

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

HALKALARDA TERSİNİR DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER

Utku FİDAN

Danışman : Prof. Dr. Emine ALBAŞ

Matematik Anabilim Dalı
Matematik Yüksek Lisans Programı

İzmir
2022

ÖZET

HALKALARDA TERSİNİR DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER

FİDAN, Utku

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emine ALBAŞ

Ağustos 2022, 99 sayfa

Bu tez esas olarak beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tez konusu tanıtılmış ve bu konu ile ilgili literatürdeki bazı çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, diğer bölümleri daha iyi anlamak adına, tezin okunabilirliğini arttıracak bazı temel tanım, teorem ve özelliklere, alındıkları kaynaklar ile beraber yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde J. Bergen et al. tarafından 1983 yılında yapılan birimli bir halkada tersinir değerli türevler ile ilgili çalışma incelenmiş, sıfırdan farklı tersinir değerli bir türevi olan birimli halkaların karakterizasyonu verilmiş ve bazı durumlarda türevin karakterizasyonu ayrıca belirtilmiştir.

Dördüncü bölümde M. Hongan ve H. Komatsu tarafından 1987 yılında yapılan tersinir değerli (σ, τ) -türevler ile ilgili çalışma incelenmiş, belirli koşullar altında bu tip türevi olan birimli halkaların ve ilgili türevin karakterizasyonu verilmiştir.

Beşinci bölümde H. Komatsu ve A. Nakajima tarafından 2004 yılında yapılan tersinir değerli genelleştirilmiş türevler ile ilgili çalışma incelenmiş, üzerinde sıfırdan farklı tersinir değerli genelleştirilmiş türev tanımlı olan birimli halkaların ve bu tip genelleştirilmiş türev dönüşümünün yapısı belirtilmiştir.

Anahtar sözcükler: Türev, tersinir değerli türev, bölümlü halka, matrisler halkası, yerel halka.

ABSTRACT**MAPPINGS WITH INVERTIBLE VALUES IN RINGS**

FİDAN, Utku

MSc. in Mathematics Department

Supervisor: Prof. Dr. Emine ALBAŞ

August 2022, 99 pages

This thesis essentially consists of five chapters.

In the first chapter, the subject of the thesis is introduced and some studies in the literature related to this subject are given.

In the second chapter, some basic definitions, theorems and properties that will increase the readability of the thesis are given together with their references in order to better understand the other parts.

In the third chapter, Bergen et al.'s work in 1983 on derivations with invertible values is studied, characterization of unital rings having a nonzero derivation with invertible values are given and in some cases, the characterization of derivation is given.

In the fourth chapter, M. Hongan and H. Komatsu's work in 1987 on (σ, τ) -derivations with invertible values is studied, characterization of unital rings with this type derivation under certain conditions are given and the characterization of related derivation is given.

In the fifth chapter, H. Komatsu and A. Nakajima's work in 2004 on generalized derivations with invertible values is studied and characterization of unital rings having a nonzero generalized derivation with invertible values are given and the characterization of generalized derivation in this type are also given.

Key Words: Derivation, derivation with invertible values, division ring, matrices ring, local ring.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca olduğu gibi, tüm yüksek lisans eğitimim boyunca, pandemi gibi zorlu şartlarda dahi benden yardımlarını esirgemeyen, bana yol gösteren, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum ve duyacağım danışman hocam Sayın Prof. Dr. Emine ALBAŞ'a, benden hiçbir zaman değerli zamanını esirgemeyen ve her zaman desteklerini gördüğüm hocalarım Sayın Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ'a ve Sayın Doç. Dr. Çağrı DEMİR'e teşekkürü borç bilirim.

Beni bugünlere getiren, aldığım tüm kararlarda arkamda duran, her zaman benim için ellerinden gelenin fazlasını yapan, haklarını asla ödeyemeyeceğim biricik annem Fatma FİDAN'a, biricik babam Ali Rıza FİDAN'a ve canım abim Ufuk FİDAN'a en içten duygularıyla teşekkür ederim.

12/08/2022

Utku FİDAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
TEŞEKKÜR	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xv
1 GİRİŞ	1
2 ÖN BİLGİLER	3
3 TERSİNİR DEĞERLİ TÜREVLER	17
4 TERSİNİR DEĞERLİ (σ, τ) -TÜREVLER	52
5 TERSİNİR DEĞERLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER	70
5.1 ANA SONUÇLAR	71
5.2 $M_2(D)$ NİN TERSİNİR GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLERİ	88
6 SONUÇ	96
KAYNAKLAR DİZİNİ	97
ÖZGEÇMİŞ	99

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$Z(R)$	R halkasının merkezi
$Z, Z(D)$	D bölümlü halkasının merkezi
$char R$	R halkasının karakteristiği
$U, U(R)$	R halkasının tersinir elemanlarının grubu
a_l	a elemanı ile soldan çarpım dönüşümü
$Ann_l(I), l(I)$	I kümesinin sol sıfırlayanı
$Ann_r(I), r_R(I)$	I kümesinin sağ sıfırlayanı
$f^{-1}(I)$	I kümesinin f altındaki ters görüntü kümesi
$d _N$	d dönüşümünün N kümesine kısıtlanması
$c({}_R R)$	R halkasının sol R -modül olarak uzunluğu
$c(R_R)$	R halkasının sağ R -modül olarak uzunluğu
$J, J(R)$	R halkasının Jacobson radikali
$M_n(D), D_n$	D bölümlü halkası üzerinde $n \times n$ matrisler halkası
e_{ij}	Matris birimleri

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (Devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
δ_{jk}	Kronecker deltası
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$ a $	a reel sayısının mutlak değeri
$\oplus$	Direkt toplam
$GF(2)$	Eleman sayısı 2 olan Galois cismi
$\dim_D(V)$	D -vektör uzayı V nin boyutu
$F_{M,N}$	M, N elemanları ile belirli genelleştirilmiş iç türev
${}^s F^T$	F genelleştirilmiş türevinin eşleniği
$R[x]$	R halkası üzerinde x bilinmeyenli polinomlar halkası
$\deg(p(x))$	$p(x)$ polinomunun derecesi
$F(x)$	F cismi üzerinde x bilinmeyenli rasyonel fonksiyonlar cismi
$R[x; \sigma]$	$R[x]$ halkası üzerinde σ ile belirli skew polinomlar halkası
$R((y)), \quad R\langle\langle y \rangle\rangle$	R halkası üzerinde y değişkenli Laurent serilerinin halkası

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (Devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
M_R	M sağ R -modülü
${}_R M$	M sol R -modülü



1 GİRİŞ

Halkalar ve üzerinde tanımlı olan dönüşümler üzerine bugüne kadar birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan biri, çoğu alanda önem arz eden türev dönüşümleri olmuştur.

1957 yılında E. C. Posner ile başlayan türev teorisi macerası ile beraber çok fazla problem de gün yüzüne çıkmıştır.

Daha sonrasında teorinin gelişimi, farklı türev tanımlarını ve bazı koşulları sağlayan türevleri ortaya çıkarmıştır. Bu türev tanımları içerisinde özellikle genelleştirilmiş türev kavramı, oldukça önemli bir yere sahiptir.

Çalışmamızda, tersinir değerlilik koşulunu sağlayan farklı türev kavramları ve tanımlı oldukları halkalar incelenecektir. Tersinir değerlilik koşulu ise birimli bir halkanın her bir elemanının görüntüsü, ya halkanın sıfırı ya da halkanın tersinir elemanlarının grubunda olacak şekilde sıfırdan farklı bir dönüşümün olarak ifade edilebilir. Elbette bir bölümlü halkanın sıfırdan farklı her dönüşümü tersinir değerlidir. Özel olarak, bir bölümlü halkanın sıfırdan farklı her türevi tersinir değerlidir. Fakat sıfırdan farklı bir tersinir değerli türeve sahip halkaların kesinlikle bir bölümlü halka olması gerekliliği de yoktur.

Tersinir değerli türevler ile ilgili yapılan ilk çalışma, 1983 yılında J. Bergen et al. tarafından yapılan çalışmadır. Bu çalışmada birimli bir halka üzerinde, tersinir değerlilik koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir (adi) türevin var olduğu durum incelenmiştir. Halkanın ve türev dönüşümünün yapısı ile ilgili sonuçlara yer verilmiştir. Sonrasında, bu çalışmayı genelleştiren diğer çalışmalar literatürde yer edinmiştir.

Bu çalışmalardan biri 1987 yılında M. Hongan ve H. Komatsu tarafından yapılan çalışmadır. Bu çalışmada birimli bir halkanın belirli koşulları sağlayan σ ve τ dönüşümleri ve halkanın sıfırdan farklı bir sağ ideali için, bu sağ idealin her elemanının görüntüsü ya halkanın sıfırı ya da halkanın tersinir elemanlarının grubunda olacak şekilde tanımlı bir (σ, τ) -türevinin var olduğu durum ele alınmıştır. Halkanın ve türev dönüşümünün yapısı ile ilgili sonuçlara yer verilmiştir. Ayrıca bu çalışma, 1983 yılında J. Bergen et al., 1983 yılında J. Bergen ve I.N. Herstein ve 1985 yılında J.-C. Chang tarafından yapılan çalışmaları genelleştirdiğinden, önemli bir yere sahiptir.

Daha sonrasında, 2004 yılında H. Komatsu ve A. Nakajima, sıfırdan

farklı bir tersinir değerli genelleştirilmiş türeve sahip birimli halkaların yapısını incelemiştir. Bu çalışmada, 1983 yılında J. Bergen et al. tarafından yapılan çalışma tersinir değerli genelleştirilmiş türevlere genişletilmiştir. Üzerinde bir tersinir değerli genelleştirilmiş türev tanımlı olan birimli halkaların ve genelleştirilmiş türev dönüşümlerinin karakterizasyonu ile ilgili önemli sonuçlara yer verilmiştir. Ayrıca bir D bölümlü halkası üzerinde 2×2 tipinde matrisler halkası $M_2(D)$ nin bir genelleştirilmiş türevinin eşleniği tanımlanmış ve bu halkanın tersinir değerli genelleştirilmiş türevlerinin eşlenik sınıflarının temsilcilerinin bir tam kümesi karakterize edilmiştir.

Çalışmamızda, yukarıda belirtilen bu üç çalışma üzerine yoğunlaşılacaktır. Amacımız, tersinir değerlilik koşulunu sağlayan bu üç tipteki türev kavramlarını ele alarak, hem bu dönüşümlerin hem de üzerinde tanımlı oldukları birimli halkaların yapısını incelemektir.

2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, çalışmanın ilerleyen bölümlerini daha iyi anlamak adına, sonraki bölümlerde geçecek olan tanımlar, yardımcı özellikler, teoremler ve örneklere, alındıkları kaynaklar ile beraber yer verilecektir.

Tanım 2.1 (Hungerford, 1980) R bir halka olmak üzere, R deki ikinci işlem “.” ya göre her $a \in R$ için $1_R a = a 1_R = a$ olacak şekilde $1_R \in R$ var ise R halkasına **birimli halka** ve $1_R \in R$ elemanına R halkasının **birimi** denir.

Tanım 2.2 (Hungerford, 1980) R bir birimli halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $ca = 1_R$ (sırasıyla $ab = 1_R$) olacak şekilde bir $c \in R$ (sırasıyla $b \in R$) var ise o zaman a elemanına **sol** (sırasıyla **sağ**) **tersinir** denir. Burada c elemanına (sırasıyla b) a elemanının **sol** (sırasıyla **sağ**) **tersi** denir. Eğer $a \in R$ elemanı hem sol tersinir hem de sağ tersinir ise o zaman a elemanına **tersinir** denir.

Tanım 2.3 (Hungerford, 1980) D bir birimli halka ve $1_D \neq 0$ olsun. Eğer D nin sıfırdan farklı her bir elemanı tersinir ise o zaman D halkasına bir **bölümlü halka** denir.

Tanım 2.4 (Hungerford, 1980) R bir halka olsun. Eğer her $a \in R$ için $na = 0$ olacak şekilde bir en küçük n pozitif tam sayısı var ise o zaman R ye **n karakteristiklidir** veya R nin **karakteristiği n dir** denir. Burada n pozitif tam sayısına R nin **karakteristiği** denir ve $\text{char} R = n$ notasyonu ile gösterilir. Eğer bu koşulu sağlayan bir n pozitif tam sayısı yok ise o zaman R nin **karakteristiği sıfırdır** denir ve $\text{char} R = 0$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.5 (Brešar, 2014) R bir halka olmak üzere

$$Z(R) = \{c \in R : cx = xc, \text{ her } x \in R\}$$

ile tanımlı R nin alt kümesine R nin **merkezi** ve $Z(R)$ nin elemanlarına R nin **merkezi elemanları** denir.

Tanım 2.6 (Brešar, 2014) Bir R halkasının, R deki çarpma işlemi altında kapalı olan bir toplamsal alt grubuna R nin **alt halkası** denir. Örneğin, $Z(R)$ kümesi R nin bir alt halkasıdır.

Teorem 2.1 ([Bhattacharya et al, 1994]) *R bir halka ve R nin boştan farklı bir alt kümesi S olsun. O zaman S nin, R nin bir alt halkası olabilmesi için gerek ve yeter bir koşul her $a, b \in S$ için $a - b \in S$ ve $ab \in S$ olmasıdır.*

Tanım 2.7 ([Brešar, 2014]) *R bir birimli halka olsun. Eğer R nin bir alt halkası, R nin birimini içeriyor ve her elemanı tersinir ise o zaman o alt halkaya R nin bir **bölümlü alt halkası** denir.*

Tanım 2.8 ([Jacobson, 1985]) *Bir R halkasının tüm tersinir elemanlarının kümesi, R deki çarpma işlemi ile bir grup teşkil eder. Bu gruba R nin **tersinir elemanlarının grubu** denir ve U veya $U(R)$ notasyonu ile gösterilir.*

Tanım 2.9 ([Hungerford, 1980]) *Bir değişmeli G grubunun sonlu mertebeli elemanlarından oluşan alt kümesi G_t olsun. Bu durumda G_t kümesi, G nin bir alt grubudur. Burada eğer $G = G_t$ ise o zaman G ye **burulma grubu** denir. Eğer G_t alt grubu G nin sadece birim elemanını içeriyorsa o zaman G ye **burulmasız grup** denir.*

*R bir halka, $x \in R$ ve n bir tam sayı olsun. Eğer $nx = 0$ iken $n = 0$ veya $x = 0$ ise o zaman R ye **n -burulmasız halka** denir. Eğer $nx = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq x \in R$ ve $0 \neq n$ tam sayısı var ise o zaman R ye **n -burulmalı halka** denir.*

Tanım 2.10 ([Brešar, 2014]) *R bir birimli halka ve $0 \neq n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\{e_{ij} \in R : 1 \leq i, j \leq n\}$ kümesi için eğer*

$$e_{11} + e_{22} + \cdots + e_{nn} = 1$$

ve her $1 \leq i, j, k \leq n$ için

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

olmak üzere

$$e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$$

*eşitlikleri sağlanıyorsa $\{e_{ij} \in R : 1 \leq i, j \leq n\}$ kümesine $n \times n$ tipinde **matris birimlerinin kümesi** denir.*

Tanım 2.11 (Hungerford, 1980) R bir halka ve R nin bir alt halkası S olsun. Eğer her $x \in S$ ve $r \in R$ için $rx \in S$ ($rx \in S$) ise o zaman S ye R nin **sağ** (sol) **ideali** denir. Eğer S , R nin hem bir sağ hem de bir sol ideali ise o zaman S ye R nin **iki yanlı ideali** ya da sadece **ideali** denir.

Tanım 2.12 (Hungerford, 1980) Bir R halkasının sadece sıfır elemanından oluşan alt kümesi (0) ile gösterilir. Ayrıca R nin kendisi ve sadece sıfır elemanından oluşan alt kümesi, R nin idealleridir. Bu iki ideale R nin **öz olmayan ideali** denir. Bir R halkasının $I \neq (0)$ ve $I \neq R$ koşullarını sağlayan bir I ideali var ise o zaman I ya R nin **öz ideali** denir. Benzer tanımlar, sağ ve sol idealler için de yapılabilir. Burada eğer R bir birimli halka ve I , R nin bir ideali ise o zaman $I = R$ olması için gerek ve yeter bir koşul $1_R \in I$ olmasıdır. Sonuç olarak, I nin bir öz ideal olması için gerek ve yeter bir koşul I idealinin tersinir eleman içermemesidir. Özellikle, bir bölümlü D halkasının sıfırdan farklı her elemanı tersinir olduğundan, D nin öz sağ, sol ve iki yanlı ideali yoktur.

Tanım 2.13 (Brešar, 2014) R bir halka ve I ile J , R nin sol(sağ) idealleri olsunlar. O zaman $I + J = \{\sum u + v : u \in I, v \in J\}$, R nin bir sol (sağ) idealidir ve I ile J sol (sağ) ideallerinin **toplamı** denir. Benzer şekilde $IJ = \{\sum_{i=1}^n u_i v_i : u_i \in I, v_i \in J, n \in \mathbb{N}\}$, R nin bir sol (sağ) idealidir ve I ile J idealinin **çarpımı** denir.

Tanım 2.14 (Brešar, 2014) R bir halka ve $a \in R$ olsun. Bu durumda $\mathbb{Z}a = \{ka : k \in \mathbb{Z}\}$ ve $aR = \{ar : r \in R\}$ olmak üzere $I = aR + \mathbb{Z}a$, R nin bir sağ idealidir ve bu ideale **a elemanı ile üretilen sağ ideal** denir. Ayrıca a elemanına ise I nin **üreteci** denir. Benzer şekilde $Ra + \mathbb{Z}a$ kümesine R nin a elemanı ile üretilen sol ideali denir ve $(a) = RaR + Ra + aR + \mathbb{Z}a$ kümesine R nin a elemanı ile üretilen iki yanlı ideali denir. Özel olarak R bir birimli halka ise o zaman a elemanı ile üretilen sağ ideal aR , a elemanı ile üretilen sol ideal Ra ve a elemanı ile üretilen iki yanlı ideal RaR olur.

Tanım 2.15 (Brešar, 2014) Bir R halkasının e elemanı için $e^2 = e$ koşulu sağlanıyorsa o zaman e ye bir **idempotent eleman** denir. Özel olarak e elemanı, R nin merkezinde ise o zaman e ye R nin **merkezi idempotent elemanı** denir.

Tanım 2.16 ([Brešar, 2014]) R bir halka ve R nin bir sol ideali L olsun. Eğer $L \neq (0)$ ise ve R nin sıfırdan farklı L de kapsanan bir sol ideali yok ise o zaman L ye R nin bir **minimal sol ideali** denir. Minimal sağ ve minimal iki yanlı ideal tanımları da benzer şekilde yapılabilir.

Yardımcı Özellik 2.1 ([Lam, 2001]) R bir halka ve R nin bir minimal sol ideali U olsun. O zaman ya $U^2 = (0)$ dır ya da $U = Re$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ idempotenti vardır.

Tanım 2.17 ([Brešar, 2014]) R bir halka ve R nin bir sol ideali U olsun. Eğer $U \neq R$ ve U yu kapsayan R nin hiçbir öz sol ideali yok ise o zaman U ya R nin bir **maksimal sol ideali** denir. Maksimal sağ ve maksimal iki yanlı ideal tanımları da benzer şekilde yapılabilir.

Yardımcı Özellik 2.2 ([Brešar, 2014]) Eğer R bir birimli halka ve R nin bir öz sol ideali L olsun. O zaman L , R nin bir maksimal sol idealinde kapsanır.

Yardımcı Özellik 2.2, birimli halkaların maksimal tek yanlı ideallerinin varlığını garantiler.

Tanım 2.18 ([Brešar, 2014]) R bir halka ve I , R nin bir alt kümesi olmak üzere

$$\text{Ann}_l(I) = \{x \in R \mid xI = 0\}$$

sol idealine I nın R deki **sol sıfırlayanı** ve

$$\text{Ann}_r(I) = \{x \in R \mid Ix = 0\}$$

sağ idealine de I nın R deki **sağ sıfırlayanı** denir.

Tanım 2.19 ([Brešar, 2014]) R bir halka ve R nin bir ideali I olsun. Eğer $I^n = (0)$ olacak şekilde bir n pozitif tam sayısı var ise o zaman I ya **nilpotent ideal** denir. Benzer şekilde nilpotent sağ ve nilpotent sol ideal tanımı da yapılabilir.

Tanım 2.20 ([Brešar, 2014]) Bir R halkasındaki a elemanı için $a^n = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq n \in \mathbb{N}$ var ise o zaman a elemanına bir **nilpotent eleman** denir. Burada bu koşulu sağlayan en küçük $0 \neq n$ doğal sayısına o elemanın **nilpotentlik derecesi** denir.

Tanım 2.21 (Brešar, 2014) R bir halka ve R nin bir ideali I olsun. Eğer I nin her elemanı nilpotent ise o zaman I ya **nil ideal** denir. Benzer şekilde nil sağ ve nil sol ideal tanımları da yapılabilir.

Tanım 2.19, Tanım 2.20 ve Tanım 2.21 den her nilpotent idealin aslında bir nil ideal olduğu görülür.

Yardımcı Özellik 2.3 (Brešar, 2014) R bir halka olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir:

- (i) Her $a \in R$ için, $aRa = (0)$ iken $a = 0$ dır;
- (ii) R nin her I sol ideali için, $I^2 = (0)$ ise $I = (0)$ dır;
- (iii) R nin her I sağ ideali için, $I^2 = (0)$ ise $I = (0)$ dır;
- (iv) R nin her I ideali için, $I^2 = (0)$ ise $I = (0)$ dır;
- (v) R nin sıfırdan farklı nilpotent ideali yoktur.

Tanım 2.22 (Brešar, 2014) Bir R halkası, Yardımcı Özellik 2.3 deki özelliklerden herhangi birini (dolayısıyla hepsini) sağlıyorsa o zaman R ye **yarı asal halka** denir.

Sonuç 2.1 (Brešar, 2014) Bir yarı asal R halkasının bir e idempotenti için, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- (i) eRe bir bölümlü halkadır.
- (ii) Re bir minimal sol idealdir.
- (iii) eR bir minimal sağ idealdir.

Tanım 2.23 (Brešar, 2014) R bir halka olsun. Eğer $R^2 \neq (0)$ ise ve R nin kendisi ve (0) dan başka ideali yok ise o zaman R ye bir **basit halka** denir.

Tanım 2.24 (Brešar, 2014) R bir halka ve M bir toplamsal grup olsun. Eğer her $r, s \in R$ ve her $m, n \in M$ için

- (i) $(r + s)m = rm + sm$
- (ii) $r(m + n) = rm + rn$

$$(iii) \quad r(sm) = (rs)m$$

koşullarını sağlayan, $R \times M$ den M ye, $(r, m) \rightarrow rm$ ile tanımlı bir dönüşüm var ise, M ye **sol R -modül** denir. Ek olarak, R birimli bir halka ve her $m \in M$ için $1m = m$ ise M ye bir **üniter sol R -modül** denir. Benzer şekilde (üniter) sağ R -modül tanımı da yapılabilir.

Tanım 2.25 ([Brešar, 2014]) R ve S iki halka olsun. Eğer M bir sol R -modül, bir sağ S -modül ve üstelik her $r \in R$, $m \in M$, $s \in S$ için

$$(rm)s = r(ms)$$

koşulu sağlanıyor ise o zaman M ye (R, S) -**bimodül** denir. Bu tanımdan hareketle, bir (R, R) -bimodüle **R -bimodül** denir.

Tanım 2.26 ([Brešar, 2014]) R bir halka ve M bir sol R -modül olsun. Bir $L \subseteq M$ için eğer L , M nin bir toplamsal alt grubu ve her $r \in R$, $x \in L$ için $rx \in L$ ise o zaman L ye M nin bir **sol alt R -modülü** denir. Benzer şekilde bir sağ R -modül için sağ alt R -modül tanımı yapılabilir.

Tanım 2.27 ([Brešar, 2014]) R bir halka ve M bir sol R -modül olsun. Eğer $RM \neq (0)$ ve R nin kendisi ve (0) dan başka sol alt R -modülü yok ise o zaman M ye **basit sol R -modül** denir. Benzer şekilde basit sağ R -modül tanımı da yapılabilir.

Tanım 2.28 ([Brešar, 2014]) R bir halka, M ve N birer sol R -modül ve $\varphi : M \rightarrow N$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $m, m' \in M$ ve her $r \in R$ için

$$\varphi(m + m') = \varphi(m) + \varphi(m')$$

ve

$$\varphi(rm) = r\varphi(m)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa o zaman φ dönüşümüne bir **sol R -modül homomorfizması** denir. Benzer şekilde sağ R -modül homomorfizması tanımı da yapılabilir. Burada $\text{Ker } \varphi = \{m \in M : \varphi(m) = 0\}$ kümesi M nin bir sol alt R -modülüdür ve bu alt modüle φ nin **çekirdeği** denir. Aynı zamanda $\text{Im } \varphi = \{\varphi(m) : m \in M\}$ kümesi N nin bir sol alt R -modülüdür ve bu alt modüle φ nin **görüntü kümesi** denir. Bire-bir ve örten bir sol

R -modül homomorfizmasına **sol R -modül izomorfizması** denir ve $M \cong N$ ile gösterilir. Ayrıca $M/\text{Ker } \varphi \cong \text{Im } \varphi$ dir (Modüllerde I. İzomorfizma Teoremi). Benzer tanımlar bir sağ R -modül için de yapılabilir.

Yardımcı Özellik 2.4 (Brešar, 2014) R bir halka olsun. Her basit R -modül, R nin bazı U maksimal sol idealleri için R/U ya izomorftur. Tersine, eğer U , R nin $R^2 \not\subseteq U$ (eğer R birimli ise bu koşul otomatik olarak sağlanır) olacak şekilde bir maksimal sol ideali ise o zaman R/U bir basit R -modüldür.

Tanım 2.29 (Brešar, 2014) M bir modül ve $\{M_i : i \in I\}$ kümesi M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Burada $\sum_{i \in I} M_i$, M nin bir alt modülüdür ve bu alt modüle M_i alt modüllerinin **toplamı** denir. Eğer $M_j \cap \left(\sum_{i \in I - \{j\}} M_i\right) = \{0\}$ ise o zaman bu toplama **direkt toplam** denir ve $\oplus_{i \in I} M_i$ ile gösterilir.

Teorem 2.2 (Brešar, 2014) R, R' iki halka ve $\varphi : R \rightarrow R'$ bir halka homomorfizması olsun. O zaman $R/\text{Ker } \varphi \cong \varphi(R')$ olur (Halkalarda I. İzomorfizma Teoremi).

Tanım 2.30 (Brešar, 2014) R bir halka ve M bir sol R -modül olsun. Bir $B \subseteq M$ alalım. Eğer her farklı $b_1, \dots, b_n \in B$ elemanları ve her $r_1, \dots, r_n \in R$ elemanları için $r_1 b_1 + \dots + r_n b_n = 0$ iken her bir i için $r_i = 0$ ise o zaman B ye **lineer bağımsız** denir. Eğer B lineer bağımsız değil ise o zaman B ye **lineer bağımlı** denir.

Tanım 2.31 (Brešar, 2014) Bir M sol R -modülünün bir B lineer bağımsız alt kümesi eğer M yi üretiyorsa o zaman B ye M nin bir **bazı** denir.

Tanım 2.32 (Brešar, 2014) R bir birimli halka olsun. Bir üniter R -modül, eğer bir baza sahip ise o modüle bir **serbest R -modül** denir.

Tanım 2.33 (Brešar, 2014) D bir bölümlü halka olsun. O zaman bir üniter (sol) D -modüle, D üzerinde bir (sol) **D -vektör uzayı** denir.

Tanım 2.34 (Brešar, 2014) R bir halka olsun. Bir R -modül M , eğer basit alt modüllerinin bir ailesinin direkt toplamı ise o zaman M ye **yarı basit** denir.

Sonuç 2.2 (Anderson and Fuller, 1974) Bir R halkasının yarı basit olabilmesi için gerek ve yeter bir koşul R_R nin yarı basit olmasıdır.

Sonuç 2.3 ([Lam, 2001]) *Bir sol yarı basit R halkası her zaman sağ yarı basittir. Bunun tersi de doğrudur.*

Tanım 2.35 ([Brešar, 2014]) *Eğer bir M modülünün her bir $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$ alt modül zinciri için, $M_m = M_{m+1} \dots$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ var ise o zaman M modülüne **artin** (ya da **azalan zincir kuralını sağlıyor**) denir.*

Tanım 2.36 ([Brešar, 2014]) *Eğer bir N modülünün her bir $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots$ alt modül zinciri için, $N_n = N_{n+1} \dots$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ var ise o zaman N modülüne **noether** (ya da **artan zincir kuralını sağlıyor**) denir.*

Tanım 2.37 ([Brešar, 2014]) *Eğer bir R halkası, bir artin sol (sırasıyla sağ) R -modül ise o zaman R ye **sol** (sırasıyla sağ) **artin** denir. Eğer R halkası hem sol hem de sağ artin ise o zaman R ye **artin** denir.*

Tanım 2.38 ([Brešar, 2014]) *Eğer bir R halkası, bir noether sol (sırasıyla sağ) R -modül ise o zaman R ye **sol** (sırasıyla sağ) **noether** denir. Eğer R halkası hem sol hem de sağ noether ise o zaman R ye **noether** denir.*

Sonuç 2.4 ([Hungerford, 1980]) *Eğer I , bir yarı basit sol artin halkası R nin bir ideali ise o zaman e , R nin merkezinde bir idempotent olmak üzere $I = Re$ dir.*

Tanım 2.39 ([Brešar, 2014]) *Bir R halkasının bir P ideali bir basit R -modülün sıfırlayanı ise P ye **primitif ideal** denir.*

Tanım 2.40 ([Brešar, 2014]) *Bir R halkasının tüm primitif ideallerinin arakesitine R nin **Jacobson radikali** denir ve $J(R)$ ile gösterilir.*

Sonuç 2.5 ([Brešar, 2014]) *Birimli bir R halkasının Jacobson radikali, R nin tüm maksimal sol (sağ) ideallerinin arakesitine eşittir.*

Eğer R bir birimli halka ise o zaman R nin maksimal sol idealleri vardır (Yardımcı Özellik 2.2). Ayrıca $J(R)$, R nin tüm maksimal sol ideallerinin arakesitine eşittir (Sonuç 2.5).

Sonuç 2.6 *R bir birimli halka ise $J(R) \neq R$ dir.*

Yardımcı Özellik 2.5 ([Brešar, 2014]) *Bir R halkasının her nil sağ ya da sol ideali $J(R)$ de kapsanır.*

Teorem 2.3 ([Lam, 2001]) R bir sol artin halkası olsun. O zaman $J(R)$, R nin en büyük nilpotent sol idealidir, aynı zamanda en büyük nilpotent sağ idealidir.

Tanım 2.41 ([Lam, 2001]) Bir R halkasına, eğer $J(R) = (0)$ ise **Jacobson yarı basit** (ya da kısaca J -yarı basit) denir.

Yardımcı Özellik 2.6 ([Lam, 2001]) Herhangi bir R halkası için, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- (1) R yarı basittir;
- (2) R J -yarı basittir ve sol artindir;
- (3) R J -yarı basittir ve esas sol idealleri üzerinde azalan zincir kuralını sağlar.

Tanım 2.42 ([Anderson and Fuller, 1974]) M sıfırdan farklı bir modül ve M nin $M_0, M_1, \dots, M_n$, alt modülleri için $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots \supseteq M_n = (0)$ olsun. Eğer her $i = 1 \dots n$ için M_{i-1}/M_i bir basit modül ise o zaman bu zincire M için bir **n uzunluklu kompozisyon serisi** denir.

Teorem 2.4 ([Anderson and Fuller, 1974]) Eğer bir M modülünün bir kompozisyon serisi var ise o zaman M için kompozisyon serilerinin her çifti eşittir (*Jordan-Hölder Teoremi*).

Tanım 2.43 ([Anderson and Fuller, 1974]) Eğer bir modülün bir kompozisyon serisi var ise o zaman o modülün her kompozisyon serisinin uzunluğu aynıdır. Bir M modülü hem artin hem noether ise M modülüne **sonlu uzunluklu** denir ve (**kompozisyon**) **uzunluğu** $c(M)$ ile gösterilir. Eğer $c(M) = 0$ ise o zaman $M = (0)$ dır, eğer $c(M) = n \neq 0$ ise o zaman M nin bir n uzunluklu kompozisyon serisi vardır.

Teorem 2.5 ([Lam, 2001]) R bir basit halka olsun. Aşağıdakiler denktir:

- (i) R sol Artin halkasıdır;
- (ii) R (sol) yarı basittir;
- (iii) R nin bir minimal sol ideali vardır;
- (iv) Bir D bölümlü halkası ve bir $0 \neq n$ doğal sayısı için $R \cong M_n(D)$ dir.

Teorem 2.5 (iv) de n ve D tek türlü belirlidir (Lam, 2001, Corollary 3.13) ve $n = c({}_R R)$ dir (Anderson and Fuller, 1974, Theorem 13.4, Proposition 13.5). Teorem 2.5 deki denkliliklerden, eğer bir basit R halkası sol artin ise o zaman sağ artindir (simetriden, tersi de doğrudur) (Lam, 2001, syf 37). Ayrıca Sonuç 2.2 ve Sonuç 2.3 den yararlanarak, Teorem 2.5 de sol yerine sağ alınabilir.

Tanım 2.44 (Anderson and Fuller, 1974) Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

- (a) R bir yerel halkadır;
- (b) R tek bir maksimal sol ideali vardır;
- (c) $J(R)$ bir maksimal sol idealdir;
- (d) R nin sol tersleri olmayan tüm elemanlarının kümesi, R deki toplama işlemi altında kapalıdır;
- (e) $J(R) = \{x \in R : Rx \neq R\}$ dir;
- (f) $R/J(R)$ bir bölümlü halkadır;
- (g) $J(R) = \{x \in R : x \text{ tersinir değil}\}$ dir;
- (h) Eğer $x \in R$ ise o zaman ya x ya da $1 - x$ tersinirdir.

Tanım 2.44 (b) de, sol yerine sağ alınabilir (Lam, 2001, Theorem 19.1).

Tanım 2.45 (Brešar, 2014) D bir bölümlü halka olmak üzere, $D[[\omega]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega^n : a_n \in D\}$ olsun. Bu küme üzerinde toplama ve çarpma işlemini; her $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n \omega^n \in D$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \omega^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \omega^n$$

ve $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n \omega^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \omega^n$$

ile tanımlayalım. O zaman $D[[\omega]]$ bu işlemlerle beraber bir halka teşkil eder ve bu halkaya D üzerinde **formal kuvvet serilerinin halkası** denir. Ayrıca D üzerinde ω değişkenli polinomlar halkası olan $D[\omega]$ halkası, $D[[\omega]]$ halkasının bir alt halkasıdır. Bu tanımda D yerine keyfi bir R halkası da alınabilir.

Yardımcı Özellik 2.7 (Brešar, 2014) D bir bölümlü halka olsun. O zaman bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega^n$ nin $D[[\omega]]$ da tersinir olabilmesi için gerek ve yeter bir koşul $a_0 \neq 0$ olmasıdır.

Tanım 2.46 (Brešar, 2014) R keyfi bir halka ve $R((\omega)) = \{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \omega^n : a_n \in R \text{ ve sadece sonlu sayıdaki } n < 0 \text{ için } a_n \neq 0\}$ olsun. Eğer $R((\omega))$ üzerindeki toplama ve çarpma işlemi, formal kuvvet serileri halkaları üzerindeki toplama ve çarpma işlemi gibi tanımlanırsa o zaman $R((\omega))$ bir halka temsil eder ve bu halkaya **Laurent serilerinin halkası** denir. Burada R yerine bir D bölümlü halkası alınırsa, $D((\omega))$ bir bölümlü halka olur.

Tanım 2.47 (Brešar, 2014) R bir halka ve $R[\omega]$, R üzerinde ω değişkenli polinomlar halkası olsun. Burada σ , R nin bir endomorfizması olmak üzere $\omega a = a \omega$ yerine $\omega a = \sigma(a) \omega$ alalım. Buna uygun olarak her $a, b \in R$ için

$$(a\omega^i)(b\omega^j) = a\sigma^i(b)\omega^{i+j}$$

dir. Bu durumda ortaya çıkan halkaya **skew polinomlar halkası** denir ve $R[\omega; \sigma]$ ile gösterilir. Benzer şekilde R üzerinde **skew kuvvet serileri halkası** da tanımlanabilir ve $R[[\omega; \sigma]]$ ile gösterilir. Özel olarak burada σ , R nin bir otomorfizması ise R üzerinde **skew Laurent serileri halkası** da tanımlanabilir ve $R((\omega; \sigma))$ ile gösterilir.

