} \\
&= \frac{\det \begin{pmatrix} ax(t) & ax'(t) \\ a_*x(t) + ax_*(t) & a_*x'(t) + ax'_*(t) \end{pmatrix}}{(ax(t))^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{aa_*x(t)x'(t) + a^2x(t)x'_*(t) - aa_*x'(t)x(t) - a^2x'(t)x_*(t)}{(ax(t))^2} \\
&= \frac{a^2(x(t)x'_*(t) - x'(t)x_*(t))}{a^2(x(t))^2} \\
&= \frac{x(t)x'_*(t) - x'(t)x_*(t)}{(x(t))^2} \\
&= \frac{[\alpha(t) \ \alpha'(t)]}{(Re\alpha(t))^2} \\
&= f(\alpha(t))
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu $\frac{[\alpha(t) \ \alpha'(t)]}{(Re\alpha(t))^2}$ fonksiyonunun \mathbb{D}^+ – *invariant* olduğunu gösterir. ■

Teorem 1.5.5. \mathbb{R}^2 'deki tüm *c-regüler* $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ T – *yollar* üzerinde;

i) $\frac{Re\alpha'(t)}{Re\alpha(t)}$

ii) $\frac{[\alpha(t) \ \alpha'(t)]^2}{(Re\alpha(t))^4}$

reel fonksiyonları, \mathbb{D} – *invarianttır*.

İspat: $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ olmak üzere; $Re\alpha(t) = x(t)$ 'dir. $\alpha'(t) = (x'(t), x'_*(t))$ olup $Re\alpha'(t) = x'(t)$ 'dir.

$A = a + \varepsilon a_* \in D^+$, $S_A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \in \mathbb{D}^+$ ve $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ olmak üzere; $S_A\Omega = F \in \mathbb{D}$ alınır;

$$\begin{aligned}
F\alpha(t) &= (S_A\Omega)\alpha(t) \\
&= \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_*(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ax(t) \\ a_*x(t) - ax_*(t) \end{pmatrix} \\
&= (ax(t), a_*x(t) - ax_*(t)) \\
&= ax(t) + \varepsilon(a_*x(t) - ax_*(t))
\end{aligned}$$

olur. Buradan; $Re(F\alpha(t)) = ax(t)$ 'dir. Aynı zamanda; $(F\alpha(t))' = ax'(t) + \varepsilon(a_*x'(t) - ax'_*(t))$ olup $Re(F\alpha'(t)) = ax'(t)$ 'dir. Buna göre;

i) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = \frac{Re\alpha'(t)}{Re\alpha(t)}$ ile tanımlansın.

$$f(F\alpha(t)) = \frac{Re(F\alpha'(t))}{Re(F\alpha(t))} = \frac{ax'(t)}{ax(t)} = \frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{Re\alpha'(t)}{Re\alpha(t)} = f(\alpha(t)) \quad \text{elde edilir ki bu } \frac{Re\alpha'(t)}{Re\alpha(t)}$$

fonksiyonunun \mathbb{D} - *invariant* olduğunu gösterir.

ii) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = \frac{[\alpha(t) \ \alpha'(t)]^2}{(Re\alpha(t))^4} = \frac{\left(\det \begin{pmatrix} x(t) & x'(t) \\ x_*(t) & x'_*(t) \end{pmatrix}\right)^2}{(x(t))^4} = \frac{(x(t)x'_*(t) - x'(t)x_*(t))^2}{(x(t))^4}$ ile tanımlansın.

$$\begin{aligned} f(F\alpha(t)) &= \frac{[(F\alpha(t)) (F\alpha'(t))]^2}{(Re(F\alpha(t)))^4} \\ &= \frac{\left(\det \begin{pmatrix} ax(t) & ax'(t) \\ a_*x(t) - ax_*(t) & a_*x'(t) - ax'_*(t) \end{pmatrix}\right)^2}{(ax(t))^4} \\ &= \frac{(aa_*x(t)x'(t) - a^2x(t)x'_*(t) - aa_*x'(t)x(t) + a^2x'(t)x_*(t))^2}{(ax(t))^4} \\ &= \frac{a^4(x'(t)x_*(t) - x(t)x'_*(t))^2}{a^4(x(t))^4} \\ &= \frac{(x'(t)x_*(t) - x(t)x'_*(t))^2}{(x(t))^4} \\ &= \frac{[\alpha(t) \ \alpha'(t)]^2}{(Re\alpha(t))^4} \\ &= f(\alpha(t)) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu $\frac{[\alpha(t) \ \alpha'(t)]^2}{(Re\alpha(t))^4}$ fonksiyonunun \mathbb{D} - *invariant* olduğunu gösterir. ■

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Düzlemsel Bir T –Yolun D_1 Linear Hareket Grubuna Göre İnvaryantları

Bu bölümde D dual sayılar cebirinden elde edilen D_1 lineer hareket grubuna göre noktaların invaryantları yardımıyla düzlemsel T –yolların \mathbb{D}_1^+ ve \mathbb{D}_1 gruplarına göre üreteç invaryantları belirlenmektedir.

Önerme 2.1.1. $\forall A \in D_1, \forall B \in D$ olmak üzere;

i) $F: D \times D \rightarrow D, F(A, B) = \frac{B}{A} = BA^{-1}$ dual fonksiyonu, \mathbb{D}_1^+ –invaryanttır.

ii) $f_1: D \times D \rightarrow \mathbb{R}, f_1(A, B) = \frac{ReB}{ReA}$ reel fonksiyonu, \mathbb{D}_1^+ –invaryanttır.

iii) $f_2: D \times D \rightarrow \mathbb{R}, f_2(A, B) = \frac{[A \ B]}{(ReA)^2}$ reel fonksiyonu, \mathbb{D}_1^+ –invaryanttır.

iv) $f_3: D \times D \rightarrow \mathbb{R}, f_3(A, B) = \frac{[A \ B]^2}{(ReA)^4}$ reel fonksiyonu, \mathbb{D}_1^+ –invaryanttır.

v) $f_4: D \rightarrow \mathbb{R}, f_4(A) = (ReA)^2$ reel fonksiyonu, \mathbb{D}_1^+ –invaryanttır.

vi) $f_5: D \times D \rightarrow \mathbb{R}, f_5(A, B) = [A \ B]$ reel fonksiyonu, \mathbb{D}_1^+ –invaryanttır.

vii) $f_6: D \times D \rightarrow \mathbb{R}, f_6(A, B) = [A \ B]^2$ reel fonksiyonu, \mathbb{D}_1^+ –invaryanttır.

İspat: $A = a + \varepsilon a_* \in D_1, B = b + \varepsilon b_* \in D$ ve $h = \pm 1$ olmak üzere; bir $H = \begin{pmatrix} h & 0 \\ h_* & h \end{pmatrix} \in$

\mathbb{D}_1^+ için $A \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ a_* \end{pmatrix}$ ve $B \rightarrow \begin{pmatrix} b \\ b_* \end{pmatrix}$ temsilini kullanırsak $HA = \begin{pmatrix} h & 0 \\ h_* & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ha \\ h_*a + ha_* \end{pmatrix}$

ve $HB = \begin{pmatrix} h & 0 \\ h_* & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hb \\ h_*b + hb_* \end{pmatrix}$, dir. Buna göre;

i), ii), iii), iv) Önerme 1.5.1.'den açıktır.

v) $f_4(A) = (ReA)^2$ ve $h = \pm 1$ için; $f_4(HA) = (Re(HA))^2 = (ha)^2 = h^2a^2 = a^2 = (ReA)^2 = f_4(A)$ olduğu açıktır. O halde fonksiyon \mathbb{D}_1^+ –invaryanttır.

vi) $f_5(A, B) = [A \ B]$ için

$$f_5(HA, HB) = [(HA) \ (HB)]$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} ha & hb \\ h_*a + ha_* & h_*b + hb_* \end{vmatrix} \\
&= hh_*ab + h^2ab_* - hh_*ab - h^2a_*b \\
&= h^2(ab_* - a_*b), (h = \pm 1 \text{ kullanılarak}) \\
&= ab_* - a_*b \\
&= [AB] \\
&= f_5(A, B)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu fonksiyonunun \mathbb{D}_1^+ *-invariant* olduğunu gösterir.

vii) $[A \ B] \mathbb{D}_1^+$ *-invariant* olduğundan; $[A \ B]^2$ de \mathbb{D}_1^+ *-invarianttır*. ■

Önerme 2.1.2. $\forall A \in D_1, \forall B \in D$ olmak üzere;

$$\text{i) } \frac{Re(\Omega B)}{Re(\Omega A)} = \frac{ReB}{ReA}$$

$$\text{ii) } \frac{[(\Omega A) (\Omega B)]^2}{(Re(\Omega A))^4} = \frac{[A \ B]^2}{(ReA)^4}$$

$$\text{iii) } [(\Omega A) (\Omega B)]^2 = [A \ B]^2$$

dir.

İspat: i) ve ii) Önerme 1.5.2.'den açıktır.

iii) $\forall A \in D_1$ ve $\forall B \in D$ için $(det\Omega)^2 = 1$ kullanılarak;

$$[(\Omega A) (\Omega B)]^2 = (det\Omega[A \ B])^2 = (det\Omega)^2[A \ B]^2 = [A \ B]^2$$

elde edilir. O halde; bu fonksiyon Ω *-invarianttır*. ■

Önerme 2.1.3. $A \in D_1$ ve $B \in D$ olmak üzere;

$$\text{i) } \frac{ReB}{ReA}$$

$$\text{ii) } \frac{[A \ B]^2}{(ReA)^4}$$

$$\text{iii) } (ReA)^2$$

$$\text{iv) } [A \ B]^2$$

reel fonksiyonları, $(D_1 \cup \Omega)$ –invarianttır.

İspat: i) Önerme 2.1.1. (ii) ve Önerme 2.1.2. (i)'den açıktır.

ii) Önerme 2.1.1. (iv) ve Önerme 2.1.2. (ii)'den açıktır.

iii) Önerme 2.1.1. (v) ve Önerme 1.5.2. (i)'den açıktır.

iv) Önerme 2.1.1. (vii) ve Önerme 2.1.2. (iii)'den açıktır. ■

Teorem 2.1.4. \mathbb{R}^2 'deki tüm c -regüler $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ T –yollar üzerinde;

i) $\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$ dual fonksiyonu, \mathbb{D}_1^+ –invarianttır.

ii) $\frac{Re\alpha'(t)}{Re\alpha(t)}$ reel fonksiyonu, \mathbb{D}_1^+ –invarianttır.

iii) $\frac{[\alpha(t) \ \alpha'(t)]}{(Re\alpha(t))^2}$ reel fonksiyonu, \mathbb{D}_1^+ –invarianttır.

iv) $(Re\alpha(t))^2$ reel fonksiyonu, \mathbb{D}_1^+ –invarianttır.

v) $[\alpha(t) \ \alpha'(t)]$ reel fonksiyonu, \mathbb{D}_1^+ –invarianttır.

vi) $(Re\alpha'(t))^2$ reel fonksiyonu, \mathbb{D}_1^+ –invarianttır.

İspat: $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ olmak üzere; $Re\alpha(t) = x(t)$ 'dir. $\alpha'(t) = (x'(t), x'_*(t))$ olup $Re\alpha'(t) = x'(t)$ 'dir.

$A = a + \varepsilon a_* \in D_1$, $S_A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \in \mathbb{D}_1^+$ ve $a = \pm 1$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} S_A \alpha(t) &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_*(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax(t) \\ a_*x(t) + ax_*(t) \end{pmatrix} \\ &= (ax(t), a_*x(t) + ax_*(t)) \\ &= ax(t) + \varepsilon(a_*x(t) + ax_*(t)) \end{aligned}$$

olur. Buradan; $Re(S_A \alpha(t)) = ax(t)$ 'dir. Aynı zamanda; $(S_A \alpha(t))' = ax'(t) + \varepsilon(a_*x'(t) + ax'_*(t))$ olup $Re(S_A \alpha'(t)) = ax'(t)$ 'dir. Buna göre;

i) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$ ile tanımlansın.

$$\begin{aligned}
f(S_A \alpha(t)) &= \frac{(S_A \alpha(t))'}{S_A \alpha(t)} \\
&= \frac{ax'(t) + \varepsilon(a_* x'(t) + ax'_*(t))}{ax(t) + \varepsilon(a_* x(t) + ax_*(t))} \\
&= \frac{(ax'(t) + \varepsilon(a_* x'(t) + ax'_*(t)))(ax(t) - \varepsilon(a_* x(t) + ax_*(t)))}{(ax(t) + \varepsilon(a_* x(t) + ax_*(t)))(ax(t) - \varepsilon(a_* x(t) + ax_*(t)))} \\
&= \frac{(ax'(t) + \varepsilon a_* x'(t) + \varepsilon a x'_*(t))(ax(t) - \varepsilon a_* x(t) - \varepsilon a x_*(t))}{a^2(x(t))^2} \\
&= \frac{a^2 x'(t)x(t) + \varepsilon a^2(x'_*(t)x(t) - x'(t)x_*(t))}{a^2(x(t))^2} \\
&= \frac{a^2(x'(t)x(t) + \varepsilon(x'_*(t)x(t) - x'(t)x_*(t)))}{a^2(x(t))^2} \\
&= \frac{x'(t)x(t) + \varepsilon(x'_*(t)x(t) - x'(t)x_*(t))}{(x(t))^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{x'(t)x(t) + \varepsilon(x'_*(t)x(t) - x'(t)x_*(t))}{(x(t))^2}$ ifadesinin $\frac{(x(t) + \varepsilon x_*(t))'}{x(t) + \varepsilon x_*(t)}$ olduğu açıktır;

$$\begin{aligned}
\frac{(x(t) + \varepsilon x_*(t))'}{x(t) + \varepsilon x_*(t)} &= \frac{x'(t) + \varepsilon x'_*(t)}{x(t) + \varepsilon x_*(t)} \\
&= \frac{(x'(t) + \varepsilon x'_*(t))(x(t) - \varepsilon x_*(t))}{(x(t) + \varepsilon x_*(t))(x(t) - \varepsilon x_*(t))} \\
&= \frac{x'(t)x(t) + \varepsilon(x'_*(t)x(t) - x'(t)x_*(t))}{(x(t))^2}
\end{aligned}$$

Böylece;

$$f(S_A \alpha(t)) = \frac{(S_A \alpha(t))'}{S_A \alpha(t)} = \frac{x'(t)x(t) + \varepsilon(x'_*(t)x(t) - x'(t)x_*(t))}{(x(t))^2} = \frac{(x(t) + \varepsilon x_*(t))'}{x(t) + \varepsilon x_*(t)} = \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = f(\alpha(t))$$

elde edilir ki bu $\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$ fonksiyonunun \mathbb{D}_1^+ -invariant olduğunu gösterir.

ii) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = \frac{Re \alpha'(t)}{Re \alpha(t)}$ ile tanımlansın.

$$f(S_A \alpha(t)) = \frac{Re(S_A \alpha'(t))}{Re(S_A \alpha(t))} = \frac{ax'(t)}{ax(t)} = \frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{Re \alpha'(t)}{Re \alpha(t)} = f(\alpha(t))$$
 elde edilir ki bu $\frac{Re \alpha'(t)}{Re \alpha(t)}$

fonksiyonunun \mathbb{D}_1^+ -invariant olduğunu gösterir.

iii) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = \frac{[\alpha(t) \ \alpha'(t)]}{(Re \alpha(t))^2} = \frac{\det \begin{pmatrix} x(t) & x'(t) \\ x_*(t) & x'_*(t) \end{pmatrix}}{(x(t))^2}$ ile tanımlansın.

$$\begin{aligned}
f(S_A \alpha(t)) &= \frac{[(S_A \alpha(t)) (S_A \alpha'(t))]}{(Re(S_A \alpha(t)))^2} \\
&= \frac{\det \begin{pmatrix} ax(t) & ax'(t) \\ a_*x(t) + ax_*(t) & a_*x'(t) + ax'_*(t) \end{pmatrix}}{(ax(t))^2} \\
&= \frac{aa_*x(t)x'(t) + a^2x(t)x'_*(t) - aa_*x'(t)x(t) - a^2x'(t)x_*(t)}{(ax(t))^2} \\
&= \frac{a^2(x(t)x'_*(t) - x'(t)x_*(t))}{a^2(x(t))^2} \\
&= \frac{x(t)x'_*(t) - x'(t)x_*(t)}{(x(t))^2} \\
&= \frac{[\alpha(t) \ \alpha'(t)]}{(Re\alpha(t))^2} \\
&= f(\alpha(t))
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu $\frac{[\alpha(t) \ \alpha'(t)]}{(Re\alpha(t))^2}$ fonksiyonunun \mathbb{D}_1^+ – *invariant* olduğunu gösterir.

iv) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = (Re\alpha(t))^2$ ile tanımlansın. $a = \pm 1$ için;

$$\begin{aligned}
f(S_A \alpha(t)) &= (Re(S_A \alpha(t)))^2 = (ax(t))^2 = a^2(x(t))^2 = (x(t))^2 = (Re\alpha(t))^2 = \\
f(\alpha(t)) &\text{ elde edilir ki bu } (Re\alpha(t))^2 \text{ fonksiyonunun } \mathbb{D}_1^+ \text{ – } \textit{invariant} \text{ olduğunu gösterir.}
\end{aligned}$$

v) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = [\alpha(t) \ \alpha'(t)] = \det \begin{pmatrix} x(t) & x'(t) \\ x_*(t) & x'_*(t) \end{pmatrix}$ ile tanımlansın.

$$\begin{aligned}
f(S_A \alpha(t)) &= [(S_A \alpha(t)) (S_A \alpha'(t))] \\
&= \det \begin{pmatrix} ax(t) & ax'(t) \\ a_*x(t) + ax_*(t) & a_*x'(t) + ax'_*(t) \end{pmatrix} \\
&= aa_*x(t)x'(t) + a^2x(t)x'_*(t) - aa_*x'(t)x(t) - a^2x'(t)x_*(t) \\
&= a^2(x(t)x'_*(t) - x'(t)x_*(t)) \ , \ (a = \pm 1 \text{ kullanılarak}) \\
&= x(t)x'_*(t) - x'(t)x_*(t) \\
&= [\alpha(t) \ \alpha'(t)] \\
&= f(\alpha(t))
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu $[\alpha(t) \ \alpha'(t)]$ fonksiyonunun \mathbb{D}_1^+ – *invariant* olduğunu gösterir.

vi) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = (Re\alpha'(t))^2$ ile tanımlansın. $a = \pm 1$ için; $f(S_A\alpha(t)) = (Re(S_A\alpha'(t)))^2 = (ax'(t))^2 = a^2(x'(t))^2 = (x'(t))^2 = (Re\alpha'(t))^2 = f(\alpha(t))$ elde edilir ki bu $(Re\alpha'(t))^2$ fonksiyonunun \mathbb{D}_1^+ - *invariant* olduğunu gösterir. ■

Teorem 2.1.5. \mathbb{R}^2 'deki tüm c -regüler $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ T -yollar üzerinde;

i) $\frac{Re\alpha'(t)}{Re\alpha(t)}$

ii) $\frac{[\alpha(t) \ \alpha'(t)]^2}{(Re\alpha(t))^4}$

iii) $(Re\alpha(t))^2$

iv) $[\alpha(t) \ \alpha'(t)]^2$

v) $(Re\alpha'(t))^2$

reel fonksiyonları, \mathbb{D}_1 -*invarianttır*.

İspat: $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ olmak üzere; $Re\alpha(t) = x(t)$ 'dir. $\alpha'(t) = (x'(t), x'_*(t))$ olup $Re\alpha'(t) = x'(t)$ 'dir.

$A = a + \varepsilon a_* \in D_1$, $a = \pm 1$, $S_A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \in \mathbb{D}_1^+$ ve $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ olmak üzere; $S_A\Omega =$

$F \in \mathbb{D}_1$ alınır;

$$\begin{aligned} F\alpha(t) &= (S_A\Omega)\alpha(t) \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_*(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax(t) \\ a_*x(t) - ax_*(t) \end{pmatrix} \\ &= (ax(t), a_*x(t) - ax_*(t)) \\ &= ax(t) + \varepsilon(a_*x(t) - ax_*(t)) \end{aligned}$$

olur. Buradan; $Re(F\alpha(t)) = ax(t)$ 'dir. Aynı zamanda; $(F\alpha(t))' = ax'(t) + \varepsilon(a_*x'(t) - ax'_*(t))$ olup $Re(F\alpha'(t)) = ax'(t)$ 'dir. Buna göre;

i) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = \frac{Re\alpha'(t)}{Re\alpha(t)}$ ile tanımlansın.

$f(F\alpha(t)) = \frac{Re(F\alpha'(t))}{Re(F\alpha(t))} = \frac{ax'(t)}{ax(t)} = \frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{Re\alpha'(t)}{Re\alpha(t)} = f(\alpha(t))$ elde edilir ki bu $\frac{Re\alpha'(t)}{Re\alpha(t)}$ fonksiyonunun \mathbb{D}_1 - *invariant* olduğunu gösterir.

ii) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = \frac{[\alpha(t) \ \alpha'(t)]^2}{(Re\alpha(t))^4} = \frac{\left(\det\begin{pmatrix} x(t) & x'(t) \\ x_*(t) & x'_*(t) \end{pmatrix}\right)^2}{(x(t))^4} = \frac{(x(t)x'_*(t) - x'(t)x_*(t))^2}{(x(t))^4}$ ile tanımlansın.

$$\begin{aligned} f(F\alpha(t)) &= \frac{[(F\alpha(t)) \ (F\alpha'(t))]^2}{(Re(F\alpha(t)))^4} \\ &= \frac{\left(\det\begin{pmatrix} ax(t) & ax'(t) \\ a_*x(t) - ax_*(t) & a_*x'(t) - ax'_*(t) \end{pmatrix}\right)^2}{(ax(t))^4} \\ &= \frac{(aa_*x(t)x'(t) - a^2x(t)x'_*(t) - aa_*x'(t)x(t) + a^2x'(t)x_*(t))^2}{(ax(t))^4} \\ &= \frac{a^4(x'(t)x_*(t) - x(t)x'_*(t))^2}{a^4(x(t))^4} \\ &= \frac{(x'(t)x_*(t) - x(t)x'_*(t))^2}{(x(t))^4} \\ &= \frac{[\alpha(t) \ \alpha'(t)]^2}{(Re\alpha(t))^4} \\ &= f(\alpha(t)) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu $\frac{[\alpha(t) \ \alpha'(t)]^2}{(Re\alpha(t))^4}$ fonksiyonunun \mathbb{D}_1 - *invariant* olduğunu gösterir.

iii) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = (Re\alpha(t))^2$ ile tanımlansın. $a = \pm 1$ için; $f(F\alpha(t)) = (Re(F\alpha(t)))^2 = (ax(t))^2 = a^2(x(t))^2 = (x(t))^2 = (Re\alpha(t))^2 = f(\alpha(t))$ elde edilir ki bu $(Re\alpha(t))^2$ fonksiyonunun \mathbb{D}_1 - *invariant* olduğunu gösterir.

iv) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = [\alpha(t) \ \alpha'(t)]^2 = \left(\det\begin{pmatrix} x(t) & x'(t) \\ x_*(t) & x'_*(t) \end{pmatrix}\right)^2 = (x(t)x'_*(t) - x'(t)x_*(t))^2$ ile tanımlansın.

$$\begin{aligned} f(F\alpha(t)) &= [(F\alpha(t)) \ (F\alpha'(t))]^2 \\ &= \left(\det\begin{pmatrix} ax(t) & ax'(t) \\ a_*x(t) - ax_*(t) & a_*x'(t) - ax'_*(t) \end{pmatrix}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (aa_*x(t)x'(t) - a^2x(t)x'_*(t) - aa_*x'(t)x(t) + a^2x'(t)x_*(t))^2 \\
&= a^4(x'(t)x_*(t) - x(t)x'_*(t))^2, (a = \pm 1 \text{ kullanılarak}) \\
&= (x(t)x'_*(t) - x'(t)x_*(t))^2 \\
&= [\alpha(t) \ \alpha'(t)]^2 \\
&= f(\alpha(t))
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu $[\alpha(t) \ \alpha'(t)]^2$ fonksiyonunun \mathbb{D}_1 -invariant olduğunu gösterir.

v) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = (Re\alpha'(t))^2$ ile tanımlansın. $a = \pm 1$ için; $f(F\alpha(t)) = (Re(F\alpha'(t)))^2 = (a\alpha'(t))^2 = a^2(\alpha'(t))^2 = (\alpha'(t))^2 = (Re\alpha'(t))^2 = f(\alpha(t))$ elde edilir ki bu $(Re\alpha'(t))^2$ fonksiyonunun \mathbb{D}_1 -invariant olduğunu gösterir. ■

2.2. Düzlemsel T -Yolların Dual Hareket Gruplarına Göre İnvaryantları

Klasik diferansiyel geometride eğriler teorisi Frenet yöntemiyle incelenerek; eğrilik, burulma gibi önemli invaryantlar belirlenmektedir. Burada ise düzlemsel T -yollar, invaryant teori yöntemiyle, $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$, $\mathbb{T}\mathbb{D}$, $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ ve $\mathbb{T}\mathbb{D}_1$ dual hareket gruplarına göre incelenerek eğrilik ve burulma benzeri üreteç invaryantları belirlenmektedir.

D dual sayılar halkasından elde edilen

$$\mathbb{T}\mathbb{D}^+ = \{F: D \rightarrow D \mid F(B) = AB + C, A \in D^+, \forall B, C \in D\}$$

ve

$$\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+ = \{F: D \rightarrow D \mid F(B) = AB + C, A \in D_1, \forall B, C \in D\}$$

dönüşüm kümeleri, bileşke işlemine göre birer değişmeli grup oluşturur.

$$\mathbb{T}\mathbb{D}^+ = \{F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid F(B) = S_A B + C, A \in D^+, \forall B, C \in \mathbb{R}^2\}$$

ve

$$\mathbb{T}\mathbb{D}^- = \left\{ F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid F(B) = (S_A \Omega) B + C, A \in D^+, \forall B, C \in \mathbb{R}^2, \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

dönüşüm kümelerini tanımlayalım. $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$ dönüşümlerin bileşke işlemine göre bir gruptur. $\mathbb{T}\mathbb{D}^+ \cup \mathbb{T}\mathbb{D}^-$ kümesini $\mathbb{T}\mathbb{D}$ ile gösterelim.

