



T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
DOKTORA TEZİ

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİ
PROBLEMLERİNDE GÖRSEL AKIL YÜRÜTME
BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

MEHMET ERTÜRK GEÇİCİ

İzmir
2022

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
DOKTORA TEZİ

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİ
PROBLEMLERİNDE GÖRSEL AKIL YÜRÜTME
BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

MEHMET ERTÜRK GEÇİCİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Elif TÜRNÜKLÜ

İzmir
2022

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Doktora tezi olarak sunduğum “Ortaokul Öğrencilerinin Geometri Problemlerinde Görsel Akıl Yürütme Becerilerinin İncelenmesi” adlı çalışmanın içerdiği fikri izinsiz başka bir yerden almadığımı; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında ve bölümlerinin yazımında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada kullanılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yaptığımı ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi, ayrıca bu çalışmanın Dokuz Eylül Üniversitesi tarafından kullanılan bilimsel intihal tespit programıyla tarandığını ve intihal içermediğini beyan ederim. Herhangi bir zamanda aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonuca razı olduğumu bildiririm.

19/09/2022

Mehmet Ertürk GEÇİCİ



TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK
RAPORU



Tarih: 30/09/2022

Tez Başlığı:

Ortaokul Öğrencilerinin Geometri Problemlerinde Görsel Akıl Yürütme Becerilerinin İncelenmesi

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam **256** sayfalık kısmına ilişkin, **29/09/2022** tarihinde **tez danışmanım tarafından** Dokuz Eylül Üniversitesi Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı'nın sağladığı İntihal Tespit Programından (**Turnitin-Tez İntihal Analiz Programı**) aşağıda belirtilen **filtreleme tiplerinden biri** (uygun olanı işaretleyiniz) uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezin **benzerlik oranı % 14'tür.**

- <http://www.kutuphane.deu.edu.tr/tr/turnitin-tez-intihal-analiz-programi/> adresindeki Tez İntihal Analiz Programı Kullanım Kılavuzunu okudum ☒

Filtreleme Tipi 1(Maksimum %15) ☒

Filtreleme Tipi 2(Maksimum %30) ☐

☒ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☒ Kaynakça hariç, ☒ Alıntılar dâhil, ☒ Altı (6) kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç.	☐ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☐ Kaynakça dâhil, ☐ Alıntılar dâhil.
EK 1- İntihal Tespit Programı Raporu İLK SAYFA Çıktısı. ☒	
EK 2- İntihal Tespit Programı Raporu (Tümü) Cd İçinde. ☐	

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve yukarıda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Adı Soyadı : Mehmet Ertürk GEÇİCİ
Öğrenci No : 2018950019
Anabilim Dalı : Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi
Programı : İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Statüsü : Yüksek Lisans ☐ Doktora ☒

ÖĞRENCİ

Mehmet Ertürk GEÇİCİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Elif TÜRNÜKLÜ

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimine başladığım günden itibaren bilgisi ile sürekli olarak bana yol gösteren, akademik kimliğini örnek aldığım ve desteğini esirgemeyen değerli danışmanım Prof. Dr. Elif TÜRNUKLÜ'ye,

Doktora ders döneminde kendisinden çok şey öğrendiğim ve tez izleme jürimde yer alarak değerli görüşleri ile tezime katkıda bulunan değerli hocam Prof. Dr. Berna CANTÜRK GÜNHAN'a,

Tezime yönelik yaptığı katkıların yanı sıra doktora eğitimim süresince birçok yardımını gördüğüm değerli hocam Prof. Dr. Murat PEKER'e,

Dokuz Eylül Üniversitesi Matematik Eğitimi Ana bilim Dalı'nın birbirinden değerli öğretim üyelerine,

Eğitim-öğretim hayatım boyunca bugünlere gelmemi sağlayan ve üzerimde emeği olan bütün öğretmenlerime,

Dostlukları, sevgileri ve destekleri ile her zaman yanımda olan birbirinden değerli arkadaşlarıma,

Bugünlere gelmemi sağlayan, çıktığım bu yolculuk boyunca bana cesaret veren, attığım her adımda beni hep destekleyen, hiçbir zaman beni yalnız bırakmayan ve sevgilerini her zaman yanımda hissettiğim başta sevgili annem ve babam olmak üzere bütün aileme sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Son olarak doktora çalışmalarımın ilk yıllarında hayatıma giren, yorulduğum zamanlarda beni çalışmaya teşvik eden ve gerek bana gerekse tezime yönelik yaptığı öneriler için hayat arkadaşım Dr. Fidan GEÇİCİ'ye de teşekkür ederim, iyi ki varsın.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	xv
ABSTRACT.....	xvi
BÖLÜM I.....	1
GİRİŞ	1
1.1. Problem Durumu.....	1
1.2. Araştırmanın Amacı ve Önemi	5
1.3. Problem Cümlesi.....	7
1.4. Sınırlılıklar	7
1.5. Varsayımlar.....	8
1.6. Tanımlar.....	8
BÖLÜM II.....	9
KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR	9
2.1. Matematiksel Düşünme.....	9
2.2. Akıl Yürütme	13
2.3. Görsel Akıl Yürütme.....	15
2.3.1. Görsel akıl yürütmeye yönelik kavramsal çerçeveler	17
2.3.1.1. Görsel temsil kullanma	21
2.3.1.2. Görselleştirme	23
2.3.1.3. Matematiksel düşünmeye geçiş.....	26
2.4. Geometrik Düşünme	27
2.4.1. Fischbein'in şekilsel kavram teorisi.....	29
2.4.2. Duval'in bilişsel modeli	30
2.4.2.1. Bilişsel kavrama	30
2.4.2.2. Bilişsel süreçler	31

2.5. İlgili Araştırmalar.....	34
2.5.1. Yurt içinde yapılan araştırmalar.....	34
2.5.2. Yurt dışında yapılan araştırmalar.....	41
BÖLÜM III	51
YÖNTEM.....	51
3.1. Araştırmanın Deseni.....	51
3.2. Katılımcılar	54
3.3. Veri Toplama Araçları	56
3.3.1. Geometri Problemi Çözme Testi.....	56
3.3.1.1. Uzman görüşleri.....	58
3.3.1.2. Pilot çalışma.....	61
3.3.1.3. Özelleştirme bileşenine yönelik problemler.....	62
3.3.1.4. Genelleme bileşenine yönelik problemler.....	64
3.3.1.5. Varsayımda bulunma bileşenine yönelik problemler.....	67
3.3.1.6. Doğrulama ve ikna etme bileşenine yönelik problemler.....	70
3.3.2. Klinik mülakatlar	72
3.3.3. Gözlem notları.....	74
3.4. Veri Toplama Süreci	75
3.5. Verilerin Analizi.....	76
3.6. Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği.....	78
3.6.1. İnandırıcılık	79
3.6.2. Aktarılabilirlik.....	79
3.6.3. Tutarlık.....	80
3.6.4. Teyit Edilebilirlik.....	80
3.7. Araştırmacının Rolü	81
BÖLÜM IV	82

BULGULAR.....	82
4.1. Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Geometri Problemlerinde Görsel Akıl Yürütme Becerilerinin Rolü Nedir ve Nasıldır?.....	82
4.1.1. Sözel özelleştirme problemine yönelik bulgular.....	82
4.1.2. Görsel özelleştirme problemine yönelik bulgular	87
4.1.3. Sözel genelleme problemine yönelik bulgular	91
4.1.4. Görsel genelleme problemine yönelik bulgular	94
4.1.5. Sözel varsayımda bulunma problemine yönelik bulgular	98
4.1.6. Görsel varsayımda bulunma problemine yönelik bulgular	101
4.1.7. Sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik bulgular.....	105
4.1.8. Görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik bulgular	110
4.2. Altıncı Sınıf Öğrencilerinin Geometri Problemlerinde Görsel Akıl Yürütme Becerilerinin Rolü Nedir ve Nasıldır?.....	112
4.2.1. Sözel özelleştirme problemine yönelik bulgular.....	112
4.2.2. Görsel özelleştirme problemine yönelik bulgular	116
4.2.3. Sözel genelleme problemine yönelik bulgular	120
4.2.4. Görsel genelleme problemine yönelik bulgular	125
4.2.5. Sözel varsayımda bulunma problemine yönelik bulgular	129
4.2.6. Görsel varsayımda bulunma problemine yönelik bulgular	133
4.2.7. Sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik bulgular.....	137
4.2.8. Görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik bulgular	142
4.3. Yedinci Sınıf Öğrencilerinin Geometri Problemlerinde Görsel Akıl Yürütme Becerilerinin Rolü Nedir ve Nasıldır?.....	146
4.3.1. Sözel özelleştirme problemine yönelik bulgular.....	146
4.3.2. Görsel özelleştirme problemine yönelik bulgular	151
4.3.3. Sözel genelleme problemine yönelik bulgular.....	155

4.3.4. Görsel genelleme problemine yönelik bulgular	158
4.3.5. Sözel varsayımda bulunma problemine yönelik bulgular	162
4.3.6. Görsel varsayımda bulunma problemine yönelik bulgular	165
4.3.7. Sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik bulgular	170
4.3.8. Görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik bulgular	174
4.4. Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Geometri Problemlerinde Görsel Akıl Yürütme Becerilerinin Rolü Nedir ve Nasıldır?	178
4.4.1. Sözel özelleştirme problemine yönelik bulgular	178
4.4.2. Görsel özelleştirme problemine yönelik bulgular	183
4.4.3. Sözel genelleme problemine yönelik bulgular	186
4.4.4. Görsel genelleme problemine yönelik bulgular	189
4.4.5. Sözel varsayımda bulunma problemine yönelik bulgular	193
4.4.6. Görsel varsayımda bulunma problemine yönelik bulgular	197
4.4.7. Sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik bulgular	202
4.4.8. Görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik bulgular	207
4.5. Sınıf Düzeylerinin Karşılaştırılmasına İlişkin Bulgular	212
4.5.1. Sözel özelleştirme probleminden elde edilen bulguların karşılaştırılması	212
4.5.2. Görsel özelleştirme probleminden elde edilen bulguların karşılaştırılması	213
4.5.3. Beşinci ve altıncı sınıf öğrencilerine yöneltilen sözel genelleme probleminden elde edilen bulguların karşılaştırılması	215
4.5.4. Yedinci ve sekizinci sınıf öğrencilerine yöneltilen sözel genelleme probleminden elde edilen bulguların karşılaştırılması	216
4.5.5. Beşinci ve altıncı sınıf öğrencilerine yöneltilen görsel genelleme probleminden elde edilen bulguların karşılaştırılması	216

4.5.6. Altıncı ve yedinci sınıf öğrencilerine yöneltilen görsel varsayımda bulunma probleminden elde edilen bulguların karşılaştırılması	217
4.5.7. Sözel doğrulama ve ikna etme probleminden elde edilen bulguların karşılaştırılması	218
4.5.8. Görsel doğrulama ve ikna etme probleminden elde edilen bulguların karşılaştırılması	220
BÖLÜM V	222
TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER.....	222
5.1. Tartışma ve Sonuç.....	222
5.2. Öneriler	231
5.2.1. Uygulamacılara yönelik öneriler.....	231
5.2.2. Araştırmacılara yönelik öneriler	232
KAYNAKÇA.....	233
EKLER.....	256
EK 1. ÖZGEÇMİŞ	256
EK 2. ETİK KURUL İZNİ	258
EK 3. AFYONKARAHİSAR İL MİLLİ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ İZNİ	259
EK 4. VELİ BİLGİLENDİRME VE İZİN FORMU	260
EK 5. ÖĞRENCİ BİLGİLENDİRME VE İZİN FORMU.....	261
EK 6. GEOMETRİ PROBLEMİ ÇÖZME TESTİ UZMAN GÖRÜŞ FORMU	262
EK 7. GEOMETRİ PROBLEMİ ÇÖZME TESTİNİN SON HALİ	271
EK 8. KLİNİK MÜLAKATTA KULLANILAN GÖRÜŞME SORULARI.....	287

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1 Çalışmaya katılan öğrencilerin özellikleri	55
Tablo 2 Uzmanların özellikleri	58
Tablo 3 Beşinci sınıf öğrencilerinin sözel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	82
Tablo 4 Beşinci sınıf öğrencilerinin görsel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	87
Tablo 5 Beşinci sınıf öğrencilerinin sözel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	91
Tablo 6 Beşinci sınıf öğrencilerinin görsel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	95
Tablo 7 Beşinci sınıf öğrencilerinin sözel varsayımda bulunma problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	98
Tablo 8 Beşinci sınıf öğrencilerinin görsel varsayımda bulunma problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri	102
Tablo 9 Beşinci sınıf öğrencilerinin sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	106
Tablo 10 Beşinci sınıf öğrencilerinin görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri	110
Tablo 11 Altıncı sınıf öğrencilerinin sözel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	112
Tablo 12 Altıncı sınıf öğrencilerinin görsel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	116
Tablo 13 Altıncı sınıf öğrencilerinin sözel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	120
Tablo 14 Altıncı sınıf öğrencilerinin görsel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	125
Tablo 15 Altıncı sınıf öğrencilerinin sözel varsayımda bulunma problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	129
Tablo 16 Altıncı sınıf öğrencilerinin görsel varsayımda bulunma problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	133
Tablo 17 Altıncı sınıf öğrencilerinin sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	137

Tablo 18 Altıncı sınıf öğrencilerinin görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	142
Tablo 19 Yedinci sınıf öğrencilerinin sözel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	146
Tablo 20 Yedinci sınıf öğrencilerinin görsel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	151
Tablo 21 Yedinci sınıf öğrencilerinin sözel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	155
Tablo 22 Yedinci sınıf öğrencilerinin görsel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	158
Tablo 23 Yedinci sınıf öğrencilerinin sözel varsayımda bulunma problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	162
Tablo 24 Yedinci sınıf öğrencilerinin görsel varsayımda bulunma problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	165
Tablo 25 Yedinci sınıf öğrencilerinin sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	170
Tablo 26 Yedinci sınıf öğrencilerinin görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri	174
Tablo 27 Sekizinci sınıf öğrencilerinin sözel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	178
Tablo 28 Sekizinci sınıf öğrencilerinin görsel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	183
Tablo 29 Sekizinci sınıf öğrencilerinin sözel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	186
Tablo 30 Sekizinci sınıf öğrencilerinin görsel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	189
Tablo 31 Sekizinci sınıf öğrencilerinin sözel varsayımda bulunma problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	194
Tablo 32 Sekizinci sınıf öğrencilerinin görsel varsayımda bulunma problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri.....	198
Tablo 33 Sekizinci sınıf öğrencilerinin sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri	202
Tablo 34 Sekizinci sınıf öğrencilerinin görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri	207

Tablo 35 Katılımcıların sözel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmelerinin karşılaştırılması	212
Tablo 36 Katılımcıların görsel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmelerinin karşılaştırılması	214
Tablo 37 Katılımcıların sözel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmelerinin karşılaştırılması	215
Tablo 38 Katılımcıların sözel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmelerinin karşılaştırılması	216
Tablo 39 Katılımcıların görsel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmelerinin karşılaştırılması	217
Tablo 40 Katılımcıların görsel varsayımda bulunma problemine yönelik görsel akıl yürütmelerinin karşılaştırılması	218
Tablo 41 Katılımcıların sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik görsel akıl yürütmelerinin karşılaştırılması	219
Tablo 42 Katılımcıların görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik görsel akıl yürütmelerinin karşılaştırılması	220

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Düşünme ve düşünme biçimleri için bir model	10
Şekil 2. Matematiksel düşünmenin işleyiş yapısı	11
Şekil 3. Matematiksel düşünmenin oluşum süreci.....	12
Şekil 4. Görsel çıkarımsal kavramsal akıl yürütme çerçevesine yönelik bir problem	18
Şekil 5. Görsel akıl yürütmeye yönelik kavramsal çerçeve	19
Şekil 6. Görsel akıl yürütme ile ilişkili bir problem	20
Şekil 7. Görsel temsil örnekleri.....	22
Şekil 8. Görselleştirmenin tanımına yönelik bir görsel.....	24
Şekil 9. Görselleştirme, oluşturma ve muhakeme arasındaki ilişkiler	33
Şekil 10. Araştırmanın deseni	53
Şekil 11. Sözel özelleştirmeye yönelik katlama problemi	62
Şekil 12. Görsel özelleştirmeye yönelik saat problemi	63
Şekil 13. Görsel özelleştirmeye yönelik alan problemi	63
Şekil 14. Sözel genellemeye yönelik küp problemi	64
Şekil 15. Sözel genellemeye yönelik çokgen problemi	65
Şekil 16. Görsel genellemeye yönelik küp problemi	65
Şekil 17. Görsel genellemeye yönelik zarf problemi	66
Şekil 18. Görsel genellemeye yönelik açılı problemi.....	66
Şekil 19. Sözel varsayımda bulunmaya yönelik resim problemi	67
Şekil 20. Sözel varsayımda bulunmaya yönelik üçgende alan problemi	67
Şekil 21. Sözel varsayımda bulunmaya yönelik köşegen problemi	68
Şekil 22. Sözel varsayımda bulunmaya yönelik üçgende açılı problemi	68
Şekil 23. Görsel varsayımda bulunmaya yönelik karton problemi	69
Şekil 24. Görsel varsayımda bulunmaya yönelik eşkenar dörtgen problemi	69
Şekil 25. Görsel varsayımda bulunmaya yönelik alan problemi.....	70
Şekil 26. Sözel doğrulama ve ikna etmeye yönelik satranç problemi.....	70
Şekil 27. Görsel doğrulama ve ikna etmeye yönelik dikdörtgen problemi	71
Şekil 28. Görsel doğrulama ve ikna etmeye yönelik kareler problemi	72
Şekil 29. Veri toplama süreci.....	75
Şekil 30. Verilerin düzenlenme ve analiz sürecine ait bir örnek.....	76
Şekil 31. BÖ2'nin sözel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsiller	83
Şekil 32. BÖ4'ün sözel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsiller	83

Şekil 33. BÖ7'nin sözel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil	83
Şekil 34. BÖ8'in sözel özelleştirme problemi için oluşturduğu görsel temsiller.....	84
Şekil 35. BÖ1'in görsel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil	88
Şekil 36. BÖ4'ün görsel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsiller	88
Şekil 37. BÖ5'in görsel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil	88
Şekil 38. BÖ7'nin görsel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsiller	89
Şekil 39. BÖ8'in görsel özelleştirme problemini çözme süreci.....	89
Şekil 40. BÖ1 ve BÖ2'nin sözel genelleme problemini çözme süreçlerinden kesitler	92
Şekil 41. BÖ3'ün sözel genelleme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil	92
Şekil 42. BÖ8'in sözel genelleme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil	92
Şekil 43. BÖ4'ün sözel genelleme problemini çözme süreci	93
Şekil 44. BÖ5'in sözel genelleme problemini çözme sürecinden bir kesit.....	93
Şekil 45. BÖ8'in görsel genelleme problemini çözme sürecinden bir kesit	95
Şekil 46. BÖ2'nin görsel genelleme problemini çözme sürecinden bir kesit	96
Şekil 47. BÖ4'ün görsel genelleme problemini çözme sürecinden bir kesit	96
Şekil 48. BÖ4'ün görsel genelleme problemini çözme süreci	97
Şekil 49. BÖ2 ve BÖ6'nın sözel varsayımda bulunma problemi için oluşturdukları görsel temsiller	99
Şekil 50. BÖ3'ün sözel varsayımda bulunma problemi için oluşturduğu görsel temsiller....	99
Şekil 51. BÖ4'ün sözel varsayımda bulunma problemi için oluşturduğu görsel temsiller....	99
Şekil 52. BÖ7'nin sözel varsayımda bulunma problemi için oluşturduğu görsel temsiller.	100
Şekil 53. BÖ8'in sözel varsayımda bulunma problemi için oluşturduğu görsel temsiller...	100
Şekil 54. BÖ1'in görsel varsayımda bulunma problemi için oluşturduğu görsel temsiller .	102
Şekil 55. BÖ2'nin görsel varsayımda bulunma problemi için oluşturduğu görsel temsiller	104
Şekil 56. BÖ4'ün görsel varsayımda bulunma problemi için oluşturduğu görsel temsiller	105
Şekil 57. BÖ7'nin görsel varsayımda bulunma problemi için oluşturduğu görsel temsiller	105
Şekil 58. BÖ5 ve BÖ6'nın oluşturdukları görsel temsiller	106
Şekil 59. BÖ7'nin sözel doğrulama ve ikna etme problemi için oluşturduğu görsel temsil	107
Şekil 60. BÖ4'ün sözel doğrulama ve ikna etme problemini çözüm süreci	107
Şekil 61. BÖ8'in sözel doğrulama ve ikna etme problemini çözüm süreci	109
Şekil 62. AÖ1 ve AÖ5'in sözel özelleştirme problemi için oluşturdukları çizim temsilleri	112
Şekil 63. AÖ2 ve AÖ6'nın sözel özelleştirme problemi için oluşturdukları görsel temsiller	113
Şekil 64. AÖ7 ve AÖ8'in sözel özelleştirme problemi için oluşturdukları görsel temsiller	113

Şekil 65. AÖ5'in görsel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil	117
Şekil 66. AÖ1'in görsel özelleştirme problemini çözme süreci.....	118
Şekil 67. AÖ7'nin görsel özelleştirme problemini çözme süreci	119
Şekil 68. AÖ8'in görsel özelleştirme problemini çözme süreci.....	119
Şekil 69. AÖ1 ve AÖ2'nin sözel genelleme problemini çözme süreçlerinden kesitler	121
Şekil 70. AÖ8'in sözel genelleme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil	121
Şekil 71. AÖ5'in sözel genelleme problemini çözme süreci	121
Şekil 72. AÖ4'ün sözel genelleme problemini çözme sürecinden bir kesit.....	122
Şekil 73. AÖ7'nin sözel genelleme problemini çözme süreci	122
Şekil 74. AÖ2'nin görsel genelleme problemini çözme sürecinden bir kesit.....	125
Şekil 75. AÖ4'ün görsel genelleme problemini çözme sürecinden bir kesit.....	126
Şekil 76. AÖ5'in görsel genelleme problemini çözme sürecinden bir kesit.....	126
Şekil 77. AÖ6'nın görsel genelleme problemini çözme sürecinden bir kesit.....	126
Şekil 78. AÖ8'in görsel genelleme problemini çözme süreci.....	127
Şekil 79. AÖ2 ve AÖ6'nın sözel varsayımda bulunma problemi için oluşturdukları görsel temsiller	130
Şekil 80. AÖ1'in sözel varsayımda bulunma problemi için oluşturduğu görsel temsil.....	130
Şekil 81. AÖ8'in sözel varsayımda bulunma problemi için oluşturduğu görsel temsiller ..	131
Şekil 82. AÖ7'nin sözel varsayımda bulunma problemi için oluşturduğu görsel temsil.....	131
Şekil 83. AÖ7'nin görsel varsayımda bulunma problemini çözme süreci.....	136
Şekil 84. AÖ1 ve AÖ6'nın oluşturdukları görsel temsiller.....	137
Şekil 85. AÖ7'nin sözel doğrulama ve ikna etme problemini çözüm süreci.....	138
Şekil 86. AÖ8'in sözel doğrulama ve ikna etme problemini çözüm süreci.....	140
Şekil 87. AÖ4'ün görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözümü	143
Şekil 88. AÖ5'in görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözümü	144
Şekil 89. AÖ3 ve AÖ6'nın görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözümleri	144
Şekil 90. AÖ7'nin görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözümü.	144
Şekil 91. YÖ4 ve YÖ7'nin sözel özelleştirme problemi için oluşturdukları görsel temsiller	146
Şekil 92. YÖ8'in sözel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil.....	147
Şekil 93. YÖ2 ve YÖ5'in sözel özelleştirme problemi için oluşturdukları görsel temsiller	147
Şekil 94. YÖ1 ve YÖ6'nın sözel özelleştirme problemi için oluşturdukları görsel temsiller	147
Şekil 95. YÖ3'ün sözel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil	148

Şekil 96. YÖ1'in görsel özelleştirme problemini çözme süreci.....	152
Şekil 97. YÖ4 ve YÖ7'nin görsel özelleştirme problemi için oluşturdukları görsel temsiller	153
Şekil 98. YÖ3'ün görsel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil	154
Şekil 99. YÖ5'in görsel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil	154
Şekil 100. YÖ1'in sözel genelleme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil	155
Şekil 101. YÖ3'ün sözel genelleme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil	156
Şekil 102. YÖ7'nin sözel genelleme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil	156
Şekil 103. YÖ8'in sözel genelleme problemini çözüm süreci	158
Şekil 104. YÖ4'ün görsel genelleme problemini çözüm süreci	159
Şekil 105. YÖ8'in görsel genelleme problemini çözüm süreci	160
Şekil 106. YÖ1'in sözel varsayımda bulunma problemine yönelik oluşturduğu çizimler ..	162
Şekil 107. YÖ2'nin sözel varsayımda bulunma problemine yönelik oluşturduğu çizimler	163
Şekil 108. YÖ5'in sözel varsayımda bulunma problemine yönelik oluşturduğu çizimler ..	163
Şekil 109. YÖ4'ün sözel varsayımda bulunma problemini çözme süreci	164
Şekil 110. YÖ7'nin sözel varsayımda bulunma problemini çözme süreci	164
Şekil 111. YÖ8'in sözel varsayımda bulunma problemini çözme süreci	164
Şekil 112. YÖ2'nin görsel varsayımda bulunma problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil	166
Şekil 113. YÖ8'in görsel varsayımda bulunma problemini çözme süreci.....	167
Şekil 114. YÖ3'ün görsel varsayımda bulunma problemini çözme süreci.....	168
Şekil 115. YÖ1 ve YÖ4'ün oluşturdukları görsel temsiller.....	170
Şekil 116. YÖ7'nin sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil.....	171
Şekil 117. YÖ8'in sözel doğrulama ve ikna etme problemini çözüm süreci	172
Şekil 118. YÖ7'nin görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözümü	175
Şekil 119. YÖ3'ün görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözümü	176
Şekil 120. YÖ6'nın görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözümü	176
Şekil 121. SÖ2'nin sözel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil	178
Şekil 122. SÖ6'nın sözel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil	179
Şekil 123. SÖ4 ve SÖ7'nin sözel özelleştirme problemi için oluşturdukları görsel temsiller	179
Şekil 124. SÖ1 ve SÖ6'nın görsel özelleştirme problemine yönelik oluşturdukları görsel temsiller	183

Şekil 125. SÖ1'in sözel genelleme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil.....	186
Şekil 126. SÖ5 ve SÖ8'in sözel genelleme problemine yönelik oluşturdukları görsel temsiller	187
Şekil 127. SÖ7'nin sözel genelleme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil.....	187
Şekil 128. SÖ1 ve SÖ2'nin görsel genelleme problemi için oluşturdukları görsel temsiller	190
Şekil 129. SÖ3 ve SÖ4'ün görsel genelleme problemi için oluşturdukları görsel temsiller	190
Şekil 130. SÖ5 ve SÖ6'nın görsel genelleme problemi için oluşturdukları görsel temsiller	190
Şekil 131. SÖ7 ve SÖ8'in görsel genelleme problemi için oluşturdukları görsel temsiller	191
Şekil 132. SÖ2 ve SÖ7'nin oluşturdukları görsel temsiller	194
Şekil 133. SÖ3 ve SÖ6'nın oluşturdukları görsel temsiller	194
Şekil 134. SÖ4'ün yaptığı model ve çizimler	195
Şekil 135. SÖ2 ve SÖ6'nın oluşturdukları ek çizimler	198
Şekil 136. SÖ4'ün oluşturduğu ek çizimler	199
Şekil 137. SÖ4'ün görsel varsayımda bulunma problemine yönelik çözümü	199
Şekil 138. SÖ8'in görsel varsayımda bulunma problemine yönelik çözümü	201
Şekil 139. SÖ1 ve SÖ2'nin oluşturdukları görsel temsiller	202
Şekil 140. SÖ4 ve SÖ8'in oluşturdukları görsel temsiller	203
Şekil 141. SÖ7'nin oluşturduğu görsel temsiller ve çözüm süreci	203
Şekil 142. SÖ6'nın model olarak kullandığı satranç tahtası	204
Şekil 143. SÖ1'in görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözümü	209
Şekil 144. SÖ6'nın görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözümü	209
Şekil 145. SÖ2'nin görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözümü	210
Şekil 146. SÖ5'in görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözümü	210

ÖZET

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİ PROBLEMLERİNDE GÖRSEL AKIL YÜRÜTME BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

Bu araştırmada ortaokul öğrencilerinin geometri problemlerinde görsel akıl yürütme becerilerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Öğrencilerin mevcut bilgi ve deneyimleri çerçevesinde var olan görsel akıl yürütme becerilerini incelemek amaçlandığından dolayı araştırmada iç içe geçmiş çoklu durum çalışması deseni tercih edilmiştir. Araştırmanın katılımcılarını, maksimum çeşitlilik örnekleme kullanılarak seçilen 32 öğrenci oluşturmaktadır. Araştırmada her sınıf düzeyi farklı bir durum olarak ele alındığı için her sınıf düzeyinden 8 öğrenci ile çalışılmıştır. Her bir durumda yer alan 8'er öğrenci ise öğrenim gördüğü okul ve başarı düzeyi bakımından çeşitlilik göstermektedir. Veri toplama araçları olarak, araştırmacı tarafından geliştirilen Geometri Problemi Çözme Testi, klinik mülakat kayıtları ve gözlem notları kullanılmıştır. Araştırma kapsamındaki öğrencilerin geometri problemlerini çözerken kullandıkları görsel temsilleri belirlemek, görsel temsiller ile yaptıkları eylemleri ve akıl yürütme süreçlerini detaylı ortaya çıkarabilmek amacıyla klinik mülakatlar yapılmış ve gözlem notları tutulmuştur. Eş zamanlı olarak toplanan bu verilerin analizinde bütüncül bir yaklaşım izlenmiştir. Analizler yapılırken içerik analizi ve çapraz durum analizi tekniklerinden faydalanılmıştır. Veriler, Geçici ve Türnüklü'nün (2021) önerdiği kavramsal çerçeve doğrultusunda analiz edilmiştir. Araştırmada, katılımcıların genellikle çizim, tablo veya model görsel temsillerini tercih ettikleri görülmüştür. Kullanılan görsel temsillerin başında ise çizim yapma gelmektedir. Bunun yanı sıra çizim yerine model kullanan öğrencilerin genellikle matematiksel düşünme bileşenlerini sergileme açısından daha başarılı oldukları görülmüştür. Farklı temsil türlerini birlikte kullanan öğrencilerin matematiksel düşünme bileşenlerini daha rahat sergiledikleri belirlenmiştir. Görsel akıl yürütme sürecinde görsel temsil kullanmanın matematiksel düşünme için tek başına yeterli olmadığı, kullanılan görsel temsiller üzerinde görselleştirme yapmanın önemli olduğu da ortaya çıkmıştır. Bu durumun tersi olarak görsel temsil kullanmadan görselleştirme yapan katılımcıların da problemi çözmekte zorlandıkları görülmüştür. Dolayısıyla problem çözmede farklı görsel temsiller yoluyla görselleştirme yapmanın kilit bir beceri olduğu söylenebilir.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel düşünme, görselleştirme, görsel akıl yürütme, görsel temsil.

ABSTRACT

INVESTIGATION OF MIDDLE SCHOOL STUDENTS' VISUAL REASONING SKILLS IN GEOMETRY PROBLEMS

It was aimed to investigate middle school students' visual reasoning skills in geometry problems in this research. Since it was aimed to examine the students' visual reasoning skills existing within the scope of their available knowledge and experience, an embedded multiple-case study design was preferred in the research. The participants of the research were 32 students who were selected using a maximum variation sampling. Because each class level was considered a different case in the research, it was studied with 8 students from each class level. Eight students in each case vary in terms of their school of study and levels of success. As data collection tools, the Geometry Problem Solving Test developed by the researcher, clinical interview records, and observation notes were used. Clinical interviews were conducted and observation notes were taken to specify the visual representations that the students in this research used while solving geometry problems and to reveal the actions they performed with the visual representations and the reasoning processes in detail. An integrated approach was pursued in the analysis of these data collected synchronously. In data analysis, content analysis and cross-case analysis techniques were used. The data were analysed in accordance with the conceptual framework proposed by Geçici and Türnüklü (2021). In the research, it was seen that the participants generally preferred drawing, tables, or model visual representations. Drawing is the primary visual representation used. Moreover, it was revealed that the students who used a model instead of drawing were generally more successful in exhibiting mathematical thinking components. It was detected that the students who used various representation types together exhibited mathematical thinking components more comfortably. It was concluded that using visual representation alone was not enough for mathematical thinking during the visual reasoning process and that it was also essential to make visualization on the visual representation used. As opposed to this situation, it was found that the participants who made visualization without using visual representation also had difficulty solving the problem. Therefore, it can be stated that it is a key ability to make visualization through different visual representations in problem-solving.

Keywords: Mathematical thinking, visualization, visual reasoning, visual representation.

BÖLÜM I

GİRİŞ

1.1. Problem Durumu

İlköğretimde matematik öğretiminin amacı, bireylerin derin bir matematik bilgisine sahip olmalarından ziyade, onların matematiksel düşünme becerilerini kazanmalarını sağlamaktır. Bu konu ile ilgili Umay (2003), matematiğin sadece sayıları ve işlemleri öğretmekle kalmadığını, düşünme, olaylar arasında bağ kurma, akıl yürütme, tahminde bulunma, problem çözme gibi önemli beceriler kazandırdığını ifade etmektedir. Güler (2020) de matematik yapmanın, formülleri kullanarak benzer sayı problemlerini çözmenin ötesinde kavramsal anlamının ve matematiksel düşünmenin gelişimini sağlamak olduğunu belirtmektedir.

İnsanların matematiksel düşünebilmek için sayıları ve günümüz toplumunda yaygın olan cebir, grafik ve hesap makineleri gibi diğer matematiksel araçları kullanarak miktarları, ilişkileri ve alan gibi kavramları temsil etmeyi öğrenmesi gerektiği ifade edilmektedir (Nunes, 2014). Bununla birlikte, matematiğin hayatın bir parçası olduğunun unutulmaması ve eğitim sürecindeki her fırsatın matematiksel düşünmenin gelişimi için değerlendirilmesi gerektiği vurgulanmaktadır (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018a). National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000), değişen dünya şartları için matematiği anlama ve kullanabilme ihtiyacının öneminin giderek artacağını vurgulamış ve aynı zamanda birçok meslek dalında matematiksel düşünme ve problem çözmeye daha fazla ihtiyaç duyulduğunu belirtmiştir.

Matematiksel düşünmenin, problem çözme ile ilişkili olduğu ve problem çözme sırasında kullanıldığı birçok araştırmacı tarafından ifade edilmektedir (Burton, 1984; Henderson vd., 2003; Polya, 1973; Schoenfeld, 2016). Stacey (2006) de gerçek yaşam problemlerinin çözümünde, kaçınılmaz olarak kullanılan matematiksel düşünmenin matematik eğitiminde önemli bir yere sahip olduğunu ve bu nedenle matematik eğitiminin önemli amaçları arasında yer aldığını vurgulamaktadır. Benzer şekilde Alkan ve Bukova-Güzel (2005), insanların yaşamlarının her aşamasında karşılaştıkları olay ve olguları çözümlemede, farkında olarak ya da olmayarak, matematiksel düşünmeyi kullandıklarını belirtmektedirler. Ayrıca matematiksel düşünmenin sadece içinde sayıların ve soyut matematiksel kavramların yer aldığı durumlarda değil, günlük yaşamın içinde de gerçekleştirilebilecek bir düşünme biçimi olduğu düşünülmektedir (Yeşildere ve Türnüklü, 2007). Sonuç olarak matematik öğrenmenin, bir takım temel matematiksel kavramları öğrenmekten ve bazı işlemsel becerileri kazanmaktan çok daha fazlası olduğu söylenebilir.

Matematik eğitiminde önemli olan, bireyin yaşama uyum sağlayabilmesi için matematiksel düşünebilmesini sağlamaktır.

Liu (2003, s. 417) matematiksel düşünmeyi, “tahmin edebilme, tümevarım, tümdengelim, özelleştirme, genelleme, analogi, formal ve informal olmayan akıl yürütme, doğrulama ve benzeri karmaşık süreçlerin bir birleşimi” olarak tanımlamıştır. Liu’nun (2003) tanımından yola çıkarak akıl yürütmenin matematiksel düşünme için önemli bir süreç olduğu söylenebilir. “Matematiksel akıl yürütme, eldeki bilgilerden hareketle matematiğin kendine özgü araç (semboller, tanımlar, ilişkiler, vb.) ve düşünme tekniklerini (tümevarım, tümdengelim, karşılaştırma, genelleme, vb.) kullanarak yeni bilgiler elde etme süreci olarak düşünülmektedir” (MEB, 2013, s. 5). Ball ve Bass’a (2003) göre akıl yürütme, matematiksel bilgileri ve yapıları kullanarak iddialar oluşturup yeni bir yapılandırma ortaya çıkarmayı temel alan bir düşünme sürecidir. Benzer şekilde akıl yürütmeyi matematiksel düşünmenin bir parçası olarak ele alan Artz ve Yaloz-Femina (1999), akıl yürütmenin geçerli sonuçlara ve genellemelere ulaşmayı kapsadığını ifade etmişlerdir. Lithner (2000, s. 166) ise akıl yürütme terimini, “varsayımda bulunmak ve sonuçlara ulaşmak için benimsenen bir düşünme biçimi” olarak tanımlar.

Uzun zamandan beri araştırmacılar (Brodie, 2010; Fonseca, 2018; Harel ve Sowder, 1998; Jeannotte ve Kieran, 2017; Kolloosche, 2021; Stylianides, 2009; Umay, 2003) ve bazı kuruluşlar (MEB, 2009, 2013, 2018a, 2018b; NCTM, 2000, 2009, 2014) matematiksel akıl yürütmenin önemini ve buna yönelik farklı sınıf seviyelerindeki uygulamaların gerekliliğini vurgulamaktadır. Aynı zamanda akıl yürütme, matematik yapmanın kilit bir bileşeni olarak ifade edilmektedir (Conner vd., 2014; Güler, 2020; Kolloosche, 2021; Stacey, 2006). Brodie (2010) ise matematiksel akıl yürütmeyi matematiksel bir aktivitenin anlamlandırılması için bir araç olarak görmektedir. NCTM (2000) de akıl yürütmeyi matematik öğretiminde temel bir süreç becerisi olarak ele almaktadır. Bunun yanında öğrencilerin öğrenmelerini geliştirmek için, düşüncelerinin ve akıl yürütmelerinin gelişimsel durumunun anlaşılması gerektiği vurgulanmaktadır (Cai, 2003).

Literatür incelendiğinde matematik eğitimi ile ilgili tümdengelimsel akıl yürütme, tümevarımsal akıl yürütme, sembolik akıl yürütme, cebirsel akıl yürütme, orantısal akıl yürütme, geometrik akıl yürütme, istatistiksel akıl yürütme, nicel akıl yürütme, analogik akıl yürütme, uyarlanabilir akıl yürütme ve yaratıcı akıl yürütme gibi pek çok akıl yürütme çeşidinden bahsedildiği görülmektedir (Battista, 2007; Ben-Zvi, 2014; Bergqvist ve Lithner, 2012; Blanton ve Kaput, 2005; Conner vd., 2014; Fonseca, 2018; Healy ve Hoyles, 1999; Hoyles vd., 2001; Jeannotte ve Kieran, 2017; Kolloosche, 2021; Lithner, 2008; Smith ve

Thompson, 2007). Araştırmacıların çalışma konuları doğrultusunda akıl yürütme için bu şekilde farklı sınıflandırmalara gittikleri söylenebilir. Akıl yürütme, matematik öğretiminde önemli olması sebebiyle uzun yıllardır matematik eğitimcileri için başlıca araştırma konuları arasında yer almıştır. Öz (2017) matematiksel akıl yürütme becerisinin yapısını, nasıl geliştirileceğini ve türlerini araştırmanın, matematik öğretiminin ilerlemesine hizmet edeceğinden bahsetmektedir. Bu çalışmada akıl yürütme çeşitlerinden biri olan ve farklı araştırma alanlarında da kullanılan görsel akıl yürütme becerisi üzerine odaklanılacaktır. Görsel akıl yürütme becerisinin; matematikçiler, bilim adamları, mühendisler, mimarlar, bilgisayar bilimcileri, doktorlar, sanatçılar ve diğer birçok meslek dalı için önemli olduğu ifade edilmektedir (Karrass, 2012).

Karrass'a (2012, s. 27) göre görsel akıl yürütme; "görsellerle (grafik, diyagram, resim vb.) sunulan bilişsel yapıyı yaratmak veya gözlemlemek, bilişsel yapının bileşenlerini ve içsel yapılarını algılamak, bu algıları yansıtmak, sezgisel olarak yeni hipotezler üretmek ve bunları doğrulamak, düşünceleri iletmek ve bağlantıları yapmaktır." Aynı zamanda görsel akıl yürütme, görseller bakımından problemleri, kavramları, nesneleri veya süreçleri anlama ve kavrama ile ilgilidir (Abd Hamid, 2017). Frazee (2018) ise görsel akıl yürütmeyi kanıta ve varsayımlara dayalı sonuçlar çıkarmak için uzamsal nesneleri, temsilleri veya diyagramları inceleme, değiştirme veya analiz etme süreci olarak düşünmektedir. Buradan hareketle görsel akıl yürütmenin gerçekleşmesi için görseller ile etkileşimde bulunulması ve bir takım zihinsel aktivitelerin yapılmasının gerekli olduğu sonucu çıkartılabilir.

Literatürde görsel akıl yürütme ile iç içe geçtiği ifade edilen diğer bir terim görselleştirme (Hershkowitz vd., 2001; Natsheh ve Karsenty, 2014). Görselleştirme, "matematiksel problemler, prensipler veya kavramların elle çizilmiş veya bilgisayarla üretilmiş geometrik veya grafik gösterimini oluşturma ya da kullanma sürecidir" (Zimmerman ve Cunningham, 1991, s. 1). Zazkis ve diğerlerine (1996) göre görselleştirme, bir bireyin içsel bir yapı ile duyular aracılığıyla bir şey arasında bağlantı kurduğu bir eylemdir ve bu eylem, bireyin dışsal olarak algıladığı nesneler veya olaylarla ilişkilendirdiği nesnelerin veya süreçlerin herhangi bir zihinsel inşasından oluşabilir.

Presmeg (2006), okul öncesi eğitimden başlayarak her öğretim düzeyinde, soyut kavramların ve sembolik temsillerin görsel temsillerle somutlaştırılıp daha iyi anlaşılmasını sağlamak üzere, görselleştirme sürecinden yararlanılabileceğini ifade etmektedir. Benzer bir şekilde Lehning (2015), küçük bir çizim yardımı ile bir takım ispatların, kavramların ve fikirlerin anlaşılmasının daha kolay olacağı görüşünü savunmaktadır. Makina ve Wessels'e göre (2009) matematikçiler sayılarda, uzayda, bilimde, bilgisayarlarda ve hayal gücünde

örüntüler ararlar. Bu örüntüleri görselleştirmenin en etkili yolunu bulmaya çalışmak ve görselleştirmeyi bir anlama aracı olarak yaratıcı bir şekilde kullanmayı öğrenmek doğaldır (Makina ve Wessels, 2009).

Arcavi (2003, s. 217) ise görselleştirmenin tanımını, “bilgiyi betimlemek ve iletmek, önceden bilinmeyen fikirleri geliştirmek ve düşünmek ve anlayışları ilerletmek amacıyla, zihnimizde, kâğıt üzerinde veya teknolojik araçlarla resimlerin, imajların, diyagramların oluşturulması, yorumlanması, kullanılması ve üzerinde düşünme becerisi, süreci ve ürünü” şeklinde yapmaktadır. Bu geniş süreç ve düşünme seviyesinin ileri boyutunda, üst düzey düşünme görevlerini yapmak için resim, görüntü veya diyagramları etkin bir şekilde kullanmak olarak tanımlanabilecek görsel akıl yürütme kavramı olduğu ifade edilmektedir (Natsheh ve Karsenty, 2014). Karrass (2012) da benzer şekilde görselleştirmenin imajları algılamak, manipüle etmek ve analiz etmekle ilgili olduğundan dolayı görselleştirmenin, görsel veya diyagramatik akıl yürütmenin bir bileşeni olduğunu düşünmektedir. Matematikte görselleştirme ile bir ürün elde etmek yerine, anlamayı sağlayabilmek için görselleştirmenin bir araç olarak kullanılmasının hedeflendiği söylenebilir (Gülşen-Turgut, 2019). Gunčaga ve Žilková (2019) da görselleştirmenin matematikteki bilişsel sürecin önemli bir parçası olduğundan bahsetmektedirler. Bu görüşler çerçevesinde görselleştirmenin bir takım görsel araçlarla gerçekleştirilen bir süreç olduğu ve görsel akıl yürütmenin bu süreci kapsayan bir düşünme biçimi olduğu söylenebilir.

Arcavi (2015), görselleştirmenin son yıllarda matematik öğretme ve öğrenmede çok merkezi ve aktif bir çalışma alanı haline geldiğini belirtmektedir. Matematik eğitiminde görsel akıl yürütme konusuna odaklanan çalışmalara bakıldığında ise genellikle görsel ispat çalışmaları (Akkan vd., 2018; Bardelle, 2010; Gülşen, 2012, Karrass, 2012) ile fonksiyon ve türev içeren problemleri çözme (Abd Hamid, 2017; Natsheh ve Karsenty, 2014) bağlamında araştırmaların yapılması dikkat çekmektedir. Bunun yanında görsel akıl yürütme stratejilerini anlamayı ve tanımlamayı amaçlayan bir çalışma (Russell, 1997) da bulunmaktadır. Yapılan çalışmaların üniversite öğrencileri veya öğretmen adayları gibi üst yaş grubundaki katılımcılarla yapıldığı, ortaokul öğrencilerinin problem çözerken görsel akıl yürütme becerilerine yeteri kadar odaklanılmadığı görülmüştür. Yine matematiğin önemli bir dalı olarak kabul edilen geometri alanında bu tür bir çalışmaya hiç rastlanmamıştır. Matematiksel düşünmenin ve problem çözme becerilerinin gelişimine katkı sağlayan alanlardan birinin de geometri (Yıldırım ve Yavuzsoy-Köse, 2018) olduğu düşünüldüğünde, ortaokul öğrencilerinin geometri problemlerini çözerken yürüttükleri görsel akıl yürütme becerilerinin araştırılması gerektiği düşünülmektedir.

1.2. Araştırmanın Amacı ve Önemi

Öğrencilerin somut model, şekil, resim, grafik, tablo, sembol gibi farklı görsel temsil biçimlerini kullanarak matematiksel düşüncelerini ifade etmeleri matematiksel iletişim becerilerini geliştirmeleri açısından önemli görülmektedir (MEB, 2013). Ayrıca görsel temsillerin problem çözme sürecinde etkili ve çözümü kolaylaştıran araçlar olabileceği de söylenebilir (Stylianou ve Silver, 2004). Matematik eğitimcileri, eğitimin farklı düzeylerinde görsel temsillerin matematik öğretiminin doğal bir unsuru olmasını ve matematik öğretiminde daha fazla kullanılmasını önermektedir (Gutiérrez, 1996). Bu doğrultuda öğretmenlerin, matematik derslerinde görselleştirme yapan öğrencilerin yaşadıkları güçlüklerin üstesinden gelmelerine ve öğrencilerin görselleştirmenin güçlü yanlarından yararlanmalarına yardımcı olmaları gerektiği öne sürülmektedir (Presmeg, 1985'ten akt. Clements, 2014).

Öğrencinin dikkatini çekmede, öğrenciyi güdülemede, öğrenmeyi somutlaştırarak anlamlı kılmada, öğrencinin kendi bilgilerini organize etmesinde ve kavramların somut ve soyut ifadelerinin ilişkilendirilmesinde, görselleştirme yararlı bir yaklaşım olarak karşımıza çıkmaktadır (Işık ve Konyalıoğlu, 2005). Ayrıca görselleştirmenin bir konuyu görsel temsiller bakımından anlamının ötesine geçerek matematik öğretimi için önemli olduğu birçok araştırmacı tarafından ifade edilmektedir (Presmeg, 2006; Rivera, 2013; Van Garderen vd., 2014). Matematik derslerinde görselleştirme yaklaşımının kullanılması, öğrencilerin soyut kavram ve yapılara farklı bakış açılarıyla bakmasına olanak sağlamaktadır (Delice ve Sevimli, 2010).

Görsel temsillerle akıl yürütmeyi içeren görsel akıl yürütme; dilbilimsel veya cebirsel araçlarla değil, diyagramların ve imgelerin kullanımıyla görselleştirilen kavram ve fikirlerin anlaşılmasıyla ilgilidir (Anderson ve McCartney, 1997). Fischbein (1987) görsel akıl yürütmenin, sadece anlamlı yapılarda veriyi organize etmede değil, aynı zamanda çözümün analitik gelişimini yönlendirmede önemli bir faktör olduğunu belirtmektedir. Hoffmann (2007) ise görsel akıl yürütmeyi, düşünmeyi kolaylaştırma süreci olarak tanımlar ve bu çeşit akıl yürütmenin karar verme ve bilgiyi geliştirme ile ilgili olduğunu ifade eder. Bu doğrultuda öğretim ve öğrenme yöntemlerinin görsel akıl yürütmeyi ve görsel düşünmeyi destekleyen araçlarla donatılması önemli görülmektedir (Abd Hamid, 2017).

Görsel akıl yürütme, günümüz matematikçilerinin çalışmalarında genel olarak bilinenden çok daha önemli bir rol oynamaktadır (Dreyfus, 1991). Görsel akıl yürütme, diyagramlar tarafından desteklendiğinden dolayı sözel akıl yürütmeden farklıdır. Ancak bu onun sözel akıl yürütmeden tamamen farklı olduğu anlamına gelmez, aksine görsel akıl yürütme sözel akıl yürütmeyi tamamlar (Diezmann, 2005'ten akt. Pantziara vd., 2009).

Uzamsal ve görsel akıl yürütmenin, ilişkileri görsel olarak anlama, manipüle etme, yeniden düzenleme veya yorumlama ile ilgili zihinsel becerileri içerdiği düşünülmektedir (Booth ve Thomas, 1999).

Bazı araştırmacılar (Abdullah vd., 2012; Alcock ve Simpson, 2004; Stylianou ve Dubinsky, 1999; Trigueros ve Martínez-Planell, 2010) görsel akıl yürütmeyi matematiksel kavramların derinlemesine anlaşılması ile de ilişkilendirmişlerdir. Dolayısıyla matematikte anlamayı sağlamada görsel akıl yürütmeden yararlanılabilir. İlave olarak Karrass (2012) görsel akıl yürütme becerilerimizin sadece “zihnimizin gözünde” görsel imgeleri görme ve oluşturma yeteneğimizle değil, aynı zamanda kavrama anlamında görme yeteneğimizle de ilgili olduğunu söylemektedir. Bunun yanında görsel akıl yürütme keşifle de ilişkilidir (Zahner ve Corter, 2010). Keşfetmeye dayalı yapılan matematik etkinliklerinde görsel akıl yürütmenin bu özelliği kullanılabilir. Ayrıca görsel akıl yürütmenin ve görselleştirmenin akademik başarı üzerindeki etkisini inceleyen araştırmalar, çeşitli konularda ve birçok eğitim seviyesi için genellikle olumlu sonuçlar göstermiştir (Abd Hamid, 2017).

Gülşen (2012) yaptığı literatür taraması sonucunda, görselleştirmeye ve görsel akıl yürütmeye matematik eğitimcilerinin önem verdiğini ve görsel temsillerin matematikte anlamayı kolaylaştıran etmenler oldukları konusunda hem fikir olduklarını ifade etmektedir. Stylianou (2000) ise görselleştirme ve görsel akıl yürütmenin eğitim alanında yapılan çalışmalarda araştırma konuları yapılmalarına rağmen, öğrencilerin görsel akıl yürütmede zorluklarla karşılaşmalarının ve bundan kaçınma eğiliminde olmalarının dışında çok fazla bilgiye sahip olunmadığını belirtmektedir. Bundan dolayı problem çözmede görsel temsillerin kullanımının yanı sıra görsel temsillerin kullanımıyla ilişkili bilişsel zorlukları daha iyi anlamamız gerektiğini vurgulamaktadır. Bu çalışmada öğrencilerin bilişsel süreçlerinin de analiz edilmesi hedeflendiğinden dolayı, araştırmanın matematik eğitimine önemli katkıları olabileceği düşünülmektedir.

Stylianou (2000), matematikçilerin yaptıkları çalışmalarda görsel akıl yürütmenin gerekliliğini ve kullanışlılığını daha sık vurgulamaya başladıklarını ifade etmektedir. Natsheh ve Karsenty (2014) ise son yirmi yıllık süreçte matematik eğitimcilerinin de görselleştirme ve görsel akıl yürütme ile giderek daha fazla ilgilendiklerini belirtmektedir. Nitekim matematik eğitimi çalışmalarına baktığımızda son yıllarda görselleştirme ve görsel akıl yürütmeye yönelik yapılan araştırmaların (Abd Hamid vd., 2019; Alcock ve Simpson, 2004; Delibaş, 2020; Dongwi, 2018; Gal ve Linchevski, 2010; Gunçaga ve Žilková, 2019; Gülşen-Turgut, 2019; Makina ve Wessels, 2009; Natsheh ve Karsenty, 2014; Presmeg, 2014; Yaprak, 2019; Yılmaz ve Argun, 2018) arttığı görülmektedir. Bunun yanında görsel temsilleri başlı başına

bir araştırma konusu olarak ele alan çalışmalar da bulunmaktadır (Ahmad vd., 2010; Boonen vd., 2014; Ergen, 2018; Hegarty ve Kozhevnikov, 1999; Özsoy, 2018; Stylianou ve Silver, 2004; Van Garderen vd., 2014; Zahner ve Corter, 2010).

Yapılan çalışmaların büyük çoğunluğunda, görselleştirme ve görsel akıl yürütme kavramlarının birbirinin yerine kullanıldığı veya tamamen birbirinden bağımsız kavramlarmış gibi ele alındığı görülmüştür. Bu kavramların hem ilişkisini hem de net bir ayrımını sağlayacak araştırmaların yapılmasının matematik eğitimi açısından bir ihtiyaç olduğu söylenebilir. Aynı zamanda ortaokul öğrencilerinin geometri problemlerini çözerken görsel akıl yürütmede ne derecede yeterli olduklarının ortaya konulmaya çalışıldığı bir çalışmaya rastlanmamıştır. Dolayısıyla ortaokul öğrencilerinin geometri problemlerinde görsel akıl yürütme becerilerinin incelenmesinin literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Buradan hareketle bu araştırmada, ortaokul öğrencilerinin geometri problemlerinde görsel akıl yürütme becerilerinin incelenmesi amaçlanmıştır.