Teorem 2.6 (Hungerford, 1980) R bir değişmeli halka ve S , her $a, b \in S$ için $ab \in S$ koşulunu sağlayan R nin boştan farklı bir alt kümesi olsun (çarpımsal altküme). Burada $R \times S$ üzerinde bir $\sim$ bağıntısını

$$(r, s) \sim (r', s') \Leftrightarrow \text{bazı } s_1 \in S \text{ için } s_1(rs' - r's) = 0$$

olarak tanımlayalım. O zaman $\sim$ bağıntısı, $R \times S$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Üstelik R nin sıfır böleni yok ve $0 \notin S$ ise o zaman bu tanım

$$(r, s) \sim (r', s') \Leftrightarrow rs' - r's = 0$$

olarak ifade edilir.

Teorem 2.7 (Hungerford, 1980) R , S ve $\sim$, Teorem 2.1.8 deki gibi olsun. Burada $R \times S$ nin $\sim$ bağıntısına göre tüm denklik sınıflarının kümesini $S^{-1}R$ ile ve $(r, s) \in R \times S$ elemanının denklik sınıfını r/s ile göstereyim.

(i) $S^{-1}R$ kümesi üzerinde toplama ve çarpma

$$r/s + r'/s' = (rs' + r's)/ss' \text{ ve } (r/s)(r'/s') = rr'/ss'$$

ile tanımlanmak üzere $S^{-1}R$ bir birimli ve değişmeli halkadır.

(ii) Eğer R sıfır böleni olmayan sıfırdan farklı bir halka ve $0 \notin S$ ise o zaman $S^{-1}R$ bir tamlık bölgesidir.

(iii) Eğer R sıfır böleni olmayan sıfırdan farklı bir halka ve S, R nin tüm sıfırdan farklı elemanlarının kümesi ise o zaman $S^{-1}R$ bir cisimdir.

Tanım 2.48 (Hungerford, 1980) Teorem 2.7 deki gibi tanımlı olan $S^{-1}R$ halkasına, R nin **kesir halkası** denir.

Örnek 2.1 (Brešar, 2014) F bir cisim ve $F[x]$, F üzerinde x değişkenli polinomlar halkası ve $F(x) = \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} : p(x), q(x) \in F[x], (p(x), q(x)) = 1, q(x) \neq 0 \right\}$ olsun. Böylece her $\frac{p(x)}{q(x)}, \frac{s(x)}{r(x)} \in F(x)$ için

$$\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{s(x)}{r(x)} = \frac{p(x)r(x) + s(x)q(x)}{q(x)r(x)}$$

ve

$$\frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{s(x)}{r(x)} = \frac{p(x)s(x)}{q(x)r(x)}$$

ile tanımlı “+” ve “.” işlemlerine göre $F(x)$ bir birimli ve değişmeli halka teşkil eder ve S kümesi, $F[x]$ in tüm sıfırdan farklı elemanlarından oluştuğundan Teorem 2.7 (iii) den bir cisimdir. Bu cisme $F[x]$ in **rasyonel fonksiyonlar cismi** denir.

Tanım 2.49 (Hungerford, 1980) R bir birimli halka olsun. Eğer $A, B \in M_n(R)$ için, $B = PAP^{-1}$ olacak şekilde bir P tersinir matrisi var ise o zaman A ve B ye **benzer matrisler** denir ve $A \sim B$ ile gösterilir. Burada $A \sim B \Leftrightarrow B = PAP^{-1}, \exists P \in M_n(R)$ ile tanımlı bağıntı bir denklik bağıntısı teşkil eder. Bu durumda A ve B **aynı denklik sınıfındadır**; yani **eşleniktirler** denir.

Tanım 2.50 (Brešar, 2014) F bir cisim, n bir pozitif tam sayı olmak üzere $A \in M_n(F)$ olsun. Burada A nın determinant değeri $\det(A)$ ve $M_n(F)$ nin birimi I olmak üzere $p(x) = \det(xI - A) \in F[x]$ polinomuna A matrisinin **karakteristik polinomu** denir.

Teorem 2.8 (Brešar, 2014) F cisim, n bir pozitif tam sayı olmak üzere $A \in M_n(F)$ olsun. O zaman A , kendi karakteristik polinomunun bir köküdür; yani A nin karakteristik polinomu $p_A(x)$ olmak üzere, $p_A(A) = 0$ dır (Cayley-Hamilton Teoremi).

Teorem 2.9 (Koç, 2010) F bir cisim, n bir pozitif tam sayı olmak üzere $A \in M_n(F)$ olsun. Eğer $P \in M_n(F)$ bir tersinir matris ise o zaman A ile $P^{-1}AP$ matrislerinin karakteristik polinomları aynıdır (Section 1, Chapter 6, Theorem 10).

Tanım 2.51 (Bhattacharya et al, 1994) Eğer F , bir E cisminin alt cismi ise o zaman E ye F nin bir **cisim genişlemesi** veya daha basit olarak F nin bir **genişlemesi** denir.

Tanım 2.52 (Bhattacharya et al, 1994) Eğer E , F nin bir genişlemesi ise o zaman E nin F üzerinde bir vektör uzayı olduğu açıktır. Burada E nin F üzerindeki vektör uzayı olarak boyutuna E nin F üzerindeki **derecesi** denir.

Tanım 2.53 (Posner, 1957) R bir halka ve $d : R \rightarrow R$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

$$d(xy) = d(x)y + xd(y)$$

eşitliği sağlanıyorsa o zaman d ye R nin bir **türevi** denir. Özel olarak $a \in R$ olmak üzere, her $x \in R$ için $\delta(x) = ax - xa$ ile tanımlı dönüşüm R nin bir türevidir ve bu tip bir türeve **a elemanı ile belirli iç türev** denir.

Tanım 2.54 (Hongan and Komatsu, 1987) R bir halka, $\sigma, \tau : R \rightarrow R$ iki dönüşüm olsun. Burada R nin bir toplamsal dönüşümü δ olmak üzere, her $x, y \in R$ için

$$\delta(xy) = \delta(x)\sigma(y) + \tau(x)\delta(y)$$

eşitliği sağlanıyorsa o zaman δ ya R nin bir **(σ, τ) -türevi** denir.

Tanım 2.55 (Brešar, 1991) R bir halka ve $f : R \rightarrow R$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

$$f(xy) = f(x)y + xd(y)$$

olacak şekilde R nin bir d türevi var ise o zaman f ye R nin bir **genelleştirilmiş türevi** (Brešar anlamında) denir. Ayrıca burada d türevine,

f genelleştirilmiş türevinin **ilişkili türevi** denir. Özel olarak $a, b \in R$ olmak üzere, her $x \in R$ için $g(x) = ax + xb$ ile tanımlı dönüşüm bir genelleştirilmiş türevdir ve bu tip genelleştirilmiş türevlere **genelleştirilmiş iç türev** (Brešar anlamında) denir.

Tanım 2.56 (Nakajima, 1999) Eğer k birimli ve değişmeli bir halka, M bir sol ve sağ S -modül olmak üzere herhangi $s, t \in S$, $a \in k$ ve $m \in M$ için

$$s(mt) = (sm)t, \quad a(sm) = s(am) \quad am = ma$$

oluyorsa o zaman S , k üzerinde bir cebir olmak üzere M ye S/k -**bimodül** denir.

Tanım 2.57 (Nakajima, 1999) S , k ve M Tanım 2.56 daki gibi olsun. Bir k -modül dönüşümü $f : S \rightarrow M$ ve bir $m \in M$ için, eğer $f(st) = f(s)t + sf(t) + smt$ eşitliği herhangi $s, t \in S$ için sağlanıyorsa o zaman (f, m) çiftine bir **genelleştirilmiş türev** (Nakajima anlamında) denir.

Tanım 2.58 (Leger and Luks, 2000) A , karakteristiği 2 den farklı bir cisim üzerinde birleşmeli olmayan bir cebir ve A nın $\mathbb{Z}$ -modül homomorfizmalarının kümesi $\text{Hom}(A, A)$ olsun. Bir $f \in \text{Hom}(A, A)$ olmak üzere, her $x, y \in A$ için

$$f(x)y + xf'(y) = f''(xy)$$

olacak şekilde $f', f'' \in \text{Hom}(A, A)$ var ise o zaman f ye A nın bir **genelleştirilmiş türevi** (Leger ve Luks anlamında) denir.

3 TERSİNİR DEĞERLİ TÜREVLER

Bu bölümde Jeffrey Bergen, Israel Nathan Herstein ve Charles Lanski'nin 1983 yılında yapmış oldukları “Derivations With Invertible Values” adlı çalışma incelenecektir.

Çalışmanın temel sonucu aşağıda verilen teoremdir. Teoremden, üzerinde her $x \in R$ için ya $d(x) = 0$ ya da $d(x)$ R de tersinir olacak şekilde $0 \neq d$ türevi tanımlı olan birimli R halkalarının karakterizasyonu ve R halkası ile d türevi arasındaki ilişki ele alınacaktır. Bu durumda $2R = (0)$ iken oluşan özel bir durum dışında, R nin ya bir D bölümlü halkası ya da bir D bölümlü halkası üzerindeki 2×2 tipindeki matrisler halkası D_2 olduğu sonucuna ulaşılabacaktır.

Teorem 3.1 *Bir birimli R halkasının her bir $x \in R$ için ya $d(x) = 0$ ya da $d(x)$ tersinir olacak şekilde bir $0 \neq d$ türevi var olsun. O zaman R halkası*

1. *bir D bölümlü halkasıdır, ya da*
2. *D bir bölümlü halka olmak üzere D_2 dir, ya da*
3. *D bir bölümlü halka olmak üzere $D[x]/(x^2)$ dir ve $\text{char} D = 2$, $d(D) = \{0\}$, $d(x) = 1 + ax$ olacak şekilde D nin merkezi Z de bir a elemanı vardır.*

Üstelik, eğer $2R \neq (0)$ ise o zaman $R = D_2$ olması için gerek ve yeter bir koşul D nin merkezi Z nin tüm ikinci dereceden genişlemelerinin D de içerilmemesidir, denk olarak; gerek ve yeter bir koşul D nin merkezi Z nin bazı elemanlarının D nin bir elemanının karesi şeklinde yazılamamasıdır.

Bu çalışmada $2R \neq (0)$ koşulu altında $R = D_2$ ise d nin R üzerinde bir iç türev olduğu ve $2R = (0)$ olması durumunda d nin R üzerinde bir iç türev olamayabileceği de görülecektir. Buna ek olarak eğer $R = D[x]/(x^2)$ ise d nin R üzerinde bir iç türev olamayacağı sonucuna ulaşılabacaktır.

Son olarak R nin her elemanı için değil, ama R nin uygun bir alt kümesindeki her x elemanı için ya $d(x) = 0$ veya tersinir olması durumu ele alınacaktır.

Bu bağlamda, D bir bölümlü halka olmak üzere ya $R = D$ ya $R = D_2$ ya da $R = D[x]/(x^2)$ olduğu sonucu elde edilir. Fakat bu durumda R halkası ile d türevi arasındaki ilişki, Teorem 3.1 de açıklanandan biraz farklı olacaktır.

Bu çalışmada, R bir birimli halka ve $0 \neq d$, R nin bir türevi olmak üzere “her $x \in R$ için ya $d(x) = 0$ ya da $d(x)$ R de tersinirdir” kabulü temel hipotez olarak geçecektir.

Öncelikle ana teoremin ispatı için gerekli olan yardımcı özellikler verilecektir.

Yardımcı Özellik 3.1 *Eğer $x \in R$ için $d(x) = 0$ ise o zaman ya $x = 0$ dır ya da x tersinirdir.*

İspat $d(x) = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq x \in R$ olsun. Hipotezden $d \neq 0$ olduğundan $d(y) \neq 0$ olacak şekilde bir $y \in R$ vardır ve $d(y)$ elemanı R de tersinirdir. Böylece $d(yx) = d(y)x + yd(x) = d(y)x$ elde edilir. Burada $x \neq 0$ olduğundan $d(yx) \neq 0$ olmalıdır. Bu ise hipotezden $d(yx)$ in R de tersinir olduğunu verir. Son bağıntının her iki tarafı soldan $d(y)^{-1} \in R$ ile çarpılarak $x = d(y)^{-1}d(yx)$ bulunur. Bir halkada tersinir elemanların çarpımının da bir tersinir eleman olduğu gerçeğinden, $x \in R$ elemanının tersinir olması gerektiğine ulaşılır.

Yardımcı Özellik 3.1 in bir sonucu olarak aşağıdaki yardımcı özellik elde edilir.

Yardımcı Özellik 3.2 *Eğer R nin bir tek yanlı ideali $(0) \neq L$ ise o zaman $d(L) \neq \{0\}$ dır.*

İspat Hipotezden $d(R) \neq \{0\}$ olduğundan eğer $L = R$ ise $\{0\} \neq d(L)$ olur ve böylece ispat biter. O zaman $L \neq R$ olduğunu varsayalım. Eğer $0 \neq a \in L$ ise kabulden dolayı a nın tersinir olamayacağı açıktır. Dolayısıyla Yardımcı Özellik 3.1 den $d(a) \neq 0$ olmalıdır. Böylece $d(L) \neq \{0\}$ dır. Buradan L nin sıfırdan farklı elemanları üzerinde d nin sıfır olamayacağı görülmüş olur.

Yardımcı Özellik 3.1 in diğer bir sonucu da aşağıdaki gibidir:

Yardımcı Özellik 3.3 *Eğer R deki bazı $x \neq 0$ elemanları için $2x = 0$ ise o zaman $2R = (0)$ dır.*

İspat $2x = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq x \in R$ var olduğunu kabul edelim. O zaman $0 = d(2x) = 2d(x)$ olur. Burada eğer $d(x) = 0$ ise Yardımcı Özellik 3.1 den x tersinir olmalıdır. Bu durumda $2x = 0$ olduğundan $0 = (2x)x^{-1} = 2$ bulunur ve böylece $2R = (0)$ olur. Diğer yandan, eğer $d(x) \neq 0$ ise hipotez

gereği $d(x)$ tersinir olmalıdır. Böylece son bağıntıdan $0 = (2d(x))d(x)^{-1} = 2$ elde edilir ve dolayısıyla $2R = (0)$ olur. Her iki durumda da $2R = (0)$ olduğu sonucuna ulaşılır.

Yardımcı Özellik 3.3 aslında R nin 2-burulmalı olması için gerek ve yeter bir koşulun R nin karaktersitiğinin 2 olması gerektiğini söyler.

Yardımcı Özellik 3.4 *Eğer R nin bir öz sol ideali L ise o zaman L hem maksimal hem de minimaldir.*

İspat İspat için öncelikle R nin her öz sol idealinin aslında R nin bir maksimal sol ideali olduğunu görelim: O halde R nin $L \subseteq T$ koşulunu sağlayan iki öz sol ideali L ve T olsun. Bu durumda $L + d(L) = \{a + d(b) : a, b \in L\} \subseteq R$ kümesini ele alalım. Öncelikle $0 \in L + d(L)$ olduğu açıktır. Her $a, b, c, e \in L$ her $r \in R$ için

$$(a + d(b)) - (c + d(e)) = (a - c) + d(b - e) \in L + d(L)$$

olur. Ayrıca $rd(b) = d(rb) - d(r)b$ olduğundan

$$r(a + d(b)) = ra + rd(b) = ra + d(rb) - d(r)b \in L + d(L)$$

olur. Son iki bağıntı, $L + d(L)$ kümesinin R nin bir sol ideali olduğunu verir. Kabulden L bir öz sol ideal olduğundan $L \neq (0)$ dır ve Yardımcı Özellik 3.2 den $d(L) \neq \{0\}$ olmalıdır. Dolayısıyla $d(y) \neq 0$ olacak şekilde bir $y \in L$ vardır ve hipotezden $d(y)$ tersinirdir. Üstelik $d(y) \in d(L) \subseteq L + d(L)$ olduğundan $L + d(L)$ sol ideali R nin bazı tersinir elemanlarını içerir. Bu ise $R = L + d(L)$ olduğunu verir. Böylece eğer $t \in T$ ise, $T \subseteq R = L + d(L)$ olduğundan $t = a + d(b)$ olacak şekilde $a, b \in L$ vardır ve $L \subseteq T$ olduğundan $d(b) = t - a \in T \cap d(L)$ olur. Burada eğer $T \cap d(L) \neq \{0\}$ ise o zaman T sol ideali R nin bazı tersinir elemanlarını içerir ve böylece $T = R$ çelişkisine ulaşılır. O zaman $d(b) = t - a \in T \cap d(L) = \{0\}$ olduğundan $t = a \in L$ ve dolayısıyla $T \subseteq L$ olur. Ayrıca $L \subseteq T$ kabulünden dolayı $L = T$ elde edilir. Böylece L sol ideali bir maksimal sol ideali olur.

Benzer şekilde R nin $M \subseteq L$ olacak şekilde keyfi bir öz sol M idealinin de maksimal sol ideal olduğu görülebilir. Bu ise $M = L$ olduğunu verir. Dolayısıyla L bir minimal sol idealdir.

Not Benzer işlemler R nin bir öz sağ ve ya öz iki yanlı ideali için yapılırsa benzer sonuçlar elde edilir.

Şimdi R nin yapısı daraltılabilir:

Yardımcı Özellik 3.5 (a) *Eğer R nin bir öz ideali I ise o zaman $I^2 = (0)$ dır.*

(b) *Eğer $2R \neq (0)$ ise o zaman R basittir.*

İspat (a) Eğer R nin bir öz ideali I ise o zaman $d(I^2) \subset d(I)I + Id(I) \subset I$ olur. Böylece $d(I^2) \subset I$ elde edilir. Burada $I^2 \neq (0)$ ise Yardımcı Özellik 3.2 den $d(I^2) \neq \{0\}$ olur. Buradan $d(y) \neq 0$ olacak şekilde bir $y \in I^2$ vardır ve hipotezden $d(y)$ tersinir olmalıdır. Ayrıca $d(I^2) \subseteq I$ olduğundan $d(y) \in I$ dır. Bu durumda I ideali R nin $d(y)$ gibi bir tersinir elemanını içerir ve buradan $I = R$ çelişkisi elde edilir. Böylece $I^2 = (0)$ sonucuna ulaşılır.

(b) $2R \neq (0)$ olduğunu varsayalım ve R nin bir öz ideali I olsun. O zaman Yardımcı Özellik 3.2 den $d(I) \neq \{0\}$ dır. Bu durumda $d(b) \neq 0$ olacak şekilde bir $b \in I$ vardır ve hipotezden $d(b)$ tersinir olmalıdır. Ayrıca (a) dan $I^2 = (0)$ dır ve $b \in I$ olduğundan $b^2 = 0$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} 0 = d^2(b^2) &= d(d(b)b + bd(b)) = d(d(b)b) + d(bd(b)) \\ &= d^2(b)b + d(b)d(b) + d(b)d(b) + bd^2(b) \\ &= d^2(b)b + 2d(b)^2 + bd^2(b) \end{aligned}$$

elde edilir. Son bağıntıda $d^2(b)b + bd^2(b) \in I$ olması, $2d(b)^2 \in I$ olduğunu verir. O zaman $4d(b)^4 = (2d(b))^2 \in I^2 = (0)$ elde edilir. Böylece $d(b)$ tersinir bir eleman olduğundan $4 = 0$ dır. Burada $2R \neq (0)$ olduğundan $2y \neq 0$ olacak şekilde bir $y \in R$ vardır ve özel olarak $0 \neq z = 2y \in R$ alırsak $2z = 4y = 0$ olur. Bu ise Yardımcı Özellik 3.3 den $2R = (0)$ çelişkisini verir. Böylece R nin öz ideali yoktur, dolayısıyla R bir basit halkadır.

Yardımcı Özellik 3.4 ve 3.5 i birleştirerek, Teorem 2.5 den eğer $2R \neq (0)$ ise o zaman D bir bölümlü halka olmak üzere ya $R = D$ ya da $R = D_2$ olduğunu görürüz. Herhangi bir D bölümlü halkası ve D nin sıfırdan farklı bir d türevi, her $x \in D$ için ya $d(x) = 0$ dır ya da $d(x)$ tersinirdir, koşulunu kesin olarak sağlar. Şimdi bir D bölümlü halkası üzerinde 2×2 tipinde matrisler halkası D_2 nin bu koşulu sağlayan sıfırdan farklı bir d türevine sahip olabilmesi için

D halkası üzerindeki koşulun ne olması gerektiğini analiz edelim. Bu analizi yapmak için öncelikle keyfi bir halka üzerinde 2×2 tipinde matrisler halkasının türevlerini araştırmamız gerekir. Aşağıdaki iki yardımcı özellikte S herhangi bir birimli halka, $R = S_2$ ve d, R nin herhangi bir türevi kabul edilecektir. Literatürde çok iyi bilinen aşağıdaki Yardımcı Özellik 3.6, (Bergen et al. 1983) de ispatsız olarak yer almıştır. Şimdi bu özelliğin ispatını verelim:

Yardımcı Özellik 3.6 *S herhangi bir birimli halka ve $R = S_2$ olsun. Eğer R nin bir türevi d ise o zaman $e_{ij} \in R$ elemanı (i, j) . içeriği 1, diğer tüm içerikleri 0 olan matris olmak üzere*

$$\begin{aligned} d(e_{11}) &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, d(e_{12}) = \begin{pmatrix} -\beta & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \\ d(e_{21}) &= \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}, d(e_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve her $a \in S$ için

$$d\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(a) & a\alpha - \alpha a \\ -(a\beta - \beta a) & f(a) + a\gamma - \gamma a \end{pmatrix}$$

olacak şekilde $\alpha, \beta, \gamma \in S$ ve S nin bir f türevi vardır.

İspat Burada S nin birim elemanını 1 ve sıfırını 0 ile gösterelim. O zaman R nin birim elemanı 1_R ve sıfırı 0_R olmak üzere $1_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $0_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olur. Böylece $d(1_R) = d(1_R 1_R) = d(1_R)1_R + 1_R d(1_R) = d(1_R) + d(1_R)$ eşitliğinden, $d(1_R) = 0_R$ dir. Ayrıca $1_R = e_{11} + e_{22}$ olduğundan $d(e_{11}) = -d(e_{22})$ olur. Şimdi $a, b, c, e \in S$ olmak üzere $d(e_{11}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \in R$ olsun. Bu durumda

$$d(e_{22}) = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -e \end{pmatrix} \text{ olur ve } e_{11}e_{22} = 0_R \text{ dan}$$

$$\begin{aligned} 0_R &= d(e_{11}e_{22}) = d(e_{11})e_{22} + e_{11}d(e_{22}) \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} e_{22} + e_{11} \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -e \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $a = 0 = e$ demektir. Burada $\alpha, \beta \in S$ olmak üzere $b = \alpha$, $c = \beta$ denilirse $d(e_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ ve $d(e_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$ elde edilir. Şimdi

$d(e_{12}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \in R$ olsun. Burada $e_{12} = e_{11}e_{12}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} &= d(e_{12}) = d(e_{11}e_{12}) = d(e_{11})e_{12} + e_{11}d(e_{12}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} e_{12} + e_{11} \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $e_{12} = e_{12}e_{22}$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \beta \end{pmatrix} &= d(e_{12}) = d(e_{12}e_{22}) = d(e_{12})e_{22} + e_{12}d(e_{22}) \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \beta \end{pmatrix} e_{22} + e_{12} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\beta & b \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bağıntısına ulaşılır. Böylece $a = -\beta$ olur ve $\gamma \in S$ olmak üzere $b = \gamma$ alınarak $d(e_{12}) = \begin{pmatrix} -\beta & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ elde edilir. Şimdi $d(e_{21}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \in R$ olsun. $e_{21} = e_{21}e_{11}$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} = d(e_{21}) = d(e_{21}e_{11}) = d(e_{21})e_{11} + e_{21}d(e_{11}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & \alpha \end{pmatrix}$$

olur. Buradan $e = \alpha$ ve $b = 0$ elde edilir. Ayrıca $e_{21} = e_{22}e_{21}$ eşitliğinden

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & \alpha \end{pmatrix} = d(e_{21}) = d(e_{22}e_{21}) = d(e_{22})e_{21} + e_{22}d(e_{21}) = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ c & \alpha \end{pmatrix}$$

bulunur. O zaman $a = -\alpha$ dır. Üstelik $e_{12}e_{21} = e_{11}$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = d(e_{11}) = d(e_{12}e_{21}) = d(e_{12})e_{21} + e_{12}d(e_{21}) = \begin{pmatrix} \gamma + c & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan $\gamma + c = 0$ yani $c = -\gamma$ sonucuna ulaşılır. Bu sonuçların ışığı altında $d(e_{21}) = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$ elde edilir. Şimdi $s \in S$ olmak üzere

$$d\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in R \text{ olsun. Böylece } \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = e_{11} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} e_{22} \text{ eşitliğinden}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = d\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}\right) = d\left(e_{11} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} e_{22}\right) \\ = \begin{pmatrix} x & 2y + \alpha s - s\alpha \\ \beta s - s\beta & t \end{pmatrix}$$

bulunur. Buradan $y = 2y + \alpha s - s\alpha$ yani $y = s\alpha - \alpha s$ ve $z = -(s\beta - \beta s)$ elde edilir. Dolayısıyla $d\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & s\alpha - \alpha s \\ -(s\beta - \beta s) & t \end{pmatrix}$ olur. Benzer

şekilde $\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$ eşitliğinden ve d nin bir türev olduğu gerçeğinden yararlanarak

$$d\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & t - x + s\alpha - \alpha s - s\gamma + \gamma s \\ -(s\beta - \beta s) & t \end{pmatrix}$$

bulunur. Bu ise $t - x + s\alpha - \alpha s - s\gamma + \gamma s = s\alpha - \alpha s$ demektir. Buradan $t - x = s\gamma - \gamma s$ elde edilir. Şimdi $f : S \rightarrow S$ dönüşümü, her $a \in S$ elemanını $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in R$ matrisinin d türevi altındaki görüntüsünün 1. satır

1. sütun içeriğine resmetsin. Burada $s_1, s_2 \in S$ olmak üzere $d\left(\begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_1 \end{pmatrix}\right)$

$= \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$ ve $d\left(\begin{pmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ diyelim. Böylece d nin R üzerinde

bir türev olduğu ile beraber matrislerde toplama ve çarpma tanımı kullanılarak $f(s_1 + s_2) = k + p = f(s_1) + f(s_2)$ ve $f(s_1 s_2) = k s_2 + s_1 p = f(s_1) s_2 + s_1 f(s_2)$ olduğu görülür. Son iki bağıntıdan f , S üzerinde bir türevdir ve

$d\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & s\alpha - \alpha s \\ -(s\beta - \beta s) & t \end{pmatrix}$ olduğundan $f(s) = x$ olur. Ayrıca $t - x = s\gamma - \gamma s$ ve $f(s) = x$ eşitlikleri kullanılarak $t = f(s) + s\gamma - \gamma s$

elde edilir. Böylece tüm bulunan değerlerin yerine yazılması ile $d \left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \right)$
 $= \begin{pmatrix} f(s) & s\alpha - \alpha s \\ -(s\beta - \beta s) & f(s) + s\gamma - \gamma s \end{pmatrix}$ olacak şekilde S üzerinde bir f türevinin
 varlığı kanıtlanmış olur.

Şimdi d türevi ile R halkası arasındaki ilişki, Yardımcı Özellik 3.7 ile
 birlikte ele alınacaktır. Bunun için, Yardımcı Özellik 3.6 dan yararlanılacaktır.

Yardımcı Özellik 3.7 *Eğer R, S, d ve f Yardımcı Özellik 3.6 da tanımlandığı
 şeklinde ise d nin R üzerinde bir iç türev olması için gerek ve yeter bir koşul
 f nin S üzerinde bir iç türev olmasıdır.*

İspat Eğer d, R üzerinde $M = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} \in R$ elemanı ile belirli bir iç türev ise
 her $x \in S$ için $d \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} sx - xs & tx - xt \\ ux - xu & vx - xv \end{pmatrix}$ olur. Ayrıca Yardımcı
 Özellik 3.6 dan

$$d \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} f(x) & x\alpha - \alpha x \\ -(x\beta - \beta x) & f(x) + x\gamma - \gamma x \end{pmatrix}$$

olmalıdır. Son iki bağıntıdan her $x \in S$ için $f(x) = sx - xs$ elde edilir. Bu ise
 f nin, S üzerinde $s \in S$ elemanı ile belirli bir iç türev olduğunu ifade eder.

Tersine f, S üzerinde $r \in S$ elemanı ile bir iç türev olsun; yani her
 $x \in S$ için $f(x) = rx - xr$ olsun. O halde her $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \in R$ için
 $T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} e_{11} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} e_{12} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} e_{21} + \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} e_{22}$ eş,tlüğünden, d
 nin bir türev olduğu kullanılarak

$$d(T) = d \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} r & -\alpha \\ \beta & r - \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & -\alpha \\ \beta & r - \gamma \end{pmatrix}$$

bulunur. Bu ise d nin R üzerinde $\begin{pmatrix} r & -\alpha \\ \beta & r - \gamma \end{pmatrix} \in R$ elemanı ile belirli bir iç
 türev teşkil ettiğini ifade eder.

Şimdi R nin birimli bir halka olduğu ve her $x \in R$ için ya $d(x) = 0$ ya
 da $d(x)$ tersinir olacak şekilde R nin sıfırdan farklı bir d türevinin var olduğu

kabulü olan orjinal duruma geri dönülecektir. En azından D nin karakteristiği 2 den farklı olduğunda $R = D_2$ nin her $x \in R$ için ya $d(x) = 0$ ya da $d(x)$ tersinir olacak şekilde $0 \neq d$ türevine sahip olduğu D bölümlü halkaları karakterize edilecektir.

Yardımcı Özellik 3.8 *Eğer $R = D_2$ ve $2R \neq (0)$ ise d bir iç türevidir.*

İspat $d, f, \alpha, \beta, \gamma$ Yardımcı Özellik 3.6 tanımlandığı gibi olsun. O zaman Yardımcı Özellik 3.7 den f nin D üzerinde bir iç türevi olduğunu göstermek, ispatı tamamlamak için yeterlidir. Eğer $a, b, c, d \in D$ ise o zaman Yardımcı Özellik 3.6 dan ve $\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} e_{11} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} e_{12} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} e_{21} + \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} e_{22}$ eşitliğinden,

$$d \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} f(a) - b\beta - \alpha c & f(b) + a\alpha + b\gamma - \alpha e \\ f(c) + \beta a - e\beta - \gamma c & f(e) + e\gamma - \gamma e + \beta b + c\alpha \end{pmatrix} \quad (1)$$

bulunur. Burada $e_{11} \neq 0_R$ ve $e_{11} \in R$ tersinir olmadığından Yardımcı Özellik 3.1 den $d(e_{11}) \neq 0_R$ dir. O halde hipotez gereği $d(e_{11}) \in R$ tersinir olmalıdır. Yardımcı Özellik 3.6 dan $d(e_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ olduğu göz önüne alınarak $\alpha, \beta \in D$ elemanlarının tersinir elemanlar olduğu sonucuna ulaşılır. Böylece (1) den $u = f(\alpha^{-1}f(a)) + \beta a - \alpha^{-1}a\alpha\beta - \gamma\alpha^{-1}f(a)$ ve $v = f(\alpha^{-1}a\alpha) + \alpha^{-1}a\alpha\gamma - \gamma\alpha^{-1}a\alpha + \alpha^{-1}f(a)\alpha$ olmak üzere

$$d \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ \alpha^{-1}f(a) & \alpha^{-1}a\alpha \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & v \end{pmatrix}$$

elde edilir. Burada $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & v \end{pmatrix} \in R$ tersinir olmadığından hipotezden $u = v = 0$ olmalıdır. Ayrıca f bir türev olduğundan $f(1) = 0$ dir. Böylece $0 = f(1) = f(\alpha^{-1}\alpha) = f(\alpha^{-1})\alpha + \alpha^{-1}f(\alpha)$ olur. Son eşitlikten $f(\alpha^{-1}) = -\alpha^{-1}f(\alpha)\alpha^{-1}$ elde edilir. Buradan f bir türev olduğundan ve son bağıntıdan

$$\begin{aligned} 0 = v = & -\alpha^{-1}f(\alpha)\alpha^{-1}a\alpha + \alpha^{-1}f(a)\alpha + \alpha^{-1}af(\alpha) \\ & + \alpha^{-1}a\alpha\gamma - \gamma\alpha^{-1}a\alpha + \alpha^{-1}f(a)\alpha \end{aligned} \quad (2)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlik

$$2\alpha^{-1}f(a)\alpha = \alpha^{-1}f(\alpha)\alpha^{-1}a\alpha + \gamma\alpha^{-1}a\alpha - \alpha^{-1}af(\alpha) - \alpha^{-1}a\alpha\gamma$$

olarak düzenlenir ve eşitliğin her iki tarafı soldan $\alpha \in D$, sağdan $\alpha^{-1} \in D$ ile çarpılarak

$$2f(a) = (f(\alpha)\alpha^{-1} + \alpha\gamma\alpha^{-1})a - a(f(\alpha)\alpha^{-1} + \alpha\gamma\alpha^{-1})$$

bağıntısına ulaşılır. D bir bölümlü halka ve $\text{char} D \neq 2$ olduğundan $0 \neq 1 + 1 = 2 \in D$ dir ve dolayısıyla $2 \in D$ tersinirdir. Son bağıntıda eşitliğin her iki tarafı $2 \in D$ elemanının tersi ile çarpılarak her $a \in D$ için

$$f(a) = \frac{f(\alpha)\alpha^{-1} + \alpha\gamma\alpha^{-1}}{2}a - a\frac{f(\alpha)\alpha^{-1} + \alpha\gamma\alpha^{-1}}{2}$$

elde edilir. Sonuç olarak f , D üzerinde $\frac{1}{2}(f(\alpha)\alpha^{-1} + \alpha\gamma\alpha^{-1}) \in D$ elemanı ile belirli bir iç türevidir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi D_2 nin, üzerinde her $x \in D_2$ için ya $d(x) = 0$ ya da $d(x)$ tersinir olacak şekilde bir $0 \neq d$ iç türevine sahip olduğu D bölümlü halkaları (karakteristikten bağımsız olarak) tamamen karakterize edilecektir. Bu yapılırken şu ana kadar elde edilen sonuçlar ışığında, üzerinde her $x \in R$ için ya $d(x) = 0$ ya da $d(x)$ tersinir olacak şekilde bir $0 \neq d$ türevi tanımlı olan, $2R \neq (0)$ olacak şekildeki tüm halkalar tamamen betimlenecektir.