TD^+ grubu, $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$ grubuna izomorftur. Benzer şekilde;

$$\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+ = \{F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid F(B) = S_A B + C, A \in D_1, \forall B, C \in \mathbb{R}^2\}$$

ve

$$\mathbb{T}\mathbb{D}_1^- = \left\{ F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid F(B) = (S_A \Omega) B + C, A \in D_1, \forall B, C \in \mathbb{R}^2, \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

dönüşüm kümelerini tanımlayalım. $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ dönüşümlerin bileşke işlemine göre bir gruptur. $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+ \cup \mathbb{T}\mathbb{D}_1^-$ kümesini $\mathbb{T}\mathbb{D}_1$ ile gösterelim.

TD_1^+ grubu, $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ grubuna izomorftur.

Tanım 2.2.1. \mathbb{R}^2 'de bir T -yol $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ olsun. Eğer; $\forall t \in T$ için $Re\alpha'(t) \neq 0$ yani; $\forall t \in T$ için $x'(t) \neq 0$ ise $\alpha(t)$ 'ye *regüler T -yol* denir.

Sonuç 2.2.2. $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ \mathbb{R}^2 'de T -yollar olsun. $\alpha(t)$ *regüler bir T -yol* ve $\alpha(t) \stackrel{c}{\sim} \beta(t)$ ise $\beta(t)$ de *regüler bir T -yoldur*.

İspat: Açıktır. ■

Örnek 2.2.3. $T = (-1, +1)$ olmak üzere; \mathbb{R}^2 'de bir T -yol $\alpha(t) = (2t, t^2 + 5t)$ alalım. $\alpha'(t) = (2, 2t + 5)$ 'dir. $\forall t \in T$ için; $Re\alpha'(t) = 2 \neq 0$ olduğundan $\alpha(t)$ *regüler T -yoldur*.

Örnek 2.2.4. $T = \mathbb{R}$ olmak üzere; \mathbb{R}^2 'de bir T -yol $\alpha(t) = (3t, 4t^2)$ alalım. $t = 0$ için $Re\alpha(t) = 0$ olduğundan $\alpha(t)$ *c-regüler değildir*. Ancak; $\alpha'(t) = (3, 8t)$ 'dir. $\forall t \in T$ için; $Re\alpha'(t) = 3 \neq 0$ olduğundan $\alpha(t)$ *regüler T -yoldur*.

Örnek 2.2.5. $T = \mathbb{R}$ olmak üzere; \mathbb{R}^2 'de bir T -yol $\alpha(t) = (\cosht, \sinht)$ alalım. $\forall t \in T$ için; $Re\alpha(t) = \cosht \neq 0$ olduğundan $\alpha(t)$ *c-regüler T -yoldur*. Ancak; $\alpha'(t) = (\sinht, \cosht)$ 'dir. $t = 0$ için $Re\alpha'(t) = \sinh0 = 0$ olduğundan $\alpha(t)$ *regüler değildir*.

$\alpha(t) = (x(t), x_*(t)) \in \mathbb{R}^2$ 'de bir T -yol olsun. $\alpha(t)$ 'nin $\alpha'(t) = (x'(t), x'_*(t))$ ve $\alpha''(t) = (x''(t), x''_*(t))$ türevlerinin determinantını

$$\det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ x'_*(t) & x''_*(t) \end{pmatrix} = [\alpha'(t) \alpha''(t)]$$

ile gösterelim.

Teorem 2.2.6. \mathbb{R}^2 'deki tüm *regüler* $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ T -yollar üzerinde;

- i) $\frac{\alpha''(t)}{\alpha'(t)}$ dual fonksiyonu, $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$ -invarianttir.
- ii) $\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)}$ reel fonksiyonu, $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$ -invarianttir.
- iii) $\frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]}{(Re\alpha'(t))^2}$ reel fonksiyonu, $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$ -invarianttir.
- iv) $\frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]^2}{(Re\alpha'(t))^4}$ reel fonksiyonu, $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$ -invarianttir.

İspat: $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ olmak üzere; $\alpha'(t) = (x'(t), x'_*(t))$ ve $\alpha''(t) = (x''(t), x''_*(t))$ olup $Re\alpha'(t) = x'(t)$ ve $Re\alpha''(t) = x''(t)$ 'dir. $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}^+$;

$$A = a + \varepsilon a_* \in D^+, S_A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \in \mathbb{D}^+ \text{ ve } C \in \mathbb{R}^2 \text{ için;}$$

$$\begin{aligned} F\alpha(t) &= S_A\alpha(t) + C \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_*(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax(t) + c_1 \\ a_*x(t) + ax_*(t) + c_2 \end{pmatrix} \\ &= (ax(t) + c_1, a_*x(t) + ax_*(t) + c_2) \\ &= ax(t) + c_1 + \varepsilon(a_*x(t) + ax_*(t) + c_2) \end{aligned}$$

olur. Buradan $(F\alpha(t))' = ax'(t) + \varepsilon(a_*x'(t) + ax'_*(t))$ olup $Re(F\alpha'(t)) = ax'(t)$ 'dir.

$(F\alpha(t))'' = ax''(t) + \varepsilon(a_*x''(t) + ax''_*(t))$ olup $Re(F\alpha''(t)) = ax''(t)$ 'dir. Buna göre;

i) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = \frac{\alpha''(t)}{\alpha'(t)}$ ile tanımlansın.

$$f(F\alpha(t)) = \frac{(F\alpha(t))''}{(F\alpha(t))'}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ax''(t) + \varepsilon(a_*x''(t) + ax''_*(t))}{ax'(t) + \varepsilon(a_*x'(t) + ax'_*(t))} \\
&= \frac{(ax''(t) + \varepsilon(a_*x''(t) + ax''_*(t)))(ax'(t) - \varepsilon(a_*x'(t) + ax'_*(t)))}{(ax'(t) + \varepsilon(a_*x'(t) + ax'_*(t)))(ax'(t) - \varepsilon(a_*x'(t) + ax'_*(t)))} \\
&= \frac{(ax''(t) + \varepsilon a_*x''(t) + \varepsilon ax''_*(t))(ax'(t) - \varepsilon a_*x'(t) - \varepsilon ax'_*(t))}{a^2(x'(t))^2} \\
&= \frac{a^2x''(t)x'(t) + \varepsilon a^2(x''_*(t)x'(t) - x''(t)x'_*(t))}{a^2(x'(t))^2} \\
&= \frac{a^2(x''(t)x'(t) + \varepsilon(x''_*(t)x'(t) - x''(t)x'_*(t)))}{a^2(x'(t))^2} \\
&= \frac{x''(t)x'(t) + \varepsilon(x''_*(t)x'(t) - x''(t)x'_*(t))}{(x'(t))^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{x''(t)x'(t) + \varepsilon(x''_*(t)x'(t) - x''(t)x'_*(t))}{(x'(t))^2}$ ifadesinin $\frac{(x(t) + \varepsilon x_*(t))''}{(x(t) + \varepsilon x_*(t))'}$ olduğu açıktır;

$$\begin{aligned}
\frac{(x(t) + \varepsilon x_*(t))''}{(x(t) + \varepsilon x_*(t))'} &= \frac{x''(t) + \varepsilon x''_*(t)}{x'(t) + \varepsilon x'_*(t)} \\
&= \frac{(x''(t) + \varepsilon x''_*(t))(x'(t) - \varepsilon x'_*(t))}{(x'(t) + \varepsilon x'_*(t))(x'(t) - \varepsilon x'_*(t))} \\
&= \frac{x''(t)x'(t) + \varepsilon(x''_*(t)x'(t) - x''(t)x'_*(t))}{(x'(t))^2}
\end{aligned}$$

Böylece;

$$f(F\alpha(t)) = \frac{(F\alpha(t))''}{(F\alpha(t))'} = \frac{x''(t)x'(t) + \varepsilon(x''_*(t)x'(t) - x''(t)x'_*(t))}{(x'(t))^2} = \frac{(x(t) + \varepsilon x_*(t))''}{(x(t) + \varepsilon x_*(t))'} = \frac{\alpha''(t)}{\alpha'(t)} = f(\alpha(t))$$

elde edilir ki bu $\frac{\alpha''(t)}{\alpha'(t)}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$ -invariant olduğunu gösterir.

ii) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = \frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)}$ ile tanımlansın.

$$f(F\alpha(t)) = \frac{Re(F\alpha''(t))}{Re(F\alpha'(t))} = \frac{ax''(t)}{ax'(t)} = \frac{x''(t)}{x'(t)} = \frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} = f(\alpha(t))$$

elde edilir ki bu $\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$ -invariant olduğunu gösterir.

iii) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = \frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]}{(\text{Re}\alpha'(t))^2} = \frac{\det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ x_*'(t) & x_*''(t) \end{pmatrix}}{(x'(t))^2}$ ile tanımlansın.

$$\begin{aligned} f(F\alpha(t)) &= \frac{[(F\alpha'(t)) \ (F\alpha''(t))]}{(\text{Re}(F\alpha'(t)))^2} \\ &= \frac{\det \begin{pmatrix} ax'(t) & ax''(t) \\ a_*x'(t)+ax_*'(t) & a_*x''(t)+ax_*''(t) \end{pmatrix}}{(ax(t))^2} \\ &= \frac{aa_*x'(t)x''(t)+a^2x'(t)x_*''(t)-aa_*x''(t)x'(t)-a^2x''(t)x_*'(t)}{(ax'(t))^2} \\ &= \frac{a^2(x'(t)x_*''(t)-x''(t)x_*'(t))}{a^2(x'(t))^2} \\ &= \frac{x'(t)x_*''(t)-x''(t)x_*'(t)}{(x'(t))^2} \\ &= \frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]}{(\text{Re}\alpha'(t))^2} \\ &= f(\alpha(t)) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu $\frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]}{(\text{Re}\alpha'(t))^2}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$ –invariant olduğunu gösterir.

iv) $\frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]}{(\text{Re}\alpha'(t))^2}$ $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$ –invariant olduğundan; $\frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]^2}{(\text{Re}\alpha'(t))^4}$ de $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$ –invarianttır. ■

Teorem 2.2.7. $\mathbb{R}^{2,2}$ ’deki tüm regüler $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ T –yollar üzerinde;

- i) $\frac{\alpha''(t)}{\alpha'(t)}$ dual fonksiyonları $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ –invarianttır.
- ii) $\frac{\text{Re}\alpha''(t)}{\text{Re}\alpha'(t)}$ reel fonksiyonları $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ –invarianttır.
- iii) $\frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]}{(\text{Re}\alpha'(t))^2}$ reel fonksiyonları $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ –invarianttır.
- iv) $\frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]^2}{(\text{Re}\alpha'(t))^4}$ reel fonksiyonları $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ –invarianttır.
- v) $(\text{Re}\alpha'(t))^2$ reel fonksiyonları $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ –invarianttır.
- vi) $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]$ reel fonksiyonları $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ –invarianttır.
- vii) $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]^2$ reel fonksiyonları $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ –invarianttır.
- viii) $(\text{Re}\alpha''(t))^2$ reel fonksiyonları $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ –invarianttır.

İspat: $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ olmak üzere; $\alpha'(t) = (x'(t), x'_*(t))$ ve $\alpha''(t) = (x''(t), x''_*(t))$

olup $Re\alpha'(t) = x'(t)$ ve $Re\alpha''(t) = x''(t)$ 'dir. $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$;

$A = a + \varepsilon a_* \in D_1$, $a = \pm 1$, $S_A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \in \mathbb{D}_1^+$ ve $C \in \mathbb{R}^2$ için;

$$\begin{aligned} F\alpha(t) &= S_A\alpha(t) + C \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_*(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax(t) + c_1 \\ a_*x(t) + ax_*(t) + c_2 \end{pmatrix} \\ &= (ax(t) + c_1, a_*x(t) + ax_*(t) + c_2) \\ &= ax(t) + c_1 + \varepsilon(a_*x(t) + ax_*(t) + c_2) \end{aligned}$$

olur. Buradan $(F\alpha(t))' = ax'(t) + \varepsilon(a_*x'(t) + ax'_*(t))$ olup $Re(F\alpha'(t)) = ax'(t)$ 'dir.

$(F\alpha(t))'' = ax''(t) + \varepsilon(a_*x''(t) + ax''_*(t))$ olup $Re(F\alpha''(t)) = ax''(t)$ 'dir. Buna göre;

i) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = \frac{\alpha''(t)}{\alpha'(t)}$ ile tanımlansın.

$$\begin{aligned} f(F\alpha(t)) &= \frac{(F\alpha(t))''}{(F\alpha(t))'} \\ &= \frac{ax''(t) + \varepsilon(a_*x''(t) + ax''_*(t))}{ax'(t) + \varepsilon(a_*x'(t) + ax'_*(t))} \\ &= \frac{(ax''(t) + \varepsilon(a_*x''(t) + ax''_*(t)))(ax'(t) - \varepsilon(a_*x'(t) + ax'_*(t)))}{(ax'(t) + \varepsilon(a_*x'(t) + ax'_*(t)))(ax'(t) - \varepsilon(a_*x'(t) + ax'_*(t)))} \\ &= \frac{(ax''(t) + \varepsilon a_*x''(t) + \varepsilon ax''_*(t))(ax'(t) - \varepsilon a_*x'(t) - \varepsilon ax'_*(t))}{a^2(x'(t))^2} \\ &= \frac{a^2x''(t)x'(t) + \varepsilon a^2(x''_*(t)x'(t) - x''(t)x'_*(t))}{a^2(x'(t))^2} \\ &= \frac{a^2(x''(t)x'(t) + \varepsilon(x''_*(t)x'(t) - x''(t)x'_*(t)))}{a^2(x'(t))^2} \\ &= \frac{x''(t)x'(t) + \varepsilon(x''_*(t)x'(t) - x''(t)x'_*(t))}{(x'(t))^2} \end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{x''(t)x'(t) + \varepsilon(x''_*(t)x'(t) - x''(t)x'_*(t))}{(x'(t))^2}$ ifadesinin $\frac{(x(t) + \varepsilon x_*(t))''}{(x(t) + \varepsilon x_*(t))'}$ olduğu açıktır;

$$\frac{(x(t) + \varepsilon x_*(t))''}{(x(t) + \varepsilon x_*(t))'} = \frac{x''(t) + \varepsilon x''_*(t)}{x'(t) + \varepsilon x'_*(t)} = \frac{(x''(t) + \varepsilon x''_*(t))(x'(t) - \varepsilon x'_*(t))}{(x'(t) + \varepsilon x'_*(t))(x'(t) - \varepsilon x'_*(t))}$$

$$= \frac{x''(t)x'(t) + \varepsilon(x_*''(t)x'(t) - x''(t)x_*'(t))}{(x'(t))^2}$$

Böylece;

$$f(F\alpha(t)) = \frac{(F\alpha(t))''}{(F\alpha(t))'} = \frac{x''(t)x'(t) + \varepsilon(x_*''(t)x'(t) - x''(t)x_*'(t))}{(x'(t))^2} = \frac{(x(t) + \varepsilon x_*(t))''}{(x(t) + \varepsilon x_*(t))'} = \frac{\alpha''(t)}{\alpha'(t)} = f(\alpha(t))$$

elde edilir ki bu $\frac{\alpha''(t)}{\alpha'(t)}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ -invariant olduğunu gösterir.

ii) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = \frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)}$ ile tanımlansın. $a = \pm 1$ için;

$$f(F\alpha(t)) = \frac{Re(F\alpha''(t))}{Re(F\alpha'(t))} = \frac{ax''(t)}{ax'(t)} = \frac{x''(t)}{x'(t)} = \frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} = f(\alpha(t))$$

elde edilir ki bu $\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ -invariant olduğunu gösterir.

iii) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = \frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]}{(Re\alpha'(t))^2} = \frac{\det\begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ x_*'(t) & x_*''(t) \end{pmatrix}}{(x'(t))^2}$ ile

tanımlansın.

$$\begin{aligned} f(F\alpha(t)) &= \frac{[(F\alpha'(t)) \ (F\alpha''(t))]}{(Re(F\alpha'(t)))^2} \\ &= \frac{\det\begin{pmatrix} ax'(t) & ax''(t) \\ a_*x'(t) + ax_*'(t) & a_*x''(t) + ax_*''(t) \end{pmatrix}}{(ax(t))^2} \\ &= \frac{aa_*x'(t)x''(t) + a^2x'(t)x_*''(t) - aa_*x''(t)x'(t) - a^2x''(t)x_*'(t)}{(ax'(t))^2} \\ &= \frac{a^2(x'(t)x_*''(t) - x''(t)x_*'(t))}{a^2(x'(t))^2} \\ &= \frac{x'(t)x_*''(t) - x''(t)x_*'(t)}{(x'(t))^2} \\ &= \frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]}{(Re\alpha'(t))^2} \\ &= f(\alpha(t)) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu $\frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]}{(Re\alpha'(t))^2}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ -invariant olduğunu gösterir.

iv) $\frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]}{(Re\alpha'(t))^2}$ $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ -invariant olduğundan; $\frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]^2}{(Re\alpha'(t))^4}$ de $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ -invarianttır.

v) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = (Re\alpha'(t))^2$ ile tanımlansın. $a = \pm 1$ için;
 $f(F\alpha(t)) = (Re(F\alpha'(t)))^2 = (ax'(t))^2 = a^2(x'(t))^2 = (x'(t))^2 = (Re\alpha'(t))^2 =$
 $f(\alpha(t))$ elde edilir ki bu $(Re\alpha'(t))^2$ fonksiyonunun $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ -invariant olduğunu gösterir.

vi) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = [\alpha'(t) \ \alpha''(t)] = \det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ x'_*(t) & x''_*(t) \end{pmatrix}$ ile tanımlansın.

$$\begin{aligned} f(F\alpha(t)) &= [(F\alpha'(t)) \ (F\alpha''(t))] \\ &= \det \begin{pmatrix} ax'(t) & ax''(t) \\ a_*x'(t) + ax'_*(t) & a_*x''(t) + ax''_*(t) \end{pmatrix} \\ &= aa_*x'(t)x''(t) + a^2x'(t)x''_*(t) - aa_*x''(t)x'(t) - a^2x''(t)x'_*(t) \\ &= a^2(x'(t)x''_*(t) - x''(t)x'_*(t)), (a = \pm 1 \text{ kullanılarak}) \\ &= x'(t)x''_*(t) - x''(t)x'_*(t) \\ &= [\alpha'(t) \ \alpha''(t)] \\ &= f(\alpha(t)) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]$ fonksiyonu $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ -invariant olduğunu gösterir.

vii) $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]$ $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ -invariant olduğundan; $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]^2$ de $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ -invarianttır.

viii) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = (Re\alpha''(t))^2$ ile tanımlansın. $a = \pm 1$ için;
 $f(F\alpha(t)) = (Re(F\alpha''(t)))^2 = (ax''(t))^2 = a^2(x''(t))^2 = (x''(t))^2 = (Re\alpha''(t))^2 =$
 $f(\alpha(t))$ elde edilir ki bu $(Re\alpha''(t))^2$ fonksiyonunun $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ -invariant olduğunu gösterir. ■

Teorem 2.2.8. \mathbb{R}^2 'deki tüm regüler $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ T -yollar üzerinde;

i) $\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)}$

ii) $\frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]^2}{(Re\alpha'(t))^4}$

reel fonksiyonları $\mathbb{T}\mathbb{D}$ -invarianttır.

İspat: $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ olmak üzere; $\alpha'(t) = (x'(t), x'_*(t))$ ve $\alpha''(t) = (x''(t), x''_*(t))$ olup $Re\alpha'(t) = x'(t)$ ve $Re\alpha''(t) = x''(t)$ 'dir. $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}$;

$A = a + \varepsilon a_* \in D^+$, $S_A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \in \mathbb{D}^+$, $C \in \mathbb{R}^2$ ve $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ için;

$$\begin{aligned} F\alpha(t) &= (S_A\Omega)\alpha(t) + C \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_*(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax(t) + c_1 \\ a_*x(t) - ax_*(t) + c_2 \end{pmatrix} \\ &= (ax(t) + c_1, a_*x(t) - ax_*(t) + c_2) \\ &= ax(t) + c_1 + \varepsilon(a_*x(t) - ax_*(t) + c_2) \end{aligned}$$

olur. Buradan $(F\alpha(t))' = ax'(t) + \varepsilon(a_*x'(t) - ax'_*(t))$ olup $Re(F\alpha'(t)) = ax'(t)$ 'dir.

$(F\alpha(t))'' = ax''(t) + \varepsilon(a_*x''(t) - ax''_*(t))$ olup $Re(F\alpha''(t)) = ax''(t)$ 'dir. Buna göre;

i) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = \frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)}$ ile tanımlansın.

$$f(F\alpha(t)) = \frac{Re(F\alpha''(t))}{Re(F\alpha'(t))} = \frac{ax''(t)}{ax'(t)} = \frac{x''(t)}{x'(t)} = \frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} = f(\alpha(t)) \text{ elde edilir ki bu } \frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)}$$

fonksiyonunun $\mathbb{T}\mathbb{D}$ -invariant olduğunu gösterir.

ii) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = \frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]^2}{(Re\alpha'(t))^4} = \frac{\left(\det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ x'_*(t) & x''_*(t) \end{pmatrix}\right)^2}{(x'(t))^4}$ ile

tanımlansın.

$$\begin{aligned} f(F\alpha(t)) &= \frac{[(F\alpha'(t)) \ (F\alpha''(t))]^2}{(Re(F\alpha'(t)))^4} \\ &= \frac{\left(\det \begin{pmatrix} ax'(t) & ax''(t) \\ a_*x'(t) - ax'_*(t) & a_*x''(t) - ax''_*(t) \end{pmatrix}\right)^2}{(ax(t))^4} \\ &= \frac{(aa_*x'(t)x''(t) - a^2x'(t)x''_*(t) - aa_*x''(t)x'(t) + a^2x''(t)x'_*(t))^2}{(ax'(t))^4} \\ &= \frac{a^4(x''(t)x'_*(t) - x'(t)x''_*(t))^2}{a^4(x'(t))^4} \\ &= \frac{(x''(t)x'_*(t) - x'(t)x''_*(t))^2}{(x'(t))^4} \\ &= \frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]^2}{(Re\alpha'(t))^4} \\ &= f(\alpha(t)) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu $\frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]^2}{(Re\alpha'(t))^4}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}\mathbb{D}$ *-invariant* olduğunu gösterir. ■

Teorem 2.2.9. \mathbb{R}^2 'deki tüm *regüler* $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ T -yollar üzerinde;

i) $\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)}$

ii) $\frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]^2}{(Re\alpha'(t))^4}$

iii) $(Re\alpha'(t))^2$

iv) $[\alpha'(t) \alpha''(t)]^2$

v) $(Re\alpha''(t))^2$

reel fonksiyonları $\mathbb{T}\mathbb{D}_1$ *-invarianttır*.

İspat: $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ olmak üzere; $\alpha'(t) = (x'(t), x'_*(t))$ ve $\alpha''(t) = (x''(t), x''_*(t))$ olup $Re\alpha'(t) = x'(t)$ ve $Re\alpha''(t) = x''(t)$ 'dir. $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}_1$;

$$A = a + \varepsilon a_* \in D_1, a = \pm 1, S_A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \in \mathbb{D}_1^+, C \in \mathbb{R}^2 \text{ ve } \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ için;}$$

$$\begin{aligned} F\alpha(t) &= (S_A\Omega)\alpha(t) + C \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ a_* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_*(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax(t) + c_1 \\ a_*x(t) - ax_*(t) + c_2 \end{pmatrix} \\ &= (ax(t) + c_1, a_*x(t) - ax_*(t) + c_2) \\ &= ax(t) + c_1 + \varepsilon(a_*x(t) - ax_*(t) + c_2) \end{aligned}$$

olur. Buradan $(F\alpha(t))' = ax'(t) + \varepsilon(a_*x'(t) - ax'_*(t))$ olup $Re(F\alpha'(t)) = ax'(t)$ 'dir.

$(F\alpha(t))'' = ax''(t) + \varepsilon(a_*x''(t) - ax''_*(t))$ olup $Re(F\alpha''(t)) = ax''(t)$ 'dir. Buna göre;

i) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = \frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)}$ ile tanımlansın.

$$f(F\alpha(t)) = \frac{Re(F\alpha''(t))}{Re(F\alpha'(t))} = \frac{ax''(t)}{ax'(t)} = \frac{x''(t)}{x'(t)} = \frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} = f(\alpha(t)) \text{ elde edilir ki bu } \frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)}$$

fonksiyonunun $\mathbb{T}\mathbb{D}_1$ *-invariant* olduğunu gösterir.

ii) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = \frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]^2}{(Re\alpha'(t))^4} = \frac{\left(\det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ x'_*(t) & x''_*(t) \end{pmatrix}\right)^2}{(x'(t))^4}$ ile tanımlansın.

$$\begin{aligned} f(F\alpha(t)) &= \frac{[(F\alpha'(t)) (F\alpha''(t))]^2}{(Re(F\alpha'(t)))^4} \\ &= \frac{\left(\det \begin{pmatrix} ax'(t) & ax''(t) \\ a_*x'(t) - ax'_*(t) & a_*x''(t) - ax''_*(t) \end{pmatrix}\right)^2}{(ax(t))^4} \\ &= \frac{(aa_*x'(t)x''(t) - a^2x'(t)x''_*(t) - aa_*x''(t)x'(t) + a^2x''(t)x'_*(t))^2}{(ax'(t))^4} \\ &= \frac{a^4(x''(t)x'_*(t) - x'(t)x''_*(t))^2}{a^4(x'(t))^4} \\ &= \frac{(x''(t)x'_*(t) - x'(t)x''_*(t))^2}{(x'(t))^4} \\ &= \frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]^2}{(Re\alpha'(t))^4} \\ &= f(\alpha(t)) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu $\frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]^2}{(Re\alpha'(t))^4}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}\mathbb{D}_1$ -invariant olduğunu gösterir.

iii) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = (Re\alpha'(t))^2$ ile tanımlansın. $a = \pm 1$ için;

$$f(F\alpha(t)) = (Re(F\alpha'(t)))^2 = (ax'(t))^2 = a^2(x'(t))^2 = (x'(t))^2 = (Re\alpha'(t))^2 =$$

$f(\alpha(t))$ elde edilir ki bu $(Re\alpha'(t))^2$ fonksiyonunun $\mathbb{T}\mathbb{D}_1$ -invariant olduğunu gösterir.

iv) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = [\alpha'(t) \alpha''(t)]^2 =$

$\left(\det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ x'_*(t) & x''_*(t) \end{pmatrix}\right)^2$ ile tanımlansın.

$$\begin{aligned} f(F\alpha(t)) &= [(F\alpha'(t)) (F\alpha''(t))]^2 \\ &= \left(\det \begin{pmatrix} ax'(t) & ax''(t) \\ a_*x'(t) - ax'_*(t) & a_*x''(t) - ax''_*(t) \end{pmatrix}\right)^2 \\ &= (aa_*x'(t)x''(t) - a^2x'(t)x''_*(t) - aa_*x''(t)x'(t) + a^2x''(t)x'_*(t))^2 \\ &= a^4(x''(t)x'_*(t) - x'(t)x''_*(t))^2, (a = \pm 1 \text{ kullanılarak}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x''(t)x'_*(t) - x'(t)x''_*(t))^2 \\
&= [\alpha'(t) \alpha''(t)]^2 \\
&= f(\alpha(t))
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu $[\alpha'(t) \alpha''(t)]^2$ fonksiyonunun $\mathbb{T}\mathbb{D}_1$ –invariant olduğunu gösterir.

v) $\alpha(t)$ üzerinde bir f fonksiyonu $f(\alpha(t)) = (Re\alpha''(t))^2$ ile tanımlansın. $a = \pm 1$ için; $f(F\alpha(t)) = (Re(F\alpha''(t)))^2 = (ax''(t))^2 = a^2(x''(t))^2 = (x''(t))^2 = (Re\alpha''(t))^2 = f(\alpha(t))$ elde edilir ki bu $(Re\alpha''(t))^2$ fonksiyonunun $\mathbb{T}\mathbb{D}_1$ –invariant olduğunu gösterir. ■

2.3. Regüler T –Yolların Dual Denklik Problemi

Bu bölümde düzlemsel *regüler T –yolların* dual hareket grupları altında denk olma koşulları belirlenmektedir. İki eğrinin denkliğinin, üreteç invariantların eşitliği ile ifade edilebileceği gösterilmektedir.

