

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÜÇ BOYUTLU KOMPACT LİE GRUPLARINDA BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ
EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELANUR KIZILAY

TEZ DANIŞMANI
DOÇ. DR OSMAN ZEKİ OKUYUCU

BİLECİK, 2023
10529770

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÜÇ BOYUTLU KOMPACT LİE GRUPLARINDA BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ
EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELANUR KIZILAY

TEZ DANIŞMANI
DOÇ. DR OSMAN ZEKİ OKUYUCU

BİLECİK, 2023
10529770

BEYAN

“Üç Boyutlu Kompakt Lie Gruplarında Bazı Genelleştirilmiş Eğriler” adlı yüksek lisans tezi hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Bu çalışmanın, Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.	
DESTEK ALINMIŞTIR	DESTEK ALINMAMIŞTIR
Destek alındı ise;	
Destekleyen kurum;	
Desteğin Türü	Proje Numarası
1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)	
2- TÜBİTAK	
Diğer;.....	
ETİK KURUL onayı var ise;	
ETİK KURUL karar tarih/sayı:	/.....

Elanur KIZILAY

.../.../2023

İmza

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU a, lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca desteğini esirgemeyen Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümündeki hocalarıma teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Çalışmam sırasında ellerinden gelen her türlü desteği ve sabrı gösteren aileme ve değerli eşim Alperen KIZILAY'a en derin duygularıyla teşekkür ederim.

Elanur Kızılay

2023



ÖZET

ÜÇ BOYUTLU KOMPAKT LİE GRUPLARINDA BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ EĞRİLER

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci Bölümde giriş kısmına yer verilmiştir.

İkinci kısımda 3-boyutlu Öklid uzayında eğriler ile ilgili temel tanım ve teoremler ile bazı özel eğriler için tanımlar ve temel teoremler verilmiştir. Daha sonra bi-invariant metrik ile 3-boyutlu Lie gruplarında literatürde yer alan çalışmalarda tanımlanan bazı özel eğrilerin tanımları ve bu eğrilerle ilgili temel teoremler verilmiştir. Son olarak sol-invariant metrik ile 3-boyutlu Lie gruplarında genelleştirilmiş helislere ilişkin tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu çalışmada sol-invariant metrik ile 3-boyutlu Lie gruplarında İnvolüt-Evolüt eğri çifti, Bertand ve Mannheim eğrilerini tanımlanmış ve öncelikle bu eğrilerin Frenet bileşenleri arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Daha sonra bu ilişkiler yardımıyla bu eğriler ile ilgili bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: 3-Boyutlu Öklid Uzayı, Bi-Invariant Metric, Sol-Invariant Metrik, Lie Grupları

ABSTRACT

SOME GENERALIZED CURVES IN THREE DIMENSIONAL COMPACT LIE GROUPS

This study consists of three parts.

In the first part, an introduction is given.

In the second part, basic definitions and theorems about curves in 3-dimensional Euclidean space and definitions and basic theorems for some special curves are given. Then, definitions of some special curves defined in the literature in 3-dimensional Lie groups with bi-invariant metric and basic theorems about these curves are given. Finally, definitions and theorems about generalized helices in 3-dimensional Lie groups with left-invariant metric are given.

The third chapter constitutes the original part of this work. In this work, the Involute-Evolute curves, Bertrand and Mannheim curves in 3-dimensional Lie groups with left-invariant metric are defined and firstly the relations between Frenet elements of these curves are investigated. Then, with the help of these relations, some characterizations of these curves are given.

Keywords: 3-Dimensional Euclidean Space, Bi-Invariant Metric, Left-Invariant Metric, Lie Groups

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖN SÖZ.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	vi
1.GİRİŞ.....	1
2.TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. $\mathbb{R}^3$, 3- Boyutlu Öklid Uzayında Eğriler Teorisi	3
2.2. $\mathbb{R}^3$, 3-Boyutlu Öklid uzayında Bazı Özel Eğriler.....	5
2.3.Bi-invaryant Metrikle 3-Boyutlu Lie Gruplarında Bazı Özel Eğriler	8
2.4.Sol-İnvaryant Metrik ile Lie gruplarında Eğriler.....	14
2.5.Sol-İnvaryant Metrik ile Lie gruplarında Genelleştirilmiş Helisler.....	18
3.SOL İNVARİYANT METRİK İLE 3-BOYUTLU LİE GRUPLARINDA BAZI ÖZEL EĞRİLER	20
3.1.Sol İnvaryant Metrik ile 3-Boyutlu Lie Gruplarında İnvolut-Evolüt Eğri Çifti.	20
3.2. Sol İnvaryant Metrik ile 3-Boyutlu Lie Gruplarında Bertrand Eğri Çifti	24
3.3. Sol İnvaryant Metrik ile 3-Boyutlu Lie Gruplarında Mannheim Eğri Çifti	27
KAYNAKÇA	32

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. γ Eğrisi ve Teğetler Göstergesi	6
Şekil 2.2. Bi-invaryant Metrik ile G Lie grubunda Mannheim eğri çifti $\{\gamma, \beta\}$	12
Şekil 2.3. Bi-invaryant Metrik ile G Lie grubunda Bertrand eğri çifti $\{\gamma, \beta\}$	13
Şekil 3.1. $\{\gamma, \beta\}$ İnvolut-Evolüt Eğri İkilişinin Frenet Vektör Alanları	21
Şekil 3.2. Sol-invaryant Metrik ile G Lie grubunda Bertrand eğri çifti $\{\gamma, \beta\}$	24
Şekil 3.3. Sol-invaryant Metrik ile G de Mannheim eğri çifti $\{\gamma, \beta\}$	28

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

Simgeler

$\mathbb{R}^3$	: 3-Boyutlu Öklid Uzayı
V	: Vektör Uzayı
$\langle , \rangle$	: İç Çarpım Fonksiyonu
$\wedge$	: Vektörel Çarpım Fonksiyonu
$\ \, \ $	: Norm fonksiyonu
d	: Metrik fonksiyonu
$\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$	: Eğrinin Frenet Vektör Alanları
k	: Eğrinin Eğriliği
κ	: Eğrinin Burulması
k_G	: Eğrinin Grup Eğriliği
κ_G	: Eğrinin Grup Torsiyonu
G	: 3-Boyutlu Lie Grubu
$\mathfrak{g}$	: Lie Grubunun Lie Cebiri

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometride, eğriler teorisi en çok çalışılan konulardan biridir. Eğriler teorisi ile ilgilenen araştırmacılar 3-boyutlu Öklid Uzayında genel helisler, slant helisler, Bertrand çifti, Mannheim çifti eğrileri gibi özel eğrileri tanımlamış ve bu eğrilere ilişkin pek çok karakterizasyonlar elde etmişlerdir. Bahsettiğimiz bu eğrileri tanımlamada ve karakterizade etmede eğrilerinin Frenet bileşenleri olarak bilenen $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k, \kappa\}$ bileşenleri önemli ve etkin bir role sahiptir.

Bu eğrilerden genel helisler eğrinin her noktasındaki teğet vektörü eğer sabit doğrultulu bir doğru ile sabit açı yapıyorsa o eğriye genel helis denir şeklinde tanımlanmıştır. Daha sonra genel helisler ile ilgili 3-boyutlu Öklid Uzayında önemli ve iyi bilinen bir karakterizasyon olan, eğrinin üzerindeki her noktada tanımlı olan eğrilik fonksiyonları k ve κ nun oranlarının sabit olması koşuludur. Bu koşul ilk defa Lancet tarafından 1802 yılında ortaya konmuş ve Saint Venant tarafından 1845 yılında ispatlanmıştır. Slant helisler ilk kez Izumiya tarafından 2004 yılında bir eğrinin slant helis olabilmesi için her noktasındaki normal vektörünün sabit doğrultulu bir doğruyla sabit açı yapması gerekir şeklinde tanımlanmıştır. Aynı zamanda slant helisler ile ilgili önemli bir karakterizasyon vermiştir. 1850 yılında Bertrand, karşılık gelen noktalarında normal vektörleri lineer bağımlı olan eğrileri Bertrand eğri çifti olarak tanımlamıştır. 2007 yılında Wang ve Liu ise karşılık gelen noktalarında normal vektörü ile bi-normal vektörü lineer bağımlı olan eğrileri Mannheim eğri çifti olarak tanımlamıştır.

Son yıllarda bu eğriler bi-invariant metrik ile G de çalışılmaya başlamıştır. 2009 yılında Çiftçi, bi-invariant metrik ile G de genel helisleri tanımlamış ve elde ettiği karakterizasyonun 3-boyutlu uzaylar için bir genelleştirme olduğunu göstermiş. Daha sonra 2013 yılında Okuyucu ve diğerleri bi-invariant metrik ile G de slant helisleri tanımlamış ve bu eğriler ile karakterizasyonlar elde etmişler ayrıca bu karakterizasyonların 3-boyutlu uzaylarda slant helisler için elde edilen karakterizasyonların bir genelleştirilmesi olduğunu göstermişlerdir. Daha sonra 2014 yılında yayınladıkları çalışmalarında Gök ve diğerleri bi-invariant metrik ile G de Mannheim eğri çiftlerini ve 2016 yılında Okuyucu ve diğerleri yayınladıkları çalışmalarında Bertrand eğri çiftlerini bi-invariant metrik ile G de tanımlamışlar ve bu eğriler ile ilgili çeşitli karakterizasyonlar elde etmişlerdir. 2019 yılında ise Yampolsky A. ve Opariy A. Sol-invariant metrik ile G de helis eğrilerini çalışmış ve çeşitli karakterizasyonlar elde etmişlerdir. Elde ettikleri bu şartların daha önce genel helisler ile slant helisler için bi-invariant metrikle G de elde edilen şartlardan daha genel şartlar olduklarını göstermişlerdir.

Bu tez çalışmasında. Sol-invaryant metrik ile G de involüt-evolüt, Mannheim ve Bertrand eğri çiftlerinin tanımları verildi ve bu eğri çiftlerinin Frenet bileşenleri arasında bazı ilişkiler elde edildi. Daha sonra bu ilişkiler yardımıyla bu eğri çiftleri ile ilgili bir takım karakterizasyonlar verildi.



2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 $\mathbb{R}^3$, 3-Boyutlu Öklid Uzayında Eğriler Teorisi

Bu bölümde $\mathbb{R}^3$ uzayındaki eğriler ile ilgili temel kavram ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1. $I \subset \mathbb{R}$ açık bir alt aralık olmak üzere $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ şeklinde tanımlanan düzgün bir γ dönüşümüne, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir diferansiyellenebilir eğri denir. $\forall t \in I$ değerine karşılık gelen $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ değeri, $\mathbb{R}^3$ ün bir noktasına karşılık gelir. Buradaki t değişkenine γ eğrisinin parametresi denir (O' Neill,1966:11).

Tanım 2.1.2. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü $\mathbb{R}^3$ uzayında bir eğri olsun ve $\forall t \in I$ değeri için $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \gamma_3'(t))$ vektörüne γ nın $\gamma(t)$ noktasındaki hız vektörü denir (O' Neill,1966:16).

Tanım 2.1.3. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. γ eğrisinin her noktasındaki hız vektörü birim ise yani $\forall s \in I$ için $\|\gamma'(s)\| = 1$ ise γ eğrisine yay parametrelili eğri denir ve $s \in I$ parametresine de γ eğrisinin yay parametresi denir (Yüce,2020:178).

Tanım 2.1.4. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir diferansiyellenebilir eğri olsun ve $\forall t \in I$ aralığı için $\|\gamma'(t)\| \neq 0$ oluyorsa γ ya regüler eğri denir (Yüce,2020:178).

Tanım 2.1.5. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$ uzayında yay parametrelili bir eğri olmak üzere,

$$\mathcal{T}(s) = \gamma'(s),$$

$$\mathcal{N}(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|} = \frac{\mathcal{T}'(s)}{\|\mathcal{T}'(s)\|},$$

$$\mathcal{B}(s) = \mathcal{T}(s) \wedge \mathcal{N}(s)$$

dir. Verilen denklemlerde $\mathcal{T}(s)$ vektörüne γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü, $\mathcal{N}(s)$ vektörüne γ nın $\gamma(s)$ noktasındaki asli normal vektörü ve $\mathcal{B}(s)$ vektörüne γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki binormal vektörü denir. $\mathcal{T}, \mathcal{N}$ ve $\mathcal{B}$ vektör alanlarına γ eğrisinin Frenet vektör alanları denir (O' Neill,1966:58).

Tanım 2.1.6. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğri olsun. $\mathcal{T}, \mathcal{N}$ ve $\mathcal{B}$, $\gamma(s)$ eğrisinin Frenet vektör alanları olacak şekilde,

$$k: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad k(s) = \|\mathcal{T}'\|$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona, γ eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $k(s)$ reel sayısına γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki eğriliği denir (Sabuncuoğlu, 2014:74).