Yardımcı Özellik 3.9 *Eğer D bir bölümlü halka ise $R = D_2$ halkasının her $x \in R$ için ya $d(x) = 0$ ya da $d(x)$ tersinir olacak şekilde bir $0 \neq d$ iç türevinin var olması için gerek ve yeter bir koşul D nin, merkezi Z deki tüm ikinci dereceden genişlemeleri içermemesidir.*

İspat R üzerinde bu şartı sağlayan $M \in R$ elemanı ile belirli bir iç türev olduğunu varsayalım. Şimdi M nin bir köşegen matris olamayacağını görelim:

Eğer $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ olacak şekilde $a, b \in D$ var ise

$$Me_{12} - e_{12}M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} e_{12} - e_{12} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a - b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Bu matris tersinir olmadığından, hipotezden $\begin{pmatrix} 0 & a - b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_R$ dır

ve böylece $a = b$ dir. Buradan $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ bulunur. Böylece her $c \in D$ için

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - ca & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu matris tersinir olmadığından hipotezden $ac - ca = 0$ olmalıdır. Bu ise her $c \in D$ için $ac = ca$ olmasını gerektirir. O zaman $a \in Z$ dir ve dolayısıyla $M \in Z(R)$ olur. Buradan $M \in R$ elemanı ile belirli bir d iç türevinin sıfır türevi olması gerektiği sonucuna ulaşılır. Fakat bu hipotez ile çelişeceğinden kabul yanlıştır. O zaman $M \in R$ bir köşegen matris olamaz. Buradan hareketle $M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in R$ olmak üzere $q \neq 0$ veya $r \neq 0$ dır. Eğer $q \neq 0$ ise $TMT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ olacak şekilde $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix} \in R$ tersinir matrisi vardır ve burada $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q^{-1}p & q^{-1} \end{pmatrix}$, $\alpha = qr - qsq^{-1}p$, $\beta = p + qsq^{-1} \in D$ dir. Eğer $r \neq 0$ ise $TMT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ olacak şekilde $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r & s \end{pmatrix} \in R$ tersinir matrisi vardır ve burada $T^{-1} = \begin{pmatrix} -r^{-1}s & r^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha = -rpr^{-1}s + rq$, $\beta = rpr^{-1} + s \in D$ dir. Sonuç olarak $\alpha, \beta \in D$ olmak üzere $TMT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ olacak şekilde bir $T \in R$ tersinir matrisi vardır. Genelliği kaybetmeden d nin, $TMT^{-1} \in R$ elemanı ile belirli bir iç türev olduğunu kabul edelim. Eğer $\gamma \in D$ ise o zaman

$$d\left(\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha\gamma - \gamma\alpha & \beta\gamma - \gamma\beta \end{pmatrix}$$

olur. Bu matris tersinir olmadığından, hipotezden sıfır matrisi olmalıdır ve bunun sonucunda $\alpha\gamma - \gamma\alpha = 0 = \beta\gamma - \gamma\beta$ elde edilir. Böylece $\alpha, \beta \in Z$ olduğu sonucuna ulaşılır. Ayrıca

$$d\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan Yardımcı Özellik 3.1, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \in R$ matrisinin tersinir olduğunu söyler. Buradan $\alpha \neq 0$ olmalıdır. Böylece $\alpha \in D$ olduğundan $\alpha^{-1} \in D$ dir. Bu durumda $\gamma \in D$ için

$$d\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & \gamma - \beta \\ -\alpha\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

bulunur. Burada $\alpha \neq 0$ olduğundan bu matris sıfır matrisi olamaz. O zaman hipotez gereği bir tersinir matristir. Bu durumda $\alpha, \beta \in Z$ olduğundan $0 \neq -\alpha^2 - (\gamma - \beta)(-\alpha\gamma) = \alpha(\gamma^2 - \beta\gamma - \alpha)$ olur. Son bağıntıdan $\alpha^{-1} \in D$ olduğundan her $\gamma \in D$ için $\gamma^2 - \beta\gamma - \alpha \neq 0$ elde edilir. Diğer bir deyişle, Z üzerinde $t^2 - \beta t - \alpha$ ikinci dereceden polinomunun D içinde hiçbir kökü yoktur ve böylece D, Z nin tüm ikinci dereceden genişlemelerini içermez. Son olarak d_M ve $d_{TMT^{-1}}$, sırasıyla $M \in R$ ve $TMT^{-1} \in R$ elemanları ile belirli iç türevler olmak üzere, her $X \in R$ için ya $d_M(X) = 0_R$ ya da $d_M(X)$ tersinir olması için gerek ve yeter bir koşulun ya $d_{TMT^{-1}}(X) = 0_R$ ya da $d_{TMT^{-1}}(X)$ tersinir olması olduğu gösterilirse ispatın ilk kısmı tamamlanır. Öncelikle $\phi : R \rightarrow R$ dönüşümünü her $X \in R$ için $\phi(X) = TXT^{-1}$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda ϕ , R nin bir iç otomorfizmasıdır. Ek olarak d , R üzerinde bir türev olmak üzere $d_\phi = \phi d \phi^{-1}$ olsun. Buradan her $X, Y \in R$ için

$$\begin{aligned}
 d_\phi(X + Y) &= \phi d \phi^{-1}(X + Y) = \phi d(\phi^{-1}(X + Y)) \\
 &= \phi d(\phi^{-1}(X) + \phi^{-1}(Y)) \\
 &= \phi(d\phi^{-1}(X) + d\phi^{-1}(Y)) \\
 &= \phi d \phi^{-1}(X) + \phi d \phi^{-1}(Y) \\
 &= d_\phi(X) + d_\phi(Y)
 \end{aligned}$$

dir ve aynı zamanda

$$\begin{aligned}
 d_\phi(XY) &= \phi d \phi^{-1}(XY) = \phi d(\phi^{-1}(X)\phi^{-1}(Y)) \\
 &= \phi(d(\phi^{-1}(X)\phi^{-1}(Y)) \\
 &= \phi(d(\phi^{-1}(X))\phi^{-1}(Y) + \phi^{-1}(X)d(\phi^{-1}(Y)) \\
 &= \phi d \phi^{-1}(X)Y + X\phi d \phi^{-1}(Y) \\
 &= d_\phi(X)Y + Xd_\phi(Y)
 \end{aligned}$$

olur. Son iki bağıntıdan d_ϕ , R üzerinde bir türev teşkil eder. Şimdi d , $M \in R$ elemanı ile belirli iç türev olsun. Bu durumda her $X \in R$ için

$$\begin{aligned}
 d_\phi(X) &= \phi d \phi^{-1}(X) = \phi(d\phi^{-1}(X)) \\
 &= \phi(M\phi^{-1}(X) - \phi^{-1}(X)M) \\
 &= \phi(M)X - X\phi(M) \\
 &= (TMT^{-1})X - X(TMT^{-1})
 \end{aligned}$$

olur; yani d_ϕ dönüşümü, $TMT^{-1} \in R$ elemanı ile belirli iç türev olur. Öncelikle her $X \in R$ için ya $d(X) = 0_R$ ya da $d(X)$ tersinir olduğunu kabul edelim. Her $X \in R$ için $\phi^{-1}(X) \in R$ olacağından ya $d\phi^{-1}(X) = 0_R$ ya da $d\phi^{-1}(X)$ tersinir olmalıdır. ϕ , R nin bir otomorfizması olduğundan son bağıntı ya $\phi d\phi^{-1}(X) = 0_R$ ya da $\phi d\phi^{-1}(X)$ tersinir olduğunu verir. Bu durumda her $X \in R$ için ya $d_\phi(X) = 0_R$ dir ya da $d_\phi(X)$ tersinirdir. Tersine her $X \in R$ için ya $d_\phi(X) = 0_R$ ya da $d_\phi(X)$ tersinir olduğunu kabul edelim. Buradan ya $\phi d\phi^{-1}(X) = 0_R$ ya da $\phi d\phi^{-1}(X)$ tersinirdir. Ayrıca ϕ , R nin bir otomorfizması olduğundan ϕ^{-1} örtendir. Bu durumda her $Y \in R$ için $\phi^{-1}(X) = Y$ olacak şekilde bir $X \in R$ vardır. O zaman her $Y \in R$ için ya $\phi d(Y) = 0_R$ ya da $\phi d(Y)$ tersinir olur. Tekrar ϕ bir otomorfizma olduğundan ya $d(Y) = 0_R$ ya da $d(Y)$ tersinir olduğu açıktır. Böylece ispatın ilk kısmı tamamlanmış olur.

Tersine eğer D , Z nin tüm ikinci dereceden genişlemelerini içermiyorsa, $\alpha x^2 - \beta x - 1$ polinomunun D de çözümü olmayacak şekilde $\alpha, \beta \in Z$ vardır ve $\alpha \neq 0$ dır. Şimdi d , D_2 üzerinde $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \in D_2$ elemanı ile belirli iç türev olsun. Burada d nin her sıfırdan farklı değerinin tersinir olduğunu iddia ediyoruz. $a, b, c, e \in D$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c - \alpha b & e - a - \beta b \\ \alpha(a - e) + \beta c & \alpha b - c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Burada $m = c - \alpha b$ ve $n = e - a - \beta b$ denilirse $-\alpha n + \beta m = \alpha(a - e) + \beta c$ olur ve son bağıntıdan

$$d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} m & n \\ -\alpha n + \beta m & -m \end{pmatrix}$$

elde edilir. İlk olarak $m = 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman son bağıntıdan $d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & n \\ -\alpha n & 0 \end{pmatrix}$ olur. Bu durumda $\alpha \neq 0$ olduğundan eğer $n = 0$ ise $d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix}\right) = 0_R$ olur, eğer $n \neq 0$ ise $d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix}\right)$ tersinir olur ve böylece hipotez sağlanmış olur. Diğer taraftan eğer $m \neq 0$ ise o zaman

$\omega = m^{-1}n$ olmak üzere

$$d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} m & n \\ -\alpha n + \beta m & -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ -\alpha\omega + \beta & -1 \end{pmatrix}$$

olur. Burada $m \neq 0$ olduğundan $d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix}\right)$ matrisinin tersinir olması için gerek ve yeter bir koşul $\begin{pmatrix} 1 & \omega \\ -\alpha\omega + \beta & -1 \end{pmatrix}$ matrisinin tersinir olmasıdır. O zaman $0 \neq -1 - \omega(-\alpha\omega + \beta) = \alpha\omega^2 - \beta\omega - 1$ dir. Fakat α ve β seçilişlerinden, her $\omega \in D$ için $\alpha\omega^2 - \beta\omega - 1 \neq 0$ dır. Böylece d , D_2 üzerinde tüm sıfırdan farklı değerleri tersinir olan bir iç türevidir.

Teorem 3.1 in ispatını tamamlamak için geriye kalan tek durum $2R = (0)$, $R \neq D$ ve $R \neq D_2$ olduğu durumdur. Bu durum, Yardımcı Özellik 3.10 ile birlikte ele alınacaktır.

Yardımcı Özellik 3.10 *Eğer R bir basit halka değil ise o zaman D bir bölümlü halka olmak üzere $R = D[x]/(x^2)$ dir. Burada $\text{char } D = 2$, $d(D) = \{0\}$ ve Z , D nin merkezi olmak üzere $d(x) = 1 + ax$ olacak şekilde $a \in Z$ vardır. Üstelik d bir iç türev değildir.*

İspat R nin bir basit halka olmadığını varsayalım. Bu durumda R nin M gibi bir öz ideali vardır. Yardımcı Özellik 3.5 den $M^2 = (0)$ ve $2R = (0)$ dır. Ayrıca Yardımcı Özellik 3.4 ten M , R nin hem maksimal hem de minimal (sağ, sol, iki yanlı) idealidir.

Şimdi R nin tek öz (sağ, sol, iki yanlı) idealinin M olduğunu görelim. Eğer R nin $M \neq N$ olacak şekilde bir öz N ideali var ise Yardımcı Özellik 3.4 ten N , R nin hem maksimal hem de minimal ideali olur. Burada $N \subseteq M + N$ olduğundan ve N nin maksimalliğinden ya $N = M + N$ dir ya da $R = M + N$ dir. Eğer $N = M + N$ ise $M \subseteq N$ dir. Böylece M nin maksimalliğinden $M = N$ çelişkisine ulaşılır. Eğer $R = M + N$ ise $M^2 = (0)$ olduğundan $M = MR = M(M + N) \subseteq M^2 + MN = MN \subseteq N$ elde edilir. Bu durumda da M nin maksimalliğinden $M = N$ çelişkisine ulaşılır. O zaman R nin tek öz ideali M dir. Benzer şekilde R nin tek öz sağ ve öz sol idealinin de M olduğu görülür.

Yardımcı Özellik 3.4 ün ispatından, $R = M + d(M)$ olduğundan yararlanarak, eğer $r \in R$ ise $d(r) = m + d(n)$ olacak şekilde $m, n \in M$

vardır. Böylece $d(r - n) = m \in M \cap d(R)$ olur. Şimdi $M \cap d(R) = \{0\}$ olduğunu görelim. Burada eğer bir $0 \neq x \in M \cap d(R)$ var ise, $0 \neq x \in d(R)$ olduğundan, hipotez gereği x tersinir olmalıdır. Ayrıca $x \in M$ olduğundan, R nin bazı tersinir elemanları M de içerilir. Bu ise $M = R$ çelişmesini verir. O zaman $M \cap d(R) = \{0\}$ dır ve $d(r - n) = m \in M \cap d(R) = \{0\}$ dan $d(r - n) = 0$ olur. Bu nedenle, eğer $D = \text{Ker } d$ denilirse o zaman $d(0) = 0 = d(1)$ olduğundan $0, 1 \in D$ olduğu açıktır. Ayrıca her $x, y \in D$ için $d(x - y) = d(x) - d(y) = 0 - 0 = 0$ ve $d(xy) = d(x)y + xd(y) = 0y + x0 = 0$ dan D, R nin bir birimli alt halkası olur. Şimdi bir $0 \neq x \in D$ olsun. Burada $d(x) = 0$ olduğundan, Yardımcı Özellik 3.1 den x tersinirdir ve

$$0 = d(1) = d(xx^{-1}) = d(x)x^{-1} + xd(x^{-1}) = xd(x^{-1})$$

bulunur. Burada son bağıntının her iki tarafı soldan $x^{-1} \in R$ ile çarpılarak $d(x^{-1}) = 0$ elde edilir. O zaman $x^{-1} \in D$ dir. Böylece tüm bu verilerin ışığı altında D nin, R nin bir bölümlü alt halkası olduğu sonucuna ulaşılır. Yukarıda $d(r - n) = m = 0$ olarak bulunduğundan, $r - n \in D$ dir. Buradan $R \subseteq D + M$ elde edilir. Ayrıca $D + M \subseteq R$ olduğu açıktır. Böylece $R = D + M$ olur.

Diğer taraftan $0 \neq x \in M$ ise o zaman M, R nin bir öz ideali olduğundan $Dx \subseteq M \neq R$ dir. Her $s_1, s_2 \in D$ için

$$s_1x - s_2x = (s_1 - s_2)x \in Dx$$

olur. Ayrıca $M^2 = (0)$ olduğu gerçeği göz önünde bulundurularak, her $r = e + f \in R = D + M$ ve $s \in D$ için

$$r(sx) = (e + f)sx = (es)x + (fs)x = (es)x \in Dx$$

olur. Son iki bağıntı Dx in, R nin bir sol ideali olduğunu verir. Üstelik $0 \neq x = 1x \in Dx$ olduğundan $Dx \neq (0)$ dır. Burada M nin tekliğinden $Dx = M$ dir. Böylece $R = D + M$ eşitliğinden, $R = D + Dx$ elde edilir. Bu durumda $d(x) \in R$ olduğundan $d(x) = s + tx$ olacak şekilde $s, t \in D$ vardır. İlk olarak $s \neq 0$ olduğunu görelim. Eğer $s = 0$ ise $d(x) = tx \in Dx = M$ olduğundan, $d(x) = 0$ ise Yardımcı Özellik 3.1 den x tersinir olmalıdır ve $x \in M$ olduğundan R nin bazı tersinir elemanları M de içerilir. Bu ise $M = R$ çelişmesini verir. Eğer $d(x) \neq 0$ olursa hipotezden $d(x)$ tersinirdir ve $d(x) \in M$ olduğundan benzer şekilde $M = R$ çelişmesine ulaşılır. O zaman $s \neq 0$ olmalıdır.

Böylece $s^{-1} \in D$ dir ve $Ds^{-1}x = Dx$ olur. Bu ise $R = D + Ds^{-1}x$ olduğunu verir. Ayrıca $d(D) = \{0\}$ dan $d(s^{-1}x) = s^{-1}d(x) = s^{-1}(s + tx) = 1 + s^{-1}tx = 1 + s^{-1}tss^{-1}x$ bulunur. Burada $0 \neq s^{-1}x = y \in M$ ve $s^{-1}ts = a \in D$ denilirse $R = D + Dy$ ve $d(y) = 1 + ay$ olur. Bu durumda bir $0 \neq x \in M$ için $R = D + Dx$ olduğunu ve $d(x) = 1 + ax$ olacak şekilde bir $a \in D$ olduğunu kabul edebilebilir.

Eğer $s \in D$ ise o zaman $M = Rx$, $M^2 = (0)$, $d(s) = 0$ ve bir $a \in D$ için $d(x) = 1 + ax$ gerçeğinden, $sx \in M = Rx$ ve $(sx)^2 = 0$ olması kullanılarak

$$\begin{aligned}
0 = d(0) = d((sx)^2) &= d(sx sx) \\
&= sx d(sx) + d(sx) sx \\
&= sx(d(s)x + sd(x)) + (d(s)x + sd(x))sx \\
&= sxs(1 + ax) + s(1 + ax)sx \\
&= sxs + xs sax + s^2x + saxsx \\
&= sxs + s^2x \\
&= s(xs + sx)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $s \neq 0$ ise s nin tersinirliğinden ve son bağıntıdan $xs + sx = 0$ bulunur. Eğer $s = 0$ olursa $xs + sx = 0$ eşitliği sağlanır. Bu durumda her $s \in D$ için $xs + sx = 0$ dır ve $2R = (0)$ olduğundan her $s \in D$ için $xs = sx$ olur. Böylece her $r = a + bx \in R = D + Dx$ için

$$(a + bx)x = ax + bx^2 = ax + 0 = ax = xa = xa + 0 = xa + xbx = x(a + bx)$$

bulunur. Son bağıntı, $x \in Z(R)$ olduğunu verir.

Şimdi $R = D[x]/(x^2)$ olduğunu görelim. Burada $D[t] = \{\sum_{i=0}^n a_i t^i : a_i \in D, 0 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\phi : D[t] \rightarrow R = D + Dx$ dönüşümünü her $\sum_{i=0}^n a_i t^i \in D[t]$ için $\phi(\sum_{i=0}^n a_i t^i) = a_0 + a_1 x$ şeklinde tanımlayalım. Burada ϕ nin bir örten halka homomorfizması olduğu açıktır. Ek olarak eğer $\sum_{i=0}^n a_i t^i \in \text{Ker } \phi$ ise $0 = \phi(\sum_{i=0}^n a_i t^i) = a_0 + a_1 x$ olur. Burada eşitliğin her iki tarafı sağdan $x \in R$ ile çarpılarak $M^2 = (0)$ olduğundan $0 = 0x = (a_0 + a_1 x)x = a_0 x$ elde edilir. Burada eğer $a_0 \neq 0$ olursa $a_0 \in D$ olduğundan $x = 0$ çelişkisine ulaşılır. O zaman $a_0 = 0$ dır ve dolayısıyla $0 = a_0 + a_1 x = a_1 x$ olur. Bu durumda $a_1 \neq 0$ ise benzer şekilde $x = 0$ çelişkisine ulaşılır. O zaman $a_1 = 0$

dır. Böylece $t^2 \in Z(D[t])$ ve $D[t]$ bir birimli halka olduğundan

$$\begin{aligned}
 \text{Ker}\phi &= \left\{ \sum_{i=2}^n a_i t^i : a_i \in D, 2 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N} \right\} \\
 &= \{a_2 t^2 + a_3 t^3 \dots a_n t^n : a_i \in D, n \in \mathbb{N}\} \\
 &= \{(a_2 + a_3 t \dots a_n t^{n-2})t^2 : a_i \in D, n \in \mathbb{N}\} \\
 &= \{pt^2 : p \in D[t]\} \\
 &= (t^2)
 \end{aligned}$$

olur. Halkalarda *I. İzomorfizma Teoremi* nden $R \cong D[t]/(t^2)$ dir. Buradan $R = D[x]/(x^2)$ olur.

Şimdi eğer $s \in D$ ise o zaman $sx + xs = 0$ olur ve böylece

$$\begin{aligned}
 0 = d(0) = d(sx + xs) &= d(sx) + d(xs) = d(s)x + sd(x) + d(x)s + xd(s) \\
 &= s(1 + ax) + (1 + ax)s \\
 &= sax + axs \\
 &= (sa + as)x
 \end{aligned}$$

bulunur. Burada $sa + as \in D$ dir ve D nin sıfırdan farklı her elemanı R de tersinir olduğundan, eğer $sa + as \neq 0$ ise son bağıntıdan $x = 0$ çelişkisi elde edilir. O zaman $sa + as = 0$ olmalıdır ve $2R = (0)$ olduğundan $sa = as$ olur. Bu ise a nın, D nin merkezinde olmasını gerektirir.

Son olarak, d nin bir iç türev olmadığını görelim: Burada eğer d , bir $a \in R$ elemanı ile belirli iç türev ise M , R nin bir öz ideali olduğundan bir $0 \neq x \in M$ için $d(x) = ax - xa \in M$ dir. Burada eğer $d(x) \neq 0$ ise hipotezden $d(x)$ tersinir olmalıdır. Böylece $d(x) \in M$ olduğundan $M = R$ çelişkisine ulaşılır. O zaman $d(x) = 0$ olmalıdır. Bu ise $x \neq 0$ olduğundan ve Yardımcı Özellik 3.1 den x in tersinir olması demektir ki, buradan tekrar $x \in M$ olduğundan $M = R$ çelişkisine ulaşılır. O zaman d bir iç türev değildir.

Şimdi başlangıçta belirtilen ve aşağıdaki gibi verilen ana sonuç ispatlanabilir.

Teorem 3.1 *Bir birimli R halkasının her bir $x \in R$ için ya $d(x) = 0$ ya da $d(x)$ tersinir olacak şekilde bir $0 \neq d$ türevi var olsun. O zaman R halkası*

1. *bir D bölümlü halkasıdır, ya da*

2. D bir bölümlü halka olmak üzere D_2 dir, ya da

3. D bir bölümlü halka olmak üzere $D[x]/(x^2)$ dir ve $\text{char} D = 2$, $d(D) = \{0\}$, $d(x) = 1 + ax$ olacak şekilde D nin merkezi Z de bir a elemanı vardır.

Üstelik, eğer $2R \neq (0)$ ise o zaman $R = D_2$ olması için gerek ve yeter bir koşul D nin merkezi Z nin tüm ikinci dereceden genişlemelerinin D de içermemesidir, denk olarak; gerek ve yeter bir koşul D nin merkezi Z nin bazı elemanlarının D nin bir elemanının karesi şeklinde yazılamamasıdır.

İspat Eğer R bir basit halka ise o zaman Yardımcı Özellik 3.4 den $c({}_R R) \leq 2$ dir. Böylece Teorem 2.5 den D bir bölümlü halka olmak üzere ya $R = D$ dir ya da $R = D_2$ dir. Üstelik $2R \neq (0)$ ise o zaman Yardımcı Özellik 3.8 den D_2 nin böyle bir türeve sahip olabilmesi için gerek ve yeter bir koşul D_2 nin bu özelliği taşıyan bir iç türeve sahip olmasıdır. Bununla birlikte Yardımcı Özellik 3.9 ise D_2 nin böyle bir iç türevinin olması için gerek ve yeter bir koşulun D nin, Z nin tüm ikinci dereceden genişlemelerini içermemesi olduğunu söyler.

Eğer R bir basit halka değilse Yardımcı Özellik 3.10 dan Teorem 3.1 (3) elde edilir. Böylece teorem ispatlanır.

Geriye Teorem 3.1 ile ilgili bir soru kalır. Bu soru, Teorem 3.1 de $R = D_2$ durumunda d nin bir iç türev olduğunu ispatlamak için $2R \neq (0)$ kabulünün gerekli olup olmadığıdır. Aşağıda sunulan örnek, $2R = (0)$ ise o zaman $R = D_2$ halkasının her $x \in R$ için ya $d(x) = 0$ ya da $d(x)$ tersinir olacak şekilde bir $0 \neq d$ dış türevine sahip olduğunu gösterir:

Örnek $F = GF(2)(x)\langle\langle y \rangle\rangle$, katsayıları $GF(2)$ de olan bir değişkenli rasyonel fonksiyonlar cismi üzerindeki (sonlu) Laurent serilerinin cismi olsun ve $R = M_2(F)$ alalım. Burada F üzerindeki bir δ türevini $\delta(f(x)) = 0$ ve $\delta(y) = xy$ hareketini genişleterek tanımlayalım. Şöyle ki, bu hareket altında her $\sum_{m=-k}^{\infty} f_m(x)y^m \in F$ için $\delta(\sum_{m=-k}^{\infty} f_m(x)y^m) = \sum_{m=-k}^{\infty} m f_m(x)xy^m$ olarak tanımlanır. Bu durumda $f(x) \in F$ için $\delta(f(x)) = \delta(f(x)y^0) = 0$ ve $y \in F$ için $\delta(y) = \delta(1y^1) = xy$ tanımları sağlanmış olur. Burada δ nın toplamsal olduğu açıktır. Eğer $a = \sum_{m=-k}^{\infty} f_m(x)y^m \in F$ ise a_E , $a \in F$ de görülen y nin çift kuvvetlerinin serisi ve $a_O = a - a_E$ olmak üzere $a = a_E + a_O$ olarak yazılabilir. Burada a_O , $a \in F$ de görülen y nin tek kuvvetlerinin serisidir ve

$\text{char} F = 2$ olduğundan $\delta(a) = \delta(a_E + a_O) = \delta(a_O) = xa_O$ olur. Böylece her $a = a_E + a_O, b = b_E + b_O \in F$ için $\delta(ab) = \delta((a_E + a_O)(b_E + b_O)) = \delta(a_E b_E + a_E b_O + a_O b_E + a_O b_O) = \delta(a_E b_O) + \delta(a_O b_E) = xa_E b_O + xa_O b_E = xa_E b_O + xa_O b_O + xa_O b_E + xa_O b_O = xa_O(b_E + b_O) + (a_E + a_O)xb_O = \delta(a)b + a\delta(b)$ olur. Ayrıca δ toplamsal bir dönüşüm olduğundan ve son bağıntıdan δ, F nin

bir türevidir. Şimdi $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(F)$ olmak üzere $d_A, A \in M_2(F)$

elemanı ile belirli iç türev olsun ve $\bar{\delta} : M_2(F) \rightarrow M_2(F)$ dönüşümünü her $\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \in M_2(F)$ için $\bar{\delta} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \delta(a) & \delta(b) \\ \delta(c) & \delta(e) \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlayalım.

Burada $d = d_A + \bar{\delta}$ olsun. Öncelikle δ nın toplamsallığından $\bar{\delta}$ nın toplamsallığı açıktır ve matrislerde toplama ve çarpmanın tanımından her $A, B \in M_2(F)$ için $\bar{\delta}(AB) = \bar{\delta}(A)B + A\bar{\delta}(B)$ olduğu kolayca görülür. Böylece $\bar{\delta}, M_2(F)$ nin bir türevidir. İki türevin toplamının da bir türev olduğu gerçeği, bize $d = d_A + \bar{\delta}$ nın bir türev olduğunu verir. Şimdi d nin bir iç türev olmadığını görelim.

Eğer d bir iç türev ise $\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in Z(M_2(F))$ için $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = d \left(\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \right) = \bar{\delta} \left(\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \delta(y) & \delta(0) \\ \delta(0) & \delta(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix}$ olur ve böylece $xy = 0$ gelişki elde edilir. O zaman d bir iç türev değildir.

Şimdi bir $\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \in M_2(F)$ olsun. Burada $\text{char} F = 2$ olduğundan, d_A ve $\bar{\delta}$ tanımları kullanılarak

$$d \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} b + c + xa_O & a + e + xb_E \\ a + e + xc_E & b + c + xe_O \end{pmatrix}$$

bulunur. Bu durumda $d \neq 0$ türevinin, her $X \in R$ için ya $d(X) = 0_R$ ya da $d(X)$ tersinir şartını sağlayan bir türev olduğu biraz sıkıcı da olsa doğrudan bir hesaplama ile gösterilebilir. Ayrıntılar J. Bergen in çalışmasında ([Bergen et al., 1983](#)) atlanmıştır, fakat bu tezde tarafımızdan verilmeye çalışılmıştır.

Burada $A = d \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} b + c + xa_O & a + e + xb_E \\ a + e + xc_E & b + c + xe_O \end{pmatrix}$ olmak üzere ya

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ya da A nın tersinir olduğunu iddia ediyoruz. Bu iddiayı

ispatlamak için A nın tersinir olmadığını kabul edip $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olduğunu

göstermeye çalışalım. Eğer A tersinir değilse $\det(A) = 0$ dır ve

$$\begin{aligned} b + c + xa_O &= k(a + e + xc_E) \\ a + e + xb_E &= k(b + c + xe_O) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $k = k_E + k_O \in F$ vardır. Buradan $a + e = k(b + c + xe_O) + xb_E$ olup, son bağıntıda bu eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned} b + c + xa_O &= k(a + e + xc_E) \\ &= k(k(b + c + xe_O) + x(b_E + c_E)) \\ &= k^2(b + c + xe_O) + kx(b_E + c_E) \\ &= k^2(b_E + c_E) + k^2(b_O + c_O + xe_O) \\ &\quad + k_E x(b_E + c_E) + k_O x(b_E + c_E) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda y nin çift kuvvetleri düşünülürse

$$(b_E + c_E)(k^2 + k_E x + 1) = 0$$

bulunur. Benzer şekilde $b + c = k(a + e + xc_E) + xa_O$ olup, buradan

$$\begin{aligned} a + e + xb_E &= k(b + c + xe_O) \\ &= k(k(a + e + xc_E) + x(a_O + e_O)) \\ &= k^2(a + e + xc_E) + kx(a_O + e_O) \\ &= k^2(a_E + e_E + xc_E) + k^2(a_O + e_O) \\ &\quad + k_E x(a_O + e_O) + k_O x(a_O + e_O) \end{aligned}$$

elde edilir. Son bağıntıda y nin tek kuvvetleri düşünülürse

$$(a_O + e_O)(k^2 + k_E x + 1) = 0$$

bulunur. Böylece ya $b_E + c_E = 0 = a_O + e_O$ ya da $k^2 + k_E x + 1 = 0$ olmalıdır. Burada $k^2 + k_E x + 1 = 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman $k^2 + k_E x \in F$ elemanının y^0 lı teriminin katsayısı 1 olmalıdır. Şimdi $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $k = \sum_{m=-t}^{\infty} f_m(x)y^m \in F$ olsun. Burada $\text{char} F = 2$ olduğundan $k^2 = \sum_{m=-t}^{\infty} f_m(x)^2 y^{2m}$ olur. Böylece $k^2 + k_E x \in F$ elemanının y^0 lı teriminin katsayısı $f_0(x)^2 + x f_0(x)$ olur ve $f_0(x)^2 + x f_0(x) = 1$ olmalıdır. Notasyondaki karışıklığı gidermek adına şimdilik $f_0(x) = r \in GF(2)(x)$ diyelim. O zaman

$r = \frac{p}{q}$ olacak şekilde $p, q \in GF(2)[x]$ vardır ve $q \neq 0$ dir. Burada eğer $p = 0$ ise $r = 0$ olur ve böylece $1 = r^2 + xr = 0$ çelişkisi elde edilir. O zaman $p \neq 0$ olmalıdır. Bu durumda $p \neq 0$ ve $q \neq 0$ olduğundan $\deg(p) = m \geq 0$ ve $\deg(q) = n \geq 0$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece

$$0 = f_0(x)^2 + x f_0(x) + 1 = r^2 + xr + 1 = \frac{p^2}{q^2} + \frac{xp}{q} + 1$$

olur. Buradan $p^2 + xpq + q^2 = 0$ ve dolayısıyla

$$p^2 + q^2 = pqx$$

elde edilir. Bu durumda

$$\deg(p^2 + q^2) = \deg(pqx) = m + n + 1$$

olmalıdır. Burada eğer $m = n$ ise bağıntıdan $\deg(p^2 + q^2) = \deg(pqx) = 2n + 1$ olur. Ayrıca $\text{char}(GF(2)[x]) = 2$ ve $\deg(p^2) = 2n = \deg(q^2)$ olduğundan $\deg(p^2 + q^2) < 2n$ bulunur. Bu ise $2n + 1 = \deg(p^2 + q^2) < 2n$ çelişkisini verir. O zaman $m \neq n$ dir, dolayısıyla ya $m > n$ ya da $n > m$ olmalıdır. Bu durumda son bağıntıdan $m + n + 1 = \deg(pqx) = \deg(p^2 + q^2) = \max\{\deg(p^2), \deg(q^2)\} = \max\{2m, 2n\}$ olduğundan ya $m + n + 1 = 2m$ dir ya da $m + n + 1 = 2n$ dir. Bu ise ya $m = n + 1$ ya da $n = m + 1$ olduğunu verir. Sırasıyla bu iki durumu inceleyelim.

İlk olarak $m = n + 1$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\deg(p) = n + 1$ ve $\deg(q) = n$ olur. Şimdi $p = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i$ ve $q = \sum_{i=0}^n b_i x^i$ olsun. $\text{char} F = 2$ olduğundan $p^2 = \sum_{i=0}^{2n+2} a_i^2 x^{2i}$ ve $q^2 = \sum_{i=0}^{2n} b_i^2 x^{2i}$ olur. Ayrıca $c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j}$ olmak üzere $pqx = (\sum_{i=0}^{2n+1} c_i x^i)x = \sum_{i=0}^{2n+1} c_i x^{i+1}$ olur. Böylece tüm bu bilgilerden yararlanılarak, $p^2 + q^2 = pqx$ eşitliğinden

$$\sum_{i=0}^n (a_i + b_i)^2 x^{2i} + a_{n+1}^2 x^{2n+2} + \sum_{i=0}^{2n+1} c_i x^{i+1} = 0$$

bulunur. Burada son bağıntıdan

$$(a_0 + b_0)^2 = 0 = c_0$$

ve her $1 \leq t \leq n$ için

$$(a_t + b_t)^2 + c_{2t-1} = 0 \text{ ve } c_{2t} = 0$$

olmalıdır. O zaman $a_0 + b_0 = 0$ ve $c_0 = a_0b_0 = 0$ dır. Bu ise $a_0 = 0 = b_0$ olduğunu verir. Son bağıntıdan $t = 1$ için $(a_1 + b_1)^2 + c_1 = 0$ ve $c_2 = 0$ elde edilir. Fakat $c_1 = a_1b_0 + a_0b_1 = 0$ ve $c_2 = a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 = a_1b_1$ olduğundan $a_1 + b_1 = 0$ ve $a_1b_1 = 0$ bulunur. Bu ise $a_1 = 0 = b_1$ olduğunu verir. Benzer şekilde son bağıntıdan $t = 2$ için $(a_2 + b_2)^2 + c_3 = 0$ ve $c_4 = 0$ elde edilir. Fakat $c_3 = a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3 = 0$ ve $c_4 = a_4b_0 + a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3 + a_0b_4 = a_2b_2$ olduğundan $a_2 + b_2 = 0$ ve $a_2b_2 = 0$ bulunur. Bu ise yukarıdaki gibi $a_2 = 0 = b_2$ olduğunu verir. Bu şekilde devam edilirse, $(n - 1)$. adımda $a_{n-1} = 0 = b_{n-1}$ bulunur. Bu durumda her $0 \leq l \leq n - 1$ için $a_l = 0 = b_l$ elde edilir. Son olarak $t = n$ için $(a_n + b_n)^2 + c_{2n-1} = 0$ ve $c_{2n} = 0$ olmalıdır. Fakat $c_{2n-1} = a_{2n-1}b_0 + a_{2n-2}b_1 + \dots + a_nb_{n-1} + a_{n-1}b_n + \dots + a_1b_{2n-2} + a_0b_{2n-1} = 0$ eşitliğinden, şimdiye kadar bulunan sonuçlar kullanılarak $a_n + b_n = 0$ olması gerektiği sonucuna ulaşılır. Ayrıca $0 = c_{2n} = a_{2n}b_0 + a_{2n-1}b_1 + \dots + a_{n+1}b_{n-1} + a_nb_n + a_{n-1}b_{n+1} + \dots + a_1b_{2n-1} + a_0b_{2n} = a_nb_n$ elde edilir. Dolayısıyla tüm bu bulunan değerlerden $a_n + b_n = 0 = a_nb_n$ olup, $a_n = 0 = b_n$ olduğu görülür. Buradan her $0 \leq i \leq n$ için $b_i = 0$ olur. Böylece $q = \sum_{i=0}^n b_i x^i = 0$ çelişkisine ulaşılır. O zaman $m = n + 1$ olamaz. Eğer $n = m + 1$ ise $\deg(p) = m$ ve $\deg(q) = m + 1$ olur. Benzer işlemler tekrar edilerek $p = 0$ çelişkisine ulaşılır. Her iki durumda da bir çelişki elde edildiğinden, $k^2 + k_E x + 1 = 0$ olacak şekilde bir $k = k_E + k_O \in F$ olmadığı sonucuna ulaşılır. Bu durumda $b_E + c_E = 0 = a_O + e_O$ ve dolayısıyla $b_E = c_E$ ve $a_O = e_O$ olmalıdır. Buradan

$$\begin{aligned} A = d \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} b + c + xa_O & a + e + xb_E \\ a + e + xc_E & b + c + xe_O \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_O + c_O + xa_O & a_E + e_E + xb_E \\ a_E + e_E + xb_E & b_O + c_O + xa_O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\text{char } F = 2$ ve $\det(A) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= (b_O + c_O + xa_O)^2 + (a_E + e_E + xb_E)^2 \\ &= (b_O + c_O + xa_O + a_E + e_E + xb_E)^2 \end{aligned}$$

bulunur. Son bağıntıdan $b_O + c_O + xa_O + a_E + e_E + xb_E = 0$ ve dolayısıyla $b_O + c_O + xa_O = a_E + e_E + xb_E$ olur. Bu eşitlik ise $b_O + c_O + xa_O \in F$ nin, y nin sadece tek kuvvetlerini ve $a_E + e_E + xb_E \in F$ nin, y nin sadece tek kuvvetlerini içermesinden dolayı $b_O + c_O + xa_O = 0 = a_E + e_E + xb_E$ olduğu anlamına

gelir. Böylece istenilen $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sonucuna varılır. O zaman Teorem 3.1 de $R = D_2$ durumunda, $2R \neq (0)$ koşulu kaldırılamaz.