Teorem 2.3.1. $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ \mathbb{R}^2 'de *regüler T –yollar* olsun. $\forall t \in T$ için;

$$\alpha(t) \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}^+}{\sim} \beta(t) \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned}
\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} &= \frac{Re\beta''(t)}{Re\beta'(t)} \\
\frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]}{(Re\alpha'(t))^2} &= \frac{[\beta'(t) \beta''(t)]}{(Re\beta'(t))^2}
\end{aligned} \right\} \quad (7)$$

dir. Ayrıca; $\Psi \in \mathbb{D}^+$, $C \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere; bir tek $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}^+$ vardır öyle ki $\beta(t) = F\alpha(t) = \Psi\alpha(t) + C$ 'dir. Burada Ψ ve C 'nin ifadeleri $t \in T$ 'ye bağlı olmayan

$$\Psi = \begin{pmatrix} \frac{Re\beta'(t)}{Re\alpha'(t)} & 0 \\ \frac{[\alpha'(t) \beta'(t)]}{(Re\alpha'(t))^2} & \frac{Re\beta'(t)}{Re\alpha'(t)} \end{pmatrix} \quad (8)$$

ve $C = \beta(t) - \Psi\alpha(t)$ şeklindedir.

İspat: (\Rightarrow) $\alpha(t) \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}^+}{\sim} \beta(t)$ olsun. O halde; Tanım 1.4.15.'den $\forall t \in T$ için $\beta(t) = F\alpha(t)$ olacak şekilde $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}^+$ vardır. $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}^+$ olduğundan $F\alpha(t) = S_U\alpha(t) + C$ olmak üzere $S_U \in \mathbb{D}^+$ ve $C \in \mathbb{R}^2$ 'dir. Buradan; $\forall t \in T$ için $\beta(t) = S_U\alpha(t) + C$ elde edilir. $S_U\alpha(t) = U\alpha(t)$ olduğundan; $\beta(t) = U\alpha(t) + C$ olur. Buradan türev alınırsa; $\beta'(t) = U\alpha'(t)$ elde edilir. $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ regüler T -yollar olduğundan $Re\alpha'(t) \neq 0$ ve $Re\beta'(t) \neq 0$ 'dir. O halde; $\forall t \in T$ için Önerme 1.3.27.'den $(\alpha'(t))^{-1}$ ve $(\beta'(t))^{-1}$ vardır. Önerme 1.4.11.'de $A = \alpha'(t)$ ve $B = \beta'(t)$ alalım. O halde;

$$\frac{\alpha''(t)}{\alpha'(t)} = \frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} + \varepsilon \frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]}{(Re\alpha'(t))^2} \quad (9)$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$\frac{\beta''(t)}{\beta'(t)} = \frac{Re\beta''(t)}{Re\beta'(t)} + \varepsilon \frac{[\beta'(t) \beta''(t)]}{(Re\beta'(t))^2} \quad (10)$$

elde edilir. $\beta'(t) = U\alpha'(t)$ ve $\beta''(t) = U\alpha''(t)$ 'den $\forall t \in T$ için $\frac{\beta''(t)}{\beta'(t)} = \frac{\alpha''(t)}{\alpha'(t)}$ sağlanır. Bu eşitlik ile birlikte, (9) ve (10)'dan $\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} = \frac{Re\beta''(t)}{Re\beta'(t)}$ ve $\frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]}{(Re\alpha'(t))^2} = \frac{[\beta'(t) \beta''(t)]}{(Re\beta'(t))^2}$ elde edilir.

(\Leftarrow) Kabul edelim ki; (7) sağlansın. O halde; Önerme 1.4.11. kullanılarak (9) ve (10)'un sağlandığı görülür. Buradan $\frac{\beta''(t)}{\beta'(t)} = \frac{\alpha''(t)}{\alpha'(t)}$ dir. Bu eşitlik $\beta''(t)(\beta'(t))^{-1} - \alpha''(t)(\alpha'(t))^{-1} = 0$ şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik kullanılarak;

$$\begin{aligned} \frac{d(\beta'(t)(\alpha'(t))^{-1})}{dt} &= \beta''(t)(\alpha'(t))^{-1} - \beta'(t)\alpha''(t)(\alpha'(t))^{-2} \\ &= (\beta''(t) - \beta'(t)\alpha''(t)(\alpha'(t))^{-1})(\alpha'(t))^{-1} \\ &= \beta'(t) (\beta''(t)(\beta'(t))^{-1} - \alpha''(t)(\alpha'(t))^{-1})(\alpha'(t))^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\beta'(t)(\alpha'(t))^{-1}$, T 'de sabittir. $M = \beta'(t)(\alpha'(t))^{-1}$ olarak alalım. M , T 'de sabit olduğundan ReM de sabit olur. $\forall t \in T$ için $Re\alpha'(t) \neq 0$ ve $Re\beta'(t) \neq 0$ olduğundan ve Önerme 1.3.27.'den

$$ReM = Re\left(\beta'(t)(\alpha'(t))^{-1}\right) = Re\beta'(t)Re(\alpha'(t))^{-1} = \frac{Re\beta'(t)}{Re\alpha'(t)} \neq 0$$

'dir. Böylece; ReM hem sabit hem de $ReM \neq 0$ 'dir. $ReM \neq 0$ olduğundan $M \in D^+$ 'dir.

$$\beta'(t) = \beta'(t)(\alpha'(t))^{-1}\alpha'(t) = \left(\beta'(t)(\alpha'(t))^{-1}\right)\alpha'(t), \quad \beta'(t) = M\alpha'(t) \quad \text{elde edilir.}$$

Buradan $\beta'(t) = S_M\alpha'(t)$ yazılır. Önerme 1.4.11. kullanılarak; $M = \beta'(t)(\alpha'(t))^{-1} = \frac{Re\beta'(t)}{Re\alpha'(t)} + \varepsilon \frac{[\alpha'(t) \beta'(t)]}{(Re\alpha'(t))^2}$ elde edilir ki buradan $S_M = \Psi$ olduğu görülür. M sabit olduğundan Ψ ,

$t \in T$ 'ye bağlı değildir. Buradan $\beta'(t) = \Psi\alpha'(t) = S_M\alpha'(t) = F\alpha'(t)$ ve $\Psi \in \mathbb{D}^+$ olur.

Böylece; $\alpha'(t)$ ile $\beta'(t) \mathbb{D}^+$ -denktir. $\beta'(t) = S_M\alpha'(t) = \Psi\alpha'(t)$ olup $(\beta(t) - \Psi\alpha(t))' = 0$ 'ı sağlar. $\beta(t) - \Psi\alpha(t)$ $t \in T$ 'ye bağlı değildir. $C = \beta(t) - \Psi\alpha(t)$ alalım. O halde; $C \in \mathbb{R}^2$ ve $\beta(t) = \Psi\alpha(t) + C = F\alpha(t)$ olur.

$F \in \mathbb{T}\mathbb{D}^+$ 'nin tekliğini gösterelim. Bunun için $\Psi \in \mathbb{D}^+$ ve $C \in \mathbb{R}^2$ 'nin tekliğini göstermemiz gerekir. O halde; $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}^+$ olduğundan $\beta(t) = F\alpha(t) = \Psi\alpha(t) + C$, $\Psi \in \mathbb{D}^+$ ve $C \in \mathbb{R}^2$ sağlanır. Diyelim ki; $B \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere; $H \in \mathbb{D}^+$ var ve $\beta(t) = H\alpha(t) + B$ olsun. $\beta'(t) = H\alpha'(t)$ sağlanır. $Re\alpha'(t) \neq 0$ ve $\beta'(t) = H\alpha'(t)$ kullanılarak $H = \beta'(t)(\alpha'(t))^{-1} = M$ elde edilir. Böylece; $H = \Psi$ olur. Dolayısıyla; Ψ tektir. $C = \beta(t) - \Psi\alpha(t)$ olarak alalım. Ψ 'nin tekliğinden $C = \beta(t) - \Psi\alpha(t) = B$ olur. Böylece; Ψ ve C 'nin de tekliğinden $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}^+$ 'nin tekliği elde edilir. ■

Örnek 2.3.2. $T = (2, +\infty)$ olmak üzere; \mathbb{R}^2 'de $\alpha(t) = (3t^2 + 4t, 2t^2)$ ve $\beta(t) = (6t^2 + 8t + 3, -2t^2 - 8t + 4)$ T -yollar olsunlar. Teorem 2.3.1. kullanılarak; $\alpha(t) \overset{\mathbb{T}\mathbb{D}^+}{\sim} \beta(t)$ denkleğinin olup olmadığına bakalım. O halde; $\alpha'(t) = (6t + 4, 4t)$ ve $\alpha''(t) = (6, 4)$ 'dir. $\forall t \in T$ için; $Re\alpha'(t) = 6t + 4 \neq 0$ olduğundan $\alpha(t)$ regüler T -yoldur. Aynı şekilde; $\beta'(t) = (12t + 8, -4t - 8)$ ve $\beta''(t) = (12, -4)$ 'dir. $\forall t \in T$ için; $Re\beta'(t) = 12t + 8 \neq 0$ olduğundan $\beta(t)$ regüler T -yoldur. Ayrıca; $Re\alpha'(t) = 6t + 4$ ve $Re\alpha''(t) = 6$ olup $\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} = \frac{6}{6t+4} = \frac{3}{3t+2}$ elde edilir. Aynı şekilde $Re\beta'(t) = 12t + 8$ ve $Re\beta''(t) = 12$ olup $\frac{Re\beta''(t)}{Re\beta'(t)} = \frac{12}{12t+8} = \frac{3}{3t+2}$ elde edilir. Buradan; $\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} = \frac{Re\beta''(t)}{Re\beta'(t)}$ elde edilir. Ayrıca; $[\alpha'(t) \alpha''(t)] = \begin{vmatrix} 6t+4 & 6 \\ 4t & 4 \end{vmatrix} = 16$ ve $[\beta'(t) \beta''(t)] = \begin{vmatrix} 12t+8 & 12 \\ -4t-8 & -4 \end{vmatrix} = 64$ 'dir. $\frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]}{(Re\alpha'(t))^2} = \frac{16}{(6t+4)^2} = \frac{4}{(3t+2)^2}$ ve $\frac{[\beta'(t) \beta''(t)]}{(Re\beta'(t))^2} = \frac{64}{(12t+8)^2} = \frac{4}{(3t+2)^2}$ olup

$\frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]}{(Re\alpha'(t))^2} = \frac{[\beta'(t) \beta''(t)]}{(Re\beta'(t))^2}$ elde edilir. O halde; Teorem 2.3.1'den $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ regüler T –yolları (7) eşitliklerini sağlar. O halde; $\alpha(t) \overset{\mathbb{T}\mathbb{D}^+}{\sim} \beta(t)$ elde edilir. Burada $\Psi \in \mathbb{D}^+$ ve $C \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere; bir tek $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}^+$ vardır öyle ki $\beta(t) = F\alpha(t) = \Psi\alpha(t) + C$ 'dir. Burada Ψ (8) formunda ve $C = \beta(t) - \Psi\alpha(t)$ 'nin ifadeleri $t \in T$ 'ye bağlı değildir.

Gerçekten; $\frac{Re\beta'(t)}{Re\alpha'(t)} = \frac{12t+8}{6t+4} = 2$, $[\alpha'(t) \beta'(t)] = \begin{vmatrix} 6t+4 & 12t+8 \\ 4t & -4t-8 \end{vmatrix} = -72t^2 - 96t - 32$ ve $\frac{[\alpha'(t) \beta'(t)]}{(Re\alpha'(t))^2} = \frac{-72t^2-96t-32}{(6t+4)^2} = -2$ olmak üzere; $\Psi = \begin{pmatrix} \frac{Re\beta'(t)}{Re\alpha'(t)} & 0 \\ \frac{[\alpha'(t) \beta'(t)]}{(Re\alpha'(t))^2} & \frac{Re\beta'(t)}{Re\alpha'(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}^+$ elde edilir. Aynı zamanda $C = \beta(t) - \Psi\alpha(t) = (6t^2 + 8t + 3, -2t^2 - 8t + 4) - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} (3t^2 + 4t, 2t^2) = (6t^2 + 8t + 3, -2t^2 - 8t + 4) - (6t^2 + 8t, -2t^2 - 8t) = (3, 4) \in \mathbb{R}^2$ elde edilir. Buradan Ψ ve C 'nin $t \in T$ 'ye bağlı olmadığı görülür.

Teorem 2.3.3. $\alpha(t)$ ve $\beta(t) \in \mathbb{R}^2$ 'de regüler T –yollar olsun. $\forall t \in T$ için; $\alpha(t) \overset{\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+}{\sim} \beta(t) \Leftrightarrow$

$$\left. \begin{aligned} \frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} &= \frac{Re\beta''(t)}{Re\beta'(t)} \\ [\alpha'(t) \alpha''(t)] &= [\beta'(t) \beta''(t)] \\ (Re\alpha'(t))^2 &= (Re\beta'(t))^2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

dir. Ayrıca; $\Psi \in \mathbb{D}_1^+$, $C \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere; bir tek $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ vardır öyle ki $\beta(t) = F\alpha(t) = \Psi\alpha(t) + C$ 'dir. Ψ ve C , $t \in T$ 'ye bağlı değildir. Burada Ψ , (8) formunda ve $C = \beta(t) - \Psi\alpha(t)$ şeklindedir.

İspat: Teorem 2.3.1. kullanılarak gösterilir. ■

Tanım 2.3.4. \mathbb{R}^2 'de $\alpha(t)$ bir T –yol olmak üzere; $\forall t \in T$ için;

$$[\alpha'(t) \alpha''(t)] = 0$$

ise $\alpha(t)$ 'ye *dejenere T –yol* denir.

$$[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] \neq 0$$

ise $\alpha(t)$ 'ye *dejenere olmayan (non-degenerate) T –yol* denir.

Sonuç 2.3.5. $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ \mathbb{R}^2 'de *T –yollar* olsun. $G = \mathbb{T}\mathbb{D}^+$ veya $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ olmak üzere; $\alpha(t)$ *dejenere bir T –yol* ve $\alpha(t) \stackrel{G}{\sim} \beta(t)$ ise $\beta(t)$ *dejenere bir T –yoldur*. Benzer şekilde; $\alpha(t)$ *dejenere olmayan bir T –yol* ve $\alpha(t) \stackrel{G}{\sim} \beta(t)$ ise $\beta(t)$ *dejenere olmayan bir T –yoldur*.

İspat: Açıktır. ■

Örnek 2.3.6. $T = (0,1)$ olmak üzere; \mathbb{R}^2 'de $\alpha(t) = \left(\frac{t^3}{3}, t^3\right)$ *T –yolunu* alalım. $\alpha'(t) = (t^2, 3t^2)$ ve $\alpha''(t) = (2t, 6t)$ 'dir. $\forall t \in T$ için; $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] = \begin{vmatrix} t^2 & 2t \\ 3t^2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^3 - 6t^3 = 0$ olduğundan $\alpha(t)$ *dejenere T –yoldur*. Aynı zamanda $\forall t \in T$ için; $Re\alpha(t) = \frac{t^3}{3} \neq 0$ olduğundan $\alpha(t)$ *dejenere c-regüler T –yoldur*.

Örnek 2.3.7. $T = (-1,1)$ olmak üzere; \mathbb{R}^2 'de $\alpha(t) = (e^t - 1, 2e^t + 3)$ *T –yolunu* alalım. $\alpha'(t) = (e^t, 2e^t)$ ve $\alpha''(t) = (e^t, 2e^t)$ 'dir. $\forall t \in T$ için; $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] = \begin{vmatrix} e^t & e^t \\ 2e^t & 2e^t \end{vmatrix} = 2e^{2t} - 2e^{2t} = 0$ olduğundan $\alpha(t)$ *dejenere T –yoldur*. Aynı zamanda $\forall t \in T$ için; $Re\alpha'(t) = 2t \neq 0$ olduğundan $\alpha(t)$ *dejenere regüler T –yoldur*.

Örnek 2.3.8. $T = (0, 2\pi)$ olmak üzere; \mathbb{R}^2 'de $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ *T –yolunu* alalım. $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t)$ ve $\alpha''(t) = (-\cos t, -\sin t)$ 'dir. $\forall t \in T$ için $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] = \begin{vmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \neq 0$ olduğundan $\alpha(t)$ *dejenere olmayan T –yoldur*.

Teorem 2.3.9. $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ \mathbb{R}^2 'de *dejenere regüler T –yollar* olsun. $\forall t \in T$ için; $\alpha(t) \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \beta(t) \Leftrightarrow$

$$\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} = \frac{Re\beta''(t)}{Re\beta'(t)} \quad (12)$$

dir. Ayrıca; $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathbb{D}^+$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere; $\beta(t) = F_1\alpha(t) = \Psi_1\alpha(t) + C_1$ ve $\beta(t) = F_2\alpha(t) = (\Psi_2\Omega)\alpha(t) + C_2$ olacak şekilde iki tane $F = F_1, F_2 \in \mathbb{T}\mathbb{D}$ vardır. Burada Ψ_1 (8) formunda,

$$\Psi_2 = \begin{pmatrix} \frac{Re\beta'(t)}{Re(\Omega\alpha'(t))} & 0 \\ \frac{[(\Omega\alpha'(t)) \beta'(t)]}{(Re(\Omega\alpha'(t)))^2} & \frac{Re\beta'(t)}{Re(\Omega\alpha'(t))} \end{pmatrix} \quad (13)$$

ve $C_1 = \beta(t) - \Psi_1\alpha(t)$ ile $C_2 = \beta(t) - (\Psi_2\Omega)\alpha(t)$ $t \in T$ 'ye bağlı değildir.

İspat: (\Rightarrow) $\alpha(t) \overset{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \beta(t)$ olsun. $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ \mathbb{R}^2 'de regüler T –yollar olduğundan $\forall t \in T$ için $Re\alpha'(t) \neq 0$ ve $Re\beta'(t) \neq 0$ 'dır. Böylece; $\forall t \in T$ için $\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)}$ ve $\frac{Re\beta''(t)}{Re\beta'(t)}$ vardır. Teorem 2.2.8. (i)'den $\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)}$ ve $\frac{Re\beta''(t)}{Re\beta'(t)}$ $\mathbb{T}\mathbb{D}$ –invarianttır. Teorem 2.3.1.'in ispatındaki şekilde düzenleme yapılarak (9) ve (10)'un sağlandığı ve birbirine eşit olduğu görülür. Dolayısıyla; (12) elde edilir.

(\Leftarrow) Kabul edelim ki; (12) sağlansın. $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ \mathbb{R}^2 'de regüler T –yollar olduğundan $\forall t \in T$ için $Re\alpha'(t) \neq 0$ ve $Re\beta'(t) \neq 0$ 'dır. Böylece; $\forall t \in T$ için $\frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]}{(Re\alpha'(t))^2}$ ve $\frac{[\beta'(t) \beta''(t)]}{(Re\beta'(t))^2}$ vardır. $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ \mathbb{R}^2 'de dejenere T –yollar olduğundan $\forall t \in T$ için $[\alpha'(t) \alpha''(t)] = [\beta'(t) \beta''(t)] = 0$ 'dır. Buradan

$$\frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]}{(Re\alpha'(t))^2} = \frac{[\beta'(t) \beta''(t)]}{(Re\beta'(t))^2} = 0 \quad (14)$$

elde edilir. (14) ve (12) denklemleri kullanılarak Teorem 2.3.1.'de yer alan denklemler elde edilir. Teorem 2.3.1.'den bir tek $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}^+$ vardır öyle ki $\forall t \in T$ için $\beta(t) = F\alpha(t)$ 'dir. Buradan görülür ki; bir tek $\Psi_1 \in \mathbb{D}^+$ ve bir tek $C_1 \in \mathbb{R}^2$ vardır ve $\Psi_1 = \Psi \in \mathbb{D}^+$ 'dir. Öyle ki; $\beta(t) = F\alpha(t) = \Psi_1\alpha(t) + C_1$ ve $C_1 = \beta(t) - \Psi_1\alpha(t)$ 'dir. Teorem 2.3.1.'den Ψ_1 ve C_1 , $t \in T$ 'ye bağlı değildir.

Bir de $\Omega\alpha(t)$ T –yolunu düşünelim. $\forall t \in T$ için; Önerme 1.5.2. (ii)'den

$$\frac{Re(\Omega\alpha''(t))}{Re(\Omega\alpha'(t))} = \frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} \quad (15)$$

elde edilir. O halde; $\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)}$, Ω –invarianttir. (15) ve (12) kullanılarak,

$$\frac{Re(\Omega\alpha''(t))}{Re(\Omega\alpha'(t))} = \frac{Re\beta''(t)}{Re\beta'(t)} \quad (16)$$

olduğu görülür. $\forall t \in T$ için Önerme 1.5.2. (i)'den $(Re(\Omega\alpha'(t)))^2 = (Re\alpha'(t))^2$ kullanılarak (14) eşitliğinde $det\Omega = -1$ yazılırsa;

$$\frac{[(\Omega\alpha'(t)) (\Omega\alpha''(t))]}{(Re(\Omega\alpha'(t)))^2} = \frac{|\Omega|[\alpha'(t) \alpha''(t)]}{(Re(\alpha'(t)))^2} = -\frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]}{(Re(\alpha'(t)))^2} = -\frac{[\beta'(t) \beta''(t)]}{(Re(\beta'(t)))^2} = 0$$

olur. Böylece;

$$\frac{[(\Omega\alpha'(t)) (\Omega\alpha''(t))]}{(Re(\Omega\alpha'(t)))^2} = \frac{[\beta'(t) \beta''(t)]}{(Re(\beta'(t)))^2} \quad (17)$$

elde edilir. (16) ve (17) denklemleri kullanılarak Teorem 2.3.1.'den bir tek $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}^+$ vardır öyle ki $\forall t \in T$ için $\beta(t) = F(\Omega\alpha(t))$ 'dir. $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}^+$ 'nin tekliğinden $\forall t \in T$ için $\beta(t) = F\alpha(t) = (\Psi_2\Omega)\alpha(t) + C_2$ 'yi sağlayan bir tek $\Psi_2 \in \mathbb{D}^+$ ve bir tek $C_2 \in \mathbb{R}^2$ vardır. Burada Ψ_2 (13) şeklindedir ve $C_2 = \beta(t) - (\Psi_2\Omega)\alpha(t)$ 'dir. Teorem 2.3.1.'den $\Psi_2 \in \mathbb{D}^+$ ve $C_2 \in \mathbb{R}^2$, $t \in T$ 'ye bağlı değildir.

$F \in \mathbb{T}\mathbb{D}$ alalım. Öyle ki $\beta(t) = F\alpha(t)$ 'dir. $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathbb{D}^+$ ve $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere; $F\alpha(t) = \Psi_1\alpha(t) + C_1$ veya $F\alpha(t) = (\Psi_2\Omega)\alpha(t) + C_2$ olduğunu gösterelim. $A \in \mathbb{D}$, $C_3 \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere; $\beta(t) = F\alpha(t) = A\alpha(t) + C_3$ alalım. $A \in \mathbb{D}$ olduğundan $A \in \mathbb{D}^+$ veya $A \in \mathbb{D}^-$ olur.

Kabul edelim ki; $A \in \mathbb{D}^+$ olsun. Teorem 2.3.1.'deki teklik kullanılarak, $A = \Psi_1$ ve $C_1 = C_3 = \beta(t) - \Psi_1\alpha(t)$ elde edilir.