1.3. Problem Cümlesi

Bu araştırmanın amacı doğrultusunda araştırmanın problemi, “Ortaokul öğrencilerinin geometri problemlerinde görsel akıl yürütme becerilerinin rolü nedir ve nasıldır?” şeklinde belirlenmiştir. Araştırmada, bu problem ile birlikte aşağıdaki sorulara da yanıt aranmıştır:

- 1) Beşinci sınıf öğrencilerinin geometri problemlerinde görsel akıl yürütme becerilerinin rolü nedir ve nasıldır?
- 2) Altıncı sınıf öğrencilerinin geometri problemlerinde görsel akıl yürütme becerilerinin rolü nedir ve nasıldır?
- 3) Yedinci sınıf öğrencilerinin geometri problemlerinde görsel akıl yürütme becerilerinin rolü nedir ve nasıldır?
- 4) Sekizinci sınıf öğrencilerinin geometri problemlerinde görsel akıl yürütme becerilerinin rolü nedir ve nasıldır?
- 5) Ortaokul öğrencilerinin geometri problemlerinde görsel akıl yürütme becerileri sınıf düzeylerine göre nasıl farklılıklar göstermektedir?

1.4. Sınırlılıklar

Bu araştırmanın sınırlılıkları şu şekildedir:

- Araştırma süresi 2020-2021 eğitim-öğretim yılı ikinci dönemi ile sınırlıdır.
- Araştırma Afyonkarahisar il merkezinde bulunan üç farklı devlet okulunun farklı sınıf seviyelerinde öğrenim gören ortaokul öğrencileri ile sınırlıdır. Elde edilecek bulgulardan yola çıkılarak varılacak sonuçlar bu öğrenciler için geçerli olacaktır.

- Araştırmada veri toplamak için geliştirilen problem çözme testi geometri konuları ile sınırlandırılmıştır.
- Öğrencilerin görsel temsil kullanma, görselleştirme yapma ve görsel akıl yürütme süreçleri araştırmada kullanılan problemler ile sınırlıdır.

1.5. Varsayımlar

Bu araştırmada aşağıdaki varsayımların geçerli olduğu düşünülmektedir.

- Araştırma sürecinde, gönüllü katılımcı olan ortaokul öğrencileri ile yapılan klinik mülakatlarda öğrencilerin içten ve samimi cevaplar verdikleri varsayılmaktadır.
- Araştırmaya katılan öğrencilerin bilgi, düşünce ve deneyimlerini araştırma sürecine yansıttıkları düşünülmektedir.
- Klinik mülakatlarda kullanılan problemlerin uygunluğu konusunda alınan uzman görüşlerinin ve yapılan pilot çalışmanın yeterli olduğu varsayılmaktadır.
- Araştırma sürecinde kontrol altına alınamayan etkenlerden öğrencilerin eşit derecede etkilendikleri varsayılmaktadır.

1.6. Tanımlar

Görsel Temsil: Resim, diyagram veya grafik gibi bilginin görsel halini ön plana çıkaran yapılara görsel temsil denir (Gilbert, 2010).

Görselleştirme: Matematiksel problemler, prensipler veya kavramların elle çizilmiş veya bilgisayarla üretilmiş geometrik veya grafik temsillerini kullanma veya üretme sürecidir (Zimmerman ve Cunningham, 1991, s. 1).

Görsel Akıl Yürütme: Görsellerle (grafik, diyagram, resim vb.) sunulan bilişsel yapıyı yaratmak veya gözlemlemek, bilişsel yapının bileşenlerini ve içsel yapılarını algılamak, bu algıları yansıtmak, sezgisel olarak yeni hipotezler üretmek ve bunları doğrulamak, düşünceleri iletmek ve bağlantıları yapmaktır (Karrass, 2012, s. 27).

Matematiksel Düşünme: Tahmin etme, tümevarım, tümdengelim, özelleştirme, genelleme, analogi, formal ve informal olmayan akıl yürütme, doğrulama ve benzeri karmaşık süreçlerin bir birleşimidir (Liu, 2003, s. 417).

BÖLÜM II

KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

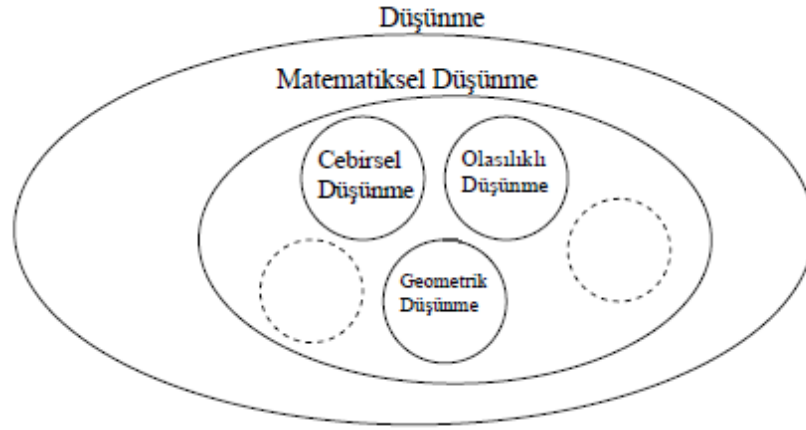
Araştırmanın bu bölümünde öncelikle matematik eğitimi için önemli görülen ve araştırma için daha geniş bir bakış açısı sağlayan matematiksel düşünme ve akıl yürütme kavramları üzerinde durulmuştur. Daha sonra ise görsel akıl yürütme kavramı ele alınmış ve araştırmanın kavramsal çerçevesini oluşturan görsel temsil, görselleştirme ve matematiksel düşünmeye geçiş bileşenlerine yer verilmiştir. Bunun yanında görsel akıl yürütmenin problem çözme ile ilişkisine ve geometrik düşünme kavramına da odaklanılmıştır. Bölümün sonunda ise araştırmada ele alınan kavramlarla yakından ilgili olan araştırmaların bir derlemesi sunulmuştur.

2.1. Matematiksel Düşünme

Düşünme, insanoğlunun çevresini oluşturan dünyayı anlaması ve kontrol altında tutması için kullandığı en önemli araçlardan birisidir (Burton, 1984). Yıldırım'a (2020, s. 60) göre ise düşünme; “bir olayı hatırlama, hayal kurma ya da gözlemlerimizi göz önünde canlandırmaktan çok bir sorunu aydınlatma, bir problemi çözme ya da beklentimize ters düşen bir gözlemi açıklama çabasında kendini gösterir.” Başka bir ifade ile düşünme, insanoğlunun problemleri çözme karşısında sergilediği davranışlarına yön veren bir beceridir (Sezer, 2019).

Çelik (2016), geçmişten günümüze insanoğlunun entelektüel ve sosyal gelişimini hedef alan tüm eğitim felsefelerinin düşünmeyi, geliştirilmesi gereken en önemli beceri olarak tanımlamasının bir tesadüf olmadığından bahsetmektedir. Bununla birlikte “aynı eğitim felsefelerinin matematiğin, bireylere okutulması gereken temel disiplinlerden biri olarak tanımlanmasında, matematiğin bireyin düşünme sistemini geliştirmeye olan katkısı ise inkâr edilemez bir gerçektir” (Çelik, 2016, s. 18). Matematik, insanlara olaylar arasında bağ kurma, akıl yürütme, tahminde bulunma, problem çözme gibi önemli beceriler kazandırarak destek olur (Umay, 2003). Matematiğin bu özellikleri göz önüne alındığında, matematiğe özgü bir düşünmeden yani matematiksel düşünmeden bahsedilebilir (Arslan ve Yıldız, 2010).

Matematiksel düşünme, matematiksel etkinliklerin doğasına bağlı olarak farklı biçimler alır ve bu da matematiğin aritmetik, cebir ve geometri gibi çeşitli dallarında farklılık göstermektedir (Caroll, 1994'ten akt. Dindyal, 2003). Dindyal (2003) bu görüşten hareketle düşünme ve matematiksel düşünme arasındaki ilişkiyi ifade eden bir model geliştirmiştir. Çelik (2007) ise bu modelden yararlanarak düşünme, matematiksel düşünme ve matematiksel düşünmenin farklı biçimleri arasındaki ilişkiyi temsil etmek için aşağıdaki modeli geliştirmiştir.



Şekil 1. Düşünme ve düşünme biçimleri için bir model (Çelik, 2007, s. 7)

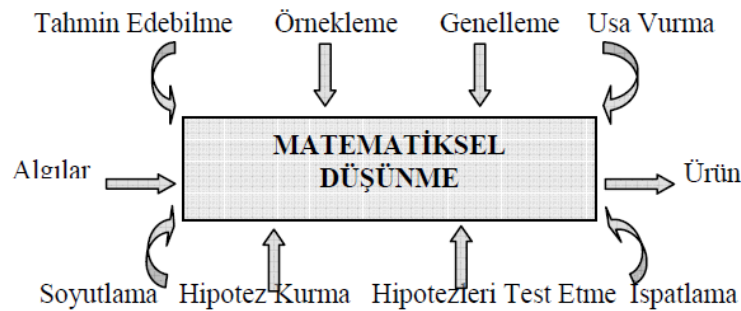
Bu modelde matematiksel düşünmenin farklı biçimlerini temsil eden cebirsel düşünme, geometrik düşünme, olasılıklı düşünme ayrı birer küme ile gösterilmiştir. Ancak bu onların birbiri ile ilişkisiz, birbirinden kopuk olduğu anlamına gelmemelidir (Çelik, 2007).

Matematiksel düşünmenin ne olduğuna yönelik olarak literatür (Burton, 1984; Harel ve Sowder, 2005; Henderson vd., 2003; Liu, 2003; Mason vd., 2010; Mayer ve Hegarty, 1996; Polya, 1973; Schoenfeld, 2016; Stacey, 2006; Tall, 1995; Yıldırım, 2020) incelendiğinde ise matematiksel düşünme ile ilgili birçok farklı tanım olduğu ancak üzerinde hem fikir olunan tek bir tanım olmadığı söylenebilir. Nitekim bazı araştırmacılar (Arık-Karamık, 2020; Lutfiyya, 1998) matematiksel düşünmenin belirli bir tanımını yapmanın zor olduğunu ifade etmektedirler. Çelik (2016) matematiksel düşünmeyi tanımlamaya ilişkin bu zorluğun, bu alanda çalışan araştırmacıların farklı bakış açılarına sahip olmalarından ve farklı terminolojileri kullanmalarından kaynaklandığını ifade etmektedir.

Isoda ve Katagiri (2012) bu durumla ilgili olarak matematiksel düşünmenin genellikle iki farklı bakış açısı ile tanımlandığını ifade etmektedirler. Bu bakış açılarına göre bazı araştırmacılar (Burton, 1984; Polya, 1973; Schoenfeld, 2016; Stacey, 2006) matematiksel düşünmeyi özelleştirme, varsayımında bulunma, genelleme ve ispat gibi matematiksel süreçler perspektifinden tanımlarken; bazı araştırmacılar (Dreyfus, 2002; Freudenthal, 1973; Tall, 1995) ise matematiksel düşünmeyi matematiksel kavramların gelişimi olarak ele almaktadırlar. Matematiksel düşünmeyi süreç perspektifinden inceleyen araştırmacılar daha çok matematiksel düşünmenin nasıl gerçekleştiği sorusuna odaklanırken, matematiksel düşünmeyi matematiksel kavramların gelişimi olarak ele alan araştırmacılar ise kavramların insan zihninde nasıl yapılandırıldığını, bu esnada meydana gelen süreçlerin neler olduğuna odaklanmaktadır (Çelik, 2016).

Diğer taraftan araştırmacıların matematiksel düşünmenin bileşenlerini ortaya koymaya çalıştıkları da görülmektedir (Arslan ve Yıldız, 2010). Örneğin; Tall (2002) matematiksel düşünmenin soyutlama, sentezleme, genelleme, modelleme, problem çözme ve ispat gibi bileşenleri kapsadığını ifade etmektedir. Polya, problem çözmeyi matematiksel düşünmenin temel bileşenlerinden biri olarak görmüştür (Isoda ve Katagiri, 2012). Problem çözme ve matematiksel düşünme arasındaki ilişki hakkında benzer görüşlere sahip olan Schoenfeld (2016), matematiksel düşünmeyi bakış açısı ve üstbilgi kavramları ile ilişkilendirmiştir. Mason ve arkadaşları (1985) da matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma, doğrulama ve ikna etme bileşenlerini incelemişlerdir. Stacey (2006) matematiksel düşünmenin “özel durumlar üzerinde çalışma ve genelleme” ve “varsayımda bulunma ve ispat” şeklinde iki ardışık süreç olduğundan bahsetmektedir.

Alkan ve Bukova-Güzel (2005) matematiksel düşünme ile ilgili görüşler çerçevesinde, matematiksel yapının kendine özgü mantığı bir araya getirildiğinde matematiksel düşünmenin işleyiş biçimi için şu yapıyı ortaya koymuşlardır:

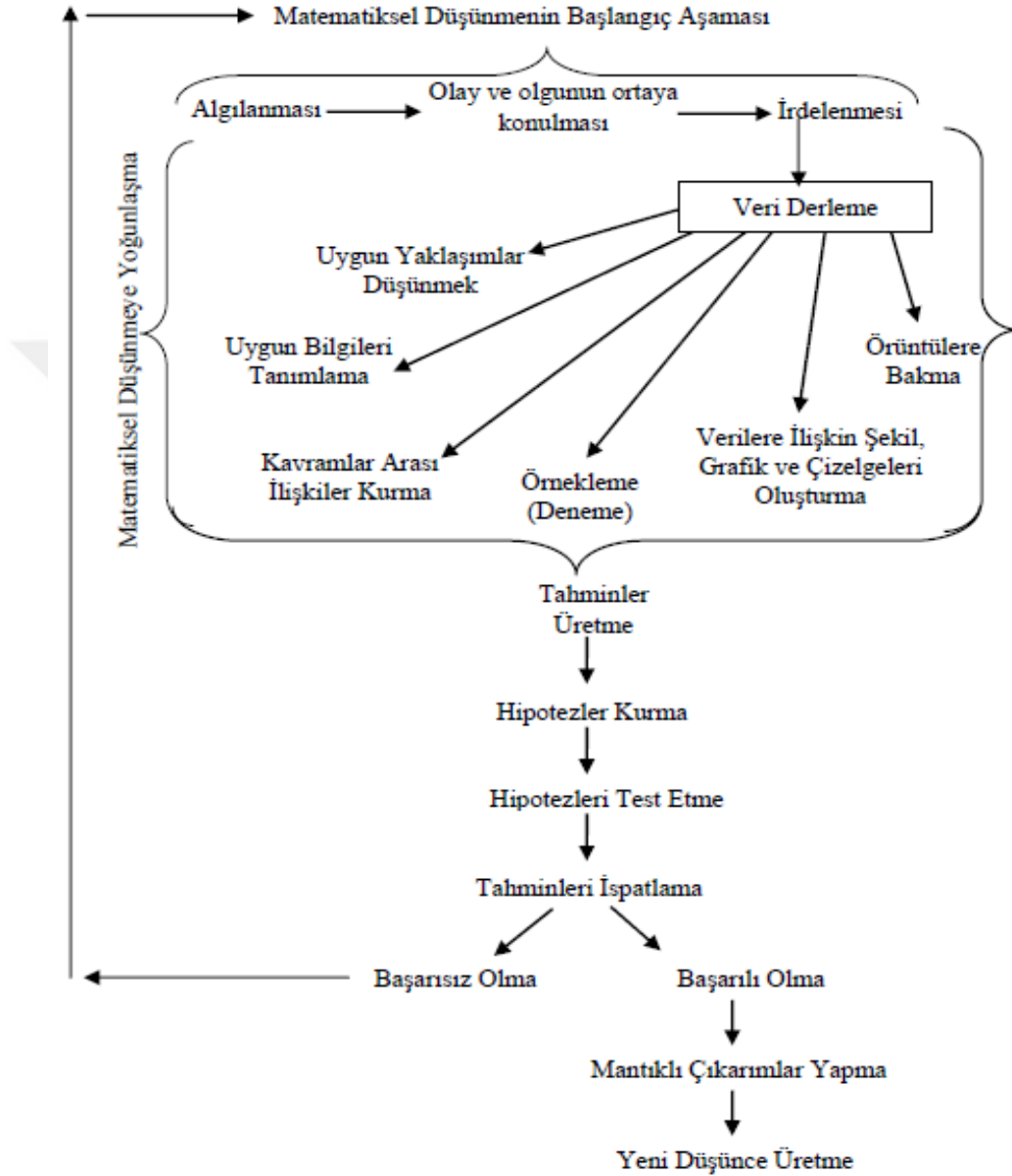


Şekil 2. Matematiksel düşünmenin işleyiş yapısı (Alkan ve Bukova-Güzel, 2005, s. 223)

Alkan ve Bukova-Güzel (2005) her düşünmede olduğu gibi matematiksel düşünmede de algılarımızdan hareket ederek bir ürüne ulaşma çabası olduğunu vurgulamaktadırlar. Bununla birlikte matematiksel düşünmeyi diğer düşüncelerden ayıran en belirgin göstergenin; bireylerin önceden öğrenmiş oldukları matematiksel bilgi ve kavramları kullanarak soyutlama, tahmin etme, genelleme, hipotez kurup test etme, akıl yürütme, ispatlama ve betimlemelerle yeni bir bilgiye ya da kavrama ulaşması olarak belirtmişlerdir. Yeşildere ve Türnüklü'ye (2007) göre bir problemin çözümünde genelleme, tahmin etme, hipotez üretme ve doğruluğunu kontrol etme gibi üst düzey düşünme becerilerinin kullanılması gerekiyorsa, bu problemin çözümünde matematiksel düşünmeye ihtiyaç vardır.

Matematiksel düşünmenin oluşum sürecine bakacak olursak, Alkan ve Bukova-Güzel (2005) matematiksel düşünmenin bir yapı olduğunu ve oluşum sürecinin belli aşamaları

içerdiğini belirtmektedirler. Bu doğrultuda belirtilen sürecin Şekil 3'teki gibi olabileceğini öne sürmüşlerdir:



Şekil 3. Matematiksel düşünmenin oluşum süreci (Alkan ve Bukova-Güzel, 2005, s. 225)

Şekil 3 incelendiğinde, matematiksel düşünme sürecinin döngüsel bir şekilde sürekli devam ettiği görülmektedir. Bireyin matematiksel düşünme süreci, sürekli işleyen bir makine gibi çalışmakta ve bu süreçte başarısız olduğunda döngü başa sarmaktadır. Başarılı olunması ya da olunmaması sürekli bir gelişimi sağlamaktadır. Zira başarılı olunması sonucunda yeni düşünce üretilmekte, olunmaması durumunda ise neden olunmadığına dair

çıkarımlar yapılarak süreç tekrardan işlemekte ve yeni bir düşünce üretilene kadar sürekli bir şekilde döngü devam etmektedir (Sezer, 2019). Yıldırım (2015) ise Şekil 3'teki matematiksel düşünmenin oluşum sürecini problem çözme ile ilişkilendirerek bireyin süreçte öncelikli olarak problemleri anlamaya ve anlamlandırmaya çalıştığını belirtmektedir. Yıldırım'a (2015, s. 9) göre;

“Daha sonra ise bireyin daha çok matematiksel düşünmeye yoğunlaşarak anlamlandığı problemleri çözmede gerekli matematiksel bilgileri ve kavramları belirleme, bunlar arasında ilişkiler kurma, uygun matematiksel yaklaşımları seçme, örneklemeler yapma, örüntüleri belirleme kısacası bir veri derlemesi yapması gerekir. Bu yoğunlaşma aşaması beraberinde tahminlerde bulunmayı, bu tahminlere dayalı hipotezler kurup test etmeyi, tahminleri ispatlamayı, başarılı olma durumunda yeni bir düşünmeye temel atmayı başarısız olma durumunda ise tekrar başlangıca dönmeyi gerektirir. Birey sahip olduğu düşüncelerle matematiksel düşünme sürecini başlatır, bu sürecin bileşenlerini (özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma, ikna etme-ispatlama) kullanarak yeni düşünceler oluşturur ve oluşturduğu yeni düşüncelerle bir başka düşünce üretmek için süreci tekrar başlatır.”

2.2. Akıl Yürütme

Matematik eğitiminin amacı, öğrencilerin matematiksel akıl yürütme, matematiksel düşünce üretebilme ve düşüncelerini savunmada kendilerine olan güvenini arttırabilmeyi sağlamaktır (MEB, 2013). Bu sebeple özellikle son yıllarda değişen dünya şartlarına ayak uydurabilmek için ulusal ve uluslararası matematik öğretim programlarında reformlara gidilerek, akıl yürütme becerisinin önemi ve bu beceriyi kazandırma yolları ısrarla vurgulanmaktadır (Çiftci, 2015). Brodie (2010) akıl yürüttüğümüzde, başkalarını veya kendimizi belirli bir iddiaya ikna etmek, bir problemi çözmek veya bir dizi fikri daha tutarlı bir bütüne entegre etmek için bir dizi amaca hizmet edebilecek düşünce veya argüman geliştirdiğimizi vurgular.

Akıl yürütme terimi, “varsayımda bulunmak ve sonuçlara ulaşmak için benimsenen bir düşünme biçimi” olarak tanımlanmaktadır (Lithner, 2000, s. 166). Nitekim başka araştırmacıların (Artz ve Yaloz-Femina, 1999; Ball ve Bass, 2003; Umay, 2003) da benzer görüşlere sahip olduğu söylenebilir. Ancak yine de akıl yürütmenin tanımı konusunda bir fikir birliğinin olmadığı iddia edilmektedir (Yackel ve Hanna, 2003'ten akt. Conner vd., 2014). Bundan dolayı da matematik eğitimi literatüründe nicel akıl yürütme, cebirsel akıl yürütme, geometrik akıl yürütme, tümdengelsel akıl yürütme, tümevarımsal akıl yürütme ve analogik

akıl yürütme gibi pek çok farklı akıl yürütme çeşidi ortaya atılmıştır (Conner vd., 2014). Yine de öğrencilerin matematiksel akıl yürütmelerini incelemek birçok araştırmacı için önemli bir yere sahiptir (Jeannotte ve Kieran, 2017). Güler (2020) ise matematiksel akıl yürütmenin nelerden oluştuğu konusunda netlik olmamasına rağmen akıl yürütmenin ispat yapma ve problem çözme için bir araç olduğundan ve matematiksel düşünmenin gelişiminde kilit bir rol oynadığından bahseder.

Literatürde yer alan bu belirsizliğe rağmen matematiksel akıl yürütmenin temelde tümdengelimsel, tümevarımsal ve abdüktif (hepten gidimsel çıkarım) olarak 3 farklı şekilde gerçekleştiği söylenebilir (Fonseca, 2018; Jeannotte ve Kieran, 2017). Tümdengelimsel akıl yürütme, genel varsayımları, prosedürleri veya ilkeleri uygulayarak bir sonuca varma sürecidir (Aksu ve Zengin, 2022; Aufmann vd., 2007; Jeannotte ve Kieran, 2017). Öğrenciler grafikler, şemalar, kelimeler ve tablolarla sunulan gerçeklerden bir sonuca varmak zorunda kaldıklarında tümdengelimsel akıl yürütme devreye girer (Öz, 2017). Örneğin, bir dörtgenin dikdörtgen olduğunu keşfeden öğrencilerin akıl yürütmeleri tümdengelimseldir çünkü kendi ölçümleri ile deneme yaparlar, ön bilgilerine bağlıdır ve bir dörtgenin karşılıklı kenarları paralel ise bu kenarların eşit olduğunu anlarlar (Aksu ve Zengin, 2022). Tümevarımsal akıl yürütme, genellikle belirli durumlardan genel kuralların türetilmesi olarak tanımlanır (Reid, 2003). Yani tümevarımsal akıl yürütmenin birçok durumun sonuçlarından kurallar çıkarmak olduğu söylenebilir (Peirce, 1956). Herbert ve diğerlerine (2015) göre tümevarımsal akıl yürütme, analogileri, örnekleri, gözlemleri ve deneyimleri kullanarak kesin önermeler oluşturan bir akıl yürütme biçimidir. Örneğin, bir dikdörtgenin alan formülünü oluşturmak için farklı örnekler üzerinde çalışmak tümevarımsal bir akıl yürütmedir (Aksu ve Zengin, 2022). Peirce (1979), abdüktif akıl yürütmeyi tümevarım ve tümdengelim ek olarak üçüncü bir akıl yürütme şekli olarak açıklamıştır. Abdüktif akıl yürütme, genel bir kuralın olduğu durumları keşfetmek için iddialar üretmektir (Jeannotte ve Kieran, 2017). Örneğin, öğrenci bir dörtgen gördüğünde bunun tüm kenarları eşit olan bir kare olduğunu söyler ve onu destekleyecek verileri bulmaya çalışır. O halde öğrencinin akıl yürütmesi abdüktiftir (Aksu ve Zengin, 2022). Başka bir deyişle abdüktif akıl yürütmenin, mevcut bilgiyi kullanarak bir tür çıkarımlar yapmak ve yeniden bir hipotez geliştirmek olduğu söylenebilir (Peirce, 1956). Holton ve arkadaşları (2012) da abdüktif akıl yürütmeyi belirli bir problem türünü yöneten bazı kuralları bilerek belirli bir sonucu açıklamak için bir fikrin geliştirilmesi olarak belirtmiştir. Bununla birlikte bir çocuğun örnek arayışı sırasında daha sistematik hale gelmeden önce yapabileceği deneme yanılma faaliyetleri de abdüktif akıl yürütme olarak düşünülebilir (Ferrando, 2006).

Lithner (2000, 2003, 2004, 2006) de yaptığı çalışmalar ile matematiksel akıl yürütme becerisini daha detaylı sınıflandırmaya çalışmıştır. Lithner (2008), matematiksel akıl yürütme türlerini temelde ikiye ayırmıştır. Bunlardan birisi benzetmeye dayalı matematiksel akıl yürütme diğeri ise yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütmedir. Benzetmeye dayalı matematiksel akıl yürütme, cevabı hatırlama ve bir çözüm prosedürü hatırlamayı içerir, yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme ise, derinlemesine düşünce yapısını içerir. Herhangi bir orijinal girişimde bulunmadan örnekleri takip etme veya kopyalama olarak düşünülen benzetmeye dayalı matematiksel akıl yürütme; ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme ve algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme olarak ikiye ayrılır (Lithner, 2006).

Yukarıda açıklanan bu temel akıl yürütme yaklaşımlarının yanı sıra matematik eğitimi araştırmalarında merkezi rol oynayan birçok akıl yürütme biçimi bulunmaktadır. Kolloche (2021), literatürde 30'un üzerinde farklı akıl yürütme biçiminden bahsedildiğini ifade etmiştir. Elbette ki bu akıl yürütme biçimleri belirli teorilere dayandırılarak zaman içinde geliştirilmiştir. Matematiğin çok çeşitli dalları olması bu farklılığın oluşmasındaki öncelikli sebeplerden biridir. Ayrıca matematiğin diğer bilimlerle iç içe olması ve hayatın her alanında akıl yürütmenin kullanılması gerekliliği de farklı akıl yürütme tanımlamalarının yapılmasını gerekli kıldığı söylenebilir.

2.3. Görsel Akıl Yürütme

Yüzyıllardır diyagram, grafik ve çizim gibi görsel araçların, matematikçilerin çalışmalarında vazgeçemedikleri araçlardan oldukları söylenebilir. Matematikte bu araçların kullanımı ile yapılan zihinsel faaliyetler görsel akıl yürütmenin gerçekleştirilmesini gerekli kılmaktadır (Abd Hamid, 2017; Frazee, 2018; Karrass, 2012). Görsel akıl yürütmenin kullanımı ise Mezopotamya ve Antik Yunan'daki matematiğin ilk günlerine kadar uzanmaktadır. "Öklid tarafından Elementler'de sunulan argümanlar ve ispatlar, soyut ve aksiyomatik olsa da, büyük ölçüde şekillerin kullanımına bağlıdır. Öklid'in sunumlarını o şekillere bakmadan (veya şekilleri akılda tutmadan) takip etmek zordur" (Stylianou, 2000, s. 4). Hârezmî'nin özdeşlikler konusunda yaptığı çalışmalar ile sözel cebirden sembolik cebire geçişin ilk örneklerini gösterirken görsel temsillerden faydalandığı görülmektedir (Baki, 2008). Yine Newton ve Euler'in çalışmalarında da diyagramları ve grafikleri etkin biçimde kullanmaları dikkat çekmektedir (Stylianou, 2000).

Görsel akıl yürütme ve görselleştirme ile ilgili matematik eğitimi alanında yapılan çalışmaların ise çok daha yeni olduğu bilinmektedir (Gülşen, 2012; Natsheh ve Karsenty, 2014). Görsel imaj ve görselleştirme kavramları doğrultusunda ele alınan ilk çalışmalar ile insanların matematiksel görevlerle uğraşırken görsel imajları ne ölçüde kullandıkları merak

konusu olmuştur (Clements, 2014). Sonraki süreçte de yapılan birçok çalışma sayesinde görselleştirmenin ve görsel düşünmenin matematik öğretimi ve öğrenimi için alternatif ve güçlü bir kaynak olarak hizmet edebileceği iddia edilmektedir (Giaquinto, 2007; Presmeg, 2006; Rivera, 2013; Van Garderen vd., 2014).

Literatürde görsel akıl yürütme ve görselleştirme terimleriyle ilgili olarak, eğitimciler, matematikçiler ve araştırmacılar arasında yaygın bir anlaşmazlık ve hatta kafa karışıklığı olduğu belirtilmektedir (Abd Hamid, 2017). Çoğu durumda görselleştirmenin görsel akıl yürütmeye paralel olduğu bu nedenle terimlerin genellikle diyagramlar, resimler, grafikler, tablolar ve diğer yazılı olmayan temsiller gibi görselleri içeren öğrenme ve düşünme süreçlerini tanımlamak için birbirlerinin yerine kullanıldığı düşünülmektedir (Abd Hamid, 2017; Natsheh ve Karsenty, 2014). Van Garderen (2006) ise matematikteki tüm akıl yürütme süreçlerinde görselleştirmenin bir ölçüde kullanıldığını öne sürmüştür. Görsel temsilleri seçerken, oluştururken ve bir çözümü yorumlarken verilen kararlar, matematiksel görselleştirmenin anahtarı olarak görülmektedir. Aynı zamanda bu kararların görsel akıl yürütme stratejilerinin bir parçası olduğu da vurgulanmaktadır (Russell, 1997; Natsheh ve Karsenty, 2014). Görsel akıl yürütmenin formal tanımını ise Gülşen (2012, s. 12);

“Matematiksel ifadeler arasındaki ilişkileri temsil eden geometrik veya grafik gösterimlerde yer alan görsel bilgileri algılama, bu görsel bilgiler arasında bulunan ilişkileri kurma ve bu bilgileri biçimsel gösterim haline getirme, görsel ve biçimsel gösterimler arasında karşılıklı bağlantılar kurma, görsel bilgiyi matematiksel ilişkiler olarak ifade edebilme süreci” şeklinde yapmıştır.

Matematikte görsel akıl yürütme bazen mantıksal akıl yürütmeye göre daha basit bir akıl yürütme biçimi olarak görülse de, görselleştirme ve görsel imajın çocukların matematiksel gelişiminde önemli bir rol oynadığına dair birçok kanıt vardır (Frazee, 2018). Buradan hareket ederek, öğretme ve öğrenme yöntemlerinin görsel akıl yürütmeyi ve görsel düşünmeyi destekleyen araçlarla donatılması önerilmektedir (Abd Hamid, 2017). Karrass (2012) bu şekilde bir öğretim için ise öncelikle matematik öğretmenlerinin gerekli görsel akıl yürütme becerilerine sahip olmaları gerektiğini düşünmektedir. Watanabe (2015), problemleri anlamlandırmak ve çözmek için öğrencileri resim veya diyagram çizmeye teşvik etmenin öneminden bahsetmektedir. Benzer şekilde Gülşen (2012) ise görsel akıl yürütmenin matematik problemlerinin çözümünde ve matematiksel ifadelerin özelliklerini keşfetmede yardımcı olduğunu ve öğrencilerin matematikte kendilerine olan güvenlerini geliştirdiğini belirtmektedir. Abd Hamid (2017) de öğrencilere problem çözme aracı olarak görsel akıl yürütmeyi deneyimlemeleri için fırsat vermek gerektiğine inanmaktadır.

2.3.1. Görsel akıl yürütmeye yönelik kavramsal çerçeveler

Literatür incelendiğinde görsel akıl yürütmeye yönelik sınırlı sayıda kavramsal çerçeveye rastlanmıştır (Abd Hamid, 2017; Natsheh ve Karsenty, 2014; Russell, 1997). Abd Hamid (2017), görsel akıl yürütme becerilerinin incelenmesi sürecinde kodlama ve kod çözme süreçlerine vurgu yapmıştır. Abd Hamid’e (2017) göre kodlama süreci, öğrencilerin sözlü veya yazılı bilgileri açıklamak için görsel temsil kullanmaları olarak açıklanabilir. Kod çözme süreci ise öğrencilerin görsel temsillere yerleştirilmiş görsel bilgileri okuması, yorumlaması ve anlamlandırması şeklinde ifade edilebilir (Abd Hamid, 2017).

Natsheh ve Karsenty (2014) tarafından oluşturulan “Görsel çıkarımsal kavramsal akıl yürütme” çerçevesi de görsel akıl yürütmenin anlamlandırılması açısından yol gösterici niteliktedir. Bu çerçeve, kavramsallaştırmayı geliştiren çıkarımlar elde etmek için görsel düşünceleri kullanma becerisiyle ilgili özel bir görsel akıl yürütme türü olarak görülebilir. Çerçeve; görsel temsiller, görsel eylemler ve görsel amaçlar olmak üzere üç bileşenden oluşmaktadır.

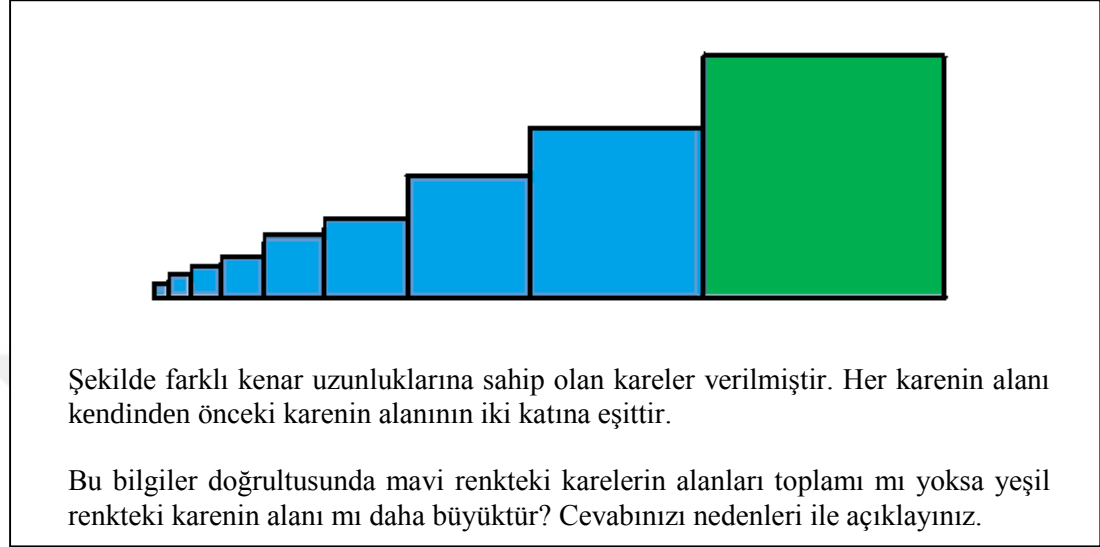
Görsel temsiller (Visual displays): Üzerinde belirli görsel eylemler yapılabilen 2 veya 3 boyutlu nesnelerdir. Resimler, grafikler, tablolar, şekiller vb. görsel temsillere örnek olarak söylenebilir. Belirli durumlarda sembolik bir formül bile üzerinde görsel bir eylem gerçekleştirildiğinde görsel bir temsil olarak kabul edilebilir. Kavramsal anlamayı yansıtan doğru gerekçeler üretmek amacıyla verilen görsel temsilden örtük bilgiler ortaya çıkarılır. Bu tür temsiller bilgiyi yoğunlaştırabilir, yeni sonuçlar verebilir veya kanıtlara olası yaklaşımlar önerebilir (Alcock ve Simpson 2004; Harel ve Sowder 1998; Presmeg, 1986).

Görsel eylemler (Visual actions): Bir kişinin görsel bir temsil üzerinde gerçekleştirebileceği farklı işlemler ve eylemlerdir. Görsel temsilde açıkça verilmeyen bilgilerin ortaya çıkarılması için gereken eylemleri yansıtır. Örneğin, bir kişi görsel bir temsile bakabilir ve ayrıca bilgileri ölçebilir, okuyabilir, karşılaştırmalar yapabilir, yardımcı bir yapı ekleyebilir, görsel bir temsili parçalara ayırabilir veya yeni bir görsel temsil oluşturabilir.

Görsel amaçlar (Visual purposes): Görsel temsiller üzerinde gerçekleştirilen görsel eylemlerin birtakım amaçları bulunmaktadır. Öğrenci görsel temsiller arasındaki ilişkiyi keşfetmek için kendi oluşturduğu veya başkaları tarafından sağlanan görsel bir temsile başvurarak eylemin amacını yansıtır. Bilgiyi yeniden ifade etme, tanımlama, açıklama ve ispat yapma görsel amaçlara örnek olarak verilebilir.

Natsheh ve Karsenty’e (2014) göre görsel eylemin amacı, temel kavramların anlaşılmasını yansıtacak şekilde görsel temsilden çıkarımlar üretmek olduğunda bunu görsel çıkarımsal kavramsal akıl yürütme olarak görmektedirler. Bunun yanında bu yapının yüksek

düzeyde görsel düşünme gerektiren problemlere verilen yanıtları analiz etmede yararlı olacağını ileri sürmektedirler. Çerçeveyi aşağıdaki örnek problem üzerinden analiz edelim.

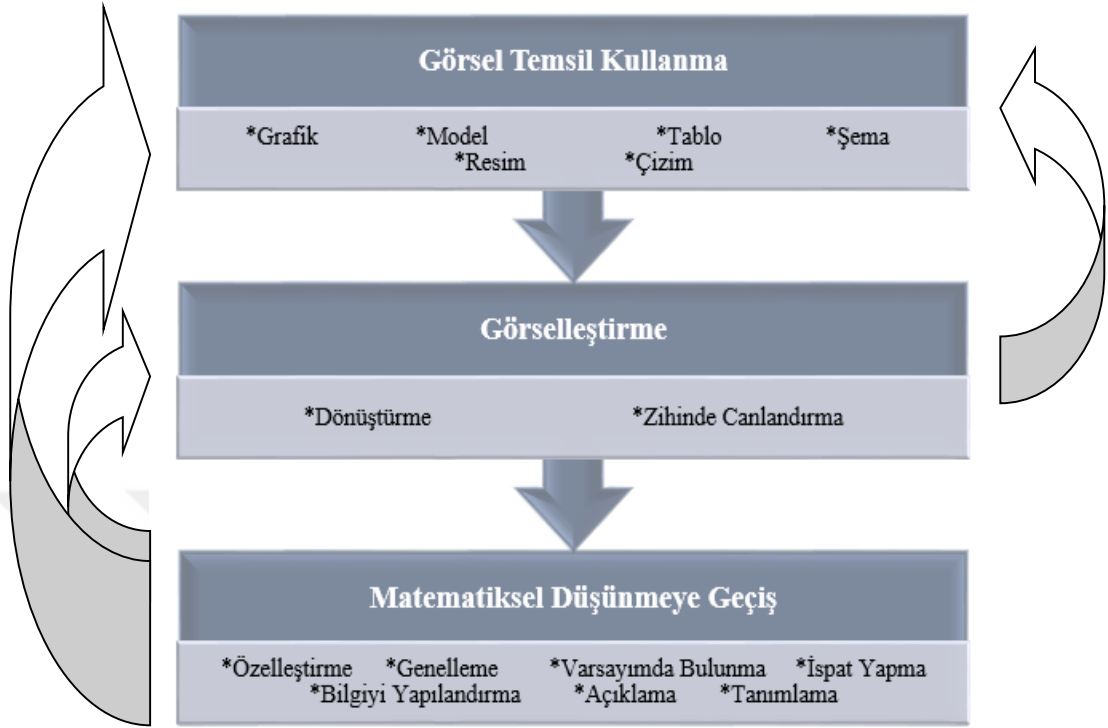


Şekil 4. Görsel çıkarımsal kavramsal akıl yürütme çerçevesine yönelik bir problem

Şekil 4’te verilen problemi görsel akıl yürütme süreci doğrultusunda incelediğimizde, görsel temsil problemde sunulan şekildir. Görsel temsil üzerinde karelerin alanı ile ilgili yapılacak olan işlemler görsel eylemlerdir. Bu eylemler öğrencilerin önceki bilgileri doğrultusunda şekillenecektir. Bu süreçte öğrenci ihtiyaç duyması halinde başka görsel temsillere de başvurabilir. Problemdeki görsel amaç ise öğrencilerin kareler arasında ilişkiler kurarak açıklamalar yapabilmeleridir. Bunun yanında öğrencilerin iddialarda bulunup, iddialarını doğrulamaya çalışmaları da görsel amaç olarak değerlendirilebilir.

Gülşen (2012), yaptığı inceleme sonucunda literatürde görselleştirmeye yönelik çok sayıda tanım ve araştırma olduğunu belirtmiş ancak görsel akıl yürütmenin daha sınırlı kaldığını ifade etmiştir. Birbirleriyle iç içe olan bu kavramların net bir ayrımının olması gerektiği düşüncesinden hareket eden Geçici ve Türnüklü (2021), görsel akıl yürütmeye yönelik bir kavramsal çerçeve geliştirmişlerdir. Oluşturulan çerçeve ile ilgili olarak, Natsheh ve Karsenty (2014) tarafından ortaya konulan çerçeveden faydalandığı vurgulanmaktadır. Bu araştırma kapsamında da Geçici ve Türnüklü’nün (2021) önerdiği kavramsal çerçeve dikkate alınmıştır.

Çerçeve literatürde sıkça yer alan görselleştirmenin görsel akıl yürütmenin neresinde yer alacağını açıklamaktadır. Bunun yanında görsel akıl yürütmenin matematiksel düşünme ile nasıl ilişkili olacağı da çerçeveyi diğer çerçevelerden ayırmaktadır. Geçici ve Türnüklü’ye (2021) ait olan kavramsal çerçeve Şekil 5’te sunulmaktadır:



Şekil 5. Görsel akıl yürütmeye yönelik kavramsal çerçeve

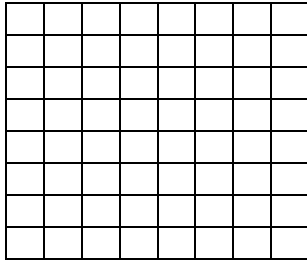
Şekil 5'e baktığımızda görsel akıl yürütme sürecinin üç aşamada gerçekleştiği söylenebilir: Görsel akıl yürütme için öncelikle ele alınması gereken bileşen görsel temsildir. Her şey görsel temsille başlar. Bunun devamında görselleştirme devreye girer. Birey kendi oluşturduğu veya hazır sunulan görsel temsille etkileşime geçerek görselleştirme aşamasına geçiş yapar. Burada dönüştürme veya zihinde canlandırma gibi bir takım zihinsel faaliyetler gerçekleşir. Gerekli gördüğü takdirde tekrar görsel temsille etkileşime geçebilir. Son olarak, görselleştirmeyi tamamlayan birey ortaya çıkan durumla ilgili matematiksel düşünme faaliyetlerinde bulunur. Bu faaliyetlerde; birey açıklamalar yapabilir, tahminlerde bulunabilir veya bir genellemeye gidebilir. Birey bu faaliyetlerin yanı sıra önceki aşamalara dönüş yaparak başka süreçlerde de bulunabilir (Geçici ve Türnüklü, 2021).

Görsel akıl yürütmeye yönelik olan kavramsal çerçeve Mason ve diğerlerinden (2010) alınan Şekil 6'daki problem üzerinden açıklanmıştır. Problem üzerinden yapılan açıklamalar ortaokul veya lise seviyesinde öğrenim gören bir öğrencinin tahmini cevapları üzerinden yapılmıştır. Yapılan açıklamalar sadece bu problem özelinde değerlendirilmelidir.

Problem: Bir satranç tahtasında 8 satır ve 8 sütun bulunmaktadır. Dolayısıyla kenar uzunlukları 1 birim büyüklüğünde olan 64 tane kare olduğu söylenebilir. Ancak satranç tahtasında 204 adet kare olduğu iddia edilmektedir. Bu iddianın neden doğru olduğunu açıklayabilir misiniz?

Görsel Temsil:

Böyle bir problem karşısında her öğrenci kendine özgü bir çözüm düşünebilir. Belki de kişi hemen bir satranç tahtası çizmek isteyebilir. Bu şekilde bir görsel temsil oluşturarak, probleme iyi bir başlangıç yapılabilir.



Yandaki çizimi yapan birisi problemin çözümüne ulaşmak için görsel temsili oluşturmuş olur. Özellikle satranç tahtasını zihninde canlandıramayanlar için açıklayıcı olacağı söylenebilir. Şekle bakıldığında satranç tahtasının 8 satır ve 8 sütun olmak üzere 64 kareden oluştuğu görülmektedir. Ancak problemde 204 kareden bahsedildiğini gören öğrenci başka kareler olduğunu da fark edecektir.

Görselleştirme:

Bu aşamadan sonra her öğrenci doğru şekilde akıl yürütemeyebilir. Ancak aşağıda açıkladığımız şekilde düşünen öğrenciler olacaktır.

Şekle dikkatle bakıldığında bir önceki aşamada bulunan 64 karenin 1 birimlik kareler olduğu, zaman içinde anlaşılabilir. İleriki aşamalarda zihinde canlandırmalar yapılarak ya da şekil üzerinde dönüşümler yapılarak 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6, 7x7 ve 8x8 biçiminde kareler olduğu da anlaşılacaktır.

Bu aşamanın problemin çözümü için çok önemli bir adım olduğu söylenebilir. Ancak diğer kareleri sayarak doğru sonuca ulaşmak zaman alacaktır. Hatta bu süreçte yanlış sonuçlara da varılabilir. Dolayısıyla öğrenci, problemin doğru sonucuna ulaşmak için matematiksel düşünme bileşenlerinden biri olan genellemeyi yapmaya çalışmalıdır.

Matematiksel Düşünmeye Geçiş:

Öğrencinin genelleme yapabilmesi için öncelikle özelleştirme yapması beklenmektedir. Şekil üzerinden belli bir kareyi saydıktan sonra bir örüntü oluşturabilir. Belki de aşağıdaki gibi yeni bir görsel temsil de oluşturulabilir.

Kenar uzunluğu	8x8	7x7	6x6	5x5	4x4	3x3	2x2	1x1
Sayı	1							64

Öğrenci 7x7 olan kareleri sayarak sonucu 4 bulabilir. Aynı şekilde 6x6 olan karelerin sayısının da 9 olduğunu gördükten sonra örüntüyü keşfederek;

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 = 204 \text{ olduğunu gösterecektir.}$$

Şekil 6. Görsel akıl yürütme ile ilişkili bir problem

2.3.1.1. Görsel temsil kullanma

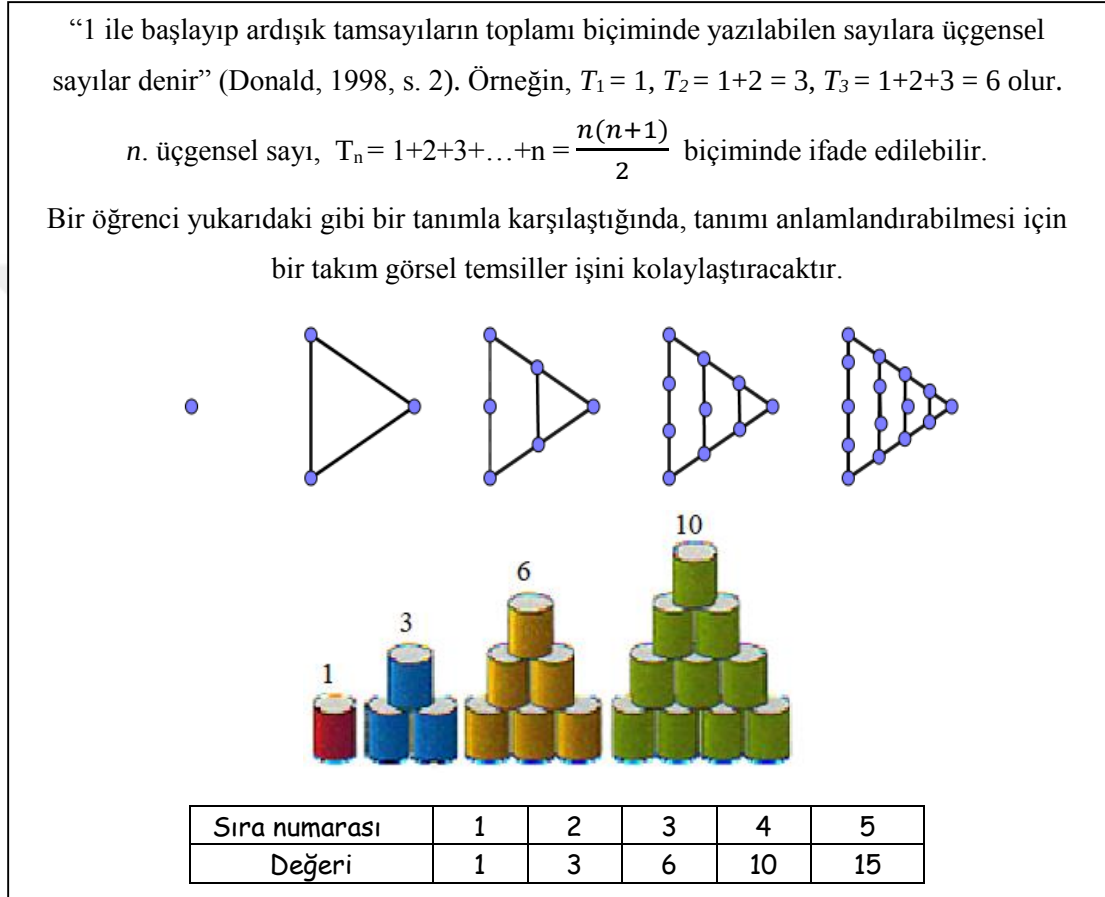
“Genellikle bir durumun herhangi bir şekilde gösterimi veya ifadesi anlamında kullandığımız temsil, aslında hem süreç hem de sonucu içine alan bir kavramdır” (Özdemir ve İpek, 2020, s. 91). Matematik eğitiminde ise temsil, matematiksel gerçeklerin zihinde işlenebilmesi ve bir başka kişiye aktarılabilmesi için ihtiyaç duyulan araçlardır (Delice ve Sevimli, 2016). Matematiksel temsiller; diyagramlar, sayı doğruları, grafikler, nesnelerin veya manipülatiflerin düzenleri, fiziksel modeller, matematiksel ifadeler, formüller ve denklemler, bir bilgisayar veya hesap makinesinin ekranındaki tasvirler gibi matematiksel fikirleri veya ilişkileri kodlayan, destekleyen veya somutlaştıran görünür veya somut üretimlerdir (Goldin, 2014).

Literatür incelendiğinde matematiksel temsil kavramının farklı şekillerde sınıflandırıldığı görülmektedir (Gilbert, 2010; Goldin, 2014; Lesh vd., 1987). Matematiksel fikirlerin iç temsil ve dış temsil olmak üzere iki ayrı şekilde sınıflandırılması konusunda genel bir fikir birliğinin olduğu belirtilmektedir (Hiebert ve Carpenter, 1992’den akt. Özdemir ve İpek, 2020). Russell’a (1997) göre de matematiksel bir problemin temsili içsel veya dışsal olabilir. İçsel temsil, deneyimlerimizden yaratılan zihnin bir nesnesidir. Dışsal temsil, problemin kâğıt ve kalem çizimlerini, modelleri veya diğer fiziksel manipülatörleri ve teknolojik görselleri içerir. Ayrıca dış temsil için iç temsilin bir soyutlaması olduğu da ifade edilmektedir. Bununla birlikte iç ve dış temsiller birbirinden bağımsız olmayıp aralarında bir etkileşim söz konusudur (Goldin ve Kaput, 1996).

Lesh ve arkadaşları (1987) dış temsilleri; gerçek yaşam durumları, somut modeller, resim (diyagram), konuşma dili, sembolik ifade olarak beş başlıkta ele almıştır. Gilbert (2010) ise temsilleri, genel olarak sembolik ve görsel olarak iki sınıfa ayırmıştır. Bu bağlamda işaret, söylem veya sembol gibi soyut yapılar sembolik temsil; resim, diyagram veya grafik gibi bilginin görsel halini ön plana çıkaran yapılar görsel temsil olarak adlandırılmıştır. Bu çalışmada da temsiller Gilbert’in (2010) sınıflaması doğrultusunda ele alınmıştır.

Zihinsel temsillerin dışa vurulmasında yardımcı bir araç rolü üstlenen görsel temsiller, bir kavram ve fikrin aktarılmasına olanak sağlayan görsel imgeler yardımıyla ifade edilen bir dildir (Goldin, 1998a). Debrenti’ye (2015) göre birçok çalışma, matematiksel nesnelerin temsiline ve resimsel temsillerin öğrenme sürecinde önemli bir rol oynadığını göstermektedir. Çizimlerin, kavramların veya problemin daha iyi anlaşılmasını kolaylaştırdığı ve matematiksel akıl yürütmeye yardımcı olduğu vurgulanmaktadır. Kar ve İpek (2009), görsel temsillerin matematik tarihi boyunca problem çözmede sıklıkla kullanıldığını belirtmişlerdir. Görsel temsillerin problemi anlamaya ve çözüme gitmeye yönelik önemli bir strateji olduğunu,

matematik öğretiminde ve problem çözme sürecinde görsel temsillerden yararlanmak gerektiğini vurgulamışlardır. Aynı şekilde Bishop (1989) da matematik eğitiminde görsel temsillerin vurgulanmasının önemli olduğunu belirtmiştir. Şekil 7’de bazı görsel temsil örnekleri sunulmaktadır:



Şekil 7. Görsel temsil örnekleri

Görsel temsiller, problem metnindeki ifadeleri ve bunlar arasındaki ilişkileri temsil eder. Birçok çalışma problem çözme sürecinde görsel bir temsil oluşturulmasının problem çözme performansı ile ilgili bir faktör olduğunu açıkça göstermektedir (Ahmad vd., 2010, Hegarty ve Kozhevnikov, 1999; Uesaka vd., 2007; Van Garderen ve Montague, 2003).

Ergan (2018) görsel temsillerin faydalarını aşağıdaki gibi ifade etmektedir:

- Öğrencilerin problemde verilen bilgilerin önem ve işlem sırasını belirlemelerine yardımcı olur,
- Problem parçalarının bir araya getirilmesine ve çözüm için izlenmesi gereken adımların belirlenmesini sağlar,

- Problemden verilen kavramların somut bir düzlemde ve bir arada, sistematik şekilde görülmesini sağlar,
- Öğrencilerin kavramsal bilgilerini oluşturmak ve var olan bilgi birikimleri ile bağlantı kurmalarına yardımcı olur.