Şimdi Teorem 3.1 de R halkası yerine R nin bir öz sol idealinin alınması durumunda elde edilen sonuçları ele alalım.

Burada R birimli bir halka, $0 \neq d$ R nin bir türevi olsun ve L , R nin $d(L) \neq \{0\}$, her $x \in L$ için ya $d(x) = 0$ ya da $d(x)$ R de tersinir olacak şekilde bir sol ideali olsun. $L = R$ durumunda cevap zaten bilindiği için, $L \neq R$ olduğunu varsayalım. Bu durumda R nin yapısını belirlemek istiyoruz. Argümanlar daha önce verilen ile benzer olduğundan, J. Bergen in çalışmasında (Bergen et al., 1983) ayrıntılar atlanmıştır. Ancak bu çalışmanın bundan sonraki kısmı tarafımızdan ayrıntıları ile verilmeye çalışılmıştır.

Öncelikle, sırasıyla Yardımcı Özellik 3.1, Yardımcı Özellik 3.2 ve Yardımcı Özellik 3.3 ün bu durumda da sağlandığını görelim:

İlk olarak $d(x) = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq x \in R$ olsun. Burada L bir sol ideal olduğundan $xL \subseteq L$ dir ve her $y \in L$ için $d(xy) = d(x)y + xd(y) = xd(y)$ olduğundan $d(xL) = xd(L)$ dir. O zaman $xd(L) = d(xL) \subseteq d(L)$ olur. Hipotezden $d(y) \neq 0$ olacak şekilde bir $y \in L$ vardır ve $d(y)$ R de tersinirdir. Buradan $xd(y) = d(xy) \in d(xL) \subseteq d(L)$ elde edilir ve böylece ya $xd(y) = d(xy) = 0$ dır ya da $xd(y) = d(xy)$ R de tersinirdir. Eğer ilk durum söz konusu ise; yani $xd(y) = d(yx) = 0$ ise $d(y)^{-1} \in R$ olduğundan $x = 0$ çelişmesine ulaşılır. Diğer taraftan ikinci durum söz konusu ise; yani $xd(y) = d(xy)$ R de tersinir ise $x = d(xy)d(y)^{-1}$ olur ve bir halkada tersinir elemanların çarpımının da tersinir olduğu gerçeği, bize $x \in R$ nin tersinir olduğunu verir. Buradan Yardımcı Özellik 3.1 in sonucunu kolayca elde ederiz; yani $d(x) = 0$ olacak şekilde bir $x \in R$ için ya $x = 0$ dır ya da x R de tersinirdir.

Şimdi W , R nin $d(W) = \{0\}$ olacak şekilde bir sol ideali olsun. Burada $W = (0)$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunu görebilmek için $W \neq (0)$ olduğunu varsayalım. O zaman bir $0 \neq w \in W$ için $d(w) = 0$ dır ve yukarıda belirtilen sonuçtan w elemanı, R de bir tersinir eleman olmalıdır. Böylece W , R nin bazı tersinir elemanlarını içerdiğinden $W = R$ dir ve dolayısıyla $\{0\} = d(W) = d(R)$ olur. Bu ise $d(L) \neq \{0\}$ kabulü ile çelişir. O zaman $W = (0)$ olmalıdır. Buradan Yardımcı Özellik 3.2 nin sonucunu elde edilir; yani W , R nin $d(W) = (0)$ olacak

şekilde bir sol ideali ise $W = (0)$ dır. Ayrıca bu sonucun, R nin öz sağ ve öz iki yanlı idealleri için de geçerli olduğu kolayca görülebilir.

Şimdi eğer R bir 2-burulmalı halka ise o zaman $2R = (0)$ olduğunu görelim. Eğer R 2-burulmalı bir halka ise $2x = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq x \in R$ vardır. Buradan bir $0 \neq y \in L$ için $0 = 2xd(y) = xd(2y)$ olur ve $d(2y) \in d(L)$ olduğundan, hipotez gereği ya $d(2y) = 0$ dır ya da $d(2y)$ R de tersinirdir. Eğer $d(2y)$ R de tersinir ise o zaman $xd(2y) = 0$ eşitliğinin her iki tarafı sağdan $d(2y)^{-1} \in R$ ile çarpılarak $x = 0$ çelişkisi elde edilir. O zaman $d(2y) = 0$ olmalıdır ve Yardımcı Özellik 3.1 in sonucu gereği ya $2y = 0$ dır ya da $2y$ R de tersinirdir. Eğer $2y \in L$ elemanı R de tersinir ise, $L = R$ çelişkisi elde edilir. O zaman $2y = 0$ olmalıdır. Burada ya $d(y) = 0$ dır ya da $d(y)$ elemanı R de tersinirdir. Eğer $d(y) = 0$ ise $0 \neq y \in L$ seçiminden ve Yardımcı Özellik 3.1 den $L = R$ çelişkisi elde edilir. O zaman $d(y) \neq 0$ olmalıdır ve hipotezden $d(y)$ R de eleman tersinirdir. Buradan hareketle her $r \in R$ için $0 = rd(2y) = 2rd(y)$ olur ve $d(y)^{-1} \in R$ olduğundan $2r = 0$ bulunur. Bu ise Yardımcı Özellik 3.3 ün sonucuna ulaştırır; yani R 2-burulmalı bir halka ise o zaman $2R = (0)$ dır.

Yardımcı Özellik 3.4 de gösterildiği gibi, $L + d(L)$ kümesi R nin bir sol idealidir. Hipotezden ve $d(L) \subseteq L + d(L)$ olduğundan $L + d(L)$ kümesi R nin bazı tersinir elemanlarını içerir. Bu ise $R = L + d(L)$ olduğunu verir. Buradan eğer T , R nin $L \subseteq T$ olacak şekilde bir öz sol ideali ise o zaman keyfi bir $t \in T$ için $t = a + d(b)$ olacak şekilde $a, b \in L$ vardır ve $t - a = d(b) \in T \cap d(L)$ olur. Bu durumda eğer $T \cap d(L) \neq \{0\}$ ise bir $0 \neq x \in T \cap d(L)$ için hipotezden x elemanı R de tersinir bir eleman olur ve $T = R$ çelişkisi elde edilir. O zaman $T \cap d(L) = \{0\}$ olmalıdır ve buradan $t - a = 0$ sonucuna ulaşılır. Böylece $t = a \in L$ dir. Bu ise $T \subseteq L$ olduğunu ve dolayısıyla $T = L$ olduğunu verir; yani L , R nin bir maksimal sol idealidir. Benzer işlemler L de kapsanan R nin bir S sol ideali için yapılırsa, $R = S + d(S)$ olur ve S , R nin bir maksimal sol idealidir. O zaman L ve L de kapsanan her sol ideal maksimaldir. Böylece L , R nin hem maksimal hem de minimal sol idealidir.

Şimdi $l(L) = \{x \in R : xL = (0)\}$ kümesini inceleyelim. $R = L + d(L)$ birimli olduğundan $1 = a + d(b)$ olacak şekilde $a, b \in L$ vardır ve eğer $x \in l(L)$ ise o zaman

$$x = x(a + d(b)) = xa + xd(b) = xd(b) = d(xb) - d(x)b = -d(x)b \in L$$

olur. Bu ise $l(L) \subseteq L$ olduğunu verir. Burada L nin minimallüğinden ya $l(L) = (0)$ dır ya da $l(L) = L$ dir. Sırasıyla bu iki durumu inceleyelim.

Öncelikle $l(L) = (0)$ olsun. Bu durumda R nin bir basit halka olduğunu iddia ediyoruz. Bunu görebilmek için, ilk olarak R nin bir yarı asal halka olduğunu görelim. Burada eğer R bir yarı asal halka değilse, R nin $I^2 = (0)$ olacak şekilde bir $(0) \neq I$ ideali vardır. Üstelik $IL \subseteq L$ olduğundan ve L nin minimallüğünden ya $IL = (0)$ dır ya da $IL = L$ dir. Eğer $IL = (0)$ ise $(0) \neq I \subseteq l(L) = (0)$ çelişkisi elde edilir. Eğer $IL = L$ ise $I^2 = (0)$ olduğundan $(0) = I^2L = I(IL) = IL = L$ çelişkisi elde edilir. Her iki durumda da çelişki elde edildiğinden R bir yarı asal halka olmalıdır. Şimdi R nin bir basit halka olduğunu görelim. Bunun için, R nin sıfırdan farklı bir ideali I olsun. Böylece yukarıdaki açıklamalardan $I^2 \neq (0)$ olduğu söylenebilir. Burada $I^2L \subseteq L$ olduğundan ve L nin minimallüğünden ya $I^2L = (0)$ dır ya da $I^2L = L$ dir. Eğer $I^2L = (0)$ ise $(0) \neq I^2 \subseteq l(L) = (0)$ çelişkisi elde edilir. O zaman $I^2L = L$ olmalıdır. Bu durumda $\{0\} \neq d(L) = d(I^2L) \subseteq I$ olduğundan

$$\{0\} \neq d(I^2L) \subseteq d(L) \cap I$$

olur. Hipotezden $d(L) = d(I^2L)$ kümesi, R nin bazı tersinir elemanlarını içerir. Bu ise $I = R$ olduğunu verir. O zaman R nin bir öz ideali yoktur. Böylece R nin bir basit halka olduğu sonucuna ulaşılır.

Şimdi R nin her öz sağ idealinin hem maksimal hem de minimal sağ ideal olduğunu görelim. Burada M , R nin bir öz sağ ideali olsun. O zaman $ML \subseteq L$ ve $ML \subseteq M$ dir. Böylece $d(ML) \subseteq d(L)$ ve $d(ML) \subseteq d(M)$ elde edilir. Bu ise $d(ML) \subseteq d(L) \cap d(M)$ olduğunu verir. Bu durumda eğer $d(L) \cap d(M) = \{0\}$ ise $d(ML) = \{0\}$ olur. Buradan, yukarıda verilen bilgilerden yararlanılarak, Yardımcı Özellik 3.2 nin sonucu olarak, $ML = (0)$ bulunur. Bu durumda $(0) \neq M \subseteq l(L) = (0)$ çelişkisi elde edilir. O zaman $d(L) \cap d(M) \neq \{0\}$ dır ve böylece hipotezden $d(M)$ kümesi, R nin bazı tersinir elemanlarını içerir. Yardımcı Özellik 3.4 de olduğu gibi $M + d(M)$ kümesi R nin bir sağ idealidir ve $d(M) \subseteq M + d(M)$ olduğundan $M + d(M)$ kümesi R nin bazı tersinir elemanlarını içerir. Bu ise $R = M + d(M)$ demektir. Şimdi R nin $M \subseteq N$ olacak şekilde bir N öz sağ ideali olsun. Bu durumda bir $n \in N \subseteq R = M + d(M)$ için $n = a + d(b)$ olacak şekilde $a, b \in M$ vardır ve buradan $n - a = d(b) \in N \cap d(M) = \{0\}$ olur. Buradan $n = a \in M$ ve dolayısıyla $N \subseteq M$

olur. Böylece $N = M$ dir; yani M bir maksimal sağ idealdir. Benzer şekilde M de kapsanan her öz sağ idealin bir maksimal sağ ideal olduğu görülebilir. Bu ise M nin hem maksimal hem de minimal sağ ideal olduğunu verir.

Eğer R nin bir öz sağ ideali var ise, R nin her öz sağ ideali hem minimal hem de maksimal sağ ideal olduğundan $c(R_R) = 2$ dir ve R bir basit halka olduğundan, Teorem 2.5 gereği D bir bölümlü halka olmak üzere $R = D_2$ dir. Eğer R nin bir öz sağ ideali yok ise, her $0 \neq a \in R$ için aR kümesi R nin bir sağ ideali ve $0 \neq a = a1 \in aR$ olduğundan $R = aR$ olmalıdır. Ayrıca $1 \in R = aR$ olup, $1 = ab$ olacak şekilde bir $0 \neq b \in R$ vardır. Benzer şekilde $bR = R$ olup, $1 = bc$ olacak şekilde bir $0 \neq c \in R$ vardır. Böylece, $a = a1 = a(bc) = (ab)c = 1c = c$ bulunur. Bu ise her $0 \neq a \in R$ için $ab = 1 = ba$ olacak şekilde bir $b \in R$ olduğunu ve dolayısıyla R nin bir bölümlü halka olduğunu verir. Sonuç olarak eğer $l(L) = (0)$ ise D bir bölümlü halka olmak üzere ya $R = D$ dir ya da $R = D_2$ dir.

Diğer taraftan, $l(L) = L$ olsun. Bu durumda $L^2 = l(L)L = (0)$ olur. Özel olarak $L = l(L)$ olduğundan, L bir iki yanlı idealdir. Burada R nin tek öz (sağ, sol, iki yanlı) idealinin L olduğunu görelim. Eğer R nin $I \neq L$ olacak şekilde bir öz I sol ideali var ise o zaman $I + L$, R nin bir sol ideali olur ve $L \subseteq I + L$ dir. Burada L nin maksimalliğinden ya $L = I + L$ dir ya da $R = I + L$ dir. Eğer $L = I + L$ ise $I \subseteq L$ olup, L nin minimalliğinden $I = L$ çelişkisi elde edilir. O zaman $R = I + L$ olmalıdır. Böylece

$$L = LR = L(I + L) = LI + L^2 = LI \subseteq I$$

bulunur ve L nin maksimalliği, $I = L$ çelişkisine neden olur. Bu ise R nin tek öz sol idealinin L olduğunu verir. Eğer burada R nin $I \neq L$ olacak şekilde bir öz I ideali var ise o zaman I aynı zamanda R nin bir sol ideali olacağından benzer şekilde $I = L$ çelişkisi elde edilir. Böylece R nin tek öz iki yanlı idealinin L olduğu sonucuna ulaşılır. Şimdi R nin tek öz sağ idealinin L olduğunu görelim. Bunun için, ilk olarak L nin hem maksimal hem de minimal sağ ideal olduğunu görmeliyiz. Eğer R nin $L \subseteq T$ olacak şekilde bir öz T sağ ideali var ise, $R = L + d(L)$ olduğundan keyfi bir $t \in T$ için $t = a + d(b)$ olacak şekilde $a, b \in L$ vardır ve buradan $t - a = d(b) \in T \cap d(L)$ olur. Burada eğer $T \cap d(L) \neq \{0\}$ ise hipotezden $d(L)$ kümesi R nin bazı tersinir elemanlarını içerdiğinden $T = R$ çelişkisi elde edilir. Böylece $T \cap d(L) = \{0\}$ olmalıdır ve dolayısıyla $t = a \in L$

olur. Buradan $T \subseteq L$ kapsaması elde edilir. Bu sonuç, L nin bir maksimal sağ ideal olduğunu verir. Burada eğer R nin $(0) \neq M \subseteq L$ olacak şekilde bir M sağ ideali var ise $\{0\} \neq d(M) \subseteq d(L)$ olduğundan, $d(M)$ kümesi R nin bazı tersinir elemanlarını içerir. Ayrıca $M+d(M)$, R nin bir sağ ideali olduğundan ve $d(M) \subseteq M+d(M)$ olduğundan, $R = M+d(M)$ olur. Böylece benzer işlemlerle $M = L$ elde edilir. Bu ise L nin bir minimal sağ ideal olduğunu verir. O zaman L , R nin hem maksimal hem de minimal sağ idealidir. Buradan hareketle, eğer R nin $I \neq L$ olacak şekilde bir I öz sağ ideali var ise, $L \subseteq I + L$ olduğundan ve L nin maksimallığından ya $L = I + L$ ya da $R = I + L$ olmalıdır. Eğer $L = I + L$ ise $I \subseteq L$ olur ve L nin minimallığından $I = L$ çelişkisi elde edilir. Eğer $R = I + L$ ise $L^2 = (0)$ olmasından

$$L = RL = (I + L)L = IL \subseteq I$$

olur. L nin maksimallığından $I = L$ çelişkisi elde edilir. Her iki durumda da çelişki elde edildiğinden, R nin tek öz sağ ideali L dir. Sonuç olarak L , R nin tek öz (sağ, sol, iki yanlı) idealidir.

Şimdi Yardımcı Özellik 3.5 de olduğu gibi, $d(b) \neq 0$ olacak şekilde bir $b \in L$ için $b^2 \in L^2 = (0)$ olmasından

$$0 = d^2(b^2) = d^2(b)b + 2d(b)^2 + bd^2(b)$$

bulunur. Burada $d^2(b)b + bd^2(b) \in L$ olduğundan, son bağıntıdan $2d(b)^2 \in L$ elde edilir. Bu durumda $4d(b)^4 = (2d(b)^2)^2 \in L^2 = (0)$ olur. Ayrıca $0 \neq d(b) \in d(L)$ olduğu için, hipotezden $d(b)$ elemanı R de tersinir olmalıdır. Böylece her $r \in R$ için

$$0 = 4d(b)^4 r$$

olur. Son bağıntıdan, $d(b)$ nin bir tersinir eleman olduğu kullanılarak $4r = 0$ elde edilir. Şimdi $0 \neq x \in R$ olsun. Eğer $2x = 0$ ise R bir 2-burulmalı halka olup, $2R = (0)$ elde edilir. Eğer $2x \neq 0$ ise $2(2x) = 4x = 0$ olur ve bu durumda da R bir 2-burulmalı halka olup, $2R = (0)$ elde edilir. Sonuç olarak $2R = (0)$ dır. Burada $D = \{x \in R : d(x) \in L\}$ kümesinin bir birimli halka olduğu açıktır. Ayrıca $d(L) \neq \{0\}$ dan $d(y) \neq 0$ olacak şekilde bir $y \in L$ vardır ve hipotezden $d(y)$ tersinir bir elemandır. Böylece $L^2 = (0)$ olduğundan her $0 \neq x \in D$ için

$$d(xy) = d(x)y + xd(y) = xd(y)$$

bulunur. Eğer $d(xy) = 0$ ise $d(y)^{-1} \in R$ olduğundan, son bağıntıdan $x = 0$ çelişkisine ulaşılır. O zaman $d(xy) \neq 0$ olmalıdır. Ayrıca $xy \in L$ olduğundan hipotezden $d(xy)$ elemanı tersinir bir elemandır. Bu durumda son bağıntıdan $x = d(xy)d(y)^{-1}$ olur. Bir halkada tersinir elemanlarının çarpımının da tersinir olduğu gerçeği, bize x in R de bir tersinir bir eleman olduğunu söyler. Buradan

$$0 = d(1) = d(xx^{-1}) = d(x)x^{-1} + xd(x^{-1})$$

elde edilir. Son bağıntıdan, $d(x) \in L$ olduğundan $xd(x^{-1}) = -d(x)x^{-1} \in L$ ve buradan $x^{-1}(xd(x^{-1})) = d(x^{-1}) \in L$ olduğu sonucuna ulaşılır. Bu durumda D nin tanımından $x^{-1} \in D$ dir ve böylece D nin bir bölümlü halka olduğu sonucu elde edilir. Burada keyfi bir $r \in R$ alalım. $R = L + d(L)$ olduğundan $d(r) = a + d(b)$ olacak şekilde $a, b \in L$ vardır ve $d(r - b) = a \in L$ olur. Bu ise D nin tanımından $r - b \in D$ olduğunu ve dolayısıyla $r \in D + L$ olduğunu verir. Böylece $R \subseteq D + L$ dir. Ayrıca $D + L \subseteq R$ olduğu açıktır. Sonuç olarak $R = D + L$ elde edilir. Şimdi keyfi bir $0 \neq x \in L$ alalım. Burada her $a_1, a_2 \in D$ için

$$a_1x - a_2x = (a_1 - a_2)x \in Dx$$

dir ve her $a \in D$, her $r = y + z \in R = D + L$ için $L^2 = (0)$ olduğundan

$$r(ax) = (y + z)ax = (ya)x \in Dx$$

olur. Son iki bağıntı, Dx in R nin bir sol ideali olduğunu verir. Üstelik $x \in L$ olduğundan $Dx \subseteq L$ dir ve $0 \neq x = 1x \in Dx$ olduğundan $Dx \neq (0)$ dir. Bu ise L nin minimalliğinden $L = Dx$ olduğunu verir. Böylece $R = D + Dx$ olur. Burada $d(x) \in R = D + Dx$ olduğundan $d(x) = s + tx$ olacak şekilde $s, t \in D$ vardır. Burada eğer $s = 0$ ise $d(x) = tx \in Dx = L$ olur. Eğer $d(x) \neq 0$ ise hipotezden $d(x)$ tersinir bir elemandır ve böylece $L = R$ çelişkisine ulaşılır. Eğer $d(x) = 0$ ise $x \neq 0$ olduğundan x tersinir bir eleman olmalıdır ve bu durumda da $L = R$ çelişkisine ulaşılır. Her iki durumda da çelişkiye ulaşıldığından, $s \neq 0$ olmalıdır ve $s^{-1} \in D$ olur.

Burada $s^{-1}x \in Dx$ olsun. O zaman $Dx = Ds^{-1}x$ eşitliğinden, $R = D + Ds^{-1}x$ olur. Ayrıca D nin tanımından $d(s^{-1}) \in L$ olduğundan,

$L^2 = (0)$ ve $d(x) = s + tx$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}
 d(s^{-1}x) &= d(s^{-1})x + s^{-1}d(x) \\
 &= s^{-1}d(x) \\
 &= s^{-1}(s + tx) \\
 &= 1 + s^{-1}tx \\
 &= 1 + s^{-1}tss^{-1}x
 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $s^{-1}x = y \in Dx = L$ ve $s^{-1}ts = a \in D$ denilirse, $R = D + Dy$ ve $d(y) = 1 + ay$ olur. O zaman burada $R = D + Dx$ ve $d(x) = 1 + ax$ olacak şekilde bir $a \in D$ olduğu kabul edilebilir. Şimdi $sx \in Dx = L$ olsun. $L^2 = (0)$, $d(x) = 1 + ax$ ve D nin tanımından hareketle

$$\begin{aligned}
 0 = d((sx)^2) &= d(sxsx) \\
 &= sxd(sx) + d(sx)sx \\
 &= sx(d(s)x + sd(x)) + (d(s)x + sd(x))sx \\
 &= sxs(1 + ax) + s(1 + ax)sx \\
 &= sxs + sxsax + s^2x + saxsx \\
 &= sxs + s^2x \\
 &= s(xs + sx)
 \end{aligned}$$

bulunur. Burada eğer $s \neq 0$ ise $s^{-1} \in D$ olduğundan son bağıntıdan $xs + sx = 0$ dır. Ayrıca $2R = (0)$ olduğundan $xs = sx$ elde edilir ve bu eşitlik $s = 0$ için de sağlanır. O zaman her $s \in D$ için $xs = sx$ dir. Buradan her $a + bx \in R$ için

$$(a + bx)x = ax + bx^2 = ax + 0 = xa + 0 = xa + xbx = x(a + bx)$$

olup, $x \in Z(R)$ elde edilir. Ayrıca her $s \in D$ için $d(s) \in L$, $sx + xs = 0$, $L^2 = (0)$, $d(x) = 1 + ax$, $x \in Z(R)$ ve $2R = (0)$ sonuçları kullanılarak

$$\begin{aligned}
 0 = d(sx + xs) = d(sx) + d(xs) &= d(s)x + sd(x) + d(x)s + xd(s) \\
 &= s(1 + ax) + (1 + ax)s \\
 &= sax + axs \\
 &= (sa + as)x
 \end{aligned}$$

bulunur. Burada $0 \neq sa + as \in D$ ise $x = 0$ çelişkisi elde edilir. O zaman $sa + as = 0$ dır ve dolayısıyla $sa = as$ olur. O zaman D nin

merkezi Z olmak üzere, $a \in Z$ dir. Yardımcı Özellik 3.10 un ispatında gösterildiği gibi, $D[t] = \{\sum_{i=0}^n a_i t^i : a_i \in D, 0 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\phi : D[t] \rightarrow R = D + Dx$ dönüşümü, her $\sum_{i=0}^n a_i t^i \in D[t]$ için $\phi(\sum_{i=0}^n a_i t^i) = a_0 + a_1 x$ olarak tanımlansın. O zaman ϕ bir örten halka homomorfizmasıdır ve $\text{Ker}\phi = (t^2)$ dir. Burada Halkalarda I . İzomorfizma Teoremi'nden $R \cong D[t]/(t^2)$ olur. Böylece $R = D[x]/(x^2)$ elde edilir. Bu durumda Yardımcı Özellik 3.10 dan farklı olarak elde edilen tek durum $d(D) \subseteq L$ olmasına rağmen $d(D) = \{0\}$ olması gerekmediğidir. Aslında keyfi bir $s \in D$ için $d(s) = s'x \in Dx = L$ olacak şekilde bir $s' \in D$ olduğundan, $s \in D$ elemanını $s' \in D$ elemanına resmeden $' : D \rightarrow D$ dönüşümünün D nin bir türevi olduğu kolayca görülür. Gerçekten, her $s_1, s_2 \in D$ için

$$s'_1 x + s'_2 x = d(s_1) + d(s_2) = d(s_1 + s_2) = (s_1 + s_2)' x$$

olup, $(s_1 + s_2)' = s'_1 + s'_2$ bulunur. Ayrıca $x \in Z(R)$ olduğundan

$$(s_1 s_2)' x = d(s_1 s_2) = d(s_1) s_2 + s_1 d(s_2) = (s'_1 x s_2 + s_1 s'_2 x) = (s'_1 s_2 + s_1 s'_2) x$$

olup, $(s_1 s_2)' = s'_1 s_2 + s_1 s'_2$ elde edilir.

Şimdiye kadar yapılanlar aslında aşağıda Teorem 3.2 olarak verilen teoremin ispatıdır.

Teorem 3.2 *Birimli bir R halkası, bir L sol ideali için eğer $d(L) \neq \{0\}$ ve her $x \in L$ için ya $d(x) = 0$ ya da $d(x)$ elemanı R de tersinir olacak şekilde bir $0 \neq d$ türevine sahip ise o zaman D bir bölümlü halka olmak üzere ya $R = D$ ya $R = D_2$ ya da $R = D[x]/(x^2)$ dir. Ayrıca son durumda $2R = (0)$ dır.*

Burada $R = D[x]/(x^2)$ durumunda, L üzerinde d nin hipotezinin mutlaka R üzerine taşınması gerekliliğinin olmadığını not edelim. Bu çalışma $R = D_2$ durumunda, d nin L üzerindeki davranışının mutlaka R üzerine taşınması gerekmediğinin yanı sıra, R nin her $x \in R$ için ya $\delta(x) = 0$ ya da $\delta(x)$ tersinir olacak şekilde bir $0 \neq \delta$ türevine sahip olamayabileceğini gösteren aşağıdaki örnek vurgulanarak bitirilecektir.

Şimdi D bir bölümlü halka, D halkasının merkezi Z olmak üzere $\sigma \notin Z$ olacak şekilde ve D nin bir elemanının karesi olarak yazılamayacak şekilde bir $\sigma \in D$ elemanı olduğunu varsayalım. O zaman $\sigma = a^2$ olacak şekilde bir $a \in D$

yoktur. Burada $d : D_2 \rightarrow D_2$ dönüşümünü her $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in D_2$ için

$$d\left(\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma t - s & \sigma u - r\sigma \\ r - u & s - t\sigma \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece d dönüşümü, D_2 üzerinde $\begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in D_2$

elemanı ile belirli iç türev olur. Eğer $L = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} : r, t \in D \right\}$ ise o zaman

L , D_2 nin bir sol idealidir ve $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} r & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \in L$ için (yani $0 \neq r$ ya da $0 \neq t$ için)

$$d\left(\begin{pmatrix} r & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sigma t & -r\sigma \\ r & -t\sigma \end{pmatrix}$$

olur. Eğer $\begin{pmatrix} \sigma t & -r\sigma \\ r & -t\sigma \end{pmatrix} \in D_2$ tersinir değilse o zaman $(\sigma t, r) = k(-r\sigma, -t\sigma)$

olacak şekilde bir $k \in D$ vardır ve dolayısıyla $\begin{pmatrix} \sigma t & r \\ -r\sigma & -t\sigma \end{pmatrix}$ matrisi de tersinir

değildir. Buradan $-\sigma t^2\sigma + r^2\sigma = 0$ elde edilir. Burada $\sigma \notin Z$ olduğundan

$\sigma \neq 0$ dır ve dolayısıyla $\sigma^{-1} \in D$ dir. Böylece $\sigma t^2 - r^2 = 0$ bulunur. O zaman $\begin{pmatrix} \sigma t & r \\ r & t \end{pmatrix} \in D_2$ matrisi de tersinir değildir. Burada

$$\begin{pmatrix} \sigma t & r \\ r & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

denklem sisteminin en az bir sıfır olmayan çözümü vardır ve son bağıntı

$$\sigma tx + ry = 0 = rx + ty$$

verir. Gerçekten, burada $\begin{pmatrix} \sigma t & r \\ r & t \end{pmatrix} \in D_2$ tersinir olmadığından, eğer $r = 0$ ise

$t = 0$ çelişkisi, eğer $t = 0$ ise $r = 0$ çelişkisi elde edilir. O zaman $r \neq 0$ ve

$t \neq 0$ dır. Ayrıca $(\sigma t, r) = p(r, t)$ olacak şekilde bir $p \in D$ vardır. Eğer $p = 0$

ise $r = 0 = t$ çelişkileri elde edilir. Böylece son bağıntıdan $rx + ty = 0$ olacak

şekilde $x, y \in D$ vardır, $r \neq 0$ ve $t \neq 0$ dır. Burada iki bilinmeyen ve bir denklem

olduğundan, bir serbest değişkene bağlı sonsuz sayıda çözüm vardır. Dolayısıyla son bağıntıyı sağlayacak şekilde ikisi de aynı anda sıfır olmayan $x, y \in D$ bulunur. Burada x serbest değişken olmak üzere, genelliği kaybetmeksizin $x = -1$ alınabilir. Bu durumda son bağıntıdan $r = ty$ ve $\sigma t = ry = ty^2$ olur. Böylece son bağıntıdan $\sigma t = ry = ty^2$ ve $t^{-1} \in D$ olduğundan

$$\sigma = ty^2t^{-1} = (tyt^{-1})^2$$

elde edilir. Ancak yukarıdaki bağıntı $\sigma \in D$ elemanının D nin bir elemanının karesi şeklinde yazılamaması ile çelişir. Böylece $d\left(\begin{pmatrix} r & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sigma t & -r\sigma \\ r & -t\sigma \end{pmatrix} \in D_2$ elemanının tersinir olduğu sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak d nin L üzerindeki sıfırdan farklı değerlerinin tersinir olduğu görülür.

Fakat bununla birlikte $\sigma \notin Z$ olduğundan, $\sigma a \neq a\sigma$ ve dolayısıyla $a - \sigma^{-1}a\sigma \neq 0$ olacak şekilde bir $a \in D$ seçilebilir. Buradan

$$d\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \sigma^{-1}a\sigma \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a - \sigma^{-1}a\sigma & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Fakat bu matrisin tersinir olmadığı açıktır. O zaman d nin L üzerindeki davranışı D_2 üzerine taşınmaz.

Burada D_2 nin bir sol ideali L olmak üzere $d(L) \neq \{0\}$ ve $d(L)$ kümesinin sıfırdan farklı elemanları tersinir olacak şekilde D_2 nin bir $0 \neq d$ türevi var olması için yeter bir koşulun D nin bazı elemanlarının D nin bir elemanının karesi şeklinde yazılamaması olduğu gösterildi. Teorem 3.1 de ise $2R \neq (0)$ iken D_2 nin her $x \in D_2$ için ya $d(x) = 0$ ya da $d(x)$ tersinir olacak şekilde bir $0 \neq d$ türevine sahip olabilmesi için gerek ve yeter bir şartın D nin merkezi Z olmak üzere, Z nin bazı elemanlarının D nin bir elemanının karesi şeklinde yazılamaması olduğu gösterildi.

Son olarak, yukarıdaki tartışmada yer alan bölümlü halka yerine özel bir bölümlü halka alalım. Burada $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi ve F ise $\mathbb{C}$ üzerinde x değişkenli rasyonel fonksiyonlar cismi olsun. Katsayıları F de olan y değişkenli Laurent serilerinin halkası D yi ele alalım. Böylece $D = \{\sum_{m=-k}^{\infty} f_m(x)y^m : f_i(x) \in F, -k \leq i\}$ olur. Burada keyfi bir $r(x) \in F$ için $r(2x) = yr(x)y^{-1}$ olsun; yani her $r(x) \in F$ için $\sigma(r(x)) = r(2x)$ ile tanımlı olmak üzere $yr(x) = r(x)y$ yerine $yr(x) = \sigma(r(x))y$ olsun. Bu durumda σ dönüşümünün,

F nin halka izomorfizması olduğu kolayca görülebilir. O zaman D bir bölümlü halkadır.

Şimdi D nin merkezi Z olmak üzere, $\mathbb{C} = Z$ olduğunu görelim. İlk olarak $\mathbb{C} \subseteq Z$ olduğu açıktır. Tersine keyfi bir $\sum_{m=-k}^{\infty} g_m(x)y^m \in Z$ için, $\sum_{m=-k}^{\infty} g_m(x)y^m = y \left(\sum_{m=-k}^{\infty} g_m(x)y^m \right) y^{-1} = \sum_{m=-k}^{\infty} yg_m(x)y^{-1}y^m = \sum_{m=-k}^{\infty} g_m(2x)y^m$ bulunur. Son bağıntıdan her $-k \leq i$ için $g_i(x) = g_i(2x)$ olmalıdır. Ayrıca $x \in D$ olduğundan $xyx^{-1} = 2x$ ve dolayısıyla $yx = 2xy$ dir. Böylece $\left(\sum_{m=-k}^{\infty} g_m(x)y^m \right) x = \sum_{m=-k}^{\infty} g_m(x)y^m x = \sum_{m=-k}^{\infty} g_m(x)y^{m-1}yx = \sum_{m=-k}^{\infty} g_m(x)y^{m-1}2xy = \sum_{m=-k}^{\infty} g_m(x)2y^{m-1}xy = \sum_{m=-k}^{\infty} g_m(x)2y^{m-2}yxy = \sum_{m=-k}^{\infty} g_m(x)2y^{m-2}2xy^2 = \sum_{m=-k}^{\infty} g_m(x)2^2y^{m-2}xy^2 \dots = \sum_{m=-k}^{\infty} g_m(x)2^mxy^m$ bulunur. Ayrıca $\sum_{m=-k}^{\infty} g_m(x)y^m \in Z$ ve $x \in F$ olduğundan

$$\left(\sum_{m=-k}^{\infty} g_m(x)y^m \right) x = x \left(\sum_{m=-k}^{\infty} g_m(x)y^m \right) = \sum_{m=-k}^{\infty} g_m(x)xy^m$$

dir. Son iki bağıntıdan $\sum_{m=-k}^{\infty} g_m(x)xy^m = \sum_{m=-k}^{\infty} g_m(x)2^mxy^m$ elde edilir. Bu ise her $-k \leq i$ için $g_i(x) = g_i(x)2^i$ olduğunu söyler ve buradan $(2^i - 1)g_i(x) = 0$ bulunur. O zaman $i \neq 0$ iken $g_i(x) = 0$ olmalıdır ve böylece $\sum_{m=-k}^{\infty} g_m(x)y^m = g_0(x) = g_0(2x)$ olur. Burada $g_0(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ olacak şekilde $p(x), q(x) \in \mathbb{C}[x]$ vardır ve $q(x) \neq 0$ dir. Ayrıca $q(x) = \frac{q(x)}{1}y^0 \in D$ olduğundan $q(x)^{-1} \in D$ dir. Bu durumda eğer $p(x) = 0$ ise $\sum_{m=-k}^{\infty} g_m(x)xy^m = g_0(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = 0 \in \mathbb{C}$ elde edilir. Eğer $p(x) \neq 0$ ise benzer şekilde $p(x)^{-1} \in D$ olur ve $g_0(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(2x)}{q(2x)} \in Z$ olduğundan $\frac{p(x)}{q(x)} = y \frac{p(x)}{q(x)} y^{-1} = \frac{yp(x)y^{-1}}{q(x)} = \frac{p(2x)}{q(x)}$ olur. Bu ise $p(x) = p(2x)$ olduğunu verir. Buradan $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(2x)}{q(2x)} = \frac{p(x)}{q(2x)}$ olduğundan $q(x) = q(2x)$ bulunur. O zaman $p(x), q(x) \in \mathbb{C}$ dir. Böylece $\sum_{m=-k}^{\infty} g_m(x)xy^m = g_0(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \in \mathbb{C}$ elde edilir. Bu ise $Z \subseteq \mathbb{C}$ olduğunu verir. Sonuç olarak $Z = \mathbb{C}$ dir.