Kabul edelim ki; $A \in \mathbb{D}^-$ olsun. $K \in \mathbb{D}^+$ olmak üzere; $A = K\Omega$ ve $C_3 = \beta(t) - (K\Omega)\alpha(t)$ şeklinde olur. Buradan $\beta(t) = (K\Omega)\alpha(t) + C_3 = K(\Omega\alpha(t)) + C_3$ elde edilir. Böylece; $\beta(t)$ ve $\Omega\alpha(t)$ T -yolları $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$ -denktirler. Teorem 2.3.1.'deki teklik kullanılarak $\forall t \in T$ için $K = \Psi_2$ ve $C_2 = C_3 = \beta(t) - (\Psi_2\Omega)\alpha(t)$ elde edilir. ■

Örnek 2.3.10. $T = (1, \infty)$ olmak üzere; \mathbb{R}^2 'de $\alpha(t) = \left(t^2, \frac{t^2}{2}\right)$ ve $\beta(t) = \left(-3t^2 + 2, \frac{7t^2}{2} - 1\right)$ T -yollar olsunlar. Teorem 2.3.9. kullanılarak; $\alpha(t) \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \beta(t)$ denkleğinin olup olmadığına bakalım. O halde; $\alpha'(t) = (2t, t)$ ve $\alpha''(t) = (2, 1)$ 'dir. $\forall t \in T$ için $Re\alpha'(t) = 2t \neq 0$ olduğundan $\alpha(t)$ regüler T -yoldur. $\forall t \in T$ için $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] = \begin{vmatrix} 2t & 2 \\ t & 1 \end{vmatrix} = 0$ olduğundan $\alpha(t)$ dejenere regüler T -yoldur. Aynı şekilde; $\beta'(t) = (-6t, 7t)$ ve $\beta''(t) = (-6, 7)$ 'dir. $\forall t \in T$ için $Re\beta'(t) = -6t \neq 0$ olduğundan $\beta(t)$ regüler T -yoldur. $\forall t \in T$ için $[\beta'(t) \ \beta''(t)] = \begin{vmatrix} -6t & -6 \\ 7t & 7 \end{vmatrix} = 0$ olduğundan $\beta(t)$ dejenere regüler T -yoldur. Ayrıca; $Re\alpha'(t) = 2t$ ve $Re\alpha''(t) = 2$ olup $\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$ elde edilir. Aynı şekilde $Re\beta'(t) = -6t$ ve $Re\beta''(t) = -6$ olup $\frac{Re\beta''(t)}{Re\beta'(t)} = \frac{-6}{-6t} = \frac{1}{t}$ elde edilir. Buradan $\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} = \frac{Re\beta''(t)}{Re\beta'(t)}$ elde edilir. O halde; Teorem 2.3.9'dan $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ T -yolları (12) eşitliklerini sağlar. O halde; $\alpha(t) \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \beta(t)$ elde edilir. Burada $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathbb{D}^+$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere; $\beta(t) = F_1\alpha(t) = \Psi_1\alpha(t) + C_1$ ve $\beta(t) = F_2\alpha(t) = (\Psi_2\Omega)\alpha(t) + C_2$ olacak şekilde iki tane $F = F_1, F_2 \in \mathbb{T}\mathbb{D}$ vardır. Burada Ψ_1 (8), Ψ_2 (13) formunda ve $C_1 = \beta(t) - \Psi_1\alpha(t)$ ile $C_2 = \beta(t) - (\Psi_2\Omega)\alpha(t)$ $t \in T$ 'ye bağlı değildir.

Gerçekten; $\frac{Re\beta'(t)}{Re\alpha'(t)} = \frac{-6t}{2t} = -3$, $[\alpha'(t) \ \beta'(t)] = \begin{vmatrix} 2t & -6t \\ t & 7t \end{vmatrix} = 20t^2$ ve

$\frac{[\alpha'(t) \ \beta'(t)]}{Re(\alpha'(t))^2} = \frac{20t^2}{(2t)^2} = 5$ olmak üzere; $\Psi_1 = \begin{pmatrix} \frac{Re\beta'(t)}{Re\alpha'(t)} & 0 \\ \frac{[\alpha'(t) \ \beta'(t)]}{(Re(\alpha'(t)))^2} & \frac{Re\beta'(t)}{Re\alpha'(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ +5 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}^+$

elde edilir. Aynı zamanda $C_1 = \beta(t) - \Psi_1\alpha(t) = \begin{pmatrix} -3t^2 + 2 \\ \frac{7t^2}{2} - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ +5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} -3t^2 + 2 \\ \frac{7t^2}{2} - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3t^2 \\ \frac{7t^2}{2} \end{pmatrix} = (2, -1) \in \mathbb{R}^2$ elde edilir. Buradan Ψ_1 ve C_1 'in $t \in T$ 'ye bağlı olmadığı görülür.

Yine aynı şekilde; $Re(\Omega\alpha'(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \end{pmatrix} \frac{Re\beta'(t)}{Re(\Omega\alpha'(t))} = \frac{-6t}{2t} = -3$,
 $[(\Omega\alpha'(t)) \beta'(t)] = \begin{vmatrix} 2t & -6t \\ -t & 7t \end{vmatrix} = 8t^2$ ve $\frac{[(\Omega\alpha'(t)) \beta'(t)]}{Re(\Omega\alpha'(t))^2} = \frac{8t^2}{(2t)^2} = 2$ olmak üzere; $\Psi_2 =$
 $\begin{pmatrix} \frac{Re\beta'(t)}{Re(\Omega\alpha'(t))} & 0 \\ \frac{[(\Omega\alpha'(t)) \beta'(t)]}{(Re(\Omega\alpha'(t)))^2} & \frac{Re\beta'(t)}{Re(\Omega\alpha'(t))} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ +2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}^+$ elde edilir. Aynı zamanda $C_2 = \beta(t) -$
 $(\Psi_2\Omega)\alpha(t) = \begin{pmatrix} -3t^2 + 2 \\ \frac{7t^2}{2} - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ +2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t^2 + 2 \\ \frac{7t^2}{2} - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3t^2 \\ \frac{7t^2}{2} \end{pmatrix} =$
 $(2, -1) \in \mathbb{R}^2$ elde edilir. Buradan Ψ_2 ve C_2 'nin $t \in T$ 'ye bağlı olmadığı görülür.

Teorem 2.3.11. $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ \mathbb{R}^2 'de dejenere regüler T -yollar olsun. $\forall t \in T$ için;
 $\alpha(t) \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}_1}{\sim} \beta(t) \Leftrightarrow$

$$\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} = \frac{Re\beta''(t)}{Re\beta'(t)} \quad (18)$$

dir. Ayrıca; $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathbb{D}_1$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere; $\beta(t) = F_1\alpha(t) = \Psi_1\alpha(t) + C_1$ ve
 $\beta(t) = F_2\alpha(t) = (\Psi_2\Omega)\alpha(t) + C_2$ olacak şekilde sadece iki tane $F = F_1, F_2 \in \mathbb{T}\mathbb{D}_1$ vardır.
 Burada Ψ_1 (8), Ψ_2 (13) formunda ve $C_1 = \beta(t) - \Psi_1\alpha(t)$, $C_2 = \beta(t) - (\Psi_2\Omega)\alpha(t)$
 şeklinde olup $t \in T$ 'ye bağlı değildir.

İspat: Teorem 2.3.9. kullanılarak gösterilir. ■

Teorem 2.3.12. $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ \mathbb{R}^2 'de dejenere olmayan T -yollar olsun. $\forall t \in T$ için;
 $\alpha(t) \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \beta(t) \Leftrightarrow$

$$\left. \begin{aligned} \frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} &= \frac{Re\beta''(t)}{Re\beta'(t)} \\ \frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]^2}{(Re\alpha'(t))^4} &= \frac{[\beta'(t) \beta''(t)]^2}{(Re\beta'(t))^4} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

dir. Ayrıca; $\forall t \in T$ için bir tek $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}$ vardır öyle ki $\beta(t) = F\alpha(t)$ 'dir. Buna göre
 sadece aşağıdaki durumlar söz konusudur:

- (a) $\forall t \in T$ için $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] > 0$ ve $[\beta'(t) \ \beta''(t)] > 0$.
 (b) $\forall t \in T$ için $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] > 0$ ve $[\beta'(t) \ \beta''(t)] < 0$.
 (c) $\forall t \in T$ için $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] < 0$ ve $[\beta'(t) \ \beta''(t)] > 0$.
 (d) $\forall t \in T$ için $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] < 0$ ve $[\beta'(t) \ \beta''(t)] < 0$.

(a) ve (d) durumlarında; $\Psi_1 \in \mathbb{D}^+$, $C_1 = \beta(t) - \Psi_1\alpha(t)$ olmak üzere; $F\alpha(t) = \Psi_1\alpha(t) + C_1$ sağlanır. Burada Ψ_1 (8) şeklindedir.

(b) ve (c) durumlarında; $\Psi_2 \in \mathbb{D}^+$, $C_2 = \beta(t) - (\Psi_2\Omega)\alpha(t)$ olmak üzere; $F\alpha(t) = (\Psi_2\Omega)\alpha(t) + C_2$ sağlanır. Burada Ψ_2 (13) şeklindedir.

Ψ_1, Ψ_2, C_1 ve C_2 $t \in T$ 'ye bağlı değildir.

İspat: (\Rightarrow) $\alpha(t) \overset{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \beta(t)$ kabul edelim. Teorem 2.2.8.'den $\forall t \in T$ için $\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)}$ ve $\frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]^2}{(Re\alpha'(t))^4}$ fonksiyonları $\mathbb{T}\mathbb{D}$ *-invarianttır*. Teorem 2.3.1. kullanılarak istenen elde edilir.

(\Leftarrow) (19) eşitlikleri sağlansın. $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ dejenere olmayan T *-yollar* olduğundan $\forall t \in T$ için $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] \neq 0$ ve $[\beta'(t) \ \beta''(t)] \neq 0$. sağlanır. Böylece sadece yukardaki (a), (b), (c) ve (d) durumları vardır. (19) eşitliklerinden

$$\frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]^2}{(Re\alpha'(t))^4} = \frac{[\beta'(t) \ \beta''(t)]^2}{(Re\beta'(t))^4} \quad (20)$$

elde edilir. $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ *regüler* T *-yollar* olduğundan $\forall t \in T$ için $(Re\alpha'(t))^2 > 0$, $(Re\beta'(t))^2 > 0$ 'dır.

$\forall t \in T$ için (a) ve (d) durumlarında; (20), $(Re\alpha'(t))^2 > 0$ ve $(Re\beta'(t))^2 > 0$ 'den

$$\frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]}{(Re\alpha'(t))^2} = \frac{[\beta'(t) \ \beta''(t)]}{(Re\beta'(t))^2} \quad (21)$$

sağlanır. (21) ve (19) eşitlikleri (7)'yi sağlar. Böylece; Teorem 2.3.1. kullanılarak, burada bir tek $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}^+$ vardır öyle ki $\Psi_1 \in \mathbb{D}^+$, $C_1 = \beta(t) - \Psi_1\alpha(t)$ olmak üzere; $F\alpha(t) = \Psi_1\alpha(t) + C_1$ 'dir. Burada Ψ_1 (8) şeklindedir.

$\forall t \in T$ için (b) ve (c) durumlarında; (20), $(Re\alpha'(t))^2 > 0$ ve $(Re\beta'(t))^2 > 0$ 'den

$$-\frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]}{(Re\alpha'(t))^2} = \frac{[\beta'(t) \beta''(t)]}{(Re\beta'(t))^2} \quad (22)$$

sağlanır. $\forall t \in T$ için; (22) eşitliğinde $det\Omega = -1$, Önerme 1.5.2. (i)'den $(Re(\Omega\alpha(t)))^2 = (Re\alpha(t))^2$ ve $(Re(\Omega\alpha(t)))^2 > 0$ kullanılarak $\frac{[(\Omega\alpha'(t)) (\Omega\alpha''(t))]}{(Re(\Omega\alpha'(t)))^2} = \frac{|\Omega|[\alpha'(t) \alpha''(t)]}{(Re(\alpha'(t)))^2} = -\frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]}{(Re(\alpha'(t)))^2} = \frac{[\beta'(t) \beta''(t)]}{(Re(\beta'(t)))^2}$ elde edilir. Böylece; $\forall t \in T$ için $\frac{[(\Omega\alpha'(t)) (\Omega\alpha''(t))]}{(Re(\Omega\alpha'(t)))^2} = \frac{[\beta'(t) \beta''(t)]}{(Re(\beta'(t)))^2}$ olur. Bu eşitlik, Önerme 1.5.2. (i) kullanılarak elde edilen $\frac{Re(\Omega\alpha''(t))}{Re(\Omega\alpha'(t))} = \frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)}$

eşitliği ve (19)'daki $\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} = \frac{Re\beta''(t)}{Re\beta'(t)}$ eşitliği ile $\Omega\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ T -yollarının (7)'yi sağladığı görülür. Dolayısıyla; Teorem 2.3.9. kullanılarak, burada bir tek $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}$ vardır öyle ki $\Psi_2 \in \mathbb{D}^+$, $C_2 = \beta(t) - (\Psi_2\Omega)\alpha(t)$ olmak üzere; $F\alpha(t) = (\Psi_2\Omega)\alpha(t) + C_2$ 'dir. Burada Ψ_2 (13) şeklindedir. ■

Örnek 2.3.13. $T = \mathbb{R}$ olmak üzere; \mathbb{R}^2 'de $\alpha(t) = (t - 2, t^2 + 4)$ ve $\beta(t) = (t - 1, t^2 - 2t + 7)$ dejenere olmayan T -yollar olsunlar. Teorem 2.3.12. kullanılarak; $\alpha(t) \overset{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \beta(t)$ denkleğinin olup olmadığına bakalım. O halde; $\alpha'(t) = (1, 2t)$ ve $\alpha''(t) = (0, 2)$ 'dir. $\forall t \in T$ için $[\alpha'(t) \alpha''(t)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ olduğundan $\alpha(t)$ dejenere olmayan T -yoldur. Aynı şekilde; $\beta'(t) = (1, 2t - 2)$ ve $\beta''(t) = (0, 2)$ 'dir. $\forall t \in T$ için $[\beta'(t) \beta''(t)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2t - 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ olduğundan $\beta(t)$ dejenere olmayan T -yoldur. Ayrıca; $Re\alpha'(t) = 1$ ve $Re\alpha''(t) = 0$ olup $\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} = \frac{0}{1} = 0$ elde edilir. Aynı şekilde $Re\beta'(t) = 1$ ve $Re\beta''(t) = 0$ olup $\frac{Re\beta''(t)}{Re\beta'(t)} = \frac{0}{1} = 0$ elde edilir. Buradan $\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} = \frac{Re\beta''(t)}{Re\beta'(t)}$ elde edilir. Ayrıca; $[\alpha'(t) \alpha''(t)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 2 \end{vmatrix} = 2$ ve $[\beta'(t) \beta''(t)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2t - 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$ 'dir. $\frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]^2}{(Re\alpha'(t))^4} = \frac{4}{1^4} = 4$ ve $\frac{[\beta'(t) \beta''(t)]^2}{(Re\beta'(t))^4} = \frac{4}{1^4} = 4$ olup $\frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]^2}{(Re\alpha'(t))^4} = \frac{[\beta'(t) \beta''(t)]^2}{(Re\beta'(t))^4}$ elde edilir. O halde; Teorem 2.3.12.'den $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ T -yolları (19) eşitliklerini sağlar. O halde; $\alpha(t) \overset{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \beta(t)$ elde edilir. Teorem 2.3.12.'de (a) durumunda; $\Psi_1 \in \mathbb{D}^+$, $C_1 = \beta(t) - \Psi_1\alpha(t)$ olmak üzere; $F\alpha(t) = \Psi_1\alpha(t) + C_1$ sağlanır. Burada Ψ_1 (8) şeklinde ve Ψ_1 ve C_1 , $t \in T$ 'ye bağlı değildir.

Gerçekten; $\frac{Re\beta'(t)}{Re\alpha'(t)} = \frac{1}{1} = 1$, $[\alpha'(t) \ \beta'(t)] = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2t & 2t-2 \end{vmatrix} = -2$ ve $\frac{[\alpha'(t) \ \beta'(t)]}{(Re\alpha'(t))^2} = \frac{-2}{1^2} = -2$ olmak üzere; $\Psi_1 = \begin{pmatrix} \frac{Re\beta'(t)}{Re\alpha'(t)} & 0 \\ \frac{[\alpha'(t) \ \beta'(t)]}{(Re\alpha'(t))^2} & \frac{Re\beta'(t)}{Re\alpha'(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}^+$ ve $C_1 = \beta(t) - \Psi_1 \alpha(t) = (t-1, t^2-2t+7) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} (t-2, t^2+4) = (t-1, t^2-2t+7) - (t-2, t^2-2t+8) = (1, -1) \in \mathbb{R}^2$ olarak elde edilir. Buradan Ψ_1 ve C_1 'in $t \in T$ 'ye bağlı olmadığı görülür.

Teorem 2.3.14. $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ \mathbb{R}^2 'de dejenere olmayan T -yollar olsun. $\forall t \in T$ için; $\alpha(t) \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}_1}{\sim} \beta(t) \Leftrightarrow$

$$\left. \begin{aligned} \frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} &= \frac{Re\beta''(t)}{Re\beta'(t)} \\ [\alpha'(t) \ \alpha''(t)]^2 &= [\beta'(t) \ \beta''(t)]^2 \\ (Re\alpha'(t))^2 &= (Re\beta'(t))^2 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

dir. Ayrıca; $\forall t \in T$ için bir tek $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}_1$ vardır öyle ki $\beta(t) = F\alpha(t)$ 'dir. Bu durumda; sadece Teorem 2.3.12.'deki durumlar vardır:

(a) ve (d) durumlarında, $\Psi_1 \in \mathbb{D}_1$, $C_1 = \beta(t) - \Psi_1 \alpha(t)$ olmak üzere; $F\alpha(t) = \Psi_1 \alpha(t) + C_1$ sağlanır. Burada Ψ_1 (8) şeklindedir.

(b) ve (c) durumlarında; $\Psi_2 \in \mathbb{D}_1$, $C_2 = \beta(t) - (\Psi_2 \Omega)\alpha(t)$ olmak üzere; $F\alpha(t) = (\Psi_2 \Omega)\alpha(t) + C_2$ sağlanır. Burada Ψ_2 (13) şeklindedir.

Ψ_1, Ψ_2, C_1 ve C_2 $t \in T$ 'ye bağlı değildir.

İspat: Teorem 2.3.12. kullanılarak gösterilir. ■

Tanım 2.3.15. [14] V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde bir iç çarpım;

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

olmak üzere aşağıdaki aksiyomlar ile tanımlanan bir dönüşüme denir. $u, v \in V$ olmak üzere; $\langle u, v \rangle$ şeklinde gösterilir.

i) Pozitif belirlilik; $\forall u \in V$ için $\langle u, u \rangle \geq 0$.

$$\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

ii) Simetri; $\forall u, v \in V$ için

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle.$$

iii) Bilineerlik; $\forall c \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V$ için

$$\langle cu, v \rangle = c\langle u, v \rangle = \langle u, cv \rangle$$

$$\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$$

$$\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle$$

Örneğin; \mathbb{R}^n , \mathbb{R} üzerinde bir reel vektör uzayıdır ve bu uzayda iç çarpım $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ için $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$; $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$f\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde tanımlanır. Bu iç çarpıma, *Öklid anlamındaki iç çarpım* veya \mathbb{R}^n 'deki *standart iç çarpım* denir. Burada $n = 2$ için; $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ vektörlerinin iç çarpımı; $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$ şeklinde gösterilir.

Lemma 2.3.16. [16] \mathbb{R}^2 'de y_1, y_2, z_1 ve z_2 vektörleri için $[y_1 \ y_2][z_1 \ z_2] = \det \begin{pmatrix} \langle y_1, z_1 \rangle & \langle y_1, z_2 \rangle \\ \langle y_2, z_1 \rangle & \langle y_2, z_2 \rangle \end{pmatrix}$ dir.

İspat: [16]'da verilmiştir. ■

Önerme 2.3.17. \mathbb{R}^2 'deki tüm *regüler* $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ T -yollar üzerinde $\frac{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle \langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle^2}{(\text{Re} \alpha'(t))^4}$ fonksiyonu $\mathbb{T D}$ -invarianttır.

İspat: Lemma 2.3.16.'de $y_1 = z_1 = \alpha'(t)$ ve $y_2 = z_2 = \alpha''(t)$ alalım. O halde;

$$[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]^2 = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle \langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle^2 \quad (24)$$

elde edilir. $\alpha(t)$ regüler T -yol olduğundan $Re\alpha'(t) \neq 0$ 'dır. (24) ve $(Re\alpha'(t))^4 > 0$ kullanılarak

$$\frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]^2}{(Re\alpha'(t))^4} = \frac{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle \langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle}{(Re\alpha'(t))^4} - \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle^2}{(Re\alpha'(t))^4} \quad (25)$$

elde edilir. Teorem 2.2.8.'den $\forall t \in T$ için $\frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]^2}{(Re\alpha'(t))^4} \mathbb{T}\mathbb{D}$ -invarianttir. $\frac{[\alpha'(t) \alpha''(t)]^2}{(Re\alpha'(t))^4}$ $\mathbb{T}\mathbb{D}$ -invariant olduğundan (25)'den $\frac{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle \langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle}{(Re\alpha'(t))^4} - \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle^2}{(Re\alpha'(t))^4}$ de $\mathbb{T}\mathbb{D}$ -invariant olup istenen elde edilir. ■

Önerme 2.3.18. \mathbb{R}^2 'deki tüm regüler $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ T -yollar üzerinde $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle \langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle^2$ fonksiyonu $\mathbb{T}\mathbb{D}_1$ -invarianttir.

İspat: Önerme 2.3.17. kullanılarak gösterilir. ■

Teorem 2.3.19. $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ \mathbb{R}^2 'de dejenere olmayan T -yollar olsun. $\forall t \in T$ için; $\alpha(t) \overset{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \beta(t) \Leftrightarrow$

$$\left. \begin{aligned} \frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} &= \frac{Re\beta''(t)}{Re\beta'(t)} \\ \frac{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle \langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle^2}{(Re\alpha'(t))^4} &= \frac{\langle \beta'(t), \beta'(t) \rangle \langle \beta''(t), \beta''(t) \rangle - \langle \beta'(t), \beta''(t) \rangle^2}{(Re\beta'(t))^4} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

dir. Ayrıca; $\forall t \in T$ için bir tek $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}$ vardır öyle ki $\beta(t) = F\alpha(t)$ 'dir. Bu durumda; sadece Teorem 2.3.12.'deki durumlar vardır:

(a) ve (d) durumlarında; $\Psi_1 \in \mathbb{D}^+$, $C_1 = \beta(t) - \Psi_1\alpha(t)$ olmak üzere; $F\alpha(t) = \Psi_1\alpha(t) + C_1$ sağlanır. Burada Ψ_1 (8) şeklindedir.

(b) ve (c) durumlarında; $\Psi_2 \in \mathbb{D}^+$, $C_2 = \beta(t) - (\Psi_2\Omega)\alpha(t)$ olmak üzere; $F\alpha(t) = (\Psi_2\Omega)\alpha(t) + C_2$ sağlanır. Burada Ψ_2 (13) şeklindedir. Ψ_1, Ψ_2, C_1 ve C_2 $t \in T$ 'ye bağlı değildir.

İspat: (\Rightarrow) $\alpha(t) \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \beta(t)$ olduğunu kabul edelim. Önerme 2.3.17.'den $\frac{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle \langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle^2}{(Re\alpha'(t))^4} \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}}{-} \text{invarianttır}$. Teorem 2.2.8.'den $\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}}{-} \text{invarianttır}$. Teorem 2.3.12.'de (24) eşitliği kullanılırsa; (26) eşitlikleri sağlanır.

(\Leftarrow) (26) eşitlikleri sağlansın. (26) ve (25) eşitlikleri (19)'u sağlar. O halde; Teorem 2.3.12.'den ispat açıktır. ■

Teorem 2.3.20. $\alpha(t)$ ve $\beta(t) \in \mathbb{R}^2$ 'de dejenere olmayan T -yollar olsun. $\forall t \in T$ için; $\alpha(t) \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}_1}{\sim} \beta(t) \Leftrightarrow$

$$\left. \begin{aligned} \frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} &= \frac{Re\beta''(t)}{Re\beta'(t)} \\ \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle \langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle^2 &= \\ \langle \beta'(t), \beta'(t) \rangle \langle \beta''(t), \beta''(t) \rangle - \langle \beta'(t), \beta''(t) \rangle^2 &= \\ (Re\alpha'(t))^2 &= (Re\beta'(t))^2 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

dir. Ayrıca; $\forall t \in T$ için bir tek $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}_1$ vardır öyle ki $\beta(t) = F\alpha(t)$ 'dir. Bu durumda; sadece Teorem 2.3.12.'deki durumlar vardır:

(a) ve (d) durumlarında, $\Psi_1 \in \mathbb{D}_1$, $C_1 = \beta(t) - \Psi_1\alpha(t)$ olmak üzere; $F\alpha(t) = \Psi_1\alpha(t) + C_1$ sağlanır. Burada Ψ_1 (8) şeklindedir.

(b) ve (c) durumlarında; $\Psi_2 \in \mathbb{D}_1$, $C_2 = \beta(t) - (\Psi_2\Omega)\alpha(t)$ olmak üzere; $F\alpha(t) = (\Psi_2\Omega)\alpha(t) + C_2$ sağlanır. Burada Ψ_2 (13) şeklindedir. Ψ_1, Ψ_2, C_1 ve C_2 $t \in T$ 'ye bağlı değildir.

İspat: Önerme 2.3.19. kullanılarak gösterilir. ■

2.4. Düzlemsel T -Yolların Dual Varlık Teoremleri

Bu bölümde $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$, $\mathbb{T}\mathbb{D}$, $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ ve $\mathbb{T}\mathbb{D}_1$ dual hareket gruplarına göre invariantları bilinen T -yolların açık denklemlerinin bulunabileceği gösterilmektedir.

Teorem 2.4.1. $a(t)$ ve $b(t)$ T 'de reel değerli sürekli fonksiyonlar olsun. \mathbb{R}^2 'deki tüm $\alpha(t)$ regüler T –yollar,

$$\left. \begin{aligned} \frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} &= a(t) \\ \frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]}{(Re\alpha'(t))^2} &= b(t) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

denklemlerini sağlar ise $\forall C_1 \in D^+$ ve $\forall C_2 \in D$ için

$$\alpha(t) = C_1 \int e^{\int(a(t)+\varepsilon b(t))dt} dt + C_2 \quad (29)$$

dir. Tersine; \mathbb{R}^2 'de (29) formundaki her T –yol, (28) eşitliklerini sağlayan regüler bir T –yoldur.

İspat: $a(t)$ ve $b(t)$ T 'de reel sürekli fonksiyonlar ve $\alpha(t)$, \mathbb{R}^2 'de (28) eşitliklerini sağlayan regüler T –yol olsun. Önerme 1.4.11. (i)'deki $BA^{-1} = \frac{ReB}{ReA} + \varepsilon \frac{[A \ B]}{(ReA)^2}$ özdeşliğinde $B = \alpha''(t)$ ve $A = \alpha'(t)$ alınır; $\alpha''(t)(\alpha'(t))^{-1} = \frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} + \varepsilon \frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]}{(Re\alpha'(t))^2}$ olur. Bu özdeşlik ve (28) ile $\alpha''(t) = (a(t) + \varepsilon b(t))\alpha'(t)$ elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümü için; $\frac{d\alpha'(t)}{dt} = (a(t) + \varepsilon b(t))\alpha'(t)$ olduğundan $\frac{d\alpha'(t)}{\alpha'(t)} = (a(t) + \varepsilon b(t)) dt$ yazılır. İntegral alınır; $\int \frac{d\alpha'(t)}{\alpha'(t)} = \int (a(t) + \varepsilon b(t)) dt$ bulunur. Böylece; $\ln \alpha'(t) = \int (a(t) + \varepsilon b(t)) dt + \ln C_1$ olur. Buradan $\ln \alpha'(t) - \ln C_1 = \int (a(t) + \varepsilon b(t)) dt$ ve $\ln \frac{\alpha'(t)}{C_1} = \int (a(t) + \varepsilon b(t)) dt$ olup $\frac{\alpha'(t)}{C_1} = e^{\int(a(t)+\varepsilon b(t))dt}$ elde edilir. Düzenleme yapılırsa;

$$\alpha'(t) = C_1 e^{\int(a(t)+\varepsilon b(t))dt} \quad (30)$$

olur ve tekrar integral alınarak $\alpha(t) = \int C_1 e^{\int(a(t)+\varepsilon b(t))dt} + C_2$ bulunur. Böylece; $C_1, C_2 \in D$ olmak üzere; bu diferensiyel denklemin genel çözümü $\alpha(t) = C_1 \int e^{\int(a(t)+\varepsilon b(t))dt} + C_2$ olarak elde edilir. Böylece; $\forall t \in T$ için $\alpha(t)$ regüler bir T –yol olduğundan bu denklemden $C_1 \neq 0$ olup üstelik $C_1 \in D^+$ 'dir.