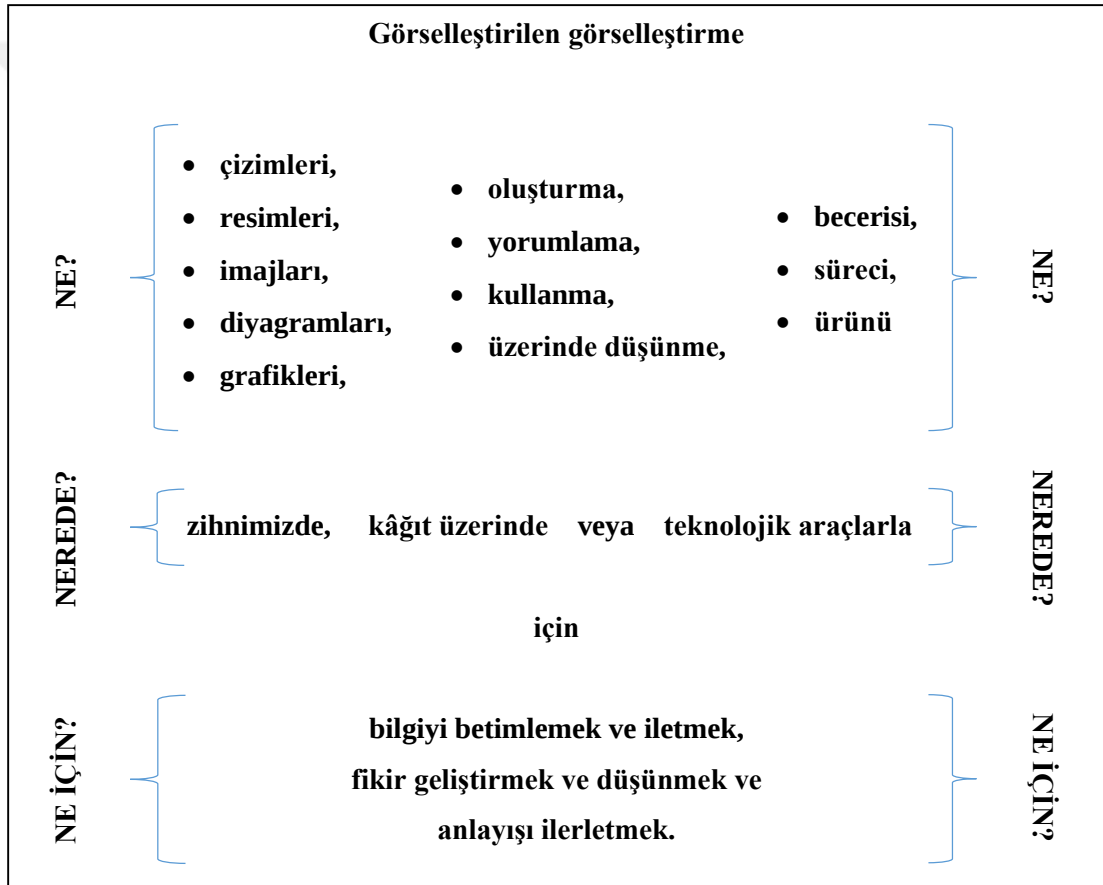
Eğitim araştırmacıları görsel temsil oluşturma stratejisinin matematik öğrenme ve problem çözmedeki yeri ve önemini uzun süredir incelemektedir (Goldin, 1998a; Goldin ve Kaput, 1996). Görsel temsillerin oluşturulması problem çözmeye ek bir yardım olarak değil, öğrencilerin geliştirdiği ve problem çözme sürecinin bir parçasını oluşturan bir süreç olarak görülmelidir (Ergen, 2018). Stylianou (2011) görsel temsillerin nihai bir üründen çok sürecin kendisi olduğunu vurgulamıştır. Ancak bir görsel temsilin problem çözmeye faydalı bir araç olarak düşünülebilmesi için öğrenci tarafından tam anlamıyla kavranmış, içselleştirilmiş olması gerekmektedir (Dufour-Janvier vd., 1987’den akt. Ergen, 2018).

2.3.1.2. Görselleştirme

Matematiğin soyut ilişkilerine daha etkili bir şekilde yaklaşmak için, nesnelerin olası somut gösterimlerinin kullanılmasına matematiksel görselleştirme denilmektedir (Guzman, 2002). Presmeg (2014) de benzer bir ifadeyle matematikte soyut kavramları temsil etmek için sembol ve diyagram gibi işaretlerin kullanıldığını belirtmiş ve görselleştirmenin matematiğin temsilleştirilmesinde yer aldığını vurgulamıştır. Görselleştirme, genellikle “görsel bilgileri temsil etme, dönüştürme, oluşturma, iletişim kurma, belgeleme ve yansıtma yeteneğini ifade eder” (Hershkowitz vd., 1989’dan akt. Hershkowitz vd., 2001). Bu nedenle görselleştirme, matematiksel kavramların özellikle de geometrik kavramların öğrenilmesi için çok önemlidir (Hershkowitz vd., 2001). Wheatley’e göre (1998) görselleştirme; yapılandırma, temsillendirme ve zihinsel imajlar arasında karmaşık bir dönüşüm sürecidir. Okul öncesi eğitimden başlayarak her öğretim düzeyinde, soyut kavramların ve sembolik temsillerin görsel temsillerle somutlaştırılıp daha iyi anlaşılmasını sağlamak üzere, görselleştirme sürecinden yararlanılabilir (Presmeg, 2006). Russell (1997), matematiksel görselleştirmenin belirli bir matematik problemi için görsel bir temsil oluşturma ve bu temsili problem çözmede kullanma süreci olduğunu belirtmiştir.

Arcavi (2003, s. 217) ise görselleştirmenin tanımını, “bilgiyi betimlemek ve iletmek, önceden bilinmeyen fikirleri geliştirmek ve düşünmek ve anlayışları ilerletmek amacıyla, zihninizde, kâğıt üzerinde veya teknolojik araçlarla resimlerin, imajların, diyagramların oluşturulması, yorumlanması, kullanılması ve üzerinde düşünme becerisi, süreci ve ürünü” şeklinde yapmaktadır. Daha sonra Arcavi (2015) bu tanımın karmaşık olduğunu ve bazı açıklamalara ihtiyaç olabileceğini belirtmiştir. Bu düşünceyle şu cümlenin sadece bir kelime

ile nasıl tamamlanabileceğine odaklanmıştır: “Görselleştirmedır.” Bu kelimenin ise “beceri, süreç ve ürün” olabileceğini öne sürmüştür. Yine de bu kelimelerin “Neyin?” ile tamamlanması gerektiğini düşünmüş ve bunları “oluşturma, yorumlama, kullanma, üzerinde düşünme, çizimler, resimler, imajlar, diyagramlar, grafikler” olarak belirlemiştir. Tanımın aynı zamanda “Nerede?” sorusunun yanıtını da içerdiğini ifade etmiş ve bunları da “zihnimizde, kâğıt üzerinde veya teknolojik araçlarla” şeklinde belirtmiştir. Son olarak tanımın “bilginin iletimi, düşünme, öğrenme ve anlama” gibi amaç ve hedefleri de içerdiğinden bahsetmiştir. Bu anlatılanları ise görsel olarak Şekil 8’deki gibi açıklamıştır:



Şekil 8. Görselleştirmenin tanımına yönelik bir görsel (Arcavi, 2015, s. 146)

Görselleştirme konusunda matematik eğitimine önemli katkılar sunan Presmeg (1986, 2006), bir kişi uzamsal bir düzenleme oluşturduğunda, kişinin zihninde bu oluşumu yönlendiren görsel bir imaj olduğunu ileri sürmüştür. Presmeg’e (1986) göre görselleştirme, hem görsel zihinsel imajları hem de uzamsal yapıyı oluşturma ve dönüştürme süreçlerini içerir. Bahsedilen görsel imaj, görsel veya uzamsal bilgiyi tasvir eden zihinsel bir şemadır (Delibaş 2020).

Presmeg (1986) 5 tür görsel imaj arasında ayırım yapmıştır. Bu imajları; somut imaj, örüntü imajı, formül imajı, kinestetik imaj ve dinamik imaj olarak belirtmiştir. Somut imaj, günlük objelerin parçalarının zihinde biraraya gelip oluşturduğu bütünsel bir resim şeklindeki imajdır. Örüntü imajı, görsel-uzamsal şema içinde resmedilen saf ilişkiler olup, kişilerin yapıları ve yapıların önemli özelliklerini hatırlamasına imkân veren imaj şeklidir. Formül imajı, genellikle zihin gözüyle gördüğümüz ve tahta veya defterde yazılı şekildeki formüllerin hafızamızda oluşturduğu imajdır. Kinestetik imaj, objelerin bir aktivite içinde hareket ettirilerek resimlendirildiği, kas gücü aktiviteleri gerektiren imaj şeklidir. Dinamik imaj ise bir kavramı farklı somut imajlarla bağdaştırarak oluşturulan, şekillerin yeni ilişkili şekiller içinde değişebildiği imajdır.

Görselleştirme, matematiğin yanı sıra mühendislik, sanat, tıp, ekonomi, kimya, otomotiv ve psikoloji gibi birçok alanda karşımıza çıkmaktadır (Gutiérrez, 1996). Matematik açısından bakıldığında amaç sadece görselleştirmek değildir, görselleştirme yardımıyla matematiği anlamaktır (Gülşen-Turgut, 2019). Örneğin bir diyagramın görselleştirilmesi o diyagramın zihinde bir imajının oluşturulması anlamına gelir. Benzer şekilde bir problemin görselleştirilmesi diyagram veya görsel bir imaj aracılığıyla problemin anlaşılmasını ifade eder. Matematiksel görselleştirmede hem imajlar oluşturulur hem de bu imajlar yardımıyla etkili bir matematiksel keşif ve anlama sürecinden geçilir (Yılmaz, 2011; Zimmerman ve Cunningham, 1991).

Görselleştirmenin matematik eğitimindeki varlığının artmasının yanında matematikte ve matematik eğitiminde görselleştirmeye atfedilen konum nedeniyle bu konuda araştırmalara ihtiyaç olduğu vurgulanmaktadır (Gülşen-Turgut, 2019). Duval (1999), görselleştirmenin ve temsil etmenin matematiği anlamının özünde bulunduğunu ifade etmektedir. Diğer bilimlerdeki (örneğin biyoloji) nesnelere doğrudan ulaşılabilir, fakat matematikteki nesnelere yalnızca işaretler yoluyla ulaşılabilir. Matematiği anlamadaki zorluğun büyüklüğü de bu noktadan kaynaklanmaktadır. Matematiği anlamının özünde bulunan semiyotik temsil, temsil birimleri arasındaki ilişkilerin bir organizasyonunu verir. Oysa görselleştirme herhangi bir ilişki organizasyonunun hızlı ve eksiksiz olarak anlaşılmasına olanak sağlar. Bu nedenlerle Duval (1999), görselleştirme olmadan anlamının olmayacağını belirtmektedir.

Grafikler, diyagramlar ve çeşitli geometrik şekil ya da modeller, düşüncelerin, fikirlerin ve soyut kavramların görselleştirilmesinde bir araçtır. Bunlar vasıtasıyla insan düşüncesi, dış dünya ile soyut kavramlar arasında ilişki kurar. Yani, cebirsel yapıların geometrik ifadelerle sunulması, öğrencilere bir fiziksel modelden hareketle mantıksal teoremin nasıl kurulduğunu göstermeye yardım eder (Konyalıoğlu, 2003). Tekin'e (2010) göre,

görselleştirmede önemli olan noktalardan biri de öğrencinin görsel modeli kullanarak görsel düşünme becerisi kazanması ve böylece konu ya da kavramla ilgili anlayışını geliştirmesidir. Görsel düşünme becerisi bireylerin etrafında gözlemlediği olayları, süreçleri ve nesneleri anlamalarına, zihinlerinde daha kapsamlı ve zengin soyut kavram şemaları oluşturmalarına yardımcı olur.

Geçici ve Türnüklü (2021), literatürden hareket ederek görselleştirme sürecinde dönüştürme ve zihinde canlandırma kavramlarına vurgu yapmışlardır. Dönüştürme, görsel temsilin matematiksel bir yapıya dönüştürülmesi anlamına gelir. Örneğin; kareli kâğıt üzerinde bulunan bir paralekenarın alanını bulmak isteyen bir öğrenci, paralelkenar temsili üzerinde yaptığı birtakım işlemlerle paralelkenar temsilini dikdörtgen gibi başka bir matematiksel yapıya dönüştürebilir. Verilen bir tablo veya grafikten matematiksel çıkarımlar yapmak da dönüştürme anlamına gelir. Zihinde canlandırma ise daha çok uzamsal yetenek ile ilgilidir. 2 veya 3 boyutlu yapıların zihinde imajlarının oluşumu ve bu imajların zihinde hareket ettirilmesi bu bağlamda düşünülebilir. Örneğin; bir yamuğun herhangi bir kenarı etrafında döndürülmesi sonucunda oluşacak cismi tahmin etme, zihinde canlandırmanın devreye girmesini gerektirir.

2.3.1.3. Matematiksel düşünmeye geçiş

Matematik eğitimi araştırmalarına bakıldığında, matematiksel düşünmeyi problem çözme, özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispat yapma gibi matematiksel süreç perspektifinden inceleyen araştırmacılar (Burton, 1984; Harel ve Sowder, 2005; Mason vd., 2010; Schoenfeld, 2016) olduğu gibi, matematiksel düşünmeyi matematiksel kavramların gelişimi olarak ele alan araştırmacılar (Dreyfus, 2002; Tall, 1995) da bulunmaktadır. Matematiksel düşünmeyi süreç perspektifinden ele alan bakış açısının daha çok “matematiksel düşünme nasıl gerçekleşir?” sorusuna odaklandığı, diğer bakış açısının ise bireyin kavramları zihninde nasıl yapılandığına odaklandıkları söylenebilir (Çelik, 2016).

Geçici ve Türnüklü tarafından (2021) oluşturulan çerçevede görselleştirme aşamasını tamamlayan kişinin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma, ispat yapma, açıklama yapma vb. gibi birtakım matematiksel düşünme bileşenlerini ortaya koyması beklenmektedir. Dolayısıyla bu çerçevede matematiksel düşünmeyi süreç perspektifinden ele alan bakış açısı benimsenmiştir. Kişi matematiksel düşünmeye geçiş sürecinde, ne yapacağını bilincinde olarak süreçte rol alıyorsa hedeflenen sonuca ulaşmayı başaramasa bile görsel akıl yürütme becerilerini işe koştugu söylenebilir.

Görsel akıl yürütme çerçevesinin ilköğretimden yükseköğretime kadar matematiğin her alanında kullanılabilecek yararlı bir çerçeve olabileceği düşünülmektedir. Görsel

temsillerin yoğun olarak kullanıldığı geometri alanının dışında sayılar, cebir ve istatistik gibi alanlarda da görsel akıl yürütme çerçevesi işe koşulabilir. Çerçeve rutin ve rutin olmayan problemlerin çözüm süreçlerinde kullanılarak öğrencilerin muhakeme becerilerine katkı sağlayacaktır. Bunun yanında bir matematik öğretmenin, çerçevenin bileşenlerine yönelik ders tasarlaması da öğretimin kalitesini artıracaktır (Geçici ve Türnüklü, 2021).

Görsel akıl yürütme çerçevesinin uygulanabileceği konulardan bir diğerrinin sözsüz ispatlar olabileceği düşünülebilir. Nelsen (1993) sözsüz ispatı; gerçek ispatlar olarak kabul etmemekle birlikte özel bir ifadenin niçin doğru olduğunu hatta bir matematiksel ifadenin doğruluğunu ispatlarken nasıl ele alınacağını görölmesine yardımcı olacak diyagram veya resimler şeklinde ifade etmektedir. Polat ve diğerrleri (2019) görsel temsillerin kullanıldığı sözsüz ispatların matematik eğitiminde önemli araçlar olmalarıyla ilgili fikir birliği olduğunu düşünmektedirler. Dolayısıyla sözsüz ispatlar sayesinde; görsel temsilleri kullanma, görselleştirme yapma ve sonrasında ispat yaparak görsel akıl yürütme gerçekleştirilebilir.

2.4. Geometrik Düşünme

Matematiğin önemli dallarından biri olarak kabul edilen geometri, Türk Dil Kurumunun Matematik Terimleri Sözlüğünde, “düzlemsel şekillerin özelliklerini ve aralarındaki bağıntıları inceleyen matematik dalı” olarak tanımlanmıştır (Hacısalıhoğlu vd., 2000, s. 156). Bugün okullarda okutulan geometrinin temelleri Euclides’in “Elementler” adlı eseriyle ortaya atılmış ve daha sonraki yıllarda geometride; trigonometri, analitik geometri, Euclides dışı geometri ve daha pek çok gelişme yaşanmıştır (Baykul, 2014). Yaşanan gelişmeler geometrik düşünce yapısının diğerr kuşaklara aktarılma ihtiyacını ortaya çıkardığından, geometri tüm dünyada okul matematiğinin ayrılmaz bir parçası haline gelmiştir (Güven ve Karpuz, 2016).

Okul matematik müfredatında uzun zamandır kabul edilen geometri sayesinde öğrencilerin matematiğin aksiyomatik yapısını ve mantığını görmeyi öğrendikleri düşünülmektedir (NCTM, 2000). Altun (2014), insanların günlük hayatta çözmek durumunda oldukları problemlerin birçoğunun (çerçeve yapma, duvar kâğıdı kaplama, boya yapma, depo yapma gibi) çözümünde temel geometrik becerilerin kullanılması gerektiğini belirtmiştir. Bunun yanında Küresel Konumlama Sistemlerinden (GPS) bilgisayar animasyonlarına kadar hemen hemen her yerde geometri kullanımının arttığı ifade edilmektedir (Van de Walle vd., 2014). Geometrinin öğrencilerin düşünme, muhakeme etme ve ispat yapma becerilerini geliştirdiğinden dolayı okul öncesinden yükseköğretime kadar üzerinde önemle durulması gerektiği vurgulanmaktadır (Duatepe, 2004; Ünlü, 2014). Ubuz (1999) da geometri öğrenimi

sayesinde öğrencilerin içinde bulundukları dünyayı tanımaya ve anlamaya başladıklarını belirtmiş ve bu sürecin geometrik düşünme ile devam ettiğini ifade etmiştir.

González ve Herbst (2006) okullarda geometri öğretilmesinin nedenlerini aşağıda belirtilen dört gerekçe ile sunmuşlardır:

- Öğrencilere matematikçilerin çalışmalarına benzeyen deneyimler kazandırır.
- Öğrencilere akıl yürütme fırsatı sağlar.
- Öğrencilere dünya hakkındaki sezgilerini yorumlama ve sistematikleştirme konusunda yardımcı olur.
- Öğrencilerin gelecekteki çalışma yaşamlarında ihtiyaç duyacağı gerçek dünya becerileri ile bağlantı sağlar.

Bu gibi gerekçelerin geometri müfredatlarının yeniden yapılandırılmasında bir çerçeve niteliği gördüğünden bahsedilmektedir (Herbst vd., 2017). Eraslan-Yalçın ve Özgeldi (2019) ortaokul matematik öğretim programlarının geometri ve ölçme öğrenme alanına ilişkin kazanımlar için 2005 yılının bir dönüm noktası olduğunu belirtmişlerdir. İlgili kazanımların 2005 yılına kadar ağırlıklı olarak ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığını kazandırmaya yönelik olduğunu, 2005 ve sonrası ise tüm kazanımların geometrik düşünme alışkanlıklarını kazandırmaya yönelik olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Benzer şekilde 2005'te yenilenen İlköğretim Matematik Dersi 6-8. Sınıflar Öğretim Programı ve Kılavuzu'nda, geometri konularına daha çok ağırlık verilerek, birçok yeni geometri konusunun programa dâhil edildiği belirtilmektedir (Ünlü, 2014). Sonraki yıllarda yenilenen MEB (2009, 2013, 2018a) İlköğretim ve Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programlarında da her sınıf düzeyinde geometri ve ölçme öğrenme alanına yönelik kazanımlar olduğu görülmüştür. Güncel Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programına (MEB, 2018b) bakıldığında da her sınıf düzeyinde geometriye ait kazanımlar olduğu görülmektedir. Görüldüğü gibi geometri, gerek günlük hayatta gerek okul müfredatlarında büyük bir öneme sahiptir.

“Geometrinin yeni kuşaklara aktarılma ihtiyacına bağlı olarak 20. yüzyılın başlarından günümüze kadar geometri öğrenme ve öğretme süreçlerinin zenginleştirilmesine yönelik birçok araştırma yapılarak geometrik düşünmenin doğası ve nasıl geliştirilebileceği açıklanmaya çalışılmıştır” (Güven ve Karpuz, 2016, s. 246). Bu açıklamaları temelde gelişimsel ve bilişsel yaklaşımlar olarak ikiye ayırmak mümkündür (Gal ve Linchevski, 2010). Geometrik düşünmeyi açıklamaya yönelik bilinen gelişimci bir yaklaşım Van Hiele geometrik düşünme modelidir. Bilişsel yaklaşımlar ise geometrik düşünme sürecini, bilişsel süreçler ve bu süreçlerin işlevleri ve birbirleriyle etkileşimleri üzerinden ele almaktadır. Ayrıca “gelişimsel yaklaşımların aksine bu süreçler arasında hiyerarşik bir ilişkiden söz

edilmemektedir” (Karpuz, 2018, s. 1). Fischbein’in şekilsel kavram teorisi ile Duval’in bilişsel modeli geometrik düşünme sürecini bilişsel olarak açıklamaya çalışan yaklaşımlardır (Duval, 1998; Fischbein, 1993; Jones, 1998). Araştırmada, öğrencilerin geometri problemlerinde görsel akıl yürütme süreçleri incelendiğinden dolayı bu 2 bilişsel yaklaşımın daha detaylı ele alınması gerektiği düşünülmüştür.

2.4.1. Fischbein’in şekilsel kavram teorisi

Mevcut psikoloji teorilerinde kavramlar ve zihinsel imajlar genellikle birbirlerinden ayırt edilir (Fischbein, 1993). Kavram, ortak özelliklerine dayalı olarak bir nesne sınıfının ideal bir temsilini ifade etmesidir. Buna karşılık zihinsel imaj ise bir nesnenin veya fenomenin duyuşsal bir temsidir (Fischbein, 1993). Yani kavram soyut ve genel bir yapıyı temsil ederken zihinsel imaj bu soyut ve genel yapının somut halidir (Güven ve Karpuz, 2016). Örneğin;

“Bilardo masasının şekli sorulduğunda daha önceden bilardo masasını görmemiş ve bilardo oynamamış bir kişinin zihninde herhangi bir şekil oluşmayabilir ya da farklı şekiller düşünebilir. Ancak daha önce bilardo oynamış biri için bilardo masasının şekli dikdörtgen olarak algılanır. Bilardo masası bir kavram, masanın zihinde oluşan görüntüsü ise şekli temsil etmektedir. Dolayısıyla şekil ve kavram ayrı kategorilerde kalmaktadır. Aynı zamanda farklı bilardo masası şekilleri görmüş ya da bu masalarda oynamış biri için zihinde oluşan görüntü de farklılık göstermektedir” (Kızıltoprak, 2020, s. 10).

Fischbein (1993), bilişsel psikolojide var olan bu ayrımın geometrik şekiller için geçerli olmadığını, geometrik şekillerin doğaları gereği bu iki kategoriye aynı anda (eş zamanlı olarak) içerdiğini belirtmiştir. Karpuz (2018, s. 12) bu durumu şu şekilde açıklamıştır:

“Masa kavramı ile masa imajı arasındaki muhtemel uyumsuzluk geometrik şekiller için geçerli değildir. Örneğin kâğıt üzerine bir masa çizdiğinizde çizdiğiniz bu masanın özelliklerinin (rengi, ayak sayısı vb.) bütün masaların özelliklerini taşıyan masa kavramı ile özdeş değildir. Fakat kâğıt üzerine bir üçgen çizildiğinde bu üçgenin sahip olduğu özelliklerin (iç açıların ölçüleri toplamı, büyük açı karşısında büyük kenarın yer alması vb.) bütün üçgenler için geçerli olduğu söylenebilir. Çünkü zihindeki üçgen kavramı ile kâğıt üzerine çizilen üçgen imajı arasında bir fark yoktur.”

Bu nedenle Fischbein (1993), geometrik şekilleri diğer şekillerden ayrı konumlandırmış ve üçüncü bir kategorinin varlığını belirterek bunu “Şekilsel Kavram” olarak isimlendirmiştir (Güven ve Karpuz, 2016). Yani Fischbein geometrik şekilleri, aynı anda hem

kavramsal hem de şekilsel özelliklere sahip zihinsel varlıklar olarak yorumlamaya çalışmıştır (Kızıltoprak, 2020).

Şeklin formal tanımı ve duyuşsal imaj, şekilsel kavramı oluşturmak için birleşir. Bu nedenle, bir geometrik şekil dikkate alındığında, sadece formal tanım değil, aynı zamanda bireyin o şekille ilişkilendirdiği duyuşsal imaj da dikkate alınır (Walcott, 2006). Bunun yanında kavram ve şekil bileşenlerinin şekilsel kavram bilgisine dönüşmediği ve akıl yürütme sürecinin şeklin kontrolünde olduğu durumlarda öğrencilerin zorluklar yaşayabilecekleri ifade edilmektedir (Güven ve Karpuz, 2016). Ayrıca şekilsel kavram, geometrik kavramlara ve her bireye özgüdür. Başka bir deyişle, bir kişinin dikdörtgen şekli kavramı, onunla ilişkilendirdiği zihinsel imaja bağlı olarak başka birinden farklı olabilir (Walcott, 2006).

Fischbein'e (1993) göre şekil-kavram etkileşiminin gelişmesi doğal bir süreç değildir. Yani bu sürecin geliştirilebilmesi öğrenme ortamının yapısına bağlıdır. Öğrenme ortamları düzenlenirken öğrencilerin şekil ve kavram arasındaki etkileşimi görebilecekleri örneklerin sınıf ortamına getirilmesi çok önemlidir. Bu örnekler öğrencilerin kavram ve şekil arasında gerçekleşecek muhtemel uyumsuzlukları kavramın kontrolünde çözmeleri gerektiğini anlamalarına hizmet edecek şekilde hazırlanmalıdır (Karpuz, 2018). Sonuç olarak geometri öğrenmede karşılaşılan zorlukların üstesinden gelmek için kavramları ve imajları içeren uygun geometri öğretiminin gerekli olduğu söylenebilir.

2.4.2. Duval'in bilişsel modeli

Duval'in çalışmalarına (1995, 1998) bakıldığında, geometride bilişsel süreçlere vurgu yaptığı görülmektedir. Bundan dolayı Duval'in geometrik düşünmeye yönelik oluşturduğu modelin, geometri öğrenimindeki bilişsel boyutları anlama konusunda fikir verebileceği düşünülmektedir (Arıcı, 2012; Jones, 1998). Duval bahsi geçen çalışmalarında, "bilişsel kavrama" ve "bilişsel süreç" kavramlarını ele almış ve bu kavramların türlerini örneklerle detaylı olarak açıklamıştır.

2.4.2.1. Bilişsel kavrama

Bir çizimin yorumlanması ve üzerinde matematiksel işlemler yapılması durumunda şeklin farklı bilişsel kavrama türlerinden doğrudan etkilendiği belirtilmektedir (Duval, 1994'ten akt. Tapan-Broutin, 2016). Duval (1995), bilişsel kavrama türlerini "algısal kavrama", "sıralı kavrama", "söylemsel kavrama" ve "işlevsel kavrama" olarak ifade etmiştir. Bir çizimin geometrik bir şekil olarak işlev görmesi için algısal kavramayı ve diğer üç kavrama türünden en az birini harekete geçirmesi gerekir (Duval, 1995). Birbirleriyle hiyerarşik ilişkisi olmayan bu kavramalar, şekle bakma süreçleri olarak da ifade edilmektedir (Güven ve Karpuz,

2016). “Bu süreçlerin her biri şekil üzerindeki matematiksel bilginin fark edilmesine imkân sağlayacak farklı işlevleri yerine getirmekte ve bir problemin çözümünde birbiriyle etkileşimli olarak hareket etmektedir” (Karpuz, 2018, s. 24). Duval (1995, s. 145-147) bu kavrama türlerini şu şekilde açıklamaktadır:

Algısal kavrama: Bir düzlemde ya da uzayda bulunan bir şeyin (şekil, bir şeyin temsili vb.) ilk bakıştaki tanınmasına ilişkin kavramdır. Bu aşama; şekli isimlendirme, boyutu hakkında bilgi verme, şekli oluşturan temel geometrik elemanların (nokta, doğru, üçgen, daire vb.) farkına varma gibi süreçleri içerir. Algılanan şekle ait alt şekilleri de tanıyabiliriz. Ancak bu kavrama ile şekil ile alt şekiller arasındaki ilişkiler fark edilememektedir.

Sıralı kavrama: Bir şekli oluştururken veya yapısını tanımlarken sıralı kavramaya ihtiyaç duyulur. Farklı şekil birimlerinin ortaya çıktığı belirli bir sıra vardır. Bu sıralama, şeklin matematiksel özelliklerinin yanı sıra kullanılan teknik araçlara (cetvel, pergel vb.) da bağlıdır.

Söylemsel kavrama: Bir çizimde temsil edilen matematiksel özellikler yalnızca algısal kavrama yoluyla belirlenemez. Bunun için şekil ile ilgili bazı bilgilerin verilmesi (sözel olarak) ve bazılarının da bu bilgilerden çıkarılması (tanımlar ve teoremler yardımıyla) gerekmektedir. Çünkü şekil ile ilgili bazı bilgiler olmadan geometrik şekil belirsizdir ve kişiler aynı şekli ve özellikleri göremezler.

İşlevsel kavrama: Geometride problemler genellikle şeklin ilk görünümü üzerinden çözülemez ve şekil üzerinde bazı değişiklikler yapılması gerekebilir. İşlevsel kavrama verilen bir şeklin fiziksel ya da zihinsel olarak farklı biçimlerde düzenlenmesini içeren kavramdır. Epistemolojik işlevi keşfetme olan bu kavramda bir problemin çözümü ya da kanıtı için şeklin değişimi söz konusudur.

2.4.2.2. Bilişsel süreçler

“Bilişsel kavrama” geometrik çizimlerle çalışmayı ifade ederken (Jones, 1998), Duval (1998) bu durumu daha ileriye götürerek geometrik düşünmenin belirli epistemolojik işlevleri yerine getiren üç tür bilişsel süreci içerdiğini öne sürmüştür. Bu bilişsel süreçleri ise görselleştirme, oluşturma ve muhakeme olarak tanımlamıştır. Geometrik düşünme için önerilen bu bilişsel süreçler, geometrik bir ifadenin görsel temsilinin rolüne dikkat çekmesi bakımından değerli görülmektedir (Pittalis ve Christou, 2010).

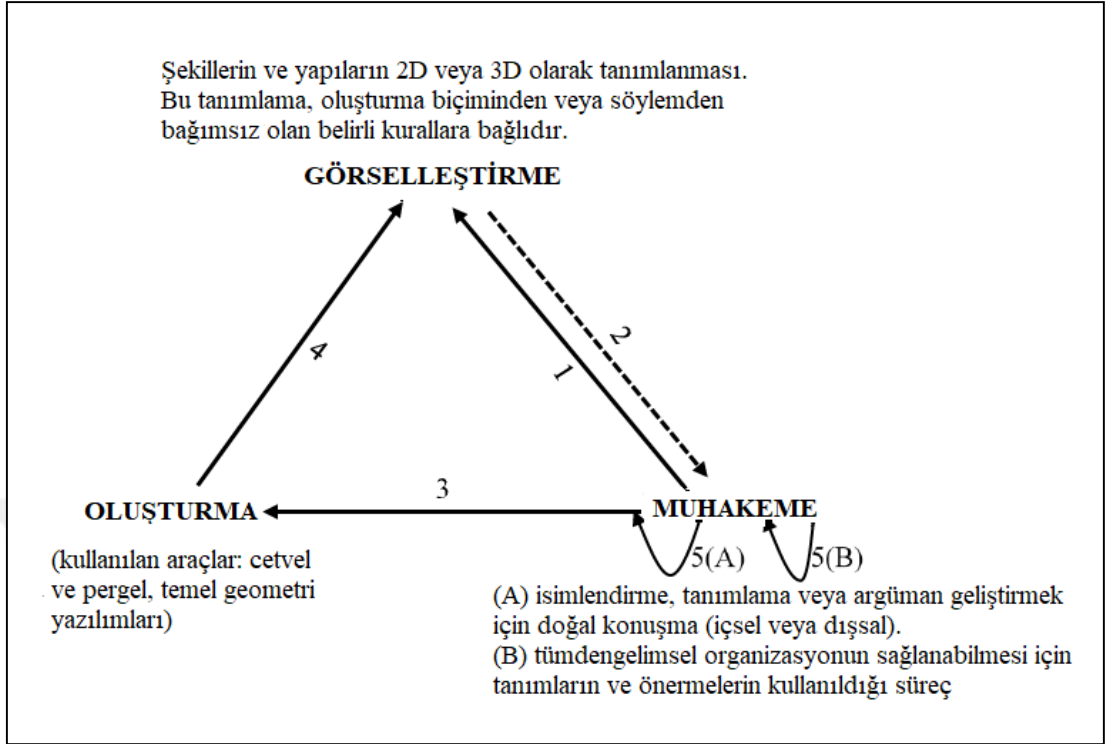
Duval'e (1998, s. 38) göre görselleştirme, "şekillerin ve yapıların 2 boyutlu veya 3 boyutlu olarak tanımlanmasıdır." Ayrıca görselleştirme süreçleri, geometrik bir ifadenin görsel temsilini ve karmaşık bir geometrik durumun buluşsal açıklamasını içerir (Arıcı, 2012). "Bu görsel temsiller kendi içinde matematiksel özellikler içeren geometrik şekillerdir. Fakat uzayın geometrik şekiller ile temsil edilmesi yani görselleştirilmesi geometrik ilişkilerin belirlenebilmesi için yeterli değildir" (Karpuz, 2018, s. 19). Bunun için görselleştirme süreci ile birlikte yukarıda anlatılan bilişsel kavramanın da olması gerektiği belirtilmektedir (Güven ve Karpuz, 2016). Gal ve Linchevski (2010) görselleştirmenin, özellikle işlevsel kavramada çok önemli olduğuna dikkat çekmişlerdir.

Oluşturma süreci; pergel, cetvel ve dinamik geometri yazılımları gibi araçlar yardımıyla, temsil ve gözlenen sonuçlar üzerindeki eylemlerin temsil edilen matematiksel nesnelerle ilişkili olduğu bir model olarak hizmet eden yapıları oluşturmayı ifade eder (Duval, 1998). "Geometrik şeklin bir modelinin inşa edilmesi şeklin görselleştirilmesini sağlayarak şekle ait matematiksel özelliklerin model üzerinden incelenmesine, fark edilmesine imkân sağlamaktadır. Bu nedenle geometrik şekillerin inşası şekle ait matematiksel özelliklerin görülebilmesi açısından da oldukça önemlidir (Karpuz, 2018, s. 19). Muhakeme süreci ise bilginin açıklanması, ispatlanması ve içeriğinin genişletilmesi gibi eylemleri içeren söylemsel süreçlerden oluşur (Duval, 1998). Duval (1998) muhakeme süreçlerini, kullanılan temsil biçimlerine göre doğal muhakeme süreci ve teorik muhakeme süreci olarak ikiye ayırmıştır. Bilginin doğal dil ve şekil ile temsili üzerinden yürütülen şekil odaklı muhakeme süreci doğal muhakeme süreci olarak isimlendirilirken, bilginin sembolik gösterimi üzerinden yürütülen tündengimsel ilişkiler süreci teorik muhakeme süreci olarak isimlendirilir (Karpuz, 2018).

"Duval, bu farklı süreçlerin ayrı ayrı gerçekleştirilebileceğine dikkat çekiyor.

Örneğin, görselleştirme oluşturmaya bağlı olmak zorunda değildir. Benzer şekilde, oluşturma görselleştirmeye yol açsa bile, oluşturma süreçleri aslında sadece ilgili matematiksel özelliklere ve kullanılan araçların sınırlılıkları arasındaki ilişkilere bağlıdır. Benzer şekilde, örneğin görselleştirme bir ispatın bulunmasına yardımcı olarak muhakemeye yardımcı olsa bile, bazı durumlarda görselleştirme yanıltıcı olabilir." (Jones, 1998, s. 32).

Güven ve Karpuz (2016), bu süreçlerin her birinin farklı bilişsel işlevleri yerine getirdiğini ve aralarındaki etkileşimin geometride yetkinlik kazandırdığını belirtmişlerdir. Duval (1998) görselleştirme, oluşturma ve muhakeme süreçleri arasındaki ilişkileri Şekil 9'daki gibi göstermiştir:



Şekil 9. Görselleştirme, oluşturma ve muhakeme arasındaki ilişkiler (Duval, 1998)

“Şekil 9’da gösterilen oklar bilişsel süreçlerin birbirlerini destekleme yönlerini göstermektedir. Ayrıca 5(A) ile doğal muhakeme süreci gösterilirken 5(B) ile de teorik muhakeme süreci gösterilmektedir. 2 numaralı ok görselleştirmenin her zaman muhakemeye yardım etmeyebileceğini göstermek için noktalı olarak verilmiştir. 5(B) (teorik muhakeme süreci) numaralı ok muhakemenin oluşturma ve görselleştirme süreçlerinden bağımsız olarak da gelişebileceğini belirtmek için döngüden ayrı gösterilmiştir. Bununla birlikte geometrik bir şekil oluşturulurken aynı zamanda görselleştirildiğinden oluşturma sürecinden muhakeme sürecine görselleştirmeden bağımsız bir geçiş yoktur.” (Karpuz, 2018, s. 23).

Duval (1998) okul matematiğinin temel problemini öğrencilerin bilişsel süreçler arasındaki ilişkiyi öğrenememesi olarak görmekte ve bu problemin çözümü için bu bilişsel süreçlerin ayrı ayrı geliştirilmesi gerektiğini düşünmektedir. “Bu ise bilişsel süreçlerin ön koşul ilişkileriyle birbirine bağlı olmadığını göstermekle beraber geometrik düşünme sürecini hiyerarşik basamaklar halinde ele alan gelişimsel yaklaşım ile bilişsel yaklaşım arasındaki temel farkı yansıtmaktadır” (Güven ve Karpuz, 2016, s. 256).

2.5. İlgili Araştırmalar

Yapılan literatür taraması sonucunda araştırma konusu ile ilgili bulunan çalışmalar detaylı olarak incelenmiştir. İnceleme doğrultusunda ilgili çalışmaların yurt içinde ve yurt dışında yapılan araştırmalar olarak sunulması uygun görülmüştür. Çalışmalar sunulurken, çalışmanın amacına, çalışma grubuna ve çalışmada elde edilen sonuçlara kısaca yer verilmiştir.

2.5.1. Yurt içinde yapılan araştırmalar

Türkiye’de bulunan veri tabanları, Google Scholar ve YÖK Ulusal Tez Merkezi araştırma boyunca sürekli ve detaylı olarak taranmıştır. “Görsel akıl yürütme”, “görselleştirme” ve “görsel temsil” kavramları tarama yapılırken anahtar kelimeler olarak kullanılmıştır. Matematik eğitime yönelik yürütülen bu çalışmalar incelenmiş ve kuramsal bir yapıda ele alınarak derlenmeye çalışılmıştır.

Yurt içinde yapılan çalışmalar incelendiğinde, ilk dikkati çeken konulardan birinin görselleştirme kavramını merkeze alarak yürütülen çalışmaların ağırlıklı olmasıdır. Özellikle görselleştirme yaklaşımı ile yapılan öğretimin etkililiğini inceleyen deneysel çalışmaların yapıldığı görülmüştür. Bahsedilen çalışmalardan biri İpek (2003) tarafından matematik öğretmeni adayları ile yürütülen çalışmadır. Bu çalışmada görselleştirme yaklaşımının, öğrencilerin kompleks sayılar ile ilgili kavramlar konusundaki başarılarına, bu kavramları uzun süreli belleklerinde tutmalarına ve matematiğe karşı tutumlarına etkisi incelenmiştir. Çalışma sonucunda deney grubundaki öğrencilerle kontrol grubundaki öğrenciler arasında kompleks sayı kavramları başarıları açısından istatistiksel olarak önemli bir farklılığın olduğu bulunmuştur. Ayrıca deney ve kontrol grupları arasında öğrencilerin matematiğe karşı tutumları arasında önemli bir farklılık oluşmamakla birlikte, öğrencilerin kompleks sayılar ile ilgili kavramları uzun süreli belleklerinde tutmaları üzerinde görselleştirme yaklaşımının önemli bir etkisinin olduğu tespit edilmiştir.

Konyalıoğlu (2003), vektör uzayları konusundaki kavramların anlaşılmasında görselleştirme yaklaşımının etkililiğini incelemiştir. Çalışma ilköğretim matematik öğretmenliğinde öğrenim gören ikinci sınıf öğrencileri ile yürütülmüştür. Araştırma kapsamında verilen derslerde, deney grubunda görselleştirme yaklaşımına, kontrol grubunda ise geleneksel öğretim yöntemlerine yer verilmiştir. Sonuç olarak vektör uzayları konusundaki kavramların anlaşılmasında görselleştirme yaklaşımının geleneksel yaklaşımdan daha etkili olduğu ortaya çıkmıştır. Bununla birlikte deney ve kontrol gruplarının matematiğe yönelik tutumlarının deney grubu lehine anlamlı farklılık gösterdiği görülmüştür.

Bir başka çalışmada Şan (2008), özdeşlikler konusunda görselleştirmeden yararlanılarak yapılan öğretimin, sekizinci sınıf öğrencilerinin özdeşlik ifadelerini tanımlarına ve akademik başarılarına etkisini araştırmıştır. Araştırmada, görselleştirilmiş matematik öğretimi kullanılarak öğrenim gören deney grubu öğrencilerinin özdeşlikler konusunu öğrenmede kontrol grubu öğrencilerinden daha başarılı oldukları bulunmuştur. Bununla birlikte matematik dersinde görselleştirmeyi kullanmanın başarıyı arttırmada etkili bir yöntem olduğu ifade edilmektedir.

Yapılan çalışmalara benzer şekilde Tekin (2010) görselleştirme yaklaşımının onuncu sınıf öğrencilerinin trigonometri başarılarına, matematiğe yönelik tutumlarına ve öğrenilenlerin kalıcılığına etkisini araştırmıştır. Araştırmada, görselleştirme yaklaşımının öğrencilerin trigonometri başarıları ve matematiğe yönelik tutumları açısından deney grubu lehine olumlu etkileri olduğu bulunmuştur. Ayrıca görselleştirme yaklaşımının öğrencilerin trigonometri kavramlarını anlamalarında geleneksel öğretime göre daha etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Görselleştirmenin bir süre geçtikten sonra bilgiyi hatırlama ve uygulama yeteneğine yardım ettiği de belirtilmektedir.

Deneyssel yöntemle yürütülen bir diğer çalışmada Uysal-Koğ ve Başer (2012), görselleştirme yaklaşımının sekizinci sınıf öğrencilerinin matematiğe yönelik tutumlarına ve matematik başarılarına etkisini incelemişlerdir. Çalışmada görselleştirme yaklaşımı ile yürütülen matematik öğretiminin öğrencilerin matematiğe yönelik tutumlarını ve başarılarını olumlu yönde etkilediği sonucuna ulaşılmıştır.

Çalışmalarında görselleştirme terimini kullanmasalar da üstteki çalışmalara benzer olduğu düşünülen bir başka çalışma Kükey ve arkadaşları (2019) tarafından yürütülen araştırmadır. Bu araştırmayla, kesirler konusunun görsel materyal ile öğretiminin ilköğretim dördüncü sınıf öğrencilerinin matematik başarı ve tutumlarına olan etkisini incelemişlerdir. İnceleme neticesinde görsel materyal ile öğretimin yapıldığı deney grubunun matematik başarısının, normal öğretim yapılan kontrol grubuna göre anlamlı düzeyde arttığı belirlenmiştir. Ayrıca deney grubunun matematiğe yönelik tutumunun kontrol grubuna göre daha olumlu düzeyde olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Benzer şekilde Körükçü (2008) ise altıncı sınıf tam sayılar konusunun görsel materyal ile öğretiminin öğrencilerin matematik başarılarına, tutumlarına ve kaygılarına etkisini araştırmıştır. Görsel materyal destekli öğretim, deney grubu ile kontrol grubu arasında matematik başarıları ve hatırlama düzeyleri açısından deney grubu lehine olumlu yönde farklılıklar oluşturmuştur. Fakat görsel materyal ile yapılan öğretim, öğrencilerin matematik

tutum düzeylerinde artmaya ve matematik kaygı düzeylerinde azalmaya sebep olmasına rağmen bu durum istatistiksel olarak bir fark oluşturmamıştır.

Matematik öğretiminde öğrencilere kazandırılması gereken temel becerilerden birinin problem çözme (Altun, 2014; MEB, 2009; NCTM, 2000) olmasından dolayı problem çözme ve görselleştirme ile ilgili de birçok çalışma yapıldığı görülmüştür. Delice ve Sevimli (2010), on birinci sınıf öğrencilerinin geometri problemlerini çözme süreçlerinde öğrencilerin görselleştirme becerilerini derinlemesine incelemişlerdir. Çalışmada, öğrencilerin üç boyuta kıyasla, iki boyutlu; sözel temsillere kıyasla görsel temsilli, boyutlar arası geçişlere (2D-3D, 3D-2D) kıyasla boyut içi geçişlerin (2D-2D, 3D-3D) olduğu problem türlerinde daha başarılı olduklarını belirlemişlerdir. Sözel problemlerin görsel temsili, ek çizim ve boyut geçişlerinin gerektiği problemlerde, çözüm sürecine şekil üzerinde yapılacak değişikliklerin yansıtılamadığı ya da yanlış kullanıldığı, bunun da başarıya engel olduğu gözlenmiştir.

Benzer bir başka çalışmada Yaprak (2019), geometrik problemlerin çözümünde yedinci sınıf öğrencilerinin görselleştirme süreçlerini incelemiştir. Çalışmanın sonuçlarına göre öğrenciler görsel problemlerin çözümünde, sözel problemlerin görsel çözümlerini gerçekleştirmeye göre daha çok zorlanmışlardır. Bunun yanı sıra boyut içi (2D-2D, 3D-3D) geçiş problemlerinde, boyutlar arası (2D-3D, 3D-2D) geçiş gerektiren problemlere göre daha yüksek başarı göstermişlerdir.

Delibaş (2020), matematik problemi çözme süreçlerinde görselleştirme ve görsel temsile dayalı etkinlikler yoluyla yapılan öğretimin sekizinci sınıf öğrencilerinin problem çözme başarılarına, problem çözmeye ve matematik dersine yönelik tutumlarına etkisini incelemiştir. Araştırma sonucunda, görselleştirme ve görsel temsil kullanılarak yapılan öğretimin öğrencilerin problem çözme başarılarını istatistiksel olarak anlamlı etkilediği ortaya çıkmıştır.

Günaydın (2011), dokuzuncu sınıf öğrencilerinin cebir ve geometri problemlerini çözüm süreçlerini görselleştirme ve göstergebilim bağlamında incelemiştir. Araştırmada cebir testlerinde öğrencilerin genelde sözel yaklaşımlar gösterirken geometri testlerinde ise görsel ve sözel yaklaşımları göstermede dengeli olduğu görülmüştür. Öğrenci cevapları göstergebilim bağlamında incelendiğinde ise öğrencilerin cebir testlerinde ağırlıklı olarak sözel göstergeler kullandığı ortaya çıkmıştır. Geometri testlerinde ise soru gövdelerinin sözel ya da görsel olmasına göre gösterge kullanımında farklılık olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Bir başka araştırmada Özkan ve arkadaşları (2018) altıncı sınıf öğrencilerinin kesirler ile ilgili soruları görsel model kullanarak çözüp çözemeyeceklerini ve öğrencilerin görselleştirmeyi kullanma durumlarını araştırmışlardır. Altıncı sınıf öğrencilerinin kesirler

üzerinde çalışırken görsel model kullanmada zorluk yaşadıkları ve görsel model kullanmadan kuralları dikkate alarak hesaplama yapmayı tercih ettikleri belirlenmiştir.

Problem çözme sırasında öğrencilerin geometrik şekil ve kavram bilgilerini nasıl kullandıklarını araştıran Karpuz ve diğerleri (2014) lise öğrencileri ile bir çalışma gerçekleştirmişlerdir. Araştırma sonucunda öğrencilerin şekilli soruların çözümünde daha başarılı oldukları ortaya çıkmıştır. Şekilsiz soruların çözülmesinde yaşanan güçlüklerin, öğrencilerin kavramsal bilgiyi temsil eden şekli çizememesinden veya yanlış çizmesinden ve çözüm yapılırken prototip şekillerin etkisinde kalınmasından kaynaklandığı sonucuna varılmıştır.

Usta ve arkadaşları (2018) ise dördüncü sınıf öğrencilerinin problem çözme başarıları üzerinde görsellerin etkisini araştırmışlardır. Çalışmada, deney grubuna görsel içeren dört problem yöneltilmiş, kontrol grubuna ise aynı problemlerin görsel olmayan durumları yöneltilmiştir. Dördüncü sınıf öğrencilerinin problem çözme başarılarında görsellerin etkili olduğu sonucuna varılmıştır.

Önal-Durmaz (2019), yaptığı araştırmada altıncı sınıf öğrencilerinin matematik dersinde kesirlere yönelik sözel problemleri şekil çizme stratejisi ile çözme becerilerini incelemiştir. Bunun yanında problem çözme sürecinde öğrencilerin yaptıkları hataları ve yaşadıkları zorlukları da belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırma sonucunda altıncı sınıf öğrencilerinin kesirlerle ilgili sözel problemleri şekil çizme stratejisi ile çözme başarılarının oldukça düşük olduğu bulunmuştur. Öğrencilerin problemde verilen ve istenenleri göz ardı etme, problemdeki sözel ifadeyi şekle aktaramama, anahtar kelimelere odaklanarak hata yapma ve çözüm için gerekli şekli çizememe gibi yetersizlikleri olduğu ifade edilmiştir.

Görselleştirmeye yönelik farklı bağlamlarda ele alınan çalışmalarda bulunmaktadır. Örneğin; Yılmaz ve Argun (2018) görselleştirmelerin matematiksel soyutlamadaki rolünü araştırmışlardır. Matematik öğretmen adayları ile yürütülen çalışmada, katılımcıların soyutlama ile uğraşırken görselleştirmeleri sıklıkla ve farklı şekillerde kullandıkları ortaya çıkmıştır. Soyutlama süreçlerinde kullanılan görselleştirmeler, eşlik kavramının anlaşılmasına önemli ölçüde yardımcı olmuş ve katılımcıların görsel imajlarını güçlendirdiği saptanmıştır.

Yılmaz ve Argün (2013) matematik öğretmen adayları ile gerçekleştirdikleri başka bir çalışmada genelleme sürecinde görselleştirmeyi incelemişlerdir. Araştırmada katılımcıların görselleştirmelere sıklıkla ve farklı şekillerde başvurduğu görülmüş ve katılımcıların farklı görsel imajlara sahip oldukları bulunmuştur. Kullandıkları görselleştirmelerin kavramlar arasındaki ilişkileri tamamlamada önemli bir yere sahip olduğu görülmüştür. Ayrıca görselleştirmelerin genelleme sürecinin gelişimine de katkı sağladığı ifade edilmiştir.

Matematik öğretmen adayları ile yürütülen bir başka araştırmada Gülşen-Turgut (2019), katılımcıların bazı matematiksel kavramları görselleştirme süreçlerini incelemiştir. Araştırma sonucunda matematik öğretmen adaylarının kavramların resimlerini rastgele çizmedikleri, kavramla ilişkilendirdikleri birikimlerinden yola çıkarak çizdikleri görülmüştür. Resimlerini temsil ve tasarım açısından kendi içinde ve diğer resimleriyle sürekli karşılaştırdıkları, yetersiz buldukları resimlerini kısmen ya da tamamen değiştirdikleri gözlemlenmiştir. Matematik öğretmen adaylarının çizdikleri kavram resimleri aracılığıyla kavramlar arasında ya da kavramlar ile çizdikleri resimler arasında yeni ilişkiler keşfetmişler ve birtakım genellemelere ulaşmışlardır.

Taşova (2011) matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme sürecine girdiklerinde görselleştirme beceri düzeylerinin nasıl olduğunu ve öğretmen adaylarının içinde bulundukları görsel süreci incelemiştir. Çalışmada, öğretmen adaylarının zihnin görsel-resimsel bileşenlerini sözel-mantıksal bileşenlerine göre büyük oranda daha az tercih ettikleri sonucuna ulaşılmıştır. Bunun yanında geometrik düşünen adayların çözüm sürecinde farklı perspektiflerden yaklaşarak, zihnin görsel-resimsel bileşenlerini soyut/matematiksel kavramlarla birlikte yürütmesinden dolayı, modelleme etkinliklerinde yüksek performans gösterdikleri tespit edilmiştir.

Delice ve arkadaşları (2014) ise üniversite öğrencilerinin kuadratik yüzeyler konusundaki görselleştirme süreci farkındalıklarını fakülte farklılıkları bağlamında değerlendirmişlerdir. Bu değerlendirme ile birlikte örneklem grubundaki öğrencilerin büyük çoğunluğunun kuadratik yüzeylerin görsel ve sembolik temsilleri arasında geçiş yapmakta zorlandıkları belirlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin görselleştirme sürecindeki performanslarının kayıtlı olunan fakülte türüne göre değiştiği gözlenmiştir.

Tekin ve Konyalıoğlu (2010) ise çalışmalarında görselleştirmenin trigonometrik formüller üzerinde kullanımını araştırmışlardır. Bu amaç doğrultusunda belirledikleri bazı trigonometrik formüllere yönelik görsel çizimler oluşturmuşlardır. Araştırma sonucunda öğrencilerin kavramlar arası ilişkileri görememelerinden dolayı cebirsel ispatta hatalar yaptıklarını ve görselleştirme ile bu hataların azaltılabileceğini ifade etmişlerdir. Toplam-fark formüllerinin görselleştirilmesinin formüller içerisinde yer alan kavramların birbirleri arasındaki ilişkinin görülmesini kolaylaştıracağı düşünülmektedir.

Tüm bu görselleştirme çalışmalarının yanı sıra Mancoğlu (2019), matematik öğretmen adaylarının bazı matematiksel teoremlerin ispatlarını görselleştirme durumlarını incelemiştir. Katılımcıların ispatlarda kullandığı resimlerin, çoğunlukla teoremin içeriğindeki kavramların zihinlerinde oluşturduğu resimleri betimleyen görüntüler olduğu görülmüştür. İspatların

görselleştirilme süreci bütün olarak ele alındığında öğretmen adaylarının birbirinden farklı ispat resimleri oluşturdukları görülmüştür. Kimi adayların teoremin bütününe temel alarak ispatı görselleştirdiği kimi öğrencilerin de teorem içerisinde yer alan kavramlardan yola çıkarak ispatı görselleştirdikleri ifade edilmiştir. Bunun yanında bazı adayların görselleştirme sürecinde cebire eğilim gösterdikleri görülmüştür.