Ayrıca $\mathbb{C}$ nin her elemanının, $\mathbb{C}$ nin bir elemanının karesi şeklinde yazılabildiğini görelim: Keyfi bir $z = a + bi \in \mathbb{C}$ için, eğer $b = 0$ ve $0 \leq a$ ise $z = (\sqrt{a})^2$ dir. Eğer $b = 0$ ve $a < 0$ ise $z = (\sqrt{-a}i)^2$ dir. Eğer $b \neq 0$ ise $z = a + bi = \left(\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \right) + \frac{b}{|b|} \left(\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \right) i \right)^2$ dir. Bu durumda $Z = \mathbb{C} \subseteq D$ olduğundan Z nin her elemanı, D nin bir elemanının karesi şeklinde yazılabilir. Böylece Teorem 3.1 den, D_2 nin $0 \neq d$ ve her $x \in D_2$ için ya $d(x) = 0$ ya da $d(x)$ tersinir olacak şekilde bir türevi yoktur.

Fakat x elemanının D deki bir elemanın karesi şeklinde yazılamadığını

açıklayalım. Eğer $x = \left(\sum_{m=-k}^{\infty} f_m(x)y^m\right)^2$ olacak şekilde bir $\sum_{m=-k}^{\infty} f_m(x)y^m \in D$ var olsa $c_i(x) = \sum_{j=-k}^{i+k} f_j(x)f_{i-j}(x)$ olmak üzere $x = \sum_{n=-2k}^{\infty} c_n(x)y^n$ olur. Böylece $i \neq 0$ iken $c_i(x) = 0$ olduğu elde edilir. Buradan $-k \leq j \leq -1$ iken $f_j(x) = 0$ ve dolayısıyla $(f_0(x))^2 = x$ bulunur. Burada $f_0(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ olacak şekilde $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ ve $0 \neq q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ vardır, $\frac{p(x)^2}{q(x)^2} = (f_0(x))^2 = x$ ve $q(x)^2 x = p(x)^2$ dir. Bu durumda $z_i = \sum_{j=0}^i a_j a_{i-j}$ ve $r_i = \sum_{j=0}^i b_j b_{i-j}$ olmak üzere $\sum_{i=0}^{2n} r_i x^{i+1} = q(x)^2 x = p(x)^2 = \sum_{i=0}^{2n} z_i x^i$ olur. O zaman $a_0^2 = 0$ ve dolayısıyla $a_0 = 0$ olmalıdır. Ayrıca $b_0^2 = a_0 a_1 + a_1 a_0 = 0$ olduğundan $b_0 = 0$ olmalıdır. Bu şekilde devam edilirse, $0 = b_1 b_0 + b_0 b_1 = a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0 = a_1^2$ olduğundan $a_1 = 0$ ve $b_1^2 = b_2 b_0 + b_1 b_1 + b_0 b_2 = a_3 a_0 + a_2 a_1 + a_1 a_2 + a_0 a_3 = 0$ olduğundan $b_1 = 0$ bulunur. Benzer işlemlerle her $0 \leq i \leq n$ için $a_i = 0$ olduğu görülür. Böylece $p(x) = 0$ elde edilir. Bu ise $0 = f_0(x) = x$ çelişkisini verir. Sonuç olarak x elemanı D nin bir elemanının karesi şeklinde yazılamaz ve $x \notin \mathbb{C} = Z$ dir. Bu yüzden yukarıda verilen bilgiler ışığında, D_2 üzerinde $\left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} : r, t \in D \right\}$ sol idealinin sıfırdan farklı her elemanının görüntüsü tersinir olacak şekilde bir $0 \neq d$ türevi vardır.

Son olarak D_2 nin bir sol ideali L olmak üzere, D_2 nin $d(L) \neq \{0\}$ ve $d(x) \neq 0$ olacak şekilde her $x \in L$ için $d(x)$ tersinir koşulunu sağlayan bir $0 \neq d$ türevine sahip olabilmesi için D üzerinde oldukça ilginç bir gerek ve yeter koşul verilebilir. Örneğin, Yardımcı Özellik 3.6 da $f = 0$ alınarak ve bu özellikte bir iç türev olması için gerek ve yeter bir koşulun her $t \in D$ için $t^2 - \alpha \gamma t \alpha^{-1} + \alpha \beta \neq 0$ olacak şekilde $\alpha, \beta, \gamma \in D$ bulunması olduğunu görelim.

Burada f , D nin bir iç türevi olduğundan Yardımcı Özellik 3.7 den d , D_2 nin bir iç türevi olur. Özel olarak Yardımcı Özellik 3.8 in ispatında olduğu gibi her $\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \in D_2$ için

$$\begin{aligned} d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} f(a) - b\beta - \alpha c & f(b) + a\alpha + b\gamma - \alpha e \\ f(c) + \beta a - e\beta - \gamma c & f(e) + e\gamma - \gamma e + \beta b + c\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \beta & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \beta & -\gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur. Yani $d, \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \beta & -\gamma \end{pmatrix} \in D_2$ elemanı ile belirli iç türevdir. Burada D_2

nin $L = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} : r, t \in D \right\}$ sol idealinin sıfırdan farklı her elemanını d altındaki görüntüsünün tersinir olması için gerek ve yeter bir koşul $r \neq 0$ ya da $t \neq 0$ olacak şekilde her $r, t \in D$ için $d \left(\begin{pmatrix} r & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\alpha t & r\alpha \\ \beta r - \gamma t & t\alpha \end{pmatrix} \in D_2$ matrisinin tersinir olmasıdır; yani

$$-\alpha t^2 \alpha - r\alpha\beta r + r\alpha\gamma t \neq 0$$

olmasıdır. Ayrıca $e_{11} \in L$ olduğundan $d(e_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \in D_2$ matrisi tersinirdir. O zaman $\alpha\beta \neq 0$ dır. Bu ise $\alpha^{-1}, \beta^{-1} \in D$ olduğunu verir. Son bağıntının her iki tarafı sağdan ve soldan $\alpha^{-1} \in D$ ile çarpılarak

$$-t^2 - \alpha^{-1}r\alpha\beta r\alpha^{-1} + \alpha^{-1}r\alpha\gamma t\alpha^{-1} \neq 0$$

elde edilir. Son bağıntıda özel olarak $0 \neq r = \alpha \in D$ alınırsa

$$-t^2 - \alpha\beta + \alpha\gamma t\alpha^{-1} \neq 0$$

bulunur. Son bağıntı, $r \neq 0$ alındığından her $t \in D$ için sağlanmalıdır. Böylece D_2 nin bir sol ideali L olmak üzere, $d(L) \neq \{0\}$ ve $d(x) \neq 0$ olacak şekilde her $x \in L$ için $d(x)$ tersinir koşulunu sağlayan, Yardımcı Özellik 3.6 da $f = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq d$ iç türevine sahip olabilmesi için gerek ve yeter bir koşul her $t \in D$ için

$$t^2 - \alpha\gamma t\alpha^{-1} + \alpha\beta \neq 0$$

olacak şekilde $\alpha, \beta, \gamma \in D$ olmasıdır.

4 TERSİNİR DEĞERLİ (σ, τ) -TÜREVLER

Bu bölümde Motoshi Hongan ve Hiroaki Komatsu' nun 1987 yılında yapmış oldukları “ (σ, τ) -Derivations With Invertible Values” adlı çalışma incelenecektir.

Bu çalışma boyunca R bir birimli halka, R nin tersinir elemanlarının grubu U ve R nin Jacobson radikali J olacaktır. Birimli bir R halkası üzerinde iki dönüşüm σ ve τ olsun. Eğer R üzerinde her $x \in R$ için $\delta(x) = x'$ ile tanımlı δ toplamsal dönüşümü, herhangi $x, y \in R$ için $(xy)' = x'\sigma(y) + \tau(x)y'$ eşitliğini sağlıyorsa δ dönüşümüne R nin bir (σ, τ) -türevi denir. (Bergen et al., 1983) de, J. Bergen, I.N. Herstein ve C. Lanski eğer bir R halkasının her $x \in R$ için $d(x) = x'$ ile tanımlı ve $\{0\} \neq R' \subseteq U \cup \{0\}$ olacak şekilde bir türevi var ise o zaman R nin ya bir D bölümlü halkası, veya bir D bölümlü halkası üzerindeki 2×2 tipindeki matrisler halkası D_2 , veya $\text{char} D = 2$, $D' = \{0\}$ ve D nin merkezindeki bazı $a \in D$ için $t' = 1 + at$ olacak şekilde bir D bölümlü halkası için $D[t]/(t^2)$ kesir halkası olduğunu ispatlamışlardır. (Bergen and Herstein, 1983) de, J. Bergen ve I.N. Herstein R halkasının birim otomorfizmadan farklı bir otomorfizması σ olmak üzere d yerine $1 - \sigma$ alarak, R nin ya bir D bölümlü halkası, ya bir D bölümlü halkası üzerinde 2×2 tipinde matrisler halkası D_2 , ya da D bir bölümlü halka olmak üzere $D \oplus D$ olduğunu ispatlamışlardır. (Chang, 1985) de, J.-C. Chang d yerine R nin $\delta\sigma = \sigma\delta$ olacak şekilde bir σ otomorfizması için $(\sigma, 1)$ -türevi olan, her $x \in R$ için $\delta(x) = x'$ ile tanımlı δ yı alarak, R nin ya bir D bölümlü halkası, veya bir D bölümlü halkası üzerindeki 2×2 tipindeki matrisler halkası D_2 , veya $\text{char} D = 2$, $D' = \{0\}$ ve bazı $a \in D$ için $t' = 1 + at$ ile her $s \in D$ için $sa = \sigma(a)s$ olacak şekilde bir D bölümlü halkası için $D[t; \sigma]/(t^2)$ halkası olduğunu ispatlamışlardır (Burada $D[t; \sigma]$, t değişkenli σ ile belirli skew polinomlar halkasıdır).

Eğer $x, y \in R$ ise R halkasının birim otomorfizması 1 olmak üzere

$$d(xy) = d(x)y + xd(y) = d(x)1(y) + 1(x)d(y)$$

dır ve

$$(1 - \sigma)(xy) = xy - \sigma(xy) = xy - \sigma(x)\sigma(y) = ((1 - \sigma)(x))\sigma(y) + 1(x)((1 - \sigma)(y))$$

dir. Son iki bağıntıdan d nin bir $(1, 1)$ -türev olduğu ve $1 - \sigma$ nin bir $(\sigma, 1)$ -türev olduğu açıktır.

Bu çalışmada, yukarıda bahsedilen bu üç sonuç aynı anda aşağıdaki gibi genelleştirilecektir:

Teorem 4.1 *R nin sıfırdan farklı bir sağ ideali T , bir halka otomorfizması σ ve bir örten dönüşümü τ olsun. Burada R nin her $x \in R$ için $\delta(x) = x'$ ile tanımlı bir (σ, τ) -türevi için $\{0\} \neq T' \subseteq U \cup \{0\}$ koşulunun sağlandığını varsayalım. O zaman τ dönüşümü R nin bir halka otomorfizmasıdır ve R halkası (1) bir D bölümlü halkasıdır, veya (2) D bir bölümlü halka olmak üzere D_2 dir, veya (3) D bir bölümlü halka olmak üzere $R = D \oplus D$ dir, veya (4) $D = \{x \in R : x' \in J\}$ bölümlü halkası üzerinde $\{1, v\}$ sağ ve sol serbest bazlı yerel halkadır ve $v^2 = 0$ dir, her $r \in R$ için $rv = v\sigma^{-1}\tau(r)$ dir, $v' = 1 + vb$ olacak şekilde bir $b \in D$ vardır. Eğer (4) durumunda $b = 0$ ise o zaman $\sigma(D) = \tau(D)$ dir ve eğer $\sigma^{-1}\tau\delta = \delta\sigma^{-1}\tau$ ise o zaman $\sigma(D) = \tau(D)$ dir, $\text{char} D = 2$ dir ve v' elemanı R halkasının merkezindedir.*

Öncelikle Teorem 4.1 in ispatı için yapılan hazırlıklarda, aşağıdaki yardımcı özellikler belirtilecektir.

Yardımcı Özellik 4.1 *δ dönüşümü R halkasının bir (σ, τ) -türevi olsun. Burada $R' \cap U \neq \emptyset$ varsayalım. O zaman*

- (1) σ ve τ toplamsal dönüşümlerdir.
- (2) σ nın bir halka homomorfizması olması için gerek ve yeter bir koşul τ nın bir halka homomorfizması olmasıdır.
- (3) $1' = 0$ olması için gerek ve yeter bir koşul $\sigma(1) = \tau(1) = 1$ olmasıdır. Özellikle, eğer σ R nin bir örten halka homomorfizması ve τ örten ise o zaman τ R nin bir halka homomorfizmasıdır ve $1' = 0$ dir.

İspat (1) Hipotezden, $z' \in R' \cap U$ olacak şekilde bir $z \in R$ vardır. Burada her $x, y \in R$ için $(x + y)z = xz + yz$ ve δ bir (σ, τ) -türev olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= ((x + y)z)' - (xz + yz)' \\ &= (x + y)'\sigma(z) + \tau(x + y)z' - x'\sigma(z) - \tau(x)z' - y'\sigma(z) + \tau(y)z' \\ &= (\tau(x + y) - \tau(x) - \tau(y))z' \end{aligned}$$

olur. Burada $z' \in U$ olduğundan, son bağıntının her iki tarafı sağdan $z' \in U$ elemanının tersi ile çarpılarak $\tau(x + y) = \tau(x) + \tau(y)$ elde edilir. Benzer şekilde

$z(x+y) = zx + zy$ eşitliğinden yararlanarak $\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y)$ elde edilir.

Buradan σ ve τ birer toplamsal dönüşümlerdir.

(2) Herhangi $x, y, z \in R$ için $(xy)z = x(yz)$ ve δ bir (σ, τ) -türev olduğundan

$$\begin{aligned}
 0 &= ((xy)z)' - (x(yz))' \\
 &= (xy)' \sigma(z) + \tau(xy) z' - x' \sigma(yz) - \tau(x)(yz)' \\
 &= (x' \sigma(y) + \tau(x) y') \sigma(z) + \tau(xy) z' - x' \sigma(yz) - \tau(x)(y' \sigma(z) + \tau(y) z') \\
 &= x' \sigma(y) \sigma(z) + \tau(x) y' \sigma(z) + \tau(xy) z' - x' \sigma(yz) - \tau(x) y' \sigma(z) - \tau(x) \tau(y) z' \\
 &= x' (\sigma(y) \sigma(z) - \sigma(yz)) + (\tau(xy) - \tau(x) \tau(y)) z'
 \end{aligned}$$

olur. Burada eğer σ bir halka homomorfizması ise son bağıntıdan $(\tau(xy) - \tau(x)\tau(y))z' = 0$ elde edilir. Böylece hipotezden, özel olarak $z' \in U$ olacak şekilde bir $z \in R$ için $\tau(xy) - \tau(x)\tau(y) = 0$ bulunur. Bu ise Yardımcı Özellik 4.1 (1) ile beraber, τ nın bir halka homomorfizması olduğunu verir. Tersine, eğer τ bir halka homomorfizması ise benzer şekilde son bağıntıdan σ nın bir halka homomorfizması olduğu görülür.

(3) Açıkça görüldüğü gibi

$$0 = 0' = (1 - 1)' = 1' - 1' = (1.1)' - 1' = 1' \sigma(1) + \tau(1)1' - 1'$$

dir. Burada eğer $\sigma(1) = \tau(1) = 1$ ise o zaman son bağıntıdan $1' = 0$ elde edilir.

Tersine, $1' = 0$ olduğunu varsayalım ve $z' \in U$ olacak şekilde bir $z \in R$ seçelim.

O zaman

$$\begin{aligned}
 0 = 0' &= (z - z)' = z' - z' = z' - (1z)' \\
 &= z' - 1' \sigma(z) - \tau(1) z' \\
 &= z' - \tau(1) z' \\
 &= (1 - \tau(1)) z'
 \end{aligned}$$

olur. Son bağıntının her iki tarafı sağdan z' elemanının tersi ile çarpılarak $\tau(1) = 1$ elde edilir. Benzer şekilde $0 = 0' = z' - (z1)'$ eşitliğinden yararlanılarak $\sigma(1) = 1$ elde edilir.

Özel olarak σ nın bir örten halka homomorfizması olduğunu ve τ nın örten olduğunu kabul edelim. Bu durumda Yardımcı Özellik 4.1 (2) den τ dönüşümü

bir halka homomorfizmasıdır. Burada her $b \in R$ için $\sigma(a) = b$ olacak şekilde bir $a \in R$ vardır. Böylece

$$b = \sigma(a) = \sigma(a1) = \sigma(a)\sigma(1) = b\sigma(1)$$

dir ve ayrıca

$$b = \sigma(a) = \sigma(1a) = \sigma(1)\sigma(a) = \sigma(1)b$$

olur. Bu durumda son iki bağıntıdan $\sigma(1) = 1$ olmalıdır. Benzer şekilde $\tau(1) = 1$ olduğu görülür. Böylece Yardımcı Özellik 4.1 (3) den $1' = 0$ dir.

Yardımcı Özellik 4.2 Teorem 4.1 kabulleri altında, aşağıdakiler sağlanır:

- (1) $\text{Ker } \delta \subseteq U \cup \{0\}$ dir.
- (2) R nin T de kapsanan sıfırdan farklı bir sağ ideali I olsun. Eğer $\tau(I) \neq R$ ise o zaman toplamsal grup olarak $R = I' \oplus \tau(I)$ dir ve I , R nin bir minimal sağ idealidir.

İspat (1) Keyfi bir $0 \neq x \in \text{Ker } \delta$ alalım ve $t' \in U$ olacak şekilde bir $t \in T$ seçelim. Kabulden T , R nin bir sağ ideali olduğundan $tx \in T$ dir. O zaman

$$(tx)' = t'\sigma(x) + \tau(t)x' = t'\sigma(x) \in T' \subseteq U \cup \{0\}$$

olur. Burada eğer $(tx)' = t'\sigma(x) = 0$ ise son bağıntının her iki tarafı soldan t' elemanının tersi ile çarpılarak $\sigma(x) = 0$ bulunur ve σ , R nin bir otomorfizması olduğundan $x = 0$ çelişkisi elde edilir. Böylece son bağıntıdan $(tx)' = t'\sigma(x) \in U$ olmalıdır. Buradan $\sigma(x) = (t')^{-1}(tx)'$ bulunur. Bir halkada tersinir iki elemanının çarpımının da tersinir olduğu gerçeği, bizi $\sigma(x)$ elemanının tersinir olduğu sonucuna ulaştırır. Üstelik σ , R nin bir otomorfizması olduğundan $\sigma(x)$ in tersinir olması, x in tersinir olduğunu verir. Böylece $x \in U$ olur. Buradan hareketle $\text{Ker } \delta \subseteq U \cup \{0\}$ dir.

(2) Hipotezden σ , R nin bir otomorfizması olduğundan, Yardımcı Özellik 4.1 (2) den τ , R nin bir halka homomorfizmasıdır. Aynı zamanda kabulden τ örtendir. Burada $I \subseteq T$ ve $\tau(I) \neq R$ olacak şekilde R nin bir $(0) \neq I$ sağ ideali var olsun. Her $x, y \in I$ için

$$\tau(x) - \tau(y) = \tau(x - y) \in \tau(I)$$

olur. Ayrıca τ nın örtenliğinden her $r \in R$ için $r = \tau(z)$ olacak şekilde bir $z \in R$ vardır ve böylece

$$\tau(x)r = \tau(x)\tau(z) = \tau(xz) \in \tau(I)$$

olur. Son iki bağıntıdan $\tau(I)$, R nin bir sağ idealidir. Ek olarak her $a \in I$ ve her $r \in R$ için $a'\sigma(r) = (ar) - \tau(a)r' \in (IR)' + \tau(I)R'$ dir. Bu ise $I'\sigma(R) \subseteq (IR)' + \tau(I)R'$ olduğunu verir ve böylece $R = \sigma(R)$ olduğundan $I'R = I'\sigma(R) \subseteq (IR)' + \tau(I)R' \subseteq I' + \tau(I)$ bulunur. Benzer şekilde $\tau(I)R \subseteq \tau(I) \subseteq I' + \tau(I)$ dir. Böylece τ ve δ nın toplamsal olduğu gerçeğinden, $I' + \tau(I)$ nın R nin bir sağ ideali olduğu sonucuna ulaşılır. Burada eğer $\tau(I) \cap I' \neq \{0\}$ ise $I' \subseteq T' \subseteq U \cup \{0\}$ olduğundan $\tau(I)$, R nin bazı tersinir elemanlarını içerir ve dolayısıyla $\tau(I) = R$ çelişkisi elde edilir. Böylece $\tau(I) \cap I' = \{0\}$ olmalıdır. Buradan $I' \oplus \tau(I)$ kümesi R nin bir sağ idealidir. Bunun yanında, Yardımcı Özellik 4.2 (1) den $\text{Ker } \delta \subseteq U \cup \{0\}$ olduğuna dikkat çekerek $I \cap \text{Ker } \delta = \{0\}$ olduğu görülür. Gerçekten tersi olduğu durumda; yani $I \cap \text{Ker } \delta \neq \{0\}$ ise I sağ ideali R nin bazı tersinir elemanlarını içereceğinden $I = R$ olur. Ayrıca τ örten olduğundan $\tau(I) = \tau(R) = R$ çelişkisi elde edilir. Böylece $I \cap \text{Ker } \delta = \{0\}$ olmalıdır.

Şimdi $R = I' \oplus \tau(I)$ olduğunu görelim. Burada eğer $I' = \{0\}$ ise o zaman $0 \neq x \in I$ için $x' = 0$ olur ve bu ise $0 \neq x \in I \cap \text{Ker } \delta = \{0\}$ çelişkisini verir. O zaman $I' \neq \{0\}$ olmalıdır ve $I' \subseteq T' \subseteq U \cup \{0\}$ olduğundan $I' \cap U \neq \emptyset$ olur. Böylece I' kümesi R nin bazı tersinir elemanlarını içerir. Ayrıca $I' \subseteq I' \oplus \tau(I)$ her zaman sağlandığından, $I' \oplus \tau(I)$ sağ ideali R nin bazı tersinir elemanlarını içerir. Böylece $R = I' \oplus \tau(I)$ sonucuna ulaşılır.

Şimdi I da kapsanacak şekilde R nin sıfırdan farklı bir sağ ideali K olsun. Yukarıda yapılan işlemlerle $R = K' \oplus \tau(K)$ olduğu görülebilir. Burada bir $x \in I$ alalım. O zaman $x' + \tau(x) \in I' \oplus \tau(I) = R = K' \oplus \tau(K)$ olduğundan $x' + \tau(x) = a' + \tau(b)$ olacak şekilde $a, b \in K$ vardır ve böylece $(x - a)' = \tau(b - x) \in I' \cap \tau(I) = \{0\}$ olur. Bu durumda $x - a \in I \cap \text{Ker } \delta = \{0\}$ olur. Buradan $x = a \in K$ elde edilir. Böylece $I \subseteq K$ bulunur. Ayrıca $K \subseteq I$ kabulünden $I = K$ sonucuna ulaşılır. Bu ise I nın bir minimal sağ ideal olduğunu verir.

Şimdi Teorem 4.1 in ispatını tamamlamaya hazırız.

Teorem 4.1 in İspatı Yardımcı Özellik 4.1 (2) den τ bir örten halka homomorfizmasıdır; yani $\tau(R) = R$ dir. Burada eğer R nin kendisi bir bölümlü

halka ise $\text{Ker } \tau$, R nin bir ideali olduğundan ve $\tau(R) = R$ olduğundan $\text{Ker } \tau \neq R$ olduğu açıktır. Buradan $\text{Ker } \tau = (0)$ sonucuna ulaşılır; yani τ bire-birdir. Böylece τ bir halka otomorfizmasıdır. Bu durumda ispatlanacak bir şey yoktur, Teorem 4.1 (1) elde edilir.

Bundan böyle R nin bir bölümlü halka olmadığını varsayalım. Burada eğer $\text{Ker } \tau \cap T \neq (0)$ ise o zaman $\text{Ker } \tau \cap T \subseteq T$ ve $R \neq (0) = \tau(\text{Ker } \tau \cap T)$ bağıntıları göz önüne alınarak, Yardımcı Özellik 4.2 (2) den ve hipotezden

$$R = (\text{Ker } \tau \cap T)' \oplus \tau(\text{Ker } \tau \cap T) = (\text{Ker } \tau \cap T)' \subseteq T' \subseteq U \cup \{0\}$$

olur. Ayrıca $U \cup \{0\} \subseteq R$ olduğu açıktır. Bu ise $R = U \cup \{0\}$ olduğunu; yani R nin bir bölümlü halka olması çelişkisini verir. Böylece $\text{Ker } \tau \cap T = (0)$ olmalıdır. Buradan $\tau : T \rightarrow \tau(T) \subseteq R$ dönüşümünün bir halka izomorfizması olduğu sonucuna ulaşılır. Burada eğer $\tau(T) \neq R$ ise $I = T$ için $(0) \neq I \subseteq T$ ve $\tau(I) \neq R$ olduğundan Yardımcı Özellik 4.2 (2) gereği $R = I' \oplus \tau(I)$ olur ve I , R nin bir minimal sağ idealidir. Eğer $\tau(T) = R$ ise $\tau : T \rightarrow \tau(T) = R$ dönüşümü bir halka izomorfizması olur. Burada eğer R nin bir öz sağ ideali yok ise bir $0 \neq a \in R$ için $0 \neq a = a1 \in aR$ olur. Fakat $(0) \neq aR$, R nin bir sağ ideali olduğundan kabul gereği bu $aR = R$ olmasını gerektirir. Ayrıca $1 \in R = aR$ olduğundan $1 = ab$ olacak şekilde bir $0 \neq b \in R$ vardır. Benzer şekilde $bR = R$ olduğundan $bc = 1$ olacak şekilde bir $c \in R$ vardır ve böylece $a = a1 = a(bc) = (ab)c = 1c = c$ olur. O zaman her $0 \neq a \in R$ için $ab = 1 = ba$ olacak şekilde bir $b \in R$ var olur. Bu sonuç, R nin bir bölümlü halka olmaması ile çelişir. Böylece R nin bir öz L sağ ideali vardır ve $\tau^{-1}(L) = \{x \in T : \tau(x) \in L\} \subseteq T$ kümesi R nin bir sağ idealidir. Burada $\tau : T \rightarrow R$ bir izomorfizma olduğundan her $x \in L$ için $\tau^{-1}(x) \in T$ dir. Ek olarak $x = \tau(\tau^{-1}(x)) \in L$ olduğundan $\tau^{-1}(x) \in \tau^{-1}(L)$ olur. Burada eğer $\tau^{-1}(L) = (0)$ ise her $x \in L$ için $\tau^{-1}(x) = 0$ olur ve dolayısıyla $x = \tau(\tau^{-1}(x)) = \tau(0) = 0$ bulunur. Bu ise $L = (0)$ çelişkisini verir. O zaman $(0) \neq \tau^{-1}(L) \subseteq T$ olmalıdır. Burada $\tau(\tau^{-1}(L)) = L \neq R$ olduğundan $I = \tau^{-1}(L)$ denilirse, Yardımcı Özellik 4.2 (2) den $R = I' \oplus \tau(I)$ olur. Ayrıca I , R nin bir minimal sağ idealidir. Tüm bu bilgilerin ışığında,

$$R = I' \oplus \tau(I) \tag{1}$$

olacak şekilde T de kapsanan R nin bir minimal I sağ idealinin olduğu gösterilmiş olur. Şimdi $\sigma(I)$ ve $\tau(I)$ nın her ikisinin de R nin minimal sağ

idealleri olduklarını görelim. Burada $(0) \neq M \subseteq \tau(I)$ olacak şekilde R nin bir M sağ ideali var olsun. O zaman $I \subseteq T$ olduğundan $\text{Ker } \tau \cap I \subseteq \text{Ker } \tau \cap T = (0)$ dır ve dolayısıyla $\tau : I \rightarrow \tau(I)$ dönüşümü bir izomorfizmadır. Bu durumda $\tau^{-1}(M) \cap I = \{x \in I : \tau(x) \in M\} \subseteq I$ kümesi R nin bir sağ idealidir ve I nin minimallüğünden ya $\tau^{-1}(M) \cap I = (0)$ veya $\tau^{-1}(M) \cap I = I$ olmalıdır. Burada eğer $\tau^{-1}(M) \cap I = (0)$ ise keyfi bir $x \in M \subseteq \tau(I)$ için $x = \tau(y)$ olacak şekilde bir $y \in I$ vardır ve böylece $y = \tau^{-1}(x) \in \tau^{-1}(M) \cap I = (0)$ olur. Buradan $x = \tau(y) = \tau(0) = 0$ bulunur. Böylece her $x \in M$ için $x = 0$ dır, bu ise bizi $M = (0)$ çelişkisine ulaştırır. O zaman $\tau^{-1}(M) \cap I = I$ olmalıdır. Bu durumda ise $I \subseteq \tau^{-1}(M)$ dir ve dolayısıyla $\tau(I) \subseteq \tau(\tau^{-1}(M)) = M$ elde edilir. Ayrıca $M \subseteq \tau(I)$ kabulünden $M = \tau(I)$ olur. Böylece $\tau(I)$ nin R nin bir minimal sağ ideali olduğu sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde $\sigma(I)$ nin da R nin bir minimal sağ ideali olduğu görülebilir.

İlk olarak $I^2 \neq (0)$ durumunu ele alalım. Bu durumda $ab \neq 0$ olacak şekilde $a, b \in I$ vardır. Ayrıca aI kümesi R nin bir sağ idealidir. Burada $aI \subseteq I$ ve I bir minimal sağ ideal olduğundan ya $aI = (0)$ ya da $aI = I$ olmalıdır. Eğer $aI = (0)$ ise $b \in I$ olduğundan $ab = 0$ çelişkisi elde edilir. O zaman $aI = I$ olmalıdır. Burada $a \in I = aI$ olduğundan $ae = a$ olacak şekilde bir $0 \neq e \in I$ vardır. Son bağıntının her iki tarafı sağdan $e \in I$ ile çarpılarak $ae^2 = ae$ ve böylece $a(e^2 - e) = 0$ bulunur. Burada $(e^2 - e) \in r(a) = \{x \in I : ax = 0\} \subseteq I$ dır ve $r(a)$ kümesi R nin bir sağ idealidir. Böylece I nin minimallüğünden ya $r(a) = (0)$ ya da $r(a) = I$ olmalıdır. Eğer $r(a) = I$ ise $ab = 0$ çelişkisi elde edilir. O zaman $r(a) = (0)$ olmalıdır ve buradan $e - e^2 \in r(a) = (0)$ olduğundan $e = e^2$ elde edilir. Benzer şekilde eI kümesi R nin bir sağ idealidir ve $eI \subseteq I$ dır. Ayrıca $0 \neq e = e^2 \in eI$ olduğundan $eI \neq (0)$ dır ve böylece I nin minimallüğünden $eI = I$ sonucuna ulaşılır. Bu ise $I = eI$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in I$ idempotentinin seçilebileceğini verir. Buradan hareketle

$$I' = (eI)' \subseteq e'\sigma(I) + \tau(e)I' \subseteq e'\sigma(I) + \tau(I)$$

olur. Son bağıntıdan ve (1) den $R = I' + \tau(I) \subseteq e'\sigma(I) + \tau(I) + \tau(I) = e'\sigma(I) + \tau(I)$ dır. Ayrıca $e'\sigma(I) + \tau(I) \subseteq R$ olduğu açıktır. Böylece

$$R = e'\sigma(I) + \tau(I)$$

olur. Burada $e'\sigma(I)$, R nin bir sağ idealidir. Üstelik $e'\sigma(I) \cap \tau(I) \subseteq \tau(I)$

olduğundan ve $\tau(I)$ nın minimalliğinden ya $e'\sigma(I) \cap \tau(I) = (0)$ dır ya da $e'\sigma(I) \cap \tau(I) = \tau(I)$ dır. Eğer $e'\sigma(I) \cap \tau(I) = \tau(I)$ ise o zaman $\tau(I) \subseteq e'\sigma(I)$ dır ve son bağıntıdan $R = e'\sigma(I) + \tau(I) = e'\sigma(I)$ bulunur. Burada $R \neq \{0\}$ olduğundan $e' \neq 0$ dır ve $e' \in I' \subseteq T' \subseteq U \cup \{0\}$ olduğundan $e' \in U$ olur. Böylece $R = (e')^{-1}R = (e')^{-1}(e')\sigma(I) = \sigma(I)$ olur ve σ dönüşümü bir otomorfizma olduğundan $R = \sigma^{-1}(R) = \sigma^{-1}(\sigma(I)) = I$ elde edilir. Ancak burada τ nın örtenliğinden $\tau(I) = \tau(R) = R$ çelişkisine ulaşılır. Böylece $e'\sigma(I) \cap \tau(I) = (0)$ olmalıdır. Bu durumda son bağıntıdan

$$R = e'\sigma(I) \oplus \tau(I)$$

olur. Burada eğer $N \subseteq e'\sigma(I)$ olacak şekilde R nin bir N sağ ideali var ise $(e')^{-1}N \subseteq \sigma(I)$ olur ve $\sigma(I)$ nın minimalliğinden ya $(e')^{-1}N = (0)$ dır ya da $(e')^{-1}N = \sigma(I)$ dır. Eğer $(e')^{-1}N = (0)$ ise $N = (0)$ elde edilir, eğer $(e')^{-1}N = \sigma(I)$ ise $N = e'\sigma(I)$ elde edilir. Bu ise bize $e'\sigma(I)$ nın bir minimal sağ ideal olduğunu verir. Böylece $\tau(I)$ nın bir minimal sağ ideal oluşu ile beraber son bağıntı, R nin bir yarı basit halka olduğu sonucunu verir.

Bundan sonra $\tau(I)$ nın R nin bir maksimal sağ ideali olduğunu görmeye çalışalım. Bunun için R nin $\tau(I) \subseteq K$ olacak şekilde bir sağ ideali K olsun. Her $0 \neq x \in K$ için (1) den $x = a' + \tau(b)$ olacak şekilde $a, b \in I$ vardır. Burada eğer $a' = 0$ ise o zaman $x = \tau(b) \in \tau(I)$ olur. Bu ise $K \subseteq \tau(I)$ olduğunu verir. Böylece $K = \tau(I)$ elde edilir. Eğer $a' \neq 0$ ise hipotezden $a' \in U$ bulunur ve

$$a' = x - \tau(b) \in U \cap K$$

elde edilir. Son bağıntı R nin bazı elemanlarının K da içerildiğini gösterir. Buradan $K = R$ elde edilir. Böylece $\tau(I)$ bir maksimal sağ idealdir. Burada R nin tek yanlı(sağ) ideal kafesi içerisindeki $(0) \subseteq \tau(I) \subseteq R$ zincirini ele alırsak, $\tau(I)/(0) \cong \tau(I)$ bir minimal sağ idealdir ve $R = e'\sigma(I) \oplus \tau(I)$ olduğundan $R/\tau(I) \cong e'\sigma(I)$ bir minimal sağ idealdir. Bu sonuç ise Jordan-Hölder Teoremi'nden R nin sağ R -modül olarak 2 (kompozisyon) uzunluklu olmasını gerektirir; yani $c(R_R) = 2$ dir. O zaman R nin her öz sağ ideali hem maksimal hem de minimal sağ idealdir. Burada τ örten olduğundan $\text{Ker } \tau \neq R$ dir. O zaman ya $\text{Ker } \tau = (0)$ dır ya da $\text{Ker } \tau$ bir öz sağ idealdir. Eğer $\text{Ker } \tau$ bir öz sağ ideal ise yukarıdaki açıklamalardan hem maksimal hem de minimal sağ idealdir. Burada bir $x \notin \text{Ker } \tau$ için $x + \text{Ker } \tau \in R/\text{Ker } \tau$ olsun.