Tanım 2.1.7. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğri olsun. γ eğrisinin Frenet vektör alanları $\mathcal{T}$, $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{B}$ olmak üzere,

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \kappa(s) = -\langle \mathcal{B}'(s), \mathcal{N}(s) \rangle$$

fonksiyonuna γ eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ reel sayısına γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki burulması veya torsiyonu denir (Sabuncuoğlu, 2014:76).

Teorem 2.1.1. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi s yay parametrelili bir eğri ve γ nın Frenet bileşenleri $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k, \kappa\}$ olmak üzere

$$k(s) = \|\gamma''(s)\|,$$

$$\kappa(s) = \frac{\langle \gamma'(s), \gamma''(s) \times \gamma'''(s) \rangle}{\|\gamma''(s)\|^2}$$

şeklinde ifade edilir (O' Neill, 1966:59).

Teorem 2.1.2. $\gamma, \mathbb{R}^3$ uzayında yay parametrelili bir eğri ve γ nın Frenet bileşenleri $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k, \kappa\}$ olsun. Frenet vektörlerinin türevleri

$$\mathcal{T}'(s) = k(s)\mathcal{N}(s)$$

$$\mathcal{N}'(s) = -k(s)\mathcal{T}(s) + \kappa(s)\mathcal{B}(s)$$

$$\mathcal{B}'(s) = -\kappa(s)\mathcal{N}(s)$$

şeklindedir (O' Neill, 1966:59).

Tanım 2.1.8. $\mathbb{R}^3$ uzayında, γ eğrisi Frenet vektör alanları $\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}$ olan yay parametrelili bir eğri olsun. Bu durumda

$Sp\{\mathcal{T}(s), \mathcal{N}(s)\}$ düzlemine, γ nın $\gamma(s)$ noktasındaki oskulator (normal) düzlemi denir.

$Sp\{\mathcal{T}(s), \mathcal{B}(s)\}$ düzlemine, γ nın $\gamma(s)$ noktasındaki rektifiyan düzlemi denir.

$Sp\{\mathcal{N}(s), \mathcal{B}(s)\}$ düzlemine, γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki normal düzlemi denir (Sabuncuoğlu, 2014:80).

Teorem 2.1.3 γ , 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri ve γ eğrisinin eğriliği $k = 0$ olması durumunda γ eğrisine bir doğrudur denir. Aksine γ eğrisi bir doğru olarak alınırsa γ eğrisinin eğriliği $k = 0$ dır (O' Neill, 1966:60).

Teorem 2.1.4. γ , 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri ve γ eğrisinin eğriliği $k > 0$ alınırsa γ eğrisinin düzlemsel bir eğri olabilmesi için gerek ve yeter koşul γ eğrisinin burulması $\kappa = 0$ olmasıdır (O' Neill, 1966:60).

2.2. $\mathbb{R}^3$ 3-Boyutlu Öklid Uzayında Bazı Özel Eğriler

Bu kısımda $\mathbb{R}^3$ uzayındaki bazı özel eğriler ile ilgili temel tanımlar ve kavramlar ele alınmıştır.

Tanım 2.2.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi verilsin. γ eğrisinin teğet vektör alanı $\mathcal{T}$ olmak üzere $\mathcal{T}$ vektör alanı, sabit bir v vektörü ile sabit açı yapıyorsa, yani

$$\langle \mathcal{T}, v \rangle = \cos\varphi, \quad \varphi = \text{sabit}$$

koşullarını sağlayan v vektörü varsa γ eğrisine helis denir (Izumiya ve Takeuchi, 2004: 158).

Teorem 2.2.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi verilsin. k ve κ sırasıyla γ eğrisinin eğriliği ve burulması olsun. $k \neq 0$ seçilirse $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin genel helis olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\kappa}{k} = c = \text{sabit}$$

olmasıdır (Izumiya ve Takeuchi, 2004: 158).

Tanım 2.2.2. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi verilsin. $\mathcal{N}$, γ eğrisinin birim asli normal vektör alanı ve v de herhangi bir birim vektörü olsun. Eğer $\mathcal{N}$ asli normal vektör alanı ile v birim vektörü ile sabit bir açı yapıyorsa bu eğriye slant helis denir yani;

$$\langle \vec{N}, v \rangle = \cos\varphi, \quad \varphi = \text{sabit}$$

dir. (Lancret 1802:418).

Tanım 2.2.3. $\mathbb{R}^3$ uzayında a merkezli ve r yarıçaplı bir küre

$$S^2 = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \overrightarrow{X-a}, \overrightarrow{X-a} \rangle = r^2\}$$

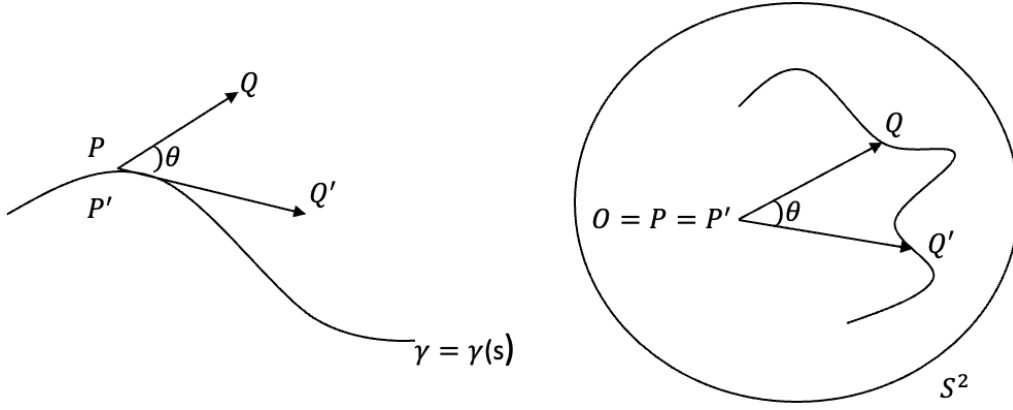
şeklinde ifade edilir. $X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $a = (a_1, a_2, a_3)$ olmak üzere

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = r^2$$

dir. $r = 1$ için S^2 birim küredir. (Yüce, 2020:178).

Tanım 2.2.4. $\mathbb{R}^3$ uzayında verilen bir γ eğrisi, S^2 üzerinde yatıyorsa γ eğrisine küresel eğri denir (Yüce,2020:178).

Tanım 2.2.5. $\mathbb{R}^3$ uzayında γ , s birim hızlı eğrisi ve γ eğrisinin bir P anındaki birim teğet vektör alanı $\mathcal{T}$ olmak üzere, $\overrightarrow{PQ} = \mathcal{T}$ olacak şekilde $Q \in S^2$ vardır. Burada P anında γ eğrisini çizirken Q anındaki birim küre yüzeyinde oluşturduğu eğriye γ nın küresel veya teğetler göstergesi denir (Hacısalıhoğlu, 1998:259).



Şekil 2.1. γ Eğrisi ve Teğetler Göstergesi

Tanım 2.2.6. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. γ eğrisinin asli normal vektör alanı $\mathcal{N}$ olsun. γ eğrisi çizilirken $\mathcal{N}$ ye karşılık gelen vektörlerin uç noktalarının birim küre yüzeyi üzerinde meydana getirdiği eğriye γ eğrisinin asli normaller göstergesi denir (Hacısalıhoğlu, 1998:262).

Tanım 2.2.7. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. γ eğrisinin binormal vektör alanı $\mathcal{B}$ olsun. γ eğrisi çizilirken $\mathcal{B}$ ye karşılık gelen vektörlerin uç noktaları ile birim küre yüzeyinde oluşan eğriye γ nın binormaller göstergesi denir (Hacısalıhoğlu, 1998:262).

Teorem 2.2.2. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi verilsin. γ nın eğriliği $k \neq 0$ seçilirse γ nın slant helis olabilmesi için γ nın asli normaller göstergesinin küresel tasvirinin eğriliği olan

$$\sigma(s) = \left(\frac{k^2}{(k^2 + \kappa^2)^{3/2}} \left(\frac{\kappa}{k} \right)' \right) (s)$$

sabit olmalıdır (Hacısalıhoğlu, 1998:262).

Teorem 2.2.3. $\mathbb{R}^3$ uzayında γ eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter koşul teğetler göstergesinin genel helis olmasıdır (Kula vd., 2005:602).

Teorem 2.2.3. $\mathbb{R}^3$ uzayında γ eğrisinin slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şart normaller göstergesinin çember olmasıdır (Kula vd., 2005:602).

Teorem 2.2.4. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\tau \neq 0$ seçilsin. γ eğrisine slant helis denilebilmesi için gerek ve yeter koşul binormaller göstergesinin genel helis olmasıdır (Kula vd., 2005:602).

Tanım 2.2.8. Birim hızlı bir $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi s yay parametresi ile $\beta : \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi $\bar{s}$ yay parametresi ile verilsin. γ ve β eğrilerinin Frenet bileşenleri sırasıyla $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k, \kappa\}$ ve $\{\bar{\mathcal{T}}, \bar{\mathcal{N}}, \bar{\mathcal{B}}, \bar{k}, \bar{\kappa}\}$ olmak üzere $\langle \mathcal{T}(s), \bar{\mathcal{T}}(s) \rangle = 0$ ve γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki teğeti $\beta(s)$

noktasından geçiyorsa β eğrisine γ eğrisinin bir involütü, $\beta(s)$ noktasındaki teğet doğrusu $\gamma(s)$ noktasından geçiyorsa β eğrisine γ eğrisinin evolütü denir. (Sabuncuoğlu, 2014:86).

Tanım 2.2.9. $\mathbb{R}^3$ uzayında γ ve β uzay eğrilerinin sırasıyla Frenet bileşenleri $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k, \kappa\}$ ve $\{\bar{\mathcal{T}}, \bar{\mathcal{N}}, \bar{\mathcal{B}}, \bar{k}, \bar{\kappa}\}$ ile verilsin. Bu eğrilerinin karşılıklı noktalarında γ eğrisinin asli normal vektör alanı ile β eğrisinin asli normal vektör alanı lineer bağımlı ise γ eğrisine Bertrand eğrisi, β eğrisine γ eğrisinin Bertrand eğri çifti ve $\{\gamma, \beta\}$ eğri çiftine de Bertrand eğri çifti denir denir (Wang, ve Liu 2007:123).

Teorem 2.2.5. $\{\gamma, \beta\}$ eğri ikilisi Bertrand eğri çifti, d uzaklık fonksiyonu ve λ sabit bir sayı olmak üzere γ ve β eğrilerinin karşılık gelen noktaları arasındaki uzaklık sabittir. Yani

$$d(\gamma, \beta) = \lambda$$

dır (Hacısalihoğlu, 1998:70).

Teorem 2.2.6. $\mathbb{R}^3$ uzayında γ eğrisinin eğriliği ve ikinci eğriliği sırasıyla κ ve τ olsun. γ eğrisinin Bertrand eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ için } \lambda \kappa + \mu \tau = 1$$

olmasıdır (Hacısalihoğlu, 1998:70).

Tanım 2.2.10 $\mathbb{R}^3$ uzayında γ ve β eğrilerinin Frenet bileşenleri sırasıyla $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k, \kappa\}$ ve $\{\bar{\mathcal{T}}, \bar{\mathcal{N}}, \bar{\mathcal{B}}, \bar{k}, \bar{\kappa}\}$ şeklinde verilsin. Bu eğrilerinin karşılıklı noktalarında, γ eğrisinin asli normal vektör alanı ile β eğrisinin binormal vektör alanı lineer bağımlı ise γ eğrisine Mannheim eğrisi β eğrisine γ eğrisinin Mannheim çifti ve $\{\gamma, \beta\}$ ikilisine de Mannheim eğri çifti denir (Wang, ve Liu 2007:123).

Teorem 2.2.7. $\{\gamma, \beta\}$ Mannheim eğri çifti, d uzaklık fonksiyonu ve λ sabit bir sayı olmak üzere γ ve β eğrilerinin karşılık gelen noktaları arasındaki uzaklık sabittir. Yani

$$d(\gamma, \beta) = \lambda$$

dır (Orbay ve Kasap, 2009:262).

Teorem 2.2.8. $\mathbb{R}^3$ uzayında γ eğrisinin eğriliği ve ikinci eğriliği sırasıyla k ve κ olsun. γ nın Bertrand eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$k = \lambda(k^2 + \kappa^2)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır (Orbay ve Kasap, 2009:263).