Literatürde görselleştirmeye olduğu gibi görsel temsil kavramına odaklanılan çalışmaların olduğu da görülmüştür. Bu çalışmalardan birinde Ergen (2018), dördüncü sınıf öğrencilerinin problem çözme sürecinde oluşturduğu temsil türlerini (şematik, resimsel ve işlemsel) incelemiştir. Araştırmada, problem çözme sürecinde şematik temsil oluşturan öğrencilerin % 87.4 oranında probleme doğru cevap verdiği görülmüştür. Resimsel temsil oluşturulan durumlarda problemin yanlış çözülme oranının % 91.9 olduğu ve işlemsel temsil oluşturulan durumlarda ise % 67.5 oranında probleme yanlış cevap verildiği görülmüştür.

Görsel temsil ile ilgili bir başka çalışmada Özsoy (2018), sınıf öğretmeni adaylarının sözel problemlerin çözümlerinde ürettikleri görsel temsilleri öğretmen adaylarının sahip oldukları uzamsal beceri düzeyleri bakımından değerlendirmiştir. Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının oluşturduğu görsel temsil türleri şematik ve resimsel temsil olarak belirlenmiştir. Yüksek uzamsal becerilere sahip olan öğretmen adaylarının yapılandırılmış şematik temsilleri doğru bir şekilde oluşturabildiklerini, ancak düşük uzamsal becerilere sahip olanların ise resimsel temsiller üretme eğiliminde oldukları bulunmuştur.

Çilingir-Altın ve Önal (2022), dördüncü sınıf öğrencilerinin problem çözerken kullandıkları görsel ve görsel olmayan temsilleri araştırmışlar ve bu temsiller arasındaki varsayılan farklılıkların problem çözme performansını yordayıp yordamadığını incelemiştir. Araştırmada öğrencilerin Matematiksel İşlem Testi'ne verdikleri yanıtlar analiz edilerek tercih edilen temsil türleri belirlenmiştir. Araştırma sonucunda testteki her bir problemin çözümünde sembolik temsil türü tercih edilmesine rağmen şematik temsil ile çözülmüş problemlerin doğru cevaplanma oranlarının daha yüksek olduğu görülmüştür. Bunun yanı sıra öğrencilerin kullandıkları temsil türlerinden sadece şematik temsili tercih etmenin problem çözme performansını yordadığı belirlenmiştir.

Araştırmanın ana kavramlarından biri olan görsel akıl yürütmeye yönelik olarak çok sınırlı sayıda çalışmaya rastlanılmıştır. Bu çalışmalardan biri Gülşen'in (2012) matematik öğretmen adayları ile yaptığı çalışmadır. Çalışmada, seçilen görsel ispatlar kapsamında matematik öğretmen adaylarının görsel akıl yürütme durumları incelenmiştir. Araştırmanın sonuçları öğretmen adaylarının görsel ispatları algılama, takip ettikleri süreç ve ulaştıkları sonuçların farkında olma ile ilgili birtakım zorluklarla karşılaştıklarını göstermiştir. Ayrıca

öğretmen adaylarının ispata, görsel ispat üzerinden ulaşmak yerine cebire eğilim gösterdikleri, çözüm süreçlerinde ispata odaklandıkları veya ispattan uzaklaştıkları tespit edilmiştir. Bununla birlikte görsel ispat üzerindeki çözümlerinin rastgele olmadığı, görsel ispattaki şekil ve çözümleri üzerinden stratejiler uyguladıkları ortaya çıkmıştır.

Görsel akıl yürütme ile ilgili bir başka çalışma Akkan ve diğerleri (2018) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada ise matematik öğretmenlerinin görsel teoremleri ispatlama bağlamında, görsel akıl yürütme becerileri ile geometrik düşünme düzeyleri ve uzamsal görselleştirme becerileri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Sonuç olarak matematik öğretmenlerinin görsel akıl yürütme becerileri ile geometrik düşünme düzeyleri ve uzamsal görselleştirme becerileri arasında bir ilişki olduğu bulunmuştur. Ayrıca daha yüksek geometrik düşünme düzeyine ulaşan öğretmenlerin, görsel teoremleri tanımada, onlar üzerine akıl yürütmede ve ispatlamada daha yetenekli oldukları tespit edilmiştir.

İlhan ve Aslaner (2018) ise matematik öğretmen adaylarının geometrik şekiller üzerine akıl yürütme becerilerini üniversite ve sınıf düzeyi değişkenleri açısından araştırmışlardır. Araştırma sonucunda matematik öğretmen adaylarının geometrik şekiller üzerine akıl yürütme becerilerinin orta düzeyde olduğu, bu düzeyin sınıflar arasında anlamlı farklılığa sahip olduğu görülmüştür. Ayrıca üniversite değişkenine göre de anlamlı farklılık gösterdiği sonucu elde edilmiştir.

Akıl yürütmeye odaklanılan bir başka çalışmada Sırtmaç (2018), sekizinci sınıf öğrencilerinin geometri problemlerinde akıl yürütme becerilerini nasıl yansıttıklarını incelemiştir. Araştırmanın sonucunda, öğrencilerin ilk klinik mülakatta yansıttıkları akıl yürütme becerilerinin büyük ölçüde kusurlu veya hatalı olduğu, yapılan odak grup görüşmelerinin birbirlerini olumlu etkileyerek son klinik mülakatta daha doğru akıl yürütmeler sergiledikleri gözlenmiştir.

Literatürde görsel akıl yürütmeyi görsel ispatlar yoluyla inceleyen çalışmalar olmasından dolayı bazı görsel ispat çalışmaları da incelenmiştir. Bunlardan birinde Şadan (2017), fen lisesi on birinci sınıf öğrencilerinin görsel ispat geliştirme süreçlerini analiz etmiştir. Çalışmada öğrencilerin görsel ispat geliştirme sürecinde yaptıkları hatalar ve karşılaştıkları zorluklar belirlenmiştir. Yapılan klinik görüşmelerde bu hatalar ve zorluklar giderilmeye çalışılmıştır. Süreç sonunda öğrenciler, görsel ispat geliştirme sürecini yararlı bulduklarını ve süreçten keyif aldıkları belirtmişler ve görsel ispatların matematik sınıflarında kullanılması gerektiğini ifade etmişlerdir.

Uğurel ve diğerleri (2016), üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel ispata farklı bakış açıları geliştirebilmeleri adına görsel çizimlerden yararlanabilme durumlarına dair bir

çalışma yürütmüşlerdir. Bu amaç doğrultusunda bir fen lisesinde 9. sınıfta öğrenim gören 3 erkek öğrenci ile çalışmışlardır. Çalışma kapsamında ilk olarak öğrencilere konu ile ilgili bilgilendirme yapılmış ve devamında beş hafta boyunca verilen teoremlerin ispatlarına ait görseller oluşturmaları istenmiştir. Araştırma sonucunda öğrencilerin sözel olmayan ispatlar geliştirme ve kanıtları görseller kullanarak gösterme konusunda başarılı oldukları görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin ilk olarak kendilerine verilen görsel çizimleri anlama konusunda zorlanmadıkları gibi kendi çizimlerini oluştururken de zorlanmadıkları görülmüştür. Son olarak ispatlarda görsellerden faydalanmanın tüm kavramların anlaşılması konusunda zenginlik yaratacağı ifade edilmiştir.

Bir diğer çalışmada Polat ve diğerleri (2019) matematik öğretmen adaylarının Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ile uzamsal düşünmelerinin görsel ispatlarla ilişkisini araştırmışlardır. Çalışmada Van Hiele geometrik düşünme düzeyi ve görsel ispat becerisi arasında anlamlı bir ilişki bulunmuştur. Buna karşın görsel ispat becerisi ve uzamsal yetenek arasında anlamlı bir ilişki bulunamamıştır.

Yurt içinde yapılan çalışmalara bakıldığında genel olarak görselleştirme kavramına yönelik çok fazla sayıda çalışma yapıldığı görülmektedir. Görsel akıl yürütme ve görsel temsile yönelik çalışmaların ise sınırlı sayıda olduğu söylenebilir. Ayrıca yapılan çalışmaların birçoğunun son yıllarda gerçekleştirildiği ve genellikle öğretmen adaylarıyla yürütüldüğü görülmüştür. Bunun yanında diğer öğrenim kademesinde bulunan öğrencilerle de çalışmalar yapılmıştır.

Çalışmaların bazılarında, görselleştirme yaklaşımının başarı, tutum ve öğrenilenlerin kalıcılığı gibi değişkenler üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Bunun yanında öğrencilerin veya öğretmen adaylarının görselleştirme süreçlerine, görselleştirmenin bazı değişkenlerle ilişkisine, modelleme ve problem çözme süreçlerinde görselleştirmeye ve görselleştirmenin genelleme ve soyutlamadaki rolüne odaklanıldığı tespit edilmiştir. Bazı çalışmalarda ise öğretmen adaylarının görsel ispat yapma bağlamında görsel akıl yürütme durumlarının incelendiği görülmüştür. Birkaç çalışmada ise katılımcıların problem çözme sürecinde oluşturdukları görsel temsil türleri incelenmiştir. Görüldüğü gibi görsel akıl yürütmeye yönelik çalışmalar oldukça sınırlıdır. Ortaokul seviyesindeki öğrencilerle yürütülen bir çalışma ise bulunmamaktadır.

2.5.2. Yurt dışında yapılan araştırmalar

Yurt içinde yapılan çalışmalarda olduğu gibi yurt dışında yapılan çalışmalara da ulaşmak amacıyla Web of Science, ERIC, Proquest gibi yurt dışı kaynaklı veri tabanları sık sık ziyaret edilmiştir. Yine benzer şekilde görsel akıl yürütme, görselleştirme ve görsel temsil

kavramlarının İngilizce karşılıkları tarama yapılırken kullanılan anahtar kelimeler olmuştur. Bulunan araştırmalardan matematik eğitimi ile ilgili olan çalışmalar incelenmiş ve kuramsal bir yapıda ele alınarak derlenmeye çalışılmıştır. Çalışmanın amacı doğrultusunda ilgili alandaki güncel yapı sunulmuş ve alandaki eksiklikler belirlenmiştir.

Yurt dışında yapılan araştırmalarda görsel temsil ve görselleştirme ile ilgili birçok çalışma yapıldığı görülmüştür. Bunun yanında görsel akıl yürütmeye yönelik çalışmalar da bulunmaktadır. Öncelikli olarak görsel temsil kavramını ele alarak yapılan çalışmalara değinecek olursak, bu çalışmaların öğrencilerin problem çözme becerileri doğrultusunda şekillendiği söylenebilir. Bahsedilen çalışmalardan birinde Hegarty ve Kozhevnikov (1999), altıncı sınıf öğrencilerinin görsel-uzamsal temsil yeteneklerinin matematikte problem çözme nasıl etilediğini araştırmışlardır. Çalışmada matematiksel problem çözmede kullanılan iki tür görsel-uzamsal temsil türü belirlenmiş ve bunlar şematik temsiller ve resimsel temsiller olarak adlandırılmıştır. Şematik temsillerin kullanımı matematiksel problem çözmede başarı ile pozitif yönde ilişkiliyken, resimsel temsillerin kullanımının başarı ile negatif yönde ilişkili olduğu bulunmuştur. Bu çalışmaya benzer bir araştırma Booth ve Thomas (1999) tarafından ortaokul öğrencileri ile yürütülmüştür. Çalışmada düşük ve orta görsel-uzamsal yeteneğe sahip iki grubun sözel, resimsel ve şematik gösterimleri sunulan aritmetik problemlerini çözme performansları karşılaştırılmıştır. Çalışma sonucunda görsel uzamsal becerileri daha yüksek olan grubun sözel, resimsel ve şematik gösterimleri sunulan problemler üzerinde daha iyi performans gösterdikleri ortaya çıkmıştır. Van Garderen ve Montague (2003) de altıncı sınıfta öğrenim gören öğrenme güçlüğü olan, orta başarılı ve üstün yetenekli öğrencilerin problem çözme ve görsel-uzamsal temsil kullanma performanslarını araştırmışlardır. Sonuçlar, üstün yetenekli öğrencilerin diğer iki gruba göre önemli ölçüde daha fazla görsel-uzamsal temsil kullandıklarını göstermiştir. Öğrenme güçlüğü olan öğrenciler akranlarına göre önemli ölçüde daha fazla resimsel temsil kullanmışlardır. Aynı zamanda başarılı matematiksel problem çözme, şematik temsillerin kullanımıyla pozitif olarak ilişkilendirilirken, resimsel temsillerin kullanımıyla negatif olarak ilişkilendirilmiştir.

Boonen ve arkadaşları (2014) ise altıncı sınıf öğrencilerinin sözel problemleri çözme sürecinde görsel temsil türlerinin rolünü araştırmışlardır. Araştırmada görsel temsil kullanmayan öğrencilere göre doğru bir görsel-şematik temsil üreten öğrencilerin problemi doğru bir şekilde çözme şansının neredeyse altı kat arttığı ortaya çıkmıştır. Bunun yanında hatalı görsel-şematik ve resimsel temsillerin ise öğrencilerin problem çözme başarısını düşürdüğü belirlenmiştir.

Ahmad ve diğerleri (2010), sözel problemleri çözme girişiminde bulunan dördüncü sınıf öğrencilerinin kullandıkları görsel temsilleri incelemişlerdir. Öğrencilerin çok küçük bir kısmının resimsel temsil kullanarak problemleri çözdüğünü ve bununla birlikte öğrencilerin çoğunun şematik temsilleri kullanmayı tercih ettiklerini bulmuşlardır. Bu sonuç doğrultusunda öğrencilerin problem çözme anlamalarına yardımcı olmak için farklı temsil türlerini kullanma fırsatı verilmesi gerektiği vurgulanmıştır.

Başka bir çalışmada George (1997), lise öğrencilerinin problem çözmede görsel temsilleri matematiksel olarak ne zaman ve nasıl kullandıklarını incelemiştir. Araştırmada, kızların diyagramları erkeklerden daha sık kullandıkları ortaya çıkmıştır. Bunun yanında erkekler basit diyagramlar oluşturma eğiliminde iken kızların diyagramları değiştirerek karmaşık görsel temsiller yaratma eğiliminde olduğu gözlenmiştir. Ayrıca yüksek puan alan öğrencilerin genellikle çözümlerinde diyagramlar çizdiği ve dolayısıyla görsel temsilleri kullanan öğrencilerin problem çözmede daha başarılı oldukları ifade edilmiştir.

Üniversite öğrencileri ve akademisyenler üzerinde bir araştırma yürüten Stylianou ve Silver (2004) ise ileri düzey matematiksel problem çözmede görsel temsillerin rolünü araştırmışlardır. Araştırmada, hem akademisyenlerin hem de öğrencilerin görsel temsil kullanımını uygulanabilir ve faydalı bir strateji olarak algıladıkları ortaya çıkmıştır. Bunun yanı sıra öğrenciler genellikle görsel temsillerin geometri problemleri için yararlı olacağını belirtirken, akademisyenler daha farklı problemler için de uygulanabileceğini belirtmişlerdir. Ayrıca akademisyenlerin öğrencilere göre daha sık görsel temsiller oluşturdukları ve bunları problem durumunu daha iyi anlamak ve problem çözmeye rehberlik etmek için dinamik nesneler olarak kullandıkları belirlenmiştir.

Üniversite öğrencileri ile yapılan bir başka çalışmada Zahner ve Corter (2010) sözel olasılık problemlerinin çözümünde görsel temsillerin rolünü araştırmışlardır. Araştırma neticesinde problemin çözümü için uygun görsel temsiller seçildiği zaman, olasılık problemlerinin çözümünü kolaylaştırdığını bulmuşlardır. Ayrıca öğrencilerin problem çözerken görsel temsilleri ne zaman ve nasıl kullandıklarını ortaya koymuşlardır.

Corter ve Zahner (2007) birlikte yürüttükleri başka bir çalışmada yine olasılık problemlerinin çözümüne odaklanmışlardır. İstatistik dersini alan yirmi altı lisansüstü öğrencisinin olasılık problemlerini çözerken kullandıkları görsel temsilleri incelemişlerdir. Sonuçlar öğrencilerin kendilerinin ürettikleri temsilleri problem çözme sürecinde kullandıklarını göstermiştir. Kullanılan görsel temsil türleri ise verilen bilgilerin yeniden düzenlenmesi, resimler, özgün şematik temsiller, ağaç diyagramları, listelemeler, olasılık tabloları ve Venn diyagramlarıdır. Bu farklı görsel temsillerin her birinin kullanım sıklığının,

çözülen olasılık probleminin türüne bağlı olarak değiştiğini ifade etmişlerdir. Bu bulgular doğrultusunda, öğrencilerin problemin yapısına uygun temsilleri seçmeye çalıştıklarını ve temsilin uygunluğunun problemin altında yatan şema tarafından belirlendiği sonucuna varmışlardır.

Csíkós vd. (2012) üçüncü sınıf öğrencileri ile yürüttükleri araştırmada, çizim yapmanın öğrencilerin sözel matematik problemi çözme becerilerini geliştirmesine etkisini incelemeyi amaçlamışlardır. Araştırma sonuçları, çizim yapmanın deney grubunun kontrol grubuna göre gelişim açısından daha başarılı olduğunu ortaya koymuştur. Bunun yanında araştırmada görsel temsillerin sözel problemleri çözmedeki rolünün öğrencilerin matematiksel inançlarını da şekillendirdiği ifade edilmiştir.

Bir diğer araştırmada ise görsel temsillerden biri olan diyagramlara odaklanılmıştır. Bu çalışmalardan birinde Pantziara vd. (2009), altıncı sınıf öğrencilerinin rutin olmayan problemleri çözme süreçlerinde diyagramların etkisini incelemişlerdir. Çalışmada, rutin olmayan problem çözümlerindeki başarının verilen diyagrama (ağ, hiyerarşik ve matrix) göre değiştiği belirlenmiştir. Matrixlerin, ağ ve hiyerarşik diyagramlara göre daha basit algılanıp yapılandırılabilirdiği sonucuna varılmıştır. Ayrıca öğrencilerin diyagramları yorumlamada ve verilenleri diyagrama yerleştirmede zorlandıkları görülmüştür.

Karaman-Dundar ve Otten (2022) klinik görüşmelere dayalı yaptıkları çalışmalarında, lise öğrencilerinin geometrik iddiaları kanıtlama sürecinde diyagramları nasıl yorumlayıp kullandıklarını araştırmışlardır. Araştırmada özellikle öğrencilerin diyagramlarla ilgili olarak kullandıkları sembollere, görsellere ve jestlere odaklanılmıştır. Araştırmanın en önemli bulgusunun, öğrencilerin verilen görevin özelliklerine göre oluşturdukları diyagramların farklılık göstermesi olduğu belirtilmiştir. Yeni bir şekil çizme gibi bazı görsel kaynakların, tipik şematik kayda uymayan veya bilinmeyen doğruluk değerlerine sahip görevler gibi belirli görevlerde düzenli olarak gerçekleştiği ortaya çıkmıştır. Jest kullanma, tüm görevlerde en sık kullanılan kanıtlama eylemi olurken, öğrenciler tarafından üretilen geçerli kanıtlamaların tümünde sembollerin, görsellerin ve jestlerin yer aldığı görülmüştür.

Diyagramlarla ilgili bir başka çalışmada Van Garderen ve arkadaşları (2014) yüksek başarılı olarak tanımlanan öğrenciler ile öğrenme bozukluğu olan öğrencilerin matematik problemlerini çözmek için diyagramları kullanırken yaşadıkları zorlukları belirlemeyi ve karşılaştırmayı amaçlamışlardır. İlkokul ve ortaokul öğrencileri ile yürütülen araştırmada, problemleri çözmek için diyagram kullanma yeterliliği çerçevesi doğrultusunda öğrencilerin yaşadıkları dokuz farklı zorluk belirlenmiştir. Ayrıca öğrenme güçlüğü olan öğrencilerin bu

zorlukları yaşama olasılığının, başarısı yüksek akranlarına göre daha fazla olduğu bulunmuştur.

Stylianou (2002) matematik problemi çözmede en sık önerilen stratejilerden biri olan diyagram çizmenin kullanımını deneysel olarak araştırmayı ve matematikçiler tarafından kullanımının doğasına ilişkin bazı iç görüler elde etmeyi amaçlamıştır. Katılımcıların her biri aktif olarak araştırmayla uğraşan ve üniversite seviyesinde ileri matematik dersleri veren doktora derecesi almış matematikçilerdir. Her bir matematikçiden beş matematik problemini çözmesi, sesli olarak düşünürken problem çözmedeki süreç ve davranışlarını tanımlaması istenmiştir. Onlar bu problemleri çözmekle uğraşırken diyagram çizme stratejileri incelenmiştir. Tecrübeli problem çözücülerin ispatı geliştirmede özel alt görevleri yerine getirmek için kullandıkları yolları ve aktiviteleri tamamlamada şekillerin onlara nasıl yardım ettiğini belirlemiştir. Çalışma, gerçekte matematikçilerin kendilerine bilinmez görünen problemleri çözmeye çalıştıkları zaman diyagramları çizdiklerini göstermiştir. Matematikçilerin problem çözmede kullandıkları görsel temsilin çok yapılandırılmış olduğunu, görsel temsilleri keşfettikleri zaman onları yapılandırdıklarını ve bunu sistematik bir şekilde yaptıklarını saptamıştır.

Xing (2016) ise farklı diyagram türlerinin üniversite öğrencilerinin olasılık problemi çözmedeki çözüm stratejisi seçimlerini ve başarı oranlarını nasıl etkilediğini araştırmıştır. Çalışma ile birlikte farklı diyagramların öğrencileri, sözel olasılık problemleri için farklı çözüm stratejileri seçmeye yönlendirdiği ve bu diyagramların problem çözme başarısını farklı şekilde etkilediği bulunmuştur. Bunun yanında problem çözme başarısını arttırmak amacıyla, bir diyagram temsiline yapısı ve içeriğinin problem yapısıyla iyi bir şekilde eşleştirilebilmesi için dikkatlice seçilmesi ve tasarlanması gerektiği vurgulanmıştır.

Problem çözme ile ilgili araştırmalarda görsel temsillerin yanı sıra görselleştirmeye odaklanan çalışmalar da bulunmaktadır. Bu çalışmaların birini Weckbacher (2007) lise öğrencileriyle gerçekleştirmiştir. Araştırmada iki ve üç boyutlu geometri problemi çözmede görselleştirmenin rolünün incelenmesi amaçlanmıştır. Araştırmada görsel süreç türlerindeki bireysel farklılıkların iki ve üç boyutlu problem çözme performansında kritik bir rol oynadığı ortaya çıkmıştır. Ayrıca uzamsal imaj kullanımının, iki ve üç boyutlu şekilli geometri problemi çözme ile ilişkili olduğu sonucuna varılmıştır. Yine lise öğrencileri ile yapılan başka bir araştırmada Josef (2016) öğrencilerin cebir problemlerini çözmek için kullandıkları görselleştirme süreçlerini analiz etmiştir. Çalışmada öğrencilerin tüm problem çözme süreçlerinde görselleştirmeleri kullandıkları ortaya çıkmıştır. Bu görselleştirmeler; probleme

başlama, problemi açıklama, problemi organize etme veya problemi basitleştirme araçları olarak kullanılmıştır.

Teahen (2015), öğrencilerin sözel matematik problemlerini anlamalarının, doğru işlemi seçme durumlarının ve doğru çözülen problemlerin sayısının çizimler ve görselleştirme yoluyla artırılıp artırılamayacağını araştırmıştır. Yapılan çalışma dördüncü ve beşinci sınıf öğrencileri ile yürütülmüştür. Çalışmada sözel matematik problemlerini görselleştirmenin, problemleri çözmek için etkili bir strateji olduğu ve matematik problemi çözme sürecinin bir parçası olarak önemli bir adım olduğu görülmüştür.

Lowrie ve Kay (2001) ise sözel matematik problemlerini çözerken öğrencilerin kullandıkları farklı yaklaşımları belirlemeye çalışmışlardır. Altıncı sınıf öğrencileri ile yürütülen çalışmanın sonuçları öğrencilerin zor ya da ilk kez karşılaştığı matematik problemlerini çözerken görselleştirmeyi kullandıklarını, görsel olmayan çözüm yollarını ise daha az zor olan problemleri çözerken kullandıklarını göstermiştir. Yine altıncı sınıf öğrencileri ile yapılan bir diğer araştırmada Lowrie ve Clements (2001), üç altıncı sınıf öğrencisinin bir dönem boyunca çözdüğü problemlerde kullanılan çözüm yöntemlerini incelemiştir. Başlangıçta öğrencilerden birincisi problemleri görsel bir şekilde çözmeye; ikincisi daha sözel bir yaklaşımı tercih etmeye; üçüncüsü hem görsel hem de sözel stratejileri kullanma eğiliminde olduğu belirlenmiştir. Dönem sonuna doğru etkinliklere aşinalık arttıkça her üç öğrencinin de görsel olmayan akıl yürütme biçimlerini tercih ettikleri sonucuna ulaşılmıştır.

Alcock ve Simpson (2004), üniversite öğrencilerinin analiz derslerinde dizilerin ve serilerin yakınsaklığı ile ilgili problemlere yaklaşımlarını araştırmışlardır. Çalışmada, öğrencilerin akıl yürütmelerinde görsel imajları dâhil etme eğiliminde oldukları belirlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin imajları farklı boyutta kullanmalarına rağmen imajların çok benzer olduğunu görmüşlerdir. Öğrencilerin matematiksel yapıları nesneler olarak gördüğünü, nesne kümeleri hakkında hızlı bir şekilde sonuç çıkardıklarını ve bunlar doğrultusunda kendi iddialarına güvendiklerini belirtmişlerdir.

Lisansüstü öğrencileri ile çalışan Presmeg ve Balderas-Cañas (2001) ise öğrencilerin rutin olmayan problemleri çözerken, problem çözme süreçlerinde görsel düşüncenin rolünü, kapsamını ve kısıtlamalarını araştırmışlardır. Dört öğrenciye sunulan üç sözel problem için her bir öğrencinin görselleştirmeye başvurduğu tespit edilmiştir. Görsel imajlar, hiçbir diyagramın çizilmediği ve çözümün tamamen cebirsel olduğu durumlarda bile ortaya çıkmıştır. Bunun yanında duyuşsal özelliklerin de görselleştirme kullanımında rol oynadığı ifade edilmiştir.

Görselleştirme ile ilgili yapılan araştırmalar incelendiğinde ise problem çözme çalışmalarının yanı sıra farklı bağlamlarda tasarlanan araştırmalar olduğu da söylenebilir. Örneğin; Makina ve Wessels (2009) veri işleme konusunun öğrenilmesinde görselleştirmenin rolünü incelemişlerdir. Dokuzuncu sınıf öğrencileri ile yürütülen çalışmada çeşitli görselleştirme rolleri tanımlanmış ve bu rollerin çoğunun öğrencilerin veri işleme konusunu öğrenmeleri sırasında eleştirel ve yaratıcı düşüncelerini geliştirdikleri bulunmuştur. Ayrıca görselleştirmeyi bir anlama aracı olarak kullanma gereğinin farkında olunması vurgulanırsa, öğrencilerin veri işleme performanslarını arttırabilecekleri ifade edilmiştir.

Bir başka çalışmada Woolner (2004) iki farklı sınıfa çeşitli ortaokul matematik konularının öğretilerek, “görsel” ile “sözlü” öğretim yaklaşımlarını karşılaştırmıştır. Sözlü öğretim yapılan sınıfın görsel öğretim yapılan sınıfa göre önemli ölçüde daha yüksek bir puan aldığı belirlenmiştir. Görsel öğretim yapılan sınıf daha kötü performans gösterme eğiliminde olmasına rağmen, öğretim yaklaşımı ile öğrencinin tercih ettiği stil arasında herhangi bir ilişki bulunamamıştır.

Araştırmanın ana temalarından biri olan görsel akıl yürütmeye yönelik yapılan çalışmalara değinecek olursak ulaşılan en eski çalışmalardan birinin Russell (1997) tarafından yapıldığı görülmüştür. Russell (1997) matematik öğretmen adaylarının matematiksel görselleştirme ve görsel akıl yürütme stratejilerini anlamayı ve tanımlamayı amaçlamıştır. Yapılan mülakatlar, katılımcıların nesneler olarak iç ve dış temsillerini göstermiştir. İç temsiller zihnin nesneleri, dış temsiller ise kâğıt üzerinde, bilgisayarda simüle edilmiş veya gerçek fiziksel nesneler olarak belirtilmiştir. Ayrıca katılımcıların problem çözme seansları sırasında bu nesneler üzerinde ölçme ve dönüştürme gibi çeşitli eylemler gerçekleştirdikleri görülmüştür. Görsel akıl yürütme ise bir üst bilişsel etkinlik olarak bulunmuştur.

Matematik öğretmen adayları ile yürütülen bir başka çalışmada Karrass (2012), öğretmen adaylarının geometri bilgileri ile görsel akıl yürütme becerileri arasındaki ilişkiyi araştırmıştır. Çalışmada, daha yüksek Van Hiele seviyelerine ulaşan katılımcıların görsel teoremleri tanımak ve onları ispatlamak konusunda daha yetenekli olduğu bulunmuştur. Ayrıca katılımcıların görsel akıl yürütme becerileri ile Van Hiele seviyelerine atfedilen belirli davranışlar arasında bir ilişki olduğu sonucuna varılmıştır.

Ramírez-Uclés ve Ruiz-Hidalgo (2022), yaşları 14 ila 16 arasında değişen 21 öğrenci ile bir çalışma gerçekleştirmişlerdir. Araştırmacılar, müfredat dışı bir matematik teşvik programı ile katılımcıların geometrik ispat problemlerini çözerken akıl yürütme stillerini, kullandıkları temsilleri ve genellemelerini nitel olarak analiz etmişlerdir. Problemler, Geogebra ile oluşturulan üçgenler arasındaki benzerlikten yola çıkılarak bir derste

sunulmuştur. Araştırmada öncelikli olarak harmonik ve analitik akıl yürütmenin, görsel akıl yürütmeden daha elverişli olduğu ifade edilse de genellemeye ulaşmak için tek bir akıl yürütme stiline yeterli olmadığı gözlemlenmiştir. Bunun yanı sıra cebirsel temsilleri kullanmanın daha genel gerekçelerin formülasyonunu desteklediği belirtilse de, temsil türünün genelleme için tek belirleyici olmadığı sonucuna varılmıştır. Son olarak ise farklı temsilleri bir arada kullanmanın algısalan genele geçişi destekleyebileceğine ulaşılmıştır.

Görsel akıl yürütmeye yönelik önemli görülebilecek bir diğer araştırma Natsheh ve Karsenty (2014) tarafından yapılmıştır. Katılımcılar lise ve üniversite öğrencilerinin yanı sıra öğretmenler arasından da seçilmiştir. Natsheh ve Karsenty (2014), fonksiyon ve türevin öğretilmesinde ve öğrenilmesinde görsel akıl yürütmenin oynayabileceği rol hakkında bir fikir edinmek için katılımcıların görsel akıl yürütme içeren problemlerdeki çözüm yaklaşımlarını incelemişlerdir. Katılımcıların çoğu başlangıçta problemi çözerken farklı türlerde zorluklarla karşılaşmış ancak çözüm süreçlerinde çeşitli yaklaşımlar geliştirmişlerdir. Katılımcılar görsel akıl yürütme gerektiren görevlerin kavramsal anlayışı geliştirebileceğini kabul etme eğiliminde olmuş ve bu nedenle bu görevlerin müfredata katılımlarının faydalı olacağını belirtmişlerdir.

Literatürde yer alan bir başka çalışmada Abd Hamid (2017), üniversite hazırlık öğrencilerinin fonksiyonlar ve türevlerini içeren matematiksel problemleri çözerken görsel akıl yürütmelerinin değerlendirilmesi ve bu konuda bir çerçeve geliştirmeyi amaçlamıştır. Çalışmada öğrencilerin görsel akıl yürütme becerileri inişli çıkışlı bir durum sergilemiştir. Ancak öğrencilerin çözüm yöntemleri ve adımları için en az % 30'unun doğru çözümlere ulaşmayı başardığı görülmüştür. Bunun yanında grafiklerin görsel akıl yürütme becerisi üzerinde olumlu bir etkisinin olduğu ifade edilmektedir. Geliştirilen çerçeve ise yedi kategoriden oluşan kodlama ile beş kategoriden oluşan kod çözme süreçlerini içermektedir.

Eraso (2007) ise öğrencilerin görsel ve analitik akıl yürütmeyi birbiri ile ilişkilendirmelerini teşvik eden etkinlikleri kullanmalarının onların uzamsal görselleştirme yeteneklerine etkisini araştırmıştır. Araştırma onuncu sınıf öğrencileri ile yürütülmüştür. Araştırma sonucunda öğrencilerin uzamsal görselleştirme yeteneklerinin, uygulanan öğretimden anlamlı bir şekilde etkilenmediği bulunmuştur. Bunun yanında, erkek ve kız öğrencilerin son test puanları arasında erkekler lehine anlamlı bir fark bulunmuştur.

Tüm bu araştırmaların yanı sıra çalışma ile ilişkili görülen ve akıl yürütme üzerine yoğunlaşan başka çalışmalar olduğu da görülmüştür. Örneğin; Dongwi (2018) on birinci sınıf öğrencilerinin geometri ile ilgili sözel problemleri çözerken görselleştirme ve matematiksel akıl yürütme süreçlerinin birlikte ortaya çıkışını incelemiştir. Çalışma, görselleştirme ve akıl

yürütme süreçlerini bir araya getirmek için bir bağlantı aracı görevi gören ve bu süreçlerin birlikte ortaya çıkışının gözlemlendiği ve analiz edildiği bir bakış açısıyla çerçevelenmiştir. Katılımcıların problemleri çözerken ortaya çıkardığı görselleştirme ve akıl yürütme süreçlerinin birbirinden ayrılamaz olduğu sonucuna varılmıştır.

Barbosa (2013), altıncı sınıf öğrencilerinin görsel örüntü içeren problemleri nasıl çözdüklerini anlamayı ve görselleştirmenin akıl yürütmedeki rolünü incelemiştir. Görselleştirmenin; bir çizim yapmak, bir strateji bulmak, örüntünün yapısını görmek, genellemede bulunmak gibi farklı durumlarda yararlı bir beceri olduğu görülmüştür. Görsel stratejilerin kullanımı, öğrencileri farklı düşüncelere sevk etmiş ve onları anlamalarına yardımcı olmuştur.

Bardelle (2010), üniversite ikinci ve üçüncü sınıf matematik öğrencilerinden oluşan 13 kişilik bir grup katılımcının görsel ispatları anlamalarını ve yeniden oluşturmaları üzerine bir araştırma yapmıştır. Çalışmada öğrencilerin görsel akıl yürütme becerilerinin zayıf olduğu ve genelde cebirsel yöntemleri kullanma eğiliminde oldukları sonucuna varmıştır. Ayrıca öğrencilerin görsel temsilleri kullanımı birçok güçlük içerdiğinden dolayı onun potansiyelinden yararlanmak için özel bir eğitim gerektiğini belirtmiştir.

Hanna ve Sidoli (2007) görsel gösterimlerin matematikteki ispat sürecinde kullanımı ve olası katkıları üzerine yoğunlaşan çalışmalarında, görselleştirmenin ispatların anlaşılması üzerine olumlu katkıları olduğunu ifade etmiştir. Özellikle bilgisayarlarla yapılan görselleştirmelerin öğrencilerin birçok matematiksel kavramı görsel olarak keşfetmelerine veya incelemelerine imkân tanıdığına ve böylece matematiğin daha anlaşılır hale geldiğine vurgu yapmıştır. Görsel gösterimlerin ispata yardımcı olabileceğini, ispatı bütүнleştirebileceğini ya da tek başına ispatın kendisi olabileceğini söylemiştir.

Fujita ve arkadaşları (2020), öğrencilerin 3D geometrik şekillerin 2D temsillerini içeren problemleri çözmek için uzamsal akıl yürütme becerilerini nasıl kullandıklarını araştırmışlardır. Bunun için dördüncü sınıftan dokuzuncu sınıfa kadar toplam 1357 öğrencinin verilerini analiz etmişlerdir. Araştırmada öğrencilerin verilen diyagramlarda şekilleri nasıl görselleştirdiklerini ve şekillerin özelliklerini akıl yürütmek için nasıl kullandıklarını incelemişlerdir. Sonuç olarak birden fazla akıl yürütme adımını gerektiren problemler için uzamsal görselleştirme veya özelliğe dayalı uzamsal analitik akıl yürütme kullanmanın yeterli olmadığını, aynı zamanda bu iki becerinin, verilen diyagramın algısal görünümünün üstesinden gelmek için alana özel bilgi ile uyumlu hale getirilmesi gerektiğini bulmuşlardır. Bununla birlikte hem ilkökul hem de ortaokul öğrencilerine, yalnızca uzamsal akıl yürütme becerilerini kullanabilecekleri değil, aynı zamanda geometride üretken akıl yürütme için

mevcut alana özgü geometri bilgilerini pekiştirebilecekleri ve kullanabilecekleri daha fazla fırsat verilebileceğini iddia etmişlerdir.

Yurt dışında yapılan çalışmalara bakıldığında yurt içinde olduğu gibi görselleştirme üzerine çok fazla yoğunlaşıldığı söylenebilir. Bunun yanında görsel temsil ile ilgili de birçok çalışma yapılmıştır. Yapılan çalışmaların ise genellikle problem çözme durumları üzerinden yapıldığı görülmüştür. Ayrıca çalışmalar ilkökul, ortaokul, lise ve üniversite gibi farklı sınıf düzeylerinde öğrenim gören öğrencilerle yürütülmüştür. Ancak geometri konusunda yapılan çalışmaların az sayıda olması dikkat çekicidir.

Görsel akıl yürütmeye yönelik yapılan çalışmalar incelendiğinde ise sınırlı sayıda çalışmaya ulaşılmıştır (Abd Hamid, 2017; Karrass, 2012; Natsheh ve Karsenty, 2014; Russell, 1997). Bu durumun görselleştirme teriminin görsel akıl yürütme teriminin yerine kullanılmasından kaynaklanmış olabileceği söylenebilir. Görsel akıl yürütme adı altında yapılan çalışmaların görsel ispatlar (Karrass, 2012) bağlamında yapılmasının yanı sıra fonksiyon ve türev içeren problemleri çözme (Abd Hamid, 2017; Natsheh ve Karsenty, 2014) kapsamında da ele alındığı görülmüştür. Ayrıca görsel akıl yürütme stratejilerini anlamayı ve tanımlamayı amaçlayan bir çalışma (Russell, 1997) da bulunmaktadır. Yapılan çalışmaların ise üniversite öğrencileri veya öğretmen adayları gibi üst yaş grubundaki katılımcılarla yapıldığı görülmüştür. Bundan dolayı ortaokul öğrencilerinin problem çözerken görsel akıl yürütme becerilerine yeteri kadar odaklanılmamıştır. Ayrıca geometri alanında da araştırmalara ihtiyaç olduğu düşünülmektedir.

BÖLÜM III

YÖNTEM

Bu bölümde; araştırmanın deseni, araştırmanın katılımcıları, araştırmada kullanılan veri toplama araçları, veri toplama araçlarını hazırlama ve uygulama süreçleri ile toplanan verilerin analiz edilmesinde yapılan işlemler hakkında detaylı bilgiler verilmiştir. Bunun yanında araştırmaya yönelik pilot çalışma, araştırmacının rolü ve araştırmanın geçerlik ve güvenilirliği ile ilgili bilgiler de bu bölümde yer almaktadır.

3.1. Araştırmanın Deseni

Bu araştırmada ortaokul öğrencilerinin geometri problemlerinde görsel akıl yürütme becerilerinin rolünün derinlemesine incelenmesi amaçlandığından nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Çünkü nitel yöntemler, nicel yöntemlere göre çok daha az sayıda kişi ve durum üzerinde yürütülmesine rağmen daha derin ve ayrıntılı bilgi elde edilmesine olanak sağlar (Patton, 2002). Bunun yanında nitel araştırma desenlerinin esnek ve dinamik (Büyüköztürk vd., 2013) yapıda olmasından dolayı da bu araştırma için uygun olabileceği düşünülmüştür.

Yıldırım ve Şimşek (2016, s. 41) nitel araştırmayı; “gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konması için nitel bir sürecin izlendiği araştırma” olarak tanımlamışlardır. Merriam (2009) nitel araştırmalarda, insanların dünyayı nasıl algıladıkları ve dünyada ne gibi deneyimler yaşadıkları ile ilgilenildiğini belirtmiştir. Denzin ve Lincoln (2018) ise nitel araştırmaların yorumlayıcı bir yaklaşıma sahip olduğunu vurgulamışlardır. Bununla birlikte nitel araştırmalarda amacın, sayılarla bir sonuca ulaşmaktan daha çok araştırılan konu ile ilgili okuyucuya betimsel ve gerçekçi bir resim sunmanın olduğu ifade edilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2016).

Yapılan araştırmanın da doğası gereği nitel bir yaklaşıma uygun olduğu düşünülmektedir. Bu durumun en önemli sebebi ise öğrencilerin görsel akıl yürütme becerilerinin ortaya konulmak istenmesidir. Bunu ortaya koyarken derinlemesine ve zengin verilere ulaşmanın nitel bir yöntem ile elde edilebileceği söylenebilir. Ayrıca araştırmada öğrencilerin problemlere verdikleri yanıtlarda sonuçtan ziyade süreç ön planda tutulmaktadır. Problem çözme sürecinde problemi nasıl anlamlandırdıklarını, görsel temsilleri nasıl kullandıklarını ve nasıl akıl yürüttüklerini belirlemek için nitel araştırmanın uygun bir yaklaşım olacağına inanılmaktadır.

Creswell (2013) nitel araştırmalarda kuram oluşturma, durum çalışması, etnografi, fenomenoloji ve anlatı gibi desenlerin yaygın olarak seçildiğini belirtmiştir. Bu araştırmada, öğrencilerin mevcut bilgi ve deneyimleri çerçevesinde var olan görsel akıl yürütme becerilerini incelemek amaçlandığından durum çalışması deseni tercih edilmiştir. Nitel araştırma desenlerinden biri olarak gösterilen durum çalışması, bir olay ya da olgunun bütüncül bir analizine olanak sağlamakla birlikte, detaylı bir şekilde betimleme imkânı da sağlamaktadır (Merriam, 2009). Bunun yanında özellikle süreçleri anlamaya yönelik çalışmalarda kullanılması uygun görülmektedir (Yıldırım ve şimşek, 2016).

Genellikle araştırmada “Ne?”, “Nasıl?” ve “Niçin?” soruları cevaplanmak istendiğinde durum çalışmaları kullanılabilir (Çepni, 2010; Yin, 2009). Aynı zamanda bir olguyla ilgili ortaya konacak ve elde edilecek bilgiye başka türlü erişilemeyeceği durumlarda da seçilebilir (Merriam, 2009). Yin (2009) ise durum çalışmasını, araştırmacının kontrol edemediği güncel bir olguyu birçok veri kaynağının bulunduğu gerçek hayat ortamlarında inceleyen kapsamlı bir araştırma deseni olarak ifade etmektedir. Durum alışması araştırması sistematik veri toplamayı ve analizini içerir ve istatistiksel olarak olmasa da analitik olarak diğer durumlara genellenebilir (Yin, 2017).

“Durum” sosyal bir birimin ya da olgunun derinlemesine açıklandığı bütüncül bir sistem olduğundan, ğrenci, ğretmen, sınıf, okul ya da programın bir durum olarak ele alınabileceği ne sürülmektedir (Merriam, 2009; Stake, 1995). Durum çalışmalarında (i) ele alınan durumun sınırlı bir sistem olması, (ii) bu sistemde bir oluşumun varlığından söz edilebilmesi, (iii) bütüncül olması ve (iv) oklu veri toplama tekniklerinin kullanılabilmesi durum çalışmalarının dört temel özelliği olarak ifade edilmektedir (Punch, 1998).

Sonuç olarak durum çalışmalarının;

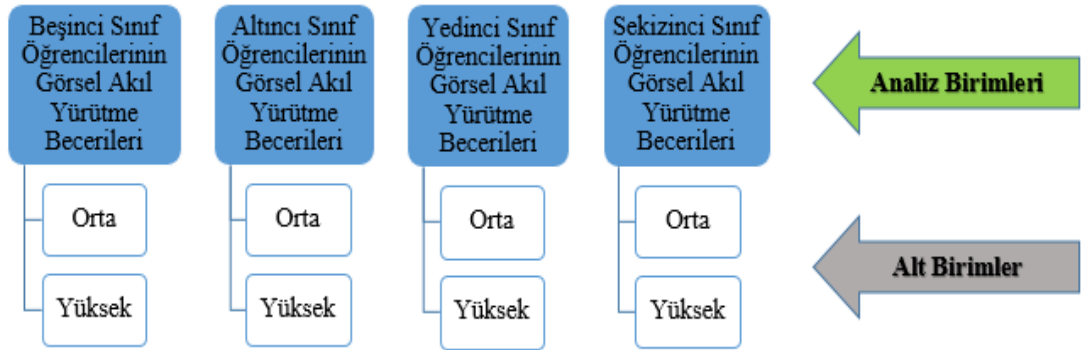
- Süreçleri anlamaya yönelik araştırmalar için uygun olması,
- Derinlemesine ve zengin verilere ulaşmaya yardımcı olması,
- Öğrencilerin var olan bilgi ve deneyimlerini betimleme imkânı sunması gibi gereklerden dolayı mevcut araştırmanın durum çalışması olarak desenlenmesi gerektiği düşünülmüştür.

Literatür incelendiğinde durum çalışması türleri ile ilgili olarak farklı sınıflandırmalar yapıldığı görülmektedir (Baxter ve Jack, 2008; Davey, 1991; Merriam, 2009; Stake, 1995; Yin, 2009). Kaleli-Yılmaz (2014) bununla ilgili olarak araştırmacıların durumlara farklı açılardan baktıkları için farklı sınıflandırmalar yaptıklarını ifade etmiştir. Bu araştırmada Yin (2009) tarafından yapılan sınıflandırma dikkate alınmıştır. Yin (2009) durum çalışması desenlerini, durum sayılarına göre tekli ya da çoklu, analiz birimlerine göre ise bütüncül ya da

iç içe geçmiş olarak sınıflandırmıştır. Sonuç olarak durum çalışması desenleri, bütüncül tek durum, iç içe geçmiş tek durum, bütüncül çoklu durum ve iç içe geçmiş çoklu durum olarak sınıflandırılmıştır.

Çoklu durum çalışmaları tekli durum çalışmalarına göre daha yorucu ve zaman alıcı olsa da, bulgular tek bir durumdan elde edilen verilere kıyasla daha güçlü ve güvenilir olacaktır (Yin, 2009). Bu sebeple araştırma, iç içe geçmiş çoklu durum deseni olarak tasarlanmıştır. Yıldırım ve Şimşek (2016) bu desende, birden fazla durumun söz konusu olduğunu ancak ele alınan veya araştırmaya dâhil edilen her bir durumun, kendi içinde çeşitli alt birimlere ayrılarak çalışılabileceğini belirtmişlerdir. Bir durum çalışmasında, bir kişi, bir olay, bir program, bir topluluk, bir organizasyon veya bir zaman aralığı analiz birimi olabilmektedir ve analiz birimi ne olursa olsun nitel bir durum çalışması, bu birimi derinlemesine ve detaylı bir şekilde betimlemeyi ve yorumlamayı amaçlamaktadır (Merriam, 2009; Patton, 2002).

Bu araştırmada ortaokul öğrencilerinin farklı sınıf düzeyleri araştırma kapsamında ele alındığından her sınıf düzeyi farklı bir analiz birimi olarak düşünülmüştür. Yani beşinci sınıf öğrencilerinin görsel akıl yürütme becerileri, altıncı sınıf öğrencilerinin görsel akıl yürütme becerileri, yedinci sınıf öğrencilerinin görsel akıl yürütme becerileri ve sekizinci sınıf öğrencilerinin görsel akıl yürütme becerileri bu çalışmadaki çoklu durumları oluşturmaktadır. Araştırmanın alt birimlerini ise her sınıf düzeyindeki orta ve yüksek başarıya sahip öğrenciler oluşturmuştur.



Şekil 10. Araştırmanın deseni

Araştırma için gerekli görülen bütün izinler alındıktan sonra araştırmaya başlanmıştır. Bu izin belgeleri (Etik Kurul İzin Belgesi, Milli Eğitim Müdürlüğü İzin Belgesi, Veli Bilgilendirme ve İzin Formu ve Öğrenci Bilgilendirme ve İzin Formu) sırasıyla EK 2, EK 3, EK 4 ve EK 5’te sunulmuştur. Bunun yanında araştırma boyunca etik kurallara uygun bir şekilde hareket edilmiştir.

3.2. Katılımcılar

Bu araştırmanın katılımcıları, 2020-2021 eğitim-öğretim yılında Afyonkarahisar merkez okullarında öğrenim gören ortaokul öğrencilerinden oluşmaktadır. Araştırmanın katılımcıları 32 öğrenci ile sınırlandırılmıştır. Katılımcılar amaçlı örnekleme yöntemi ile belirlenmiştir. Amaçlı örnekleme, seçkisiz olmayan bir örnekleme yaklaşımıdır (Büyüköztürk vd., 2013). Bu örnekleme yöntemi, çalışmanın amacına bağlı olarak bilgi açısından zengin durumların belirlenip derinlemesine araştırılmasını sağlar (Patton, 2002). Gürbüz ve Şahin (2015), amaçlı örnekleme yöntemini araştırmacının kendi gözlemlerinden hareket ederek araştırma sorusuna uygun olacağını düşündüğü ve belirli özellikleri sağlayan deneklerin seçildiği örnekleme yöntemi olarak belirtmektedirler.

Literatür incelendiğinde amaçlı örnekleme yöntemi ile ilgili farklı stratejiler olduğu görülmektedir (Büyüköztürk vd., 2013; Patton, 2002; Yıldırım ve Şimşek, 2016). Yapılan araştırmada bu stratejilerden maksimum çeşitlilik örnekleme kullanılmıştır. “Maksimum çeşitlilik birçok farklılığı içeren ana temaları bulup tanımlamayı amaçlar” (Patton, 2002, s. 234). Bu amaç doğrultusunda üzerinde çalışılan konuya ilişkin olarak taraf olabilecek bireylerin çeşitliliğini maksimum düzeyde yansıtmının önemli olduğu ifade edilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Örnekleme yansıtılacak çeşitlilik durumlarının, araştırmanın amacı gözetilerek belirlenmesine dikkat edilmelidir (Büyüköztürk vd., 2013). Ayrıca, “çeşitliliği sağlamadaki amaç genelleme yapmak olmayıp, tam tersine çeşitlilik gösteren durumlar arasında herhangi bir ortak ya da paylaşılan olayın olup olmadığını bulmaya çalışmak ve bu çeşitliliğe göre problemin farklı boyutlarını belirlemektir” (Yıldırım ve Şimşek, 2016, s. 119).

Araştırmada ortaokul öğrencilerinin görsel akıl yürütme becerilerine odaklanıldığından dolayı ortaokul kademesindeki bütün sınıf seviyelerinin araştırmaya dâhil edilmesine karar verilmiştir. Araştırma verilerini tek bir bölgede bulunan bir okuldaki toplamının araştırmada bir sınırlılığa yol açacağı düşünülmüştür. Bu noktada maksimum çeşitlilik örnekleme kullanılarak bu sınırlılığın ortadan kaldırılması hedeflenmiştir. Bu yüzden araştırmanın katılımcıları belirlenmeden önce araştırma için uygun olacağı düşünülen 3 farklı okul belirlenmiştir. Bu okullar Afyonkarahisar merkezde bulunmakta olup, konumları itibarıyla sosyoekonomik farklılıklar gösterdiği söylenebilir. Okullardan bir tanesinin düşük, bir tanesinin orta ve bir diğeri de yüksek sosyoekonomik bir profile sahip olduğu düşünülmektedir. Okul yöneticileri ve Afyonkarahisar da görev yapan bazı eğitimcilerle yapılan görüşmeler neticesinde bu şekilde bir sınıflandırmanın uygun olabileceğine karar verilmiştir.

Katılımcıların farklı başarı düzeylerine sahip olmalarının istenmesi de maksimum çeşitlilik örnekleme için bir başka ihtiyaç olarak karşımıza çıkmaktadır. Araştırmada yer alan katılımcılar belli kriterlere göre orta ve yüksek başarı düzeylerinde sınıflandırılmıştır. Araştırma yapılacak okullar belirlendikten sonra 32 öğrenci belirlenmeye çalışılmıştır. Araştırmada her sınıf düzeyi farklı bir durum olarak ele alındığı için her sınıf düzeyinden 8 öğrenci ile çalışılmasının yeterli olacağı düşünülmüştür. Her bir durumda yer alan 8'er öğrenci ise öğrenim gördüğü okul ve başarı düzeyi bakımından çeşitlilik göstermektedir. Araştırmada katılımcıların gerçek isimleri yerine BÖ1, BÖ2, BÖ3, ..., SÖ6, SÖ7, SÖ8 şeklinde kodlamalar kullanılmıştır. Örneğin; BÖ3 beşinci sınıflardan bir öğrenciyi, AÖ2, altıncı sınıflardan bir öğrenciyi, YÖ5 yedinci sınıflardan bir öğrenciyi ve SÖ4 sekizinci sınıflardan bir öğrenciyi temsil etmektedir. Katılımcıların özelliklerine ait bilgiler Tablo 1'de sunulmuştur:

Tablo 1

Çalışmaya katılan öğrencilerin özellikleri

Katılımcı	Sınıf	Cinsiyet	Başarı Düzeyi	Okulun Sosyoekonomik Özelliği
BÖ1	5	Kız	Orta	Düşük
BÖ2	5	Erkek	Orta	Orta
BÖ3	5	Erkek	Orta	Yüksek
BÖ4	5	Kız	Orta	Yüksek
BÖ5	5	Kız	Yüksek	Düşük
BÖ6	5	Kız	Yüksek	Orta
BÖ7	5	Erkek	Yüksek	Yüksek
BÖ8	5	Erkek	Yüksek	Yüksek
AÖ1	6	Kız	Orta	Düşük
AÖ2	6	Kız	Orta	Orta
AÖ3	6	Erkek	Orta	Yüksek
AÖ4	6	Erkek	Orta	Yüksek
AÖ5	6	Kız	Yüksek	Düşük
AÖ6	6	Kız	Yüksek	Orta
AÖ7	6	Kız	Yüksek	Yüksek
AÖ8	6	Kız	Yüksek	Yüksek
YÖ1	7	Erkek	Orta	Düşük
YÖ2	7	Erkek	Orta	Orta
YÖ3	7	Kız	Orta	Yüksek
YÖ4	7	Erkek	Orta	Yüksek
YÖ5	7	Kız	Yüksek	Düşük
YÖ6	7	Erkek	Yüksek	Orta
YÖ7	7	Kız	Yüksek	Yüksek
YÖ8	7	Kız	Yüksek	Yüksek
SÖ1	8	Kız	Orta	Düşük
SÖ2	8	Kız	Orta	Orta
SÖ3	8	Erkek	Orta	Yüksek
SÖ4	8	Erkek	Orta	Yüksek
SÖ5	8	Kız	Yüksek	Düşük
SÖ6	8	Kız	Yüksek	Orta
SÖ7	8	Erkek	Yüksek	Yüksek
SÖ8	8	Erkek	Yüksek	Yüksek

Tablo 1 incelendiğinde araştırmaya katılan öğrencilerin sınıf, cinsiyet, başarı düzeyi ve öğrenim gördüğü okulun sosyoekonomik özelliklerinin betimlendiği görülmektedir. Öğrenciler belirlenirken ele alınan kriterlerden biri öğrencilerin başarı düzeyleridir. Öğrencilerin bir önceki dönem matematik ders notlarına göre hangi düzeyde yer alacağına karar verilmiştir. Başarı düzeyleri, orta ve yüksek olarak iki kategoride ele alınmış ve bu kategoriler öğrencilerin matematik dersi sınav notlarına göre şekillenmiştir. Yüksek kategorisi 85-100 ve orta kategorisi 70-84 puan aralığı olarak belirlenmiştir. Geçmiş yıllarda not sisteminde bu şekilde sınıflandırma yapıldığından dolayı kategorileri böyle belirlemek uygun görülmüştür. 70 puanın altında olan öğrencilerin ise kendini ifade ederken matematiksel zorluklar yaşayabileceği göz önünde bulundurulmuş ve bu nedenle veri toplama sırasında sorunlar olabileceği düşünülmüştür. Bundan dolayı, o düzeyde puanlara sahip öğrenciler araştırma kapsamında ele alınmamıştır.