Bu durumda $K = \{y + xr : y \in \text{Ker } \tau, r \in R\}$ kümesinin R nin bir sağ ideali olduğu ve $\text{Ker } \tau \subseteq K$ olduğu açıktır. Fakat $x \notin \text{Ker } \tau$ olduğundan ve $\text{Ker } \tau$ nin maksimalliğinden $K = R$ olmalıdır. O zaman $1 = y_1 + xr_1$ olacak şekilde $y_1 \in \text{Ker } \tau$ ve $r_1 \in R$ vardır. Buradan $1 - xr_1 = y_1 \in \text{Ker } \tau$ olur; yani $1 + \text{Ker } \tau = xr_1 + \text{Ker } \tau = (x + \text{Ker } \tau)(r_1 + \text{Ker } \tau)$ bulunur. Buradan $R/\text{Ker } \tau$ halkasının bir bölümlü halka olduğu sonucuna ulaşılır. Ayrıca Halkalarda I . İzomorfizma Teoremi'nden $R/\text{Ker } \tau \cong \tau(R) = R$ olduğundan, R nin bir bölümlü halka olması çelişkisi elde edilir. O zaman $\text{Ker } \tau = (0)$ olmalıdır ve böylece τ nin bir halka otomorfizması olduğu sonucuna ulaşılır.

Şimdi $I^2 \neq (0)$ durumunda sırasıyla I nin bir iki yanlı ideal olduğu ve olmadığı durumları ele alalım.

Öncelikle I nin bir iki yanlı ideal olduğunu varsayalım. Bu durumda $\sigma(I)$ ve $\tau(I)$ kümeleri R nin iki yanlı idealleri olurlar. Ayrıca $(0) \neq e'\sigma(I) \subseteq \sigma(I)$ olduğundan ve $\sigma(I)$ nin minimalliğinden $e'\sigma(I) = \sigma(I)$ dır. Böylece $R = e'\sigma(I) \oplus \tau(I)$ olduğundan

$$R = \sigma(I) \oplus \tau(I)$$

elde edilir. Şimdi $r(e) = \{x \in I : ex = 0\} \subseteq I$ kümesini düşünelim. Burada $r(e)$, R nin bir sağ ideali olduğundan ve I nin minimalliğinden ya $r(e) = (0)$ dır ya da $r(e) = I$ dır. Eğer $r(e) = I$ ise o zaman $I = eI = (0)$ çelişkisi elde edilir. O zaman $r(e) = (0)$ olmalıdır. Buradan her $a \in I$ için $e(a - ea) = 0$ olduğundan $(a - ea) \in r(e) = (0)$ olur ve bu ise $a = ea$ olmasını gerektirir. Üstelik $l(I) = \{x \in I : xI = (0)\} \subseteq I$ kümesi R nin bir sağ idealidir ve I nin minimal oluşu ya $l(I) = (0)$ olmasını ya da $l(I) = I$ olmasını gerektirir. Eğer $l(I) = I$ ise $I^2 = l(I)I = (0)$ çelişkisi elde edilir. Buradan $l(I) = (0)$ olmalıdır. Böylece her $a \in I$ için $(a - ae)e = 0$ olduğundan

$$(0) = (a - ae)eI = (a - ae)I$$

olur. Bu durumda $(a - ae) \in l(I) = (0)$ dır ve dolayısıyla $a = ae$ elde edilir. Sonuç olarak her $a \in I$ için $ae = a = ea$ olur ve bu ise bize $e \in I$ elemanının I nin birim elemanı olduğunu verir. Ayrıca her $0 \neq a \in I$ için $aI \subseteq I$, R nin bir sağ ideali olduğundan ve I nin minimalliğinden ya $aI = (0)$ dır ya da $aI = I$ dır. Eğer $aI = (0)$ ise $0 \neq a = ae \in aI = (0)$ çelişkisi elde edilir. Buradan $aI = I$ olmalıdır ve dolayısıyla $e \in I = aI$ olduğundan $ab = e$ olacak şekilde

bir $0 \neq b \in I$ var olur. Benzer bir muhakemeye $bI = I$ olduğunu söyleyebiliriz. Buradan $bc = e$ olacak şekilde bir $c \in I$ vardır ve

$$a = ae = a(bc) = (ab)c = ec = c$$

bulunur. Yukarıda elde edilenlerden her $0 \neq a \in I$ için $ab = e = ba$ olacak şekilde bir $b \in I$ nın var olduğu sonucuna ulaşılır. Bu ise I nın bir bölümlü halka olduğunu söyler. Üstelik yukarıda verilen bilgiler ışığında, $\tau : I \rightarrow \tau(I)$ ve $\sigma : I \rightarrow \sigma(I)$ dönüşümleri birer izomorfizmadır. Buradan $I \cong \sigma(I)$ ve $I \cong \tau(I)$ birer bölümlü halka olur. ve Böylece D bir bölümlü halka olmak üzere $\sigma(I) \cong I \cong \tau(I) = D$ denilirse $R = D \oplus D$ elde edilir. Bu ise istenilen sonuçtur.

Şimdi I nın bir iki yanlı ideal olmadığını varsayalım. Bu durumda R nin bir basit halka olduğunu görelim. Burada $R\tau(I)$, R nin bir sağ idealidir ve $\tau(I) \subseteq R\tau(I)$ olur. Böylece $\tau(I)$ nın maksimalliği, ya $R\tau(I) = \tau(I)$ olmasını veya $R\tau(I) = R$ olmasını gerektirir. Eğer $R\tau(I) = \tau(I)$ ise $\tau(I)$ kümesi R nin bir iki yanlı ideali olur. Buradan her $x \in I$ ve r için $\tau(rx) = \tau(r)\tau(x) \in \tau(I)$ olmalıdır. Böylece τ bir otomorfizma olduğundan $rx \in I$ bulunur. Bu ise I nın bir iki yanlı ideal olmaması kabulü ile çelişir. O zaman

$$R = R\tau(I)$$

olmalıdır. Burada R nin S gibi bir iki yanlı idealinin olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\tau(S)$ kümesi de R nin bir iki yanlı ideali olur. Ayrıca R bir birimli halka olduğundan ve son bağıntıdan

$$\tau(S) = R\tau(S) = R\tau(I)\tau(S) = R\tau(IS)$$

bulunur. Fakat aynı zamanda $IS \subseteq I$ olması ve I nın minimalliği ya $IS = (0)$ olmasını veya $IS = I$ olmasını gerektirir. Eğer $IS = (0)$ ise son bağıntıdan $\tau(S) = R\tau(IS) = (0)$ dır ve τ bir otomorfizma olduğundan $S = (0)$ elde edilir. Eğer $IS = I$ ise son iki bağıntıdan

$$\tau(S) = R\tau(IS) = R\tau(I) = R = \tau(R)$$

olur. Böylece τ bir otomorfizma olduğundan $S = R$ olur. Buradan R nin öz ideali olmadığı ve dolayısıyla R bir basit halka olduğu gerçeğine ulaşılır. Üstelik

$c(R_R) = 2$ olduğundan ve Teorem 2.5 den, D bir bölümlü halka olmak üzere $R = D_2$ elde edilir.

Böylece bütün bu elde edilenlerden, eğer $I^2 \neq (0)$ ise τ dönüşümünün bir halka otomorfizması olduğu ve D bir bölümlü halka olmak üzere ya $R = D \oplus D$ ya da $R = D_2$ olduğu sonucuna ulaşılır.

Şimdi $I^2 = (0)$ durumunu ele alalım. Her $a, b \in I$ için $a'\sigma(b) = (ab)' - \tau(a)b'$ olduğundan

$$I'\sigma(I) \subseteq (I^2)' + \tau(I)I' = \tau(I)I'$$

olur. Böylece (1) den ve R bir birimli halka olduğundan

$$\sigma(I) \subseteq R\sigma(I) = (I' \oplus \tau(I))\sigma(I) \subseteq I'\sigma(I) + \tau(I)\sigma(I) \subseteq \tau(I)I' + \tau(I)\sigma(I) \subseteq \tau(I)$$

elde edilir. Ayrıca $\tau(I)$ bir minimal sağ ideal olduğundan $\sigma(I) = \tau(I)$ olduğu sonucuna ulaşılır. Burada I nin maksimalliğini görmek için R nin $I \subseteq K$ koşulunu sağlayan bir öz sağ ideali K nin olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $k \in K$ için (1) den $\sigma(k) = x' + \sigma(y)$ olacak şekilde $x, y \in I$ vardır ve

$$x' = \sigma(k - y) \in I' \cap \sigma(K)$$

olur. Burada eğer $I' \cap \sigma(K) \neq \{0\}$ ise $I' \subseteq T' \subseteq U \cup \{0\}$ olduğundan $\sigma(K)$, R nin bazı tersinir elemanlarını içerir ve buradan $\sigma(K) = R$ olur. Fakat bu durumda σ nin bir halka otomorfizması olması $K = \sigma^{-1}(R) = R$ çelişmesini vereceğinden $I' \cap \sigma(K) = \{0\}$ olması gerektiği sonucuna ulaşılır. Böylece son bağıntıdan $x' = \sigma(k - y) = 0$ bulunur. Burada σ dönüşümü bir halka otomorfizması olduğundan $k = y \in I$ olur. Bu durumda $K \subseteq I$ dir. Bu ise $I = K$ olduğunu ve dolayısıyla I nin bir maksimal sağ ideal olduğunu verir. Üstelik R nin Jacobson radikali J olmak üzere, her nil sağ-sol-iki yanlı ideal J de kapsandığından $I \subseteq J$ olur ve dolayısıyla I nin maksimalliğinden $J = I$ bulunur. Bu durumda J bir maksimal sağ idealdir. Ayrıca J , R nin tüm maksimal sağ ideallerinin kesişimi olduğundan, R nin tek maksimal sağ ideali J dir. Böylece R bir yerel halkadır. Benzer şekilde $\sigma(I)^2 = (0) = \tau(I)^2$ olduğundan $\sigma(I) = \tau(I) \subseteq I$ dir ve I nin minimalliğinden $\sigma(I) = \tau(I) = I = J$ elde edilir. O zaman yerel halkanın tanımından, $I = \{x \in R : x \notin U\}$ olur. Ayrıca burada I , R nin tek sağ idealidir. Gerçekten, R nin bir başka öz sağ ideali M olsun. O zaman her $m \in M$ için $m \notin U$ dur ve dolayısıyla $M \subseteq I$

olur. Ek olarak I nin minimalliğinden $I = M$ elde edilir. Bu ise R nin tek öz sağ idealinin I olduğunu verir; yani R bir sağ Artin halkasıdır. Ayrıca $\text{Ker } \tau$ nin, R nin bir sağ ideali oluşu burada üç durumu karşımıza çıkarır; bunlar $\text{Ker } \tau = (0)$ veya $\text{Ker } \tau = I$ veya $\text{Ker } \tau = R$ olduğu durumlardır. Eğer $\text{Ker } \tau = R$ ise τ nin örtenliğinden $R = \tau(R) = \tau(\text{Ker } \tau) = \{0\}$ çelişkisi elde edilir. Eğer $\text{Ker } \tau = I$ ise $I = \tau(I) = \tau(\text{Ker } \tau) = (0)$ çelişkisi elde edilir. O zaman $\text{Ker } \tau = (0)$ olmalıdır. Bu ise τ dönüşümünün bir halka otomorfizması olduğunu verir. Böylece (1) den

$$R = I' \oplus I \quad (2)$$

elde edilir. Son bağıntıdan $1 = v' + \omega$ olacak şekilde $v, \omega \in I$ vardır ve dolayısıyla $v' - 1 = -\omega \in I$ olacak şekilde bir $v \in I$ seçilebilir. Böylece her $r \in R$ için $vr v \in I^2 = (0)$ olduğundan, $\sigma(I) = \tau(I) = I$ ve $v' = 1 - \omega$ bağıntıları kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 = (vr v)' &= v' \sigma(rv) + \tau(v)(rv)' \\ &= v' \sigma(rv) + \tau(v)r' \sigma(v) + \tau(v)\tau(r)v' \\ &= v' \sigma(rv) + \tau(vr)v' \\ &= (1 - \omega)\sigma(rv) + \tau(vr)(1 - \omega) \\ &= \sigma(rv) - \omega\sigma(rv) + \tau(vr) - \tau(vr)\omega \\ &= \sigma(rv) + \tau(vr) \end{aligned}$$

elde edilir. Özel olarak son bağıntıda $r = 1$ alınarak $\sigma(v) = -\tau(v)$ bulunur. Böylece her $r \in R$ için $\sigma(v)\tau(r) = -\tau(v)\tau(r) = -\tau(vr) = \sigma(rv)$ olduğundan $rv = v\sigma^{-1}\tau(r)$ eşitliğine ulaşılır. Sonuç olarak

$$\sigma(v) = -\tau(v) \text{ ve her } r \in R \text{ için } rv = v\sigma^{-1}\tau(r) \quad (3)$$

olur. Şimdi $D = \{x \in R : x' \in I\} \subseteq R$ olsun. Burada $0 \in D$ olduğundan $D \neq \emptyset$ dir. Ayrıca her $x, y \in D$ için

$$(x - y)' = x' - y' \in I$$

dır ve

$$(xy)' = x' \sigma(y) + \tau(x)y' \in I$$

olur. Son iki bağıntı, D nin R nin bir alt halkası olduğunu verir. Ayrıca Yardımcı Özellik 4.1 (3) den $1' = 0 \in I$ dir ve bu ise $1 \in D$ olduğu, dolayısıyla D nin R nin bir birimli alt halkası olduğu gerçeğine ulaştırır. Burada eğer $I \cap Ker\delta \neq \{0\}$ ise Yardımcı Özellik 4.2 (1) den $Ker\delta \subseteq U \cup \{0\}$ olduğundan I ideali R nin bazı tersinir elemanlarını içerir ve buradan $I = R$ çelişkisi elde edilir. Buradan $I \cap Ker\delta = \{0\}$ olmalıdır. Şimdi D nin sıfırdan farklı keyfi bir elemanı a olsun. Bu durumda D nin tanımından $a' \in I$ dir. Burada eğer $a \in I$ ise o zaman $a' \in I' \subseteq T' \subseteq U \cup \{0\}$ olur; yani ya $a' = 0$ dir ya da $a' \in U$ dur. Eğer $a' = 0$ ise $0 \neq a \in I \cap Ker\delta = \{0\}$ çelişkisi elde edilir. Eğer $a' \in U$ ise o zaman $a' \in I$ olduğundan I ideali R nin bazı tersinir elemanlarını içerir ve bu ise $I = R$ çelişkisini verir. O zaman $a \notin I = \{x \in R : x \in U\}$ olmalıdır. Bu ise a nın R de bir tersinir eleman olduğu anlamına gelir. Burada Yardımcı Özellik 4.1 (3) den

$$0 = 1' = (a^{-1}a)' = (a^{-1})'\sigma(a) + \tau(a^{-1})a'$$

bulunur. Son bağıntıdan $a' \in I$ olduğundan

$$(a^{-1})' = -\tau(a^{-1})a'\sigma(a^{-1}) \in I$$

olur ve D nin tanımından $a^{-1} \in D$ dir. Böylece D , R nin bir bölümlü alt halkasıdır. Şimdi $R = D + I$ olduğunu görelim. Burada (2) den bir $r \in R$ için $r' = x' + y$ olacak şekilde $x, y \in I$ vardır. Bu bağıntı düzenlenerek $(r - x)'$ $= y \in I$ olduğuna ulaşılır. Bu durumda D nin tanımından $r - x \in D$ dir ve dolayısıyla $r \in D + I$ olur. Buradan $R \subseteq D + I$ dir. Diğer taraftan $D + I \subseteq R$ olduğu açıktır. Böylece $R = D + I$ elde edilir. Üstelik I , R nin bir öz ideali olmasından R nin tersinir elemanlarını içermediği gerçeği, $I \cap D = \{0\}$ olmasını gerektirir. Buradan

$$R = D \oplus I \tag{4}$$

elde edilir. Yukarıda $v' - 1 \in I$ olacak şekilde $v \in I$ seçilişinden, eğer $v = 0$ ise $-1 = v' - 1 \in I$ olduğundan $I = R$ çelişkisi ulaşılır. Bu durumda $v \neq 0$ olmalıdır. Ayrıca vR , R nin bir sağ idealidir. Üstelik $vR \subseteq I$ ve $0 \neq v = v1 \in vR$ koşullarını da sağlar. Böylece I nın minimalliği, $I = vR$ olmasını gerektirir. Ayrıca $I^2 = (0)$ olduğundan ve son bağıntıdan

$$I = vR = v(D \oplus I) = vD$$

olur. Bu ise (4) den $R = D \oplus vD$ olduğunu verir. Üstelik R bir sağ D -vektör uzayıdır; D ve vD R nin sağ alt D -vektör uzaylarıdır. Burada her $r \in R = D \oplus vD$ için $r = 1a + vb$ olacak şekilde $a, b \in D$ vardır; yani $\{1, v\}$ kümesi R yi gerer. Ayrıca eğer $x, y \in D$ için $1x + vy = 0$ ise $x = -vy \in D \cap vD = \{0\}$ olacağından, $x = 0 = y$ sonucuna ulaşılır. Bu ise $\{1, v\}$ kümesinin D -bağımsız olduğunu verir. Sonuç olarak $\{1, v\}$ kümesi R nin bir sağ D -bazıdır ve $v' - 1 \in I = vD$ olduğundan $v' = 1 + vb$ olacak şekilde bir $b \in D$ vardır. Şimdi $\{1, v\}$ kümesinin R nin bir sol D -bazı olduğunu görelim. Burada (3) den $Rv \subseteq vR$ olduğu açıktır. Ayrıca bir $vr \in vR$ için σ ve τ birer halka otomorfizması olduğundan $r = \sigma^{-1}(r_1)$ ve $r_1 = \tau(r_2)$ olacak şekilde $r_1, r_2 \in R$ vardır. Bu durumda (3) den

$$vr = v\sigma^{-1}(r_1) = v\sigma^{-1}\tau(r_2) = r_2v \in Rv$$

bulunur. O zaman $vR \subseteq Rv$ dir. Böylece $vR = Rv$ olur. Daha önce gösterildiği gibi $I = vR$, $I^2 = (0)$ olduğundan ve (4) den

$$I = vR = Rv = (D \oplus I)v = Dv$$

dır. Burada tekrar (4) kullanılarak $R = D \oplus Dv$ olur. O zaman R bir sol D -vektör uzayıdır; D ve Dv R nin sol alt D -vektör uzaylarıdır ve buradan benzer şekilde $\{1, v\}$ kümesi R nin sol D -bazıdır.

Şimdi $b = 0$ olduğunu varsayalım. O zaman $v' - 1 = vb = 0$ dir ve buradan $v' = 1$ elde edilir. Kabulden $I^2 = (0)$ olduğundan, her $a \in D$ için

$$(av)' = a'\sigma(v) + \tau(a)v' = \tau(a)v' = \tau(a)$$

bulunur. Son bağıntı, $I' = (Dv)' = \tau(D)$ olduğunu verir. Benzer şekilde her $a \in D$ için

$$(va)' = v'\sigma(a) + \tau(v)a' = v'\sigma(a) = \sigma(a)$$

dır ve buradan, $I' = (vD)' = \sigma(D)$ bağıntısına ulaşılır. Böylece $\sigma(D) = \tau(D)$ elde edilir. Son olarak $\sigma^{-1}\tau\delta = \delta\sigma^{-1}\tau$ olduğunu varsayalım. Bu durumda D nin tanımından her $a \in D$ için $a' \in I$ dir ve böylece $I = \sigma(I) = \tau(I)$ olduğundan

$$\delta\sigma^{-1}\tau(a) = \sigma^{-1}\tau\delta(a) \in \sigma^{-1}\tau(I) = \sigma^{-1}(I) = \sigma^{-1}(\sigma(I)) = I$$

bulunur. Son bağıntıdan $\sigma^{-1}\tau(a) \in D$ dir ve buradan $\tau(a) \in \sigma(D)$ olur. Bu ise $\tau(D) \subseteq \sigma(D)$ olduğunu verir. Ayrıca kabulden $\delta = \sigma^{-1}\tau\delta\tau^{-1}\sigma$ olduğu kolaylıkla görülür. Buradan her $a \in D$ için, D nin tanımı gereği

$$\sigma^{-1}\tau\delta\tau^{-1}\sigma(a) = \delta(a) \in I$$

olur. Ayrıca $I = \sigma(I) = \tau(I)$ gerçeği kullanılarak, $\delta\tau^{-1}\sigma(a) \in I$ ve tekrar D nin tanımından $\tau^{-1}\sigma(a) \in D$ bulunur. Bu durumda $\sigma(a) \in \tau(D)$ dir. Buradan $\sigma(D) \subseteq \tau(D)$ elde edilir. Böylece $\sigma(D) = \tau(D)$ eşitliğine ulaşılır. Burada (3) den $\tau(vb) = \tau(v)\tau(b) = -\sigma(v)\tau(b)$ dir ve bu eşitliğin σ^{-1} altındaki görüntüsüne bakılarak $\sigma^{-1}\tau(vb) = -v\sigma^{-1}\tau(b)$ bağıntısına ulaşılır. Ayrıca $v' - 1 = vb$ olduğu ve (3) kullanılarak;

$$\begin{aligned} 1 - v\sigma^{-1}\tau(b) = 1 + \sigma^{-1}\tau(vb) &= 1 + \sigma^{-1}\tau(v' - 1) \\ &= 1 + \sigma^{-1}\tau\delta(v) - \sigma^{-1}\tau(1) \\ &= \sigma^{-1}\tau\delta(v) \\ &= \delta\sigma^{-1}\tau(v) \\ &= \delta\sigma^{-1}(-\sigma(v)) \\ &= -v' \\ &= -1 - vb \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $2 + v(b - \sigma^{-1}\tau(b)) = 0$ elde edilir. Böylece $\sigma(D) = \tau(D)$ ve $\{1, v\}$ kümesi R nin sağ ve sol D -bazı olduğundan $2 = 0$ ve $\sigma(b) = \tau(b)$ olur. Bu durumda $\text{char} D = 2$ elde edilir. Üstelik $I = \sigma(I) = \tau(I)$, $I^2 = (0)$ bağıntılarından ve D nin tanımından her $a \in D$ için $(av)' = a'\sigma(v) + \tau(a)v' = \tau(a)v'$ olur. Böylece (3) den $\tau(a)v' = (av)' = (v\sigma^{-1}\tau(a))' = v'\tau(a) + \tau(v)(\sigma^{-1}\tau(a))' = v'\tau(a)$ dır. Ayrıca τ dönüşümü bir halka otomorfizması olduğundan ve (4) den her $r \in R$ için $r = \tau(r_1)$ ve $r_1 = x + y$ olacak şekilde $r_1 \in R$, $x \in D$ ve $y \in I$ vardır. Böylece $v' - 1 = vb$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \tau(r)v' = \tau(x + y)v' &= \tau(x)v' + \tau(y)v' \\ &= v'\tau(x) + \tau(y)(1 + vb) \\ &= v'\tau(x) + \tau(y) \end{aligned}$$

dır ve

$$\begin{aligned}
 v' \tau(r) = v' \tau(x+y) &= v' \tau(x) + v' \tau(y) \\
 &= v' \tau(x) + (1+vb)\tau(y) \\
 &= v' \tau(x) + \tau(y)
 \end{aligned}$$

olur. Son iki bağıntı, $v' \in R$ elemanının merkezi bir eleman olduğu sonucunu verir.

Uyarı 4.1 Teorem 4.1 (4) durumunda, eğer $\sigma(D) = \tau(D)$ ise o zaman $R \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & \sigma^{-1}\tau(a) \end{pmatrix} \in D_2 : a, b \in D \right\}$ dir. Eğer, ayrıca vD kümesi R nin sıfırdan farklı merkezi bir elemanını içeriyorsa (Özellikle, $\sigma^{-1}\tau$ dönüşümü R nin bir iç otomorfizması ise) $R \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \in D_2 : a, b \in D \right\}$ dir.

Bütünlüğü korumak için (Hongan and Komatsu, 1987) de yer alan ve ispatsız verilen Uyarı 4.1 i ispatlayalım.

İspat Eğer $\sigma(D) = \tau(D)$ ise $\sigma^{-1}\tau(D) = D$ olur. Teorem 4.1 (4) de $R = D \oplus vD$ olduğundan, $f : R \rightarrow D_2$ dönüşümünü her $a+vb \in R$ için $f(a+vb) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & \sigma^{-1}\tau(a) \end{pmatrix}$ olarak tanımlayalım. O zaman her $a+vb, c+ve \in R$ için

$$\begin{aligned}
 f((a+vb) + (c+ve)) &= f((a+c) + v(b+e)) \\
 &= \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ b+e & \sigma^{-1}\tau(a+c) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & \sigma^{-1}\tau(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ e & \sigma^{-1}\tau(c) \end{pmatrix} \\
 &= f(a+vb) + f(c+ve)
 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $I^2 = (0)$ olduğundan ve (3) den

$$\begin{aligned}
 f((a+vb)(c+ve)) &= f(ac + v(\sigma^{-1}\tau(a)e + bc)) \\
 &= \begin{pmatrix} ac & 0 \\ \sigma^{-1}\tau(a)e + bc & \sigma^{-1}\tau(ac) \end{pmatrix} \\
 &= f(a+vb)f(c+ve)
 \end{aligned}$$

bulunur. Son iki bağıntı f nin bir halka homomorfizması olduğunu verir. Şimdi herhangi bir $r = x + vy \in \text{Ker } f$ alalım. Buradan $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f(r) = f(x +$

$vy) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & \sigma^{-1}\tau(x) \end{pmatrix}$ dir. Böylece $x = 0 = y$ olur ve buradan $r = 0$ olduğu; yani $\text{Ker } f = (0)$ olduğu görülür. Bu ise f nin bir halka monomorfizması olduğunu verir. Böylece $R \cong \text{Im } f = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & \sigma^{-1}\tau(a) \end{pmatrix} \in D_2 : a, b \in D \right\}$ bulunur.

Şimdi vD nin, R nin sıfırdan farklı merkezi bir vd elemanını içerdiğini kabul edelim. O zaman $d \neq 0$ olduğu açıktır. Burada ilk olarak $\{1, vd\}$ kümesinin R nin bir sağ D -bazı olduğunu görelim. Bunun için $a + vdb = 0$ olacak şekilde $a, b \in D$ olsun. Bu durumda $\{1, v\}$ kümesi R nin bir sağ ve sol D -bazı olduğundan $a = 0 = db$ olmalıdır ve böylece $a = 0 = b$ elde edilir. O zaman $\{1, vd\}$ kümesi D -bağımsızdır. Ayrıca her $c, e \in D$ için $c + ve = c + vdd^{-1}e$ olur. Bu ise $\{1, vd\}$ kümesinin R yi gerdiğini verir. Sonuç olarak $\{1, vd\}$ kümesi R nin bir D -bazıdır. Burada $g : R \rightarrow D_2$ dönüşümünü her $a + vdb \in R$ için $f(a + vdb) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda her $a + vdb, c + vde \in R$ için

$$\begin{aligned} g((a + vdb) + (c + vde)) &= g((a + c) + vd(b + e)) \\ &= \begin{pmatrix} a + c & 0 \\ b + e & a + c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ e & c \end{pmatrix} \\ &= g(a + vdb) + g(c + vde) \end{aligned}$$

dır ve

$$\begin{aligned} g((a + vdb)(c + vde)) &= g(ac + avde + vdbc) \\ &= g(ac + vd(ae + bc)) \\ &= \begin{pmatrix} ac & 0 \\ ae + bc & ac \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ e & c \end{pmatrix} \\ &= g(a + vdb)g(c + vde) \end{aligned}$$

olur. Son iki bağıntıdan, g bir halka homomorfizmasıdır. Şimdi bir $r = x +$

$vd y \in \text{Ker } g$ olsun. O zaman $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = g(r) = g(x + vdy) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$ olur.

Buradan $x = 0 = y$ bulunur. Son eşitlik $r = 0$ olduğunu verir ve $\text{Ker } g = (0)$ bulunur. Bu ise g nin bir halka monomorfizması olduğu sonucuna ulaştırır.

Böylece $R \cong \text{Im } g = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \in D_2 : a, b \in D \right\}$ olur.

Özel olarak $\sigma^{-1}\tau$, R nin bir iç otomorfizması ise her $r \in R$ için $\sigma^{-1}\tau(r) = uru^{-1}$ olacak şekilde bir $u \in U$ vardır. Bu durumda ilk olarak $Dv = Uv \cup \{0\}$ olduğunu görelim. Burada D , R nin bir bölümlü alt halkası olduğundan $Dv \subseteq Uv \cup \{0\}$ olduğu açıktır. Tersine, bir $x \in U$ olsun. O zaman $U \subseteq R = D \oplus vD$ olduğundan $x = a + vb$ olacak şekilde $a, b \in D$ vardır ve böylece $I^2 = (0)$ olduğundan $xv = av + vbv = av \in Dv$ olur. Bu ise $Uv \cup \{0\} \subseteq Dv$ olduğunu verir. Sonuç olarak $Dv = Uv \cup \{0\}$ dir. Benzer şekilde $vD = vU \cup \{0\}$ olduğu görülebilir. Şimdi her $r \in R$ için $\sigma^{-1}\tau(r) = uru^{-1}$ olduğundan, $\sigma^{-1}\tau(r)u = ur$ bulunur. Burada eşitliğin her iki tarafı soldan $v \in R$ ile çarpılarak ve (3) den yararlanarak

$$rvu = v\sigma^{-1}\tau(r)u = vur$$

elde edilir. Bu ise $vu \in Z(R)$ olduğunu verir ve $v \neq 0$ olduğundan $vu \neq 0$ dir. Ayrıca $vU \cup \{0\} = vD$ olduğundan, vD kümesi R nin sıfırdan farklı merkezi bir vu elemanını içerir. Böylece yukarıda yapılan işlemler tekrarlanarak,

$R \cong \text{Im } g = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \in D_2 : a, b \in D \right\}$ bulunur.

5 TERSİNİR DEĞERLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

Bu bölümde Hiroaki Komatsu ve Atsushi Nakajima' nın 2004 yılında yapmış oldukları “Generalized Derivations With Invertible Values” adlı çalışma incelenecektir.

Bu çalışma boyunca R , tersinir elemanlarının grubu U olan bir birimli halka olacaktır.

Genelleştirilmiş türev kavramı, 1991 de Brešar (Brešar, 1991) ve 1999 da Nakajima (Nakajima, 1999) tarafından birleşmeli halkalarda, 2000 de Leger ve Luks (Leger and Luks, 2000) tarafından birleşmeli olmayan halkalarda tanımlanmıştır. Bu çalışmada bu üç tanım aslında birbirine denk olacaktır.

Eğer bir toplamsal $f : R \rightarrow R$ dönüşümü her $x, y \in R$ için

$$f(xy) = f(x)y + xf(y) - xf(1)y$$

eşitliğini sağlıyorsa f dönüşümüne bir **genelleştirilmiş türev** (Nakajima anlamında) denir. Eğer R nin bir genelleştirilmiş türevi f olmak üzere $\{0\} \neq f(R) \subseteq U \cup \{0\}$ koşulu sağlanıyorsa, f ye **tersinir** denir (Komatsu and Nakajima, 2004).

Eğer f dönüşümü R nin bir genelleştirilmiş türevi ise, $f(1) \in R$ elemanı ile soldan çarpım dönüşümü $f(1)_l$ olmak üzere

$$d = f - f(1)_l$$

dönüşümü R nin bir türevidir. Böylece son iki bağıntıdan her $x, y \in R$ için

$$f(xy) = f(x)y + xd(y)$$

olur.

Bergen, 1983 te tersinir türevli bir halkanın yapısını araştırmıştır (Bergen et al., 1983). Onların sonuçları Hongan ve Komatsu tarafından 1987 de (σ, τ) -türevlere genişletilmiştir (Hongan and Komatsu, 1987). Bu çalışmada (Bergen et al., 1983) deki sonuçlar, tersinir genelleştirilmiş türevlere genişletilecektir.

Eğer X kümesi R nin boştan farklı bir alt kümesi ise $r_R(X)$ ile X kümesinin sağ sıfırlayanı temsil edilecektir. Bir S halkası için, $Z(S)$ ile S halkasının merkezi temsil edilecektir.

5.1 ANA SONUÇLAR

Aşağıdaki iki teorem, bu çalışmanın ana sonuçlarını oluşturmaktadır.

Teorem 5.1.1 *Bir R halkası üzerinde bir tersinir genelleştirilmiş türev f olsun. Eğer $\text{Ker } f$, R nin sıfırdan farklı bir sağ idealini içermiyorsa o zaman aşağıdakilerden biri sağlanır:*

(1) R bir bölümlü halkadır.

(2) R bir bölümlü halka üzerindeki tüm 2×2 tipinde matrislerin halkasına izomorftur.

(3) R nin karakteristiği 2 dir, $D = \{a \in R : f(a) = f(1)a\}$ kümesi R nin bir bölümlü alt halkasıdır, $R = D \oplus tD$, $t^2 = 0$ ve her $a, b \in D$ için $f(a + tb) = (ca + b) + t(\alpha + c)(ca + b)$ olacak şekilde $0 \neq t \in Z(R)$, $\alpha \in Z(D)$ vardır.

Teorem 5.1.2 *Bir R halkası üzerinde bir tersinir genelleştirilmiş türev f olsun. Eğer $\text{Ker } f$, R nin sıfırdan farklı bir sağ idealini içeriyorsa, o zaman R sıfırdan farklı Jacobson radikali ne sahiptir ve R nin Jacobson radikali J olmak üzere $J^2 = (0)$ dir, $D = \{a \in R : f(a) = f(1)a\}$ kümesi R nin bir bölümlü alt halkasıdır, $R = D \oplus J$ dir ve her $a \in D$, $x \in J$ için $f(a + x) = (\alpha + \omega)a$ olacak şekilde $0 \neq \alpha \in Z(D)$ ve $\omega \in J$ vardır.*

Teorem 5.1.1 (1) açıktır. Bir bölümlü halkanın sıfırdan farklı her genelleştirilmiş türevi tersinirdir. Teorem 5.1.1 in diğer durumları çalışmanın devamında ele alınacaktır.

Uyarı 5.1.1 (1) Teorem 5.1.1 (3) deki ile aynı notasyonu kullanarak $D' = \{a' \in R : f(a') = a'f(1)\}$ olsun. O zaman $D' = \{a + t(ac - ca) : a \in D\}$ dir, D' kümesi R nin bir bölümlü alt halkasıdır, $R = D' \oplus D't$ dir ve her $a', b' \in D'$ için $f(a' + b't) = (a'c + b') + (a'c + b')(\alpha + c)t$ dir.

(2) Teorem 5.1.2 deki ile aynı notasyonu kullanarak $D' = \{a' \in R : f(a') = a'f(1)\}$ olsun. O zaman $D' = \{a + (\omega a - a\omega)\alpha^{-1} : a \in D\}$ dir, D' kümesi R nin bir bölümlü alt halkasıdır, $R = D' \oplus J$ dir ve her $a' \in D$, $x \in J$ için $f(a' + x) = a'(\alpha + \omega)$ dir.

Bütünlüğü korumak için (Komatsu and Nakajima, 2004) da ispatsız verilen Uyarı 5.1.1 i ispatlayalım.