2.3 Bi-invariant Metrik ile 3-Boyutlu Lie Gruplarında Bazı Özel Eğriler

Bu bölümde literatürde yer alan bi-invariant metrik ile G de genel helis, slant helis, Bertrand ve Mannheim eğrileri tanıtılacak ve bu eğrilerle ilgili bazı teoremler tanıtılacaktır.

G üzerinde tanımlı $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bi-invariant metrik tanımlı bir Lie grubu olmak üzere $\mathfrak{g}$, G nin Lie cebiri ve D konneksiyonu G nin Levi-Civita konneksiyonu olsun. e , G nin birim elemanı olmak üzere $T_e G$ ile $\mathfrak{g}$ izomorftur.

$X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ ve $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bi-invariant metrik olmak üzere

$$\langle X, [Y, Z] \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle$$

ve

$$D_X Y = \frac{1}{2} [X, Y]$$

dir.

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ kümesi $\mathfrak{g}$ nin ortonormal bir bazı ve $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ yay parametrelili bir eğri ve eğri boyunca iki vektör alanı W ve Z olsun. $w_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ ve $z_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları düzgün fonksiyonlar olmak üzere $W = \sum_{i=1}^n w_i X_i$ ve $Z = \sum_{i=1}^n z_i X_i$ şeklinde yazılabilir. W ve Z vektör alanlarının Lie çarpımı

$$[W, Z] = \sum w_i z_j [X_i, X_j]$$

olacak şekilde γ boyunca bir W vektör alanının kovaryant türevi $D_{\gamma'} W$

$$D_{\gamma'} W = \dot{W} + \frac{1}{2} [T, W]$$

şeklindedir. Burada $\gamma' = T$ ve $\dot{W} = \sum_{i=1}^n \dot{w}_i X_i = \sum_{i=1}^n \frac{dw_i}{dt} X_i$ dir. Eğer W , sol-invariant vektör alanının γ eğrisine sınırlandırılışı ise, $\dot{W} = 0$ dır (Çiftçi, 2009:1599).

Tanım 2.3.1. G de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ yay parametrelili bir eğri olsun. γ nın Frenet bileşenleri $\{T, N, B, k, \kappa\}$ olacak şekilde

$$\kappa_G = \frac{1}{2} \langle [T, N], B \rangle$$

veya

$$\kappa_G = \frac{1}{2k^2 \kappa} \langle \ddot{T}, [T, \dot{T}] \rangle + \frac{1}{4k^2 \kappa} \|[T, \dot{T}]\|^2$$

şeklindedir (Croch ve Silva, 1995:1507).

Lemma 2.3.1. $G, \langle , \rangle$ bi-invariant metrik ile Lie grubu olsun

- i. Eğer G abelyan grup ise $\kappa_G = 0$,
- ii. Eğer G, SO^3 Lie grubu ise $\kappa_G = \frac{1}{2}$,
- iii. Eğer G, SU^2 Lie grubu ise $\kappa_G = 1$

dir (Çiftçi, 2009:1599).

Tanım 2.3.2. Bi-invariant metrik ile G de Frenet bileşenleri $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k, \kappa\}$ şeklinde verilen bir $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ yay parametrelili eğrisi ve X sol-invariant vektör alanı olsun. Eğer γ eğrisinin her noktasındaki teğet vektörü $\mathcal{T}(s)$ ile sol-invariant vektör alanı X sabit bir açı yapıyorsa yani

$$\langle \mathcal{T}(s), X \rangle = \cos \theta, \quad s \in I$$

ise γ ya G de helis denir (Croch ve Silva, 1995:1507).

Teorem 2.3.1. Bi-invariant metrik ile 3-boyutlu G Lie grubunda $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ Frenet bileşenleri $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k, \kappa\}$ olan yay parametrelili bir eğri olsun. γ eğrisinin genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa = ck + \kappa_G, \quad c = \text{sabit} \tag{2.1}$$

olmasıdır (Çiftçi, 2009:1600).

Sonuç 2.3.1. Eğer G bi-invariant metrik ile 3-boyutlu abelyan Lie grubu ise $\kappa_G = 0$ dır. G nin abelyan Lie grubu olması durumunda (2.1) denkleminde $\kappa_G = 0$ olduğu düşünülürse $\frac{\kappa}{k} = c$ sonucu elde edilir.

Bu sonuç bi-invariant metrik ile 3-boyutlu G Lie grubunda elde edilen koşulun 3-boyutlu Öklid uzayında genel helisler için elde edilen sonucun bir genelleştirilmesi olduğunu gösterir.

Tanım 2.3.3 $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi G de Frenet bileşenleri $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k, \kappa\}$ olan yay parametrelili bir eğri ve X sol-invariant vektör alanı olsun. γ nın asli normal vektör alanı $\mathcal{N}$ ile X sol-invariant vektör alanı sabit açı yapıyorsa , yani

$$\langle \mathcal{N}(s), X \rangle = \cos \theta, \quad \theta = \text{sabit} \neq \frac{\pi}{2}$$

ise γ eğrisi G de slant helis denir (Okuyucu vd., 2013:674).

Tanım 2.3.4. Bi-invaryant metrik ile G de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ Frenet bileşenleri $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k, \kappa\}$ olan yay parametrelili bir eğri olsun. γ eğrisinin harmonik eğriliği H olmak üzere,

$$H = \frac{\kappa - \kappa_G}{k}$$

dir. Buradan $\kappa_G = \frac{1}{2} \langle [\mathcal{T}, \mathcal{N}], \mathcal{B} \rangle$ dir (Okuyucu vd., 2013:674).

Tanım 2.3.5. Bi-invaryant metrik ile G de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ Frenet bileşenleri $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k, \kappa\}$ olan yay parametrelili bir eğri olsun. Asli normaller göstergesinin küresel tasvirinin geodezik eğriliği,

$$\sigma_N = \frac{\kappa(1+H^2)^{3/2}}{H'}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada H , γ eğrisinin harmonik eğriliğidir (Okuyucu vd., 2013:674).

Lemma 2.3.2. Bi-invaryant metrik ile G de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ Frenet bileşenleri $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k, \kappa\}$ olan yay parametrelili bir eğri olmak üzere

$$[\mathcal{T}, \mathcal{B}] = \langle [\mathcal{T}, \mathcal{B}], \mathcal{N} \rangle \mathcal{N} = -2\kappa_G \mathcal{N}$$

$$[\mathcal{T}, \mathcal{N}] = \langle [\mathcal{T}, \mathcal{N}], \mathcal{B} \rangle \mathcal{B} = 2\kappa_G \mathcal{B}$$

dir (Okuyucu vd., 2013:674).

Teorem 2.3.2. Bi-invaryant metrik ile G de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ Frenet bileşenleri $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k, \kappa\}$ olan yay parametrelili bir eğri olmak üzere, γ eğrisi G Lie grubunda bir slant helis ise γ eğrisinin ekseni

$$U = \left\{ \frac{kH(1+H^2)}{H'} \mathcal{T} + \mathcal{N} + \frac{k(1+H^2)}{H'} \mathcal{B} \right\} \cos \theta, \quad \theta = \text{sabit} \neq \frac{\pi}{2}$$

dir. Burada $H = \frac{\kappa - \kappa_G}{k}$, γ eğrisinin harmonik eğriliğidir (Okuyucu vd., 2013:675).

Teorem 2.3.3. Bi-invaryant metrik ile G de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ Frenet bileşenleri $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k, \kappa\}$ olan yay parametrelili bir eğri olsun. γ nın slant helis olması için gerek ve yeter koşul

$$\sigma_N = \frac{k(1+H^2)^{3/2}}{H'} = \tan \theta, \quad \theta = \text{sabit} \neq \frac{\pi}{2}$$

eşitliğinin sabit olmasıdır. Burada H , γ eğrisinin harmonik eğriliğidir (Okuyucu vd., 2013:676).

Tanım 2.3.6. Bi-invariant metrik ile 3-boyutlu G Lie grubunda $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ yay parametrelili bir eğri olsun. γ eğrisinin teğetler göstergesi olan $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S^2 \subset \mathfrak{g}$ eğrisi, yay parametresi s^* olacak şekilde her $s \in I$ değeri için

$$\beta(s^*) = \mathcal{T}(s) = \sum_{i=1}^3 t_i X_i$$

ile tanımlıdır (Okuyucu vd., 2013: 677).

Teorem 2.3.4 Bi-invariant metrik ile G de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ birim hızlı bir eğri olmak üzere $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi γ eğrisinin teğetler göstergesi olsun. γ eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter koşul β nın helis olmasıdır (Okuyucu vd., 2013: 677).

Tanım 2.3.7 Bi-invariant metrik ile G de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ yay parametrelili bir eğri olmak üzere γ eğrisinin normaller göstergesi olan $\delta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S^2 \subset \mathfrak{g}$ eğrisi, yay parametresi s^* olacak şekilde her $s \in I$ değeri için

$$\delta(s^*) = \mathcal{N}(s) = \sum_{i=1}^3 n_i X_i$$

ile tanımlıdır (Okuyucu vd., 2013: 678).

Teorem 2.3.5 Bi-invariant metrik ile G de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ yay parametrelili bir eğri ve γ eğrisinin normal göstergesi $\delta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S^2 \subset \mathfrak{g}$ eğrisi olsun. γ eğrisi slant helis ise δ eğrisi düzlemsel bir eğridir (Okuyucu vd., 2013: 678).

Tanım 2.3.8. Bi-invariant metrik ile G de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ yay parametrelili bir eğri olmak üzere γ nın binormaller göstergesi olan $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S^2 \subset \mathfrak{g}$ eğrisinin yay parametresi s^* olmak üzere $\forall s \in I$ için

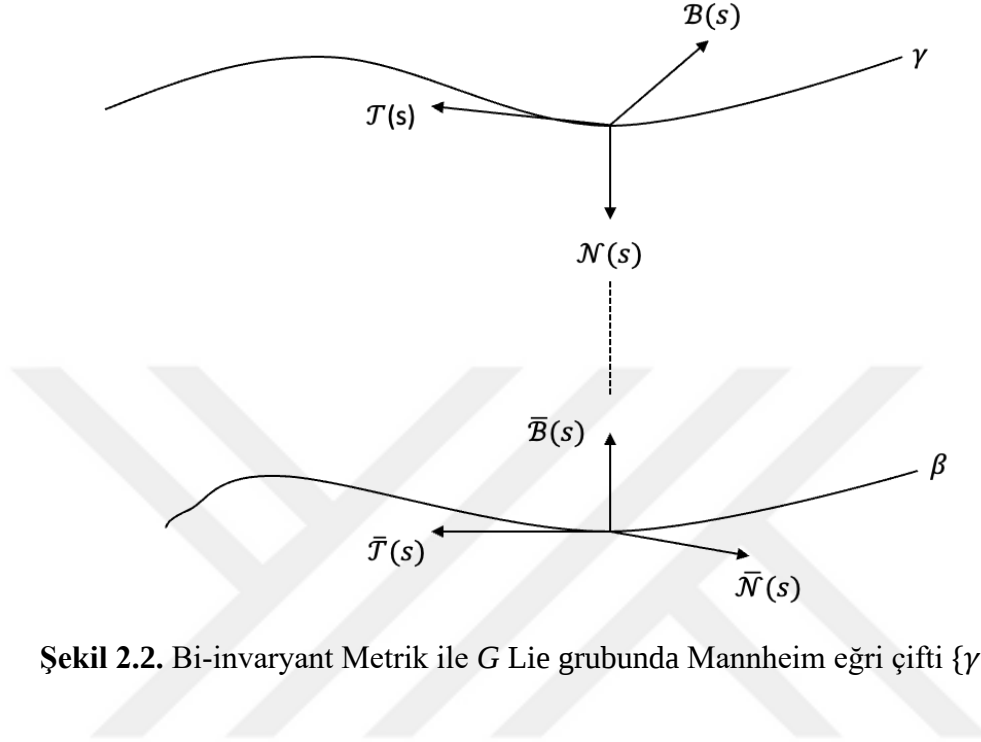
$$\zeta(s^*) = \mathcal{B}(s) = \sum_{i=1}^3 b_i X_i$$

ile tanımlıdır (Okuyucu vd., 2013: 678).

Teorem 2.3.6. Bi-invariant metrik ile G de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ yay parametrelili bir eğri ve $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S^2 \subset \mathfrak{g}$ eğrisi γ eğrisinin binormaller göstergesi olsun. γ eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart ζ eğrisinin genel helis olmasıdır (Okuyucu vd., 2013: 679).

Tanım. 2.3.6. Bi-invariant metrik ile G de γ ve β eğrilerinin karşılık geldiği anlardaki γ eğrisinin asli normal vektör alanı ile β eğrisinin binormal vektör alanı lineer bağımlı ise γ ya Mannheim eğrisi, β ya da γ nın Mannheim çifti ve $\{\gamma, \beta\}$ ikilisine de Mannheim eğri çifti denir (Gök vd., 2014:470).