Öğrenciler seçilirken bunlara ek olarak matematik öğretmeninin görüşleri dikkate alınmış ve kendini iyi ifade edebilen öğrencilerin seçilmesine dikkat edilmiştir. Öğrenciler klinik mülakatlardan önce, araştırmanın amacı ve süreç hakkında bilgilendirilmiştir. Ayrıca bilgilendirme sonucunda araştırmaya katılmak istemeyen öğrencilerin araştırmaya katılmama veya araştırmanın herhangi bir aşamasında ayrılma haklarına sahip oldukları belirtilmiştir. Araştırmanın neden ve nasıl yapılacağını içeren izin belgesi öğrencilere ve öğrenci velilerine sunulurak onayları alınmıştır.

3.3. Veri Toplama Araçları

Araştırmada veri toplama araçları olarak, Geometri Problemi Çözme Testi, Klinik Mülakatlar ve Gözlem Notları kullanılmıştır. Geometri Problemi Çözme Testi, ortaokul öğrencilerinin geometri problemlerini çözerken görsel akıl yürütme becerilerini incelemek amacıyla kullanılmıştır. Klinik mülakatlar birebir görüşmeler yoluyla öğrencilerin görsel akıl yürütme becerilerini derinlemesine araştırma fırsatı sunmuştur. Gözlem Notları ise görüşme ortamının ve araştırmacı-katılımcı etkileşiminin betimlenmesi için kullanılmıştır. Araştırmada kullanılan veri toplama araçları sırasıyla aşağıda ayrıntılı olarak anlatılmıştır.

3.3.1. Geometri Problemi Çözme Testi

Araştırmada öğrencilerin görsel akıl yürütme becerilerini incelemek amacıyla araştırmacı tarafından geometri problemi çözme testi geliştirilmiştir. Testte yer alan problemler hazırlanırken, sadece kazanım odaklı olmasından ziyade, öğrencilerin görsel akıl yürütebilecekleri, görselleştirme yapabilecekleri ve görsel temsil kullanabilecekleri sorular

olmasına dikkat edilmiştir. Bundan dolayı hazırlanan problemlerin bazıları farklı sınıf düzeylerinde de sorulmuştur.

Problemleri belirleyebilmek amacıyla öncelikle literatür incelenmiştir. Literatür incelemesi sonucunda çalışma için uygun olacağı düşünülen problemler belirlenmiştir. Belirlenen bu problemlerin bazıları doğrudan testte yer almış, bazılarında ise öğrenci seviyesine veya araştırma odağına yönelik uyarlamalar yapılmıştır. Problemler, öncelikle Abd Hamid'in (2017) görsel akıl yürütme becerilerinin incelenmesi sürecinde işaret ettiği kodlama (encoding) ve kod çözme (decoding) süreçlerine göre sınıflandırılmıştır. Kodlama süreci, öğrencilerin sözlü veya yazılı bilgileri açıklamak için görsel temsil kullanmaları olarak açıklanabilir. Kod çözme süreci ise öğrencilerin görsel temsillere yerleştirilmiş görsel bilgileri okuması, yorumlaması ve anlamlandırması şeklinde ifade edilebilir. Bu çalışmada kodlama süreci sözel, kod çözme süreci ise görsel olarak adlandırılacaktır.

Hazırlanan problemlerde yapılan bir diğer sınıflandırma ise Mason ve arkadaşlarının (1985) belirlemiş olduğu matematiksel düşünme bileşenleri dikkate alınarak oluşturulmuştur. Akıl yürütme ve matematiksel düşünmenin ilişkili olduğu düşünüldüğünde (Ball ve Bass, 2003; Liu, 2003) bu sınıflandırmanın da araştırmanın amacına hizmet edebileceği ön görülmüştür. Bunun yanında çalışmada kullanılan görsel akıl yürütme çerçevesinin en üst basamağının matematiksel düşünmeye geçiş olarak ifade edilmesinin de bu bileşenlerin dikkate alınmasında önemli bir etken olduğu söylenebilir. Mason vd. (1985) bu bileşenleri; “özelleştirme” (specializing), “genelleme” (generalizing), “varsayımda bulunma” (conjecturing) ve “doğrulama ve ikna etme” (justifying and convincing) şeklinde ifade etmektedirler.

Özelleştirme bir problem durumunu anlamak için sistematik örnekleri seçmek ve seçilen bu örnekleri problem üzerinde incelemektir (Burton, 1984). Aynı zamanda bir genellemeye ulaşmayı sağlayacak gerekli verileri bir araya getirme olarak da ifade edilebilir (Mason vd., 1985). Arslan ve Yıldız (2010) özelleştirme aşamasında bir veya daha fazla örnek verme, bir örneği tanımlama, gösterme, anlatma, çizme, seçme, bulma, istenilen bir duruma ait zıt örnek bulma, istenileni doğru bularak sonucu farklı şekillerde yazma gibi eylemler yapılabileceğini ifade etmiştir.

Genelleme, matematiksel düşünme ve problem çözme ile elde edilen verilerin, veriler arasındaki ilişkilere dayalı olarak birkaç örnekten hareketle daha genel ve kapsamlı olarak uygulanması amacıyla yeniden ifade edilmesidir (Mason vd., 1985). Genelleme sürecinde belirli örneklerden hareketle istenenle ilgili karar verilmeye çalışılır. Bu nedenle genelleme sürecinde özelleştirme de yapılmaktadır (Mason vd., 1985). Arslan ve Yıldız'a (2010) göre

genelleme sürecinde; örüntü oluşturma, sınıflama, eşleştirme, sıralama ve karşılaştırma yapma, benzerlik ve farklılıkları bulma, iki değişken arasındaki durumu matematiksel veya sözel olarak ifade etme, ortaya çıkabilecek tüm ihtimalleri tanımlama yapılır.

Varsayımda bulunma, belirli bir yargıda bulunmadan önce gerekli örnekler incelenip, örnekler arasındaki bağıntı ve ilişkiler keşfedilerek, mevcut bağıntılardan sonuca varma süreci olarak ifade edilmektedir (Burton, 1984). Kükey (2018), özelleştirme ve genelleme sürecinde farkında olarak ya da olmayarak varsayımda bulunma bileşeni kullanıldığını vurgulamaktadır. Varsayımda bulunma sırasında sözel veya matematiksel olarak tahminde bulunma, matematiksel iddiaları formüle etme, önermelerden sonuç çıkarma, hipotez kurma ve test etme gibi eylemler söz konusudur (Arslan ve Yıldız, 2010). Doğrulama ve ikna etme bileşeni ise savunulan ifadenin nedenini araştırma ve varsayımın doğruluğunun nedenlerini anlamaya dayalıdır (Mason vd., 1985).

3.3.1.1. Uzman görüşleri

Yukarıda anlatılan sınıflandırmalar sonucunda her sınıf düzeyi için 8 problem hazırlanmıştır. Hazırlanan problemlerin 4 tanesi sözel, 4 tanesi görsel olacak şekilde düzenlenmiştir. Bunun yanında 4 problemin her biri farklı bir matematiksel düşünme bileşenini kapsayacak şekilde oluşturulmuştur. Hazırlanan geometri problemi çözme testi matematik eğitimi alanında uzman olan 3 öğretim elemanına, doktora eğitimlerine devam eden 3 ortaokul matematik öğretmenine ve Türkçe eğitimi alanında uzman olan 1 öğretim elemanına gösterilerek uzman görüşü alınmıştır. Uzmanlara yönelik bilgiler Tablo 2’de verilmiştir:

Tablo 2

Uzmanların özellikleri

Kod	Alan	Görev	Eğitim Düzeyi
U1	Matematik Eğitimi	Öğretim Elemanı	Doktora
U2	Matematik Eğitimi	Öğretim Elemanı	Doktora
U3	Matematik Eğitimi	Öğretim Elemanı	Doktora
U4	Matematik Eğitimi	Matematik Öğretmeni	Yüksek Lisans
U5	Matematik Eğitimi	Matematik Öğretmeni	Yüksek Lisans
U6	Matematik Eğitimi	Matematik Öğretmeni	Yüksek Lisans
U7	Türkçe Eğitimi	Öğretim Elemanı	Doktora

Uzman görüşü için öncelikle uzman görüş formu (bkz. EK 6) hazırlanmıştır. Hazırlanan bu form, her bir problemin matematiksel düşünme bileşenlerine uygunluğu ile araştırma ve öğrenci seviyesine uygunluğu konusunda dönüt almayı amaçlamıştır. Uzmanların yapmış olduğu dönütler doğrultusunda bazı problemlerde gerekli düzenlemeler yapılmıştır.

Bazı problemlerin ise testten çıkarılması uygun görülmüştür. Yapılan değişiklikleri şu şekilde özetleyebiliriz:

- Beşinci, altıncı, yedinci ve sekizinci sınıf öğrencilerine yönelik hazırlanan sözel özelleştirmeye yönelik problem, uzmanların çoğu tarafından öğrencilerin zorlanacakları bir problem olarak görülmüştür. Bundan dolayı öncelikle problem daha anlaşılır hale getirilmeye çalışılmıştır. Ayrıca problemin ikinci kısmının öğrencileri genellemeye götüreceği ihtimalinden dolayı problem özelleştirmeye uygun hale getirilmiştir.
- Beşinci ve altıncı sınıf öğrencilerine yönelik hazırlanan görsel özelleştirme problemi uzmanların çoğu tarafından kabul görmesine rağmen problemin değiştirilmesine karar verilmiştir. Bunun sebebi öğrencilerin ilk hazırlanan problemde verilen görsel ile çok fazla etkileşime geçemeyebileceği düşüncesidir. Bundan dolayı benzer özelliklere sahip ancak öğrencilerin verilen görselle daha çok etkileşime geçebilecekleri bir problem hazırlanmıştır.
- Beşinci sınıf öğrencilerine yönelik hazırlanan sözel genelleme probleminde uzmanlar problemin genellemeden çok özelleştirmeye uygun olduğunu ifade etmişlerdir. Bu görüşler haklı görülmüş olup problemin ilk kısmı özelleştirme adımı olarak ele alındıktan sonra, öğrencilerin genelleme yapabilecekleri ikinci bir kısım eklenmiştir. Ayrıca problemde daha açıklayıcı olması amacıyla bazı ifadeler eklenmiştir.
- Beşinci sınıf öğrencilerine yönelik hazırlanan sözel genelleme probleminin de testten çıkartılmasına karar verilmiştir. Öğrencilerin eksik bilgilere sahip olmaları çözümlerini etkileyebileceğinden dolayı görselleştirme yapabilecekleri başka bir problem kullanılmıştır.
- Beşinci sınıf öğrencileri için hazırlanan sözel ve görsel varsayımda bulunma problemleri uzman görüşleri doğrultusunda problem kökünde yer alan bazı ifadelerin düzeltilmesi sonucunda testte aynen yer almıştır.
- Uzmanlar genel olarak beşinci, altıncı, yedinci ve sekizinci sınıf öğrencilerine yönelik hazırlanan sözel doğrulama ve ikna etme bileşenine yönelik problemin uygun olduğu görüşünde bulunmuşlardır. Ancak problemin öğrenci seviyesi için üst düzey olduğunu ifade etmişlerdir. Bu görüşler çerçevesinde probleme bazı açıklayıcı bilgiler eklenmiştir.
- Beşinci sınıf öğrencilerine yönelik hazırlanan görsel doğrulama ve ikna etme bileşenine yönelik problem bütün uzmanlar tarafından uygun olarak görülmüştür.

- Altıncı sınıf öğrencilerine yönelik hazırlanan sözel genelleme problemi bazı uzmanlar tarafından uygun görülse de bu yaş grubundaki öğrencilerin sonsuzluk fikrine alışkın olmayabilecekleri düşüncesi ile problemin testten çıkarılmasına karar verilmiştir. Bu problemin yerine beşinci sınıf öğrencileri için hazırlanan problem testte yer almıştır.
- Altıncı sınıf öğrencileri için hazırlanan görsel genelleme problemi uzmanlar tarafından matematiksel düşünme bileşenine uygun görülmüştür. Ancak problemin öğrenciler için zor olabileceği düşüncesi ile bu problemin yerine beşinci sınıf öğrencilerine yöneltilen problem konulmuştur. Bu problem ise bir takım düzeltmelerden sonra yedinci sınıf öğrencilerine sorulmuştur.
- Altıncı sınıf öğrencileri için hazırlanan sözel varsayımda bulunma probleminin testte kullanılması, bütün uzmanlar tarafından uygun görülmüştür.
- Altıncı sınıf öğrencileri için hazırlanan görsel varsayımda bulunma problemi uzmanların çoğu tarafından uygulanabilir bir problem olarak görülmüştür. Ancak altıncı sınıf öğrencileri için kolay olabileceği ön görüldüğünden öğrencilerin daha fazla akıl yürütebilecekleri bir problem sorulmasına karar verilmiştir. Yedinci sınıf öğrencileri için hazırlanan görsel varsayımda bulunma problemi de uzmanlar tarafından uygun görülmüş olup, bazı düzeltmelerden sonra hem altıncı sınıf hem de yedinci sınıf seviyesindeki öğrencilere yöneltilmiştir.
- Uzmanların tamamı altıncı, yedinci ve sekizinci sınıf öğrencilerine yönelik hazırlanan görsel doğrulama ve ikna etme bileşenine yönelik problemin uygun olduğu görüşünde bulunmuşlardır. Problem tek kısma indirgenerek aynı şekilde testte yer almıştır.
- Yedinci sınıf öğrencilerine yönelik hazırlanan görsel özelleştirme problemi uzmanların çoğu tarafından kabul görmesine rağmen problemin değiştirilmesine karar verilmiştir. Öğrencilerin problemdeki bazı kavramlara yabancı olabileceği bu değişikliğin temel nedenidir. Problemde verilen görsel ve bazı ifadeler değiştirildikten sonra problemin sadece sekizinci sınıf öğrencilerine yöneltilmesine karar verilmiştir. Yedinci sınıf öğrencileri için beşinci ve altıncı sınıf öğrencilerine yönelik hazırlanan görsel özelleştirme probleminin sorulması uygun görülmüştür.
- Yedinci sınıf öğrencileri için hazırlanan sözel genelleme probleminde uzmanların üzerinde hemfikir oldukları bir görüş bulunmamaktadır. Ancak bu yaş grubundaki öğrencilerin sonsuzluk fikrine alışkın olmayabilecekleri düşüncesi ile problemin testten çıkarılmasına karar verilmiştir. Bu problemin yerine sekizinci sınıf

öğrencileri için hazırlanan problem testte yer almıştır. O probleme çokgen tanımı eklenmiş ve problem hem yedinci sınıf hem de sekizinci sınıf seviyesindeki öğrencilere yöneltilmiştir.

- Yedinci sınıf öğrencileri için hazırlanan sözel varsayımda bulunma problemine köşegen kavramının tanımı eklenmiştir.
- Sekizinci sınıf öğrencileri için hazırlanan görsel genelleme problemi uzmanlar tarafından matematiksel düşünme bileşenine uygun görülmüştür. Ancak problemin öğrenciler için zor olabileceği düşüncesi ile problem daha anlaşılır hale getirilmeye çalışılmıştır. Probleme daha çok görsel eklenmiş ve görsellerdeki açılar belirtilmiştir. Bu bilgiler doğrultusunda öğrencilerden genelleme yapmaları beklenmiştir.
- Sekizinci sınıf öğrencilerine yönelik hazırlanan sözel ve görsel varsayımda bulunma problemleri uzmanlar tarafından genel olarak kabul görmüştür. Bundan dolayı soru kökünde yapılan ufak düzeltmelerden sonra testte aynı şekilde kullanılmıştır.

Bu değişikliklerden sonra biri öğretim elemanı ve biri matematik öğretmeni olmak üzere 2 uzmandan tekrar görüş alınarak pilot çalışma öncesi teste son hali verilmiştir.

3.3.1.2. Pilot çalışma

Uzman görüşleri alındıktan sonra Geometri Problemi Çözme Testinde yer alan problemlerin araştırmanın amacına uygunluğunu kontrol etmek amacıyla pilot çalışma yapılmıştır. Bu şekilde araştırmanın bir pratiği yapılmış ve problemlerin öğrenci seviyesi için uygunluğuna bakılmıştır. Katılımcılardan alınan geri bildirimler sonucunda problemlerin gözden geçirilerek dil kullanımındaki bazı hataların ve matematiksel yanlış anlamaların düzeltilmesi hedeflenmiştir.

Pilot çalışma, araştırma yapılacak okulların dışında başka bir ortaokulda yapılmıştır. Ancak pilot çalışma yapılacak okulun asıl çalışma yapılacak okullarla ortak özelliklere sahip olmasına dikkat edilmiştir. Bu bakış açısıyla pilot çalışmadaki katılımcılarla asıl çalışmadaki katılımcıların da benzer özelliklere sahip olabileceği düşünülmüştür. Pilot çalışma için her sınıf düzeyinden orta düzeyde bulunan bir öğrenci belirlenmiş ve toplam dört öğrenci ile pilot çalışma gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışmaya katılacak öğrencilerin çalışmaya gönüllüğü esas alınmış ve aynı zamanda velilerinden de gerekli izinler alınmıştır. Öğrenciler için uygun olan bir gün belirlenmiş ve okulun bilgisayar laboratuvarında klinik mülakatlar yapılmıştır.

Öğrencilerle yapılan görüşmeler sırasında; beşinci sınıf öğrencisi ile 47 dakika 48 saniye, altıncı sınıf öğrencisi ile 52 dakika 59 saniye, yedinci sınıf öğrencisi ile 36 dakika 47

saniye, sekizinci sınıf öğrencisi ile 57 dakika 13 saniye sürmüştür. Pilot çalışmada yapılan mülakatların tamamı öğrencilerin yüzleri görünmeyecek şekilde kamera ile kaydedilmiştir. Ayrıca araştırmacı mülakatlar sırasında öğrencilerin çözümleri ile ilgili gözlem notları tutmuştur. Bunun yanında görüşme sırasında öğrencilerden problemlerin anlaşılabilirliği ve seviyelerine uygunluğu hakkında da dönütler alınmıştır. Öğrenci görüşleri ve gözlem notları doğrultusunda gerekli düzeltmeler yapılmış ve iki uzmana yeniden gösterilerek asıl çalışmada kullanılacak olan problemlere son şekli verilmiştir (bkz. EK 7). Pilot çalışmanın; araştırmanın asıl uygulama sürecinde karşılaşılabilecek sorunları ön görme, veri toplama aracındaki düzeltilmesi gereken noktaları belirleme ve araştırmacının görüşme ve gözlem konusunda deneyim kazanmasına imkân verme gibi faydalar sağladığı söylenebilir.

3.3.1.3. Özelleştirme bileşenine yönelik problemler

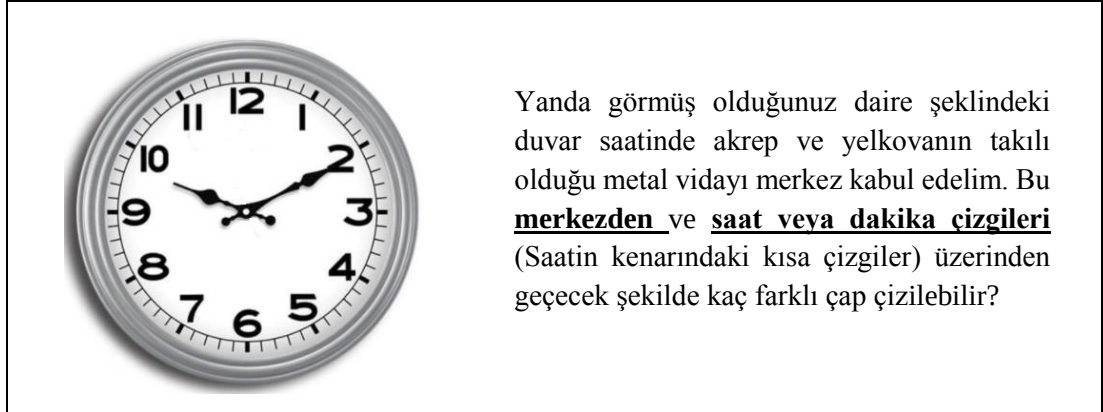
Özelleştirme bileşenine yönelik 1 tane sözel 2 tane de görsel problem hazırlanmıştır. Şekil 11’de sözel özelleştirmeye yönelik hazırlanan problem sunulmuştur:

- Hatice’nin elinde dikdörtgen biçiminde bir kâğıt bulunmaktadır. 1. adımda bu kâğıdın **kısa kenarlarını** üst üste gelecek şekilde katlamıştır. Daha sonra 2. adımda ise **diğer iki kenarını** da üst üste gelecek şekilde katlamıştır. Hatice daha sonra katları açtığında hangi geometrik **şekilden** kaç tane görecektir?
- Hatice katlama işlemine benzer şekilde devam ederse bir sonraki adımda o geometrik şekilden kaç tane oluşturur? Nedenleri ile açıklayınız.

Şekil 11. Sözel özelleştirmeye yönelik katlama problemi

Şekil 11’de sunulan problem tüm sınıf düzeylerine sorulmuştur. Sözel özelleştirmeye yönelik olan bu problem belli bir kazanımın öğrenilmiş olmasını gerektirmediği için ortaokul kademelerinde öğrenim gören öğrencilerin üzerinde düşünüp yorum yapabileceği bir problem olarak görülmüştür. Problem, esasında genellemeye gidilebilecek bir problemidir. Ancak öğrencinin ilk adımı uygulayarak sonraki diğer iki adımı da tamamlayabilmesi özelleştirme olarak düşünülmüştür. Verilen problem öğrencinin şekil çizebileceği veya model kullanabileceği problem olması açısından çalışma için uygun görülmüştür. Bunun yanında öğrencinin uzamsal becerilerini de harekete geçirebilecek bir problem olduğu söylenebilir.

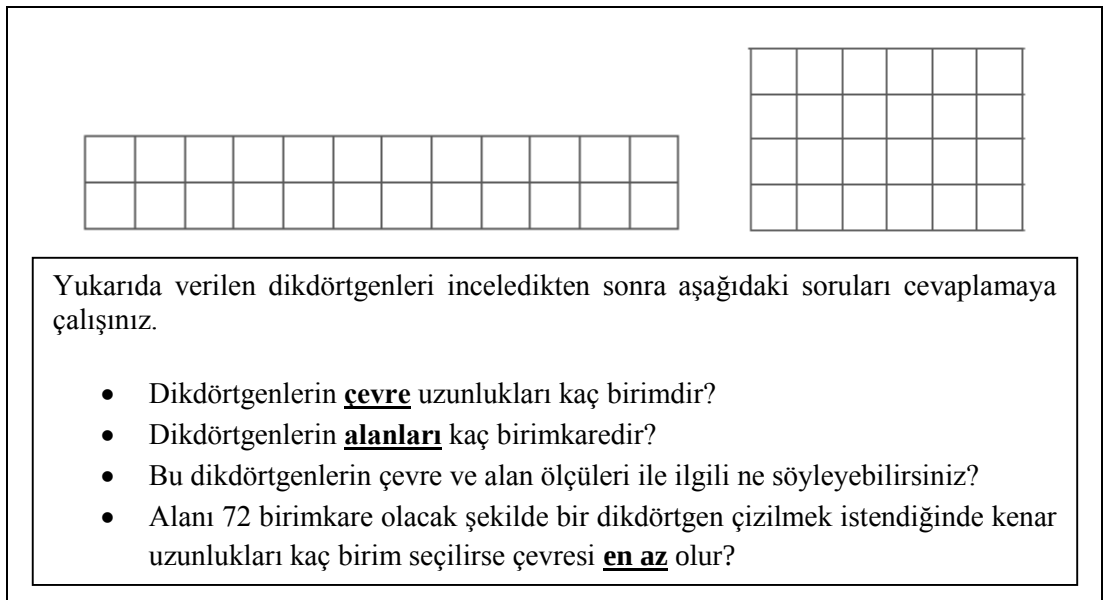
Sözel özelleştirme probleminde öğrencinin problemde verilen ifadelerden çıkarımlar yapması beklenirken, görsel özelleştirme problemlerinde ise problemde verilen görsellerden çıkarımlar yapması gerekmektedir. Görsel özelleştirmeye yönelik hazırlanan problemlerden biri Şekil 12’de yer alan problemidir:



Şekil 12. Görsel özelleştirmeye yönelik saat problemi

Şekil 12’de yer alan problem sadece sekizinci sınıf öğrencilerine sorulmuştur. Görsel özelleştirmeye yönelik olan bu problem öğrencilerin önceki yıllarda öğrenmiş oldukları “çap, merkez, çember” gibi matematiksel kavramların bir uygulaması olarak görülebilir. Bu kavramları anlamlandırmış olan bir öğrenci çemberin merkez noktasından sonsuz tane çap çizilebildiğinin farkında olabilir. Ancak problemdeki “saat veya dakika çizgileri” vurgusu sınırlı sayıda çap çizilebildiğini ifade etmektedir. Dolayısıyla problem, verilen görseli kullanarak bir özelleştirme yapılmasını istemektedir.

Görsel özelleştirmeye yönelik hazırlanan bir diğer problem Şekil 13’te verilmiştir:



Şekil 13. Görsel özelleştirmeye yönelik alan problemi

Şekil 13’te yer alan problem sekizinci sınıflar hariç bütün öğrencilere yöneltilmiştir. Problem öğrencilerin ilkokul yıllarından itibaren hep karşılaştığı çevre ve alan kavramlarıyla

yakından ilgilidir. Araştırmacının pilot çalışmadaki deneyimlerinde öğrencilerin çevre ve alan kavramları arasında bir karmaşa yaşadıkları tespit edilmiştir. Nitekim bu tür bir kavram yanılgısı literatürde de vurgulanmaktadır (Chappell ve Thompson, 1999; Tan-Şişman ve Aksu, 2009; Woodward, 1982). Verilen problem bu yanılgıya sahip olan öğrencilerin yanılgılarının farkında olmalarını sağlayarak bir sonuca varmalarını amaçlamıştır. Problemde farklı çevre uzunluklarına sahip ancak alanları eşit olan iki farklı dikdörtgen verilmiştir. Öncelikle öğrencilere birtakım sorular yöneltilerek bu durumun farkında olup olmadıkları belirlenmeye çalışılmıştır. Sonrasında ise başka bir dikdörtgende bu durumu özelleştirmeleri istenmiştir. Problem, aynı zamanda beşinci sınıfta yer alan “*Verilen bir alana sahip farklı dikdörtgenler oluşturur.*” kazanımı ile yakından ilişkilidir. Dikdörtgenler öğrencilere yardımcı olması açısından birimkareler ile verilmiştir.

3.3.1.4. Genelleme bileşenine yönelik problemler

Genelleme bileşenine yönelik 2 tane sözel 3 tane de görsel problem hazırlanmıştır. Şekil 14’te sözel genellemeye yönelik hazırlanan problemlerden biri sunulmuştur:

- Mert, birbirine dayalı olan yedi küpü **yan yana hizalayarak** bir sıraya koymuş ve daha sonra, onları kırmızı bir sprey boya ile boyamıştır. Boyaları kurduğunda küpleri birbirinden ayıran Mert, küplerin masaya ve aynı zamanda birbirlerine dokunan yüzeylerinin boyanmadığını fark etmiştir. Bu durumda yedi küpün kaç yüzeyi boyanmamıştır?
- Küp sayısı daha fazla olsaydı çözüm için bir kural olabilir miydi?

Şekil 14. Sözel genellemeye yönelik küp problemi

Şekil 14’te sunulan problem beşinci ve altıncı sınıf öğrencilerine sorulmuştur. Bu problem Posamentier ve Krulik’ten (2016) uyarlanmıştır. Model kullanma, şekil çizme, resim yapma veya tablo oluşturma gibi görsel temsillerin kullanılabileceği bir problem olduğu söylenebilir. Problemin ilk bölümünde öğrencilerin belli sayıda küpü kullanarak bir sonuca ulaşmaları istendiği için özelleştirme yapılmasını gerektirmektedir. Ancak problemin ikinci bölümünde bu özelleştirme yardımıyla bir kural ya da örüntü bulmaları gerektiği için sözel genelleme olarak düşünülmüştür.

Sözel genellemeye yönelik olarak hazırlanan bir diğer problem Şekil 15’te verilmiştir:

Tüm kenar uzunlukları ve iç açılarının ölçüleri birbirine eşit olan çokgenlere düzgün çokgen denir. Eşkenar üçgen, kare, düzgün beşgen ve düzgün altıgen gibi çokgenlerin bütün kenar uzunlukları ve bütün iç açılarının ölçüleri birbirine eşittir. “n” kenarlı bir düzgün çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamını bulmaya yarayacak genel bir kural oluşturabilir misiniz?

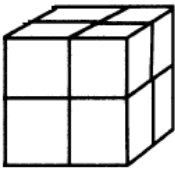
Şekil 15. Sözel genellemeye yönelik çokgen problemi

Şekil 15’te verilen problem yedinci sınıfta öğretilen “*Çokgenlerin köşegenlerini, iç ve dış açılarını belirler; iç açılarının ve dış açılarının ölçüleri toplamını hesaplar.*” kazanımıyla yakından ilişkilidir. Bundan dolayı problemin yedinci ve sekizinci sınıf öğrencileri için uygun olduğuna karar verilmiştir. Problem, Yıldırım ve Yavuzsoy-Köse’nin (2018) ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerini inceledikleri çalışmadan uyarlanmıştır. Birtakım ön bilgiler verilerek problem zenginleştirilmiş ve ortaokul düzeyindeki kitaplarda ifade edilen formüle öğrencilerin ulaşmaları istenmiştir.

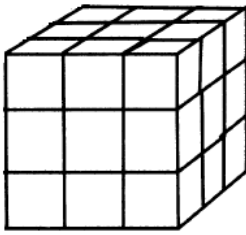
Sözel genelleme problemlerinde öncelikle öğrencilerin özelleştirme yapmaları ve bunun devamında genellemeye varmaları beklenmiştir. Bununla birlikte öğrencilerin bu süreçteki görsel akıl yürütmeleri irdelenmiştir. Görsel genelleme problemlerinde ise öncelikle öğrencilerin problemde verilen görsellerden çıkarımlar yaparak özelleştirme yapmaları sonrasında ise genelleme yapmaları istenmiştir. Görsel genellemeye yönelik hazırlanan problemlerden biri Şekil 16’daki gibidir:



1. Adım



2. Adım



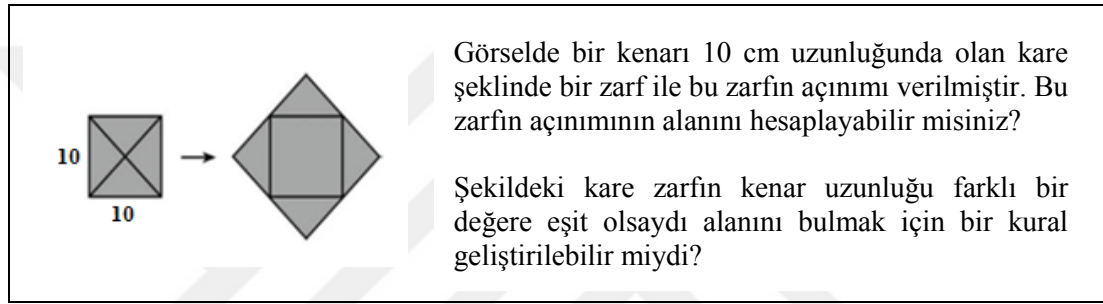
3. Adım

- Ali, matematik öğretmenin ona verdiği birimküpleri bir araya getirerek yukarıdaki gibi daha büyük küpler oluşturmaya çalışmıştır. 1. adımı 1 tane küple oluştururken, 2. adımı 8 tane küple oluşturmuştur. 3. adımda kaç tane küp kullanacağını bulabilir misiniz?
- Peki, daha ileri adımlar oluşturulmak istendiğinde, o adımda kaç tane küp gerekli olacağını bulmak için bir kural geliştirilebilir mi? (Büyük küpleri oluştururken birimküpler arasında boşluk bırakılmayacaktır.)

Şekil 16. Görsel genellemeye yönelik küp problemi

Şekil 16'daki problem beşinci ve altıncı sınıf öğrencileri için hazırlanmıştır. Problemin öğrencilerin uzamsal yeteneklerini de harekete geçirmesini gerektirdiğinden dolayı araştırma için uygun olduğu söylenebilir. Birimküplere yönelik kazanımlar dördüncü sınıfta da yer aldığından öğrencilerin yabancılık çekmeyeceği düşünülmüştür. Küp oluşturma problemindeki ilişkiyi keşfetmek için ilk iki adımın yeterli olacağı düşünülmüş ve üçüncü adımda özelleştirme yapmaları beklenmiştir. Problemin devamında ise küpler arasındaki ilişkiyi keşfeden öğrencilerin genelleme yapmaları beklenmiştir.

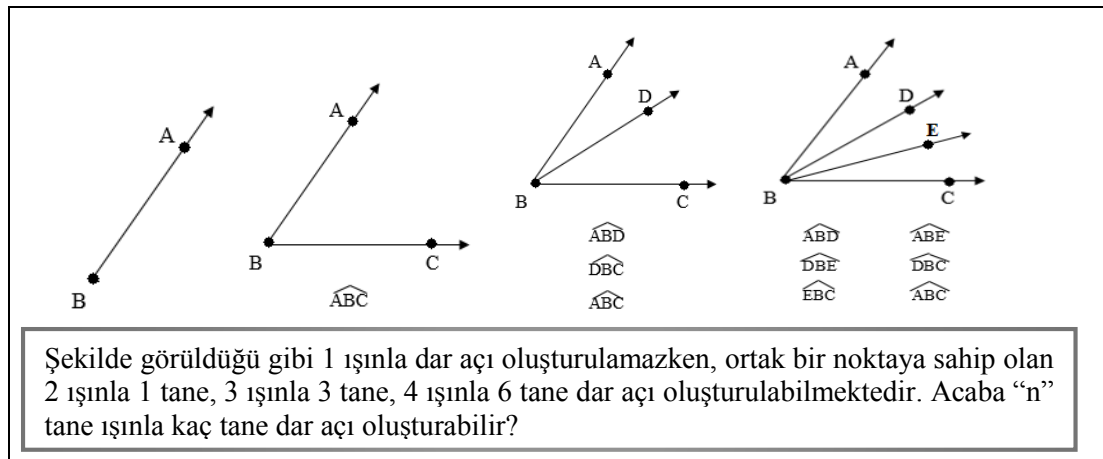
Şekil 17'de görsel genellemeye yönelik hazırlanan bir diğer problem sunulmuştur:



Şekil 17. Görsel genellemeye yönelik zarf problemi

Yedinci sınıf öğrencilerine yönelik olarak Şekil 17'de sunulan problem hazırlanmıştır. Problem, öğrencilerden görselde sunulan katlama ilişkisini fark etmelerini beklemektedir. Problemin ikinci kısmı ise öğrencilerin yapılan özelleştirmeden yola çıkarak bir genellemeye ulaşmalarını istemektedir. Problem, Ölçme, Seçme ve Yerleştirme Merkezi Başkanlığı'nın [ÖSYM] (2012), Akademik Personel ve Lisansüstü Eğitimi Giriş Sınavında [ALES] sorduğu bir sınav sorusundan esinlenilerek oluşturulmuştur.

Görsel genellemeye yönelik hazırlanan son problem Şekil 18'de gösterilmiştir:



Şekil 18. Görsel genellemeye yönelik açı problemi

Şekil 18’de sunulan problem sekizinci sınıf öğrencileri için hazırlanmıştır. Yazgan ve Arslan’dan (2017) uyarlanarak oluşturulan problem açılış bilgisinin yanı sıra örüntü arayarak genelleme yapmaya yöneliktir. Verilen görseller yardımıyla ileriki adımlar için oluşturulacak açılış sayılarını bulmaları istenmektedir.

3.3.1.5. Varsayımda bulunma bileşenine yönelik problemler

Varsayımda bulunma bileşenine yönelik 4 tane sözel 3 tane de görsel problem hazırlanmıştır. Şekil 19’da sözel varsayımda bulunma bileşenine yönelik oluşturulan problem verilmiştir:

Yusuf, odasının duvarına **es büyüklükte kare** şeklinde 4 farklı resim asmak istemektedir. Annesi bu duruma izin vermiş fakat minimum sayıda çivi kullanmak zorunda olduğunu söylemiştir. Yusuf resimlerin her bir köşesine bir çivi çakmak için ısrar ettiğine göre Yusuf’un ihtiyaç duyduğu çivi sayısı **en az** kaç olabilir?

Şekil 19. Sözel varsayımda bulunmaya yönelik resim problemi

Beşinci sınıf öğrencilerine yönelik sorulan Şekil 19’daki problem Posamentier ve Krulik’ten (2016) uyarlanmıştır. Verilen problem bir sonuca varmadan önce birtakım denemeler yapmayı gerektirdiği için varsayımda bulunma bileşenine uygun olduğu görülmüştür. Bunun yanında problemin öğrencilerde görsel temsil kullanma ihtiyacı oluşturabileceği de düşünülmüştür.

Şekil 20’de sözel varsayımda bulunmaya yönelik hazırlanan bir diğer problem sunulmuştur:

Herhangi bir dikdörtgenin alanı, kısa kenar ile uzun kenar uzunluklarının çarpımı ile bulunabilir. Bu bilgi doğrultusunda sizce bir dik üçgenin alanı nasıl hesaplanabilir?

Şekil 20. Sözel varsayımda bulunmaya yönelik üçgende alan problemi

Altıncı sınıf öğrencilerine yönelik oluşturulan Şekil 20’deki problemde, öğrencilerin dikdörtgenin alan bağıntısından yararlanarak dik üçgenin alan bağıntısını oluşturması istenmektedir. Nitekim problemin çözümü için öğrencilerin çizimler yapabileceği ön görülmüştür. Burada öğrencilerin bir iddia oluşturup onu açıklayabilmeleri açısından varsayımda bulunma bileşenini içerdiği düşünülmüştür.

Sözel varsayımda bulunmaya yönelik hazırlanan bir diğer problem Şekil 21’de verilmiştir:

Bir çokgende komşu olmayan iki köşeyi birleştiren doğru parçasına **köşegen** denir. Bir düzgün çokgenin 14 tane köşegeni olduğu bilinmektedir. Bu çokgenin kaç kenarlı olduğuna yönelik bir tahminde bulunabilir misiniz? Tahmininizi nedenleri ile birlikte açıklayınız.

Şekil 21. Sözel varsayımda bulunmaya yönelik köşegen problemi

Şekil 21’de verilen problem yedinci sınıf öğrencilerine yönelik olarak hazırlanmıştır. Köşegen kavramına ilkokul yıllarından itibaren aşina olan yedinci sınıf öğrencileri için bu problemin uygun olduğu düşünülmüştür. Aslında problemde belli sayıda köşegene sahip bir düzgün çokgenin ne olduğunun araştırılması istenmektedir. Öğrenci bunu yaparken de belirli tahminlerde bulunabileceği için varsayımda bulunma bileşenini kapsamaktadır. Aynı zamanda problemin öğrenciyi özelleştirmeye ve hatta genellemeye bile götürebileceği söylenebilir.

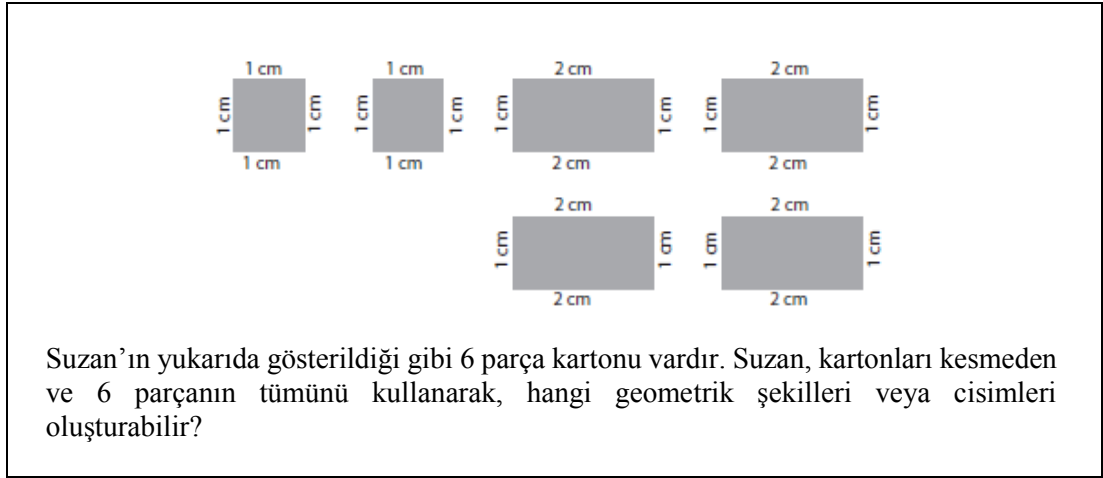
Şekil 22’de sözel varsayımda bulunmaya yönelik hazırlanan son problem sunulmuştur:

Herhangi bir ABC üçgeninde A açısının ölçüsünü azaltıp, AB ve AC kenarlarının uzunluğu aynı kalacak şekilde yeni bir üçgen oluşturulduğunda BC kenarında nasıl bir değişim olur? Cevabınızı nedenleri ile ayrıntılı bir şekilde açıklayınız.

Şekil 22. Sözel varsayımda bulunmaya yönelik üçgende açı problemi

Şekil 22’deki sözel varsayımda bulunma problemi sekizinci sınıf öğrencilerine yönelik hazırlanmıştır. Problem öğrencilerin bazı yönergeleri takip ederek bir açıklama yapmalarını istemektedir. Öğrencilerin yeni oluşturacakları üçgene yönelik açıklamalarının temelinde bir varsayım olacağı düşünülmektedir. Aynı zamanda bu açıklamayı yaparken ne tür bir yol izleyecekleri merak edilmektedir.

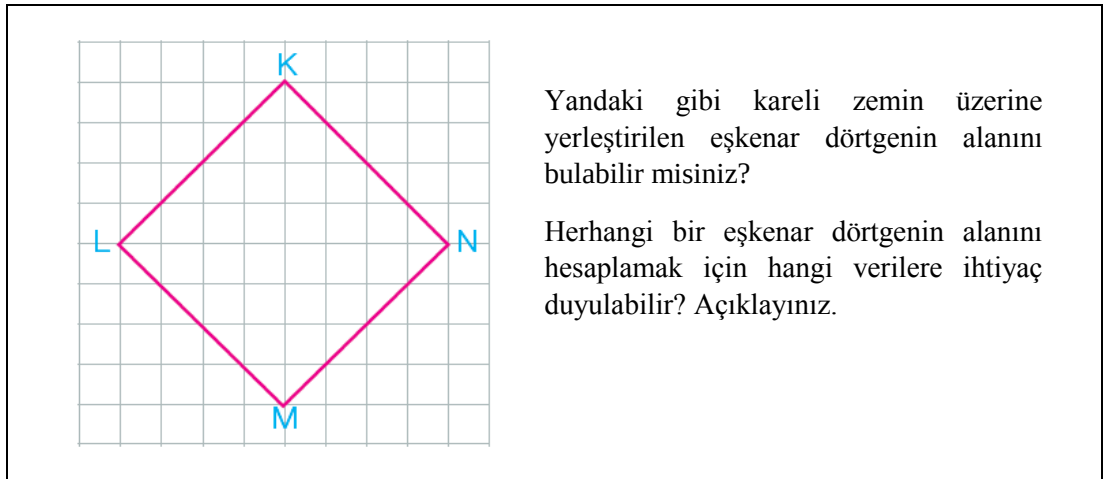
Sözel varsayımda bulunma problemlerinde özelleştirme ve genelleme problemlerinde olduğu gibi öğrencinin problemde verilen ifadelerden çıkarımlar yapması beklenirken, görsel varsayımda bulunma problemlerinde ise problemde verilen görsellerden çıkarımlar yapması gerekmektedir. Görsel varsayımda bulunmaya yönelik hazırlanan problemlerden biri Şekil 23’te yer alan problemidir:



Şekil 23. Görsel varsayımda bulunmaya yönelik karton problemi

Şekil 23'te sunulan problem beşinci sınıf öğrencilerine sorulmuştur. Görselde verilen kareleri ve dikdörtgenleri kullanarak öğrencilerin hangi şekil veya cisimleri oluşturabilecekleri araştırılmıştır. Burada problemin birden çok çözümü olmasından dolayı açık uçlu bir problem olduğu söylenebilir. Ancak öğrencilerin ilk akıllarına gelen şeklin veya cismin ne olduğu merak edilmektedir. Problem 4. sınıf öğrencileri için yapılan Trends in International Mathematics and Science Study [TIMMS] (2011) sınavından esinlenilerek hazırlanmıştır.

Şekil 24'te görsel varsayımda bulunmaya yönelik hazırlanan bir diğer problem verilmiştir:

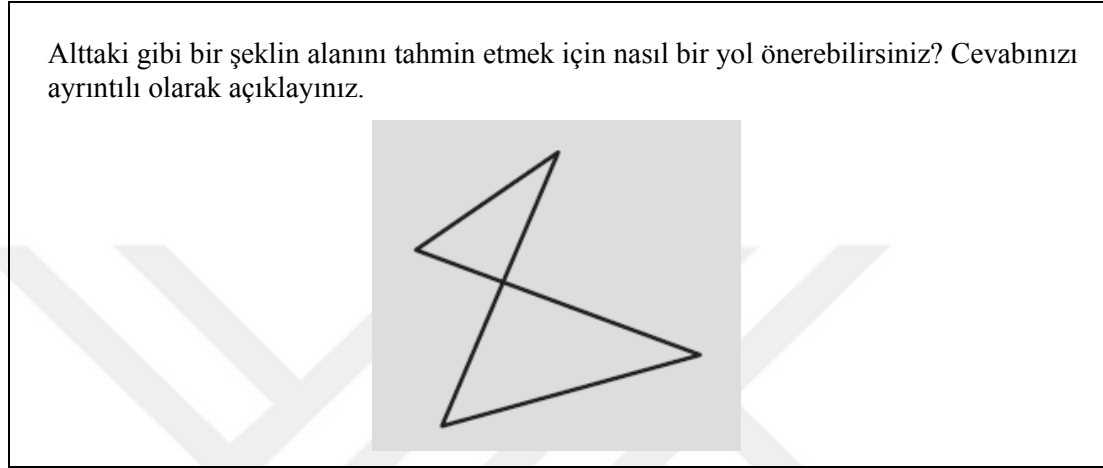


Şekil 24. Görsel varsayımda bulunmaya yönelik eşkenar dörtgen problemi

Şekil 24'te verilen problem altıncı ve yedinci sınıf öğrencilerine sorulmuştur. Eşkenar dörtgenin alanını hesaplama yedinci sınıf kazanımları içerisinde yer almaktadır. Ancak o kazanımı henüz görmeden bu tarz bir soru üzerinden onların akıl yürütme becerilerini

belirlemek istenmiştir. Öğrencinin problemde sunulan görseli kullanarak birtakım tahminlerde bulunması bir varsayım olarak ele alınmıştır. Verilen şeklin aynı zamanda bir kare olmasının, problemde araştırılmak istenen durumu çok etkilemeyeceği düşünülmüştür.

Şekil 25’te görsel varsayımda bulunmaya yönelik hazırlanan son problem verilmiştir:

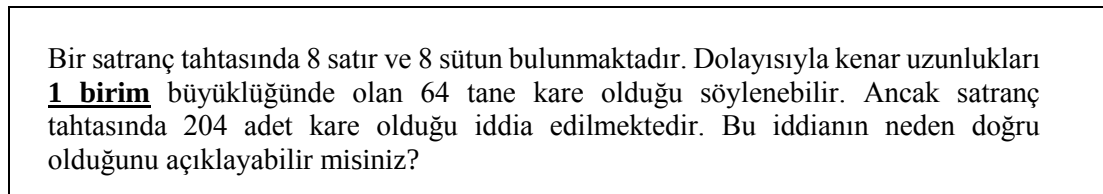


Şekil 25. Görsel varsayımda bulunmaya yönelik alan problemi

Şekil 25’te sunulan son görsel varsayımda bulunma problemi sekizinci sınıf öğrencilerine sorulmuştur. Problem, Mason vd.’nin (2010) kitabından uyarlanarak hazırlanmıştır. Problemde herhangi bir nicel veri olmadığı için öğrencilerin düşünme biçimlerini ortaya çıkarabileceği söylenebilir. Bu süreçte öğrencilerin birtakım varsayımlar ortaya atarak sonuca varmaya çalışabilecekleri tahmin edilmiştir. Öğrencilerin şeklin alanının nasıl bulunacağına yönelik belirlemiş oldukları yöntemlerin neden kullanıldığını ve bu kullanım şeklinin matematiksel olarak ifadesini, matematiksel kurallar doğrultusunda gerçekleştirerek ifade edip göstermeleri beklenmektedir (Kükey, 2018).

3.3.1.6. Doğrulama ve ikna etme bileşenine yönelik problemler

Doğrulama ve ikna etme bileşenine yönelik 1 tane sözel 2 tane de görsel problem hazırlanmıştır. Şekil 26’da sözel doğrulama ve ikna etmeye yönelik hazırlanan problem sunulmuştur:



Şekil 26. Sözel doğrulama ve ikna etmeye yönelik satranç problemi

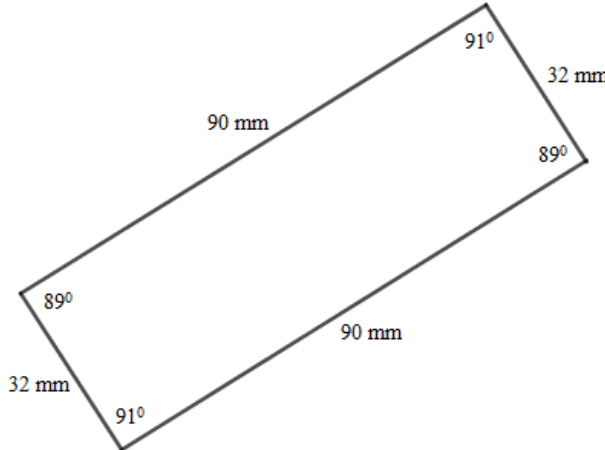
Ortaokul seviyesinde ispat yapma etkinlikleri yer alamayacağı için bu bileşene yönelik bazı doğrulama veya karşı tarafı ikna etmeye yönelik problemler hazırlanmıştır. Bu problemlerden biri Şekil 26'da sunulan problemidir ve bu problem tüm sınıf düzeylerine sorulmuştur. Sözel doğrulama ve ikna etmeye yönelik olan bu problem belli bir kazanımın öğrenilmiş olmasını gerektirmediği için ortaokul kademelerinde öğrenim gören öğrencilerin üzerinde düşünüp yorum yapabileceği bir problem olarak düşünülmüştür. Aynı zamanda satranç birçok öğrencinin bildiği bir oyundur. Yine de bilmeyenler veya hatırlayamayanlar için bazı hatırlatıcı bilgiler verilmiştir. Problemde satranç tahtası üzerinde farklı büyüklükte birçok kare bulunduğu ve bunun sayısının 204 olduğu ifade edilmektedir. Öğrencilerin bu ifadenin doğruluğunu göstermeleri istendiği için bu bileşene uygun bir problem olduğu söylenebilir.

Görsel doğrulama ve ikna etmeye yönelik hazırlanan problemlerden biri Şekil 27'de yer alan problemidir:

Aşağıda uzunluk ve açı ölçüleri verilen şekle bakan Ahmet ile Yağmur arasında şöyle bir diyalog geçmektedir.

Ahmet : Bu şekil bir dikdörtgendir.
Yağmur : Ben dikdörtgen olmadığını düşünüyorum.

Ahmet ile Yağmur'un bu konudaki tartışmalarında kimin haklı olduğunu düşünüyorsunuz? Cevabınızı ayrıntılı bir şekilde açıklayınız.



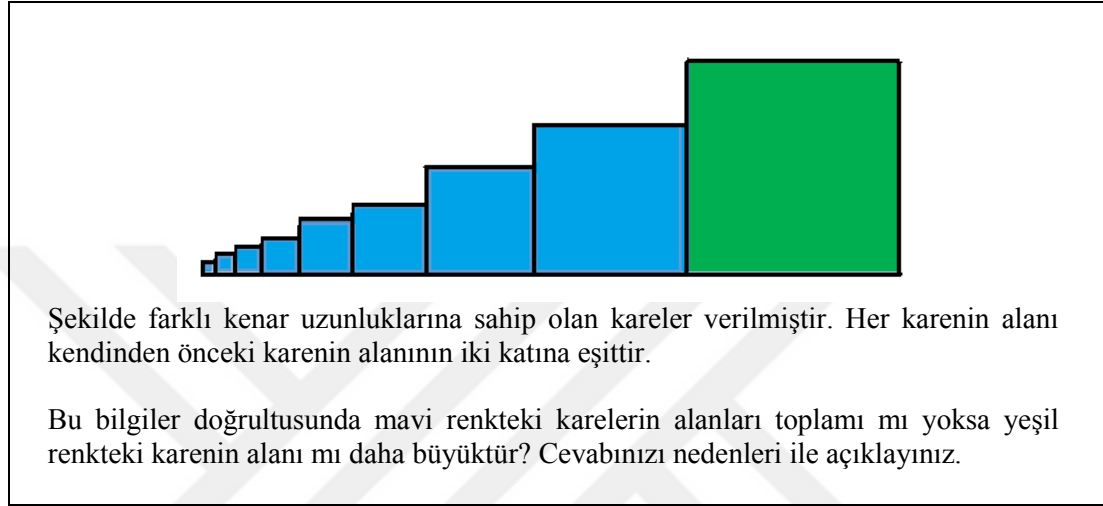
The diagram shows a quadrilateral with vertices labeled with angles and sides. The top-left angle is 91°, the top-right angle is 89°, the bottom-left angle is 91°, and the bottom-right angle is 89°. The top-left side is 90 mm, the top-right side is 32 mm, the bottom-left side is 32 mm, and the bottom-right side is 90 mm.

Şekil 27. Görsel doğrulama ve ikna etmeye yönelik dikdörtgen problemi

Şekil 27'deki problem sadece beşinci sınıf öğrencilerine yöneltilmiştir. Bu problem Battista vd.'nin (2018) çalışmasından uyarlanarak hazırlanmıştır. Görsel doğrulama ve ikna etmeye yönelik olan bu problemin, öğrencinin zihninde dikdörtgen kavramını nasıl

yerleştirdiğini aıĝa çıkarabileceği söylenebilir. Öğrencinin problemde verilen görseli nasıl ve ne amaçla kullandığı ve karşı tarafı nasıl ikna edebileceğini araştırmaya yönelik sorulmuştur.