Tersine; $\alpha(t)$ regüler T –yolun (29) formunda olduğunu kabul edelim. (28) denklemlerini sağladığı kolaylıkla görülür. ■

Örnek 2.4.2. $T = (0, \infty)$ ve $a(t) = b(t) = 1$, T 'de reel sürekli fonksiyonları alalım. Bu durumda; $\alpha(t)$ eğrisi (29) eşitliğini sağlar ve $\alpha(t) = C_1 \int e^{\int(1+\varepsilon)dt} + C_2$ olacak şekilde genel çözüme sahiptir. Burada; $C_1 \in D^+$, $C_2 \in D$ 'dir. Gerçekten;

$\alpha(t) = C_1 \int e^{\int(1+\varepsilon)dt} + C_2 = C_1 \int e^{t+\varepsilon t} dt + C_2 = C_1 \int e^t e^{\varepsilon t} dt + C_2$ elde edilir. Burada; $e^{\varepsilon t} = 1 + \varepsilon t + \frac{(\varepsilon t)^2}{2!} + \frac{(\varepsilon t)^3}{3!} + \dots = 1 + \varepsilon t$ açılımı kullanılarak integral $\alpha(t) = C_1 \int e^t (1 + \varepsilon t) dt + C_2$ şeklinde elde edilir. Buradan; $\alpha(t) = C_1 \int (e^t + \varepsilon e^t t) dt + C_2 = C_1 \int e^t dt + C_1 \varepsilon \int e^t t dt + C_2 = C_1 e^t + C_1 \varepsilon (te^t - e^t) + C_2$ elde edilir. Burada $C_1 = c_1 + \varepsilon c_{1*} \in D^+$ ve $C_2 = c_2 + \varepsilon c_{2*} \in D$ olmak üzere; $\alpha(t)$ eğrisinin genel çözümü $\alpha(t) = c_1 e^t + c_2 + \varepsilon (c_1 t e^t - c_1 e^t + c_{1*} e^t + c_{2*})$ şeklinde elde edilir.

Teorem 2.4.3. $a(t)$ T 'de reel sürekli fonksiyon olmak üzere; \mathbb{R}^2 'de dejenere regüler T –yol $\alpha(t)$ için

$$\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} = a(t) \quad (31)$$

olsun. Bu takdirde; $\forall C_1 \in D^+$ ve $\forall C_2 \in D$ için

$$\alpha(t) = C_1 \int e^{\int a(t)dt} dt + C_2 \quad (32)$$

dir. Tersine; \mathbb{R}^2 'de (32) formundaki her T –yol, (31) eşitliğini sağlayan dejenere regüler bir T –yoldur.

İspat: \mathbb{R}^2 'de her dejenere regüler T –yol için $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] = 0$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $\forall t \in T$ için $Re\alpha'(t) \neq 0$ 'dir. Böylece; $\forall t \in T$ için $\frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]}{(Re\alpha'(t))^2} = 0$ 'dır. Buradan anlaşılıyor ki bu durum Teorem 2.4.1.'in özel bir halidir. (29)'da $b(t) = 0$ alınırsa istenen çözüm elde edilir. ■

Örnek 2.4.4. $T = \mathbb{R}$ ve $a(t) = 1$, T 'de reel sürekli fonksiyon alalım. $b(t) = 0$ olsun. Bu durumda; $\alpha(t)$ eğrisi (31) eşitliğini sağlar ve $\alpha(t) = C_1 \int e^{\int 1 dt} dt + C_2$ olacak şekilde genel çözüme sahiptir. Burada; $C_1 \in D^+$, $C_2 \in D$ 'dir. Gerçekten;

$\alpha(t) = C_1 \int e^{\int 1 dt} dt + C_2 = C_1 \int e^t dt + C_2 = C_1 e^t + C_2$ elde edilir. $C_1 = c_1 + \varepsilon c_{1*} \in D^+$ ve $C_2 = c_2 + \varepsilon c_{2*} \in D$ olmak üzere; $\alpha(t)$ eğrisinin genel çözümü $\alpha(t) = c_1 e^t + c_2 + \varepsilon(c_{1*} e^t + c_{2*})$ elde edilir. Öyle ki; $\forall t \in T$ için $\alpha'(t) = (c_1 e^t + c_2, c_{1*} e^t + c_{2*})$ 'dir. $Re\alpha'(t) = c_1 e^t + c_2 \neq 0$ olduğundan $\alpha(t)$ eğrisi *regülerdir*. Ayrıca; $\alpha''(t) = (c_1 e^t + c_2, c_{1*} e^t + c_{2*})$ ve $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] = \begin{vmatrix} c_1 e^t + c_2 & c_1 e^t + c_2 \\ c_{1*} e^t + c_{2*} & c_{1*} e^t + c_{2*} \end{vmatrix} = 0$ olup $\alpha(t)$ eğrisi dejeneredir. Teorem 2.4.3.'ün $\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} = \frac{c_1 e^t}{c_1 e^t} = 1 = a(t)$ şeklinde sağlandığı görülür.

Teorem 2.4.5. $a(t)$ ve $b(t)$ T 'de reel değerli sürekli fonksiyonlar olsun. $\alpha(t)$ 'nin \mathbb{R}^2 'de dejeneren olmayan T -yol olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\forall t \in T$ için

$$\left. \begin{aligned} \frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} &= a(t) \\ \frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]^2}{(Re\alpha'(t))^4} &= b^2(t) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

eşitlikleri sağlanır.

i) $\forall t \in T$ için $b(t) \neq 0$ 'dır.

ii) $\forall t \in T$ için $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] > 0$ durumunda; $\forall C_1 \in D^+$, $\forall C_2 \in D$ ve $t_0 \in T$ için olmak üzere;

$$\alpha(t) = C_1 \int e^{\int (a(t) + \varepsilon b(t)) dt} dt + C_2 \quad (34)$$

dir.

iii) $\forall t \in T$ için $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] < 0$ durumunda; $\forall C_1 \in D^+$, $\forall C_2 \in D$ ve $t_0 \in T$ için olmak üzere;

$$\alpha(t) = C_1 \int e^{\int (a(t) - \varepsilon b(t)) dt} dt + C_2 \quad (35)$$

dir.

Tersine; $\forall t \in T$ için $b(t) \neq 0$ durumunda, \mathbb{R}^2 'de (34) ve (35) formundaki her T –yol dejenere olmayan ve (33) denklemlerini sağlayan bir T –yoldur.

İspat: i) $\alpha(t)$ \mathbb{R}^2 'de dejenere olmayan T –yol olsun. $\forall t \in T$ için $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] \neq 0$ 'dir.

$b^2(t) = \frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]^2}{(Re\alpha'(t))^4}$ olup $\forall t \in T$ için $b(t) \neq 0$ olduğu görülür.

Diğer durumların ispatlarına bakalım. Burada da iki durum vardır:

ii) $\forall t \in T$ için $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] > 0$ 'dir.

iii) $\forall t \in T$ için $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] < 0$ 'dir.

(ii) durumunda;

$$\frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]^2}{(Re\alpha'(t))^4} = b^2(t) \quad (36)$$

denkleminin $\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} = a(t)$ ve $\frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]}{(Re\alpha'(t))^2} = b(t)$ sistemine denk olduğu görülür. Teorem

2.4.1.'den sistemin genel çözümü (34)'deki gibidir.

Benzer şekilde; (iii) durumunda; (36) denklemi $\frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]}{(Re\alpha'(t))^2} = -b(t)$ 'ye denktir. (33)

denklem sistemi $\frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} = a(t)$ ve $\frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]}{(Re\alpha'(t))^2} = -b(t)$ denklem sistemine denktir. Teorem

2.4.1.'den, sistemin genel çözümü (35)'deki gibidir.

Tersine, $\forall t \in T$ için $b(t) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $\alpha(t)$ T –yolunun (34)'deki gibi olduğunu kabul edelim. Buradan (33) elde edilir ve $\alpha(t)$ 'nin dejenere olmayan T –yol olduğu görülür.

Benzer şekilde; $\alpha(t)$ T –yolunun (35)'deki gibi olduğunu kabul edelim. Buradan, (33) elde edilir ve $\alpha(t)$ 'nin dejenere olmayan T –yol olduğu görülür. ■

Teorem 2.4.6. $a(t)$ ve $b(t)$ T 'de reel sürekli fonksiyonlar olsun. $\alpha(t)$ 'nin \mathbb{R}^2 'de dejenere olmayan bir T –yol olduğunu kabul edelim öyle ki $\forall t \in T$ için

$$\left. \begin{aligned} \frac{Re\alpha''(t)}{Re\alpha'(t)} &= a(t) \\ \frac{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle \langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle - (\alpha'(t), \alpha''(t))^2}{(Re\alpha'(t))^4} &= b(t) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

denklemleri sağlanır. O halde;

- i) $\forall t \in T$ için $b(t) \neq 0$.
- ii) $\forall t \in T$ için $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] > 0$ durumunda; $\alpha(t)$, (34)'deki gibidir.
- iii) $\forall t \in T$ için $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] < 0$ durumunda; $\alpha(t)$, (35)'deki gibidir.

Tersine; $\forall t \in T$ için $b(t) \neq 0$ durumunda, \mathbb{R}^2 'de (34) ve (35) formundaki her T –yol (37)'deki gibi dejenere olmayan T –yoldur.

İspat: $\alpha(t)$ 'nin (37)'daki gibi \mathbb{R}^2 'de dejenere olmayan bir T –yol olduğunu kabul edelim. (25) ve (37) kullanılarak, (33) ve (37)'nin bu sisteme denk olduğu görülür. Teorem 2.4.5. kullanılarak ispat elde edilir. ■

2.5. Dual Düzlemsel Eğrilerin Tipleri ve İnvaryant Parametrizasyonları

Bu bölümde bir eğrinin invaryant parametrizasyonu kullanılarak, dual düzlemsel eğrilerin denklik problemi, dual düzlemsel T –yolların denklik problemine indirgenerek çözülmektedir.

$$J_1 = (a, b) \subseteq \mathbb{R} \text{ ve } J_2 = (c, d) \subseteq \mathbb{R} \text{ olsun.}$$

Tanım 2.5.1. [1] $\forall r \in J_2$ için $\varphi'(r) > 0$ ve $\beta(r) = \alpha(\varphi(r))$ olacak şekilde bir $\varphi: J_2 \rightarrow J_1$ $C^{(2)}$ –difeomorfizmi var ise \mathbb{R}^2 'de $\alpha(t)$ J_1 –yolu, $\beta(r)$ J_2 – yoluna d -denk denir. \mathbb{R}^2 'de d -denk yolların bir sınıfı ξ \mathbb{R}^2 'de bir eğri olarak adlandırılır. Bir $\alpha \in \xi$ J_1 –yolu, ξ eğrisinin bir parametrizasyonu ve $\beta(r) = \alpha(\varphi(r))$ J_2 – yolu da α 'nın φ ile yeniden parametrenişi olarak ifade edilir.

α_k 'ler ξ eğrisinin parametrizasyonları olmak üzere \mathbb{R}^2 'de bir $\xi = \{\alpha_k, k \in K\}$ eğrisi olsun. $\forall F \in \mathbb{T}\mathbb{D}$ için $F\xi = \{F\alpha_k, k \in K\}$ de \mathbb{R}^2 'de bir eğridir.

Örnek 2.5.2. $J_1 = (1, \infty)$ ve $J_2 = \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ olsun. \mathbb{R}^2 'de bir J_1 –yol $\alpha(t) = (e^t, t^3 + t^2)$ alalım. $\beta(r) = \alpha(\varphi(r))$ koşulunu sağlayan bir $\varphi: J_2 \rightarrow J_1$ $C^{(2)}$ –difeomorfizmi $\varphi(r) = 3r$ olsun. Buna göre; α 'nın φ ile yeniden parametrelenişi $\beta(r) = (e^{3r}, 27r^3 + 9r^2)$ olur. O halde; $\alpha(t)$ ve $\beta(r)$ d -denktir.

Tanım 2.5.3. \mathbb{R}^2 'de ξ ve η eğrilerine, $\eta = F\xi$ olacak şekilde bir $F \in G$ var ise G –denktir denir.

Tanım 2.5.4. Bir ξ eğrisine, *regüler* bir J –yola sahipse *regüler* eğri denir.

Önerme 2.5.5. ξ , *regüler* bir eğri olsun. O halde; $\forall \alpha \in \xi$ parametrizasyonu bir *regüler* J_1 –yoldur.

İspat: ξ , *regüler* bir eğri olsun. O halde; ξ 'nin $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ gibi bir parametrizasyonu vardır öyle ki $J_1 = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere; $\alpha(t)$ bir *regüler* J_1 –yoldur. Buradan; $\forall t \in J_1$ için $Re\alpha'(t) = x'(t) \neq 0$ 'dır. $\beta \in \xi$ de herhangi bir parametrizasyonu olsun. β , α 'ya d -denk olduğundan bir $\varphi: J_2 \rightarrow J_1$ $C^{(2)}$ –difeomorfizmi vardır öyle ki $\forall r \in J_2$ için $\varphi'(r) > 0$ ve $\beta(r) = \alpha(\varphi(r))$ 'dir. $\forall t \in J_1$ için $x'(t) \neq 0$ olduğundan ve $\forall r \in J_2$ için $\beta(r) = \alpha(\varphi(r)) = (x(\varphi(r)), x_*(\varphi(r)))$ ifadesinde her iki tarafın türevi alınırsa;

$$\beta'(r) = \varphi'(r)\alpha'(\varphi(r)) = (\varphi'(r)x'(\varphi(r)), \varphi'(r)x'_*(\varphi(r)))$$

olduğundan; $Re\beta'(r) = \varphi'(r)x'(\varphi(r))$ elde edilir. $\forall r \in J_2$ için $\varphi'(r) > 0$ ve $x'(\varphi(r)) \neq 0$ olduğundan $Re\beta'(r) \neq 0$ olup $\beta(r)$ 'nin *regüler* bir J_2 –yol olduğu görülür. ■

Tanım 2.5.6. Bir ξ eğrisine, dejenere olmayan bir J –yola sahipse dejenere olmayan eğri denir.

Önerme 2.5.7. ξ , dejenere olmayan bir eğri olsun. O halde; $\forall \alpha \in \xi$ parametrizasyonu bir dejenere olmayan J_1 –yoldur.

İspat: ξ , dejenere olmayan bir eğri olsun. O halde; ξ 'nin $\alpha(t) = (x(t), x_*(t))$ şeklinde bir parametrizasyonu vardır öyle ki $J_1 = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere; $\alpha(t)$ bir dejenere olmayan J_1 –yoldur. Buradan; $\forall t \in J_1$ için $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] \neq 0$ 'dır. $\beta \in \xi$, herhangi bir parametrizasyon olsun. β, α 'ya d -denk olduğundan bir $\varphi: J_2 \rightarrow J_1$ $C^{(2)}$ –difeomorfizmi vardır öyle ki $\forall r \in J_2$ için $\varphi'(r) > 0$ ve $\beta(r) = \alpha(\varphi(r))$ 'dir. $\forall t \in J_1$ için $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] \neq 0$ olduğundan ve $\beta(r) = \alpha(\varphi(r))$ ifadesinde her iki tarafın 1. ve 2. dereceden türevleri alınır;

$$\beta'(r) = (\alpha(\varphi(r)))' = \frac{d}{dr} \alpha(\varphi(r)) = \varphi'(r) \alpha'(\varphi(r))$$

ve

$$\begin{aligned} \beta''(r) &= \frac{d}{dr} (\beta'(r)) = \frac{d}{dr} (\varphi'(r) \alpha'(\varphi(r))) \\ &= \varphi''(r) \alpha'(\varphi(r)) + \varphi'(r) \alpha''(\varphi(r)) \varphi'(r) \\ &= \varphi''(r) \alpha'(\varphi(r)) + (\varphi'(r))^2 \alpha''(\varphi(r)) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. O halde;

$$\begin{aligned} [\beta'(r) \ \beta''(r)] &= [\varphi'(r) \alpha'(\varphi(r)) \ \varphi''(r) \alpha'(\varphi(r)) + (\varphi'(r))^2 \alpha''(\varphi(r))] \\ &= [\varphi'(r) \alpha'(\varphi(r)) \ \varphi''(r) \alpha'(\varphi(r))] + \\ &\quad [\varphi'(r) \alpha'(\varphi(r)) \ (\varphi'(r))^2 \alpha''(\varphi(r))] \\ &= \varphi'(r) \varphi''(r) [\alpha'(\varphi(r)) \ \alpha'(\varphi(r))] + (\varphi'(r))^3 [\alpha'(\varphi(r)) \ \alpha''(\varphi(r))] \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\forall r \in J_2$ için $[\alpha'(\varphi(r)) \ \alpha'(\varphi(r))] = 0$, $\varphi'(r) > 0$ ve $[\alpha'(\varphi(r)) \ \alpha''(\varphi(r))] \neq 0$ olduğundan $[\beta'(r) \ \beta''(r)] \neq 0$ 'dır. O halde; $\beta(r)$ dejenere olmayan J_2 –yoldur. ■

Şimdi; \mathbb{R}^2 'de dejenere olmayan eğrilerin tiplerini tanımlayalım.

$J = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$ olmak üzere; \mathbb{R}^2 'de $\alpha(t)$ 'yi dejenere olmayan bir J –yol alalım. $a < p < q < b$ olacak şekilde $p, q \in \mathbb{R}$ için

$$l_{\alpha}(p, q) = \int_p^q \frac{|\alpha'(t) \alpha''(t)|}{(\operatorname{Re} \alpha'(t))^2} dt \quad (38)$$

tanımlayalım. $\alpha(t)$, \mathbb{R}^2 'de dejenere olmayan bir J -yol olduğundan $a < p < q < b$ olacak şekilde p, q için $l_{\alpha}(p, q) > 0$ 'dir.

$$l_{\alpha}(a, q) = \lim_{p \rightarrow a} l_{\alpha}(p, q) \leq +\infty$$

ve

$$l_{\alpha}(p, b) = \lim_{q \rightarrow b} l_{\alpha}(p, q) \leq +\infty$$

limitleri mevcuttur ve burada sadece dört tane durum söz konusudur:

$$\text{i) } 0 < l_{\alpha}(a, q) < +\infty, 0 < l_{\alpha}(p, b) < +\infty$$

$$\text{ii) } 0 < l_{\alpha}(a, q) < +\infty, l_{\alpha}(p, b) = +\infty$$

$$\text{iii) } l_{\alpha}(a, q) = +\infty, 0 < l_{\alpha}(p, b) < +\infty$$

$$\text{iv) } l_{\alpha}(a, q) = +\infty, l_{\alpha}(p, b) = +\infty$$

$l = l_{\alpha}(a, q) + l_{\alpha}(p, b) - l_{\alpha}(p, q)$ tanımlayalım. (i) ve (ii) durumlarında; α 'ya “ $(0, l)$ -tipinde” (ya da, ayrı ayrı (i) durumu için “ $l < +\infty$ -tipinde”, (ii) durumu için, $l = +\infty$ karşılık geldiğinden α 'ya “ $(0, +\infty)$ -tipinde”) denir. (iii) durumunda α , “ $(-\infty, 0)$ -tipinde” ve (iv) durumunda “ $(-\infty, +\infty)$ -tipinde” olarak adlandırılır. Tüm durumlar $p, q \in J$ 'lerin seçiminden bağımsızdır. $l < +\infty$, $(0, +\infty)$, $(-\infty, 0)$ ve $(-\infty, +\infty)$ olmak üzere; tüm tiplerde J -yollar vardır. α J -yolunun tipi $L(\alpha)$ ile gösterilir.

Örnek 2.5.8. $T = (a, b)$ ve $a < b$ olmak üzere; \mathbb{R}^2 'de bir T -yol $\alpha(t) = (e^t, e^t(t+1))$ alalım. $p, q \in T$ ve $p < q$ olsun.

$$l_{\alpha}(p, q) = \int_p^q \frac{|\alpha'(t) \alpha''(t)|}{(\operatorname{Re} \alpha'(t))^2} dt = \int_p^q \frac{e^{2t}}{e^{2t}} dt = \int_p^q 1 dt = q - p \text{ elde edilir.}$$

i) $T = (0, l)$, $l < \infty$ alalım. Bu durumda;

$$l_{\alpha}(0, q) = \lim_{p \rightarrow 0} l_{\alpha}(p, q) = \lim_{p \rightarrow 0} (q - p) = q$$

ve

$$l_{\alpha}(p, l) = \lim_{q \rightarrow l} l_{\alpha}(p, q) = \lim_{q \rightarrow l} (q - p) = l - p$$

elde edilir. Böylece;

$$l = l_{\alpha}(0, q) + l_{\alpha}(p, l) - l_{\alpha}(p, q) = q + l - p - (q - p) = l$$

olur. Bu durumda eğri; $l < +\infty$ –tipindedir.

ii) $T = (0, \infty)$ alalım. Bu durumda;

$$l_{\alpha}(0, q) = \lim_{p \rightarrow 0} l_{\alpha}(p, q) = \lim_{p \rightarrow 0} (q - p) = q$$

ve

$$l_{\alpha}(p, \infty) = \lim_{q \rightarrow \infty} l_{\alpha}(p, q) = \lim_{q \rightarrow \infty} (q - p) = +\infty$$

elde edilir. Böylece;

$$l = l_{\alpha}(0, q) + l_{\alpha}(p, \infty) - l_{\alpha}(p, q) = q + \infty - q + p = \infty$$

olur. Bu durumda eğri; $(0, \infty)$ –tipindedir.

iii) $T = (-\infty, 0)$ alalım. Bu durumda;

$$l_{\alpha}(-\infty, q) = \lim_{p \rightarrow -\infty} l_{\alpha}(p, q) = \lim_{p \rightarrow -\infty} (q - p) = +\infty$$

ve

$$l_{\alpha}(p, 0) = \lim_{q \rightarrow 0} l_{\alpha}(p, q) = \lim_{q \rightarrow 0} (q - p) = -p$$

elde edilir. Böylece;

$$l = l_{\alpha}(-\infty, q) + l_{\alpha}(p, 0) - l_{\alpha}(p, q) = \infty - p - q + p = \infty$$

olur. Bu durumda eğri; $(-\infty, 0)$ –tipindedir.

iv) $T = (-\infty, +\infty)$ alalım. Bu durumda;

$$l_{\alpha}(-\infty, q) = \lim_{p \rightarrow -\infty} l_{\alpha}(p, q) = \lim_{p \rightarrow -\infty} (q - p) = +\infty$$

ve

$$l_{\alpha}(p, \infty) = \lim_{q \rightarrow \infty} l_{\alpha}(p, q) = \lim_{q \rightarrow \infty} (q - p) = +\infty$$

elde edilir. Böylece;

$$l = l_{\alpha}(-\infty, q) + l_{\alpha}(p, +\infty) - l_{\alpha}(p, q) = \infty + \infty - (q - p) = \infty$$

olur. Bu durumda eğri; $(-\infty, +\infty)$ –tipindedir.

Önerme 2.5.9. i) α, J_1 –yol ve β, J_2 –yol \mathbb{R}^2 'de dejenere olmayan yollar olsun. $\alpha(t) \stackrel{\text{TID}}{\sim} \beta(t)$ ise $L(\alpha) = L(\beta)$ 'dir.

ii) α ve β , dejenere olmayan bir ξ eğrisinin parametrizasyonları ise $L(\alpha) = L(\beta)$ olur.