G de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$, s yay parametrelili bir eğri ve Tanım 2.3.6 yardımıyla $\beta: \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ yay parametrelili eğrisi $\beta(s) = \gamma(s) + \lambda(s)\mathcal{N}(s)$ şeklinde yazılabilen bir eğri olsun. Burada λ sabit bir fonksiyon ve $\mathcal{N}$ vektör alanı γ eğrisinin asli normal vektör alanıdır (Gök vd., 2014:471).



Şekil 2.2. Bi-invaryant Metrik ile G Lie grubunda Mannheim eğri çifti $\{\gamma, \beta\}$

Teorem 2.3.7. $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ ve $\beta: \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrileri 3-boyutlu G Lie grubunda sırasıyla yay parametreleri s ve $\bar{s}$ olan Mannheim eğri çifti olsun. γ ve β eğrilerine karşılık gelen noktaları arasındaki uzaklık daima sabittir. Yani

$$\forall s \in I \text{ için } d(\gamma(s), \beta(\bar{s})) = \text{sabit}$$

dir (Gök vd., 2014:471).

Teorem 2.3.8. Bi-invaryant metrik ile G de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ Frenet bileşenleri $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k, \kappa\}$ olan yay parametrelili bir eğri olsun. λ sabit fonksiyon ve H ise γ eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonu olacak şekilde γ eğrisine Mannheim eğrisi diyebilmemiz için gerek ve yeter koşul $\forall s \in I$ için

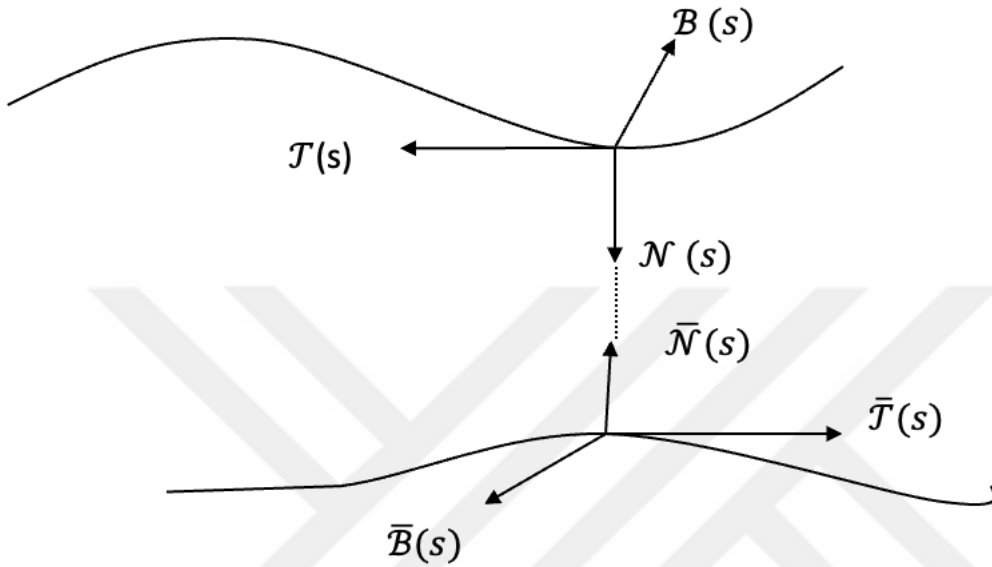
$$\lambda k(1 + H^2) = 1$$

olmasıdır (Gök vd., 2014:472).

Tanım. 2.3.7 Bi-invaryant metrik ile G de γ ve β eğrilerinin karşılık gelen noktalarında γ nın asli normal vektör alanı ile β nın asli normal vektör alanı lineer bağımlı ise γ eğrisine Bertrand

eğrisi, β eğrisine γ eğrisinin Bertrand çifti ve $\{\gamma, \beta\}$ ikilisine de Bertrand eğri çifti denir (Okuyucu vd., 2017:1003).

G de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ yay parametrelili bir eğri ve Tanım 2.3.7 yardımıyla $\beta: \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi $\beta(s) = \gamma(s) + \lambda(s)\mathcal{N}(s)$ şeklinde yazılabilen bir eğri olsun. Burada λ sabit bir fonksiyon ve γ eğrisinin asli normal vektör alanı $\mathcal{N}$ vektör alanıdır (Okuyucu vd., 2017:1004).



Şekil 2.3. Bi-invariant Metrik ile G Lie grubunda Bertrand eğri çifti $\{\gamma, \beta\}$

Teorem 2.3.9. G de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ ve $\beta: \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ sırasıyla yay parametreleri s ve $\bar{s}$ olan Bertrand eğri çifti olsun. γ ve β eğrilerine karşılık gelen noktaları arasındaki uzaklık daima sabittir. Yani

$$\forall s \in I \text{ için } d(\gamma(s), \beta(\bar{s})) = \text{sabit}$$

dir (Okuyucu vd., 2017:1004).

Teorem 2.3.10. Bi-invariant metrik ile G de, Frenet bileşenleri $\{T, \mathcal{N}, B, k, \kappa\}$ olan bir $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi verilsin. λ ve μ sabit fonksiyonlar olmak üzere γ eğrisi Bertrand eğrisi ise

$$\lambda k + \mu(\kappa - \kappa_G) = 1$$

dir (Okuyucu vd., 2017:1005).

2.4 Sol-İnvariant Metrik ile Lie gruplarında Eğriler

Bu kısımda sol-invariant metrik ile 3-boyutlu G Lie grubunda tanımlanmış genelleştirilmiş helis eğrileri ile ilgili temel tanımlar ve kavramlar verilecektir. Bu kavramları vermeden önce sol-invariant metrik ile 3-boyutlu G Lie grupları ile ilgili bazı temel kavramlar ve önermeler verilmiştir.

Kabul edelim ki G sol-invariant metrik $\langle, \rangle$ ile üç boyutlu Lie grubu olsun. G nin sol-sol öteleme altında değişmeyen tüm vektör alanlarından oluşan Lie cebirini $\mathfrak{g}$ ile gösterelim. Bu durumda 3-boyutlu Lie gruplarının unimodular ve nonunimodular olmak üzere iki sınıfı vardır. 3-boyutlu Lie gruplarının unimodular ve nonunimodular sınıfları;

Eğer G Lie grubu unimodular ise $\{e_1, e_2, e_3\}$ sol-invariant vektör alanlarının kümesi pozitif yönlendirilmiş ortonormal bir çatı oluşturur ve bu vektörler için λ_i ler yapı sabitleri olmak üzere

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, [e_1, e_3] = \lambda_2 e_2, [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1$$

şeklinde sağlanır.

Eğer G Lie grubu nonunimodular ise sol-invariant vektör alanlarının oluşturduğu $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal çatısının elemanları için parantez çarpımları

$$[e_1, e_2] = \alpha e_2 + \beta e_3, [e_1, e_3] = -\beta e_2 + \delta e_3, [e_2, e_3] = 0$$

şeklinde (Yampolsky ve Opariy, 2019:1448).

Koszul formülü kullanılarak $\nabla_{e_i} e_j$ değerleri sırasıyla Lie grubunun unimodular ve nonunimodular durumları için

∇	e_1	e_2	e_3
e_1	0	$\mu_1 e_3$	$-\mu_1 e_2$
e_2	$-\mu_2 e_3$	0	$\mu_2 e_1$
e_3	$\mu_3 e_2$	$-\mu_3 e_1$	0

ve

∇	e_1	e_2	e_3
e_1	0	βe_3	$-\beta e_2$
e_2	$-\alpha e_2$	αe_1	0
e_3	δe_3	0	δe_1

şeklinde hesaplanır. Buradaki μ_i değerleri

$$\mu_i = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_i$$

eşitliği ile tanımlı sabitlerdir.

Üç boyutlu durumda e_1, e_2, e_3 vektör alanlarının vektörel çarpımları için elde edilen eşitlikler

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2$$

şeklindedir.

Hem unimodular hem de nonunimodular gruplarda $\nabla_{e_i} e_k = \mu(e_i) \times e_k$ olup herhangi bir X vektör alanı için $\nabla_X e_k = \mu(X) \times e_k$ dir. Burada μ bir afın dönüşüm olup sırasıyla unimodiler ve nonunimodular gruplar için

$$\mu(X) = \begin{cases} \mu_1 X^1 e_1 + \mu_2 X^2 e_2 + \mu_3 X^3 e_3 \\ \beta_1 X^1 e_1 + \delta_2 X^3 e_2 - \alpha_3 X^2 e_3, \end{cases}$$

dir (Yampolsky ve Opariy, 2019:1449).

γ eğrisi sol-invaryant metrik ile 3-boyutlu Lie Grubu G de kendi yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir eğri olsun. Bu durumda $\mathcal{T} = \dot{\gamma}$ vektör alanı γ eğrisinin birim teğet vektör alanı ve $\xi^0 \gamma$ vektör alanı γ eğrisine kısıtlanmış bir vektör alanı olmak üzere

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{T}}^{\xi} &= \mathcal{T}^i \nabla_{e_i} (\xi^k e_k) = \mathcal{T}^i (e^i \xi^k) e_k + \xi^k \nabla_{e_k} \mathcal{T} = \mathcal{T}(\xi^k) e_k + \xi^k \mu(\mathcal{T}) \times e_k \\ &= \frac{d\xi^k}{ds} e_k + \mu(\mathcal{T}) \times \xi = \dot{\xi}^k e_k + \mu(\mathcal{T}) \times \xi \end{aligned} \quad (2.2)$$

dir. Burada $\dot{\xi} = \frac{d\xi^i}{ds} e^i$ vektör alanı γ eğrisi boyunca ξ vektör alanının nokta türevidir. Eğer ξ vektör alanı sol-invaryant vektör alanı ise $\dot{\xi} = 0$ dir, bunun tersi de doğrudur. $\{e_1, e_2, e_3\}$ çatısını oluşturan vektör alanları sol-invaryant vektör alanları olduğundan skaler çarpımın ve vektörel çarpımın nokta türevleri

$$\langle \dot{\xi}, \eta \rangle = \langle \dot{\xi}, \eta \rangle + \langle \xi, \dot{\eta} \rangle, \quad (\xi \dot{\times} \eta) = (\dot{\xi} \times \eta) + (\xi \times \dot{\eta})$$

şeklindedir (Yampolsky ve Opariy, 2019:1449).

γ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ olmak üzere $\nabla_{\mathcal{T}}^{\xi} = \frac{d\xi^k}{ds} e_k + \mu(\mathcal{T}) \times \xi = \dot{\xi}^k e_k + \mu(\mathcal{T}) \times \xi$ denkleminde

$$\nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{T} = \dot{\mathcal{T}} + \mu(\mathcal{T}) \times \mathcal{T}, \quad \nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{B} = \dot{\mathcal{B}} + \mu(\mathcal{T}) \times \mathcal{B}, \quad \nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{N} = \dot{\mathcal{N}} + \mu(\mathcal{T}) \times \mathcal{N} \quad (2.3)$$

eşitlikleri elde edilir.

$k_0 = \|\dot{\mathcal{T}}\| \neq 0$ olduğunu varsayarak γ eğrisi boyunca yeni bir çatı olan ve nokta-Frenet çatısı diyeceğimiz $\{\tau, v, \beta\}$ çatısını

$$\tau = \mathcal{T}, \quad v = \frac{1}{k_0} \dot{\tau}, \quad \beta = \tau \times v \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. $\kappa_0 = \|\dot{\beta}\|$ olarak tanımlanır (Yampolsky ve Opariy, 2019:1449).

Önerme 2.4.1. γ eğrisinin nokta-Frenet çatısı $\{\tau, v, \beta\}$ için nokta-Frenet formülleri

$$\dot{\tau} = k_0 v, \quad \dot{v} = -k_0 \tau + \kappa_0 \beta, \quad \dot{\beta} = -\kappa_0 v \quad (2.5)$$

dir. Burada k_0 ve κ_0 sırasıyla γ eğrisinin nokta-eğriliği ve nokta-torsiyonu olarak isimlendirilir.

γ eğrisinin $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ Frenet bileşenleri ile $\{\tau, v, \beta\}$ nokta-Frenet elemaları arasındaki ilişki

$$\tau = \mathcal{T}, \quad v = \cos \alpha \mathcal{N} + \sin \alpha \mathcal{B}, \quad \beta = -\sin \alpha \mathcal{N} + \cos \alpha \mathcal{B} \quad (2.6)$$

eşitlikleriyle verilir. Bu yazılışın tersi ise

$$\mathcal{T} = \tau, \quad \mathcal{N} = \cos \alpha v - \sin \alpha \beta, \quad \mathcal{B} = \sin \alpha v + \cos \alpha \beta \quad (2.7)$$

şeklinde (Yampolsky ve Opariy, 2019:1450).