İspat (1) İlk olarak $D = \{a + t(ac - ca) : a \in D\}$ olduğunu görelim. Her $a' \in D' \subseteq R = D \oplus tD$ için $a' = a + tb$ olacak şekilde $a, b \in D$ vardır. Ayrıca $f(1) = f(1+t0) = (c1+0)+t(\alpha+c)(c1+0) = c+t(\alpha+c)c$ olur. Son bağıntıdan ve D' tanımından

$$\begin{aligned} (ca + b) + t(\alpha + c)(ca + b) &= f(a + tb) \\ &= f(a') \\ &= a' f(1) \\ &= (a + tb)(c + t(\alpha + c)c) \end{aligned}$$

olur. Son bağıntının her iki tarafı soldan $0 \neq t \in Z(R)$ ile çarpılarak ve $t^2 = 0$ olduğundan yararlanılarak

$$tb = t(ac - ca)$$

elde edilir. Elde edilen bağıntı kullanılarak $a' = a + tb = a + t(ac - ca)$ bulunur. Bu ise $D' \subseteq \{a + t(ac - ca) : a \in D\}$ olmasını gerektirir. Tersine, bir $a \in D$ için $a' = a + t(ac - ca)$ olsun. Bu elemanın f altındaki görüntüsü

$$\begin{aligned} f(a') &= f(a + t(ac - ca)) \\ &= (ca + ac - ca) + t(\alpha + c)(ca + ac - ca) \\ &= ac + t(\alpha + c)ac \\ &= ac + t\alpha ac + tcac \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $\alpha \in Z(D)$ ve $\text{char} R = 2$ olduğundan

$$\begin{aligned} a' f(1) &= (a + t(ac - ca))(c + t(\alpha + c)c) \\ &= ac + at(\alpha + c)c + t(ac - ca)c \\ &= ac + at\alpha c + atc^2 + tac^2 - tcac \\ &= ac + t\alpha ac + tcac \end{aligned}$$

dir. Son iki bağıntı karşılaştırılarak $f(a') = a' f(1)$ olduğu görülür. Bu ise $a' = a + t(ac - ca) \in D'$ olduğunu verir. Böylece $\{a + t(ac - ca) : a \in D\} \subseteq D'$ olur. Sonuç olarak $D' = \{a + t(ac - ca) : a \in D\}$ dir.

Şimdi D' kümesinin R nin bir bölümlü alt halkası olduğunu görelim. Burada D' tanımından $0, 1 \in D'$ olduğu açıktır. Her $a, b \in D$ için

$$\begin{aligned}(a + t(ac - ca)) - (b + t(bc - cb)) &= (a - b) + t(ac - ca - bc + cb) \\ &= (a - b) + t((a - b)c - c(a - b))\end{aligned}$$

dir ve

$$\begin{aligned}(a + t(ac - ca))(b + t(bc - cb)) &= ab + at(bc - cb) + t(ac - ca)b \\ &= ab + t(abc - acb + acb - cab) \\ &= ab + t((ab)c - c(ab))\end{aligned}$$

dir. Son iki bağıntıdan D' , R nin bir birimli alt halkası olur. Üstelik her $0 \neq a' \in D'$ için $a' = a + t(ac - ca)$ olacak şekilde bir $0 \neq a \in D$ vardır. Buradan $(a')^{-1} = a^{-1} + t(a^{-1}c - ca^{-1}) \in D'$ dir ve $a'(a')^{-1} = 1 = (a')^{-1}a'$ olur. Böylece yukarıda elde edilen verilerin ışığı altında D' nin, R nin bir bölümlü alt halkası olduğunu sonucuna ulaşılır.

Şimdi $R = D' \oplus D't$ olduğunu görelim. Her $a \in D$ için, $0 \neq t \in Z(R)$ ve $t^2 = 0$ olduğundan

$$at = (a + t(ac - ca))t \in D't$$

olur. Buradan $Dt \subseteq D't$ bağıntısı sağlanmış olur. Ayrıca her $r \in R = D \oplus Dt$ için $r = a + tb$ olacak şekilde $a, b \in D$ elemanlarının varlığından,

$$\begin{aligned}r &= a + tb \\ &= a + t(ac - ca) - t(ac - ca) + (b + t(bc - cb))t \in D' + D't\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $R \subseteq D' + D't$ olmasını gerektirir. Diğer taraftan, $D' + D't \subseteq R$ olduğu açıktır. Buradan $R = D' + D't$ elde edilir. Şimdi $D' \cap D't = \{0\}$ olduğunu görelim. Bunun için bir $a' \in D' \cap D't$ alalım. Bu durumda $a' \in D'$ dir ve $a' \in D't$ dir. Burada D' tanımından $a' = a + t(ac - ca)$ olacak şekilde bir $a \in D$ vardır ve $a' \in D't$ olduğundan $a' = (b + t(bc - cb))t = bt$ olacak şekilde bir $b \in D$ vardır. Bu iki eşitlikten yararlanılarak $a + t(ac - ca) = a' = bt$ ve

$$a = t(b - ac + ca) \in D \cap Dt = \{0\}$$

bulunur. Son bağıntıdan $a = 0$ dir. Bu ise $a' = a + t(ac - ca) = 0$ olmasını gerektirir. Böylece $D' \cap D't = \{0\}$ sonucuna ulaşılır. Bu ise $R = D' \oplus D't$ olduğunu verir.

Son olarak, her $a', b' \in D'$ için $f(a' + b't) = (a'c + b') + (a'c + b')(\alpha + c)t$ olduğunu görelim. Her $a', b' \in D'$ için, D' tanımından $a' = a + t(ac - ca)$ ve $b' = b + t(bc - cb)$ olacak şekilde $a, b \in D$ vardır. Ayrıca $f(a') = a'f(1)$, $f(1) = c + t(\alpha + c)c$, $0 \neq t \in Z(R)$ ve $\alpha \in Z(D)$ oldukları göz önüne alınarak $f(a') = a'f(1) = a'(c + t(\alpha + c)c) = a'c + a't(\alpha + c)c = a'c + a't\alpha c + a'tc^2 = a'c + a'cat + a'c^2t = a'c + a'c(\alpha + c)t$ bulunur. Burada b' nin tanımından ve $t^2 = 0$ olduğundan $b't = (b + t(bc - cb))t = bt = tb$ olur ve $f(b't) = f(tb) = f(0 + tb) = (c0 + b) + t(\alpha + c)(c0 + b) = b + t(\alpha + c)b$ elde edilir. Ayrıca Teorem 5.1.1 (3) de $\text{char} R = 2$ olduğundan $b' + b'(\alpha + c)t = b + t(bc - cb) + b(\alpha + c)t = b + tbc - tcb + bat + bct = b - tcb + bat = b + tcb + bat = b + tab + tcb = b + t(\alpha + c)b$ olur. Böylece son üç bağıntı ve f nin toplamsallığından hareketle;

$$\begin{aligned} f(a' + b't) &= a'c + a'c(\alpha + c)t + b' + b'(\alpha + c)t \\ &= (a'c + b') + (a'c + b')(\alpha + c)t \end{aligned}$$

elde edilir.

(2) İlk olarak $D' = \{a + (\omega a - a\omega)\alpha^{-1} : a \in D\}$ olduğunu görelim. Her $a' \in D' \subseteq R = D \oplus J$ için $a' = a + x$ olacak şekilde $a \in D$, $x \in J$ vardır. Burada f nin tanımından $f(1) = f(1 + 0) = (\alpha + \omega)1 = \alpha + \omega$ olur. Aynı zamanda D' tanımından $f(a') = a'f(1)$ olduğundan, ayrıca $J^2 = (0)$ olduğundan hareketle $\alpha a + \omega a = (\alpha + \omega)a = f(a + x) = f(a') = a'f(1) = (a + x)(\alpha + \omega) = a\alpha + a\omega + x\alpha + x\omega = a\alpha + a\omega + x\alpha$ bulunur. Üstelik $0 \neq \alpha \in Z(D)$ olduğundan son bağıntı, $x = (\omega a - a\omega)\alpha^{-1}$ olduğunu verir. Tüm bu elde edilen verilerden $a' = a + x = a + (\omega a - a\omega)\alpha^{-1}$ olur. Bu ise $D' \subseteq \{a + (\omega a - a\omega)\alpha^{-1} : a \in D\}$ olmasını gerektirir. Tersine, herhangi bir $a \in D$ için $a' = a + (\omega a - a\omega)\alpha^{-1}$ olsun. Bu durumda f nin tanımından $f(a') = f(a + (\omega a - a\omega)\alpha^{-1}) = (\alpha + \omega)a$ olur. Diğer taraftan $J^2 = (0)$ ve $0 \neq \alpha \in Z(D)$ bağıntılarından

$$\begin{aligned} a'f(1) &= (a + (\omega a - a\omega)\alpha^{-1})(\alpha + \omega) \\ &= a\alpha + a\omega + \omega a - a\omega \\ &= (\alpha + \omega)a \end{aligned}$$

bağıntısına ulaşılır. Son iki bağıntı $f(a') = a'f(1)$ olmasını gerektirir. Bu ise D' tanımından $a + (\omega a - a\omega)\alpha^{-1} = a' \in D'$ olduğunu verir. Buradan $\{a +$

$(\omega a - a\omega)\alpha^{-1} : a \in D\} \subseteq D'$ olur. Böylece $D' = \{a + (\omega a - a\omega)\alpha^{-1} : a \in D\}$ elde edilir.

Şimdi D' kümesinin R nin bir bölümlü alt halkası olduğunu görelim. Burada $0, 1 \in D'$ olduğu, D' tanımından açıktır. Her $a, b \in D$ için

$$(a + (\omega a - a\omega)\alpha^{-1}) - (b + (\omega b - b\omega)\alpha^{-1}) = (a - b) + (\omega(a - b) - (a - b)\omega)\alpha^{-1}$$

dir ve $0 \neq \alpha \in Z(D)$ olduğundan

$$\begin{aligned} (a + (\omega a - a\omega)\alpha^{-1})(b + (\omega b - b\omega)\alpha^{-1}) &= ab + a(\omega b - b\omega)\alpha^{-1} + (\omega a - a\omega)\alpha^{-1}b \\ &= ab + (a\omega b - ab\omega + \omega ab - a\omega b)\alpha^{-1} \\ &= ab + (\omega(ab) - (ab)\omega)\alpha^{-1} \end{aligned}$$

dir. Son iki bağıntıdan D' kümesi R nin bir birimli alt halkasıdır. Üstelik her $0 \neq a' \in D'$ için $a' = a + (\omega a - a\omega)\alpha^{-1}$ olacak şekilde bir $0 \neq a \in D$ vardır. Buradan $(a')^{-1} = a^{-1} + (\omega a^{-1} - a^{-1}\omega)\alpha^{-1} \in D'$ dir ve $a'(a')^{-1} = 1 = (a')^{-1}a'$ olur. Böylece yukarıda elde edilen verilerin ışığı altında D' nin, R nin bir bölümlü alt halkası olduğu sonucuna ulaşılır.

Şimdi $R = D' \oplus J$ olduğunu görelim. Her $r \in R = D \oplus J$ için $r = a + x$ olacak şekilde $a \in D$, $x \in J$ vardır. Burada

$$r = a + x = a + (\omega a - a\omega)\alpha^{-1} - (\omega a - a\omega)\alpha^{-1} + x \in D' + J$$

dir. Buradan $R \subseteq D' + J$ olur. Diğer taraftan $D' + J \subseteq R$ olduğu açıktır. Böylece $R = D' + J$ elde edilir. Şimdi $D' \cap J = \{0\}$ olduğunu görelim. Bunun için bir $a' \in D' \cap J$ alalım. Bu durumda $a' \in D'$ dir ve $a' \in J$ dir. Burada D' tanımından $a' = a + (\omega a - a\omega)\alpha^{-1}$ olacak şekilde bir $a \in D$ vardır. Ayrıca $a' = a + (\omega a - a\omega)\alpha^{-1} = b$ olacak şekilde bir $b \in J$ vardır. Bu durumda $\omega \in J$ olduğundan, bu iki bağıntıdan yararlanılarak

$$a = b - (\omega a - a\omega)\alpha^{-1} \in D \cap J = \{0\}$$

bulunur. Son bağıntıdan $a = 0$ dir. Bu ise $a' = a + (\omega a - a\omega)\alpha^{-1} = 0$ olmasını gerektirir. Böylece $D' \cap J = \{0\}$ sonucuna ulaşılır. Bu ise $R = D' \oplus J$ olduğunu verir.

Son olarak her $a' \in D$, $x \in J$ için $f(a' + x) = a'(\alpha + \omega)$ olduğunu görelim. Burada f nin tanımından $f(1) = f(1 + 0) = (\alpha + \omega)1 = \alpha + \omega$ ve her $y \in J$

için $f(y) = f(0 + y) = (\alpha + \omega)0 = 0$ olduğundan $f(J) = \{0\}$ dir. Ayrıca D' tanımından $f(a') = a'f(1)$ dir. Tüm bu bilgilerden yararlanılarak

$$f(a' + x) = f(a') = a'f(1) = a'(\alpha + \omega)$$

elde edilir.

Şimdi Teorem 5.1.1 ve Teorem 5.1.2 nin ispatlamak için bazı yardımcı özelliklere aşağıda yer verilecektir.

Yardımcı Özellik 5.1.3 *Bir R halkasının bir genelleştirilmiş türevi f ve bir sağ ideali I olsun. O zaman $I + f(I)$, R nin bir sağ idealidir. Eğer f tersinir ise ve $I \neq R$ ise o zaman $I \cap f(I) = \{0\}$ dir.*

İspat Hipotezden f bir genelleştirilmiş türev olduğundan herhangi bir $x \in I$ ve $r \in R$ için $f(xr) = f(x)r + xd(r)$ olur ve $d = f - f(1)_l$ olmak üzere

$$f(x)r = f(xr) - xd(r) \in f(I) + I$$

elde edilir. Bu ise her $a, b \in I$ ve her $r \in R$ için

$$(a + f(b))r = ar + f(b)r \in f(I) + I$$

olduğunu verir. Ayrıca $0 \in I + f(I)$ ve her $x, y \in I + f(I)$ için $x - y \in I + f(I)$ olduğu açıktır. Böylece $I + f(I)$, R nin bir sağ ideali olur. Burada f tersinir ise ve $f(I) \subseteq U \cup \{0\}$ dir ve $I \neq R$ ise $I \cap (U \cup \{0\}) = \{0\}$ olmalıdır. Böylece $I \cap f(I) = \{0\}$ elde edilir.

Yardımcı Özellik 5.1.4 *Bir R halkasının bir tersinir genelleştirilmiş türevi f ve kendisinden farklı bir sol ideali I olsun. Burada $d = f - f(1)_l$ alalım. O zaman $d(I) \subseteq I$ olması için gerek ve yeter bir koşul $f(I) = \{0\}$ olmasıdır.*

İspat Hipotezden, her her $x \in I$ için $f(x) = f(1x) = f(1)x + 1d(x)$ olduğundan $f(x) - d(x) = f(1)x \in I$ elde edilir. Bu durumda $d(I) \subseteq I$ nm, $f(I) \subseteq I$ olduğuna denk olduğu açıkça görülür. Ayrıca hipotezden $f(I) \subseteq U \cup \{0\}$ olduğundan $I \neq R$ ise $f(I) \subseteq I$ olması, $f(I) = \{0\}$ olmasına denktir.

Yardımcı Özellik 5.1.5 *Birimli bir R halkasının bir tersinir genelleştirilmiş türevi f ve bir sağ ideali I olsun. Burada $d = f - f(1)_l$ alalım.*

- (1) Eğer $f(I) = \{0\}$ ise o zaman $d(R) \subseteq r_R(I)$ dır.
- (2) Eğer $f(I) \neq \{0\}$ ise o zaman ters görüntü kümesi $d^{-1}(r_R(I))$, $U \cup \{0\}$ da kapsanır ve R nin bir bölümlü alt halkasıdır.
- (3) $\text{Ker } d$, $U \cup \{0\}$ da kapsanır ve R nin bir bölümlü alt halkasıdır.

İspat (1) Öncelikle $f(I) = \{0\}$ olduğunu kabul edelim. O zaman herhangi $x \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = f(xr) = f(x)r + xd(r) = xd(r)$$

bulunur. Buradan $d(r) \in r_R(I) = \{x \in R : Ix = (0)\}$ olur. Böylece $d(R) \subseteq r_R(I)$ elde edilir.

(2) Burada $f(I) \neq \{0\}$ olsun. Ters görüntü kümesi tanımından, $d^{-1}(r_R(I)) = \{x \in R : d(x) \in r_R(I)\} = \{x \in R : Id(x) = (0)\}$ dır ve böylece $0, 1 \in d^{-1}(r_R(I))$ elde edilir. Her $x, y \in d^{-1}(r_R(I))$ ve $z \in I$ için

$$zd(x - y) = z(d(x) - d(y)) = zd(x) - zd(y) = 0 - 0 = 0$$

olur. Son bağıntıdan $x - y \in d^{-1}(r_R(I))$ dır. Ayrıca

$$zd(xy) = (zd(x))y + (zx)d(y) = 0y + 0 = 0$$

olduğundan $xy \in d^{-1}(r_R(I))$ elde edilir. Tüm bulunan verilerin ışığı altında $d^{-1}(r_R(I))$ nın, R nin bir birimli alt halkası olduğu görülür. Şimdi $d^{-1}(r_R(I))$ nın sıfırdan farklı her elemanının tersinir olduğunu görelim. Hipotezde f tersinir genelleştirilmiş türev olduğundan, $\{0\} \neq f(I) \subseteq U \cup \{0\}$ dır ve buradan $f(x) \in U$ olacak şekilde bir $x \in I$ vardır. Şimdi $0 \neq a \in d^{-1}(r_R(I))$ olsun. O zaman

$$f(xa) = f(x)a + xd(a) = f(x)a$$

olduğu görülür. Burada $f(x) \in U$ olduğundan $f(x)a \neq 0$ olduğu açıktır. O zaman son bağıntıdan $f(xa) = f(x)a \neq 0$ olmalıdır. Bu ise $f(xa) \in U$ olduğunu verir. Buradan

$$a = f(x)^{-1}f(xa)$$

bulunur. Bir halkada iki tersinir elemanın çarpımının da tersinir olduğu gerçeği, bize a nın bir tersinir eleman olduğunu verir. Böylece $d^{-1}(r_R(I)) \subseteq U \cup \{0\}$ sonucuna ulaşılır. Üstelik

$$0 = d(1) = d(aa^{-1}) = d(a)a^{-1} + ad(a^{-1})$$

olduğundan

$$ad(a^{-1}) = -d(a)a^{-1}$$

dir. Burada $a \in U$ olduğundan

$$d(a^{-1}) = -a^{-1}d(a)a^{-1}$$

bulunur. Böylece $a \in d^{-1}(r_R(I))$ olduğundan

$$Id(a^{-1}) = I(-a^{-1}d(a)a^{-1}) \subseteq Id(a)a^{-1} \subseteq (0)a^{-1} = (0)$$

olur. Bu ise $a^{-1} \in d^{-1}(r_R(I))$ olduğu anlamına gelir. Buradan $d^{-1}(r_R(I))$, R nin bir bölümlü alt halkasıdır.

(3) Hipotezden f tersinir genelleştirilmiş türev olduğundan, $\{0\} \neq f(R) \subseteq U \cup \{0\}$ dır. Buradan hareketle, Yardımcı Özellik 5.1.5 (2) de $I = R$ alınır sa $d^{-1}(r_R(R)) \subseteq U \cup \{0\}$ elde edilir. İlk olarak $Ker d \subseteq U \cup \{0\}$ olduğunu görelim. Her $x \in Ker d$ için $d(x) = 0$ dır. Dolayısıyla $Rd(x) = (0)$ olur. Böylece $d(x) \in r_R(R)$ elde edilir. Bu ise $x \in d^{-1}(r_R(R))$ olduğunu verir. Buradan $Ker d \subseteq d^{-1}(r_R(R)) \subseteq U \cup \{0\}$ elde edilir. Üstelik her $0 \neq a \in Ker d$ için

$$0 = d(1) = d(aa^{-1}) = d(a)a^{-1} + ad(a^{-1}) = ad(a^{-1})$$

olur ve burada $a \in Ker d \in U \cup \{0\}$ olduğundan $d(a^{-1}) = 0$ elde edilir. Böylece $a^{-1} \in Ker d$ olur. Bu ise $Ker d$ nin R nin bir bölümlü alt halkası olduğunu verir.

Teorem 5.1.1 in İspatı Burada R nin bir bölümlü halka olmadığını varsayalım ve $d = f - f(1)_l$ alalım. Bölümlü halka olmayan bir birimli R halkasının I gibi bir öz sağ ideali vardır. Gerçekten; eğer R nin bir öz sağ ideali yok ise o zaman her $0 \neq a \in R$ için aR , R nin bir sağ ideali olduğundan ve $0 \neq a = a1 \in aR$ olduğundan $aR \neq (0)$ dır. Buradan $aR = R$ elde edilir ve $1 \in R = aR$ olduğundan $1 = ab$ olacak şekilde bir $0 \neq b \in R$ var olur. Aynı

düşünce ile $bR = R$ olduğu söylenebilir. Bu ise $1 = bc$ olacak şekilde bir $c \in R$ elemanının varlığını verir. Her iki bağıntıyı karşılaştırarak

$$a = a1 = a(bc) = (ab)c = 1c = c$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise R nin bir bölümlü halka olmaması ile çelişir. O halde R nin öz sağ ideali vardır. Bu ideale I diyelim.

O zaman, yukarıdan hareketle Yardımcı Özellik 5.1.3 den $I \oplus f(I)$ kümesi R nin bir sağ idealidir. Hipotezden $\text{Ker } f$, R nin sıfırdan farklı bir sağ idealini içermediğinden $f(I) \neq \{0\}$ dir. O zaman $\{0\} \neq f(I) \subseteq U \cup \{0\}$ dir. Bu durumda $f(I)$, R nin bazı tersinir elemanlarını içerir ve $f(I) \subseteq I \oplus f(I)$ olduğundan

$$R = I \oplus f(I)$$

olur.

Şimdi $c(R_R) = 2$ olduğunu görelim. Burada I sağ idealini kapsayan R nin bir öz sağ ideali I' olsun. O zaman, yukarıda verilen bilgilerden $R = I' \oplus f(I')$ olur. Bu durumda, her $x \in I' \subseteq R = I \oplus f(I)$ için $x = a + f(b)$ olacak şekilde $a, b \in I$ vardır ve buradan

$$x - a = f(b) \in I' \cap f(I') = \{0\}$$

olur. Son bağıntıdan $x = a \in I$ dir ve bu ise $I' \subseteq I$ olduğunu verir. Ayrıca $I \subseteq I'$ kabulünden, $I = I'$ elde edilir. Böylece I nin bir maksimal sağ ideal olduğu sonucuna ulaşılır. Benzer işlemler, I da kapsanan R nin bir I'' öz sağ ideali için yapılırsa, I'' nin de bir maksimal sağ ideal olduğu görülür. Buradan $I = I''$ elde edilir. Bu ise I nin bir minimal sağ ideal olduğunu verir. Buradan R nin sağ R -modül olarak (kompozisyon) uzunluğunun 2 olduğu elde edilir; yani $c(R_R) = 2$ dir.

Şimdi R nin bir merkezi $e \neq 0, 1$ idempotenti olduğunu varsayalım. O zaman her $r \in R$ için $f(er) = f(eer) = f(e)er + ed(er) = ef(e)r + ed(er) \in eR$ olur. Buradan $f(eR) \subseteq eR$ olduğu görülür. Yukarıdaki bilgilerden eR , R nin bir öz sağ ideali olduğundan ve hipotezden $f(eR) \subseteq f(R) \subseteq U \cup \{0\}$ olduğundan $f(eR) \subseteq eR \cap f(eR) = \{0\}$ bulunur. Bu ise $f(eR) = \{0\}$ olduğunu verir. Benzer şekilde $1 - e$ bir merkezi idempotent eleman olduğundan, $f((1 - e)R) = \{0\}$

olmalıdır. Buradan $f(R) = \{0\}$ olur. Bu ise $f = 0$ çelişkisini verir. Bu yüzden R nin aşikâr olmayan merkezi idempotenti yoktur.

Burada eğer R bir yarı basit halka ise R nin Jacobson radikali J olmak üzere $J = (0)$ dır ve R bir sol Artin halkasıdır. Üstelik R bir sol Artin halkası olduğundan eğer R nin bir ideali L ise o zaman bir $e^2 = e \in Z(R)$ için $L = Re$ dir. Fakat R nin aşikâr olmayan merkezi idempotenti olmadığından ya $e = 0$ dir ya da $e = 1$ dir. Bu durumda ya $L = (0)$ olmalıdır ya da $L = R$ olmalıdır. Bu ise R nin bir basit halka olduğu anlamına gelir. Ayrıca $c(R_R) = 2$ olduğundan D bir bölümlü halka olmak üzere $R \cong M_2(D)$ olur. Böylece eğer R bir yarı basit halka ise, Teorem 5.2.1 (2) formundadır.

Şimdi R nin sıfırdan farklı bir Jacobson radikali J ye sahip olduğunu varsayalım; yani R bir yarı basit halka olmasın. O zaman $c(R_R) = 2$ olduğundan J bir maksimal sağ idealdir ve $J^2 = (0)$ dır. Buradan R nin bir yerel halka olduğu sonucuna ulaşılır. O zaman R nin tek maksimal sağ ideali J dir. Ayrıca yerel halka tanımından $J = \{x \in R : x \notin U\}$ olur. Bu ise R nin tek öz sağ idealinin ve tek öz sol idealinin J olduğunu verir. Hipotezden $Ker f$, R nin sıfırdan farklı bir sağ idealini içermediğinden $f(J) \neq \{0\}$ dır. Böylece Yardımcı Özellik 5.1.4 den

$$d(J) \not\subseteq J \quad (1)$$

olur. Ayrıca Yardımcı Özellik 5.2.3 den $J + d(J)$, R nin bir sağ idealidir. Bu durumda $J \subseteq J + d(J)$ ve J bir maksimal sağ ideal olduğundan, eğer $J = J + d(J)$ ise $d(J) \subseteq J$ çelişkisi elde edilir. O zaman $R = J + d(J)$ olmalıdır.

Şimdi $R = d^{-1}(J) + J$ olduğunu görelim. Burada $d^{-1}(J) + J \subseteq R$ olduğu açıktır. Tersine, her $r \in R$ için $d(r) \in R = J + d(J)$ olduğundan $d(r) = a + d(b)$ olacak şekilde $a, b \in J$ vardır ve buradan $d(r - b) = a \in J$ olur. Bu durumda $r - b \in d^{-1}(J) = \{x \in R : d(x) \in J\}$ dir ve böylece $r \in d^{-1}(J) + J$ elde edilir. Bu ise $R \subseteq d^{-1}(J) + J$ olduğu anlamına gelir. Böylece $R = d^{-1}(J) + J$ olur. Şimdi

$$E = d^{-1}(J)$$

diyelim. O zaman $R = E + J$ olur. Burada $E \cap J = \{0\}$ olduğunu görelim. Hipotezden $(0) \neq J \not\subseteq Ker f$ dir. Ayrıca $r_R(J) = \{x \in R : Jx = (0)\}$ kümesi R

nin bir sağ idealidir ve $J^2 = (0)$ olduğundan $(0) \neq J \subseteq r_R(J)$ elde edilir. Ayrıca R bir birimli halka olduğundan $JR \neq (0)$ dır; yani $r_R(J) \neq R$ dir. Böylece J nin maksimalliğinden $J = r_R(J)$ elde edilir. Burada Yardımcı Özellik 5.2.5 (2) den $d^{-1}(r_R(J)) = d^{-1}(J) = E \subseteq U \cup \{0\}$ olur ve J, R nin tersinir elemanlarını içermediğinden $E \cap J = \{0\}$ dır. Buradan

$$R = E \oplus J$$

elde edilir.

Son bağıntıdan her bir $x \in J$ için $d(x) \in R$ olduğundan $d(x) = a_x + b_x$ olacak şekilde $x \in J$ ye bağlı $a_x \in E$ ve $b_x \in J$ nin varlığı yazılabilir. Burada hareket kümesi J olmak üzere, J nin her bir x elemanına bağlı $d(x)$ in toplam terimleri de x elemanına bağlı olarak değişecektir. O halde her bir $x \in J$ için $\varphi(x) = a_x$ ile tanımlı $\varphi : J \rightarrow E$ ve $\psi(x) = b_x$ ile tanımlı $\psi : J \rightarrow J$ bağıntıları var olur. İlk önce bu bağıntıların birer dönüşüm olduğunu görelim. Şimdi $x = x' \in J$ olsun. Buradan $d(x) = d(x')$ olur. Böylece yukarıdaki açıklamalardan $d(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ ve $d(x') = \varphi(x') + \psi(x')$ eşitlikleri sağlanır. Son üç bağıntıdan

$$\varphi(x) + \psi(x) = \varphi(x') + \psi(x')$$

dır ve

$$\varphi(x) - \varphi(x') = \psi(x') - \psi(x) \in E \cap J = \{0\}$$

bulunur. Buradan $\varphi(x) = \varphi(x')$ ve $\psi(x) = \psi(x')$ eşitlikleri elde edilir; yani φ ve ψ iyi tanımlıdır. Ayrıca her $x \in J$ için $d(x) \in R = E \oplus J$ olduğundan $d(x) = a_x + b_x = \varphi(x) + \psi(x)$ olacak şekilde $\varphi(x) = a_x \in E$ ve $\psi(x) = b_x \in J$ vardır. Bu ise φ ve ψ nin kapalılığını verir. Buradan φ ve ψ birer dönüşümdür. Böylece her bir $x \in J$ için, $d(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ olacak şekilde $\varphi(x) \in E$, $\psi(x) \in J$ vardır. Şimdi φ ve ψ nin birer E -modül homomorfizması olduğunu görelim. Her $x, y \in J$ için

$$d(x + y) = d(x) + d(y) = \varphi(x) + \psi(x) + \varphi(y) + \psi(y)$$

ve

$$d(x + y) = \varphi(x + y) + \psi(x + y)$$

olur. Böylece son iki bağıntıdan

$$\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y) = \psi(x) + \psi(y) - \psi(x+y) \in E \cap J = \{0\}$$

bulunur. Buradan $\varphi : J \rightarrow E$ ve $\psi : J \rightarrow J$ nin birer toplamsal dönüşüm olduğu sonucu elde edilir. Herhangi $a \in E$ ve $x \in J$ için, $E = d^{-1}(J)$ olduğundan $d(a) \in J$ dir ve $J^2 = (0)$ olduğundan

$$d(ax) = d(a)x + ad(x) = ad(x)$$

olur. O zaman

$$a\varphi(x) + a\psi(x) = ad(x) = d(ax) = \varphi(ax) + \psi(ax)$$

olur ve buradan

$$a\psi(x) - \psi(ax) = \varphi(ax) - a\varphi(x) \in E \cap J = \{0\}$$

elde edilir. Böylece her $a \in E$ ve $x \in J$ için $\varphi(ax) = a\varphi(x)$ ve $\psi(ax) = a\psi(x)$ olur. Benzer şekilde $d(xa) = d(x)a$ olduğundan $\varphi(xa) = \varphi(x)a$ ve $\psi(xa) = \psi(x)a$ eşitliği görülebilir. Ayrıca E ve J nin birer E -modül oldukları açıktır.

Tüm bu verilen bilgilerden, φ ve ψ birer E -modül homomorfizmasıdır. Şimdi φ nin bir E -modül izomorfizması olduğunu görelim. Burada $Im \varphi$, E nin bir alt E -modülüdür. Eğer $\varphi = 0$ ise her $x \in J$ için $d(x) = \varphi(x) + \psi(x) = \psi(x) \in J$ olduğundan $d(J) \subseteq J$ çelişkisine ulaşılır. O zaman $\varphi \neq 0$ olmalıdır. Böylece $0 \neq dim_E(Im \varphi) \leq dim_E(E) = 1$ olduğundan $dim_E(Im \varphi) = 1$ elde edilir. O zaman $Im \varphi = E$ dir. Bu ise φ dönüşümünün örtenliğini verir. Şimdi bir $0 \neq j \in J$ olsun. Burada jR kümesi R nin bir sağ idealidir ve $0 \neq j = j1 \in jR$ olduğundan $jR \neq (0)$ dır. Bu durumda J nin tekliğinden $J = jR$ olur. Üstelik $R = E \oplus J$ ve $J^2 = (0)$ olduğundan $J = jR = j(E \oplus J) = jE$ bulunur. Benzer şekilde $J = Ej$ dir. Böylece her $x \in J$ için $jy = x = zj$ olacak şekilde $y, z \in E$ vardır. Dolayısıyla $\{j\}$ kümesi J nin bir sağ ve sol E -bazıdır. Bu ise $dim_E(J) = 1$ olduğunu verir. Ayrıca $Ker \varphi$, J nin bir alt E -modülü olduğundan $dim_E(Ker \varphi) \leq dim_E(J) = 1$ olmalıdır. Burada $dim_E(Ker \varphi) = 1$ ise $Ker \varphi = J$ olur ve dolayısıyla $\varphi = 0$ çelişkisi elde edilir. Bu durumda $dim_E(Ker \varphi) = 0$ olmalıdır. Buradan $Ker \varphi = \{0\}$ elde edilir. O zaman φ dönüşümü bire-birdir. Sonuç olarak φ bir E -modül izomorfizmasıdır.

Şimdi $\varphi^{-1}(1) = t \in J$ alalım. Burada $t = 0$ iken $1 = \varphi(0) = 0$ çelişkisi elde edileceğinden, $t \neq 0$ dır ve üstelik $J^2 = (0)$ olduğundan $t^2 = 0$ olur. Yukarıda verilen bilgilerden, benzer şekilde $J = tE$ olur. Böylece $R = E \oplus J$ bağıntısından

$$R = E \oplus tE \quad (2)$$

elde edilir. Bu durumda $\psi(t) = t\alpha$ olacak şekilde bir $\alpha \in E$ vardır. Ayrıca son bağıntıdan $f(1) = c + tc'$ olacak şekilde $c, c' \in E$ vardır. Burada $t = \varphi^{-1}(1)$ olduğundan her $e \in E$ için

$$\varphi(te) = \varphi(t)e = e = e\varphi(t) = \varphi(et)$$

bulunur ve φ bir E -modül izomorfizması olduğundan $et = te$ elde edilir. O zaman $t \in J$ elemanı, E nin her elemanı ile değişmelidir. Benzer şekilde ψ bir E -modül homomorfizması ve $\psi(t) = t\alpha$ olduğundan her $e \in E$ için

$$te\alpha = et\alpha = e\psi(t) = \psi(et) = \psi(te) = \psi(t)e = t\alpha e$$

olur. Böylece $t(e\alpha - \alpha e) = 0$ olmalıdır. Burada $e\alpha - \alpha e \in E \subseteq U \cup \{0\}$ ve $t \neq 0$ olduğundan $\alpha e = e\alpha$ elde edilir. Böylece $\alpha \in Z(E)$ dir. Bu durumda $J^2 = (0)$ olduğundan her $a, b \in E$ için

$$(a + tb)t = at = ta = t(a + tb)$$

olur. Bu ise $t \in Z(R)$ olduğunu verir. Ayrıca $J^2 = (0)$ olduğundan $0 = d(t^2) = d(t)t + td(t) = (\varphi(t) + \psi(t))t + t(\varphi(t) + \psi(t)) = (1 + t\alpha)t + t(1 + t\alpha) = t + tat + t + t^2\alpha = 2t$ olur. O zaman $2R = 2(E \oplus tE) = 2E$ olmalıdır. Burada $2R = 2E$ kümesi E nin bir idealidir ve E kümesinin R nin bir bölümlü alt halkası olduğu gerçeği bizi ya $2R = 2E = (0)$ olmasına ya da $2R = 2E = E$ olmasına ulaştırır. Eğer $2R = 2E = E$ ise $2R$ kümesi R nin bir ideali olduğundan ve R nin bazı tersinir elemanlarını içereceğinden $2R = R$ olur. Fakat bu durum, $R = 2R = 2E = E \subseteq U \cup \{0\}$ olmasını gerektirdiğinden R nin bir bölümlü halka olmaması kabulü ile çelişir. Buradan $2R = (0)$ olması gerektiği sonucuna ulaşılır. Böylece R nin karakteristiğinin 2 dir.