Görsel doğrulama ve ikna etmeye yönelik hazırlanan diğer problem şekil 28’deki gibidir:



şekil 28. Görsel doğrulama ve ikna etmeye yönelik kareler problemi

Görsel doğrulama ve ikna etmeye yönelik olan şekil 28’deki problem beşinci sınıf dışında olan bütün öğrencilere sorulmuştur. Öğrencilerden problemde verilen ifade ile görseli ilişkilendirerek bir sonuca varmaları ve bu sonucu doğrulamaları beklenmektedir. Bu süreçte öğrencilerin görseli nasıl kullanacağı merak konusudur.

3.3.2. Klinik mülakatlar

Araştırma kapsamındaki öğrencilerin geometri problemlerini zrken kullandıkları görsel temsilleri belirlemek, görsel temsiller ile yaptıkları eylemleri ve akıl yürütme süreçlerini detaylı ortaya çıkarabilmek amacıyla klinik mülakatlar yapılmıştır. İlk olarak Piaget tarafından kullanılan klinik mülakat, öğrencilerin düşüncelerindeki zenginliği keşfetmek ve bilişsel becerileri değerlendirmek için esnek bir soru sorma yöntemi olarak geliştirilmiştir (Karataş ve Güven, 2003). Goldin (1998b) klinik mülakatların; “problem zme yoluyla çocukların ya da yetişkinlerin matematiksel davranışlarını gözlemleyerek bir şeyler öğrenme” ve “gözlemlerden öğrencilerin matematiksel anlamalarını, bilgi yapılarını, bilişsel süreçlerini ve bu süreçte meydana gelen duyuşsal değişiklikler hakkında sonuçlar çıkarma” olarak araştırmalarda iki amaç için kullanıldığını ifade etmiştir.

“Klinik” kelimesi burada kapsamlı bir gözlemle ilgilidir ve bireyin sınıf, atölye gibi doğal eğitim ortamı dışında mülakatçı ile rahat ve sessiz bir ortamda görüşmesidir. Aynı

zamanda klinik mülakatlar çoğunlukla bireyseldir (Zaskis ve Hazzan, 1998). Yarı-yapılandırılmış olması bu yöntemin esnekliği ile ilgilidir. Şöyle ki araştırmacı mülakattan önce ne tür sorular soracağını planlamıştır. Ancak bazen öğrencinin verdiği cevaplara bağlı olarak öğrencinin düşüncelerine açıklık getirmek açısından planda olmayan soruları da sorması gerekebilir. Bu metot araştırmacıya bu esnekliği tanımaktadır (Çelik, 2007; Zaskis ve Hazzan, 1998). Bununla birlikte klinik mülakat yöntemi ile öğrencilerin hataları derinlemesine incelenebilir ve saklı kalan matematiksel düşünceler ortaya çıkabilir (Karataş ve Güven, 2003).

Hunting (1997, s. 151-152) klinik mülakatlarda yer alan görevleri seçerken ve geliştirirken bir takım ölçütlere dikkat edilmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Bu ölçütler şu şekilde özetlenebilir:

Zaman kullanımı: Mülakata ayrılan zamanın öğrencilerin yaşlarına bağlı olarak ayarlanması gerekmektedir. 5-8 yaşlarındaki çocuklar için 10-20, 10-12 yaşındaki çocuklar için ise 35-50 dakika arasında bir zaman ayrılmalıdır.

Ön bilgi: Mülakatta kapsamlı bir görev hazırlamak, öğrenciyi tanımakla yani öğrencinin ön bilgisini bilmekle mümkündür. Öğrencilerin sınavları ve yapılan gözlemler onların ön bilgilerinin belirlenmesinde yol gösterir.

Yenilik: Görevin öğrencinin dikkatini çekmesi gerekmektedir. Eğer görevin sunumu ya da içeriği yeni olursa öğrencinin ilgisi daha çok artacaktır.

Bağlam: Görev öğrencinin matematiksel düşüncesini ortaya çıkaracak şekilde olmalı ve eğer mümkünse öğrenciye gerçeğe uygun bir ortamda sunulmalıdır.

Materyaller: Bazı görevler öğrencilerin fiziksel materyal kullanımını gerektirmektedir. Manipülatifleri içeren görevler öğrencilerin sözel anlatımları ve yorumları ile ilgili gözlem yapılmasına olanak sağlamaktadır. Öğrencilerin çözüm girişimlerini kaydetmede kâğıt ve kalem kullanılmalıdır.

Esneklik: Farklı yeteneklere sahip öğrenciler için görevler daha basit ve daha kolay alt görevlerle birleştirilerek hazırlanabilir. Eğer öğrenci kolay olan görevi başarı ile tamamlarsa o zaman asıl görev tekrar sunulabilir.

Araştırma temeli: Klinik mülakatlarda matematiğin öğrenilmesine yönelik yapılan araştırmaların incelenmesi yararlıdır.

Araştırmada, mülakatların öncesinde ve mülakatlar sırasında Hunting'in (1997) belirtmiş olduğu ölçütler dikkate alınmıştır. Bu bağlamda hazırlanan problemlerin öğrenci seviyelerine uygunluğu uzman görüşleri ve pilot çalışma ile desteklenmiştir. Araştırmaya katılacak öğrenciler hakkında araştırma öncesinde ve araştırma sırasında detaylı bilgiler elde

edilmiştir. Problemler matematiksel düşünme bileşenleri doğrultusunda hazırlandığı için de öğrencilerin matematiksel düşüncelerini ortaya çıkaracağı ön görülmüş ve problemlerin ilgi çekici olmasına özen gösterilmiştir. Bununla birlikte öğrencilerin problemleri çözerken ihtiyaç duyabileceği her türlü materyal araştırma ortamında hazır bulundurulmuştur. Öğrencinin materyal kullanma isteği doğrultusunda mülakatlar yürütülmüştür. Problemler mümkün mertebe adım adım çözülecek şekilde hazırlanmıştır. Çözüm sırasında belli bir noktadan ileriye gidemeyen öğrenciler, o noktadan sonra zorlanmamış ve bir başka probleme geçilmiştir. Problemdeki tüm adımları başarı ile tamamlayan öğrencilere ise problemde verilmeyen daha ileri sorular da yöneltilmiştir. Bunun yanında mülakat sürecini yönetirken EK 8’de yer alan görüşme soruları kullanılmıştır. Görüşme sorularına ek olarak mülakat sırasında sorulma gerekliliği duyulan sonda sorular da kullanılmıştır.

Mülakatlar katılımcıların uygun olduğu bir zamanda ve okuldaki derslerini aksatmayacak şekilde planlanmıştır. Mülakatlar 2020-2021 eğitim-öğretim yılının 2. döneminde gerçekleştirilmiştir. Mülakat süreleri 41 dakika ile 68 dakika arasında değişmektedir. Mülakat sürelerinde Hunting’in (1997) zaman kullanımı ölçütü dikkate alınsa da bazı mülakatlarda, mülakatlar tamamlanmadığı için bu süreler aşılmak durumunda kalınmıştır. Ancak tüm mülakatlarda katılımcıların yorgunluk durumları ve mülakata devam edip etmeme istekleri dikkate alınmıştır.

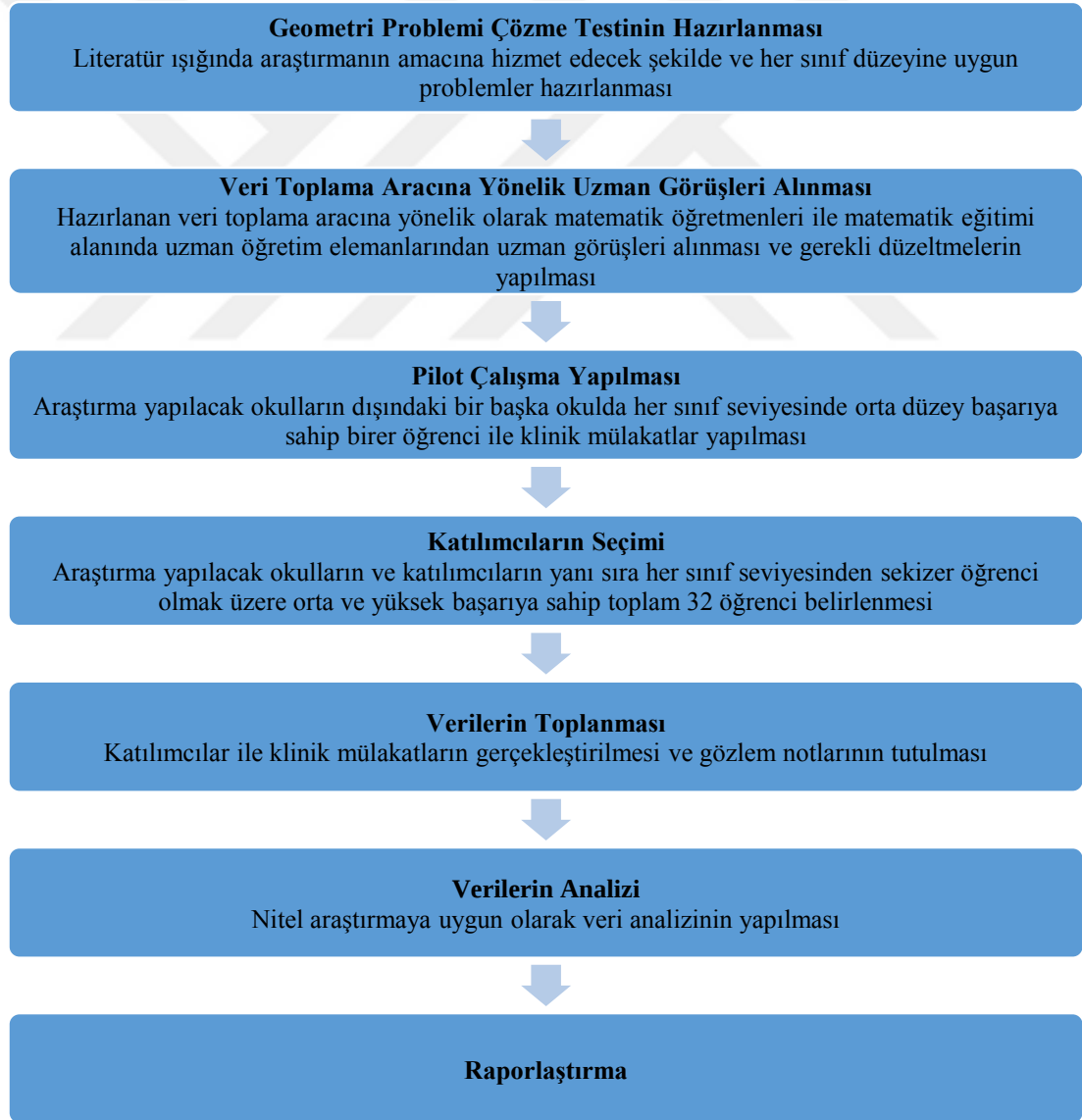
Araştırmada gerçekleştirilen bütün mülakatlar video ile kayıt altına alınmıştır. Video kaydı alınırken kameranın öğrencinin yüzünü çekmeyecek şekilde olmasına dikkat edilmiştir. Kamera, sadece öğrencinin cevap kâğıdı üzerinde gerçekleştirdiği işlemleri kayıt etmiş ve öğrenciyi rahatsız etmeyecek bir konumda ayarlanmıştır. Video kayıtlarının en önemli avantajı araştırmada gözden kaçan noktaları tekrar inceleme imkânı vermiş olmasıdır. Video kayıtları sayesinde öğrencilerin problem çözme sürecinde yaptıkları işlemler adım adım incelenmiştir. Verilerin analizi sürecinde ve transkriptler hazırlanırken video kayıtları sürekli olarak izlenmiştir. Gerekli görülen yerlerde video kayıtları durdurularak ekran kaydı alınmış ve araştırma bulgularını desteklemek amacıyla resim olarak raporlaştırma sürecinde kullanılmıştır.

3.3.3. Gözlem notları

Araştırmanın bir diğer veri toplama aracı da klinik mülakatlar sırasında tutulan gözlem notlarıdır. Gözlem notları görüşme ortamının ve araştırmacı-katılımcı etkileşiminin betimlenmesi için kullanılmıştır. Bununla birlikte katılımcıların her bir probleme yönelik dikkat çeken davranışları ve söylemleri de not edilmiştir. Ayrıca video kayıtları ile gözlenmesi mümkün olmayan durumlar not edilmeye çalışılmıştır.

3.4. Veri Toplama Süreci

Araştırmanın verileri katılımcılarla gerçekleştirilen klinik mülakatlar ile toplanmıştır. Ancak mülakatlardan önce birçok hazırlık yapıldığı söylenebilir. Öncelikli olarak araştırmada kullanılacak problemler üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Devamında uzman görüşleri alınmış ve pilot çalışma yapılarak problemlere son hali verilmiştir. Katılımcılar belirlendikten sonra veli ve katılımcı izinleri de alınarak veri toplanmaya başlanmıştır. Mülakatlar video ile kayıt altına alınmış ve bunun yanında gözlem notları da tutulmuştur. Öğrencilerin çalışma kâğıtları da veri toplama sürecinin bir parçasını oluşturmaktadır. Araştırmaya ait veri toplama sürecine yönelik akış şeması Şekil 29’da sunulmuştur:



Şekil 29. Veri toplama süreci

Şekil 29’da görüldüğü gibi veri toplama süreci tamamlandıktan sonra veriler analiz edilmiş ve devamında raporlaştırma aşamasına geçilmiştir.

3.5. Verilerin Analizi

Araştırmada öncelikle klinik mülakatlardan, gözlem notlarından ve katılımcıların dokümanlarından elde edilen verilerin tamamı sınıflandırılarak dijital ortama aktarılmıştır. Klinik mülakat kayıtları tekrar tekrar gözden geçirilerek yazılı hale getirilmiştir. Bu gözden geçirmeler yapılırken mülakatlar sırasında alınan gözlem notları ve katılımcılara ait dokümanlar da incelenmiştir. Eş zamanlı olarak toplanan bu verilerin analizinde bütüncül bir yaklaşım (Bogdan ve Biklen, 2007) izlenmesinin doğru olacağı düşünülmüştür. Bundan dolayı analize başlamadan önce her katılımcının bütün problemlere yönelik yanıtları ayrı ayrı düzenlenmiştir. Bu düzenlemelere ait ayrı ayrı tablolar oluşturulmuştur. Tabloların ilk sütununda mülakatlara ait transkriptler, ikinci sütununda katılımcıların dokümanlarına ait görsel kanıtlar, üçüncü sütununda ise gözlem notları bulunmaktadır. Yapılan düzenlemeyi göstermek için katılımcılardan SÖ7 ile gerçekleşen klinik mülakattaki bir problemten elde edilen verilerin özeti Şekil 30’da sunulmuştur:

Mülakat	Görsel Kanıt	Gözlem Notları
Dördüncü Problem A: Bu problemde ne diyor? K: 1 tane ışınla açı oluşturulmuyor. 2 ışınla 1 tane, 3 ışınla 2 tane açı oluşturuluyormuş. A: 3 ışınla 3 tane mi 2 tane mi? K: Yok 3 tane oluyor. A: Onu gösterebilir misin? K: Şu şekilde oluyor. O zaman 2 de 1, 3’te 3, 4’te 6, 5’te 10 olacak büyük ihtimalle (Sistematiğe yazmaya başlar.). İlk önce 1 artmış sonra 2 artmış sonra 3 artmış. Bu düzende devam ediyor. Şimdi 4 artacak, sonra 5 artacak, sonra 6 artacak ve bu şekilde devam edecek. A: Peki gerçekten böyle mi oluyor? K: (5. adımı çizmeye başlar ve açıları sayar.). Evet 10 oluyor. A: O zaman senin artış miktarların muhtemelen doğru. K: Evet. Şimdi n ile bağlantı kuralım. Her seferinde sıralı artıyor (Bir süre düşünür.). A: Ne düşünüyorsun? K: Şu anda kural oluşturmaya çalışıyorum. A: Tamam düşündüklerini deneyelim. Hemen aklına gelmeyebilir çünkü. Ama çabaladıkça ulaşabilirsin. K: (Tekrar düşünmeye başlar.). A: Aklına bir şey gelmedi sanırım. K: İlk önce n artı n ile bir şeyler yapmaya çalıştım. A: Güzel. K: n çarpı n de olabilir. Humm şöyle olsa 2 kere 2, 4. 4 eksi 2, 2. 2 bölü 2, 1. 3 kere 3, 9. 9 eksi 3, 6. 6 bölü 2, 3. 4 kere 4, 16. 16 eksi 4, 12. 12 bölü 2, 6. Hı tamam. A: Buldun mu? K: Buldum şöyle olacak. n çarpı n, eksi n, bölü 2. A: Nasıl buldun bunu? K: Deneye deneye buldum. Hepsinde de sağlıyor.		- Verilen görseli kullanıyor. - Tablo temsili kullandı. - Çizim temsili de kullandı. Görselleştirme yapabildiğini gösterdi. Yapılan bir dönüştürmedir. - Aynı zamanda özelleştirmeyi de tamamladı. - Varsayımlarda bulunuyor. - Genellemeye ulaştı.

Şekil 30. Verilerin düzenlenme ve analiz sürecine ait bir örnek

Şekil 30’da gösterildiği gibi bütün veriler bu şekilde düzenlendikten sonra kodlamaya hazır hale gelmiştir. Daha sonra araştırma kapsamında toplanan veriler nitel veri analiz tekniklerinden yararlanılarak analiz edilmiştir. Analizler yapılırken içerik analizi (Yıldırım ve Şimşek, 2016) ve çapraz durum analizi (Stake, 2006; Yin, 2009) tekniklerinden faydalanılmıştır.

“İçerik analizinde temelde yapılan işlem, birbirine benzeyen verileri belirli kavramlar ve temalar çerçevesinde bir araya getirmek ve bunları okuyucunun anlayabileceği bir biçimde düzenleyerek yorumlamaktır” (Yıldırım ve Şimşek, 2016, s. 242). İçerik analizinde üç tür kodlama tekniğinden söz edilmektedir (Strauss ve Corbin, 1990’dan akt. Yıldırım ve Şimşek, 2016). Bunlar;

- Daha önceden belirlenmiş kavramlara göre yapılan kodlama,
- Verilerden çıkarılan kavramlara göre yapılan kodlama,
- Genel çerçeve içinde yapılan kodlamadır.

Bu araştırmada genel çerçeve içinde yapılan kodlama kullanılmıştır. Bu kodlama türünde önceden belirlenen bir kod listesi içerik analizini yönlendirirken, verilerin incelenmesi sonucu ortaya çıkan veriler ise daha önceden oluşturulan kod listesine eklenir ya da yeni kodlamalar yapılır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Kısacası genel kategoriler veya temalar önceden belirlenir ve bu temaların altında yer alabilecek kodlar verilerin incelenmesi sonucu oluşturulur. Araştırma verilerinin analizinde analiz çerçevesi olarak Geçici ve Tüknüklü’nün (2021) önerdiği kavramsal çerçeve kullanılmıştır.

Araştırmada kullanılan analiz çerçevesi Bölüm II’de detaylı bir şekilde anlatılmıştır. Genel hatlarıyla bakacak olursak çerçeve, görsel temsil kullanma, görselleştirme ve matematiksel düşünmeye geçiş olarak 3 farklı bileşenden oluşmaktadır. Görsel temsil kullanma bileşeni resim, çizim, model, tablo gibi göstergelere sahiptir. Görselleştirme bileşeninde dönüştürme ve zihinde canlandırma göstergeleri bulunmaktadır. Matematiksel düşünmeye geçiş bileşeninin ise özelleştirme, genelleme, varsayımında bulunma, doğrulama ve ikna etme gibi göstergelere sahip olduğu görülmektedir.

Araştırma verileri yukarıda bahsedildiği gibi tablolar halinde düzenlendikten sonra analiz çerçevesi doğrultusunda kodlamalara başlanmıştır. Kodlamalar yapılırken araştırma soruları da göz önünde bulundurulmuştur. Kodlamalar tamamlandıktan sonra her probleme yönelik katılımcıların durumlarını açıklayıcı tablolar oluşturulmuş ve bu tablolar bulgularda sunulmuştur. Tabloların devamında öncelikle görsel temsil bileşenine yönelik kanıtlar verilmiştir. Bu görsel kanıtlar, bazen katılımcılara ait dokümanların doğrudan fotoğraflarının çekilmesi, bazen de video kayıtlarından ekran görüntüsü alınması ile hazırlanmıştır.

Görselleştirme ve matematiksel düşünmeye geçiş bileşenleri ise tablodan yorumlandıktan sonra genellikle katılımcıların doğrudan alıntıları ile desteklenmiştir.

İçerik analizi ile birbirinden bağımsız olarak incelenen veriler daha sonra çoklu durum çalışmalarında sıklıkla kullanılan analiz yöntemlerinden olan çapraz durum analizi (Stake, 2006; Yin, 2009) yöntemi ile incelenmiştir. Çapraz durum analizi, durum çalışmalarında analiz birimi olan olaylar, etkinlikler ve süreçlerdeki ortak noktaların ve farklılıkların karşılaştırılmasını kolaylaştıran bir yöntemdir (Khan ve VanWynsberghe, 2008). Yin (2009) çapraz durum analizi yoluyla elde edilen bulguların, tek bir vakadan elde edilen bulgulara göre daha sağlam olacağından bahsetmektedir. Bununla birlikte çapraz durum analizi, çoklu durumlardan ortaya çıkan bulguların daha kapsamlı bir sonuç örüntüsünün oluşup oluşmadığı konusunda fikir verir (Yin, 2017). Kısacası çapraz durum analizinin durumlar arasındaki benzerlikleri veya farklılıkları açığa çıkarmayı amaçladığı söylenebilir (Yin, 2009).

Bu araştırmada ele alınan her durum için, öncelikle kendi içinde, sonra diğer durumlar ile karşılaştırmasını yapmak amacıyla çapraz durum analizi seçilmiştir. Bu şekilde farklı durumlardan ortaya çıkan bulgular yoluyla genel bir değerlendirmeye varılacağı düşünülmüştür. Yani araştırmada her sınıf düzeyi farklı bir analiz birimi olarak ele alınmıştır. Her sınıfa ait alt birimler de bulunmaktadır. Sınıflara ait alt birimler önce kendi içinde birbiri ile karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma yapılırken her sınıf diğer sınıflardan bağımsız olarak incelenmiştir. Bu şekilde tüm durumların analizi tamamlandıktan sonra durumlar arasında ortaya çıkan benzer veya farklı yönler belirlenmeye çalışılmıştır. Bunun yanında çapraz durum analizi yoluyla durumlar arasında bir örüntü arama çabasına girilmiştir. Özetle her katılımcının verileri içerik analizi yöntemi ile sınıflandırılıp kendi analiz birimleri doğrultusunda kodlanmıştır. Daha sonra analiz birimleri onu oluşturan alt birimleriyle ve diğer analiz birimleriyle çapraz durum analizi yöntemi kullanılarak karşılaştırılmıştır.

3.6. Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

Bir araştırmanın kavramsal çerçevesinin oluşturulması, verilerinin toplanması, analiz edilmesi ve yorumlanması ile bulgularının sunulması aşamalarında geçerlik ve güvenirlğe yönelik önemli kaygılar olduğundan bahsedilmektedir (Merriam, 2009). Nitel araştırmalarda alınacak birtakım önlemler hem geçerlik hem de güvenirlık konusunda yaşanabilecek kaygıların önüne geçecektir (Merriam, 2009; Yıldırım ve Şimşek, 2016). Araştırmanın bu bölümünde Lincoln ve Guba'nın (1985'ten akt. Merriam, 2009) deyiimiyle inandırıcılık (iç geçerlik), aktarılabirlik (dış geçerlik), tutarlık (iç güvenirlık) ve teyit edilebilirlik (dış güvenirlık) kavramlarına yönelik alınan önlemlere değinilmiştir.

3.6.1. İnandırıcılık

“Araştırmacının elde ettiği bulguların gerçekliğine, benzer ortamlarda sonuçların geçerliğine, süreçlerin birbiri ile tutarlı olmasına ve verilerin nesnel bir yaklaşımla toplandığına ve yine nesnel bir yaklaşımla sonuçlar ortaya koyduğuna ilişkin kanıtlar sunması gereklidir” (Yıldırım ve Şimşek, 2016, s. 277). Bu bağlamda araştırmacının inandırıcılığını artırmak amacıyla uzun süreli etkileşim, çeşitleme, uzman incelemesi ve katılımcı teyidi stratejilerine başvurulmuştur. Araştırmanın katılımcıları belirlendikten sonra araştırma öncesinde katılımcılarla okul ortamında bireysel olarak tanışma toplantıları yapılmıştır. Daha sonra yapılan klinik mülakatlar ise katılımcıların kendilerini daha rahat hissedebileceği ortamlarda yapılmıştır. Yapılan görüşme süreleri çok kısa olmayacak şekilde ayarlanmış ve bu sayede uzun süreli etkileşim gerçekleşmiştir. Bununla birlikte araştırma verilerinin çeşitlendirilmesi yoluna gidilmiştir. Uzman görüşleri ve pilot çalışma doğrultusunda geliştirilen Geometri Problemi Çözme Testi ile gerçekleştirilen klinik mülakat kayıtları, görüşme sırasında ve sonrasında tutulan gözlem notları ve katılımcılara ait dokümanlar kullanılarak veri çeşitlemesi yapılmıştır. Ayrıca mülakatların sonunda katılımcılardan yapılan görüşme ve problemlerin çözümleri hakkında değerlendirmelerde bulunmaları istenmiştir. Bu sayede, toplanan verilerin doğrulaması yapılarak katılımcı teyidi de sağlanmıştır. Araştırmacının danışmanı ile veri toplama öncesinde, veri toplama sırasında ve veri toplama sonrasında sürekli olarak gerçekleştirdiği yüz yüze veya çevrim içi toplantılar uzman incelemesi olarak değerlendirilmiştir. Bu toplantılar sayesinde alınan geri bildirimler, araştırmanın başından sonuna kadar araştırma sürecinin gelişimine katkı sağlamıştır.

3.6.2. Aktarılabilirlik

Dış geçerlik, bir araştırmanın sonuçlarının farklı durumlara ne derece uygulanabileceği yani söz konusu araştırmanın sonuçlarının ne kadar genellenebilir olduğu ile ilgilidir (Merriam, 2009). Nitel araştırma sonuçları doğrudan benzer ortamlara genellenemeyeceği için genelleme yerine aktarılabilirlik kavramının ön plana çıktığı vurgulanmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Çalışmanın aktarılabilirliğini artırmak için ayrıntılı betimleme ve amaçlı örnekleme stratejileri dikkate alınmıştır. Araştırmada amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitlilik örnekleme kullanılarak toplanan verilerin çeşitliliği artırılmaya çalışılmıştır. Bunun yanında araştırma ortamının ve araştırma sürecinin özellikleri ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Araştırmaya katılan bütün öğrencilerden elde edilen veriler mümkün olduğunca raporlanmaya çalışılmıştır. Ayrıca veriler raporlanırken veri çeşitliliği açısından daha zengin olduğu düşünülen örnekler sunulmuştur. Bu örnekler doğrudan alıntılar ve katılımcı dokümanlarının resmedilmesi ile raporlanmıştır.

3.6.3. Tutarlık

Nitel araştırmalarda tutarlık elde edilen bulguların tekrar edilebilirliği ile ilgilidir (Merriam, 2009). Yani bu araştırma için tutarlık, araştırmanın benzer koşullar altında tekrar edildiğinde benzer bulgulara ulaşılmasını ifade etmektedir. Ancak yine de nitel araştırmaların doğası gereği tekrar edilen çalışmalarda aynı sonuçlara ulaşmak mümkün olmayabilir (Yıldırım ve şimşek, 2016). Araştırmada tutarlığı sağlamak için verilerin toplanması ve analizi sürecindeki tüm aşamalarda araştırmanın kavramsal çerçevesine bağlı kalınmaya çalışılmıştır. Tüm araştırma sürecinde literatürden faydalanılmış olup araştırmayla ilgili olan literatür araştırmada kaynak gösterilerek sunulmuştur. Bunun yanında araştırmada izlenen yöntem, veri toplama araçları, analizler ve benzeri kısımlar yöntem bölümünde ayrıntılı olarak açıklanmıştır. Tutarlığı artırmak için son olarak verilerin bir kısmı için kodlayıcılar arası uyum yüzdesi hesaplanmıştır (Miles ve Huberman, 1994). Her sınıf düzeyinden rastgele seçilen bir katılımcının transkripti biri araştırmacı diğeri matematik eğitiminde uzman olan bir kodlayıcı tarafından kodlanmıştır. Miles ve Huberman (1994) formülüne göre kodlayıcılar arası uyum yüzdesi % 77 çıkmıştır. İki kodlayıcı tarafından yapılan kodlamanın birbirine yakınlığı, yapılan kodlamanın tutarlı olduğuna işaret etmektedir. Daha sonra kodlamalar arasındaki farklılıklar tartışılmış ve nc bir uzman görüşü de alınarak son karara varılmıştır.

3.6.4. Teyit Edilebilirlik

Nitel araştırmalarda tam nesnellik sağlanamadığından dolayı teyit edilebilirlik kavramı ön plana çıkmaktadır. Bu kavram çerçevesinde “nitel araştırmacıdan beklenen ulaştığı sonuçları topladığı verilerle sürekli olarak teyit etmesi ve bu çerçevede okuyucuya mantıklı bir açıklama sunabilmesidir” (Yıldırım ve şimşek, 2016, s. 283). Teyit edilebilirlik bağlamında uygulanan stratejilerden biri araştırmada veri kaynağı olan bireylerin özelliklerinin ayrıntılı bir şekilde betimlenmesidir. Bundan dolayı araştırmanın katılımcıları etik kurallar çerçevesinde betimlenmeye çalışılmıştır. Çalışmanın teyit edilebilirliğini sağlamak amacıyla bir de teyit incelemesi stratejisi kullanılmıştır. Araştırmadan elde edilen sonuçlarla verilerden elde edilen bulguların tutarlı olup olmadığı kontrol edilmiştir. Bu bağlamda veri analizi kısmında uzman görüşü alınarak gerekli düzeltmeler yapılmıştır. Tekrar ihtiyaç olabileceği dşncesiyle ham veriler araştırmacı tarafından diğital bir ortamda saklanmaktadır. Son olarak bir sonraki blmde bahsedilen araştırmacının rolü de teyit edilebilirlik konusunda ne çıkan bir stratejidir. O kısımda yapılan açıklamalar aynı konuda araştırma yapacak araştırmacılara ne tür roller üstlenmeleri konusunda fikir verecektir.

3.7. Araştırmacının Rolü

Araştırmada veri toplama amacı olarak kullanılan “Geometri Problemi Çözme Testi”, uzman görüşleri de alınarak araştırmacı tarafından hazırlanmıştır. Araştırmacı, hazırlanan veri toplama aracı ile pilot çalışma yapmıştır. Araştırma öncesi yapılan pilot çalışma ile araştırmacı, hem deneyim kazanmış hem de veri toplama aracının olgunlaşmasını sağlamıştır. Bununla birlikte araştırma sürecinde veri toplama araçlarının uygulanması, katılımcılarla görüşmeler yapılması, gözlem notları tutulması ve verilerin analizi araştırmacının kendisi tarafından gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın tasarlanması, araştırma sürecinin planlanması, veri toplama araçlarının hazırlanması, verilerin analizi ve araştırmanın raporlaştırılması aşamalarında araştırmacının danışmanı rehberlik ederek aktif rol almıştır. Ayrıca tez izleme komitesi üyeleri de dönem toplantıları ve doğrudan iletişim aracılığıyla araştırma sürecine destek olmuşlardır.

BÖLÜM IV

BULGULAR

4.1. Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Geometri Problemlerinde Görsel Akıl Yürütme Becerilerinin Rolü Nedir ve Nasıldır?

4.1.1. Sözel özelleştirme problemine yönelik bulgular

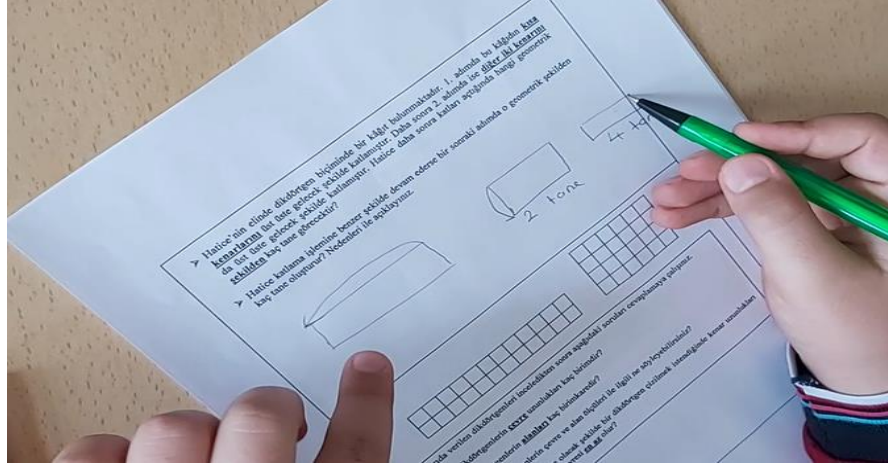
Beşinci sınıf öğrencileri için sözel özelleştirme problemine yönelik olarak diğer sınıf düzeylerinde olduğu gibi kâğıt katlama ile ilgili bir problem sorulmuştur. Bu problemde elde edilen bulgular Tablo 3'te sunulmaktadır:

Tablo 3

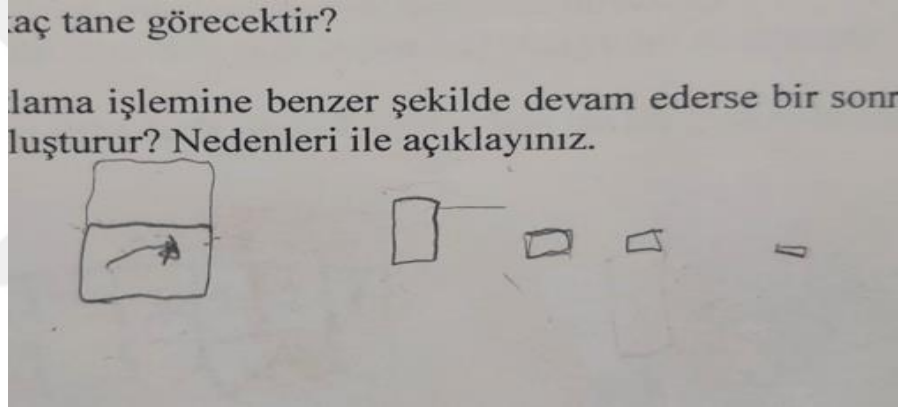
Beşinci sınıf öğrencilerinin sözel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	BÖ2, BÖ3, BÖ4, BÖ6, BÖ8
	Model	BÖ7, BÖ8
	Tablo	-
Görselleştirme	Dönüştürme	-
	Zihinde Canlandırma	BÖ2, BÖ4, BÖ5, BÖ7, BÖ8
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	BÖ2, BÖ4, BÖ5, BÖ7, BÖ8
	Genelleme	BÖ4, BÖ8
	Varsayımda Bulunma	BÖ2, BÖ4, BÖ5, BÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	BÖ4, BÖ8

Tablo 3 incelendiğinde sözel özelleştirme problemini çözmek için beşinci sınıf öğrencilerinin birtakım girişimlerde bulunduğu söylenebilir. Katılımcılardan BÖ1, problemin çözümü için görsel akıl yürütmenin herhangi bir bileşenini sergilememiştir. Bir başka katılımcı BÖ5 ise problemi görsel temsil kullanmadan çözmeye çalışmıştır. Diğer katılımcılardan BÖ2, BÖ3, BÖ4 ve BÖ6 çizim temsilini kullanırken, BÖ7 model temsilini kullanmıştır. BÖ8 ise önce model kullanarak problemi anlamlandırmış ardından ise çizim temsilini kullanarak problemin çözümünü gerçekleştirmiştir. Görsel temsil kullanan bu katılımcılardan BÖ3 ve BÖ6 problemin ilerleyen bölümlerinde görselleştirmeyi gerçekleştirememişlerdir. Bundan dolayı problemin çözümüne yönelik olarak bir matematiksel düşünme gerçekleştirdikleri söylenemez. Görsel temsil kullanan diğer katılımcıların ise zihinde canlandırma yaptıkları görülmüş ve çözümlerinde matematiksel düşünmeye yönelik birçok göstergenin olduğu bulunmuştur. Katılımcıların oluşturdukları bazı görsel temsil örnekleri aşağıdaki gibidir:



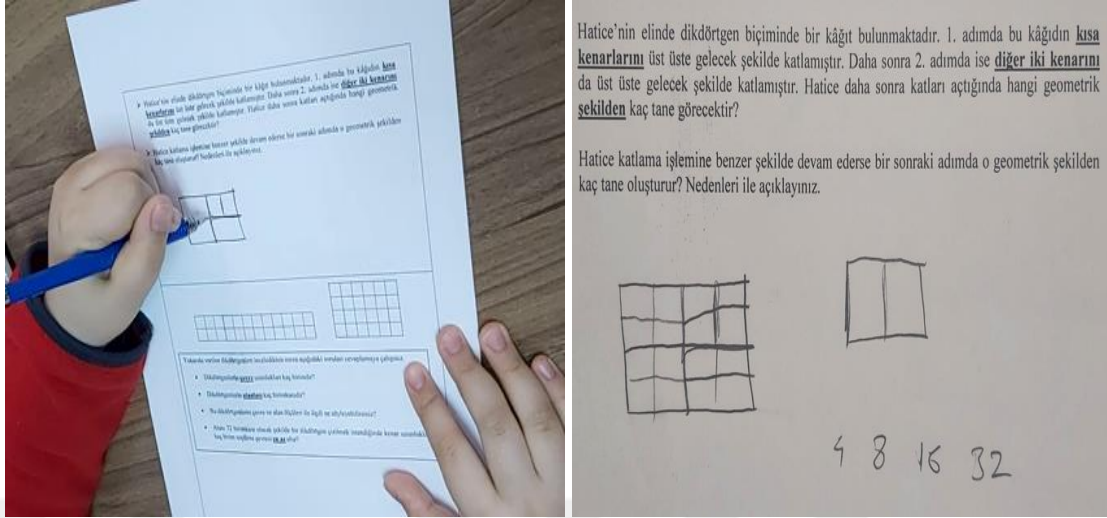
Şekil 31. BÖ2'nin sözel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsiller



Şekil 32. BÖ4'ün sözel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsiller



Şekil 33. BÖ7'nin sözel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil



Şekil 34. BÖ8'in sözel özelleştirme problemi için oluşturduğu görsel temsiller

Katılımcılardan BÖ2, BÖ4, BÖ5, BÖ7 ve BÖ8 görselleştirme bileşenine yönelik olarak zihinde canlandırma yapmışlardır. Bu katılımcılardan BÖ5 herhangi bir görsel temsil kullanmasa da ellerini bir katlama işlemi yapar gibi kullandığından zihinde canlandırma yaptığı kabul edilmiştir. BÖ5 ile gerçekleşen görüşmenin bir bölümü şu şekildedir:

A: Problemden ne anladın?

BÖ5: Şimdi bir dikdörtgenin kısa kenarlarını ikiye katlamış (Elleri ile katlama işlemi yapar). 2 tane dikdörtgen olacak o zaman. Sonra diğer kenarlarını da katlamış. Açtığında da kaç tane şekil göreceğini soruyor.

A: Nasıl çözebilirsin?

BÖ5: İlk katladığında 2 tane dikdörtgen çıkıyor. İkinci katlamada 2 tane daha dikdörtgen olur. Toplam 4 tane dikdörtgen olur. Sonra katlamaya devam ediyormuş. Açtığımızda 4 tane daha olur. (Biraz düşündükten sonra problemi baştan çözer ve tekrar elleri ile katlama yapar) Şimdi kısa kenarlarını üst üste getiriyor. 2 tane dikdörtgen olur. Sonra ikinci adımda diğer kenarlarını üst üste getiriyor. 2, 2 daha 4 yapar. 4 tane dikdörtgen olur. Tekrar katlayıp açınca kaç tane olur diye soruyor. 8 tane olabilir mi?

A: Nasıl buldun?

BÖ5: 4 ile 4'ü topladım.

A: Peki bir adım daha devam etseydik kaç olurdu?

BÖ5: 12. Çünkü her seferinde 4'er artacak.

BÖ5 zihinden bazı işlemler yaparak problemin görselleştirme ve özelleştirme adımlarını yapmıştır. Bu süreçlerde herhangi bir materyal veya temsil kullanmamıştır. Bu adımlardan sonra baştan itibaren yürüttüğü akıl yürütmesini devam ettirerek bir sonraki katlama için “8 tane olabilir mi?” şeklinde bir varsayımda bulunmuştur. Ancak varsayımını doğrulamaya yönelik çaba sarf etmemiştir. Dolayısıyla genelleme için de bir ilerleme yapamamıştır. Katılımcının buradaki en büyük eksikliği, probleme yönelik oluşturduğu içsel temsilleri dışsal temsiller olarak yansıtamamasıdır. Katılımcılardan BÖ7 ile gerçekleşen görüşmenin bir bölümü ise aşağıdaki gibidir:

A: *Nasıl bir çözüm yapabiliriz?*

BÖ7: *Ben bunu yaparken bir kâğıt kullansam olur mu?*

A: *Olur tabi ki.*

BÖ7: *Hatice kâğıdı önce bu şekilde katlamış. Bir kere katlandığında 2 tane dikdörtgen görürüz. İkinci adımda diğer kenarlarını katlıyoruz. Bu şekilde olacak ve yeniden açtığımızda 4 tane dikdörtgen görürüz (Katlama yapmadan önce cevap verdi).*

A: *Problemin ilk adımını yaptık. Devam edelim şimdi probleme.*

BÖ7: *(Problemin devamını okur).*

A: *Tahminin var mı?*

BÖ7: *Evet var 6 tane dikdörtgen olur. (Katlamayı yapar) 8 tane oldu.*

Diyalog da görüldüğü gibi BÖ7 öncelikle bir model kullanmıştır. Katılımcı, katlama işlemlerinden önce cevap verdiği için zihinde canlandırma yaptığı düşünülmüştür. Bununla birlikte bulduğu sonuçla da özelleştirmeyi tamamlamıştır. Ancak problemin devamında yaptığı tahminin bir dayanağı olmadığı için bu tahmin varsayım olarak değerlendirilmemiştir. Buradan sonra da matematiksel düşünme bileşenlerine yönelik göstergeler gözlenmemiştir.

Katılımcılardan BÖ4 ve BÖ8’in matematiksel düşünme açısından tüm göstergelere sahip oldukları bulunmuştur. BÖ4 ile yapılan görüşmede çizerek yapmak istediğini belirtmiş ve bütün adımları çizerek anlatmıştır (bkz. Şekil 32). Çizimleri üzerinde katlama işlemlerini aktarması zihinde canlandırma yaptığını göstermektedir. Bu sayede özelleştirme yapmış ve sonraki adımlara yönelik varsayımlar üretmiştir. Katılımcının yaptığı çizimler ve “Çünkü bir önceki bunun 2 katı. Ondan önceki de bunun 2 katı.” şeklindeki ifadeleri doğrulama ve ikna etme olarak değerlendirilmiştir. Görüşmenin sonunda ise “Buradaki kural her seferinde 2 ile

çarpmak.” ifadesi ise bir genelleme göstergesidir. Tüm matematiksel düşünme göstergelerini ortaya koyan bir diğer katılımcı BÖ8 ile yapılan görüşme ise şu şekildedir:

A: Problemden ne anladın?

BÖ8: Kâğıdı önce böyle katlıyor (Problemin yer aldığı kâğıdı katlamaya başlar). Ondan sonra diğer kenarlarını katlıyormuş. Hangi şekilden kaç tane çıktığını soruyor.

A: Tamam nasıl bir çözüm yapabilirsin?

BÖ8: Ben yazarak yapıyorum genellikle. İlk önce bir tane dikdörtgen çiziyorum. Sonra kâğıdı katladığımızda bu şekilde olacak. Böylece 2 tane dikdörtgen oluyor. Ondan sonra tekrar yaptığımız zaman bir tane daha kat çizgisi oluyor ve 4 tane dikdörtgen çıkmış oluyor.

A: Anladım, problemin devamını oku bakalım.

BÖ8: Oluşturduğumuz kâğıt en son bu şekilde oluyor. Sonra bunu tekrar katlamamızı istiyor. Böylece bir dikdörtgenin içinde 2 tane daha dikdörtgen oluyor (Çizdiği dikdörtgenin sekizde birini bulur). Kâğıdın tamamını açtığımızda 8 tane dikdörtgen oluyor.

A: Peki burada bir kural var mı sence?

BÖ8: Evet var. Yaptığımız işlemi tekrar yapmamızı istiyor. Zaten bu dikdörtgende uygulasak mesela burası 4'e bölünüyor. Diğerleri de 4'e bölünüyor. Her seferinde 2 ile çarpmış oluyoruz.

A: Mesela dördüncü adımı sorsaydım ne derdin?

BÖ8: 2, 4, 8, 16, 32 diye gidecek.

BÖ8 probleminden ne anladığını anlatırken problemin yazılı olduğu kâğıdı bir model olarak kullanmış ve problemi anladığını göstermiştir. Daha sonra ise BÖ4 gibi problemi çizerek yapmak istediğini belirtmiş ve bütün adımları çizerek anlatmıştır (bkz. Şekil 34). Sonraki süreçlerde de BÖ4 ile aynı göstergeleri ortaya koymuştur. Katılımcı bir sonraki adımın görsel temsilini göstererek zihinde canlandırma yapmıştır. 4 tane dikdörtgen oluşacağını bularak da özelleştirmeyi gerçekleştirmiştir. Sonrasında ise her katlamada oluşacak dikdörtgen sayısına yönelik “Böylece bir dikdörtgenin içinde 2 tane daha dikdörtgen oluyor.” şeklinde bir varsayım üretmiştir. Bunun devamında da çizimi üzerinden doğrulamayı gerçekleştirmiştir. Son olarak ise diğer adımlardaki dikdörtgen sayılarını da ifade ederek bir genellemede bulunmuştur. Bu probleme yönelik katılımcıların görsel akıl yürütmeleri başarı

düzeylerine göre belirgin bir fark göstermemiştir. Ancak farklı matematiksel düşünme göstergelerini sergileyen katılımcılar sosyoekonomik açıdan yüksek profildeki okulda öğrenim görmektedirler.

4.1.2. Görsel özelleştirme problemine yönelik bulgular

Dikdörtgende çevre ve alan ilişkisi ile ilgili olan görsel özelleştirme problemi sekizinci sınıf dışındaki bütün katılımcılara yöneltilmiştir. Problemde katılımcıların verilen görsellerden yararlanarak çıkarımlar yapmaları ve bu çıkarımları farklı durumlara uyarlamaları beklenmiştir. Bu probleme yönelik beşinci sınıf öğrencilerinden elde edilen bulgular Tablo 4'te gösterilmektedir:

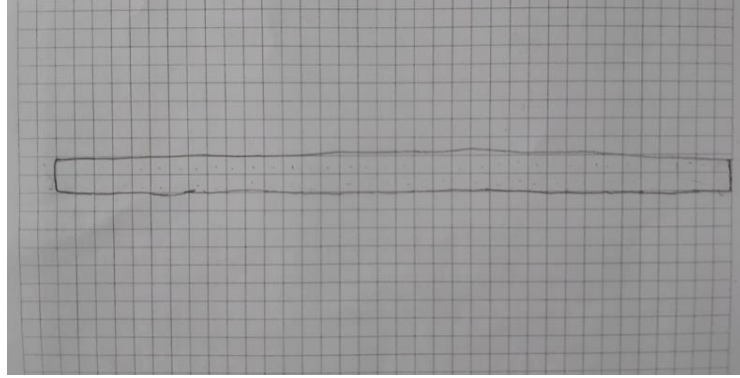
Tablo 4

Beşinci sınıf öğrencilerinin görsel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

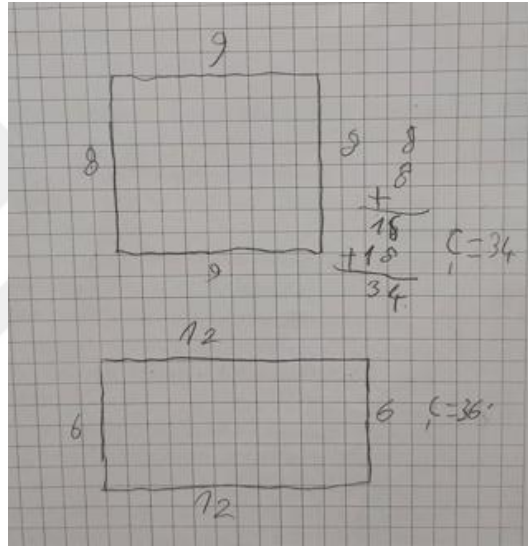
Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	BÖ1, BÖ2, BÖ4, BÖ5, BÖ6, BÖ7
	Model	-
	Tablo	BÖ8
Görselleştirme	Dönüştürme	BÖ1, BÖ2, BÖ3, BÖ4, BÖ5, BÖ6, BÖ7, BÖ8
	Zihinde Canlandırma	BÖ7
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	BÖ1, BÖ4, BÖ5, BÖ7, BÖ8
	Genelleme	BÖ4, BÖ7, BÖ8
	Varsayımda Bulunma	BÖ4, BÖ7, BÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	-

Beşinci sınıf öğrencilerinin görsel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri incelendiğinde katılımcıların verilen görsel temsillere ek olarak kendi görsel temsillerini oluşturdukları görülmektedir. Katılımcıların büyük çoğunluğu çizim görsel temsili oluşturmuşlardır. Katılımcılar görsel temsil oluşturmadan önce problemin ilk üç adımında soruları cevaplayarak dönüştürme gerçekleştirmişlerdir. Problemin son adımını cevaplarken ise verilen sözel ifadeden görsel temsil oluşturmuşlardır.

Katılımcılardan BÖ2, BÖ3 ve BÖ6 verilen temsiller üzerinde dönüştürme yaparak dikdörtgenlerin çevrelerini ve alanlarını bulmuşlardır. Ancak BÖ3 problemin diğer adımlarında ilerleme kaydedememiştir. BÖ2 ise görsel temsil kullanmış ama doğru bir temsil oluşturamamıştır. Yani problemde istenen kenar uzunluklarına sahip bir dikdörtgen oluşturamamıştır. BÖ6, problem için uygun olabilecek şekilde bir kenarı 6 birim diğer kenar 12 birim olan bir dikdörtgen çizmiştir. Ama başka dikdörtgenler oluşturamamıştır. Bulduğu dikdörtgen üzerinden de bir matematiksel düşünme göstergesi sergileyememiştir. Diğer katılımcıların oluşturdukları görsel temsiller ise şu şekildedir:



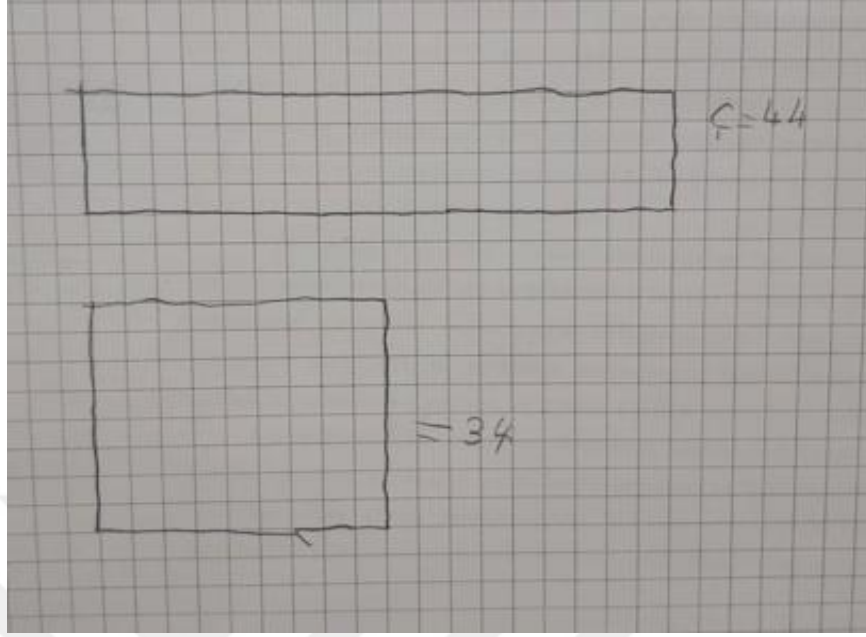
Şekil 35. BÖ1'in görsel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil



Şekil 36. BÖ4'ün görsel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsiller



Şekil 37. BÖ5'in görsel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil



Şekil 38. BÖ7'nin görsel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsiller

Problem çözme sürecinde tablo temsilini oluşturduğu düşünülen BÖ8'in görsel özelleştirme problemini çözme sürecine ait görsel Şekil 39'daki gibidir:

12
2
29

12

2

6

Yukarıda verilen dikdörtgenleri inceledikten sonra aşağıdaki soruları cevaplamaya çalışınız.

- Dikdörtgenlerin çevre uzunlukları kaç birimdir? 1. = 28 2. = 20
- Dikdörtgenlerin alanları kaç birimkaredir? 1. = 29 2. = 29
- Bu dikdörtgenlerin çevre ve alan ölçüleri ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?
- Alanı 72 birimkare olacak şekilde bir dikdörtgen çizilmek istendiğinde kenar uzunlukları kaç birim seçilirse çevresi en az olur?

72 | 12
6 | 36
12

12 x 6
9 x 8
2 x 36

18

Şekil 39. BÖ8'in görsel özelleştirme problemini çözme süreci

BÖ8'in Şekil 39'daki gibi sistematik olarak bir çözüm yapması (12x6, 9x8, 2x36) tablo temsili olarak değerlendirilmiştir. Esasında öğrencinin bu çözümü, problem çözme

stratejilerinden sistematik liste yapmayı çağrıştırmaktadır. Ancak öğrencinin sayıları bir düzen içinde vermesinden dolayı bu kodlama yapılmıştır. BÖ1, BÖ4, BÖ5, BÖ7 ve BÖ8 problem çözme sürecinde kullandıkları yukarıdaki görsel temsiller üzerinden matematiksel düşünme göstergelerini ortaya koymuşlardır. BÖ1 ve BÖ5 sadece özelleştirme yapabilirken, BÖ4, BÖ7 ve BÖ8 varsayımda bulunma ve genelleme göstergelerine de ulaşmışlardır. Katılımcılardan BÖ4 ile yapılan görüşmenin bir kısmı aşağıda sunulmaktadır:

BÖ4: Çevresinin az olması için ilk önce şekli kareye yakın yapmamız gerekiyor.

A: Tamam çok güzel. Bu dikdörtgeni nasıl oluşturabilirsin?

BÖ4: (Bir süre düşünür) 7 kere 6, 42 o olmadı. 8 kere 6'da olmuyor. Ama 8 kere 9 oluyor. O zaman çevresi en az oluyor.