Önerme 2.4.2. γ eğrisinin $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ Frenet elemanlılarına göre $\mu(\mathcal{T})$ dönüşümü

$$\mu(\mathcal{T}) = (\kappa + \dot{\alpha} - \kappa_0) \mathcal{T} + k_0 \sin \alpha \mathcal{N} + (k - k_0 \cos \alpha) \mathcal{B} \quad (2.8)$$

şeklinde verilebilir (Yampolsky ve Opariy, 2019:1450).

İspat $\mu(\mathcal{T})$ dönüşümü γ eğrisinin $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ Frenet vektörlerinin lineer birleşimi olarak

$$\mu(\mathcal{T}) = \langle \mu(\mathcal{T}), \mathcal{T} \rangle \mathcal{T} + \langle \mu(\mathcal{T}), \mathcal{N} \rangle \mathcal{N} + \langle \mu(\mathcal{T}), \mathcal{B} \rangle \mathcal{B}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{T} = \dot{\mathcal{T}} + \mu(\mathcal{T}) \times \mathcal{T}, \quad \nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{B} = \dot{\mathcal{B}} + \mu(\mathcal{T}) \times \mathcal{B}, \quad \nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{N} = \dot{\mathcal{N}} + \mu(\mathcal{T}) \times \mathcal{N} \text{ denklemi ve}$$

$$\dot{\tau} = k_0 v, \quad \dot{v} = -k_0 \tau + \kappa_0 \beta, \quad \dot{\beta} = -\kappa_0 v \text{ denklemlerinden}$$

$$\nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{T} = \dot{\mathcal{T}} + \mu(\mathcal{T}) \times \mathcal{T} = k_0 v + \mu(\mathcal{T}) \times \mathcal{T} = k \mathcal{N}$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki yanı $\mathcal{N}$ ile çarpılır ve $\tau = \mathcal{T}$, $v = \cos \alpha \mathcal{N} + \sin \alpha \mathcal{B}$,

$\beta = -\sin \alpha \mathcal{N} + \cos \alpha \mathcal{B}$ eşitlikleri ele alınırsa

$$k = k_0 \cos \alpha + \langle \mu(\mathcal{T}) \times \mathcal{T}, \mathcal{N} \rangle$$

olarak elde edilir. Bu eşitlikte $\langle \mu(\mathcal{T}) \times \mathcal{T}, \mathcal{N} \rangle = \langle \mu(\mathcal{T}), \mathcal{T} \times \mathcal{N} \rangle = \langle \mu(\mathcal{T}), \mathcal{B} \rangle$ olduğu düşünülürse $k = k_0 \cos \alpha + \langle \mu(\mathcal{T}), \mathcal{B} \rangle$ buradan ise $\langle \mu(\mathcal{T}), \mathcal{B} \rangle = k - k_0 \cos \alpha$ dir.

$$\nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{N} = \dot{\mathcal{N}} + \mu(\mathcal{T}) \times \mathcal{N} = -k\mathcal{T} + \kappa \mathcal{B} \text{ ifadesinde ki } \dot{\mathcal{N}} \text{ değeri } \dot{t} = k_0 v,$$

$\dot{v} = -k_0 \tau + \kappa_0 \beta$, $\dot{\beta} = -\kappa_0 v$ ve $\mathcal{T} = \tau$, $\mathcal{N} = \cos \alpha v - \sin \alpha \beta$, $\mathcal{B} = \sin \alpha v + \cos \alpha \beta$ eşitlikleri yardımıyla hesaplanırsa

$$\dot{\mathcal{N}} = (-\dot{\alpha} + \kappa_0) \mathcal{B} - k_0 \cos \alpha \mathcal{T}$$

elde edilir. $\dot{\mathcal{N}} + \mu(\mathcal{T}) \times \mathcal{N} = -k\mathcal{T} + \kappa \mathcal{B}$ ifadesinde $\dot{\mathcal{N}}$ nın değeri yerine yazılır ve elde edilen eşitliğin her iki yanını $\mathcal{B}$ ile çarpılırsa

$$\kappa = -\dot{\alpha} + \kappa_0 + \langle \mu(\mathcal{T}) \times \mathcal{N}, \mathcal{B} \rangle$$

olarak bulunur. Bu eşitlikte $\langle \mu(\mathcal{T}) \times \mathcal{N}, \mathcal{B} \rangle = \langle \mu(\mathcal{T}), \mathcal{T} \rangle$ olduğu düşünülürse $\langle \mu(\mathcal{T}), \mathcal{T} \rangle = \kappa + \dot{\alpha} - \kappa_0$ olarak bulunur.

$\nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{B} = \dot{\mathcal{B}} + \mu(\mathcal{T}) \times \mathcal{B} = -\kappa \mathcal{N}$ ifadesinde ki $\dot{\mathcal{B}}$ nın değeri $\dot{t} = k_0 v$, $\dot{v} = -k_0 \tau + \kappa_0 \beta$, $\dot{\beta} = -\kappa_0 v$ ve $\mathcal{T} = \tau$, $\mathcal{N} = \cos \alpha v - \sin \alpha \beta$, $\mathcal{B} = \sin \alpha v + \cos \alpha \beta$ eşitlikleri yardımıyla hesaplanırsa

$$\dot{\mathcal{B}} = (\dot{\alpha} - \kappa_0) \mathcal{N} - k_0 \cos \alpha \mathcal{T}$$

elde edilir. $\dot{\mathcal{B}} + \mu(\mathcal{T}) \times \mathcal{B} = -\kappa \mathcal{N}$ ifadesinde $\dot{\mathcal{B}}$ değeri yerine yazılır ve elde edilen eşitliğin her iki yanını $\mathcal{T}$ ile çarpılırsa

$$-k_0 \sin \alpha + \langle \mu(\mathcal{T}) \times \mathcal{B}, \mathcal{T} \rangle = 0$$

olarak bulunur. Bu eşitlikte $\langle \mu(\mathcal{T}) \times \mathcal{B}, \mathcal{T} \rangle = \langle \mu(\mathcal{T}), \mathcal{N} \rangle$ olduğu göz önüne alınırsa $\langle \mu(\mathcal{T}), \mathcal{N} \rangle = k_0 \sin \alpha$ olarak bulunur. Buda ispatı tamamlar.

Burada γ eğrisinin grup-eğriliği k_G ve grup-burulması κ_G

$$k_G = |\mu(\mathcal{T}) \times \mathcal{T}|, \quad \kappa_G = |\mu(\mathcal{T}) \times \mathcal{B}| \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanır ise grup-eğriliği ve grup-torsiyonu için.

$$k_G^2 = (k - k_0)^2 + 4k k_0 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right), \quad \kappa_G^2 = k_0^2 \sin^2 \alpha^2 + (\kappa - \kappa_0 + \dot{\alpha})^2$$

eşitlikleri mevcuttur (Yampolsky ve Opariy, 2019:1451).

2.5 Sol-İnvariant Metrik ile Lie gruplarında Genelleştirilmiş Helisler

Tanım 2.5.1. G sol-invariant metrik ile 3-boyutlu Lie grubu ve γ eğrisi G de Frenet elamanları $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ den oluşan yay parametrelili bir eğri olmak üzere, γ boyunca birim bir sol-invariant ξ olmak üzere eğer $\langle \mathcal{T}, \xi \rangle = \text{sabit}$ ise γ eğrisine eksen ξ olan birinci tip genelleştirilmiş helis,

$\langle \mathcal{N}, \xi \rangle = \text{sabit}$ ise γ eğrisine eksen ξ olan ikinci tip genelleştirilmiş helis, $\langle \mathcal{B}, \xi \rangle = \text{sabit}$ ise γ eğrisine eksen ξ olan üçüncü tip genelleştirilmiş helis denir (Yampolsky ve Opariy, 2019:1451).

Teorem 2.5.1. Sol-invariant metrik ile G dedüzgün bir γ eğrisinin birinci tip genelleştirilmiş helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\kappa_0}{k_0} = \cot\theta, \quad (k_0 \neq 0) \quad (2.10)$$

olmasıdır. Burada θ sabit bir açıdır (Yampolsky ve Opariy, 2019:1451).

Önerme 2.5.1. Eğer G bi-invariant metrik ile 3-boyutlu Lie grubu ise $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 := \mu$ dür ve böylece $\mu(\mathcal{T}) = \mu\mathcal{T}$ dir. Sonuç olarak $\alpha = 0$, $k_G = 0, k = k_0$, $\kappa_G = \kappa - \kappa_0$ bulunur. Bu durumda (2.10) eşitliği $\frac{\kappa - \kappa_G}{k} = \cot\theta$ eşitliğine dönüşür. (Yampolsky ve Opariy, 2019:1451).

Bu önerme bize sol-invariant metrik ile 3-boyutlu G Lie grubunda bir eğrinin birinci tip genelleştirilmiş helis olması için sağlaması gereken şartın, bi-invariant metrik ile G de helisler için elde edilen şartın bir genelleştirilmesi olduğunu söyler.

Teorem 2.5.2. Sol-invariant metrik ile G de diferansiyellenebilir γ eğrisinin ikinci tip genelleştirilmiş helis olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{k_0 \cos\alpha (H^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{H - k_0 \sin\alpha (H^2 + 1)} = \tan\theta, \quad (2.11)$$

burada $H = \frac{\kappa_0 - \dot{\alpha}}{k_0 \cos\alpha}$ ve θ sabit bir açıdır (Yampolsky ve Opariy, 2019:1451).

Önerme 2.5.2 Eğer G bi-invariant metrik ile 3-boyutlu Lie grubu ise $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 := \mu$ dür ve böylece $\mu(\mathcal{T}) = \mu\mathcal{T}$ dir. Sonuç olarak $\alpha = 0$, $k_G = 0, k = k_0$, $\kappa_G = \kappa - \kappa_0$ bulunur. Bu durumda (2.11) eşitliği $H = \frac{\kappa - \kappa_G}{k}$ olmak üzere $\sigma_N = \frac{\kappa(1+H^2)^{3/2}}{H'} = \cot\theta$ eşitliğine dönüşür (Yampolsky ve Opariy, 2019:1453).

Bu önerme bize sol-invaryant metrik ile 3-boyutlu G Lie grubunda bir eğrinin ikinci tip genelleştirilmiş helis olması için sağlaması gereken şartın, bi-invaryant metrik G de slant helisler için elde edilen şartın bir genelleştirilmesi olduğunu söyler.

Teorem 2.5.3. Sol-invaryant metrik ile G de düzgün bir γ eğrisinin üçüncü tip genelleştirilmiş helis olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{k_0 \sin \alpha (Q^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\dot{H} - k_0 \cos \alpha (Q^2 + 1)} = \tan \theta,$$

Burada $H = \frac{\dot{\alpha} - \kappa_0}{k_0 \sin \alpha} = -H \cot \alpha$ ve θ sabit bir açıdır (Yampolsky ve Opariy, 2019:1454).



3. SOL İNVARİYANT METRİK İLE 3-BOYUTLU LİE GRUPLARINDA BAZI ÖZEL EĞRİLER

Bu bölümde sol-invaryant metrik ile 3-boyutlu G Lie gruplarında involüt-evolüt, Bertrand ve Mannheim eğrileri tanımlandı. Ayrıca bu eğrilerin Frenet bileşenleri arasında bir takım ilişkiler elde edildi. Elde edilen bu ilişkiler yardımıyla bahsedilen eğri çiftleri arasında bazı karakterizasyonlar elde edildi.

3.1 Sol İnvaryant Metrik ile 3-Boyutlu Lie Gruplarında İnvölüt-Evolüt Eğri Çifti

Tanım 3.1.1. Sol-invaryant metrik ile G de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ ve $\beta: \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ birim hızlı eğrileri verilsin. γ ve β eğrilerinin yay parametreleri sırasıyla s ve $\bar{s}$ olmak üzere γ nın Frenet bileşenleri $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k_0, \kappa_0, \alpha\}$ ve β nın Frenet bileşenleri $\{\bar{\mathcal{T}}, \bar{\mathcal{N}}, \bar{\mathcal{B}}, \bar{k}_0, \bar{\kappa}_0, \bar{\alpha}\}$ olsun. γ ve β eğrilerinin karşılık gelen noktalarında teğet vektörleri birbirine dik konumunda ise yani

$$\langle \bar{\mathcal{T}}, \mathcal{T} \rangle = 0$$

ise β eğrisine γ eğrisinin involütü, γ eğrisine de β eğrisinin evolütü denir.