Şimdi $E = \text{Ker } d$ olduğunu görelim. Herhangi $a, b \in E$ için, $d = f - f(1)_l$

olduğundan

$$\begin{aligned}
f(a + tb) &= d(a + tb) + f(1)(a + tb) \\
&= d(a) + d(tb) + (c + t'c')(a + tb) \\
&= d(a) + \varphi(tb) + \psi(tb) + ca + tcb + t'c'a + t'c'tb \\
&= d(a) + \varphi(t)b + \psi(t)b + ca + tcb + t'c'a \\
&= d(a) + b + tab + ca + tcb + t'c'a \\
&= (b + ca) + (d(a) + t(\alpha b + cb + c'a))
\end{aligned}$$

olur. Burada $E = d^{-1}(J)$ eşitliği göz önüne alınarak, son bağıntıda özel olarak $b = -ca \in E$ için

$$\begin{aligned}
f(a - tca) &= (-ca + ca) + d(a) + t(-\alpha ca - c^2a + c'a) \\
&= d(a) - t(\alpha c + c^2 - c')a \in J
\end{aligned}$$

bulunur. Burada eğer $f(a - tca) \neq 0$ ise f tersinir olduğundan $f(a - tca) \in U$ olur ve son bağıntıdan $J = R$ çelişkisi elde edilir. O halde $f(a - tca) = 0$ olmalıdır. Böylece son bağıntıdan, her $a \in E$ için

$$d(a) = t(\alpha c + c^2 - c')a$$

bağıntısına ulaşılır. Özel olarak, son bağıntıda $a = 1$ alırsak

$$d(1) = t(\alpha c + c^2 - c')$$

bulunur. Buradan, son iki bağıntı birlikte düşünülerek

$$d(a) = d(1)a$$

olur ve $d(1) = 0$ eşitliğinden $d(a) = 0$ olması gerekir. Buradan $a \in \text{Ker } d$ dir; yani $E \subseteq \text{Ker } d$ elde edilir. Tersine, eğer $a + tb \in \text{Ker } d$ ise $0 = d(a + tb) = d(a) + d(tb) = d(tb) = d(t)b + td(b) = d(t)b$ olur. Burada eğer $b \neq 0$ ise $b \in E \subseteq U \cup \{0\}$ olduğundan, son bağıntıdan $d(t) = 0$ elde edilir. Bu durumda her $te \in tE = J$ için

$$d(te) = d(t)e + td(e) = 0e + t0 = 0$$

olur. Böylece $\{0\} = d(J) \subseteq J$ elde edilir. Fakat bu durum (1) den bir çelişkidir. O zaman $b = 0$ olmalıdır. Buradan $a + tb = a \in E$ olur. Bu ise $\text{Ker } d \subseteq E$ olduğunu verir. Sonuç olarak

$$E = \text{Ker } d$$

dir. Ayrıca $0 = d(1) = t(\alpha c + c^2 - c')$ ve $t \neq 0$ olduğundan $c' = \alpha c + c^2$ olur. Böylece her $a, b \in E$ için $f(a + tb) = (b + ca) + (d(a) + t(\alpha b + cb + c'a))$ olduğundan

$$\begin{aligned} f(a + tb) &= (b + ca) + (d(a) + t(\alpha b + cb + c'a)) \\ &= (ca + b) + t(\alpha b + cb + \alpha ca + c^2 a) \\ &= (ca + b) + t(\alpha + c)(ca + b) \end{aligned}$$

olur. Eğer $D = \text{Ker } d$ alınırsa, bu durum Teorem 5.2.1 (3) e karşılık gelir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.2.2 nin İspatı Burada f nin bir tersinir genelleştirilmiş türev olduğunu, $\text{Ker } f$ nin sıfırdan farklı bir sağ ideali içerdiğini varsayalım ve $d = f - f(1)_l$ alalım. Eğer $D = \text{Ker } d$ alınırsa o zaman Yardımcı Özellik 5.1.5 (3) den D, R nin bir bölümlü alt halkası olur. Bu durumda $\text{Ker } f$ nin içerdiği tüm sağ ideallerin toplamı M olsun. O zaman $M \subseteq \text{Ker } f$ dir ve her $x \in M$ için

$$d(x) = f(x) - f(1)x = -f(1)x \quad (3)$$

olur. Kabulden, $\text{Ker } f$ kümesi R nin sıfırdan farklı bir sağ idealini içerdiği için $M \neq (0)$ dır. Burada eğer $d(M) = \{0\}$ ise o zaman $(0) \neq M \subseteq D \subseteq U \cup \{0\}$ olur. Bu durumda M sağ ideali R nin bazı tersinir elemanlarını içereceğinden $R = M \subseteq \text{Ker } f$ elde edilir. Bu ise $R = \text{Ker } f$ olduğunu verir. Buradan $f(R) = \{0\}$ çelişkisine ulaşılır. O zaman $d(M) \neq \{0\}$ olmalıdır. Böylece (3) ten $f(1) \neq 0$ elde edilir. Bu ise f tersinir olduğundan

$$f(1) \in U \quad (4)$$

olduğu anlamına gelir. Şimdi $N = r_R(M) = \{r \in R : Mr = (0)\}$ olsun. Burada N kümesi R nin bir idealidir ve M nin tanımı gereği $f(M) = \{0\}$ olduğundan, Yardımcı Özellik 5.1.5 (1) den

$$d(R) \subseteq N \quad (5)$$

elde edilir. Burada eğer $N = R$ ise, her $r \in R$ için $Mr = (0)$ olur, özel olarak $r = 1$ için $M = (0)$ çelişkisine ulaşılır. O zaman $N \neq R$ dir ve (5) den $d(N) \subseteq N$ dir. Böylece Yardımcı Özellik 5.1.4 ten $f(N) = \{0\}$ elde edilir.

Buradan $N \subseteq \text{Ker } f$ olur ve $\text{Ker } f$ de kapsanan tüm sağ ideallerin toplamı M olduğundan

$$N \subseteq M \quad (6)$$

bağıntısına ulaşılır. Son bağıntıdan ve N nin tanımından her $a, b \in N$ için $ab = 0$ olur. Böylece

$$N^2 = (0) \quad (7)$$

elde edilir. Ayrıca N bir ideal olduğundan, (4) den $f(1)N = N$ dir.

Şimdi d nin N ye kısıtlanması $d|_N$ olmak üzere, $d|_N$ nin bir R -modül izomorfizması olduğunu görelim. Burada (5) den $d|_N : N \rightarrow d(N) \subseteq N$ dir ve her $n \in N$ için $d|_N(n) = d(n)$ ile tanımlıdır. O zaman, her $n, n_1, n_2 \in N$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned} d|_N(n_1 + n_2) &= d(n_1 + n_2) \\ &= d(n_1) + d(n_2) \\ &= d|_N(n_1) + d|_N(n_2) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca (5) ve (7) den

$$d|_N(nr) = d(nr) = d(n)r + nd(r) = d(n)r = d|_N(n)r$$

dir ve benzer şekilde

$$d|_N(rn) = d(rn) = d(r)n + rd(n) = rd(n) = rd|_N(n)$$

olur. Son üç bağıntıdan, $d|_N : N \rightarrow N$ dönüşümü bir R -modül homomorfizması olur. Şimdi $\text{Im } d|_N = N$ olduğunu görelim. Burada $\text{Im } d|_N = d(N) \subseteq N$ olduğu (5) den görülür. Tersine $n \in N$ olsun. Bu durumda (3) ve (6) dan $-f(1)n = d(n) \in N$ dir. Ayrıca (4) den ve son bağıntıdan

$$n = -f(1)^{-1}d(n) = d(-f(1)^{-1}n) \in d(N) = \text{Im } d|_N$$

olur. Son bağıntı, $N \subseteq d(N) = \text{Im } d|_N$ olduğunu verir. Böylece $N = \text{Im } d|_N$ elde edilir. Bu ise $d|_N : N \rightarrow N$ dönüşümünün örtenliğini verir. Üstelik $x \in \text{Ker } d|_N$ ise (3) ve (6) dan

$$0 = d(x) = -f(1)x$$

olur ve bu ise (4) den $x = 0$ olmasını gerektirir. Buradan $\text{Ker } d|_N = \{0\}$ dır ve böylece $d|_N : N \rightarrow N$ dönüşümü bire-birdir. Sonuç olarak $d|_N : N \rightarrow N$ dönüşümü bir R -modül izomorfizmasıdır.

Şimdi $R = D \oplus N$ olduğunu görelim. Her $r \in R$ için, $N = d(N)$ olduğundan ve (5) den $d(r) = d(n)$ olacak şekilde bir $n \in N$ vardır ve böylece $d(r - n) = 0$ olur. Bu ise $r - n \in D = \text{Ker } d$ olduğunu verir. Buradan $r - n = a$ olacak şekilde bir $a \in D$ vardır; yani her $r \in R$ için $r = a + n$ olacak şekilde bir $a \in D$ ve $n \in N$ vardır. Buradan $r \in D + N$ elde edilir. O zaman $R = D + N$ dir. Üstelik D kümesi R nin bir bölümlü alt halkası olduğundan ve $N \neq R$ olduğundan $D \cap N = \{0\}$ dır. Buradan

$$R = D \oplus N$$

elde edilir.

Şimdi R nin Jacobson radikali nin N olduğunu görelim. Burada R nin Jacobson radikali J olmak üzere, tüm nil (sağ-sol-iki yanlı) idealler J de kapsandığından ve (7) den $N \subseteq J$ dir. Ayrıca son bağıntıdan, D bir bölümlü halka olduğundan N bir maksimal sağ idealdir. Gerçekten de eğer $N \subseteq I$ olacak şekilde R nin bir I öz sağ ideali var ise, her $x \in I$ için $x = a + b$ olacak şekilde $a \in D$ ve $b \in N$ vardır. Buradan $x - b = a \in I \cap D = \{0\}$ olur. Bu ise $x = b \in N$ olduğunu verir. Buradan $I \subseteq N$ ve dolayısıyla $I = N$ elde edilir. O zaman N bir maksimal sağ idealdir ve $J \neq R$ olduğundan $J = N$ olur; yani N ile R nin Jacobson radikali çakışır. Son bağıntıdan, $f(1) = \alpha + \omega$ olacak şekilde $\alpha \in D$ ve $\omega \in N$ vardır. Burada eğer $\alpha = 0$ ise $f(1) = \omega \in N$ olur ve (4) ten $N = R$ çelişmesine ulaşılır. O zaman $\alpha \neq 0$ olmalıdır. Böylece herhangi bir $a \in D$ için, $d = f - f(1)_l$ olduğundan $f(a) = d(a) + f(1)a = f(1)a = (\alpha + \omega)a$ olur. Ayrıca $f(N) = \{0\}$ olduğundan, bir $0 \neq x \in D$ ve her $a \in D$ için $f(ax) = 0$ dır ve üstelik $d = f - f(1)_l$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 = f(ax) &= f(a)x + ad(x) \\ &= f(a)x + af(x) - af(1)x \\ &= f(a)x - af(1)x \\ &= (\alpha + \omega)ax - a(\alpha + \omega)x \\ &= (\alpha a - a\alpha)x \end{aligned}$$

olur. Böylece $\alpha a - a\alpha \in D$ ve $x \neq 0$ olması gerçeği, $\alpha a - a\alpha = 0$ olmasını gerektirir. Buradan her $a \in D$ için $\alpha a = a\alpha$ olur. Bu ise $a \in Z(D)$ olduğunu verir.

5.2 $M_2(D)$ NİN TERSİNİR GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLERİ

Bu bölümde D bir bölümlü halka ve $M_2(D)$ ise matris birimleri $\{e_{ij}\}$ olan D üzerinde tüm 2×2 tipinde matrislerin halkası olacaktır. Burada $M_2(D)$ nin tersinir genelleştirilmiş türevleri tartışılacaktır. Herhangi $M, N \in M_2(D)$ ve her $A \in M_2(D)$ için $F_{M,N}(A) = MA + AN$ ile tanımlı $F_{M,N} : M_2(D) \rightarrow M_2(D)$ dönüşüm bir genelleştirilmiş türevidir ve bu dönüşüme **genelleştirilmiş iç türev** denir. Özel olarak, $F_{M,-M}$ dönüşümü $M \in M_2(D)$ ile belirli iç türevidir.

Teorem 5.2.1 *Karakteristiği 2 den farklı bir bölümlü halka D olsun. O zaman $M_2(D)$ nin her tersinir genelleştirilmiş türevi bir iç türevidir.*

İspat Öncelikle $M_2(D)$ nin bir tersinir genelleştirilmiş türevi F olsun. Burada $d = F - F(1)_I$ alalım. O zaman d dönüşümü $M_2(D)$ nin bir türevidir. Bu durumda

$$d(e_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{pmatrix}, d(e_{12}) = \begin{pmatrix} -q & r \\ 0 & q \end{pmatrix}, d(e_{21}) = \begin{pmatrix} -p & 0 \\ -r & p \end{pmatrix}, d(e_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ -q & 0 \end{pmatrix}$$

ve her $a, b, c, e \in D$ için

$$d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(a) - bq - pc & f(b) + ap + br - pe \\ f(c) + qa - eq - rc & f(e) + er - re + qb + cp \end{pmatrix}$$

olacak şekilde $p, q, r \in D$ ve D nin bir f türevi vardır (Bergen et al., 1983).

Burada $\alpha = -p$, $\gamma = -r$ ve $\beta = q$ olsun. O zaman son bağıntıdan her $a, b, c, e \in D$ için

$$d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(e) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \quad (8)$$

olacak şekilde $\alpha, \beta, \gamma \in D$ ve D nin bir f türevi vardır. Şimdi $\zeta, \eta, \theta, \iota \in D$ olmak üzere

$$F(1) = \begin{pmatrix} \zeta & \eta - \alpha \\ \theta - \beta & \iota - \gamma \end{pmatrix}$$

diyelim. Burada $F = d + F(1)_l$ olduğundan, (8) den ve son bağıntıdan her $a, c, e \in D$ için

$$F \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & e \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} f(a) + \zeta a + \eta c & \eta e - a\alpha \\ f(c) + \theta a + \iota c - e\beta & f(e) - c\alpha - e\gamma + \iota e \end{pmatrix} \quad (9)$$

elde edilir. Şimdi $\eta = 0$ olduğunu varsayalım. Burada f, D nin bir türevi olduğundan $f(1) = 0$ dir. O zaman (9) dan $F(e_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \iota & -\alpha \end{pmatrix}$ dir ve bu matrisin tersinir olmaması $\alpha = \iota = 0$ olmasını gerektirir. Aynı düşünce ile $F(e_{11}) = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ olduğundan $\zeta = \theta = 0$ ve $F(e_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\beta & -\gamma \end{pmatrix}$ olduğundan $\beta = \gamma = 0$ olmalıdır. Üstelik, her $a \in D$ için $F(ae_{11}) = f(a)e_{11}$ olur ve bu matris tersinir olmadığından $f(a) = 0$ olmalıdır. Bu ise $f = 0$ olduğunu verir. Böylece tüm bu bilgilerin ışığı altında, $F = 0$ ilişkisi elde edilir. Buradan $\eta \neq 0$ olmalıdır. Bu durumda (9) da $c = -\eta^{-1}(f(a) + \zeta a)$ ve $e = \eta^{-1}a\alpha$ alalım. Böylece

$$F \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & e \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & f(\eta^{-1}a\alpha) + \eta^{-1}(f(a) + \zeta a)\alpha - \eta^{-1}a\alpha\gamma + \iota\eta^{-1}a\alpha \end{pmatrix}$$

elde edilir. Yukarıdaki tersinir olmadığından

$$f(\eta^{-1}a\alpha) + \eta^{-1}f(a)\alpha + \eta^{-1}\zeta a\alpha - \eta^{-1}a\alpha\gamma + \iota\eta^{-1}a\alpha = 0$$

olmalıdır. Üstelik $f(\eta^{-1}a\alpha) = f(\eta^{-1})a\alpha + \eta^{-1}f(a)\alpha + \eta^{-1}af(\alpha)$ eşitliği ve son bağıntı birlikte düşünüldüğünde

$$2\eta^{-1}f(a)\alpha + f(\eta^{-1})a\alpha + \eta^{-1}\zeta a\alpha + \iota\eta^{-1}a\alpha + \eta^{-1}af(\alpha) - \eta^{-1}a\alpha\gamma = 0$$

bulunur. Ayrıca (9) dan $F(e_{21}) = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ \iota & -\alpha \end{pmatrix}$ olur. Burada $\eta \neq 0$ olması, bu matrisin tersinir olması gerektiğini söyler. Bu ise $\alpha \neq 0$ olduğunu verir. Böylece son bağıntının her iki tarafı soldan $n \in D$, sağdan $\alpha^{-1} \in D$ çarpılarak

$$\begin{aligned} 2f(a) &= -\eta f(\eta^{-1})a - \zeta a - \eta\iota\eta^{-1}a - af(\alpha)\alpha^{-1} + a\alpha\gamma\alpha^{-1} \\ &= (-\eta f(\eta^{-1}) - \zeta - \eta\iota\eta^{-1})a - a(f(\alpha)\alpha^{-1} + \alpha\gamma\alpha^{-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada hipotez gereği D nin karakteristiği 2 den farklı olduğundan, son bağıntı

$$f(a) = \left(\frac{-\eta f(\eta^{-1}) - \zeta - \eta\iota\eta^{-1}}{2} \right) a - a \left(\frac{f(\alpha)\alpha^{-1} + \alpha\gamma\alpha^{-1}}{2} \right)$$

eşitliğini verir. Bu durumda

$$-\mu = \frac{-\eta f(\eta^{-1}) - \zeta - \eta \eta^{-1}}{2} \quad \text{ve} \quad -\lambda = \frac{f(\alpha)\alpha^{-1} - \alpha\gamma\alpha^{-1}}{2}$$

denilerek yukarıdaki eşitlik, her $a \in D$ için $f(a) = a\lambda - \mu a$ bağıntısını verir.

Üstelik $0 = f(1) = \lambda - \mu$ olduğundan $\lambda = \mu$ olur ve buradan her $a \in D$ için $f(a) = a\lambda - \lambda a$ bulunur. Böylece her $a, b, c, e \in D$ için

$$\begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca

$$M = - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} + F(1) \quad \text{ve} \quad N = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

olmak üzere, $F = d + F(1)_I$ olduğundan ve (8) den, her $A \in M_2(D)$ için

$$F(A) = MA + AN$$

elde edilir. Bu ise F nin M ve N elemanları ile belirli genelleştirilmiş iç türev olduğunu verir.

$M_2(D)$ nin bir genelleştirilmiş türevi F ve $S, T \in M_2(D)$ tersinir matrisler olmak üzere; her $A \in M_2(D)$ için ${}^S F^T(A) = SF(S^{-1}AT^{-1})T$ ile tamamlı ${}^S F^T$ dönüşümünün $M_2(D)$ nin bir genelleştirilmiş türevi olduğu kolayca görülür ve ${}^S F^T$ ye F nin bir **eşleniği** denir. Ayrıca F nin tüm eşleniklerinin kümesine F nin **eşlenik sınıfı** denir. Eşlenik sınıfları, $M_2(D)$ nin tüm genelleştirilmiş türevlerinin kümesinin bir sınıflandırmasını verir. Üstelik (1) F nin tersinir olması için gerek ve yeter bir koşul ${}^S F^T$ nin tersinir olmasıdır ve (2) eğer $F = F_{M,N}$ ise o zaman $S_F T = F_{SMS^{-1}, T^{-1}NT}$ 'dir.

Bütünlüğü korumak adına, (Komatsu and Nakajima, 2004) te ispatsız verilen yukarıdaki iddiaları ispatlayalım.

İspat Eğer $M_2(D)$ nin bir genelleştirilmiş türevi F ise o zaman F toplamsaldır ve her $A, B \in M_2(D)$ için $F(AB) = F(A)B + Ad(B)$ olacak şekilde $M_2(D)$ nin bir d türevi vardır. Şimdi $S, T \in M_2(D)$ tersinir matrisler olsun. Burada ${}^S F^T$ nin toplamsallığı açıktır. Bu durumda $d(T^{-1})T \in M_2(D)$ ile belirli iç türev δ olmak üzere $Q = d - \delta$ alalım. O zaman Q nun $M_2(D)$ nin bir türevi olduğu açıktır. Üstelik her $A, B \in M_2(D)$ için ${}^S F^T(AB) = {}^S F^T(A)B + AQ(B)$ eşitliği sağlanır. Böylece ${}^S F^T$, $M_2(D)$ nin bir genelleştirilmiş türevidir.

(1) İlk olarak $S, T \in M_2(D)$ tersinir matrisler olsun ve F nin tersinir olduğunu varsayalım. O zaman her $A \in M_2(D)$ için ya $F(A) \in U$ dur ya da $F(A) = 0$ dır. Burada S, T tersinir matrisler olduğundan, her $A \in M_2(D)$ için ya $SF(A)T \in U$ dır ya da $SF(A)T = 0$ dır. Burada özel olarak A yerine $S^{-1}AT^{-1}$ alınarak, ya $SF(S^{-1}AT^{-1})T \in U$ olur ya da $SF(S^{-1}AT^{-1})T = 0$ olur. Bu ise ${}^S F^T(R) \subseteq U \cup \{0\}$ olduğunu verir. Burada eğer ${}^S F^T(R) = \{0\}$ ise o zaman her $A \in M_2(D)$ için $SF(S^{-1}AT^{-1})T = 0$ olur. Buradan $F(S^{-1}AT^{-1}) = 0$ elde edilir. Özel olarak A yerine SAT alırsak, her $A \in M_2(D)$ için $F(A) = 0$ olur ve böylece $F(R) = \{0\}$ çelişkisine ulaşılır. O halde ${}^S F^T(R) \neq \{0\}$ olmalıdır. Böylece $\{0\} \neq {}^S F^T(R) \subseteq U \cup \{0\}$ elde edilir; yani ${}^S F^T$ tersinirdir.

Tersine, ${}^S F^T$ nin tersinir olduğunu varsayalım. O zaman her $A \in M_2(D)$ için ya ${}^S F^T(A) \in U$ dır ya da ${}^S F^T(A) = 0$ dır. Buradan ya $SF(S^{-1}AT^{-1})T \in U$ olmalıdır ya da $SF(S^{-1}AT^{-1})T = 0$ olmalıdır. O zaman ya $F(S^{-1}AT^{-1}) \in U$ dır ya da $F(S^{-1}AT^{-1}) = 0$ dır. Burada özel olarak, A yerine SAT alınarak, her $A \in M_2(D)$ için ya $F(A) \in U$ olur ya da $F(A) = 0$ olur. Bu ise $F(R) \subseteq U \cup \{0\}$ olduğunu verir. Burada eğer $F(R) = \{0\}$ ise her $A \in M_2(D)$ için $F(A) = 0$ olur. O zaman $SF(A)T = 0$ dır. Özel olarak A yerine $S^{-1}AT^{-1}$ yazılarak, her $A \in M_2(D)$ için ${}^S F^T(A) = 0$ elde edilir. Buradan ${}^S F^T(R) = \{0\}$ çelişkisine ulaşılır. O zaman $F(R) \neq \{0\}$ olmalıdır. Böylece $\{0\} \neq F(R) \subseteq U \cup \{0\}$ elde edilir; yani F tersinirdir.

(2) Eğer $F = F_{M,N}$ ise o zaman her $A \in M_2(D)$ için

$$\begin{aligned} {}^S F^T(A) &= SF(S^{-1}AT^{-1})T \\ &= S(MS^{-1}AT^{-1} + S^{-1}AT^{-1}N)T \\ &= SMS^{-1}A + AT^{-1}NT \\ &= F_{SMS^{-1}, T^{-1}NT}(A) \end{aligned}$$

olur. O zaman ${}^S F^T = F_{SMS^{-1}, T^{-1}NT}$ dir.

Yardımcı Özellik 5.2.2 Eğer $F, M_2(D)$ nin $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix}$ ve $N = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$ elemanları ile belirli tersinir genelleştirilmiş iç türevi ise o zaman b, c, t ve u elemanlarının hepsi sıfırdan farklıdır.

İspat Genelleştirilmiş iç türev tanımından her $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \in M_2(D)$ için

$F(A) = MA + AN$ dir. Böylece aşağıdaki

$$F(e_{21}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ e+s & t \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$F(e_{11}) = \begin{pmatrix} a+s & t \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$F(e_{12}) = \begin{pmatrix} u & a+v \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad (12)$$

matrisleri elde edilir. Burada $b = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda F bir tersinir genelleştirilmiş iç türev olduğundan ve (10) dan $t = 0$ ve $s = -e$, (11) den $c = 0$ ve $s = -a$, (12) den $u = 0$ ve $v = -a$ bulunur. Böylece $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ ve $N = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ elde edilir. Üstelik, herhangi bir $x \in D$ için $F(xe_{11}) = (ax - xa)e_{11}$ olur. Bu matris tersinir olmadığından sıfır matrisine eşit olmalıdır. Buradan $ax - xa = 0$ bulunur. Bu ise $ax = xa$ olduğunu verir; yani $a \in Z(D)$ dir. Fakat burada $a \in Z(D)$ olduğundan, $F = 0$ çelişkisine ulaşılır. O halde $b \neq 0$ olmalıdır. Bu durumda (10) dan $t \neq 0$, (11) den $c \neq 0$ ve (12) den $u \neq 0$ olur.

Teorem 5.2.3 *D bir bölümlü halka olsun. O zaman $\lambda, \mu \in Z(D)$, $x^2 - \mu x - \lambda = 0$ denkleminin D de bir çözümü olmayacak şekilde elemanlar olmak üzere $M_2(D)$ de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$ elemanı ile belirli tüm iç türevler, tersinir genelleştirilmiş iç türevlerin eşlenik sınıflarının temsilcilerinin bir tam kümesini verir.*

İspat Burada $\lambda, \mu \in Z(D)$, $x^2 - \mu x - \lambda = 0$ denkleminin D de bir çözümü olmayacak şekilde elemanlar olmak üzere, $M_2(D)$ de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$ elemanı ile belirli iç türev F olsun. O zaman bir $A = \begin{pmatrix} x & y \\ s & t \end{pmatrix} \in M_2(D)$ için, $m = s - \lambda y$ ve $n = x - t + \mu y$ olmak üzere

$$F(A) = \begin{pmatrix} s - \lambda y & -x + t - \mu y \\ \lambda(x - t) + \mu s & -s + \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & -n \\ \lambda n + \mu m & -m \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Burada eğer $\lambda = 0$ ise o zaman $x = 0 \in D$, $x^2 - \mu x - \lambda = 0$ denkleminin bir çözümü olur; bu ise kabul ile çelişir. O zaman $\lambda \neq 0$ olmalıdır.

Öncelikle $m = 0$ ise o zaman $F(A) = \begin{pmatrix} 0 & -n \\ \lambda n & 0 \end{pmatrix}$ olur ve bu matris ya sıfır matrisidir ya da tersinirdir. Çünkü $\lambda \neq 0$ olduğundan, eğer $n = 0$ ise $F(A)$ sıfır matrisi olur, eğer $n \neq 0$ ise $F(A)$ tersinir olur.

Şimdi eğer $m \neq 0$ ise o zaman son bağıntıdan

$$F(A) = \begin{pmatrix} 1 & nm^{-1} \\ \lambda nm^{-1} + \mu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$$

bulunur. Bu bağıntıda yer alan ikinci çarpan, $m \neq 0$ olduğundan daima tersinir bir matristir. Bu durumda $F(A)$ matrisinin tersinir olması ilk çarpana bağlıdır. Eğer $F(A)$ tersinir değil ise ilk çarpanın determinant değeri $1 - \lambda(nm^{-1})^2 - \mu(nm^{-1}) = 0$ olmalıdır. Buradan, $\lambda - (\lambda nm^{-1})^2 - \mu(\lambda nm^{-1}) = 0$ elde edilir. Fakat bu durumda, $-\lambda nm^{-1} \in D$, $x^2 - \mu x - \lambda = 0$ denkleminin bir çözümü olur. Bu ise bir çelişkidir. O zaman $F(A)$ tersinirdir. Böylece F tersinir olur.

Sonuç olarak $x^2 - \mu x - \lambda = 0$ denkleminin D de bir çözümü olmayacak şekilde $\lambda, \mu \in Z(D)$ için, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$ elemanı ile belirli iç türev tersinirdir. Böylece her iç türev bir genelleştirilmiş iç türev olduğundan, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$ elemanı ile belirli iç türev, tersinir genelleştirilmiş iç türevlerin eşlenik sınıflarının temsilcilerinin bir tam kümesinin elemanıdır.

Diğer taraftan, $\lambda', \mu' \in Z(D)$ olmak üzere, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda' & \mu' \end{pmatrix}$ elemanı ile belirli iç F' olsun. Bu durumda $(\lambda, \mu) \neq (\lambda', \mu')$ olduğunu varsayalım. Bir başka deyişle, $x^2 - \mu' x - \lambda' = 0$ denkleminin D de bir çözümü olsun. Notasyondaki karışıklığı gidermek adına, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$ ve $M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda' & \mu' \end{pmatrix}$ diyelim. Burada eğer M ve M' benzer matrisler ise o zaman Cayley-Hamilton Teoremi yardımıyla M ve M' matrislerinin karakteristik polinomlarının eşit olduğu açıktır. Böylece M ve M' matrislerinin karakteristik polinomları sırasıyla $A(x)$ ve $B(x)$ olmak üzere, $A(x) = x^2 - \mu x - \lambda$ ve $B(x) = x^2 - \mu' x - \lambda'$ olur. Bu durumda $A(x) = B(x)$ olduğundan, $(\lambda, \mu) = (\lambda', \mu')$ çelişkisine ulaşılır. O zaman M ve M' benzer matrisler değildir; yani $M = PM'P^{-1}$ olacak şekilde bir $P \in M_2(Z(D))$ tersinir matrisi yoktur, dolayısıyla aynı eşlenik sınıfında değildirler. O zaman F ve F' eşlenik değildir. Yukarıdaki sonuçlardan,

$(\lambda, \mu) \neq (\lambda', \mu')$ olacak şekilde $\lambda', \mu' \in Z(D)$ için $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda' & \mu' \end{pmatrix}$ elemanı ile belirli iç türev, tersinir genelleştirilmiş iç türevlerin eşlenik sınıflarının temsilcilerinin bir tam kümesinin elemanı değildir.

Son olarak $F, M_2(D)$ nin $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix}$ ve $N = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$ elemanları ile belirli keyfi bir tersinir genelleştirilmiş iç türevi olsun. O zaman Yardımcı Özellik 5.2.2 den b, c, t ve u elemanlarının hepsi sıfırdan farklıdır. Burada $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$ ve $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & -t \end{pmatrix}$ alalım. O zaman

$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b^{-1}a & b^{-1} \end{pmatrix}$ olduğu ve $\lambda = bc - beb^{-1}a \in D$, $\mu = a + beb^{-1}$

olmak üzere $SMS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$ olduğu kolaylıkla görülür. Benzer şekilde,

$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t^{-1}s & -t^{-1} \end{pmatrix}$ olduğu ve $\varphi = tvt^{-1}s - tu$, $\psi = tvt^{-1} + s$ olmak

üzere $TNT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \varphi & \psi \end{pmatrix}$ olduğu elde edilir. Yardımcı Özellik 5.2.2 den

önce belirtildiği gibi, ${}^S F^{T^{-1}} = F_{SMS^{-1}, TNT^{-1}}$ dir; yani ${}^S F^{T^{-1}}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$ ve

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \varphi & \psi \end{pmatrix}$ elemanları ile belirli tersinir genelleştirilmiş iç türevdir. Buradan, her $x \in D$ için

$${}^S F^{T^{-1}} \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda x + x\varphi & \mu x + x\psi \end{pmatrix}$$

olur. Fakat bu matris tersinir olmadığından, hipotez gereği sıfır matrisi olmalıdır. Buradan her $x \in D$ için $x\varphi = -\lambda x$ ve $x\psi = -\mu x$ elde edilir. Son eşitliklerde $x = 1$ alınırsa, $\varphi = -\lambda \in Z(D)$ ve $\psi = -\mu \in Z(D)$ olduğu görülür.

Böylece $TNT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & -\mu \end{pmatrix}$ olur. Buradan ${}^S F^{T^{-1}}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$ elemanı ile

belirli iç türevdir. Bu durumda Yardımcı Özellik 5.2.2 den $\lambda \neq 0$ dir. Şimdi bir $x \in D$ alalım. O zaman

$${}^S F^{T^{-1}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\lambda & x - \mu \\ -\lambda x & \lambda \end{pmatrix}$$

olur. Yukarıdaki matris sıfır matrisi olamayacağından ve kabulden, tersinir olmalıdır. O zaman bu matrisin determinant değeri, $\lambda, \mu \in Z(D)$ olduğu göz önünde tutularak

$$\lambda x^2 - \lambda x \mu - \lambda^2 \neq 0$$

olmalıdır. Son bağıntının her iki tarafı soldan $\lambda^{-1} \in D$ ile çarpılarak ve $\mu \in Z(D)$ olduğu kullanılarak

$$x^2 - \mu x - \lambda \neq 0$$

bulunur; yani ${}_S F^{T^{-1}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\lambda & x - \mu \\ -\lambda x & \lambda \end{pmatrix}$ matrisinin tersinir olabilmesi için gerek ve yeter bir koşul $x^2 - \mu x - \lambda = 0$ denkleminin D de bir çözümü olmamasıdır. Böylece ispat tamamlanır.

6 SONUÇ

Üçüncü bölümde, birimli halkaların tersinir değerlilik koşulunu sağlayan (adi) türev dönüşümleri incelenmiş ve bu inceleme ile beraber üzerinde tersinir değerli bir türev tanımlı olan birimli halkalar ile ilişkili türevin karakterizasyonuna yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, ilk bölümde ele alınan problem (σ, τ) -türevlere genişletilmiştir; birimli halkaların tersinir değerlilik koşulunu sağlayan (σ, τ) -türevleri incelenmiş ve sonuç olarak halka ile ilişkili türevin yapısı hakkında önemli bulgulara yer verilmiştir.

Beşinci bölümde, ilk bölümde üzerine çalışılan problem, genelleştirilmiş türevlere genişletilmiştir.

İncelenen çalışmaların ışığı altında, aslında birimli bir halkanın yapısının, türevlerinden birine özel bir koşul dayatılması ile ne kadar sıkı bir şekilde belirlendiği gösterilmeye çalışılmıştır. Üstelik üzerinde tersinir değerli farklı türev kavramlarından herhangi biri tanımlı olan birimli halkaların ve ilgili türev dönüşümlerinin yapılarının birbirine ne kadar çok benzediği gözlemlenmiştir.

Bu çalışma, tersinir değerli olabilecek diğer dönüşümleri içeren halkaları belirlemeye referans olacaktır. Ayrıca (Argaç and Albaş, 2002) çalışmasında verilen genelleştirilmiş (σ, τ) -türev kavramı ele alınarak, tersinir değerli genelleştirilmiş (σ, τ) -türevlere sahip birimli halkaların yapısı tarafımızdan incelenmeye başlanmıştır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Bergen, J., Herstein, I. N., Lanski, C.**, 1983, Derivations with invertible values, *Canad. J. Math.*, 35(2): 300–310.
- Hongan, M., Komatsu, H.**, 1987, (σ, τ) -Derivations with invertible values, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 15(4): 411-415.
- Bergen, J., Herstein, I.N.**, 1983, Rings with a special kind of automorphism, *Canad. Math. Bull.*, 26(1): 3–8.
- Chang, J.C.**, 1985, α -Derivations with invertible values, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 13(4): 323–333.
- Komatsu, H., Nakajima, A.**, 2004, Generalized derivations with invertible values, *Comm. Algebra.*, 32(5): 1937-1944
- Brešar, M.**, 1991, On the distance of the composition of two derivations to generalized derivations, *Glasgow Math. J.*, 33(1): 89-93.
- Komatsu, H., Hongan, M.**, 2003, Generalized derivations of associative algebras, *Quaestiones Math.*, 26(2): 213-235.
- Leger, G. F., Luks, E. M.**, 2000, Generalized derivations of lie algebras, *J. Algebra*, 228(1): 165-203.
- Nakajima, A.**, 1999, On categorical properties of generalized derivations, *Scientiae Mathematicae*, 2(3): 345-352.
- Posner, E.C.**, 1957, Derivations in prime rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8(6): 1093-1100.
- Argaç, N., Albaş, E.**, 2002, On generalized (σ, τ) -derivations, *Siberian Math.* 43(6): 977-984.
- Jacobson, N.**, 1985, *Basic Algebra I*, W. H. Freeman and Company, 517p.
- Anderson, F.W., Fuller, K.R.**, 1974, *Rings and Categories of Modules*, Springer New York, 385p.
- Brešar, M.**, 2014, *Introduction to Noncommutative Algebra*, Springer International Publishing, 199p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

Hungerford, T.W., 1980, Algebra, Springer-Verlag New York, 504p.

Lam, T.Y., 2001, A First Course in Noncommutative Rings, Springer-Verlag New York, 388p.

Bhattacharya, P.B., Jain, S.K., Nagpaul, S.R., 1994, Basic Abstract Algebra, Cambridge University Press., 507p.

Koç, C., 2010, Topics in Linear Algebra, Doğuş University, 261p.