İspat: i) α ve β , \mathbb{R}^2 'de dejenere olmayan yollar ve $\alpha(t) \stackrel{\text{TID}}{\sim} \beta(t)$ olduğundan Teorem 2.3.12. gereği (19) eşitlikleri sağlanır. (19)'dan $\frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]^2}{(\text{Re}\alpha'(t))^4} = \frac{[\beta'(t) \ \beta''(t)]^2}{(\text{Re}\beta'(t))^4}$ eşitliğini alalım. Burada

$$\frac{||[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]||}{(\text{Re}\alpha'(t))^2} = \frac{||[\beta'(t) \ \beta''(t)]||}{(\text{Re}\beta'(t))^2} \quad (39)$$

eşitliğinin sağlandığı açıktır. O halde; dejenere olmayan α ve β yolları için (39) kullanılarak

$$l_\alpha(p, q) = \int_p^q \frac{||[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]||}{(\text{Re}\alpha'(t))^2} dt = \int_p^q \frac{||[\beta'(t) \ \beta''(t)]||}{(\text{Re}\beta'(t))^2} dt = l_\beta(p, q)$$

elde edilir. Böylece; $l = l_\alpha(a, q) + l_\alpha(p, b) - l_\alpha(p, q)$ ifadesi, β için de aynıdır. Dolayısıyla; $L(\alpha) = L(\beta)$ 'dir.

ii) α ve β , \mathbb{R}^2 'de dejenere olmayan bir ξ eğrisinin parametrizasyonları olsun. Önerme 2.5.7. gereğince α ve β yolları da dejenere olmayan yollardır. Tanım 2.5.1. gereği α ve β , dejenere olmayan bir ξ eğrisinin parametrizasyonları olduğundan *d-denktir*. Yani bir $\varphi: J_2 = (c, d) \rightarrow J_1 = (a, b)$; $\varphi'(r) > 0$ fonksiyonu için $\beta(r) = \alpha(\varphi(r))$ 'dir. $L(\alpha) = (0, l)$ olsun. $\beta(r) = \alpha(\varphi(r))$ ifadesinde her iki tarafın 1.ve 2. dereceden türevleri alınırsa;

$$\beta'(r) = (\alpha(\varphi(r)))' = \frac{d}{dr} \alpha(\varphi(r)) = \varphi'(r)\alpha'(\varphi(r))$$

ve

$$\begin{aligned} \beta''(r) &= \frac{d}{dr} (\beta'(r)) = \frac{d}{dr} (\varphi'(r)\alpha'(\varphi(r))) \\ &= \varphi''(r)\alpha'(\varphi(r)) + \varphi'(r)\alpha''(\varphi(r))\varphi'(r) \\ &= \varphi''(r)\alpha'(\varphi(r)) + (\varphi'(r))^2\alpha''(\varphi(r)) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. O halde;

$$\begin{aligned}
 [\beta'(r) \beta''(r)] &= [\varphi'(r)\alpha'(\varphi(r)) \varphi''(r)\alpha'(\varphi(r)) + (\varphi'(r))^2\alpha''(\varphi(r))] \\
 &= [\varphi'(r)\alpha'(\varphi(r)) \varphi''(r)\alpha'(\varphi(r))] + \\
 &\quad \left[\varphi'(r)\alpha'(\varphi(r)) (\varphi'(r))^2\alpha''(\varphi(r)) \right] \\
 &= \varphi'(r)\varphi''(r)[\alpha'(\varphi(r)) \alpha'(\varphi(r))] + (\varphi'(r))^3[\alpha'(\varphi(r)) \alpha''(\varphi(r))]
 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\forall r \in J_2$ için $[\alpha'(\varphi(r)) \alpha'(\varphi(r))] = 0$ olup

$[\beta'(r) \beta''(r)] = (\varphi'(r))^3[\alpha'(\varphi(r)) \alpha''(\varphi(r))]$ elde edilir. Buradan $c < \bar{p} < \bar{q} < d$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
 l_\beta(\bar{p}, \bar{q}) &= \int_{\bar{p}}^{\bar{q}} \frac{|\beta'(r) \beta''(r)|}{(Re(\beta'(r)))^2} dr \\
 &= \int_{\bar{p}}^{\bar{q}} \frac{|\alpha'(\varphi(r)) \alpha''(\varphi(r))|}{(Re(\alpha'(\varphi(r))))^2} dr \\
 &= \int_{\bar{p}}^{\bar{q}} \frac{(\varphi'(r))^3 |\alpha'(\varphi(r)) \alpha''(\varphi(r))|}{(\varphi'(r))^2 (Re(\alpha'(\varphi(r))))^2} dr \\
 &= \int_{\bar{p}}^{\bar{q}} \frac{(\varphi'(r))^2 |\alpha'(\varphi(r)) \alpha''(\varphi(r))|}{(\varphi'(r))^2 (Re(\alpha'(\varphi(r))))^2} (\varphi'(r)) dr \\
 &= \int_{\bar{p}}^{\bar{q}} \frac{|\alpha'(\varphi(r)) \alpha''(\varphi(r))|}{(Re(\alpha'(\varphi(r))))^2} (\varphi'(r)) dr
 \end{aligned}$$

elde edilir.. Burada $\varphi(r) = t$ dönüşümü yapılırsa; $\varphi'(r)dr = dt$ kullanılarak

$$l_\beta(\bar{p}, \bar{q}) = \int_p^q \frac{|\alpha'(t) \alpha''(t)|}{(Re(\alpha'(t)))^2} dt = l_\alpha(p, q)$$

elde edilir. Buradan; $l = l_\alpha(a, q) + l_\alpha(p, b) - l_\alpha(p, q)$ ve $\bar{l} = l_\beta(c, \bar{q}) + l_\beta(\bar{p}, d) - l_\beta(\bar{p}, \bar{q})$ eşitliklerinde $l_\beta(c, \bar{q}) = \lim_{\bar{p} \rightarrow c} l_\beta(\bar{p}, \bar{q}) = \lim_{\bar{p} \rightarrow a} l_\alpha(p, q)$, $l_\beta(\bar{p}, d) = \lim_{\bar{q} \rightarrow d} l_\beta(\bar{p}, \bar{q}) =$

$\lim_{q \rightarrow b} l_\alpha(p, q)$ ve $l_\beta(\bar{p}, \bar{q}) = l_\alpha(p, q)$ kullanılırsa $\bar{l} = l$ elde edilir. O halde; $L(\beta) = (0, l)$ olur.

Dolayısıyla; $L(\alpha) = L(\beta)$ 'dir. Diğer durumlar da benzer şekilde gösterilir. ■

Örnek 2.5.10. $J_1 = (0,1)$ ve $J_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ olsun. \mathbb{R}^2 'de bir J_1 -yol $\alpha(t) = (e^t, e^t + t)$ alalım. $\beta(r) = \alpha(\varphi(r))$ koşulunu sağlayan bir $\varphi: J_2 \rightarrow J_1$ $C^{(2)}$ -difeomorfizmi $\varphi(r) = 2r$ olsun. Buna göre; \mathbb{R}^2 'de bir J_2 -yol $\beta(r) = (e^{2r}, e^{2r} + 2r)$ olur. O halde; $\alpha(t)$ ve $\beta(r)$ d -denktir.

Şimdi α ve β eğrilerinin tiplerini belirleyelim. $\alpha(t) = (e^t, e^t + t)$ olmak üzere; $\alpha'(t) = (e^t, e^t + 1)$ ve $\alpha''(t) = (e^t, e^t)$ 'dir. $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] = \begin{vmatrix} e^t & e^t \\ e^t + 1 & e^t \end{vmatrix} = -e^t$ elde edilir. Ayrıca $Re\alpha'(t) = e^t$ 'dir. O halde; $p, q \in J_1$ ve $p < q$ olsun.

$l_\alpha(p, q) = \int_p^q \frac{|\alpha'(t) \ \alpha''(t)|}{(Re\alpha'(t))^2} dt = \int_p^q \frac{e^t}{e^{2t}} dt = \int_p^q \frac{1}{e^t} dt = \int_p^q e^{-t} dt = -e^{-q} + e^{-p}$ elde edilir.

$l_\alpha(0, q) = \lim_{p \rightarrow 0} l_\alpha(p, q) = \lim_{p \rightarrow 0} (-e^{-q} + e^{-p}) = -e^{-q} + 1$ ve

$l_\alpha(p, 1) = \lim_{q \rightarrow 1} l_\alpha(p, q) = \lim_{q \rightarrow 1} (-e^{-q} + e^{-p}) = -e^{-1} + e^{-p}$ elde edilir.

$l = l_\alpha(0, q) + l_\alpha(p, 1) - l_\alpha(p, q) = -e^{-q} + 1 - e^{-1} + e^{-p} + e^{-q} - e^{-p} = +1 - e^{-1} < \infty$ elde edilir. O halde; α eğrisi $(0, l)$ -tipindedir.

$\beta(r) = (e^{2r}, e^{2r} + 2r)$ olmak üzere; $\beta'(r) = (2e^{2r}, 2e^{2r} + 2)$ ve $\beta''(r) = (4e^{2r}, 2e^{2r})$ 'dir. $[\beta'(r) \ \beta''(r)] = \begin{vmatrix} 2e^{2r} & 4e^{2r} \\ 2e^{2r} + 2 & 2e^{2r} \end{vmatrix} = 8e^{2r}$ elde edilir. Ayrıca $Re\beta'(r) = 2e^{2r}$ 'dir. O halde; $\bar{p}, \bar{q} \in J_2$ ve $\bar{p} < \bar{q}$ olsun.

$l_\beta(\bar{p}, \bar{q}) = \int_{\bar{p}}^{\bar{q}} \frac{|\beta'(r) \ \beta''(r)|}{(Re\beta'(r))^2} dr = \int_{\bar{p}}^{\bar{q}} \frac{8e^{2r}}{4e^{4r}} dr = \int_{\bar{p}}^{\bar{q}} \frac{2}{e^{2r}} dr = \int_{\bar{p}}^{\bar{q}} 2e^{-2r} dr = -2e^{-\bar{q}} + 2e^{-\bar{p}}$ elde edilir.

$l_\beta(0, \bar{q}) = \lim_{\bar{p} \rightarrow 0} l_\beta(\bar{p}, \bar{q}) = \lim_{\bar{p} \rightarrow 0} (-2e^{-\bar{q}} + 2e^{-\bar{p}}) = -2e^{-\bar{q}} + 2$ ve

$l_\beta\left(\bar{p}, \frac{1}{2}\right) = \lim_{\bar{q} \rightarrow \frac{1}{2}} l_\beta(\bar{p}, \bar{q}) = \lim_{\bar{q} \rightarrow \frac{1}{2}} (-2e^{-\bar{q}} + 2e^{-\bar{p}}) = -2e^{-\frac{1}{2}} + 2e^{-\bar{p}}$ elde edilir.

$l = l_\beta(0, \bar{q}) + l_\beta\left(\bar{p}, \frac{1}{2}\right) - l_\beta(\bar{p}, \bar{q}) = -2e^{-\bar{q}} + 2 - 2e^{-\frac{1}{2}} + 2e^{-\bar{p}} + 2e^{-\bar{q}} - 2e^{-\bar{p}} = +2 + -2e^{-\frac{1}{2}} < \infty$ elde edilir. O halde; β eğrisi de $(0, l)$ -tipinde olup denk olan bu iki eğrinin tiplerinin de aynı olduğu elde edilir.

Tanım 2.5.11. Bir $\alpha \in \xi$ J -yolunun tipi, dejenere olmayan ξ eğrisinin tipi olarak tanımlanacaktır ve $L(\xi)$ olarak gösterilecektir.

Önerme 2.5.12. ξ ve η , \mathbb{R}^2 'de dejenere olmayan iki eğri olsun. $\xi \stackrel{\mathbb{T}D}{\sim} \eta$ ise $L(\xi) = L(\eta)$ 'dir.

İspat: ξ ve η , \mathbb{R}^2 'de dejenerere olmayan eğriler olduklarından Önerme 2.5.7. gereği; ξ 'nin her α parametrizasyonu dejenerere olmayan J_1 -yol ve aynı şekilde η 'nin her β parametrizasyonu dejenerere olmayan J_2 -yoldur. O halde; $\xi \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \eta$ olduğundan $\forall \alpha \in \xi$ ve $\forall \beta \in \eta$ için $\alpha \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \beta$ 'dir. Önerme 2.5.9. (i) kullanılarak α J_1 -yolu ile β J_2 -yolunun tiplerinin aynı olduğu görülür. Yani $L(\alpha) = L(\beta)$ 'dir. Tanım 2.5.11.'den $\alpha \in \xi$ J_1 -yolunun tipi, dejenerere olmayan ξ eğrisinin tipi ve aynı şekilde $\beta \in \eta$ J_2 -yolunun tipi, dejenerere olmayan η eğrisinin tipi olarak tanımlandığından ξ ve η eğrilerinin tiplerinin aynı olduğu elde edilir. Dolayısıyla $L(\xi) = L(\eta)$ 'dir. ■

Şimdi; \mathbb{R}^2 'de dejenerere olmayan bir eğrinin invaryant parametrizasyonlarını tanımlayalım. $J = (a, b)$ olmak üzere $\alpha(t)$ \mathbb{R}^2 'de dejenerere olmayan bir J -yol olsun. Aşağıdaki her bir tip için $s_\alpha(t)$ yay uzunluğu fonksiyonunu tanımlayalım. $l \leq +\infty$ olmak üzere;

$$L(\alpha) = (0, l) \text{ durumlarında; } s_\alpha(t) = l_\alpha(a, t),$$

$$L(\alpha) = (-\infty, 0) \text{ durumunda; } s_\alpha(t) = -l_\alpha(t, b),$$

$L(\alpha) = (-\infty, +\infty)$ durumunda; \mathbb{R} 'nin her $J = (a, b)$ açık aralığında sabit bir a_J noktası belirlenerek ($J = (-\infty, +\infty)$ ise $a_J = 0$ alınır.) $s_\alpha(t) = l_\alpha(a_J, t)$ alalım.

$\forall t \in J$ için $s'_\alpha(t) > 0$ olduğundan $s_\alpha(t)$ 'nin ters fonksiyonu vardır. Bunu da $t_\alpha(s)$ ile gösterelim. $t_\alpha(s)$ 'nin tanım kümesi $L(\alpha)$ 'dir ve $\forall s \in L(\alpha)$ için $t'_\alpha(s) > 0$ 'dır.

Önerme 2.5.13. $J_1 = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere α , \mathbb{R}^2 'de dejenerere olmayan J_1 -yol ve $J_2 = (c, d) \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Bu takdirde;

i) Bir $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}$ için $s_{F\alpha}(t) = s_\alpha(t)$, $\forall t \in J_1$ ve $\forall s \in L(\alpha)$ için $t_{F\alpha}(s) = t_\alpha(s)$.

ii) $\varphi: J_2 = (c, d) \rightarrow J_1 = (a, b)$ ($r \rightarrow \varphi(r) = t$) $C^{(2)}$ -difeomorfizm olmak üzere; $s_{\alpha(\varphi)}(r) = s_\alpha(\varphi(r)) + s_0$ ve $\forall s \in L(\alpha)$ için $\varphi(t_{\alpha(\varphi)}(s + s_0)) = t_\alpha(s)$ eşitlikleri sağlanır öyle ki $\forall r \in J_2$ için $\varphi'(r) > 0$ 'dır. Burada $L(\alpha) \neq (-\infty, +\infty)$ için $s_0 = 0$ ve $L(\alpha) = (-\infty, +\infty)$ için $s_0 = l_\alpha(\varphi(a_{J_2}), a_{J_1})$ 'dir.

İspat: i) $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}$ olsun. Bu takdirde; $s_{F\alpha}(t) = \lim_{p \rightarrow a} \int_p^t \frac{[(F\alpha(u))' (F\alpha(u))'']}{(Re(F\alpha(u)))^2} du =$
 $\lim_{p \rightarrow a} \int_p^t \frac{[\alpha'(u) \alpha''(u)]}{(Re\alpha'(u))^2} du = l_\alpha(a, t) = s_\alpha(t)$ elde edilir. Buradan; $\forall s \in L(\alpha)$ için $t_{F\alpha}(s) =$
 $t_\alpha(s)$ 'dir.

ii) α, J_1 -yol; β, J_2 -yol olmak üzere; $L(\alpha) = (-\infty, +\infty)$ olsun. $t = \varphi(r)$ için $\alpha(\varphi(r)) =$
 $\beta(r)$ olsun. O halde; 1. ve 2. dereceden türevler;

$$\beta'(r) = (\alpha(\varphi(r)))' = \frac{d}{dr} \alpha(\varphi(r)) = \varphi'(r) \alpha'(\varphi(r))$$

ve

$$\begin{aligned} \beta''(r) &= \frac{d}{dr} (\beta'(r)) = \frac{d}{dr} (\varphi'(r) \alpha'(\varphi(r))) \\ &= \varphi''(r) \alpha'(\varphi(r)) + \varphi'(r) \alpha''(\varphi(r)) \varphi'(r) \\ &= \varphi''(r) \alpha'(\varphi(r)) + (\varphi'(r))^2 \alpha''(\varphi(r)) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. O halde;

$$\begin{aligned} [\beta'(r) \beta''(r)] &= [\varphi'(r) \alpha'(\varphi(r)) \varphi''(r) \alpha'(\varphi(r)) + (\varphi'(r))^2 \alpha''(\varphi(r))] \\ &= [\varphi'(r) \alpha'(\varphi(r)) \varphi''(r) \alpha'(\varphi(r))] + \\ &\quad [\varphi'(r) \alpha'(\varphi(r)) (\varphi'(r))^2 \alpha''(\varphi(r))] \\ &= \varphi'(r) \varphi''(r) [\alpha'(\varphi(r)) \alpha'(\varphi(r))] + (\varphi'(r))^3 [\alpha'(\varphi(r)) \alpha''(\varphi(r))] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\forall r \in J$ için $[\alpha'(\varphi(r)) \alpha'(\varphi(r))] = 0$ olup

$$[\beta'(r) \beta''(r)] = (\varphi'(r))^3 [\alpha'(\varphi(r)) \alpha''(\varphi(r))] \text{ elde edilir.}$$

Bir $a_{J_2} \in J_2$ için

$$\begin{aligned} s_{\alpha(\varphi)}(r) = s_\beta(r) &= \int_{a_{J_2}}^r \frac{[\beta'(u) \beta''(u)]}{(Re(\beta'(u)))^2} du \\ &= \int_{a_{J_2}}^r \frac{[\alpha'(\varphi(u)) \alpha''(\varphi(u))]}{(Re(\alpha'(\varphi(u))))^2} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{a_{J_2}}^r \frac{|\varphi'(u)|^3 [\alpha'(\varphi(u)) \alpha''(\varphi(u))]}{(\varphi'(u))^2 (\operatorname{Re}(\alpha'(\varphi(u))))^2} du \\
&= \int_{a_{J_2}}^r \frac{|\varphi'(u)|^2 [\alpha'(\varphi(u)) \alpha''(\varphi(u))]}{(\varphi'(u))^2 (\operatorname{Re}(\alpha'(\varphi(u))))^2} (\varphi'(u)) du \\
&= \int_{a_{J_2}}^r \frac{|\alpha'(\varphi(u)) \alpha''(\varphi(u))|}{(\operatorname{Re}(\alpha'(\varphi(u))))^2} (\varphi'(u)) du
\end{aligned}$$

olur. Burada $\varphi(u) = v$ dönüşümü yapılırsa; $\varphi'(u)du = dv$ kullanılarak

$$s_{\alpha(\varphi)}(r) = \int_{\varphi(a_{J_2})}^{\varphi(r)} \frac{|\alpha'(v) \alpha''(v)|}{(\operatorname{Re}(\alpha'(v)))^2} dv$$

olur. Bir $a_{J_1} \in J_1$ seçilerek bu integral

$$\begin{aligned}
s_{\alpha(\varphi)}(r) &= \int_{\varphi(a_{J_2})}^{a_{J_1}} \frac{|\alpha'(v) \alpha''(v)|}{(\operatorname{Re}(\alpha'(v)))^2} dv + \int_{a_{J_1}}^{\varphi(r)} \frac{|\alpha'(v) \alpha''(v)|}{(\operatorname{Re}(\alpha'(v)))^2} dv \\
&= l_{\alpha}(\varphi(a_{J_2}), a_{J_1}) + l_{\alpha}(a_{J_1}, \varphi(r))
\end{aligned}$$

şekline dönüşür. Böylece; $s_0 = l_{\alpha}(\varphi(a_{J_2}), a_{J_1})$ olmak üzere; $s_{\alpha(\varphi)}(r) = s_0 + s_{\alpha}(\varphi(r))$ 'dir. Ayrıca $\varphi(t_{\alpha(\varphi)}(s + s_0)) = t_{\alpha}(s)$ 'dir. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
\varphi(t_{\alpha(\varphi)}(s + s_0)) &= \varphi(t_{\beta}(s + s_0)) \\
&= \varphi(t_{\beta}(s_{\alpha(\varphi)}(r))) \\
&= \varphi(t_{\beta}(s_{\beta}(r))) \\
&= \varphi(r) \\
&= t \\
&= t_{\alpha}(s)
\end{aligned}$$

elde edilir. $L(\alpha) \neq (-\infty, +\infty)$ için $s_0 = 0$ olur. ■

Sonuç 2.5.14. ξ dejenere olmayan bir eğri ve $\alpha \in \xi$ olsun. $\alpha(t_{\alpha}(s))$ ξ 'nin bir parametrizasyonudur.

İspat: Tanım 2.5.1.'e göre; α, J_1 –yol, $\varphi: J_2 \rightarrow J_1$ $C^{(2)}$ –difeomorfizmi ve $r \rightarrow t = \varphi(r)$ olmak üzere; $\forall r \in J_2$ için $\varphi'(r) > 0$ koşulunu sağlıyorsa $\beta(r) = \alpha(\varphi(r))$ α 'nın φ ile yeniden parametrelenişi olduğundan $\frac{d}{ds}(t_\alpha(s)) = \frac{1}{\frac{ds_\alpha}{dt}} > 0$ sağlanır ve buradan $t'_\alpha(s) > 0$ olduğu görülür. O halde; $\alpha(t_\alpha(s))$, α 'nın bir parametrizasyonudur.

Tanım 2.5.15. Dejenere olmayan bir ξ eğrisinin bir $\alpha(t_\alpha(s))$ parametrizasyonu, ξ 'nin bir invaryant parametrizasyonu olarak adlandırılır.

Tanım 2.5.16. Dejenere olmayan bir ξ eğrisinin tüm invaryant parametrizasyonlarının kümesi $Ip(\xi)$ ile gösterilecektir.

Sonuç 2.5.17. $J = L(\xi)$ olmak üzere; $\forall \beta \in Ip(\xi)$ bir J –yoldur.

İspat: Açıktır. ■

Önerme 2.5.18. ξ dejenere olmayan bir eğri, $\alpha \in \xi$ ve $J = L(\xi)$ olmak üzere; α bir J –yol olsun. O halde; aşağıdaki durumlar denktir:

i) α , ξ 'nin bir invaryant parametrizasyonudur.

ii) $\forall s \in L(\xi)$ için $\frac{||\alpha'(s) \alpha''(s)||}{(Re\alpha'(s))^2} = 1$ 'dir.

iii) $\forall s \in L(\xi)$ için $s_\alpha(s) = s$ 'dir.

İspat: (i) \Rightarrow (ii) $\alpha \in Ip(\xi)$ olsun. $\beta \in \xi$ J –yolunu alalım öyle ki; $\alpha(s) = \beta(t_\beta(s))$. Önerme 2.5.13. kullanılarak; $s_\alpha(s) = s_{\beta(t_\beta(s))} = s_\beta(t_\beta(s)) + s_0 = s + s_0$ yazılır. Her iki tarafın türevi alınırsa s_0, s 'ye bağlı olmadığından $\frac{ds_\alpha(s)}{ds} = \frac{||\alpha'(s) \alpha''(s)||}{(Re\alpha'(s))^2} = 1$ elde edilir. Dolayısıyla; $\forall s \in L(\xi)$ için $\frac{||\alpha'(s) \alpha''(s)||}{(Re\alpha'(s))^2} = 1$ elde edilir.

(ii) \Rightarrow (iii) $\forall s \in L(\xi)$ için $\frac{||\alpha'(s) \alpha''(s)||}{(Re\alpha'(s))^2} = 1$ alalım. $s_\alpha(s)$ 'nin tanımını kullanılarak; $\frac{ds_\alpha(s)}{ds} = \frac{||\alpha'(s) \alpha''(s)||}{(Re\alpha'(s))^2} = 1$ elde edilir. Buradan integral alınarak; $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere; $s_\alpha(s) = s + c$

olur. $L(\xi) \neq (-\infty, +\infty)$ durumunda; $\forall s \in L(\xi)$ için $s_\alpha(s) = s + c$ ve $s_\alpha(s) \in L(\xi)$ olduğundan $c = 0$ 'dir. Böylece; $s_\alpha(s) = s$ olur. $L(\xi) = (-\infty, +\infty)$ durumunda; $J = (-\infty, +\infty)$ için $a_j = 0$ alınarak $s_\alpha(s) = l_\alpha(a_j, s) = l_\alpha(0, s) = s + c$ eşitliğinden; $0 = l_\alpha(0, 0) = c$ olur ve $s_\alpha(s) = s$ elde edilir.

(iii) \Rightarrow (i) $\forall s \in L(\xi)$ için $s_\alpha(s) = s$ olsun. O halde; $t_\alpha(s) = s$ 'dir. Bu nedenle; $\alpha(s) = \alpha(t_\alpha(s)) \in I_p(\xi)$ olur. ■

Örnek 2.5.19. $T = (2, 1 + e)$ olsun. \mathbb{R}^2 'de bir T -yol $\alpha(t) = (e^t + 1, t - 1)$ alalım. $\alpha(t) \in \xi$ olacak şekilde bir ξ eğrisi alalım. $p, q \in T$ ve $p < q$ olsun. $l_\alpha(p, q) =$

$$\int_p^q \frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]}{(Re\alpha'(t))^2} dt = \int_p^q \frac{e^t}{e^{2t}} dt = \int_p^q e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_p^q = -e^{-q} + e^{-p} \text{ elde edilir. O halde;}$$

$$l_\alpha(2, q) = \lim_{p \rightarrow 2} l_\alpha(p, q) = \lim_{p \rightarrow 2} (-e^{-q} - e^{-p}) = -e^{-q} + e^{-2} \quad \text{ve} \quad l_\alpha(p, 1 + e) =$$

$$\lim_{q \rightarrow 1+e} l_\alpha(p, q) = \lim_{q \rightarrow 1+e} (-e^{-q} - e^{-p}) = -e^{-1-e} + e^{-p} \text{ dir.}$$

$$l = l_\alpha(2, q) + l_\alpha(p, 1 + e) - l_\alpha(p, q) = -e^{-q} + e^{-2} - e^{-1-e} + e^{-p} + e^{-q} - e^{-p} =$$

$e^{-2} - e^{-1-e} < \infty$ olur. Bu durumda eğri; $(0, l)$ -tipindedir. $\forall t \in T$ için $[\alpha'(t) \ \alpha''(t)] =$

$$\begin{vmatrix} e^t & e^t \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -e^t \neq 0 \text{ olduğundan } \alpha \text{ dejenere olmayan bir } T \text{ -yoldur. } \xi \text{ eğrisi dejenere}$$

olmayan bir T -yola sahip olduğundan Tanım 2.5.6. gereği dejenere olmayan bir eğridir.

$\alpha(t)$ T -yolunun, dejenere olmayan ξ eğrisinin invaryant parametrizasyonu olup

olmadığına bakalım. $\frac{[\alpha'(t) \ \alpha''(t)]}{(Re\alpha'(t))^2} = e^{-t} \neq 1$ olduğundan $\alpha(t)$ T -yolunu, dejenere

olmayan ξ eğrisinin bir invaryant parametrizasyonu olacak şekilde yeniden

parametrelendirelim. $L(\alpha) = (0, l)$ olduğundan $s_\alpha(t) = l_\alpha(2, t)$ 'dir. Dolayısıyla; $s_\alpha(t) =$

$$l_\alpha(2, t) = \lim_{p \rightarrow 2} l_\alpha(p, t) = \lim_{p \rightarrow 2} (-e^{-t} - e^{-p}) = -e^{-t} + e^{-2} \text{ olur. Buradan; } s_\alpha(t) = s =$$

$$-e^{-t} + e^{-2} \text{ olduğundan düzenleme yapılırsa } t = \ln(e^{-2} - s)^{-1} \text{ elde edilir. } \beta(s) =$$

$$\alpha(t(s)), J = (0, e^{-2} - e^{-1-e}) \text{ -yolu da } \alpha \text{'nın } \varphi \text{ ile yeniden parametrelenişini olarak ifade}$$

edilir. Gerçekten;

$$\begin{aligned} \beta(s) = \alpha(t(s)) &= \left(e^{\ln(e^{-2}-s)^{-1}} + 1, \ln(e^{-2} - s)^{-1} - 1 \right) \\ &= ((e^{-2} - s)^{-1} + 1, -\ln(e^{-2} - s)^{-1} - 1) \end{aligned}$$

olup buradan

$\beta'(s) = ((e^{-2} - s)^{-2}, (e^{-2} - s)^{-1})$ ve $\beta''(s) = (2(e^{-2} - s)^{-3}, (e^{-2} - s)^{-2})$ elde edilir.

$$[\beta'(s) \ \beta''(s)] = \begin{vmatrix} (e^{-2} - s)^{-2} & 2(e^{-2} - s)^{-3} \\ (e^{-2} - s)^{-1} & (e^{-2} - s)^{-2} \end{vmatrix} = -(e^{-2} - s)^{-4} \quad \text{ve} \quad \text{Re}\beta'(s) = (e^{-2} - s)^{-2}$$

olur. Buradan, $\frac{||\beta'(s) \ \beta''(s)||}{(\text{Re}\beta'(s))^2} = \frac{(e^{-2}-s)^{-4}}{(e^{-2}-s)^{-4}} = 1$ elde edilir.