Teorem 3.1.1. $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$, sol-invaryant metrik ile 3-boyutlu G Lie grubunda Frenet bileşenleri $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k_0, \kappa_0, \alpha\}$ olan s birim hızlı bir eğri ve $\beta: \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi de Frenet bileşenleri $\{\bar{\mathcal{T}}, \bar{\mathcal{N}}, \bar{\mathcal{B}}, \bar{k}_0, \bar{\kappa}_0, \bar{\alpha}\}$ olan $\bar{s}$ yay parametrelili bir eğri olsun. β , γ nın involütü ise γ ve β eğrilerinin Frenet vektörleri arasında aşağıdaki ilişkiler vardır:

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & \bar{\mathcal{T}} = \cos\alpha \mathcal{N} + \sin\alpha \mathcal{B}, \\ \text{ii.} \quad & \bar{\mathcal{N}} = \cos\alpha \mathcal{B} - \sin\alpha \mathcal{N}, \\ \text{iii.} \quad & \bar{\mathcal{B}} = \mathcal{T}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

İspat γ ve β eğrileri sol-invaryant metrik ile G de yay parametrelili eğriler ve $\{\gamma, \beta\}$ eğri ikilisi de İnvölüt-Evolüt eğri ikilisi olsun. Bu durumda β eğrisi

$$\beta(s) = \gamma(s) + \lambda(s)\mathcal{T}(s) \tag{3.2}$$

biçiminde ifade edilir. (3.2) denkleminin nokta türevi hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \dot{\beta}(s) &= \dot{\gamma}(s) + \dot{\lambda}(s)\mathcal{T}(s) + \lambda(s)\dot{\mathcal{T}}(s), \\ &= \mathcal{T}(s) + \dot{\lambda}(s)\mathcal{T}(s) + \lambda(s)(k_0\cos\alpha\mathcal{N} + k_0\sin\alpha\mathcal{B}), \\ \dot{\beta}(s) &= (1 - \dot{\lambda}(s))\mathcal{T}(s) + \lambda(s)(k_0\cos\alpha\mathcal{N} + k_0\sin\alpha\mathcal{B}), \end{aligned} \tag{3.3}$$

eşitliği elde edilir. (3.3) eşitliğinde her iki taraf T ile çarpılırsa

$$1 + \dot{\lambda} = 0$$

yani $\dot{\lambda} = -1$ dir. Buradan $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda(s) = -s + c$ olarak bulunur. λ nın bu değeri (3.2) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\beta(s) = \gamma(s) + (-s + c)\mathcal{T}(s) \quad (3.4)$$

elde edilir. (3.4) eşitliğinin nokta türevi alınırsa

$$\dot{\beta}(s) = \mathcal{T}(s) - \mathcal{T}(s) + (-s + c)(k_0 \cos \alpha \mathcal{N} + k_0 \sin \alpha \mathcal{B}),$$

$$\dot{\beta}(s) = (-s + c)(k_0 \cos \alpha \mathcal{N} + k_0 \sin \alpha \mathcal{B})$$

elde edilir. Bu ifadenin normu alınırsa

$$\|\dot{\beta}(s)\| = \sqrt{(-s + c)^2 (k_0^2 \cos^2 \alpha + k_0^2 \sin^2 \alpha)} = |-s + c|k_0$$

elde edilir. Buradan,

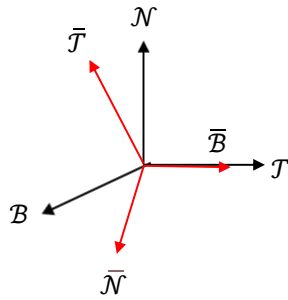
$$\bar{\mathcal{T}} = \frac{\dot{\beta}(s)}{\|\dot{\beta}(s)\|} = \frac{(-s+c)(k_0 \cos \alpha \mathcal{N} + k_0 \sin \alpha \mathcal{B})}{|-s+c|k_0}$$

dir. $-s + c > 0$ kabul edilirse

$$\bar{\mathcal{T}} = \cos \alpha \mathcal{N} + \sin \alpha \mathcal{B}$$

dir.

Dolayısıyla γ ve β eğrilerinin Frenet vektörlerinin konumu Şekil (3.1) deki gibi verilebilir.



Şekil 3.1. $\{\gamma, \beta\}$ İnvolut-Evolüt Eğri İkilisinin Frenet Vektör Alanları

Şekil (3.1.) den $\bar{\mathcal{N}} = \cos \alpha \mathcal{B} - \sin \alpha \mathcal{N}$ ve $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{T}$ şeklinde yazılabileceği görülür.

Teorem 3.1.2. $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi sol-invaryant metrikle tanımlanan G de birim hızlı eğrisi ve $\beta: \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi de γ nın involütü olsun. γ eğrisinin birinci tip genelleştirilmiş helis olabilmesi için gerek ve yeter koşul β eğrisinin üçüncü tip genelleştirilmiş helis olmasıdır.

İspat Sol-invaryant metrik ile G de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ ve $\beta: \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi de Frenet vektör alanları $\{\bar{\mathcal{T}}, \bar{\mathcal{N}}, \bar{\mathcal{B}}\}$ olan iki eğri ve $\{\gamma, \beta\}$ eğri ikilisi involüt-evolüt eğri çifti olsun. γ eğrisi boyunca ξ birim sol-invaryant vektör alanı olmak üzere $\langle \mathcal{T}, \xi \rangle = \text{sabit}$ ise yani γ eğrisi birinci tip genelleştirilmiş helis ise Teorem (3.1.1) den γ eğrisinin involütü olan β eğrisi için $\langle \bar{\mathcal{B}}, \xi \rangle = \text{sabit}$ dir. Bu da bize β eğrisinin üçüncü tip genelleştirilmiş helis olduğunu söyler.

Teorem 3.1.3. Sol-invaryant metrikle G de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ ve $\beta: \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ birim hızlı eğrilerinin sırasıyla Frenet bileşenleri $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k_0, \kappa_0, \alpha\}$ ve $\{\bar{\mathcal{T}}, \bar{\mathcal{N}}, \bar{\mathcal{B}}, \bar{k}_0, \bar{\kappa}_0, \bar{\alpha}\}$ olsun. $\{\gamma, \beta\}$ eğri ikilisi involüt-evolüt eğri çifti ise

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad \bar{k}_0 &= \left\| \dot{\bar{\mathcal{T}}} \right\| = \sqrt{k_0^2 + \kappa_0^2}, \\ \text{ii.} \quad \bar{\alpha} &= -\arcsin \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 + \kappa_0^2}}, \\ \text{iii.} \quad \bar{\kappa}_0 &= \left(-\arcsin \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 + \kappa_0^2}} \right) \end{aligned}$$

dir

İspat Sol-invaryant metrikle G de γ eğrisinin involütü olan β eğrisinin teğet vektör alanı için Teorem 3.1.1 de verilen $\bar{\mathcal{T}} = \cos \alpha \mathcal{N} + \sin \alpha \mathcal{B}$ eşitliğinin nokta türevi alınır

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathcal{T}}} &= -\dot{\alpha} \sin \alpha \mathcal{N} + \dot{\alpha} \cos \alpha \mathcal{B} + \cos \alpha ((-\dot{\alpha} + \kappa_0) \mathcal{B} - k_0 \cos \alpha \mathcal{T}) \\ &\quad + \sin \alpha ((\dot{\alpha} - \kappa_0) \mathcal{N} - k_0 \sin \alpha \mathcal{T}), \\ \dot{\bar{\mathcal{T}}} &= -k_0 \mathcal{T} - \kappa_0 \sin \alpha \mathcal{N} + \kappa_0 \cos \alpha \mathcal{B} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte her iki tarafın normu alınır

$$\bar{k}_0 = \left\| \dot{\bar{\mathcal{T}}} \right\| = \sqrt{k_0^2 + \kappa_0^2}$$

eşitliği bulunur.

Teorem 3.1.1 de verilen $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{T}$ eşitliğinin nokta türevi alınır

$$\dot{\vec{B}} = k_0 \cos \alpha \vec{N} + k_0 \sin \alpha \vec{B}$$

elde edilir. Bu eşitlik $\vec{N}$ ile iç çarpılırsa

$$\langle \dot{\vec{B}}, \vec{N} \rangle = \langle k_0 \cos \alpha \vec{N} + k_0 \sin \alpha \vec{B}, \cos \alpha \vec{B} - \sin \alpha \vec{N} \rangle,$$

$$\dot{\vec{\alpha}} - \vec{\kappa}_0 = -k_0 \cos \alpha \sin \alpha + k_0 \cos \alpha \sin \alpha,$$

$$\dot{\vec{\alpha}} = \vec{\kappa}_0$$

elde edilir.

$\dot{\vec{B}} = k_0 \cos \alpha \vec{N} + k_0 \sin \alpha \vec{B}$ eşitliğinin her iki tarafı $\vec{T}$ ile çarpılırsa

$$\langle \dot{\vec{B}}, \vec{T} \rangle = \langle k_0 \cos \alpha \vec{N} + k_0 \sin \alpha \vec{B}, \cos \alpha \vec{N} + \sin \alpha \vec{B} \rangle$$

$$-\bar{k}_0 \sin \bar{\alpha} = k_0 \cos^2 \alpha + k_0 \sin^2 \alpha,$$

$$-\bar{k}_0 \sin \bar{\alpha} = k_0$$

elde edilir. Bu eşitlikten $\sin \bar{\alpha} = \frac{k_0}{-\bar{k}_0}$ olarak bulunur. Burada $\bar{k}_0 = \sqrt{k_0^2 + \kappa_0^2}$ olduğu düşünülürse

$$\bar{\alpha} = \arcsin \left(-\frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 + \kappa_0^2}} \right)$$

dir. $\dot{\vec{\alpha}} = \vec{\kappa}_0$ olduğundan

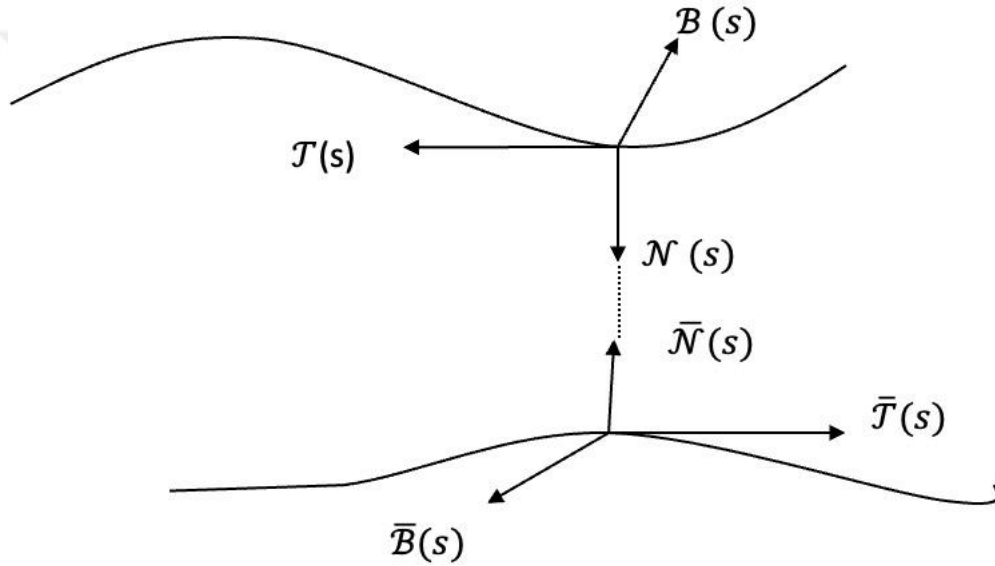
$$\vec{\kappa}_0 = \left(-\arcsin \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 + \kappa_0^2}} \right)$$

dir.

3.2 Sol İnvaryant Metrik ile 3-Boyutlu Lie Gruplarında Bertrand Eğri Çifti

Tanım 3.2.1. $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ ve $\beta: \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrileri sol-invaryant metrik ile 3-boyutlu G Lie grubunda iki eğri olmak üzere, bu eğrilerin karşılık gelen noktalarında asli normal vektör alanları lineer bağımlı ise γ eğrisine Bertrand eğrisi, β eğrisine γ eğrisinin Bertrand eğri çifti ve $\{\gamma, \beta\}$ ikilisine de Bertrand eğri çifti denir.

G de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi s yay parametrelili ve Frenet bileşenleri $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k_0, \kappa_0, \alpha\}$ olan bir eğri olsun. $\beta: \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi de γ nın Bertrand eğri çifti olsun. Bu durumda Şekil 3.2. den β eğrisi $\beta(s) = \gamma(s) + \lambda(s)\mathcal{N}(s)$ şeklinde yazılabilir. Burada $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyondur.