A: Alanı 72 birimkare olan başka dikdörtgen olabilir mi peki?

BÖ4: Başka olabilir ama çevresi en az olmaz o zaman. (Çizim yapmaya başlar) Kısa kenarı 6, uzun kenarı 12 birim olabilir mesela. Çevresini hesaplayalım 36 olur.

A: İlk söylediğin dikdörtgenin çevresi kaç yapıyordun?

BÖ4: Onu da çizeyim. Çizince daha kolay oluyor. (Kenar uzunlukları 8 birim ve 9 birim olan bir dikdörtgen çizer) Bunun çevresi de 34 yapıyor. İlk söylediğim doğruymuş.

A: Evet dediğin doğruymuş. Peki, burada kural olarak ne söyleyebilirsin?

BÖ4: Kenar uzunlukları yakın olunca daha az oluyor çevresi. Kenar uzunlukları uzak olunca daha fazla oluyor.

BÖ4 problemin son adımına geçtiğinde öncelikle bir varsayımda bulunmuştur. Daha sonra Şekil 36'da görülen çizimlerle özelleştirme yapmıştır. Bulduğu sonuçlarla da genellemeye varmıştır. BÖ7'de BÖ4 ile benzer süreçten geçmiştir. BÖ4'ten farklı olarak problemin son adımına geçmeden önce zihinde canlandırma yapmıştır. Katılımcı verilen görsel temsildeki birimkareleri farklı pozisyonlara getirerek açıklamalarda bulunmuştur. Bu açıklamaları da zihinde canlandırma olarak değerlendirilmiştir. Problemin son adımında ise Şekil 38'deki çizimler yoluyla problemi çözmüştür. Sunulan görsel özelleştirme probleminde birçok beşinci sınıf öğrencisi farklı matematiksel düşünme bileşenlerini sergilemiştir. Ancak sadece 3 katılımcı varsayımda bulunmuş ve genellemeye ulaşmıştır. Bu katılımcıların da aynı okulda öğrenim görmeleri dikkat çekicidir.

4.1.3. Sözel genelleme problemine yönelik bulgular

Beşinci ve altıncı sınıf öğrencileri için hazırlanan sözel genelleme probleminde, katılımcılardan yan yana dizilen küplerin boyandıktan sonraki durumlarını düşünmeleri istenmiştir. Problemde aynı zamanda katılımcıların uzamsal düşünme becerilerini de kullanmaları beklenmektedir. Bu problemin sonucunda beşinci sınıf öğrencilerinden elde edilen bulgular Tablo 5’te gösterilmektedir:

Tablo 5

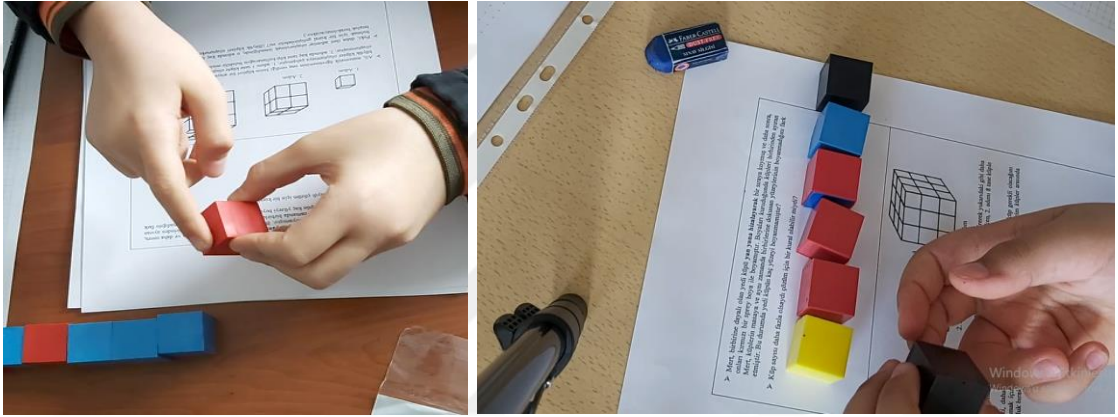
Beşinci sınıf öğrencilerinin sözel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	BÖ2, BÖ3, BÖ4, BÖ8
	Çizim	-
	Model	BÖ1, BÖ2, BÖ5
	Tablo	-
Görselleştirme	Dönüştürme	-
	Zihinde Canlandırma	BÖ2, BÖ4, BÖ5, BÖ7, BÖ8
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	BÖ2, BÖ4, BÖ5, BÖ7, BÖ8
	Genelleme	BÖ4, BÖ7, BÖ8
	Varsayımda Bulunma	BÖ4, BÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	-

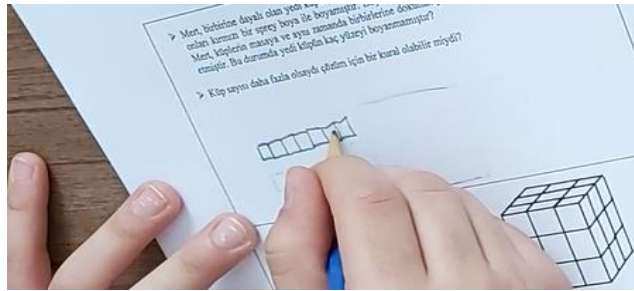
Tablo 5’e bakıldığında katılımcıların çoğunlukla resim ve model görsel temsillerini kullanarak sözel genelleme problemini çözmeye çalıştıkları anlaşılmaktadır. Katılımcılardan BÖ6 problemi çözmek için herhangi bir girişimde bulunmamıştır. Diğer katılımcılardan BÖ3, BÖ4 ve BÖ8 resim temsili oluştururken, BÖ1 ve BÖ5 ortamda bulunan birimküpleri kullanmışlardır. BÖ2, hem resim hem de model görsel temsillerini kullanmıştır. BÖ7 ise herhangi bir görsel temsil kullanmadan problemi çözmüştür. Katılımcı problemi okuduktan sonra öncelikle problemde ne istendiğini açıklamıştır. Bu süreçte küplerin hangi yüzeylerinin boyanmayacağını rahatlıkla ifade etmiştir. Dolayısıyla katılımcının içsel temsiller yoluyla problemi anlamlandırıdığı düşünülmüştür. Bu şekilde zihinde canlandırma yaptığı kabul edilmiştir. Devamında ise problemin ilk adımını yanıtlayarak özelleştirmeyi gerçekleştirmiş sonrasında da genellemeye varmıştır.

BÖ3 problemde verilenleri Şekil 41’de sunulan görseldeki gibi resmetmiş fakat yaptığı temsil üzerinde görselleştirme yapamamıştır. Çünkü yaptığı temsil 2 boyutludur ancak problemde 3 boyutlu bir cisimden bahsedilmektedir. Dolayısıyla katılımcı boyutlar arası geçişi fark edememiştir. Küplerin taban yüzeylerinin boyanmayacağını ifade etse de yan yüzleri karıştırmıştır. Katılımcının zihinde canlandırma yapamaması bu durumun başlıca sebebi olarak görülmektedir. Katılımcılardan BÖ1 ise her ne kadar problemdeki ifadeyi model

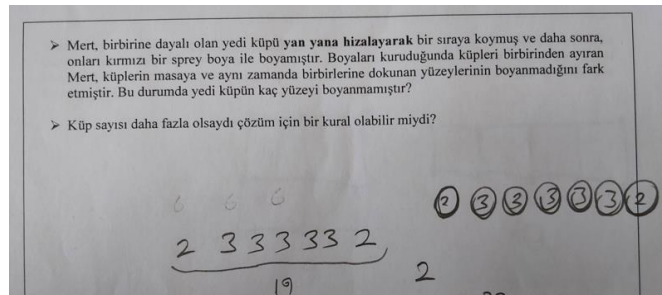
kullanarak gösterse de görselleştirme yapmakta başarılı olamamıştır. Katılımcı, “(Birimküpleri Şekil 40’taki gibi yan yana dizer) Hepsinin altı yüzü boyanmamış bir de şuraları olabilir (Birbirine değen yan yüzleri gösteriyor). Toplam 14 yüzeyi boyanmamıştır. Çünkü hem altlarını hem de burasını sayarsak 14 yapıyor. 7 tane yan yüzeyleri, 7 tane de alt yüzeyleri.” şeklinde bir cevap vererek küplerin boyanmayan yüzlerini sadece 1 kere saymaktadır ve 6 tane kesişme olmasına rağmen küp sayısına göre hareket etmektedir. Bu da katılımcının zihinde canlandırma yapamadığı anlamına gelmektedir. Katılımcıların problem çözümlerinde kullandıkları görsel temsiller ve problemi çözme süreçleri şu şekildedir:



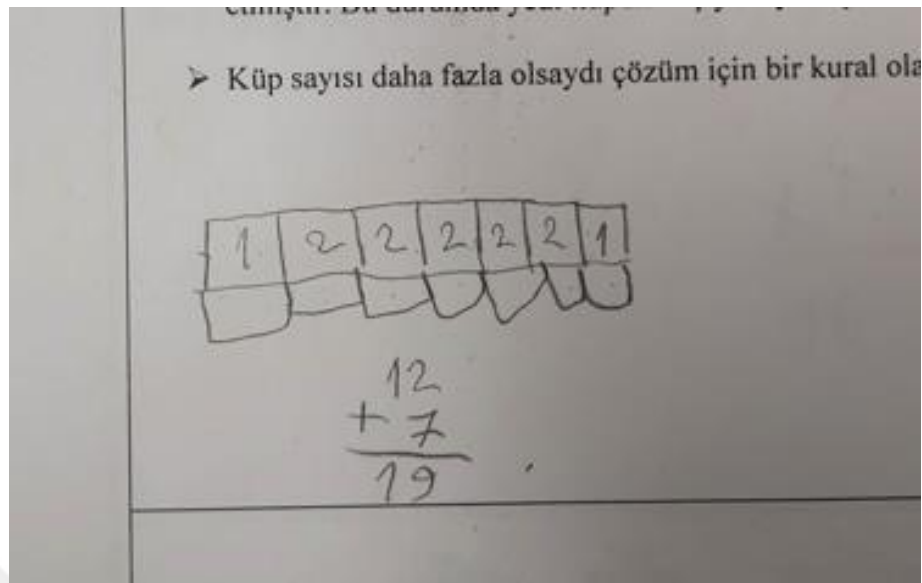
Şekil 40. BÖ1 ve BÖ2'nin sözel genelleme problemini çözme süreçlerinden kesitler



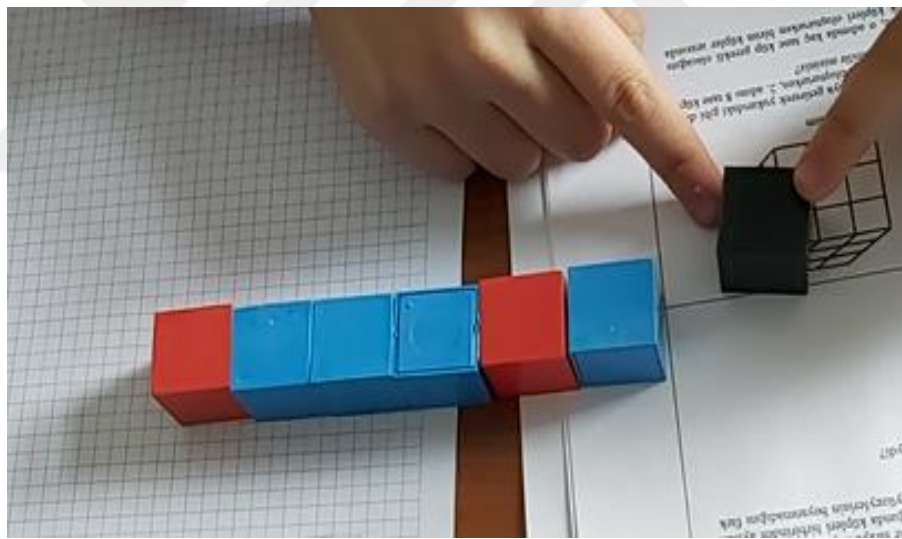
Şekil 41. BÖ3'ün sözel genelleme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil



Şekil 42. BÖ8'in sözel genelleme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil



Şekil 43. BÖ4'ün sözel genelleme problemini çözme süreci



Şekil 44. BÖ5'in sözel genelleme problemini çözme sürecinden bir kesit

BÖ2, BÖ4 ve BÖ5 yukarıdaki şekillerde görüldüğü gibi görsel temsil oluşturduktan sonra zihinde canlandırma yaparak görselleştirme yapmışlardır. Bu katılımcılardan model temsilini kullanan BÖ2 ve BÖ5, özelleştirme yapabilmelerine rağmen genellemeye yönelik göstergeler sergileyememişlerdir. Şekil 43'teki gibi resim temsili yapan BÖ4 ise varsayımda bulunma ve genelleme bileşenlerine yönelik ifadelerde bulunmuştur. BÖ4 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda sunulmaktadır:

BÖ4: (Yaptığı görsel temsil üzerinden problemi çözmeye çalışıyor) Bu küpün 1 yüzeyi boyanmıyor (En sondaki küpten bahsediyor). Bu küpün ise 2 yüzeyi boyanmıyor (Onun yanındaki küpü kast ediyor). O zaman bunun 1, bunun 2, bunun 2, ..., bunun 1. Yani toplamda 12 oldu.

A: Güzel problemde atladığımız bir şey var mı sence?

BÖ4: (Problemi tekrar okur). Aaa altları da boyanmıyor. (Görsel temsile ek çizim yapar). Ama altlarında sadece 1 yüzeyi boyanmıyor. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Toplam 19 yüzey boyanmıyor.

A: Harikasin problemin devamına bakalım.

BÖ4: (Problemin devamını okur ve bir süre düşünür). O zaman kenarlarda 2 tane boyanmayan yer olurdu yine. Öbürlerinde de 3. Örneğin 100 olursa 98 tane kalır. 98'i 3 ile çarparız. Sonra ona 2'leri ekleyerek buluruz.

Katılımcı Şekil 43'te ve yukarıdaki diyalogda da görüldüğü gibi resim temsilini kullanarak zihinde canlandırma yapmıştır. Bu sayede özelleştirmeye gerçekleştiren katılımcı, problemin devamında çok sayıda küp olması durumu için “Örneğin 100 olursa” şeklinde bir varsayımda bulunmuştur. Bu varsayımı üzerinden bulduğu sonuçta bir genelleme göstergesi kabul edilmiştir. Bir diğer katılımcı BÖ8, ise önce zihinde canlandırma gerçekleştirmiştir. BÖ8 ise problemi okuduktan bir süre sonra “Şimdi anladım. Açıkta olan bütün yüzeylerini boyadığı için açıkta olmayan yüzeyleri bulmamız gerekiyor. Baştaki küpte, 1 alt 1 de yan tarafı oluyor. Yani 2 yüzeyi boyanmıyor. Diğer küpte bir sonrakiyle bitişik oluyor. 2 yüzey bu şekilde boyanmıyor. Bir de alt kısım boyanmıyor. Yani 3 kısmı boyanmıyor....” şeklinde bir söylemde bulunarak ilk önce zihinde canlandırma yaptığını göstermiştir. Katılımcı daha sonra Şekil 42'deki resim temsilini yaparak problemin ilk adımını yanıtlamıştır. Bu sayede katılımcı özelleştirmeyi tamamlamıştır. Katılımcının problemin devamını okuduktan sonra “Mesela 100 küp var. Bizim onu çizmeme gerek yok. Bütün küpler için bu şekilde yapılabilir.” ifadesi ile bir varsayımda bulunduğu kabul edilmiştir. Bu varsayımına göre 100 küp için de doğru sonuç bulmuş ve en son “Yan yana diziliyorsa her zaman bu kural geçerli olur.” şeklinde bir genellemeye varmıştır.

4.1.4. Görsel genelleme problemine yönelik bulgular

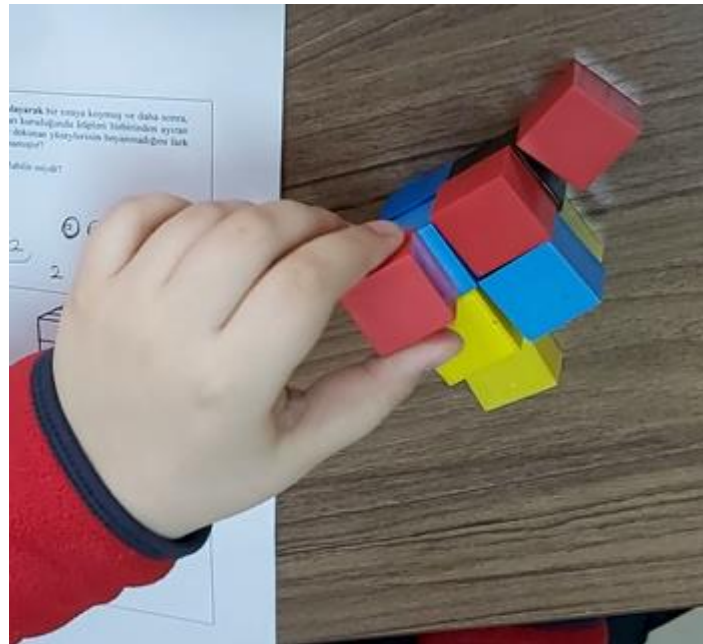
Beşinci ve altıncı sınıf öğrencileri için hazırlanan görsel genelleme probleminde, katılımcıların uzamsal düşünme becerilerini de kullanmaları beklenmiştir. Bu probleme yönelik beşinci sınıf öğrencilerinden elde edilen bulgular Tablo 6'da sunulmaktadır:

Tablo 6

Beşinci sınıf öğrencilerinin görsel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	BÖ4
	Çizim	-
	Model	BÖ1, BÖ2, BÖ3, BÖ4, BÖ8
	Tablo	-
Görselleştirme	Dönüştürme	BÖ1, BÖ3, BÖ4
	Zihinde Canlandırma	BÖ2, BÖ4, BÖ5, BÖ7, BÖ8
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	BÖ2, BÖ3, BÖ4, BÖ5, BÖ7, BÖ8
	Genelleme	BÖ4, BÖ8
	Varsayımda Bulunma	BÖ4, BÖ5, BÖ7, BÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	-

Tablo 6 incelendiğinde beşinci sınıf öğrencilerinin problemin çözümü için çoğunlukla model temsili kullandıkları anlaşılmaktadır. Buna ek olarak BÖ4'ün model temsili yanı sıra resim temsili kullandığı da görülmüştür. Katılımcılar genel olarak ortamda bulunan birimküplerden faydalanarak problemdeki şekilleri oluşturmuşlardır. Katılımcılar böylelikle matematiksel düşünme göstergelerini sergilemeye çalışmışlardır. Katılımcılardan BÖ6 bu problemi çözme konusunda istekli olmamıştır. Diğer katılımcılardan BÖ5 ve BÖ7 ise problemin çözümü sırasında herhangi bir görsel temsil kullanmamışlardır. BÖ8 dışında görsel temsil kullanan diğer bütün katılımcılar problemin başında model kullanmışlardır. BÖ8 ise özelleştirmeyi yaptıktan sonra problemin ikinci kısmı için model kullanmak istemiştir. Bazı katılımcıların problem çözme sürecine ait görselleri aşağıda sunulmaktadır:



Şekil 45. BÖ8'in görsel genelleme problemini çözme sürecinden bir kesit

A: Mesela sekizinci adımda kaç tane birimküp vardır?

BÖ4: Yapacağımız işlem şöyle olurdu. Oluşan küpün bir yüzünün içindeki küçük küpleri buluruz. Altındaki 8 kadar da çarparak yaparız.

BÖ4 problemin çözümüne model kullanarak başlamıştır. Şekil 47'deki gibi birimküpleri kullanarak üçüncü adımda kaç tane birimküp olacağını hesaplamıştır. Bu sayede katılımcı, modeller üzerinde dönüştürme yapmış ve özelleştirmeyi tamamlamıştır. Katılımcıya bulduğu sonuçla ilgili ilave sorular sorulduğunda ise Şekil 48'de görüldüğü gibi verilen görseller üzerinde hayali çizgiler oluşturmuştur. 3 boyutlu bir şekil üzerinde bu şekilde yaptığı çizgiler resim temsili olarak değerlendirilmiş olup katılımcı aynı zamanda zihinde canlandırma yaptığını göstermiştir. Örüntünün dördüncü ve beşinci adımları sorulduğunda ise öncelikle tahminlerde bulunmuştur. Devamında işlem yaparak sonucu bulan katılımcının sekizinci adım örneğini de açıklaması genelleme göstergesi sayılmıştır. Bir diğer katılımcı BÖ8'in "*Şimdi anladım. Sonraki adımda 4 olacak. 4 kere 4, 16. 16 ile de 4'ü çarparsak 64. Beşinci adımda 5 kere 5, 25. 25 kere 5 de 125. Bir sonrakinde de 6 ile 6'yı çarpalım. Sonra da 36 ile 6'yı çarpalım.*" şeklindeki ifadesi genelleme göstergesi olarak düşünülmüştür.

4.1.5. Sözel varsayımda bulunma problemine yönelik bulgular

Beşinci sınıf öğrencilerine yöneltilen sözel varsayımda bulunma probleminin çözümünden elde edilen bulgular Tablo 7'de gösterilmektedir:

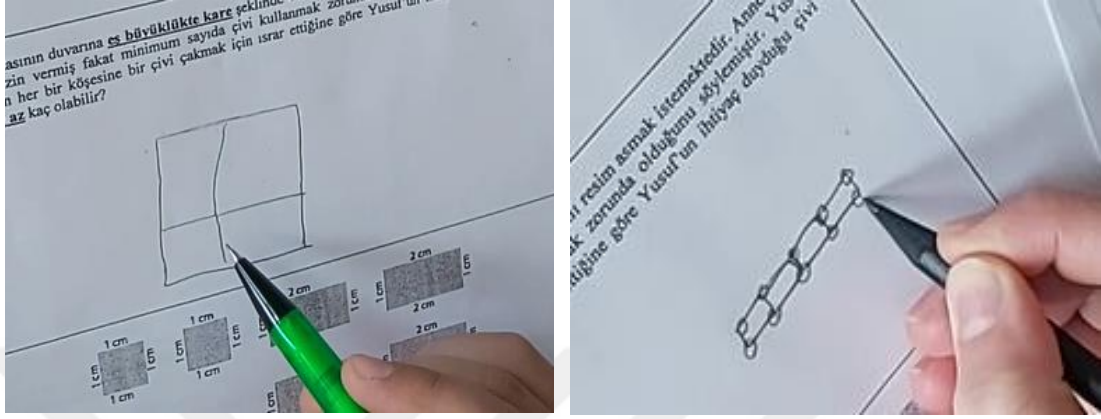
Tablo 7

Beşinci sınıf öğrencilerinin sözel varsayımda bulunma problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

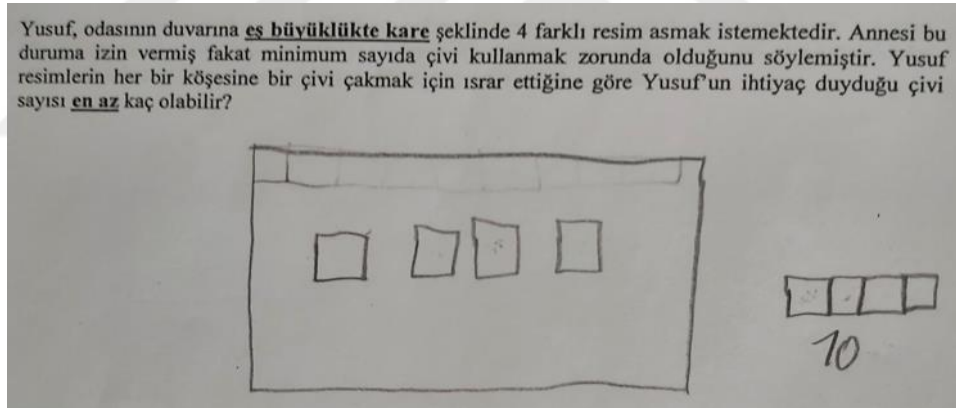
Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	BÖ1, BÖ2, BÖ3, BÖ4, BÖ5, BÖ6, BÖ7, BÖ8
	Model	BÖ7
	Tablo	-
Görselleştirme	Dönüştürme	-
	Zihinde Canlandırma	BÖ3, BÖ4, BÖ6, BÖ7, BÖ8
	Özelleştirme	BÖ4, BÖ8
Matematiksel Düşünme	Genelleme	-
	Varsayımda Bulunma	BÖ3, BÖ4, BÖ6, BÖ7, BÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	-

Tablo 7'ye bakıldığında katılımcıların tamamının sözel varsayımda bulunma probleminin çözümü için çizim yaptığı anlaşılmaktadır. Bunun yanı sıra katılımcılardan BÖ7

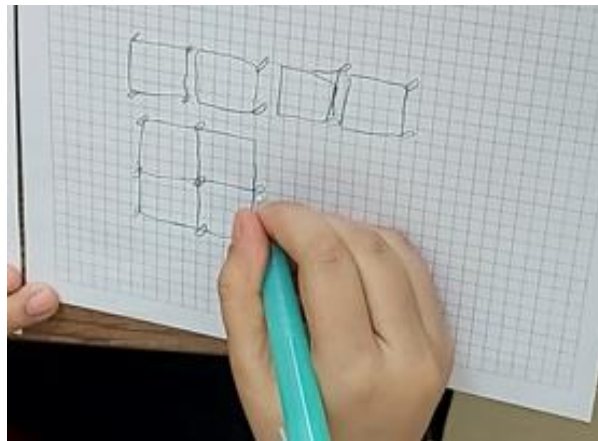
çizim temsilinin yanı sıra model temsilini de oluşturmuştur. Katılımcıların oluşturdukları bazı görsel temsiller aşağıdaki gibidir:



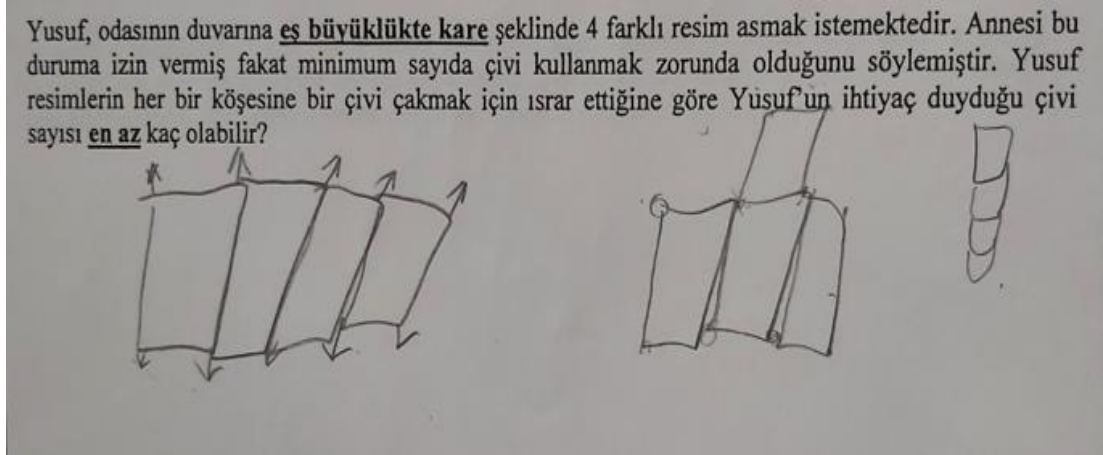
Şekil 49. BÖ2 ve BÖ6'nın sözel varsayımda bulunma problemi için oluşturdukları görsel temsiller



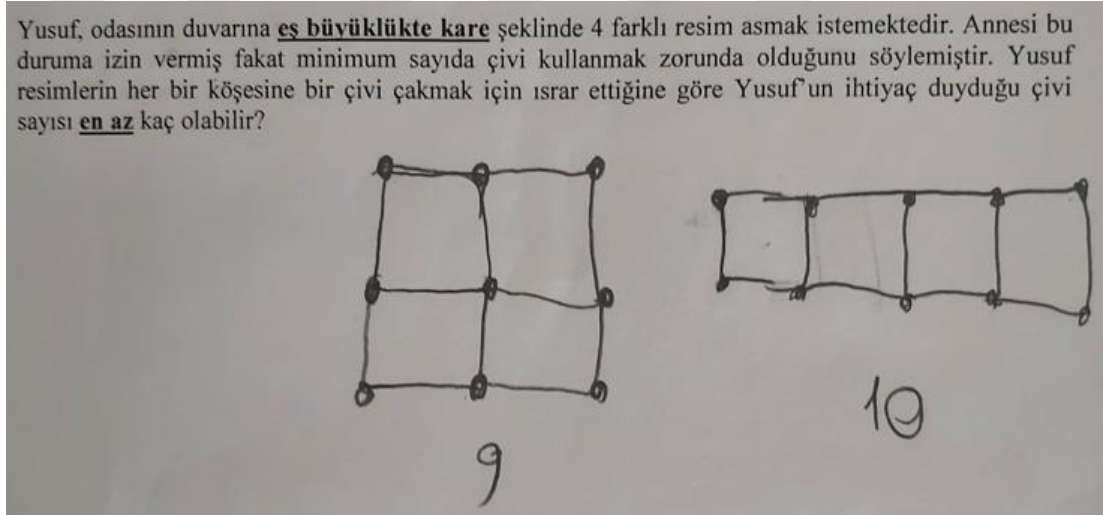
Şekil 50. BÖ3'ün sözel varsayımda bulunma problemi için oluşturduğu görsel temsiller



Şekil 51. BÖ4'ün sözel varsayımda bulunma problemi için oluşturduğu görsel temsiller



Şekil 52. BÖ7'nin sözel varsayımda bulunma problemi için oluşturduğu görsel temsiller



Şekil 53. BÖ8'in sözel varsayımda bulunma problemi için oluşturduğu görsel temsiller

Katılımcılardan BÖ1, BÖ2 ve BÖ5 yaptıkları görsel temsillerde problemde bahsedilen resimleri gösterecekler de en az sayıda istenen çivi sayısına yönelik bir yorumda bulunamamışlardır. Dolayısıyla bu katılımcılar çizim aşamasından öteye gidememişlerdir. Bununla birlikte bu katılımcılar 4 tane kare şeklinde resim olduğu için toplam 16 çivi kullanılabileceğini düşünmektedirler.

Problemde farklı çözümler üretmek için akıl yürütebilen katılımcıların ise görselleştirmeyi tamamladıkları kabul edilmiştir. Örneğin; BÖ3, BÖ4 ve BÖ6 da ilk önce çizdikleri şekiller üzerinden 16 cevabını vermişlerdir. Katılımcılara ek sorular sorulduğunda ise farklı çözümlerin olabileceğini göstermişlerdir. Beşinci sınıf öğrencilerinin sözel varsayımda bulunma problemine yönelik görsel akıl yürütmelerine matematiksel düşünme

açısından bakıldığında katılımcıların yarısından çoğunun varsayımda bulunduğu görülmüştür. Katılımcıların varsayımda bulunduklarını gösteren bazı örnek ifadeler şunlardır:

“Boş yere çivi harcamasın bir tane de yanına resim assın bence.” BÖ3

“O zaman hepsini yan yana koyarak yapabilir.” BÖ4

“Birbirine bağlayarak yapabiliriz.” BÖ6

“Ben şu şekilde yaparım (Eline 2 tane kâğıt alır ve kesişme noktalarını işaret eder). Şuralara çivi çakarsam daha az çivi kullanırım.” BÖ7

“Gerçek boyutlarda olmasa da dört tane kare çizerek bulabiliriz. Ben öyle daha kolay yapıyorum. Alt alta veya yan yana asılabilir resimler (Bahsettiği şekilleri çizer).” BÖ8

Varsayımda bulunan katılımcıların çözüm süreçleri incelendiğinde problemin farklı aşamalarında varsayımlarda bulundukları tespit edilmiştir. Katılımcılardan BÖ3 ve BÖ6 çizim yaptıktan sonra varsayımda bulunmuşlar ve devamında görselleştirme yapmışlardır. Mesela BÖ3, Şekil 50’de görüldüğü gibi önce görselin sol tarafındaki çizimleri yapmıştır. Daha sonra yukarıdaki gibi bir varsayımda bulunmuş ve 10 tane çivi kullanılabileceğini tekrar çizerek göstermiştir. Bundan daha az sayıda çivi kullanıp kullanamayacağı sorulduğunda ise olamaz cevabını vererek özelleştirmeye ulaşamamıştır. Bir başka katılımcı BÖ7 ise ortamda bulunan kâğıtları kullanarak düşüncesini yukarıdaki gibi ifade etmiş ve bu ifadesi varsayımda bulunma olarak değerlendirilmiştir. Kâğıtları kullanması ise model temsili olarak değerlendirilmiştir. Katılımcı daha sonra Şekil 52’de yer alan çizimleri gerçekleştirerek farklı çözümler sunmuştur. Ancak bulduğu çözümlerin tamamında 10 tane çivi kullanılabileceği cevabına ulaşmıştır. Özelleştirme aşamasına ulaşan BÖ4 ve BÖ8 ise problemin çözümüne yukarıdaki varsayımda bulunma ifadeleri ile başlamıştır. Daha sonra katılımcılar çizim yapmaya başlamışlardır. Katılımcılar farklı çözümler denedikten sonra doğru çözüme ulaşmışlardır.

4.1.6. Görsel varsayımda bulunma problemine yönelik bulgular

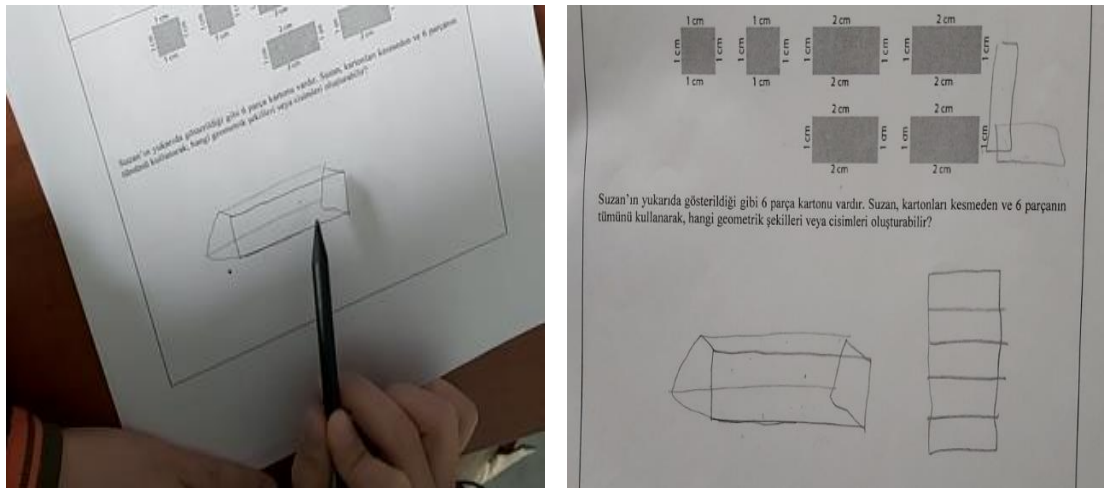
Görsel varsayımda bulunma probleminde katılımcılardan verilen şekilleri bir araya getirerek farklı şekiller veya cisimler oluşturmaları istenmiştir. Bu problemin sonucunda ortaya çıkan bulgular Tablo 8’de sunulmaktadır:

Tablo 8

Beşinci sınıf öğrencilerinin görsel varsayımda bulunma problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	BÖ1, BÖ2, BÖ4, BÖ6, BÖ7, BÖ8
	Model	-
	Tablo	-
Görselleştirme	Dönüştürme	BÖ1, BÖ2, BÖ4, BÖ7, BÖ8
	Zihinde Canlandırma	BÖ1, BÖ4, BÖ8
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	-
	Genelleme	-
	Varsayımda Bulunma	BÖ1, BÖ2, BÖ4, BÖ5, BÖ7, BÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	-

Tablo 8 incelendiğinde görsel varsayımda bulunma probleminin çözümü için katılımcıların verilen görselleri kullanarak çizimler yaptıkları anlaşılmaktadır. Bu problemin çözümü için BÖ3 herhangi bir girişimde bulunmamıştır. BÖ6 da verilen şekillerle sadece çizim yapmıştır. Yaptığı çizimlerin ise problemle ilişkisinin olmadığı görülmüştür. Bir başka katılımcı BÖ5 ise verilen şekillerle dikdörtgen olabileceğini ifade etse de bunun nasıl olabileceğini açıklayamamıştır. Diğer bütün katılımcılar varsayımda bulunarak problemin çözümüne başlamışlardır. Bu katılımcılardan 2 boyutlu şekiller oluşturanların dönüştürme, 3 boyutlu cisimler oluşturanların ise zihinde canlandırma yaptıkları kabul edilmiştir. Bazı katılımcılar ise her iki işlemi de yapmıştır. Dönüştürme yapan katılımcılar genel olarak verilen dikdörtgenlerin kenar uzunluklarını dikkate alarak yeni bir dikdörtgen yapmışlardır. Zihinde canlandırma yapan katılımcılar ise kare prizma oluşturmuşlardır. Her iki görselleştirme adımını da yapan BÖ1'in oluşturduğu görsel temsiller aşağıdaki gibidir:



Şekil 54. BÖ1'in görsel varsayımda bulunma problemi için oluşturduğu görsel temsiller

BÖ1 ile yapılan görüşmenin bir kısmı şu şekildedir:

A: *Bu kartonları kullanarak ne oluşturabilirsin?*

BÖ1: *Bir tane geometrik şekil mi olacak?*

A: *Evet. Bu parçaları kullanacaksın.*

BÖ1: *Dikdörtgen olabilir.*

A: *Nasıl bir dikdörtgen yapabilirsin?*

BÖ1: *Mesela şunları birleştirsek (Büyük dikdörtgenlerden bahsediyor), şu ikisini de birleştirip şöyle koysak (Elleri ile gösteriyor. Diğer iki büyük dikdörtgeni yüz olarak kullanıp prizma yapmaya çalışıyor). Şu ikisini de kullanıp (Küçük karelerden bahsediyor) dikdörtgen oluşturabiliriz.*

A: *Gösterebilir misin bunu bana?*

BÖ1: *Şöyle de olabilir. Bunları birleştirip (dikdörtgenleri), kenarlarına şunları koyabilir (kareleri).*

A: *Evet olabilir güzel.*

BÖ1: *(Şekil çizmeye başlar. Bir kare prizma oluşturur).*

A: *Çok güzel başka bir şey oluşturabilir miyiz?*

BÖ1: *Yan yana çizerek olabilir.*

A: *Onu da gösterir misin?*

BÖ1: *(Dikdörtgenleri alt alta koyar. Kareleri de birleştirdiğinde dikdörtgene eşit olduğunu fark ediyor ve Şekil 54'ün sağ tarafındaki gibi bir şekil çiziyor).*

Yukarıdaki diyaloga bakıldığında katılımcının öncelikle aklına gelen bu şekillerle bir prizma yapılabileceği olmuştur. Ancak kavramlar konusunda bilgi eksikliği olduğu için bunu ilk başta “dikdörtgen” olarak ifade etmiştir. Görüşmenin ilerleyen bölümlerinde dikdörtgen olarak ifade ettiği kavramın aslında bir prizma olduğu ortaya çıkmıştır. Katılımcının bu düşüncesi yine de varsayım olarak kodlanmıştır. Daha sonra nasıl bir şekil olacağını ifade etmesi zihinde canlandırma olarak değerlendirilmiştir. Son olarak katılımcının ifade ettiği bu şekli çizmesi (bkz. Şekil 54) görsel temsil yapabildiğini göstermiştir. Katılımcı daha sonra tekrar varsayımda bulunmuş olup 2 boyutlu şekil de çizilebileceğini düşünmüştür. Katılımcı, verilen şekiller içerisinde 2 tane karenin 1 tane dikdörtgene eşit olduğunu fark ederek bir dönüştürme yapmıştır. Sonra da yeni bir görsel temsil oluşturmuştur. Her iki görselleştirme adımını yapan bir başka katılımcı BÖ8 ile gerçekleşen görüşmenin bir kısmı aşağıda sunulmaktadır:

BÖ8: Burada kare prizma oluşturulabilir.

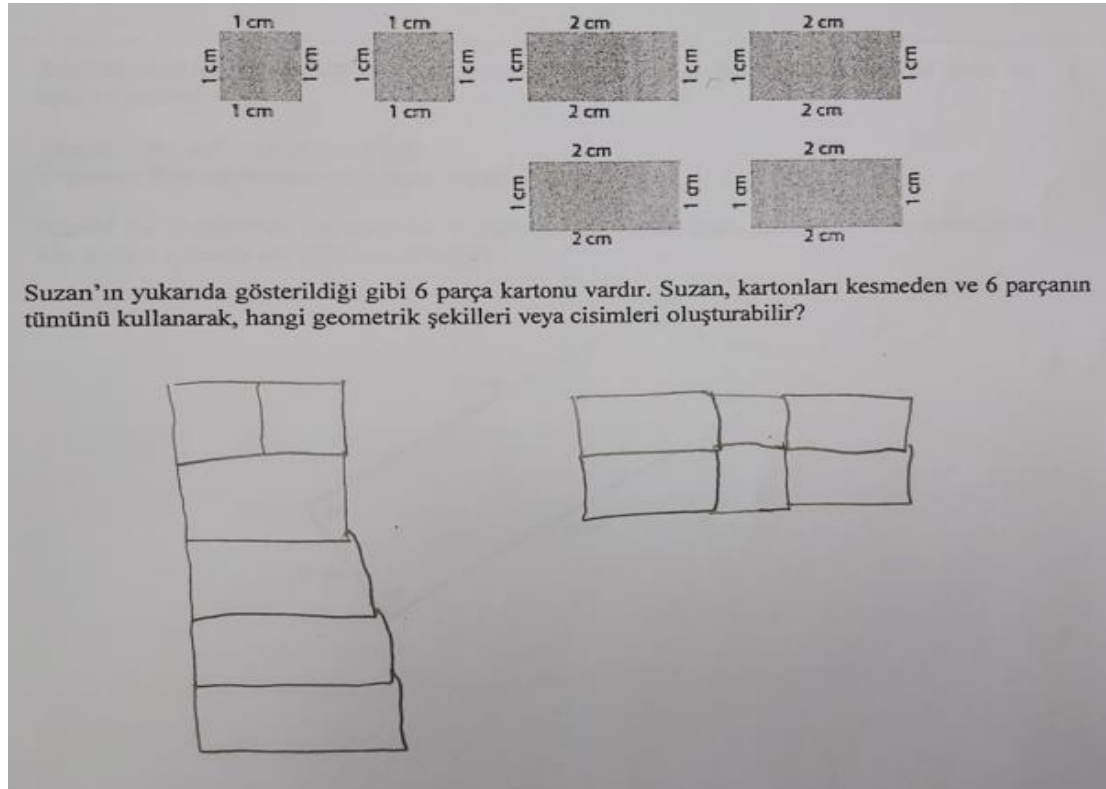
A: Nasıl olacak peki?

BÖ8: Şuraya, şuraya, şuraya, bir de şuraya 4 tane dikdörtgen koyarız (Elleri ile kare prizmanın yan yüzeylerini oluşturuyor). Bir üstüne bir de altına kareleri kullanırız.

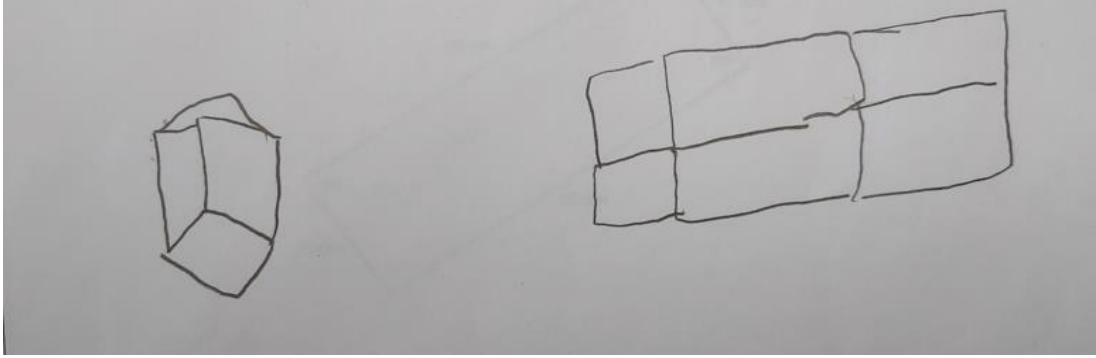
A: Başka ne olabilirdi peki?

BÖ8: (Bir süre düşünür). Yan yana getirilerek uzun bir dikdörtgen oluşturulabilir. Sonra kare oluşturulabilir mi diye düşünüyorum. (Verilen şekilleri çizerek bir araya getirmeye başlar) Hepsini kullanmazsak şu şekilde kare de oluşturulabilir veya büyük bir dikdörtgen olur.

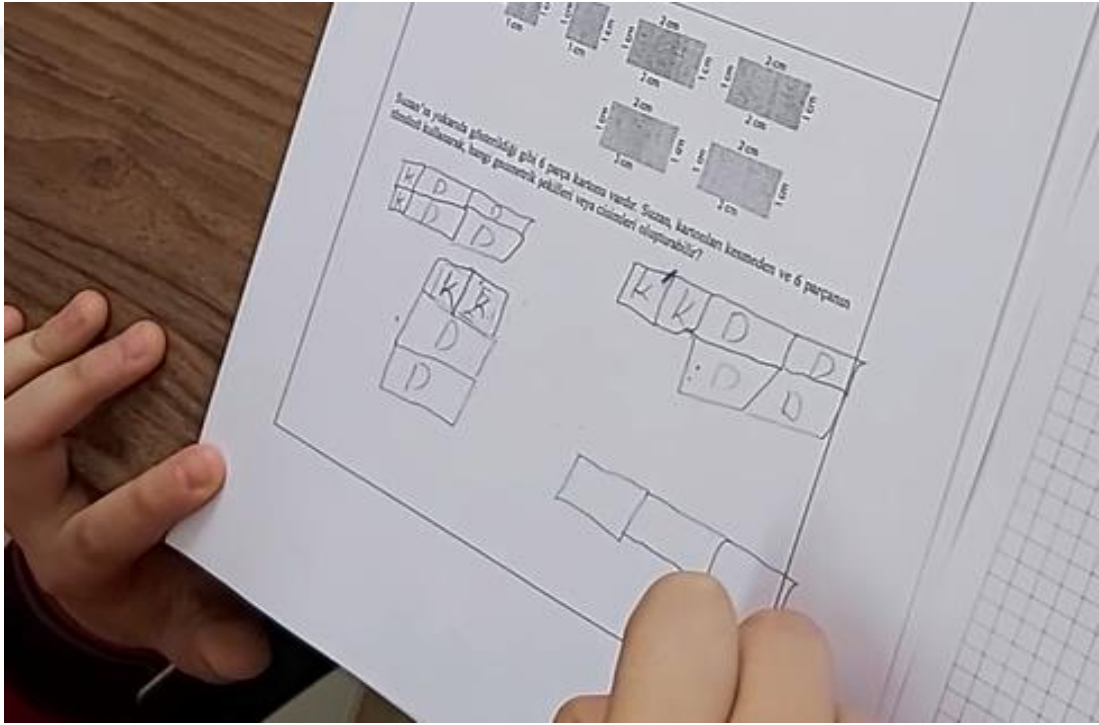
Görüldüğü gibi BÖ8 verilen şekilleri düşünerek öncelikle tahminde bulunmuştur. Bu düşüncesi varsayımda bulunma olarak ele alınmıştır. Katılımcı daha sonra ellerini kullanarak oluşacak şekli tarif etmiştir. Bu açıklamaları da zihinde canlandırma olarak kabul edilmiştir. Katılımcı daha sonra başka varsayımlarda bulunmuştur. 2 boyutlu şekillerle ilgili olduğu için burada dönüştürmeler yapmış ve şekiller çizmiştir. Diğer katılımcıların oluşturdukları görsel temsiller ise aşağıda gösterilmektedir:



Şekil 55. BÖ2'nin görsel varsayımda bulunma problemi için oluşturduğu görsel temsiller



Şekil 56. BÖ4'ün görsel varsayımda bulunma problemi için oluşturduğu görsel temsiller



Şekil 57. BÖ7'nin görsel varsayımda bulunma problemi için oluşturduğu görsel temsiller

Yukarıdaki şekillere bakıldığında BÖ2, BÖ4 ve BÖ7'nin çeşitli görsel temsiller kullandıkları görülmektedir. Şekil 56 incelendiğinde BÖ4'ün BÖ1 ve BÖ8 ile benzer süreçlerden geçerek hem 2 boyutlu hem de 3 boyutlu çizimler yaptıkları anlaşılmaktadır. BÖ2 ve BÖ7 ise sadece 2 boyutlu şekillere odaklanmışlardır. Diğer katılımcılardan farklı olarak Şekil 55 ve Şekil 57'deki gibi birçok farklı şekil çizmişlerdir.

4.1.7. Sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik bulgular

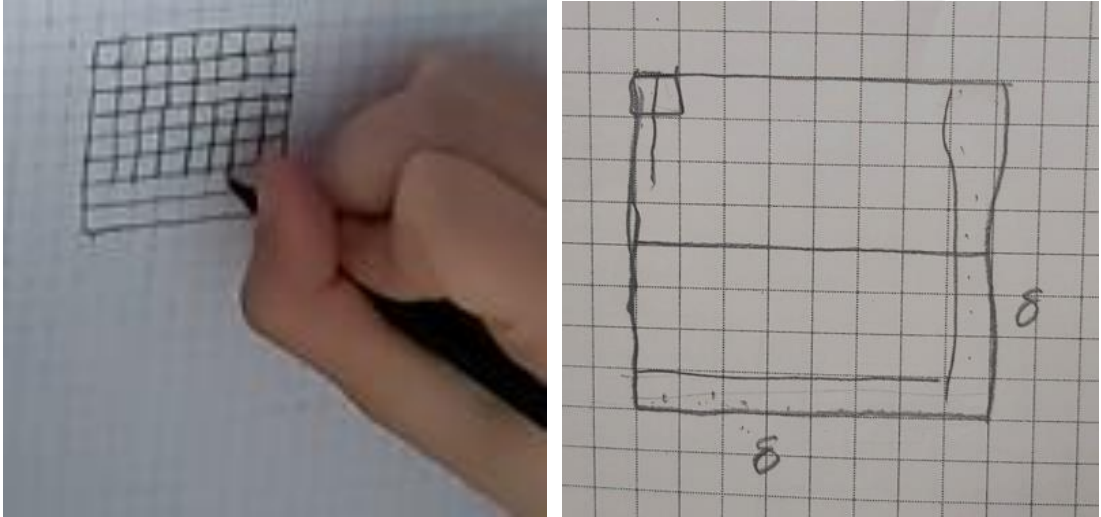
Tüm sınıf seviyelerine yöneltilen sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik beşinci sınıf öğrencilerinden elde edilen bulgular Tablo 9'da gösterilmektedir:

Tablo 9

Beşinci sınıf öğrencilerinin sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

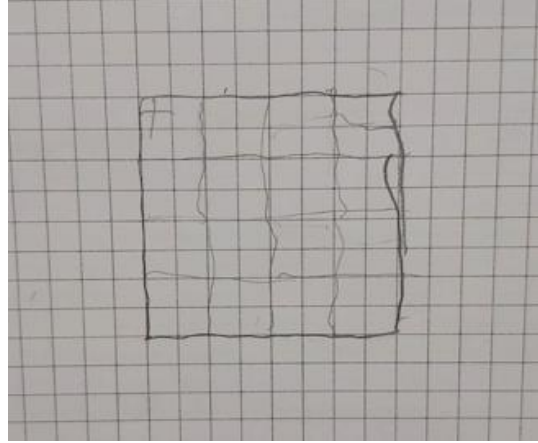
Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	BÖ2, BÖ4, BÖ5, BÖ6, BÖ7, BÖ8
	Model	-
	Tablo	BÖ8
Görselleştirme	Dönüştürme	BÖ4, BÖ8
	Zihinde Canlandırma	BÖ4, BÖ7, BÖ8
	Özelleştirme	BÖ4, BÖ7, BÖ8
Matematiksel Düşünme	Genelleme	BÖ4, BÖ8
	Varsayımda Bulunma	BÖ4, BÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	BÖ4, BÖ8

Tablo 9'a göre beşinci sınıf öğrencilerinin büyük bir kısmının sözel doğrulama ve ikna etme probleminin çözümü için çizim temsilini oluşturduğu anlaşılmaktadır. Ancak bu katılımcılardan sadece BÖ4, BÖ7 ve BÖ8 problemin çözümü için ilerleme göstermişlerdir. Bu katılımcılardan BÖ8 çizim temsilinin yanı sıra tablo temsili de oluşturmuştur. Bazı katılımcıların oluşturdukları görsel temsiller aşağıda sunulmaktadır:



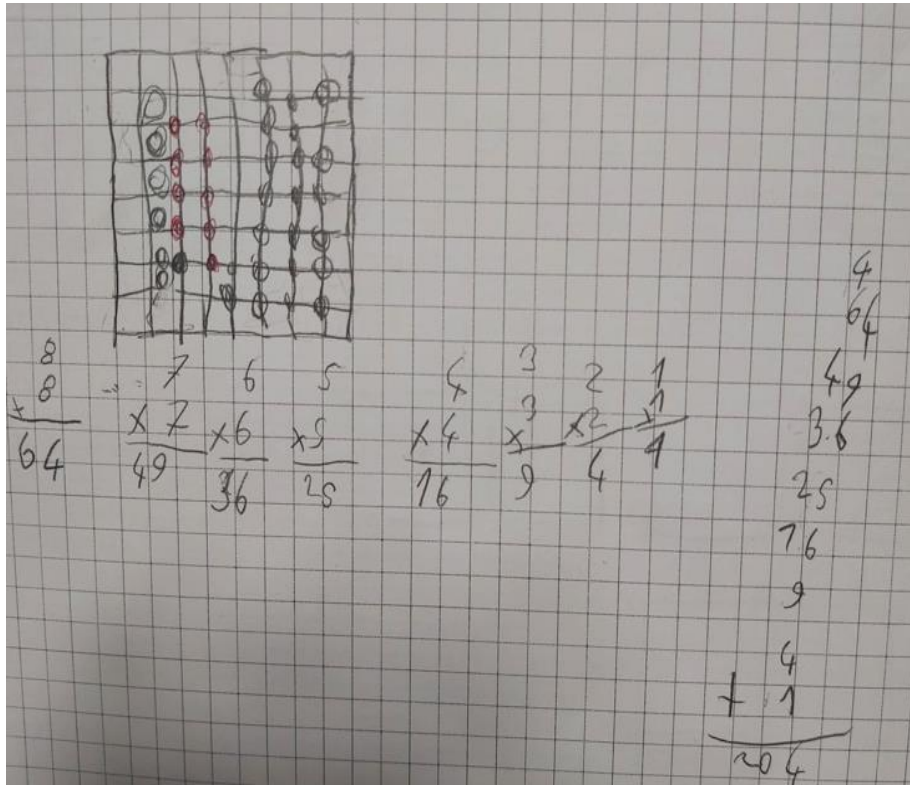
Şekil 58. BÖ5 ve BÖ6'nın oluşturdukları görsel temsiller

Katılımcılardan BÖ5 ve BÖ6, Şekil 58'de görüldüğü gibi problemin başında bir görsel temsil oluşturmuşlardır. Ancak daha sonra görselleştirme yapamadıkları için problemin çözümüne yönelik bir adım geliştirememişlerdir. Benzer şekilde BÖ2 de sadece çizim yapmış sonrasında ilerleme yapamamıştır. BÖ1 ve BÖ3 ise problemi anlamakta güçlük çekmişlerdir. Problemde görselleştirmeye yönelik göstergeler sergileyen BÖ7'nin çizimleri şu şekildedir:



Şekil 59. BÖ7'nin sözel doğrulama ve ikna etme problemi için oluşturduğu görsel temsil

BÖ7 problemi okuduktan sonra yukarıdaki gibi temsili oluşturmuş ve temsil üzerinde düşünmeye başlamıştır. Daha sonra ise görsel temsil üzerinde başka kareler olduğunu da ifade ederek zihinde canlandırma yaptığını göstermiştir. Nitekim bu karelerden bazılarını Şekil 59'daki gibi sunarak özelleştirme yapmıştır. Problemin devamında her ne kadar farklı büyüklükteki birçok kareyi gösterse de 204 tane kare olduğunu gösterememiştir. Katılımcılardan BÖ4'ün problem çözme süreci Şekil 60'da sunulmaktadır:



Şekil 60. BÖ4'ün sözel doğrulama ve ikna etme problemini çözüm süreci

Görselleştirme ve matematiksel düşünme bileşenlerinin tamamına yönelik göstergeleri ortaya koyan BÖ4 ile yapılan görüşmenin bir kısmı şu şekildedir:

BÖ4: Aaa buldum. Bunun içinde bu da bir kare (Bir kenarı 2 birim olan bir kareyi gösterir). Bu da bir kare. Bu da bir kare. Daha böyle bir sürü kare var.