$J \subseteq \mathbb{R}; l < +\infty, (0, +\infty), (-\infty, 0)$ veya $(-\infty, +\infty)$ kümelerinden biri olsun.

Teorem 2.5.20. ξ, \mathbb{R}^2 'de dejenere olmayan bir eğri ve $\alpha(s) \in Ip(\xi)$ olsun. Bu durumda; $\alpha(s)$ 'nin açık ifadesi

$$\alpha(s) = C_1 \int e^{\int (a(s)+\varepsilon) ds} ds + C_2 \quad (40)$$

veya

$$\alpha(s) = C_1 \int e^{\int (a(s)-\varepsilon) ds} ds + C_2 \quad (41)$$

formlarından biridir. Buradaki; $C_1 \in D^+, C_2 \in D$ sabitler ve $a(s)$ J üzerinde reel değerli sürekli bir fonksiyondur.

Tersine; (40) ve (41) formundaki her $\alpha(s)$ J -yolu, \mathbb{R}^2 'de dejenere olmayan bir eğrinin bir invaryant parametrizasyonudur.

İspat: ξ, \mathbb{R}^2 'de dejenere olmayan bir eğri ve $\alpha(s) \in Ip(\xi)$ olsun. Bu durumda; Önerme 2.5.18. (ii)'den $\forall s \in L(\xi)$ için $\frac{||\alpha'(s) \ \alpha''(s)||}{(\text{Re}\alpha'(s))^2} = 1$ 'dir. $b(s) = \frac{[\alpha'(s) \ \alpha''(s)]}{(\text{Re}\alpha'(s))^2}$ alalım. Burada iki tane durum oluşur:

i) $\forall s \in L(\xi)$ için $[\alpha'(s) \ \alpha''(s)] > 0$ olması durumunda $b(s) = 1$ 'dir.

ii) $\forall s \in L(\xi)$ için $[\alpha'(s) \ \alpha''(s)] < 0$ olması durumunda $b(s) = -1$ 'dir.

$$a(s) = \frac{\text{Re}\alpha''(s)}{\text{Re}\alpha'(s)} \text{ alalım.}$$

(i) durumunda; $\frac{Re\alpha''(s)}{Re\alpha'(s)} = a(s)$, $\frac{[\alpha'(s) \alpha''(s)]}{(Re\alpha'(s))^2} = 1$ 'dir. O halde; Teorem 2.4.1. kullanılarak, $\forall s \in L(\xi)$ için $[\alpha'(s) \alpha''(s)] > 0$ olması durumunda (29)'da $b(s) = 1$ kullanılarak $\alpha(s)$ 'nin (40) formunda olduğu görülür.

(ii) durumunda; $\frac{Re\alpha''(s)}{Re\alpha'(s)} = a(s)$, $\frac{[\alpha'(s) \alpha''(s)]}{(Re\alpha'(s))^2} = -1$ 'dir O halde; Teorem 2.4.1. kullanılarak, $\forall s \in L(\xi)$ için $[\alpha'(s) \alpha''(s)] < 0$ olması durumunda (29)'da $b(s) = -1$ kullanılarak $\alpha(s)$ 'nin (41) formunda olduğu görülür.

Tersine; $\alpha(s)$ 'nin (40) veya (41) formlarından biri olduğunu varsayalım. O halde; $\forall s \in L(\xi)$ için $|b(s)| = 1$ olmak üzere; $\alpha(s)$, (34) veya (35) formlarından biridir. O halde; Teorem 2.4.1.'den (28) elde edilir. Bu eşitlikler ve $\forall s \in L(\xi)$ olmak üzere $|b(s)| = 1$ ile $\frac{[\alpha'(s) \alpha''(s)]}{(Re\alpha'(s))^2} = 1$ sağlanır. Buradan; Önerme 2.5.18. (ii)'den $\alpha(s)$ J -yolunun bir invaryant parametrizasyon olduğu elde edilir. ■

Önerme 2.5.21. ξ , \mathbb{R}^2 'de dejenere olmayan bir eğri ve $L(\xi) \neq (-\infty, +\infty)$ olsun. Bu durumda; ξ 'nin tek bir invaryant parametrizasyonu vardır.

İspat: $\alpha, \beta \in \xi$ ve α J_1 -yol, β J_2 -yol olsun. Bu durumda; bir $\varphi: J_2 \rightarrow J_1$ $C^{(2)}$ -difeomorfizmi vardır ve $\varphi'(r) > 0$ olmak üzere; $\beta(r) = \alpha(\varphi(r))$ sağlanır. Kabul edelim ki; α ve β yolları ξ 'nin invaryant parametrizasyonları olsun. Önerme 2.5.13.'den $L(\xi) \neq (-\infty, +\infty)$ durumunda;

$$\beta(t_\beta(s)) = (\alpha\varphi)(t_\beta(s)) = \alpha(\varphi(t_\beta(s))) = \alpha(\varphi(t_{\alpha(\varphi)}(s))) = \alpha(t_\alpha(s))$$

olup invaryant parametrizasyonun tekliği elde edilir. ■

Önerme 2.5.22. ξ , \mathbb{R}^2 'de dejenere olmayan bir eğri ve $L(\xi) = (-\infty, +\infty)$ ve $\alpha \in Ip(\xi)$ olsun. O halde; $Ip(\xi) = \{\beta: \beta(s) = \alpha(s + c), c \in (-\infty, +\infty)\}$ sonsuz sayılabilir bir kümedir.

İspat: $\alpha, \beta \in Ip(\xi)$ olmak üzere; ξ 'nin h , J_1 -yol ve k , J_2 -yol parametrizasyonları için; $\alpha(s) = h(t_h(s))$ ve $\beta(s) = k(t_k(s))$ olsun. $h, k \in \xi$ olduğundan; bir $\varphi: J_2 \rightarrow J_1$

$C^{(2)}$ –difeomorfizmi vardır ve $\varphi'(r) > 0$ olmak üzere; $k(r) = h(\varphi(r))$ sağlanır. Önerme 2.5.13. kullanılarak;

$$\beta(s) = k(t_k(s)) = (h\varphi)(t_k(s)) = h(\varphi(t_k(s))) = h(\varphi(t_{h(\varphi)}(s))) = h(t_{h(s - s_0)}) = \alpha(s - s_0)$$

elde edilir. $\alpha \in Ip(\xi)$ ve $c \in (-\infty, +\infty)$ olsun. $\varpi(s) = s + c$ olmak üzere; $\alpha(\varpi) \in Ip(\xi)$ olduğunu gösterelim. Önerme 2.5.18. kullanılarak; $\frac{[\alpha'(s) \alpha''(s)]}{(Re\alpha'(s))^2} = 1$ ve $s_\alpha(s) = s$ 'dir. $\gamma(s) = \alpha(\varpi(s))$ olsun. $\varpi: (-\infty, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$, $C^{(2)}$ –difeomorfizm olduğundan $\gamma = \alpha(\varpi) \in \xi$ olur. Önerme 2.5.13. ve $s_\alpha(s) = s$ kullanılarak, $s_1 = \int_{\varpi(0)}^0 \frac{[\alpha'(s) \alpha''(s)]}{(Re\alpha'(s))^2} ds$ olmak üzere; $s_\gamma(s) = s_{\alpha(\varpi)}(s) = s_\alpha(\varpi(s)) + s_1 = (s + c) + s_1$ bulunur. Dolayısıyla; $\frac{[\alpha'(s) \alpha''(s)]}{(Re\alpha'(s))^2} = 1$ olduğundan $s_1 = \int_{\varpi(0)}^0 \frac{[\alpha'(s) \alpha''(s)]}{(Re\alpha'(s))^2} ds = \int_{\varpi(0)}^0 ds = -\varpi(0) = -c$ ve $s_\gamma(s) = (s + c) - c = s$ olur. Böylece; Önerme 2.5.18. kullanılarak $\gamma \in Ip(\xi)$ elde edilir. ■

Örnek 2.5.23. $J = (0, \infty)$ olsun. \mathbb{R}^2 'de bir J –yol $\alpha(s) = (e^s, e^s s + 3e^s + 2)$ alalım. $\alpha(s) \in \xi$ olacak şekilde bir ξ eğrisi alalım. $p, q \in J$ ve $p < q$ olsun. $l_\alpha(p, q) = \int_p^q \frac{[\alpha'(s) \alpha''(s)]}{(Re\alpha'(s))^2} ds = \int_p^q \frac{e^{2s}}{e^{2s}} ds = \int_p^q 1 ds = q - p$ elde edilir. O halde; $l_\alpha(0, q) = \lim_{p \rightarrow 0} l_\alpha(p, q) = \lim_{p \rightarrow 0} (q - p) = q$ ve $l_\alpha(p, \infty) = \lim_{q \rightarrow \infty} l_\alpha(p, q) = \lim_{q \rightarrow \infty} (q - p) = +\infty$ elde edilir. $l = l_\alpha(0, q) + l_\alpha(p, \infty) - l_\alpha(p, q) = q + \infty - q + p = \infty$ olur. Bu durumda eğri; $(0, \infty)$ –tipindedir. $\forall s \in J$ için $[\alpha'(s) \alpha''(s)] = e^{2s} \neq 0$ olduğundan α dejenere olmayan bir J –yoldur. ξ eğrisi dejenere olmayan bir J –yola sahip olduğundan Tanım 2.5.6. gereği dejenere olmayan bir eğridir. $\frac{[\alpha'(s) \alpha''(s)]}{(Re\alpha'(s))^2} = 1$ olduğundan Önerme 2.5.18.'den $\alpha(t)$ ξ 'nin bir invaryant parametrizasyonudur. $L(\xi) \neq (-\infty, +\infty)$ olduğundan Önerme 2.5.20. gereği ξ eğrisi $\alpha(s)$ olarak tek bir invaryant parametrizasyona sahiptir.

$$G = \mathbb{TD}^+, \mathbb{TD}, \mathbb{TD}_1^+ \text{ ya da } \mathbb{TD}_1 \text{ olsun.}$$

Teorem 2.5.24. ξ ve η , \mathbb{R}^2 'de dejenere olmayan eğriler ve $\alpha \in Ip(\xi)$, $\beta \in Ip(\eta)$ olsun. O halde;

i) $L(\xi) = L(\eta) \neq (-\infty, +\infty)$ durumunda; $\xi \stackrel{G}{\sim} \eta \Leftrightarrow \alpha \stackrel{G}{\sim} \beta$

ii) $L(\xi) = L(\eta) = (-\infty, +\infty)$ durumunda; $\xi \stackrel{G}{\sim} \eta \Leftrightarrow$ bazı $c \in (-\infty, +\infty)$ için $\varpi_c(s) = s + c$ olmak üzere; $\alpha \stackrel{G}{\sim} \beta(\varpi_c)$ 'dir.

İspat: $G = \mathbb{T}\mathbb{D}$ için ispatı yapalım.

i) $G = \mathbb{T}\mathbb{D}$ olmak üzere; $\xi \stackrel{G}{\sim} \eta$ ve $h \in \xi$ olsun. O halde; $F \in G$ vardır öyle ki $\eta = F\xi$ 'dir. Böylece; $Fh \in \eta$ olur. Önerme 2.5.13. (i) ve Önerme 2.5.21. kullanılarak; $\alpha(s) = h(t_h(s))$, $\beta(s) = (Fh)(t_{Fh}(s))$ ve $F\alpha(s) = F(h(t_h(s))) = (Fh)(t_h(s)) = (Fh)(t_{Fh}(s)) = \beta(s)$ yazılır. Böylece; $\alpha \stackrel{G}{\sim} \beta$ görülür.

Tersine; $\alpha \stackrel{G}{\sim} \beta$ olsun. Bu durumda bir $F \in G$ için $F\alpha = \beta$ sağlanır. $\alpha \in Ip(\xi)$ olduğundan α , ξ eğrisinin invaryant parametrizasyonu, aynı şekilde $\beta \in Ip(\eta)$ olduğundan β da, η eğrisinin invaryant parametrizasyonudur. Bir $h \in \xi$ parametrizasyonu için Tanım 2.5.1.'den $\alpha(\varphi(r)) = h$, $F\alpha(\varphi(r)) = Fh$ olup buradan $(F\alpha)(\varphi(r)) = Fh$ elde edilir. $F\alpha = \beta$ kullanılarak; $\beta(\varphi(r)) = Fh$ elde edilir. Böylece $Fh \in \eta$ olur. Dolayısıyla; $\xi \stackrel{G}{\sim} \eta$ 'dir.

ii) $\xi \stackrel{G}{\sim} \eta$ olsun. $h \in \xi$ ve $k \in \eta$ parametrizasyonları ve $F \in G$ için $k(t) = Fh(t)$ olsun. Buna göre $k(t_k(s)) = k(t_{Fh}(s)) = k(t_h(s)) = (Fh)(t_h(s))$ sağlanır. Önerme 2.5.22. kullanılarak; $s_1, s_2 \in (-\infty, +\infty)$ olmak üzere; $\alpha(s) = k(t_k(s + s_1))$, $\beta(s) = h((t_h(s + s_2)))$ yazılır. Dolayısıyla; $\alpha(s - s_1) = F\beta(s - s_2)$ ve $\alpha(s) = F\beta(s + s_1 - s_2)$ olur. Buradan; $\varpi_c(s) = s + c$ ve $c = s_1 - s_2$ olmak üzere; $\alpha \stackrel{G}{\sim} \beta(\varpi_c)$ 'dir.

Tersine; $\varpi_c(s) = s + c$ ve $c \in (-\infty, +\infty)$ olmak üzere; $\alpha \stackrel{G}{\sim} \beta(\varpi_c)$ olsun. O halde; $F \in G$ vardır öyle ki; $\beta(s + c) = F\alpha(s)$ olur. Önerme 2.5.22. kullanılarak; $\beta(\varpi_c) \in \eta$ elde edilir. Böylece; $\xi \stackrel{G}{\sim} \eta$ olur. ■

Sonuç 2.5.25. Teorem 2.5.24.; $\mathbb{T}\mathbb{D}^+, \mathbb{T}\mathbb{D}$ dual hareket grupları için dejenere olmayan eğrilerin G -denklik problemini, sadece $L(\xi) = L(\eta) \neq (-\infty, +\infty)$ durumunda, J -yolların denklik problemine indirgemıştır.

Tanım 2.5.26. $J = (-\infty, +\infty)$ olsun. Eğer; burada $\forall t \in J$ için $\beta(t) = g\alpha(t + d)$ olacak şekilde $g \in G$ ve $d \in (-\infty, +\infty)$ varsa $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ J $-yollarına$ $[G, (-\infty, +\infty)]$ $-denk$ denir.

Sonuç 2.5.27. ξ ve η , $L(\xi) = L(\eta) = (-\infty, +\infty)$ olacak şekilde dejenere olmayan eğriler olsun. Bu durumda; Teorem 2.5.24.; bu eğrilerin G $-denklik$ problemini, J $-yolların$ $[G, (-\infty, +\infty)]$ $-denklik$ problemine indirgenmiştir.

Sonuç 2.5.28. Teorem 2.5.24. ile eğrilerin G $-denklik$ ve teklik problemleri, sadece $L(\xi) = L(\eta) \neq (-\infty, +\infty)$ durumunda, eğrilerin invaryant parametrizasyonlarının G $-denklik$ ve teklik problemlerine indirgenmiştir.

2.6. Dual Düzlemsel Eğrilerin Tam İnvaryantlar Sistemi ve Teklik Teoremleri

Bu bölümde $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$ ve $\mathbb{T}\mathbb{D}$ dual hareket gruplarına göre dejenere olmayan eğrilerin tam invaryantlar sistemi belirlenmektedir ve teklik teoremleri verilmektedir.

Teorem 2.6.1. ξ ve η , \mathbb{R}^2 'de dejenere olmayan eğriler, $L(\xi) \neq (-\infty, +\infty)$, $L(\eta) \neq (-\infty, +\infty)$ ve $\alpha \in Ip(\xi)$, $\beta \in Ip(\eta)$ olsun.

(1) $\xi \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}^+}{\sim} \eta$ olduğunu varsayalım. O halde; $\forall s \in L(\xi)$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\left. \begin{aligned} L(\xi) &= L(\eta) \\ \frac{Re\alpha''(s)}{Re\alpha'(s)} &= \frac{Re\beta''(s)}{Re\beta'(s)} \\ sgn[\alpha'(s) \ \alpha''(s)] &= sgn[\beta'(s) \ \beta''(s)] \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

(2) Tersine; (42) eşitlikleri sağlansın. Burada; $\eta = F\xi$ olacak şekilde tek bir $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}^+$ vardır. Bu durumda; $\psi \in \mathbb{D}^+$, $C \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere; $\eta = F\xi = \psi\xi + C$ 'dir. Burada ψ , (8) formunda ve $C = \beta(t) - \psi\alpha(t)$ 'dir. ψ ve C , $s \in L(\xi)$ 'ye bağlı değildir.

İspat: (1) $\xi \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}^+}{\sim} \eta$ alalım. Önerme 2.5.12.'den $L(\xi) = L(\eta)$ olduğu açıktır. Bu eşitlik, $\xi \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}^+}{\sim} \eta$ ve Teorem 2.5.24. (i)'den $\alpha \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}^+}{\sim} \beta$ elde edilir. Teorem 2.3.1. kullanılarak $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ 'nin

(7) eşitliklerini sağladığı görülür. $\frac{Re\alpha''(s)}{Re\alpha'(s)} = \frac{Re\beta''(s)}{Re\beta'(s)}$, $\frac{[\alpha'(s) \alpha''(s)]}{(Re\alpha'(s))^2} = \frac{[\beta'(s) \beta''(s)]}{(Re\beta'(s))^2}$. $\forall s \in L(\xi)$ için $\alpha(s)$ dejenere olmayan bir J -yol olduğundan $[\alpha'(s) \alpha''(s)] \neq 0$ 'dır. Yani; $\forall s \in L(\xi)$ için $[\alpha'(s) \alpha''(s)] > 0$ veya $[\alpha'(s) \alpha''(s)] < 0$ 'dır. Aynı şekilde $\forall s \in L(\xi)$ için $\beta(s)$ dejenere olmayan bir J -yol olduğundan $[\beta'(s) \beta''(s)] \neq 0$ 'dır. Yani; $\forall s \in L(\xi)$ için $[\beta'(s) \beta''(s)] > 0$ veya $[\beta'(s) \beta''(s)] < 0$ 'dır. $\forall s \in L(\xi)$ için $(Re\alpha'(s))^2 > 0$ ve $(Re\beta'(s))^2 > 0$ kullanılarak ve $\frac{[\alpha'(s) \alpha''(s)]}{(Re\alpha'(s))^2} = \frac{[\beta'(s) \beta''(s)]}{(Re\beta'(s))^2}$ eşitliğinden $sgn[\alpha'(s) \alpha''(s)] = sgn[\beta'(s) \beta''(s)]$ sağlanır. Böylece; (42) eşitlikleri elde edilmiş olunur.

(2) Tersine; (42) eşitlikleri sağlansın. $\alpha(s)$, $\beta(s)$ invaryant parametrizasyonlar olduğundan Önerme 2.5.18. (ii) kullanılarak $\forall s \in L(\xi)$ için $\frac{||[\alpha'(s) \alpha''(s)]||}{(Re\alpha'(s))^2} = 1$ ve $\frac{||[\beta'(s) \beta''(s)]||}{(Re\beta'(s))^2} = 1$ elde edilir. Bu eşitlikler ile $\forall s \in L(\xi)$ için $\frac{||[\alpha'(s) \alpha''(s)]||}{(Re\alpha'(s))^2} = \frac{||[\beta'(s) \beta''(s)]||}{(Re\beta'(s))^2}$ eşitliğinin sağlandığı görülür. $\forall s \in L(\xi)$ için $\frac{||[\alpha'(s) \alpha''(s)]||}{(Re\alpha'(s))^2} = \frac{||[\beta'(s) \beta''(s)]||}{(Re\beta'(s))^2}$ ve $sgn[\alpha'(s) \alpha''(s)] = sgn[\beta'(s) \beta''(s)]$ eşitliğinden $\frac{[\alpha'(s) \alpha''(s)]}{(Re\alpha'(s))^2} = \frac{[\beta'(s) \beta''(s)]}{(Re\beta'(s))^2}$ elde edilir. Bu eşitlik ve (42) eşitliklerinden, (7) eşitlikleri sağlanır. Teorem 2.3.1. kullanılarak, $\alpha \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}^+}{\sim} \beta$ sağlanır. Burada $\beta(s) = F\alpha(s)$ olacak şekilde tek bir $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}^+$ vardır. Bu durumda; $\psi \in \mathbb{D}^+$, $C \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere; $\beta(s) = F\alpha(s) = \psi\alpha(s) + C$ 'dir. Böylece; ψ , (8) formunda ve $C = \beta(s) - \psi\alpha(s)$ formundadır. Burada ψ ve C , $s \in L(\xi)$ 'ye bağlı değildir. Buradan; $\alpha \in Ip(\xi)$, $\beta \in Ip(\eta)$ Teorem 2.5.24. (i) ve $\forall s \in L(\xi)$ için $\beta(s) = F\alpha(s) = \psi\alpha(s) + C$ kullanılarak, $\eta = F\xi$ elde edilir. ■

Uyarı 2.6.2. Teorem 2.6.1.'den, $\left\{L(\xi), \frac{Re\alpha''(s)}{Re\alpha'(s)}, sgn[\alpha'(s) \alpha''(s)]\right\}$ sistemi, $L(\xi) \neq (-\infty, +\infty)$ durumunda, ξ 'nin invaryant parametrizasyonu $\alpha(s)$ olmak üzere ξ 'nin tam invaryantlar sistemidir.

Fakat; $L(\xi) = (-\infty, +\infty)$ durumunda ξ 'nin tam invaryantlar sistemi farklıdır.

Teorem 2.6.3. ξ ve η , \mathbb{R}^2 'de dejenere olmayan eğriler olsunlar. $L(\xi) = L(\eta) = (-\infty, +\infty)$ ve $\alpha \in Ip(\xi)$, $\beta \in Ip(\eta)$ olsun.

(1) $\xi \overset{\mathbb{T}\mathbb{D}^+}{\sim} \eta$ olduğunu varsayalım. O halde; burada $s_1 \in (-\infty, +\infty)$ vardır öyle ki $\forall s \in (-\infty, +\infty)$ için aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} \frac{Re\alpha''(s+s_1)}{Re\alpha'(s+s_1)} &= \frac{Re\beta''(s)}{Re\beta'(s)} \\ sgn[\alpha'(s+s_1) \alpha''(s+s_1)] &= sgn[\beta'(s) \beta''(s)] \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

dir.

(2) Tersine; bazı $s_1 \in (-\infty, +\infty)$ ve $\forall s \in (-\infty, +\infty)$ için (43) eşitliklerinin sağlandığını kabul edelim. O halde; burada $\eta = F\xi = \psi_1\xi + C$ olacak şekilde tek bir $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}^+$ vardır. Bu durumda; $\psi_1 \in \mathbb{D}^+$, $C \in \mathbb{R}^2$ aşağıdaki gibidir;

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} \frac{Re\beta'(s)}{Re\alpha'(s+s_1)} & 0 \\ \frac{[\alpha'(s+s_1) \beta'(s)]}{(Re\alpha'(s+s_1))^2} & \frac{Re\beta'(s)}{Re\alpha'(s+s_1)} \end{pmatrix} \quad (44)$$

formunda ve $C = \beta(s) - \psi_1\alpha(s+s_1)$ 'dir. Ayrıca ψ_1 ve C , $s \in L(\xi) = (-\infty, +\infty)$ 'ye bağlı değildir.

İspat: (1) $\xi \overset{\mathbb{T}\mathbb{D}^+}{\sim} \eta$ olsun. $\xi \overset{\mathbb{T}\mathbb{D}^+}{\sim} \eta$ ve Teorem 2.5.24. (ii)'den $s_1 \in (-\infty, +\infty)$ olmak üzere; $\alpha(s+s_1) \overset{\mathbb{T}\mathbb{D}^+}{\sim} \beta(s)$ elde edilir. Teorem 2.3.1. ve $\alpha(s+s_1) \overset{\mathbb{T}\mathbb{D}^+}{\sim} \beta(s)$ 'den $\alpha(s+s_1)$ ve $\beta(s)$ 'nin (7) eşitliklerini sağladığı görülür öyle ki; $\frac{Re\alpha''(s+s_1)}{Re\alpha'(s+s_1)} = \frac{Re\beta''(s)}{Re\beta'(s)}$, $\frac{[\alpha'(s+s_1) \alpha''(s+s_1)]}{(Re\alpha'(s+s_1))^2} = \frac{[\beta'(s) \beta''(s)]}{(Re\beta'(s))^2}$, dir. $\forall s, s_1 \in L(\xi)$ için $\alpha(s)$ dejenere olmayan bir J -yol olduğundan $[\alpha'(s+s_1) \alpha''(s+s_1)] \neq 0$ 'dır. Yani; $\forall s, s_1 \in L(\xi)$ için $[\alpha'(s+s_1) \alpha''(s+s_1)] > 0$ veya $[\alpha'(s+s_1) \alpha''(s+s_1)] < 0$ 'dır. Aynı şekilde $\forall s \in L(\xi)$ için $\beta(s)$ dejenere olmayan bir J -yol olduğundan $[\beta'(s) \beta''(s)] \neq 0$ 'dır. Yani; $\forall s \in L(\xi)$ için $[\beta'(s) \beta''(s)] > 0$ veya $[\beta'(s) \beta''(s)] < 0$ 'dır. $\forall s, s_1 \in L(\xi)$ için $(Re\alpha'(s+s_1))^2 > 0$ ve $\forall s \in L(\xi)$ için $(Re\beta'(s))^2 > 0$ kullanılarak ve $\frac{[\alpha'(s+s_1) \alpha''(s+s_1)]}{(Re\alpha'(s+s_1))^2} = \frac{[\beta'(s) \beta''(s)]}{(Re\beta'(s))^2}$ eşitliğinden $sgn[\alpha'(s+s_1) \alpha''(s+s_1)] = sgn[\beta'(s) \beta''(s)]$ sağlanır. Böylece; (43) eşitlikleri elde edilmiş olunur.