Şekil 3.2. Sol-invaryant Metrik ile G Lie grubunda Bertrand eğri çifti $\{\gamma, \beta\}$

Teorem 3.2.1 Sol-invaryant metrik ile G de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ ve $\beta: \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ sırasıyla yay parametreleri s ve $\bar{s}$, Frenet bileşenleri $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k_0, \kappa_0, \alpha\}$ ve $\{\bar{\mathcal{T}}, \bar{\mathcal{N}}, \bar{\mathcal{B}}, \bar{k}_0, \bar{\kappa}_0, \bar{\alpha}\}$ olan Bertrand eğri çifti olsun. γ ve β eğrilerinin karşılık gelen noktaları arasındaki uzaklık daima sabittir. Yani

$$\forall s \in I \text{ için } d(\gamma(s), \beta(\bar{s})) = \lambda = \text{sabit}$$

dir.

İspat: Tanım 3.2.1 yardımıyla β eğrisi

$$\beta(s) = \gamma(s) + \lambda(s)\mathcal{N}(s)$$

eşitliği ile yazılabilir. Eşitliğin türevi alınırsa

$$\dot{\beta}(s) = \dot{\gamma}(s) + \dot{\lambda}(s)\mathcal{N}(s) + \lambda(s)\dot{\mathcal{N}}(s),$$

$$\dot{\beta}(s) = (1 - \lambda(s)k_0\cos\alpha)\mathcal{T}(s) + \dot{\lambda}(s)\mathcal{N}(s) + \lambda(s)(-\dot{\alpha} + \kappa_0)\mathcal{B} - k_0\cos\alpha\mathcal{T}(s)$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen eşitlik $\mathcal{N}$ ile çarpılırsa

$$0 = \dot{\lambda}(s)$$

elde edilir. Buradan $\lambda(s) = \text{sabit}$. olduğu açıktır.

Teorem 3.2.2. Sol-invariant metrik ile G de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ Frenet bileşenleri $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k_0, \kappa_0, \alpha\}$ olan s birim hızlı bir eğri ve $\beta: \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi de Frenet bileşenleri $\{\bar{\mathcal{T}}, \bar{\mathcal{N}}, \bar{\mathcal{B}}, \bar{k}_0, \bar{\kappa}_0, \bar{\alpha}\}$ olan $\bar{s}$ birim hızlı bir eğri olsun. Eğer $\{\gamma, \beta\}$ Bertrand eğri ikilisi ise Frenet bileşenleri arasında aşağıdaki ilişkiler vardır:

$$\bar{\mathcal{T}} = \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}}\mathcal{T} + \frac{1}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}}\mathcal{B},$$

$$\bar{\mathcal{N}} = \mathcal{N},$$

$$\bar{\mathcal{B}} = \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}}\mathcal{B} - \frac{1}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}}\mathcal{T}.$$

Burada $\mathcal{F} = \frac{1 - \kappa_0 \cos \alpha}{\lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0)}$ dir.

İspat: γ ve β eğrileri sol-invariant metrik ile G de yay parametrelili eğriler ve $\{\gamma, \beta\}$ eğri ikilisi Bertrand eğri çifti olsun. Bu durumda Tanım 3.2.1 den β eğrisi

$$\beta(s) = \gamma(s) + \lambda(s)\mathcal{N}(s) \quad (3.5)$$

biçiminde yazılabilir. $\lambda(s) = \text{sabit}$ olduğu düşünülerek (3.5) eşitliğinin türevini alınırsa

$$\dot{\beta}(s) = \dot{\gamma}(s) + \dot{\lambda}(s)\mathcal{N}(s) + \lambda(s)\dot{\mathcal{N}}(s),$$

$$= \mathcal{T}(s) + \lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0)\mathcal{B} - k_0\cos\alpha\mathcal{T}(s),$$

$$\dot{\beta}(s) = (1 - \lambda k_0 \cos \alpha)\mathcal{T} + \lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0)\mathcal{B} \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.6) ifadesinin normu alınır,

$$\|\dot{\beta}(s)\| = \sqrt{(1 - \lambda k_0 \cos \alpha)^2 + (\lambda^2(-\dot{\alpha} + \kappa_0)^2)}$$

$$\|\dot{\beta}(s)\| = \sqrt{\lambda^2(-\dot{\alpha} + \kappa_0)^2 \left(\frac{(1 - \lambda k_0 \cos \alpha)^2}{\lambda^2(-\dot{\alpha} + \kappa_0)^2} + 1 \right)}$$

dir. Burada $\mathcal{F} = \frac{(1-\lambda k_0 \cos \alpha)}{\lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0)}$ denilirse

$$\|\dot{\beta}(s)\| = \lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0)\sqrt{1 + \mathcal{F}^2} \quad \text{şeklinde yazılabilir. } \lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0) > 0 \text{ alalım.}$$

Buradan

$$\bar{\mathcal{T}} = \frac{\beta'(s)}{\|\beta'(s)\|} = \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}} \mathcal{T} + \frac{1}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}} \mathcal{B}$$

olarak bulunur. Şekil-3.2.den $\mathcal{N}$ ile $\bar{\mathcal{N}}$ linner bağımlı olduğundan

$$\bar{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \quad (3.7)$$

dir. Buradan,

$$\bar{\mathcal{B}} = \bar{\mathcal{T}} \times \bar{\mathcal{N}} = \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}} \mathcal{B} - \frac{1}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}} \mathcal{T}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3. $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi sol-invariant metrikle G de birim hızlı bir eğri olmak üzere $\beta: \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi de γ nın Bertrand çifti olsun. γ eğrisinin II. tip genelleştirilmiş helis olabilmesi için gerek ve yeter koşul β nın II. tip genelleştirilmiş helis olmasıdır.

İspat Sol-invariant metrik ile G verilsin. γ uzay eğrisinin Frenet elamanları $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ olsun. γ boyunca birim sol-invariant vektör alanı ξ olmak üzere γ II. tip genelleştirilmiş helis ise $\langle \mathcal{N}, \xi \rangle = \text{sabit}$ dir. G de β eğrisi γ eğrisinin Bertrand çifti ise Teorem 3.2.2'nin ispatındaki (3.7) eşitliği ve $\langle \mathcal{N}, \xi \rangle = \text{sabit}$ olduğu bir arada düşünülürse $\langle \bar{\mathcal{N}}, \xi \rangle = \text{sabit}$ olduğu elde edilir. Buda γ eğrisinin Bertrand çifti β eğrisinin II. tip genelleştirilmiş helis olduğunu söyler.

Teorem 3.2.4. $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi sol-invariant metrikle 3 boyutlu G Lie grubunda Frenet bileşenleri $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k_0, \kappa_0, \alpha\}$ olan birim hızlı bir Bertrand eğrisi olsun. Bu durumda

$$\lambda k_0 \cos \alpha + \mu(-\dot{\alpha} + \kappa_0) = 1$$

eşitliği sağlanır. Burada μ ve λ sabitlerdir.

İspat γ eğrisi eğrisi sol-invariant metrikle 3-boyutlu G Lie grubunda Bertrand eğrisi olsun. γ eğrisinin Bertrand çifti olan β eğrisi

$$\beta(s) = \gamma(s) + \lambda(s)\mathcal{N}(s)$$

şeklinde yazılabilir.

$\{\bar{\mathcal{N}}, \mathcal{N}\}$ lineer bağımlı olduğundan θ , $\mathcal{T}$ ile $\bar{\mathcal{T}}$ arasındaki açı olmak üzere

$$\bar{\mathcal{T}} = \cos\theta \mathcal{T} + \sin\theta \mathcal{B}$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 3.2.2 de $\bar{\mathcal{T}} = \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}} \mathcal{T} + \frac{1}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}} \mathcal{B}$ olduğundan

$$\cos\theta = \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}}$$

dir.

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}}{1} \Rightarrow \cot\theta = \mathcal{F} = \frac{1-\lambda\cos\alpha}{\lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0)}$$

$$\cot\theta = \frac{1-\lambda k_0 \cos\alpha}{\lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0)}$$

buradan

$$\cot\theta \lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0) + \lambda k_0 \cos\alpha = 1$$

elde edilir. $\cot\theta \lambda = \mu$ denilirse

$$\lambda k_0 \cos\alpha + \mu(-\dot{\alpha} + \kappa_0) = 1 \quad (3.8)$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.1. Eğer G bi-invariant metrik ile 3-boyutlu Lie grubu ise $\alpha = 0$, $k_G = 0, k = k_0$, $\kappa_G = \kappa - \kappa_0$ dır. Bu eşitlikler (3.8) eşitliğinde yazılırsa

$$\lambda k + \mu(\kappa - \kappa_G) = 1$$

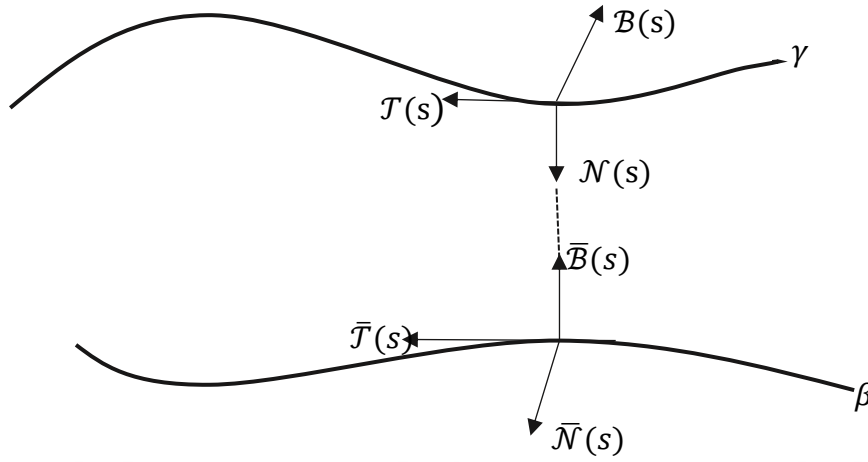
eşitliği elde edilir. Bu sonuç bize sol-invariant metrik ile 3-boyutlu G Lie grubunda Bertrand eğrileri için elde ettiğimiz sonucun daha önce bi-invariant metrik ile 3-boyutlu G Lie grubunda Bertrand eğrileri için elde edilen sonucun bir genelleştirilmesi olduğunu gösterir.

3.3 Sol İnvaryant Metrik ile 3-Boyutlu Lie Gruplarında Mannheim Eğri Çifti

Tanım 3.3.1 G sol-invariant metrik ile 3-boyutlu bir Lie grubu olsun. G de γ ve β eğrilerinin karşılık gelen noktalarında γ nın asli normal vektör alanı ile β nın binormal vektör alanı lineer bağımlı ise γ ya Mannheim eğrisi, β ya da γ nın Mannheim çifti ve $\{\gamma, \beta\}$ ikilisine de Mannheim eğri çifti denir.

Sol-invariant metrik G de $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi s yay parametrelili ve Frenet bileşenleri $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k_0, \kappa_0, \alpha\}$ olan bir eğri ve Şekil-3.3.1 yardımıyla $\beta: \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi $\beta(s) =$

$\gamma(s) + \lambda(s)\mathcal{N}(s)$ şeklinde yazılabilen ve Frenet bileşenleri $\{\bar{\mathcal{T}}, \bar{\mathcal{N}}, \bar{\mathcal{B}}, \bar{k}_0, \bar{\kappa}_0, \bar{\alpha}\}$ olan bir eğri olsun. Burada λ sabit bir fonksiyon ve $\mathcal{N}$ vektör alanı γ eğrisinin asli normal vektör alanıdır



Şekil 3.3. Sol-invariant Metrik ile G de Mannheim eğri çifti $\{\gamma, \beta\}$

Teorem 3.3.1 3-boyutlu G Lie grubunda $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ ve $\beta: \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ sırasıyla yay parametreleri s ve $\bar{s}$ olan Bertrand eğri çifti olsun. γ ve β eğrilerine karşılık gelen noktaları arasındaki uzaklık daima sabittir. Yani

$$\forall s \in I \text{ için } d(\gamma(s), \beta(\bar{s})) = \text{sabit}$$

dir.

İspat: Tanım 3.3.1 yardımıyla β eğrisi

$$\beta(s) = \gamma(s) + \lambda(s)\mathcal{N}(s)$$

eşitliği ile yazılabilir. Eşitliğin her iki yanının türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \dot{\beta}(s) &= \dot{\gamma}(s) + \dot{\lambda}(s)\mathcal{N}(s) + \lambda(s)\dot{\mathcal{N}}(s) \\ &= \mathcal{T}(s) + \dot{\lambda}(s)\mathcal{N}(s) + \lambda(s)(-\dot{\alpha} + \kappa_0)\mathcal{B} - k_0 \cos \alpha \mathcal{T} \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen eşitlik $\mathcal{N}$ ile çarpılırsa

$$0 = \dot{\lambda}(s)$$

elde edilir. Buradan $\lambda(s) = \text{sabit}$ olduğu açıktır.

Teorem 3.3.2. γ ve β eğrileri sol-invariant metrikle G de yay parametrelili iki eğri ve γ ve β nın Frenet bileşenleri sırasıyla $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k_0, \kappa_0, \alpha\}$ ve $\{\bar{\mathcal{T}}, \bar{\mathcal{N}}, \bar{\mathcal{B}}, \bar{k}_0, \bar{\kappa}_0, \bar{\alpha}\}$ olsun. Eğer $\{\gamma, \beta\}$ Mannheim eğri çifti ise Frenet bileşenleri arasında aşağıdaki ilişki

$$\bar{\mathcal{T}} = \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}}\mathcal{T} + \frac{1}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}}\mathcal{B}$$

$$\bar{\mathcal{N}} = -\frac{\mathcal{F}}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}}\mathcal{B} + \frac{1}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}}\mathcal{T}$$

$$\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{N}$$

şeklinde edilir. Burada $\mathcal{F} = \left(\frac{1-\lambda k_0 \cos \alpha}{\lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0)}\right)$ dir.

İspat γ ve β eğrileri sol-invaryant metrik de G de yay parametrelili iki eğri ve $\{\gamma, \beta\}$ eğri ikilisi Mannheim eğri çifti olsun. Bu durumda β eğrisi

$$\beta(s) = \gamma(s) + \lambda \mathcal{N}(s) \quad (3.9)$$

şeklinde yazılır. (3.9) eşitliğinin türevi alınır

$$\dot{\beta}(s) = (1 - \lambda k_0 \cos \alpha) \mathcal{T} + \lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0) \mathcal{B}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \|\dot{\beta}(s)\| &= \sqrt{(1 - \lambda k_0 \cos \alpha)^2 + \lambda^2(-\dot{\alpha} + \kappa_0)^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2(-\dot{\alpha} + \kappa_0)^2 \frac{(1 - \lambda k_0 \cos \alpha)^2}{\lambda^2(-\dot{\alpha} + \kappa_0)^2} + 1} \end{aligned}$$

dir.

$\left(\frac{1 - \lambda k_0 \cos \alpha}{\lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0)}\right) = \mathcal{F}$ olmak üzere $\|\dot{\beta}(s)\| = \lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0) \sqrt{1 + \mathcal{F}^2}$ şeklinde yazılabilir.

$\lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0) > 0$ alalım. Buradan

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{T}} &= \frac{\dot{\beta}(s)}{\|\dot{\beta}(s)\|} = \frac{1 - \lambda k_0 \cos \alpha}{\lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0) \sqrt{1 + \mathcal{F}^2}} \mathcal{T} + \frac{\lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0)}{\lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0) \sqrt{1 + \mathcal{F}^2}} \mathcal{B} \\ \bar{\mathcal{T}} &= \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{1 + \mathcal{F}^2}} \mathcal{T} + \frac{1}{\sqrt{1 + \mathcal{F}^2}} \mathcal{B} \end{aligned} \quad (3.10)$$

dir. γ ve β Mannheim eğri çifti olduğundan $\{\mathcal{N}, \bar{\mathcal{B}}\}$ lineer bağımlıdır. Yani $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{N}$ alınabilir.

Buradan

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{N}} &= \bar{\mathcal{B}} \times \bar{\mathcal{T}} \\ &= \mathcal{N} \times \left(\frac{\mathcal{F}}{\sqrt{1 + \mathcal{F}^2}} \mathcal{T} + \frac{1}{\sqrt{1 + \mathcal{F}^2}} \mathcal{B} \right) \\ &= \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{1 + \mathcal{F}^2}} (\mathcal{N} \times \mathcal{T}) + \frac{1}{\sqrt{1 + \mathcal{F}^2}} (\mathcal{N} \times \mathcal{B}) \\ &= -\frac{\mathcal{F}}{\sqrt{1 + \mathcal{F}^2}} \mathcal{B} + \frac{1}{\sqrt{1 + \mathcal{F}^2}} \mathcal{T} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.3.3 $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi sol-invaryant metrikle G de yay parametrelili bir eğri ve $\beta: \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi de γ eğrisinin Mannheim çifti olsun. γ eğrisinin II. tip genelleştirilmiş helis olabilmesi için gerek ve yeter koşul β nın III. tip genelleştirilmiş helis olmasıdır.

İspat Sol-invaryant metrik ile G de γ eğrisinin Frenet elamanları $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ olsun. γ boyunca birim sol-invaryant vektör alanı ξ olmak üzere γ II. tip genelleştirilmiş helis ise $\langle \mathcal{N}, \xi \rangle = \text{sabit}$ dir. G de β eğrisi γ eğrisinin Mannheim çifti ise Teorem 3.3.2 de ifade edile $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{N}$ eşitliği ve $\langle \mathcal{N}, \xi \rangle = \text{sabit}$ olduğu bir arada düşünülürse $\langle \bar{\mathcal{B}}, \xi \rangle = \text{sabit}$ olduğu elde edilir. Buda γ eğrisinin Mannheim çifti β eğrisinin III. tip genelleştirilmiş helis olduğunu söyler.

Teorem 3.3.4. $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$, Frenet bileşenleri $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}, k_0, \kappa_0, \alpha\}$ olan s yay parametrelili bir eğri ve $\beta: \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow G$, Frenet bileşenleri $\{\bar{\mathcal{T}}, \bar{\mathcal{N}}, \bar{\mathcal{B}}, \bar{k}_0, \bar{\kappa}_0, \bar{\alpha}\}$ olan $\bar{s}$ yay parametrelili bir eğri olsun. Eğer $\{\gamma, \beta\}$ ikilisi bir Mannheim eğri çifti ise

$$\bar{k}_0 \sin \bar{\alpha} = \frac{\mathcal{F} k_0 \cos \alpha + (-\dot{\alpha} + \kappa_0)}{\lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0)(1 + \mathcal{F}^2)}$$

dir. Burada $\mathcal{F} = \left(\frac{1 - \lambda k_0 \cos \alpha}{\lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0)} \right)$ dir.

İspat $\{\gamma, \beta\}$ ikili bir Mannheim eğrisi çifti olsun. O halde λ bir sabit olmak üzere;

$$\beta(\bar{s}) = \gamma(s) + \lambda \mathcal{N}(s)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadede her iki tarafın s parametresine göre türevi alınır

$$\bar{\mathcal{T}} \frac{d\bar{s}}{ds} = (1 - \lambda k_0 \cos \alpha) \mathcal{T} + \lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0) \mathcal{B} \quad (3.11)$$

denklemi elde edilir. $\lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0) > 0$ olduğu kabul edilirse $\mathcal{F} = \left(\frac{1 - \lambda k_0 \cos \alpha}{\lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0)} \right)$ olmak üzere

(3.11) eşitliğinin normu alındığında

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = \lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0) \sqrt{1 + \mathcal{F}^2} \quad (3.12)$$

olarak elde edilir. (3.11) ve (3.12) denklemleri bir arada düşünülürse

$$\bar{\mathcal{T}}(\bar{s}) = \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{1 + \mathcal{F}^2}} \mathcal{T}(s) + \frac{1}{\sqrt{1 + \mathcal{F}^2}} \mathcal{B}(s) \quad (3.13)$$

olarak elde edilir. (3.13) denkleminde her iki tarafın s parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{T}}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} &= \frac{\mathcal{F}'\sqrt{1+\mathcal{F}^2} - \frac{\mathcal{F}^2\mathcal{F}\mathcal{F}'}{2\sqrt{1+\mathcal{F}^2}}}{1+\mathcal{F}^2} \mathcal{T} + \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}} (k_0 \cos \alpha \mathcal{N} + k_0 \sin \alpha \mathcal{B}) + \frac{-\frac{2\mathcal{F}\mathcal{F}'}{2\sqrt{1+\mathcal{F}^2}}}{1+\mathcal{F}^2} \mathcal{B} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}} ((-\dot{\alpha} + \kappa_0) \mathcal{N} - k_0 \sin \alpha \mathcal{T}) \\
&= \frac{\mathcal{F}'(1+\mathcal{F}^2) - \mathcal{F}'\mathcal{F}^2}{(1+\mathcal{F}^2)^{3/2}} \mathcal{T} + \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}} (k_0 \cos \alpha \mathcal{N} + k_0 \sin \alpha \mathcal{B}) - \frac{\mathcal{F}\mathcal{F}'}{(1+\mathcal{F}^2)^{3/2}} \mathcal{B} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}} ((\dot{\alpha} - \kappa_0) \mathcal{N} - k_0 \sin \alpha \mathcal{T}) \\
(\bar{k}_0 \cos \bar{\alpha} \bar{\mathcal{N}} + \bar{k}_0 \sin \bar{\alpha} \bar{\mathcal{B}}) \frac{d\bar{s}}{ds} &= \left(\frac{\mathcal{F}'}{(1+\mathcal{F}^2)^{3/2}} - \frac{k_0 \sin \alpha}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}} \right) \mathcal{T} + \left(\frac{\mathcal{F}k_0 \cos \alpha + (\dot{\alpha} - \kappa_0)}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}} \right) \mathcal{N} \\
&\quad + \left(\frac{\mathcal{F}k_0 \sin \alpha}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}} - \frac{\mathcal{F}\mathcal{F}'}{(1+\mathcal{F}^2)^{3/2}} \right) \mathcal{B}
\end{aligned}$$

dir. $\mathcal{N}$ ile $\bar{\mathcal{B}}$ lineer bağımlı olduğundan, her iki taraf $\mathcal{N}$ ile çarpılırsa

$$(\bar{k}_0 \sin \bar{\alpha}) \frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{\mathcal{F}k_0 \cos \alpha + (\dot{\alpha} - \kappa_0)}{\sqrt{1+\mathcal{F}^2}} \quad (3.14)$$

eşitliği elde edilir. (3.12) ve (3.14) eşitlikleri bir arada düşünülürse

$$\bar{k}_0 \sin \bar{\alpha} = \frac{\mathcal{F}k_0 \cos \alpha + (-\dot{\alpha} + \kappa_0)}{\lambda(-\dot{\alpha} + \kappa_0)(1+\mathcal{F}^2)}$$

dir. Buda ispatı tamamlar.

KAYNAKÇA

- Bertrand, J. M.** (1850). “MÈmoire sur la thÈorie des courbes à double courbure”, *Comptes Rendus*, Vol. 36.
- Crouch, P. and Silva, F. L.** (1995). “The Dynamic Interpolation Problem: On Riemannian Manifolds Lie Groups and Symmetric Spaces”, *Journal of Dyn. Control Syst.*, 1(2): 177-202
- Çiftçi, Ü.** (2009). A generalization of Lancret’s theorem. *Journal of Geometry and Physics*, 59(12), 1597-1603.
- Gök, İ., Okuyucu, O. Z., Ekmekci, N. & Yayli, Y.,** (2014). “On Mannheim Partner Curves in Three Dimensional Lie Groups ”. *Miskolc Mathematical Notes*, 15(2), 467-479.
- Hacısalıhoğlu, H. H.** (1998). *Diferensiyel Geometri, Cilt I.*, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi.
- Izumiya, S. & Takeuchi, N.** (2004). “New special curves and developable surfaces”. *Turkish Journal of Mathematics*, 28(2), 153-164.
- Kula, L. & Yayli, Y.,** (2005). “On Slant helix and its spherical indicatrix”. *Applied Mathematics and Computation*, 169(1), 600-607.
- Lancret, M. A.,** “Mémoire sur les courbes à double courbure”, *Mémoires présentés à l’Institut* 1, 416-454 (1806).
- O’Neill, B.** (1966). *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New York, 1-482.
- Okuyucu, O. Z., Gök, İ., Yayli, Y., & Ekmekci, N.** (2013). Slant helices in three dimensional Lie groups. *Applied Mathematics and Computation*, 221, 672-683.
- Okuyucu, O. Z., Gök, İ., Yayli, Y., & Ekmekci, N.** (2017). Bertrand Curves in Three Dimensional Lie Groups ”. *Miskolc Mathematical Notes*, 17(2), 999-1010.
- Orbay, K. and Kasap, E.** (2009). On Mannheim partner curves in E3. *Int. J. Phys. Sci.*, Vol. 4 (5), 261-264.
- Sabuncuoğlu, A.** (2014). *Diferansiyel Geometri*. Nobel Yayınları, Ankara, 1-514.
- Yampolsky, A., & Opariy, A.** (2019). Generalized helices in three-dimensional Lie groups. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(3), 1447-1455.
- Yüce, S.** (2020). *Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri*. Pagem Akademi Yayıncılık.

Wang, F. and Liu, H. (2007). Mannheim partner curves in 3-Euclidean space, *Mathematics in Practice and Theory*, 37(1), 141-143.