(2) Tersine; bazı $s_1 \in (-\infty, +\infty)$ ve $\forall s \in (-\infty, +\infty)$ için (43) eşitliklerinin sağlandığını kabul edelim. Böylece; $\alpha(s)$, $\beta(s)$ invaryant parametrizasyonlar olduğundan Önerme 2.5.18. (ii) kullanılarak $\forall s \in L(\xi)$ için $\frac{[\alpha'(s) \alpha''(s)]}{(Re\alpha'(s))^2} = 1$ ve $\frac{[\beta'(s) \beta''(s)]}{(Re\beta'(s))^2} = 1$ elde edilir. Bu eşitlikler, $\forall s, s_1 \in L(\xi)$ için $\frac{[\alpha'(s+s_1) \alpha''(s+s_1)]}{(Re\alpha'(s+s_1))^2} = \frac{[\alpha'(s) \alpha''(s)]}{(Re\alpha'(s))^2} = \frac{[\beta'(s) \beta''(s)]}{(Re\beta'(s))^2}$ eşitliğini sağlar. Bu eşitlikler ve $sgn[\alpha'(s+s_1) \alpha''(s+s_1)] = sgn[\beta'(s) \beta''(s)]$ eşitliğinden $\forall s \in L(\xi)$ için $\frac{[\alpha'(s+s_1) \alpha''(s+s_1)]}{(Re\alpha'(s+s_1))^2} = \frac{[\beta'(s) \beta''(s)]}{(Re\beta'(s))^2}$ sağlanır. Bu eşitlik ve (43) eşitliklerinden $\frac{Re\alpha''(s+s_1)}{Re\alpha'(s+s_1)} = \frac{Re\beta''(s)}{Re\beta'(s)}$, $\frac{[\alpha'(s+s_1) \alpha''(s+s_1)]}{(Re\alpha'(s+s_1))^2} = \frac{[\beta'(s) \beta''(s)]}{(Re\beta'(s))^2}$ sağlanır. Teorem 2.3.1. kullanılarak; $\alpha(s+s_1) \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}^+}{\sim} \beta(s)$ ve burada $\forall s \in L(\xi)$ için $\psi_1 \in \mathbb{D}^+$, $C \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere; $\beta(s) = F\alpha(s+s_1) = \psi_1\alpha(s+s_1) + C$ olacak şekilde tek bir $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}^+$ vardır. Burada ψ_1 (44) formunda, $C = \beta(s) - \psi_1\alpha(s+s_1)$ formundadır. ψ_1 ve C , $s \in L(\xi)$ 'ye bağlı değildir. $\alpha \in Ip(\xi)$, $\beta \in Ip(\eta)$ kullanılarak, Teorem 2.5.24. (ii) ve $\forall s \in L(\xi)$ için $\beta(s) = F\alpha(s+s_1)$ 'den $\eta = F\xi$ elde edilir. ■

Teorem 2.6.4. ξ ve η , \mathbb{R}^2 'de dejenere olmayan eğriler, $L(\xi) \neq (-\infty, +\infty)$, $L(\eta) \neq (-\infty, +\infty)$ ve $\alpha \in Ip(\xi)$, $\beta \in Ip(\eta)$ olsunlar.

(1) $\xi \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \eta$ olduğunu varsayalım. O halde; $\forall s \in L(\xi)$ için;

$$\left. \begin{aligned} L(\xi) &= L(\eta) \\ \frac{Re\alpha''(s)}{Re\alpha'(s)} &= \frac{Re\beta''(s)}{Re\beta'(s)} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

eşitlikleri sağlanır.

(2) Tersine; (45) eşitlikleri sağlansın. O halde; $\xi \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \eta$ 'dir. Burada; $\eta = F\xi = \psi\xi + C$ olacak şekilde tek bir $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}$ vardır. Burada; $\psi \in \mathbb{D}^+$, $C \in \mathbb{R}^2$ 'dir ve aşağıdaki iki durum söz konusudur:

(2.1.) $sgn[\alpha'(s) \alpha''(s)] = sgn[\beta'(s) \beta''(s)]$ olabilir. Bu durumda; ψ , (8) formunda ve $C_1 = \beta(s) - \psi\alpha(s)$ 'dir. ψ ve C_1 , $s \in L(\xi)$ 'ye bağlı değildir.

(2.2.) $sgn[\alpha'(s) \alpha''(s)] = -sgn[\beta'(s) \beta''(s)]$ olabilir. Bu durumda; $\eta = F\xi = (\psi_2\Omega)\xi + C_2$ olup ψ_2 , (13) formunda ve $C_2 \in \mathbb{R}^2$ de $C_2 = \beta(s) - (\psi_2\Omega)\alpha(s)$ 'dir. ψ_2 ve C_2 , $s \in L(\xi)$ 'ye bağlı değildir.

İspat: (1) $\xi \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \eta$ alalım. Önerme 2.5.12.'den $L(\xi) = L(\eta)$ olduğu açıktır. Bu eşitlik, $\xi \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \eta$ ve Teorem 2.5.24. (i)'den $\alpha \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \beta$ elde edilir. Teorem 2.3.12. kullanılarak $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ 'nin (19) eşitliklerini sağladığı görülür. Böylece; (45) eşitlikleri elde edilmiş olunur.

(2) Tersine; (45) eşitlikleri sağlansın. $\alpha(s)$, $\beta(s)$ invaryant parametrizasyonlar olduğundan

Önerme 2.5.18. (ii) kullanılarak $\forall s \in L(\xi)$ için $\frac{||\alpha'(s) \alpha''(s)||}{(Re\alpha'(s))^2} = 1$ ve $\frac{||\beta'(s) \beta''(s)||}{(Re\beta'(s))^2} = 1$ elde

edilir. Bu eşitlikler ile $\forall s \in L(\xi)$ için $\frac{||\alpha'(s) \alpha''(s)||}{(Re\alpha'(s))^2} = \frac{||\beta'(s) \beta''(s)||}{(Re\beta'(s))^2}$ eşitliğinin sağlandığı

görülmür. $\forall s \in L(\xi)$ için her iki tarafın karesi alınırsa $\frac{[\alpha'(s) \alpha''(s)]^2}{(Re\alpha'(s))^4} = \frac{[\beta'(s) \beta''(s)]^2}{(Re\beta'(s))^4}$ elde edilir.

Bu eşitlik ve (45) eşitliklerinden, (19) eşitlikleri sağlanır. Teorem 2.3.12. kullanılarak, $\alpha \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \beta$ sağlanır. Burada $\beta(s) = F\alpha(s)$ olacak şekilde tek bir $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}$ vardır.

$sgn[\alpha'(s) \alpha''(s)] = sgn[\beta'(s) \beta''(s)]$ durumunda; $\psi_1 \in \mathbb{D}^+$, $C_1 \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere; $\beta(s) = F\alpha(s) = \psi_1\alpha(s) + C_1$ 'dir. Böylece; $\psi_1 = \psi$, (8) formunda ve $C_1 = \beta(s) - \psi_1\alpha(s)$ formundadır.

$sgn[\alpha'(s) \alpha''(s)] = -sgn[\beta'(s) \beta''(s)]$ durumunda; $\psi_2 \in \mathbb{D}^+$, $C_2 \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere; $\beta(s) = F\alpha(s) = (\psi_2\Omega)\alpha(s) + C_2$ 'dir. Böylece; ψ_2 , (13) formunda ve $C_2 = \beta(s) - (\psi_2\Omega)\alpha(s)$ formundadır. Burada ψ_1 , ψ_2 , C_1 ve C_2 $s \in L(\xi)$ 'ye bağlı değildir. Buradan; $\alpha \in Ip(\xi)$, $\beta \in Ip(\eta)$, Teorem 2.5.24. (i) ve $\forall s \in L(\xi)$ için $\beta(s) = F\alpha(s)$ kullanılarak, $\eta = F\xi$ elde edilir. ■

Teorem 2.6.5. ξ ve η , \mathbb{R}^2 'de dejenere olmayan eğriler, $L(\xi) = L(\eta) = (-\infty, +\infty)$ ve $\alpha \in Ip(\xi)$, $\beta \in Ip(\eta)$ olsunlar.

(1) $\xi \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \eta$ olduğunu varsayalım. O halde; burada $s_1 \in (-\infty, +\infty)$ vardır öyle ki $\forall s \in (-\infty, +\infty)$ için;

$$\frac{Re\alpha''(s+s_1)}{Re\alpha'(s+s_1)} = \frac{Re\beta''(s)}{Re\beta'(s)} \quad (46)$$

dir.

(2) Tersine; $\forall s \in (-\infty, +\infty)$ için (46) eşitliği varsa $\xi \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \eta$ 'dir. Burada $\eta = F\xi$ olacak şekilde tek bir $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}$ vardır ve aşağıdaki iki durum söz konusudur:

(2.1.) $sgn[\alpha'(s + s_1) \alpha''(s + s_1)] = sgn[\beta'(s) \beta''(s)]$ olabilir. Bu durumda; $\eta = F\xi = \psi\xi + C_1$ olup ψ , (44) formunda ve $C_1 \in \mathbb{R}^2$ de $C_1 = \beta(s) - \psi\alpha(s + s_1)$ 'dir. ψ ve C_1 , $s \in L(\xi)$ 'ye bağlı değildir.

(2.2.) $sgn[\alpha'(s + s_1) \alpha''(s + s_1)] = -sgn[\beta'(s) \beta''(s)]$ olabilir. Bu durumda; $\eta = F\xi = (\psi_2\Omega)\xi + C_2$ olup $\psi_2 \in \mathbb{D}^+$ ve $C_2 \in \mathbb{R}^2$ aşağıdaki gibidir;

$$\Psi_2 = \begin{pmatrix} \frac{Re\beta'(s)}{Re(\Omega\alpha'(s+s_1))} & 0 \\ \frac{[(\Omega\alpha'(s+s_1)) \beta'(s)]}{(Re(\Omega\alpha'(s+s_1)))^2} & \frac{Re\beta'(s)}{Re(\Omega\alpha'(s+s_1))} \end{pmatrix} \quad (47)$$

formunda ve $C_2 = \beta(s) - (\psi_2\Omega)\alpha(s + s_1)$ 'dir. ψ_2 ve C_2 , $s \in L(\xi)$ 'ye bağlı değildir.

İspat: (1) $\xi \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \eta$ olsun. $\xi \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \eta$ ve Teorem 2.5.24. (ii)'den $s_1 \in (-\infty, +\infty)$ olmak üzere; $\alpha(s + s_1) \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \beta(s)$ 'dir. Teorem 2.3.12. ve $\alpha(s + s_1) \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \beta(s)$ 'den $\alpha(s + s_1)$ ve $\beta(s)$ 'nin (19) eşitliklerini sağladığı görülür. Böylece; (46) eşitlikleri elde edilmiş olunur.

(2) Tersine; bazı $s_1 \in (-\infty, +\infty)$ ve $\forall s \in (-\infty, +\infty)$ için (46) eşitliklerinin sağlandığını kabul edelim. Böylece; $\alpha(s)$, $\beta(s)$ invaryant parametrizasyonlar olduğundan Önerme

2.5.18. (ii) kullanılarak $\forall s \in L(\xi)$ için $\frac{||\alpha'(s) \alpha''(s)||}{(Re\alpha'(s))^2} = 1$ ve $\frac{||\beta'(s) \beta''(s)||}{(Re\beta'(s))^2} = 1$ elde edilir. Bu

eşitlikler, $\forall s, s_1 \in L(\xi)$ için $\frac{||\alpha'(s+s_1) \alpha''(s+s_1)||}{(Re\alpha'(s+s_1))^2} = \frac{||\alpha'(s) \alpha''(s)||}{(Re\alpha'(s))^2} = \frac{||\beta'(s) \beta''(s)||}{(Re\beta'(s))^2}$ eşitliğini

sağlar. $\forall s \in L(\xi)$ için her iki tarafın karesi alınırsa $\frac{[\alpha'(s+s_1) \alpha''(s+s_1)]^2}{(Re\alpha'(s+s_1))^4} = \frac{[\beta'(s) \beta''(s)]^2}{(Re\beta'(s))^4}$ elde

edilir. Bu eşitlik ve (46) eşitliğinden, (19) eşitlikleri sağlanır. Teorem 2.3.12. kullanılarak, $\alpha(s + s_1) \stackrel{\mathbb{T}\mathbb{D}}{\sim} \beta(s)$ sağlanır. Burada $\beta(s) = F\alpha(s + s_1)$ olacak şekilde tek bir $F \in \mathbb{T}\mathbb{D}$ vardır.

$sgn[\alpha'(s + s_1) \alpha''(s + s_1)] = sgn[\beta'(s) \beta''(s)]$ durumunda; $\psi_1 \in \mathbb{D}^+$, $C_1 \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere; $\beta(s) = F\alpha(s + s_1) = \psi_1\alpha(s + s_1) + C_1$ 'dir. Böylece; $\psi_1 = \psi$, (44) formunda ve $C_1 = \beta(s) - \psi_1\alpha(s + s_1)$ formundadır.

$\text{sgn}[\alpha'(s + s_1) \alpha''(s + s_1)] = -\text{sgn}[\beta'(s) \beta''(s)]$ durumunda; $\psi_2 \in \mathbb{D}^+$, $C_2 \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere; $\beta(s) = F\alpha(s + s_1) = (\psi_2\Omega)\alpha(s + s_1) + C_2$ 'dir. Böylece; ψ_2 , (47) formunda ve $C_2 = \beta(s) - (\psi_2\Omega)\alpha(s + s_1)$ formundadır. Burada ψ_1 , ψ_2 , C_1 ve C_2 $s \in L(\xi)$ 'ye bağlı değildir. Buradan; $\alpha \in Ip(\xi)$, $\beta \in Ip(\eta)$, Teorem 2.5.24. (i) ve $\forall s \in L(\xi)$ için $\beta(s) = F\alpha(s + s_1)$ kullanılarak, $\eta = F\xi$ elde edilir. ■



3. İRDELEME

Bu tez çalışması ile cebir ve sayılar teorisi ana bilim dalının bir bilim dalı olan invaryant teori yöntemini, düzlemsel parametrik eğriler (T -yollar) ve eğriler üzerinde uygulayıp dual sayılardan elde edilen gruplara göre denklik problemini incelemek amaçlanmıştır. Bu amaçla yapılan inceleme sonucunda literatür taramasında görüyoruz ki invaryant teori ve dual sayılar çok uzun yıllar bir çok araştırmacı tarafından farklı alanlarda çalışılmış ve önemli bulgular ve sonuçlar elde edilmiştir. Ancak dual sayılardan elde edilen dual hareket gruplarına göre denklik problemini incelemek ve bu incelemenin invaryant teori yöntemini kullanarak yapılması ile ilgili çalışmanın olmayışı bu alana yoğunlaşmamıza sebep olmuştur. Bu araştırmalar ışığında temel aldığımız çalışmalardan biri Khadjiev'in [16] ve diğeri ise Tomar'ın [31] çalışmasıdır. Khadjiev'in [16] çalışmasında Öklid grubunda noktaların denkliği ve Tomar'ın [31] çalışmasında dual sayılar ile ilgili temel bilgiler verilmiş, dual düzlem geometrisinin temel gruplarından biri olan D_1 grubuna göre noktaların denkliği incelenmiştir. Buradan yola çıkarak ilk olarak tanımlanan dual lineer hareket gruplarına göre daha sonra dual hareket gruplarına göre invaryantlıklar incelenmiş ve parametrik eğriler üzerinde çalışılmıştır. Çalışmanın devamında invaryant teori yöntemi, Aripov ve Khadjiev'in [1] çalışmasında olduğu gibi tanımlanan dual hareket gruplarına göre bulunan invaryantlardan biri kullanılarak eğrilere evrilmiştir.

Bu çalışmalar ile invaryant teoremin dual sayılar ile ilişkisi üzerinde durulmuş daha sonra tanımlanan gruplara göre invaryantlıklar belirlenmiş, tam invaryantlar sistemi, varlık teoremleri ve teklik teoremleri verilmiş, invaryant parametrizasyon ve eğri tiplerinden bahsedilmiştir. Bu çalışmanın en önemli hedefi yapılan tüm işlemler sonucunda dual düzlemsel eğrilerin denkliğinin parametrik eğrilerin denkliğine indirgenmesini elde etmektir. Bu hedef için yapılan çalışmalar geniş kapsamda incelenmiş ve elde edilen bulgular yardımıyla bu çalışma ortaya çıkmıştır. Elde edilen teoremlerden bir kaçına, verilen tanımlara örnekler verilerek yapılan çalışmalar desteklenmiştir.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmadan elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibidir:

2.1. Bölümde; D_1 lineer hareket grubundan elde edilen \mathbb{D}_1^+ ve \mathbb{D}_1 gruplarına göre, parametrik eğriler (T –yollar) ile ilgili önermeler ve teoremler verilmiş, invaryantları belirlenmiştir.

2.2. Bölümde; $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$, $\mathbb{T}\mathbb{D}$, $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ ve $\mathbb{T}\mathbb{D}_1$ dual hareket gruplarının tanımları yapılmış ve bu gruplara göre T –yolların invaryantları bulunmuştur.

2.3. Bölümde; *Regüler T –yolların $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$ –denklik ve $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ –denklik; dejenere regüler ve dejenere olmayan T –yolların $\mathbb{T}\mathbb{D}$ –denklik ve $\mathbb{T}\mathbb{D}_1$ –denklik koşulları incelenmiş ve böylece tam invaryantlar sistemi ve teklik teoremleri gösterilmiştir.*

2.4. Bölümde; $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$, $\mathbb{T}\mathbb{D}$, $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ ve $\mathbb{T}\mathbb{D}_1$ dual hareket gruplarına göre *regüler, dejenere regüler ve dejenere olmayan T –yolların varlık teoremleri verilmiştir.*

2.5. Bölümde; $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$, $\mathbb{T}\mathbb{D}$, $\mathbb{T}\mathbb{D}_1^+$ ve $\mathbb{T}\mathbb{D}_1$ dual hareket gruplarına göre dejenere olmayan eğrilerin invaryant parametrizasyonları ve tipleri verilmiştir.

2.6. Bölümde; $\mathbb{T}\mathbb{D}^+$ ve $\mathbb{T}\mathbb{D}$ dual hareket gruplarına göre dejenere olmayan eğrilerin tam invaryantlar sistemi ve teklik teoremleri belirlenmiştir.

5. ÖNERİLER

İnvaryant teori yöntemini kullanarak dual eğriler alanında çalışmalar yapmayı planlayanlar için bu çalışmadan elde edilebilecek öneriler aşağıdaki gibidir:

1. Bu çalışmanın sonuçları kullanılarak dual düzlemsel eğri çiftlerinin ortak invaryantları ve dual eğri çiftlerinin denklikleri incelenerek dual doğrusal yüzeylere ait sonuçlara ulaşılabilir.
2. \mathbb{R}^2 'deki dual eğrilere benzer şekilde \mathbb{R}^4 ve \mathbb{R}^6 'daki dual eğriler incelenebilir.
3. Genel olarak \mathbb{R}^{2n} uzayındaki dual eğriler için benzer yöntemler geliştirilebilir.
4. Kinematikle olan ilişkiler çalışılabilir.
5. Benzer yöntem dual kuaterniyonlara genişletilebilir.

6. KAYNAKLAR

1. Aripov, R.G. ve Khadjiev D., The Complete System of Global Differential and Integral Invariants of a Curve in Euclidean Geometry, Russian Mathematics, 51,7 (2007) 1-14.
2. Carmo, M. P., Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
3. Clifford, W.K., Preliminary Sketch of Biquaternions, Proc. Lond. Math. Soc. 4,64 (1873) 381–395.
4. Çevik, A.S., Cebire Giriş, Detay Yayıncılık, Ankara, 2008.
5. Daher, M., Dual Numbers and Invariant Theory of the Euclidean Group with Applications to Robotics, Doctoral Thesis, Victoria University of Wellington, Wellington, 2013.
6. Demircan Bekar, N., ve Pekşen, Ö., The Equivalence Problem of Dual Parametric Curves, 17. International Geometry Symposium, Haziran 2019, Erzincan, Bildiriler Kitabı, 69.
7. Demircan Bekar, N., ve Pekşen, Ö., Dual Parametrik Eğrilerin Varlık ve Teklik Teoremleri, 32. Ulusal Matematik Sempozyumu, Ağustos 2019, Samsun, Bildiriler Kitabı, 117.
8. Demircan Bekar, N., ve Pekşen, Ö., Dual Parametrik Eğrilerin Denklik Problemi, Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 13 (2020) 18-32.
9. Demircan Bekar, N., ve Pekşen, Ö., Types and Invariant Parametrizations of Regular and d-Regular Curves, 18. International Geometry Symposium, Temmuz 2021, Malatya, Bildiriler Kitabı, 175.
10. Demircan Bekar, N., ve Pekşen, Ö., Complete Systems of Invariants and Uniqueness Theorems for Nondegenerate Curves, 10th International Istanbul Scientific Research Congress, Temmuz 2022, İstanbul, Abstract Books, 32.
11. Demircan Bekar, N., ve Pekşen, Ö., The Equivalence Problem of Dual Parametric Curves for the Nonlinear Dual Groups, 10th International Istanbul Scientific Research Congress, Temmuz 2022, İstanbul, Abstract Books, 31.
12. Dieudonne, J.A. ve Carrell, J.B., Invariant Theory, Old and New, Academic Press, New York, 1970.
13. Guggenheimer, H.W., Differential Geomerty, McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.

14. Hacısalihoğlu, H.H., Lineer Cebir, Hacısalihoğlu Yayınları, Ankara, 1975.
15. Hacısalihoğlu, H.H., Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Hacısalihoğlu Yayınları, Ankara, 1983.
16. Khadjiev, Dj., Application of the Invariant Theory to the Differential Geometry of Curves, Fan Publisher, Tashkent, 1988. (in Russian)
17. Khadjiev, D. ve Ören, İ., Global Invariants of Paths and Curves for the Group of Orthogonal Transformations in the Two-Dimensional Euclidean Space, Analele Stiintifice Ale Universitatii Ovidius Constanta-Seria Matematica, 27,2 (2019) 37-65.
18. Khadjiev, D., Ören, İ. ve Pekşen, Ö., Generating Systems of Differential Invariants and the Theorem on Existence for Curves in the Pseudo-Euclidean Geometry, Turkish Journal of Mathematics, 37,1 (2013) 80-94.
19. Khadjiev, D., Ören, İ. ve Pekşen, Ö., Global Invariants of Paths and Curves for the Group of All Linear Similarities in the Two-Dimensional Euclidean Space, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 15,6 (2018) 1-28.
20. Khadjiev, D. ve Pekşen, Ö., The Complete System of Global Integral and Differential Invariants for Equi-Affine Curves, Differential Geometry and Its Applications, 20,2 (2004) 167-175.
21. O'Neill, B., Elementary Differential Geometry, Academic Press, New York and London, 1967.
22. Ören, İ. ve Khadjiev, D., Recognition of Paths and Curves in the Two-Dimensional Euclidean Geometry, International Electronic Journal of Geometry, 13,2 (2020) 116-134.
23. Ören, İ., Khadjiev, D. ve Pekşen, Ö., Identifications of Paths and Curves Under the Plane Similarity Transformations and Their Applications to Mechanics, Journal of Geometry and Physics, 151,7 (2020) 103619.
24. Pekşen, Ö., ve Demircan Bekar, N., Dual Doğrusal Yüzeylerin Denklik Problemi, Ulusal Matematik ve İstatistik Sempozyumu, Aralık 2021, Ordu, Bildiriler Kitabı, 39.
25. Pekşen, Ö. ve Khadjiev, D., On Invariants of Curves in Centro-Affine Geometry, Kyoto Journal of Mathematics, 44,3 (2004) 603-613.
26. Pekşen, Ö., Khadjiev, D. ve Ören, İ., Invariant Parametrizations and Complete Systems of Global Invariants of Curves in the Pseudo-Euclidean Geometry, Turkish Journal of Mathematics, 36,1 (2012) 147-160.
27. Sabuncuođlu, A., Lineer Cebir, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2008.

28. Sağıroğlu, Y., Global Invariants of Paths and Curves in the Two-Dimensional Real Vector Space for Linear Similarity Groups Generated by Dual Numbers, Advances in Applied Clifford Algebras, 29,1 (2019)
29. Sağıroğlu, Y. ve Peksen, Ö., The Equivalence of Centro-Equiaffine Curves, Turkish Journal of Mathematics, 34,1 (2010) 95-104.
30. Study E., Geometrie der Dynamen, Leipzig, 1901.
31. Tomar, M., Dual Sayılar ve Dual Sayıların 2-Boyutlu Dual Geometriye Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2012.
32. Turgut, M., On the Invariants of Time-like Dual Curves, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 37,2 (2008) 129-133.
33. Veldkamp, G.R., On the Use of Dual Numbers, Vectors and Matrices in Instantaneous Spatial Kinematics, Mechanism and Machine Theory, 11,2 (1976) 141-156.
34. Weyl, H., The Classical Groups, Their Invariants and Representations, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1946.
35. Yang, A.T., Application of Dual Number Quaternion Algebra to the Analysis of Spatial Mechanisms, Doctoral Dissertation, Columbia University, New York, 1963.

ÖZGEÇMİŞ

Nurcan DEMİRCAN BEKAR, ilk ve orta öğrenimini İnönü İlköğretim Okulu'nda, lise öğrenimini Ayancık Anadolu Lisesi'nde tamamladı. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2012 yılında mezun oldu. Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'ndaki Yüksek Lisans eğitimini 2015 yılında tamamladı. Şubat, 2016'da Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora eğitimine başladı. Nisan, 2016 - Haziran, 2022 yılları arasında Türk Hava Kurumu Üniversitesi'nde Öğretim Görevlisi olarak çalıştı. Haziran, 2022'de Sinop Üniversitesi'nde Öğretim Görevlisi olarak çalışmaya başladı. Yabancı dili İngilizce olan evli ve 1 çocuk annesidir.