A: Peki toplam sayısı kaç olacak onların?

BÖ4: Hımm (Bir süre düşünür).

A: Aslında sen bazılarını buldun.

BÖ4: Evet. Şu an 7 tane buldum (Bir sütundaki 2 birim büyüklüğündeki kareleri gösterir). Buralarda da 7 tane var (Diğer sütunları işaret eder). 7 tane 7 olacak bu şekilde. Yani bu kareden 7 kere 7 kadar var.

A: Çok güzel başka kareler var mı?

BÖ4: Başka kareler var (Farklı büyüklüklerdeki bazı kareleri gösterir).

A: Bir kenarı 3 birim olan kareler kaç tane mesela?

BÖ4: Tamam (Şekil 60'daki gibi sistematik olarak gösterir). 6 tane oldu burada. Buralarda da 6 tane olacak. O zaman bundan da 36 tane olacak.

A: Eee daha devam ediyor böyle ne yapacağız şimdi?

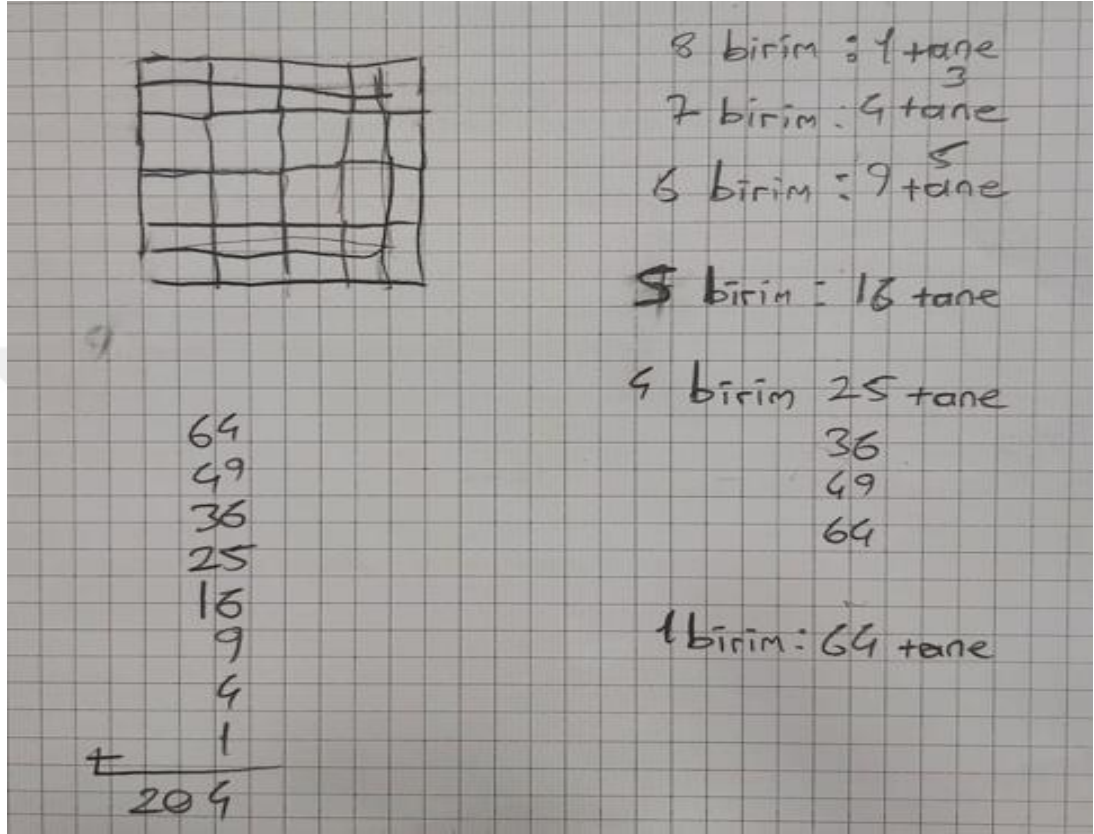
BÖ4: O zaman 4 birimliklere bakalım. Burada 1 tane 4 birimlik var. Burada da var (Bahsettiği karelerin ortalarını bularak saymaya devam eder). Burada da var. Burada da var. Burada da var. Böyle gidilirse 5 kere 5 olacak. Yakaladım. Kendisi ile kendisini çarpıyoruz. Yani karesini buluyoruz. Bir sonrakinde 4 kere 4, 16. Bu kez 3 kere 3, 9. 2 kere 2, 4. 1 kere 1, 1.

A: Güzel, bu durumda gerçekten 204 tane oluyor mu?

BÖ4: Toplamamız gerekiyor (Çözümünün devamında bulunduğu değerleri alt alta yazarak toplama işlemini yapar ve 204 tane kare olduğunu gösterir).

BÖ4 çizimi üzerinde düşünürken diğer karelerin olabileceğini de fark etmiştir. Katılımcının diğer kareleri göstermesi zihinde canlandırma yaptığını göstermektedir. Daha sonra farklı birimlerdeki kareleri bulmaya çalışırken temsil üzerindeki dikey sütunları hesaba katarak işlemler yapması ise dönüştürme olarak değerlendirilmiştir. Katılımcının bu adımları tamamladıktan sonra 2 birim ve 3 birim büyüklüğündeki kare sayılarını bulması özelleştirme yaptığına dair bir kanıttır. Katılımcının bir sonraki adımda oluşacak kare sayısına yönelik açıklaması varsayımda bulunma olarak değerlendirilmiştir. Bununla birlikte katılımcı, bir

genellemeye ulaşmış ve sonuç olarak problemde isteneni doğrulamıştır. Matematiksel düşünme bileşenlerinin tamamını sergileyen BÖ8'in çözüm süreci de Şekil 61'deki gibidir:



Şekil 61. BÖ8'in sözel doğrulama ve ikna etme problemini çözüm süreci

BÖ8'de diğer katılımcılar gibi öncelikle satranç tahtasını temsil edecek bir çizim yapmıştır. Çiziminden sonra temsil üzerindeki diğer kareleri de Şekil 61'de görüldüğü gibi çizimi üzerinde göstermiştir. Başka kareler olduğunu fark ederek zihinde canlandırma yaptığı kabul edilen katılımcı temsili üzerinde çalışmalar yapmaya devam etmiştir. Sonrasında bir kenarı en büyük olan karelerden başlayarak ortaya çıkan kare sayılarını bulmaya çalışmıştır. Örneğin; bir kenarı 7 birim ve 6 birim büyüklüğünde olan kare sayılarını hesaplarken köşeleri referans alarak işlemler yapması görsel temsilden bir dönüştürme yaptığına işarettir. BÖ8 daha sonra bulduğu kare sayılarını Şekil 61'deki gibi alt alta yazarak tablo temsili oluşturmuştur. Bazı adımları bularak özelleştirme yapan katılımcı bir kenarı 5 birim olan kare sayıları için "Sonrasında 16 mı olacak?" şeklinde bir varsayımda bulunmuştur. Bu tahmininden sonra örüntü olacağını düşünüp sonraki adımlar için varsayımını devam ettirerek bir genelleme yapmıştır. Katılımcı son olarak bulduğu değerleri toplayarak problemde isteneni doğrulamıştır.

4.1.8. Görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik bulgular

Sadece beşinci sınıf öğrencilerine yöneltilen dikdörtgenin özellikleri ile ilgili görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik bulgular Tablo 10’da sunulmaktadır:

Tablo 10

Beşinci sınıf öğrencilerinin görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	-
	Model	-
	Tablo	-
Görselleştirme	Dönüştürme	-
	Zihinde Canlandırma	-
	Özelleştirme	-
Matematiksel Düşünme	Genelleme	-
	Varsayımda Bulunma	BÖ1, BÖ2, BÖ3, BÖ4, BÖ5, BÖ6, BÖ7, BÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	-

Tablo 10 incelendiğinde katılımcıların tamamının görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik varsayımlarda bulundukları görülmüş olup, diğer bileşenlere yönelik göstergeler ise sergileyemedikleri ortaya çıkmıştır. Katılımcıların varsayımda bulundukları kabul edilen ifadeleri aşağıdaki gibidir:

“Bu bence dikdörtgen. Çünkü 91 ile 91 birleşiyor. 89 ile de 89 birleşiyor. Ayrıca buralar kısa, şuralar uzun (Kenarlardan bahsediyor). Hepsi 90° olsaydı mesela kare olurdu. Ama bunların açıları farklı olduğu için dikdörtgen olur. Dikdörtgenin iki kenarı aynı iki kenar farklı oluyordu.” BÖ1

“Ahmet’in söylediği doğrudur. Yani bu şekil bir dikdörtgendir. Çünkü dikdörtgenin şuraları aynı şuraları farklı olması lazım (Karşılıklı kenarlar aynı, diğer kenarları farklı olarak düşünüyor). Yağmur açılara baktığından farklı düşünüyor olabilir belki. Onlar önemli değil bence.” BÖ2

“Bu bence dikdörtgen değil. Dikdörtgen olması için bütün açılar ya 89 ya da 91 olması lazım.” BÖ3

“Bu şekil dikdörtgen çünkü kısa kenarları ve uzun kenarları karşılıklı.” BÖ4

“Yağmur haklı bence bu şekil dikdörtgen olamaz. Çünkü iç açıları var bunların. Bence onla ilgili bunlar boşu boşuna yazılmış olamaz. Ama buna yönelik bir açıklamam yok.” BÖ5

“Bence dikdörtgen. Çünkü şu kenarlar eşit ve bu kenar diğerinden daha uzun.” BÖ6

“Ben burada Ahmet’in söylediğini doğru buluyorum. Çünkü dikdörtgenin özelliklerine göre bunun uzun kenarları kısa kenarlarından uzun, uzun kenarları birbirine eşit ve kısa kenarları da birbirine eşit. Ama dereceler farklı (Bir süre düşünür). 90’na yakın oluyor verilen açılar. Burada ben baktığımda dikdörtgen görüyorum ama açıların dikdörtgenle ilişkisi olup olmadığını hatırlamıyorum. Biz bunu öğrenmedik sanırım.” BÖ7

“Bence bu kesinlikle bir dikdörtgen. Çünkü karşılıklı kenarları eşit. Dikdörtgenlerde de öyle oluyor. Bir de ben kendim daha önce araştırıp şöyle bir şey bulmuştum. Bu açılarla ilgili bir kural var sanırım ama doğru mu tam bilmiyorum. 89 ile 91’i topladığımızda 180° yapması gerekiyor. Bu şekilde de 180° oluyor. Kenar özelliklerini de sağladığı için dikdörtgen olur. Şeklin kaç derece döndürülmüş olması da dikdörtgen olmasını etkilemiyor.” BÖ8

Katılımcılar problemin çözümü ile ilgili olarak yukarıdaki gibi açıklamalarda bulunmuştur. Katılımcıların büyük çoğunluğu verilen şeklin dikdörtgen olduğunu düşünmektedir. Bu düşüncelerinin temel sebebi ise dördüncü sınıfta dikdörtgenin tanımını bu şekilde öğrenmiş olmalarıdır. Bazı katılımcılar açılara dikkat etse de bu konudaki bilgi eksiklerinden dolayı matematiksel bir dönüştürme yapamamıştır. Bu durumla ilgili olarak dikdörtgenin temel özelliklerinden biri olan dik açının ilkökul öğretim programında ve ders kitaplarında yeteri kadar yer verilmemesi düşündürücüdür. Çünkü tanımların imajları etkilediği ve eksik tanımların hatalı imajlara sebep olduğu unutulmamalıdır. Bunun dışında şeklin dikdörtgen olduğunu ifade eden birçok katılımcı döndürülmüş olarak verilen şekilden etkilenmemişlerdir. Ancak eksik bilgiye sahip olmaları onları yanıltmıştır. Ayrıca açı değerleri şekle bakıldığında ayırt edilebilecek ölçüde farklı olsaydı katılımcıların şeklin dikdörtgen olmadığını fark edebilecekleri görülmüştür. Ama birbirine yakın verilmesi dikdörtgenin açılarının 90° olması gerektiğini bilmediklerini göstermektedir.

4.2. Altıncı Sınıf Öğrencilerinin Geometri Problemlerinde Görsel Akıl Yürütme Becerilerinin Rolü Nedir ve Nasıldır?

4.2.1. Sözel özelleştirme problemine yönelik bulgular

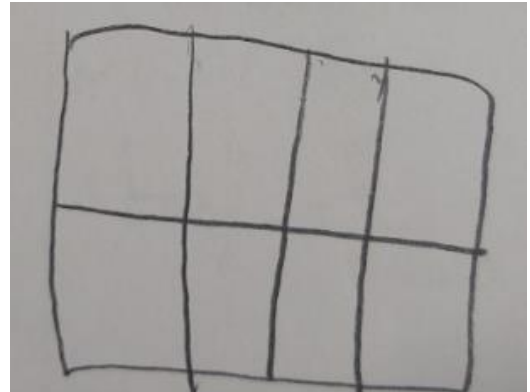
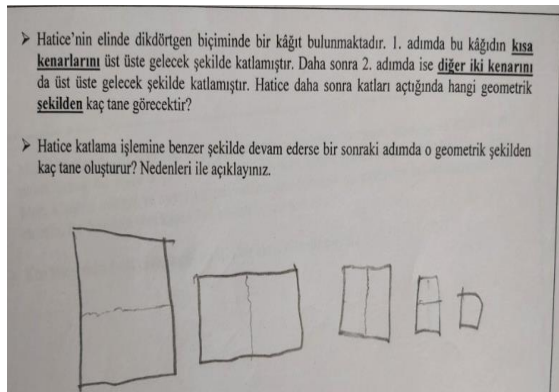
Altıncı sınıf öğrencileri için sözel özelleştirme problemine yönelik olarak diğer sınıf düzeylerinde olduğu gibi kâğıt katlama ile ilgili bir problem sorulmuştur. Bu problemde elde edilen bulgular Tablo 11’de sunulmaktadır:

Tablo 11

Altıncı sınıf öğrencilerinin sözel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

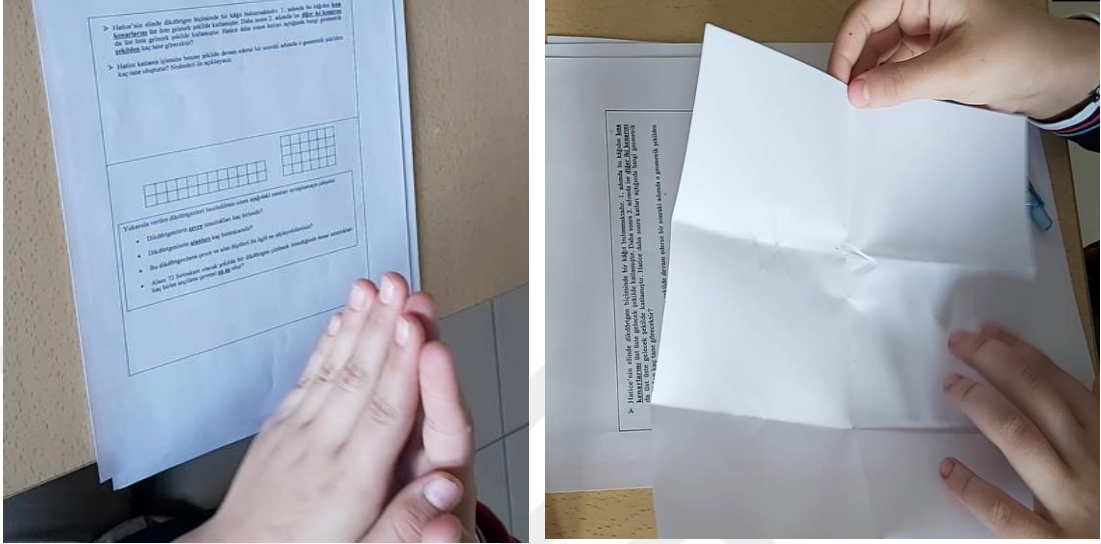
Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	AÖ1, AÖ5
	Model	AÖ1, AÖ2, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ7, AÖ8
	Tablo	-
Görselleştirme	Dönüştürme	AÖ4, AÖ6
	Zihinde Canlandırma	AÖ1, AÖ2, AÖ3, AÖ5, AÖ7, AÖ8
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	AÖ1, AÖ2, AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ7, AÖ8
	Genelleme	AÖ2, AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ7, AÖ8
	Varsayımda Bulunma	AÖ1, AÖ2, AÖ3, AÖ7, AÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	AÖ7, AÖ8

Tablo 11’e bakıldığında sözel özelleştirme probleminde AÖ3 dışındaki öğrencilerin tamamının model temsili kullandığı görülmektedir. Bununla birlikte AÖ1 ve AÖ5 kodlu katılımcılar ise problemi çözerken hem çizim hem de model kullanmışlardır. Katılımcıların tamamı özelleştirme aşamasını tamamlamıştır. Yine katılımcıların büyük çoğunluğunun probleme yönelik genelleme yaptıkları tespit edilmiştir. Katılımcılardan AÖ3’ün ise herhangi bir görsel temsil kullanmadan özelleştirme ve genelleme yapması dikkat çekici bir bulgudur. Katılımcılardan AÖ1 ve AÖ5’in yaptıkları çizimler şu şekildedir:

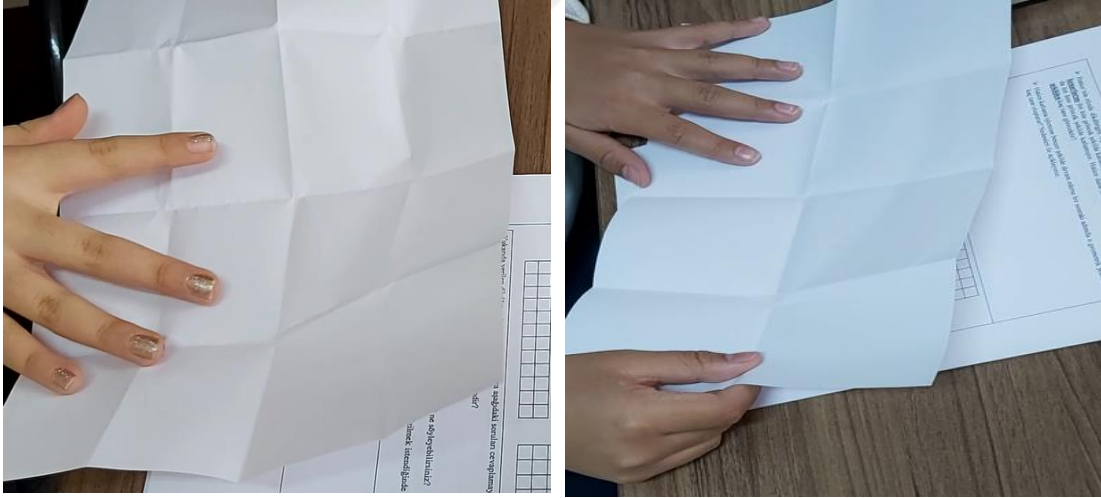


Şekil 62. AÖ1 ve AÖ5’in sözel özelleştirme problemi için oluşturdukları çizim temsilleri

Çözümlerinde model kullanmayı tercih eden katılımcılara ait örnekler ise aşağıdaki gibidir:



Şekil 63. AÖ2 ve AÖ6'nın sözel özelleştirme problemi için oluşturdukları görsel temsiller



Şekil 64. AÖ7 ve AÖ8'in sözel özelleştirme problemi için oluşturdukları görsel temsiller

Bütün katılımcıların görselleştirme bileşeni açısından bazı göstergeler sergiledikleri görülmüştür. Katılımcılardan AÖ4 ve AÖ6 dönüştürme yaparken diğer bütün katılımcılar zihinde canlandırma yapmışlardır. AÖ6, kâğıdı katlarken zihinde canlandırma yapamamış ama daha sonra katları açtığı anda temsil üzerinde yeni oluşan dikdörtgenleri saymıştır. Bu sayma sırasında yaptığı işlem dönüştürme olarak düşünülmüştür. AÖ6'nın "Tam sayısı kadar artıyormuş. 16 tane olur. Mesela 4 tane iken 4 artıyor. 8 tane iken 8 artıyor. Daha sonra 16'ya

16 eklersek 32 tane olurdu. Kendi sayısı kadar artıyor hep.” şeklindeki ifadesi araştırmacıyı bu duruma yönlendirmiştir. Katılımcılardan AÖ2 ve AÖ7 problemin çözümünde ellerini ve parmaklarını çok sık kullanmışlardır (bkz. Şekil 63 ve Şekil 64). Örneğin; AÖ7’nin “Buradan bir tane katladık. Buradan da bir tane katladık (Düşünmeye devam eder ve parmaklarıyla sanki bir kâğıt varmış gibi hareketler yapıyor).” hareketlerinden ve ifadelerinden zihinde canlandırma yaptığı anlaşılmıştır. Şekil 62’nin sağ tarafındaki gibi çizime sahip olan AÖ5 ise “İlk başta böyle bir kâğıt var. Bunu önce böyle katlayacak (Dikey olarak bölüyor dikdörtgeni). Ondan sonra bu şekilde katlayacak (Yatay olarak bölüyor). Sonra katladığımızda ise böyle olacaktı (Dikdörtgeni dikey olarak 2 kere daha bölüyor).” şeklinde görüş bildirmiştir. AÖ5’in bu ifadesi de zihinde canlandırma olarak değerlendirilmiştir.

Katılımcılardan AÖ3 herhangi bir görsel temsil kullanmasa da önce bir varsayımda bulunmuş daha sonra ise zihinde canlandırma yaptığına yönelik ifadelerde bulunmuştur. AÖ3 ile gerçekleşen diyalog aşağıdadır:

A: Tamam sen nasıl bir çözüm yapacaksın?

AÖ3: Sanırım dikdörtgenden 4 tane görecektir.

A: Nasıl buldun?

AÖ3: Kâğıdı katladığımız zaman o şekilde olacağını düşündüm.

A: Ama sen şu an kâğıt katlamadın. Nasıl bulduğunu biraz daha açıklar mısın?

AÖ3: Kısa kenarları üst üste getirdim önce 2 tane dikdörtgen oldu. Sonra uzun kenarları da üst üste getirince 2 dikdörtgen daha oldu. Toplamda 4 tane dikdörtgen oldu.

A: Güzel, devam edelim probleme.

AÖ3: 4 tane daha dikdörtgen olurdu.

A: Neden?

AÖ3: Çünkü 2 katına çıkıyor hep.

A: Problemi çok iyi anladın. Ama hiç kalem kullanmadın mesela. Nasıl bulduğunu daha detaylı anlatır mısın?

AÖ3: Ben beynimden direk kâğıdı katladım. Problemdeki gibi bir A4 kâğıdı düşündüm. Onun önce kısa kenarlarını sonra uzun kenarlarını katladım zihnimden. O bulduğum 4 dikdörtgen tekrar katlandığında 8 dikdörtgene çıktı.

A: Peki bir daha katlasaydık?

AÖ3: 16, 32 diye devam edecek. Her seferinde 2 ile çarpıyoruz.

AÖ3 problemin başında varsayımda bulunarak hareket etmiştir. Daha sonra ise varsayımını açıklamaya çalışmıştır. Katılımcının herhangi bir araç kullanmadan problemi yanıtlaması zihinde canlandırma yaptığına işaret etmektedir. Nitekim yaptığı açıklamalar da bir takım zihinsel faaliyetlerde bulunduğunu göstermektedir. Bununla birlikte katılımcının özelleştirme ve genellemeye ulaştığı da görülmektedir.

Matematiksel düşünme bileşenine bakıldığında ise katılımcıların tamamı özelleştirme aşamasını tamamlamışlardır. AÖ1 dışındaki katılımcılar genellemeye de ulaşmışlardır. AÖ1, AÖ2, AÖ3, AÖ7 ve AÖ8'in görsel akıl yürütme süreçlerinde varsayımda bulundukları görülmüştür. Bu katılımcılardan AÖ7 ile AÖ8, doğrulama ve ikna etmeye yönelik girişimlerde bulunmuşlardır. AÖ7 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıdaki gibi gerçekleşmiştir:

A: *Ne oldu şimdi?*

AÖ7: *2 tane dikdörtgen oldu.*

A: *Güzel, sonra?*

AÖ7: *Önce kısa kenarları katladım. Şimdi diğer kenarları katlayacağım. Şimdi açacağız. 4 tane oluyormuş. (Problemin devamını okur ve sonrasında kâğıtla devam etmek ister).*

A: *Tahmin etmeye çalış bakalım önce.*

AÖ7: *Tamam. (Bir süre düşünür) 8 olur.*

A: *8 tane ne olur?*

AÖ7: *Dikdörtgen.*

A: *Peki ondan sonraki adım olsaydı kaç tane olurdu?*

AÖ7: *Onu da buldum 16 tane oluyor.*

A: *Burada bir kural var mı sence?*

AÖ7: *Her seferinde 2 katı kadar dikdörtgen oluyor.*

A: *Mesela beşinci adım olsaydı kâğıdı katlamadan bulabilir miydin?*

AÖ7: *Bulabilirdim. 2 kere olursa 8, 16, 32 tane olurdu.*

AÖ7 ile yapılan görüşmede katılımcı model kullanarak problemin sonucuna varmaya çalışmıştır. Kullandığı model sayesinde özelleştirmeyi tamamlamış, varsayımda bulunmuş, varsayımını doğrulamış ve devamında da genellemeye ulaşmıştır. Problemin çözümüne genel olarak bakıldığında başarı düzeyi fark etmeksizin bütün katılımcıların görsel akıl yürütmede başarılı oldukları görülmüştür. Doğrulama ve ikna etme göstergesine ise sosyoekonomik açıdan yüksek düzeydeki okulda öğrenim gören en başarılı öğrenciler ulaşmışlardır.

4.2.2. Görsel özelleştirme problemine yönelik bulgular

Dikdörtgende çevre ve alan ilişkisi ile ilgili olan görsel özelleştirme problemi sekizinci sınıf dışındaki bütün katılımcılara yöneltilmiştir. Problemde katılımcıların verilen görsellerden yararlanarak çıkarımlar yapmaları ve bu çıkarımları farklı durumlara uyarlamaları beklenmiştir. Bu probleme yönelik altıncı sınıf öğrencilerinden elde edilen bulgular Tablo 12’de gösterilmektedir:

Tablo 12

Altıncı sınıf öğrencilerinin görsel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	AÖ5
	Model	-
	Tablo	AÖ1, AÖ7, AÖ8
Görselleştirme	Dönüştürme	AÖ1, AÖ2, AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ7, AÖ8
	Zihinde Canlandırma	-
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	AÖ1, AÖ3, AÖ5, AÖ7, AÖ8
	Genelleme	AÖ3, AÖ5, AÖ7, AÖ8
	Varsayımda Bulunma	AÖ1, AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ7, AÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	-

Görsel özelleştirme probleminde katılımcılar probleme ait ilk 3 soruyu verilen görselleri kullanarak cevaplamışlardır. Bundan dolayı ek görsel temsile ihtiyaç duymamışlardır. Nitekim Tablo 12’ye bakıldığında altıncı sınıf öğrencilerinin tamamının görsel özelleştirme problemine yönelik olarak dönüştürme yaptıkları görülmektedir. Katılımcılar birimkareler ile verilen dikdörtgenlerin çevre ve alanlarını hesaplayarak görsel temsilleri matematiksel bilgiye dönüştürmüşlerdir.

Görselleştirme adımını tamamlayan katılımcıların büyük çoğunluğu daha sonra problemin son alt sorusu için varsayımda bulunmuşlardır. Katılımcılardan sadece AÖ2 ve AÖ6 varsayım üretemeyerek probleme bir çözüm getirememişlerdir. Varsayımda bulunan katılımcılara bakacak olursak bu katılımcılardan AÖ4, “Kenarlarını birbirine yakın seçerek yapabilirim.” diyerek varsayımda bulunmuştur. Ancak dikdörtgenin kenar ölçülerine yönelik bir sonuç elde edemediğinden dolayı özelleştirme aşamasını tamamlayamamıştır. Varsayımda bulunan diğer katılımcıların birçoğunun ise görsel temsil oluşturduktan sonra özelleştirme yaptıkları görülmüştür. Bunun devamında da AÖ1 dışındaki katılımcıların genellemeye yönelik ifadelerde bulundukları anlaşılmıştır. Görsel temsil kullanmadan sonuca ulaşan AÖ3 ile yapılan görüşmenin bir kısmı aşağıda sunulmaktadır:

A: Bu son sorudan ne anladın?

AÖ3: Alanı 72 birimkare olacak, çevresi de en az olacak bir dikdörtgen istiyor. Yani 72'yi şuradaki (Üstteki dikdörtgenlerden kenar uzunlukları birbirine yakın olan dikdörtgeni gösterir) gibi düşünmem lazım.

A: Anladım, nasıl olabilir peki?

AÖ3: (Bir süre düşünür) 9 ile 8 olabilir.

A: Güzel, nasıl buldun?

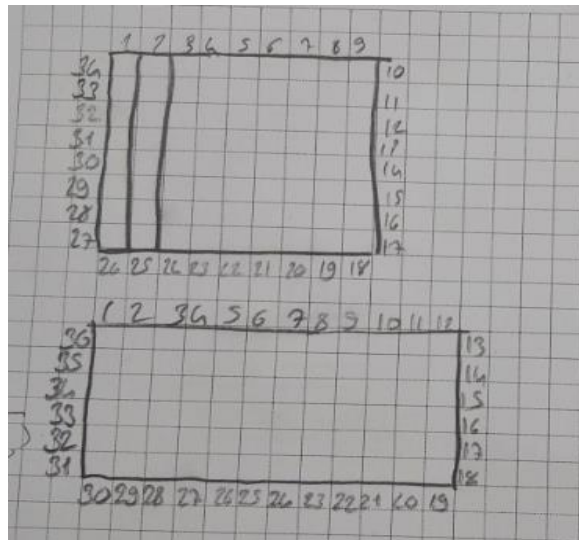
AÖ3: 72'yi 9'a böldüm. O da 8 yapar.

A: Çevresi en az olan dikdörtgen bu mu sence? Başka nasıl olabilir?

AÖ3: Başka bulamadım ama 9 ile 8 birbirine en yakın olduğu için bu olur diye düşünüyorum.

AÖ3 son soruya yönelik çözümünü yaptığı sırada problemten ne anladığını anlatırken önceki soruda gördüğü şekillerden yardım almıştır. Bu düşüncesi bir varsayım olarak değerlendirilmiştir. Sonrasında ise herhangi bir temsil kullanmadan 72'yi bölebilecek sayıya odaklanmıştır. Bu noktada aklına sadece 9 gelmiştir. Bulduğu sonuç ile de bir özelleştirme gerçekleştirmiştir. Başka dikdörtgenler oluşturamamasının sebebi, görsel temsil kullanmaması olarak düşünülmektedir. Ancak katılımcının görüşmenin sonunda bilinçli olarak bu sayıları seçtiğini ve sebebini açıklaması genelleme yaptığını göstermektedir.

AÖ3'ün aksine bazı katılımcılar ise problemin son alt sorusunun çözümü sırasında görsel temsil kullanmışlardır. Bu katılımcılardan AÖ5 çizim yaparken, AÖ1, AÖ7 ve AÖ8' in tablo yaptıkları görülmüştür. Katılımcılardan AÖ5'in oluşturduğu görsel temsil şu şekildedir:



Şekil 65. AÖ5'in görsel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil

AÖ5 ile yapılan görüşmenin bir kısmı aşağıda sunulmaktadır:

AÖ5: 72, 9 ile 8'in çarpımı. (Kenar uzunlukları 8 ve 9 birim olacak şekilde hemen bir dikdörtgen çizer ve çevresini saymaya başlar) Çevresi 34 olur.

A: Peki sana en az diyor. En az senin yaptığın mı başka var mı?

AÖ5: (Biraz düşünür) 72'nin başka çarpanı olarak 12 ile 6'yı çarptığımda 72 yapıyor. Onları da deneyeceğim. (Kenar uzunlukları 6 ve 12 birim olacak şekilde başka bir dikdörtgen çizer ve çevresini sayar) Bunda 36 çıktı.

A: O zaman hangisi daha kısaymış?

AÖ5: Birinci yaptığım.

A: Peki bu bulduklarınla ilgili bana daha genel bir şey söyleyebilir misin? Yani bir şeklin çevresinin az olmasını istiyorsan kenar uzunluklarını nasıl seçmelisin?

AÖ5: İkisini de küçük bir sayı seçmem gerekir.

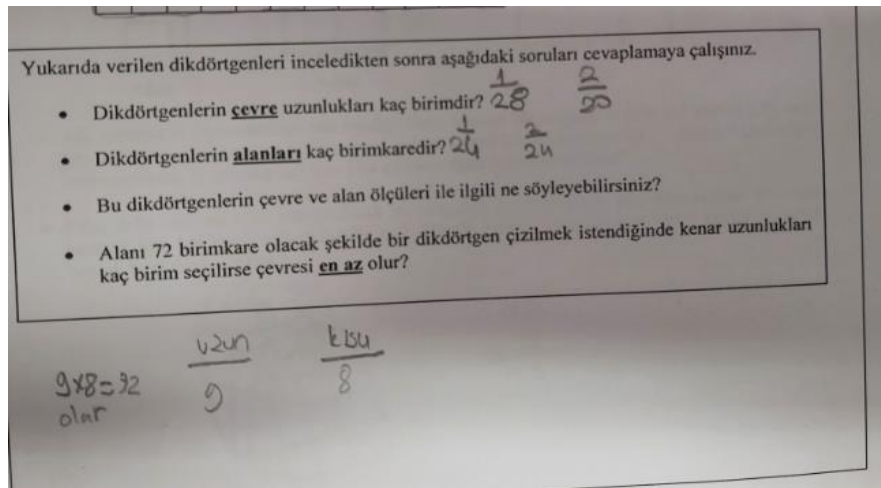
A: Burada 6'yı seçtin mesela daha küçük bir sayı vardı.

AÖ5: Diğer kenarını uzun seçtim ama.

A: Çizdiğin şekilleri düşünerek başka bir şey söyleyebilir misin?

AÖ5: İkisini de aynı seçmeye çalıştım. Kenar uzunlukları birbirine yakın olursa çevresi daha kısa olur.

AÖ5 de AÖ3 ile benzer süreçlerden geçse de oluşturduğu görsel temsiller sayesinde daha düzgün ifadeler de bulunmuştur. Tablo temsili kullandığı düşünülen AÖ1, AÖ7 ve AÖ8'in problem çözme süreçleri de aşağıdaki şekillerde sunulmaktadır:



Şekil 66. AÖ1'in görsel özelleştirme problemini çözme süreci

Yukarıda verilen dikdörtgenleri inceledikten sonra aşağıdaki soruları cevaplamaya çalışınız.

- Dikdörtgenlerin çevre uzunlukları kaç birimdir? $28 \text{ br} / 20 \text{ br}$
- Dikdörtgenlerin alanları kaç birimkaredir? $24 \text{ br}^2 / 20 \text{ br}^2$
- Bu dikdörtgenlerin çevre ve alan ölçüleri ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?
- Alanı 72 birimkare olacak şekilde bir dikdörtgen çizilmek istendiğinde kenar uzunlukları kaç birim seçilirse çevresi en az olur?

Çözümler: $1/72$, $36/2$, $24/3$, $18/4$, $12/6$, $8/9$, 36 br , 16 , 18 , 34 br

Şekil 67. AÖ7'nin görsel özelleştirme problemini çözme süreci

Yukarıda verilen dikdörtgenleri inceledikten sonra aşağıdaki soruları cevaplamaya çalışınız.

- Dikdörtgenlerin çevre uzunlukları kaç birimdir? $28, 20$
- Dikdörtgenlerin alanları kaç birimkaredir? $24, 24$
- Bu dikdörtgenlerin çevre ve alan ölçüleri ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?
- Alanı 72 birimkare olacak şekilde bir dikdörtgen çizilmek istendiğinde kenar uzunlukları kaç birim seçilirse çevresi en az olur?

Çözümler: 72 , 36 , 24 , 18 , 12 , 9 , 8 , 7 , 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1

Şekil 68. AÖ8'in görsel özelleştirme problemini çözme süreci

Sunulan görsel özelleştirme probleminin, altıncı sınıf öğrencilerinin birçoğunun matematiksel düşünme bileşenlerini sergiledikleri bir problem olduğu söylenebilir. Katılımcıların yarısından fazlasının varsayımda bulunduğu ve özelleştirme yaptığı görülmüştür. Bunun yanı sıra katılımcıların yarısı dikdörtgenin alanı ve kenarlarının ilişkisine yönelik genellemeye de varmışlardır. Genellemeye ulaşan katılımcıların ise çoğunlukla başarı düzeyi yüksek öğrenciler oldukları ortaya çıkmıştır.

4.2.3. Sözel genelleme problemine yönelik bulgular

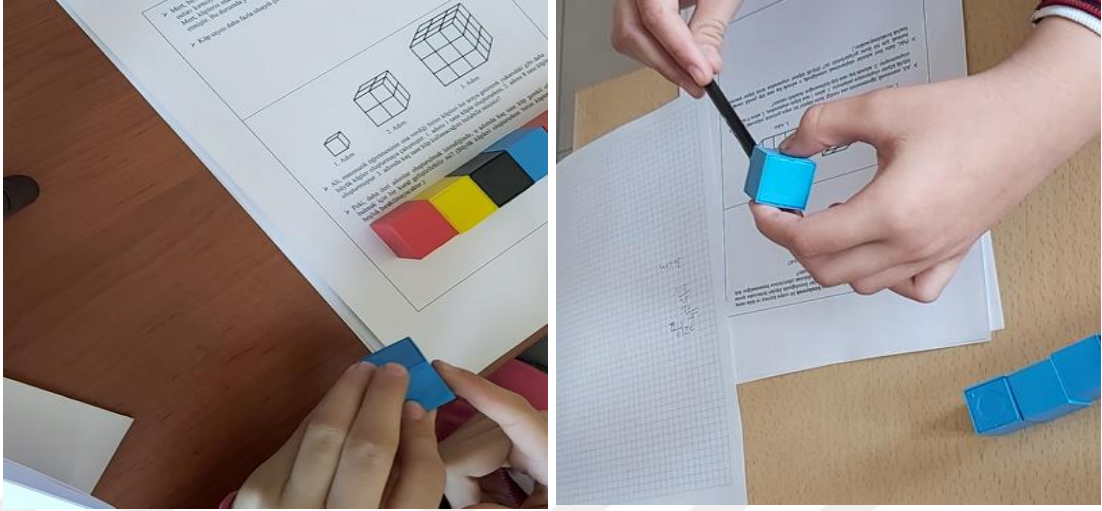
Beşinci ve altıncı sınıf öğrencileri için hazırlanan sözel genelleme probleminde, katılımcılardan yan yana dizilen küplerin boyandıktan sonraki durumlarını düşünmeleri istenmiştir. Problemde aynı zamanda katılımcıların uzamsal düşünme becerilerini de kullanmalarının beklendiği söylenebilir. Bu problemin sonucunda altıncı sınıf öğrencilerinden elde edilen bulgular Tablo 13’te sunulmaktadır:

Tablo 13

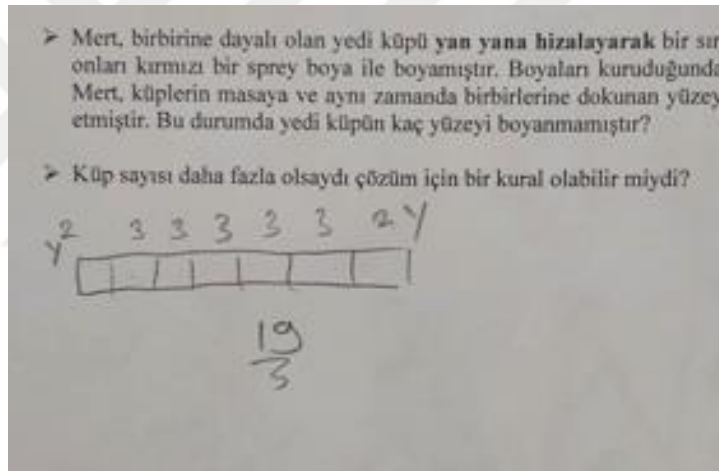
Altıncı sınıf öğrencilerinin sözel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	AÖ3, AÖ7, AÖ8
	Çizim	-
	Model	AÖ1, AÖ2, AÖ4, AÖ5, AÖ7
	Tablo	-
Görselleştirme	Dönüştürme	-
	Zihinde Canlandırma	AÖ2, AÖ4, AÖ5, AÖ7, AÖ8
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	AÖ2, AÖ4, AÖ5, AÖ7, AÖ8
	Genelleme	AÖ2, AÖ5, AÖ7, AÖ8
	Varsayımda Bulunma	AÖ5, AÖ7, AÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	-

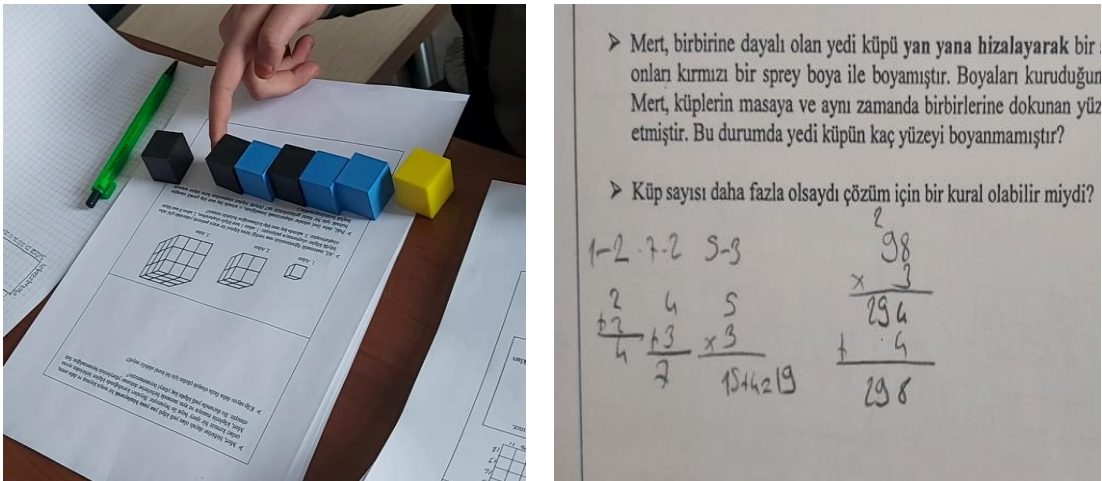
Tablo 13 incelendiğinde katılımcıların çoğunlukla resim ve model görsel temsillerini kullanarak sözel genelleme problemini çözmeye çalıştıkları anlaşılmaktadır. Katılımcılardan AÖ6 problemi çözmek için herhangi bir girişimde bulunmamıştır. Diğer katılımcılardan AÖ3 ve AÖ8 resim temsili oluştururken, AÖ1, AÖ2, AÖ4 ve AÖ5 ortamda bulunan birimküpleri kullanmışlardır. AÖ7 ise hem resim hem de model görsel temsillerini kullanmıştır. AÖ3 problemde verilenleri resmederken yaptığı temsil üzerinde görselleştirme yapamamıştır. Çünkü yaptığı temsil 2 boyutludur ancak problemde 3 boyutlu bir cisimden bahsedilmektedir. Dolayısıyla katılımcı boyutlar arası geçişi fark edememiştir. Sonuç olarak da sadece yaptığı resimdeki yüzeylerin boyanacağını düşünmüş ve 6 yüzeyin boyanmayacağını ifade etmiştir. Katılımcılardan AÖ1 ise her ne kadar problemdeki ifadeyi model kullanarak gösterse de görselleştirme yapmakta başarılı olamamıştır. Katılımcı, “*Şimdi her tarafını spreyl boya ile boyadığına göre yanları boyanmamıştır. (Saymaya başlar) 1, 2, 3, 4, 5, ..., 12, 13 yüzü boyanmamıştır (Son küpün 2 yüzünü de sayarak bir hata yapıyor). Zaten bana da kaç yüzeyi boyanmamıştır diye soruyor o yüzden 13.*” şeklinde bir cevap vererek küplerin sadece yan yüzlerinin boyanmayacağını düşünmüştür. Küplerin alt yüzlerinin de boyanmayacağını fark edememiştir. Katılımcıların problem çözümlerinde kullandıkları görsel temsiller ve problemi çözme süreçleri şu şekildedir:



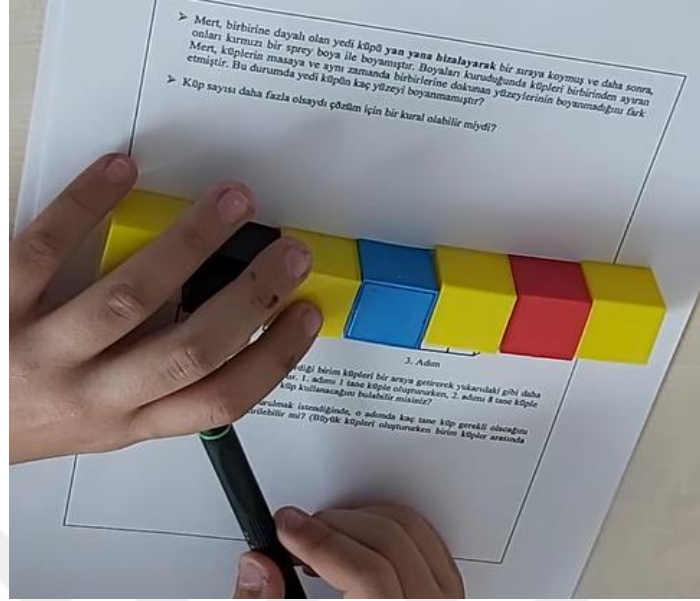
Şekil 69. AÖ1 ve AÖ2'nin sözel genelleme problemini çözme süreçlerinden kesitler



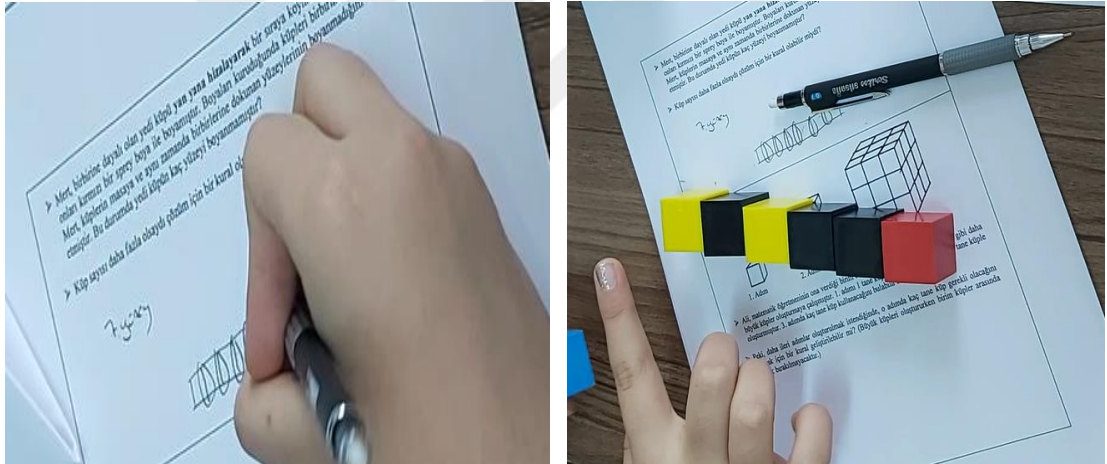
Şekil 70. AÖ8'in sözel genelleme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil



Şekil 71. AÖ5'in sözel genelleme problemini çözme süreci



Şekil 72. AÖ4'ün sözel genelleme problemini çözme sürecinden bir kesit



Şekil 73. AÖ7'nin sözel genelleme problemini çözme süreci

AÖ2, AÖ4, AÖ5 ve AÖ7 yukarıdaki şekillerde görüldüğü gibi görsel temsil oluşturduktan sonra zihinde canlandırma yaparak görselleştirme yapmışlardır. AÖ8 ise problemin okuduktan sonra “İç yüzeyleri ile alt yüzeyleri boyanmamış olacak. Yani dıştakilerin 2 yüzeyi ortadakilerin ise 3 yüzeyi boyanmamış olacak.” şeklinde bir söylemde bulunarak ilk önce zihinde canlandırma yaptığını göstermiştir. Katılımcı daha sonra Şekil 70'deki resim temsilini yaparak problemin ilk adımını yanıtlamıştır. Bu sayede katılımcı özelleştirmeyi tamamlamıştır. Problemin devamını okuduktan sonra ise “Bence yine fark etmezdi.” ifadesi ile bir varsayımda bulunduğu kabul edilmiştir. Bu doğrultuda problemi

çözmüş ve “En dıştakilerin 2 yüzeyi ortadakilerin 3 yüzeyi boyanmayacak.” şeklinde bir genelleme yapmıştır.

Katılımcılardan AÖ4, Şekil 72’de görüldüğü gibi problemin ilk kısmını modeller sayesinde bularak özelleştirme yapmıştır. Ancak problemin ikinci kısmına yönelik bir ilerleme yapamamıştır. Bir diğer katılımcı AÖ2 de modellerden faydalananak yan yana sıralanan 7 tane küpün nerelerinin boyanacağını bulmuştur. Ancak daha çok küp olduğunda genellemeye gidememiştir. 20 küp ile tekrar modelleme yapmış ve daha sonra genelleme yapmıştır. Özelleştirme yaptıktan sonra varsayımda bulunarak genelleme yapan AÖ5 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıda sunulmaktadır:

AÖ5: *Tamam. Birincisinin ve en sonuncusunun 2 yüzeyi boyanmıyor. Diğer kalan 5 tanesinin 3 yüzeyi boyanmayacak (Bunları not aldıktan sonra işlem yapar). 2 artı 2, 4. 5 ile 3’ü çarpacağım 5 kere 3, 15. 15 ile 4’ü toplarsam 19.*

A: *Evet güzel. Peki, daha çok küp olsaydı ne yapacaktık?*

AÖ5: *Sayarak.*

A: *Sayamayacağımız kadar çok küp olursa peki?*

AÖ5: *Kaç tane küp olduğunu bilirsek onları tekrar yazarak bulabiliriz.*

A: *100 tane küp var mesela ne yapacaksın?*

AÖ5: *Hepsi yan yana olursa ilk baştaki ile sonuncuya bakarız. Onların yine 2 yüzeyi boyanmamış olur. Diğer kaç tane varsa onları da çarpabiliriz.*

A: *Bunu hesaplayabilir misin?*

AÖ5: *2 sini çıkardım 98. 98 ile 3’ü çarpsam (Çarpma işlemi yapar). 294 yapıyor. Bunu da 4 ile toplayacağız 298.*

Katılımcı yaptığı özelleştirmeden faydalananak bazı varsayımlar üretmiştir. Daha çok küp olduğunda ise cevabı nasıl bulabileceğinin farkında olduğu için genelleme yaptığı kabul edilmiştir. Bir diğer katılımcı AÖ7 ile yapılan görüşme ise aşağıdaki gibidir:

AÖ7: *Şimdi 7 küp var. Hiç birinin tabanı boyanmadığı için 7 yüzey önce boyanmamış. Bunu not alayım.*

A: *Bu taban yüzeyleri mi?*

AÖ7: *Evet. Yan yana değen yüzeyleri de bulacağız. Şimdi dikdörtgen çizeyim. Onu da 7’ye böleyim. Şimdi bunların birbirine değen kaç yüzeyi var? 1, 2, 3, 4, 5, 6. O zaman 7 artı 6, 13 yüzey boyanmamış oluyor.*

A: Emin misin peki?

AÖ7: (Bir süre düşünür).

A: Tamam birbirine değen 6 yüzey var.

AÖ7: Evet bunlar boyanmamış.

A: 7 tane de tabanda var. 13 olur diyorsun.

AÖ7: Evet.

A: Peki bu problem başka nasıl çözülebilir?

AÖ7: Bilmem. Nasıl çözülebilir ki başka?

A: Sen şekil çizdin mesela. Kendine göre bir düşünme faaliyeti yaptın. Başka nasıl çözümü olabilir?

AÖ7: Küplerle yapabiliriz.

A: Tamam bir dene bakalım.

AÖ7: (Küpleri hızlıca sıraladı). Şimdi baştan düşünelim. 7 yüzey boyanmamıştı. Buralarda boyanmayacak 6 yüzey yapıyor. Aaaa (Küpleri ayırarak baktığında nerede hata yaptığını anladı). Ama bu ikisi de var. O zaman 6, 6, 12 yapacak. 12 artı 7, 19 yüzey eder.

A: Şimdi oldu işte. Çizdiğinde 1 yüzey olarak düşündün ama aslında 2 yüzey boyanmıyordu. Peki, problemin devamına da bakalım.

AÖ7: Daha çok küp olsaydı şekil ile yapamazdım. Zaten çok uzun olurdu.

A: Evet. O zaman bir şeyler düşünelim.

AÖ7: Şöyle yapabilirdik. Sondaki ile baştakinin 2 yüzeyi boyanmamış ama diğerlerinin 3 yüzeyi boyanmamış. O zaman şöyle yapabiliriz. Mesela 20 taneyse önce 2 küpü çıkarırız. 18 ile 3'ü çarpabiliriz. Sonra 2 kere 2, 4 olduğu için 4 ekleriz.

A: 100 tane küp olsaydı mesela?

AÖ7: O zamanda 98 ile 3'ü çarpardık. Sonra 4 ekledik. Kuralımız bu şekilde olacak.

Katılımcı Şekil 73'te ve yukarıdaki diyalogda da görüldüğü gibi önce resim temsili yapmış ancak boyutlar arası geçiş yapmakta zorlanmıştır. Daha sonra kullandığı modeller sayesinde zihinde canlandırma yapabilmiştir. Buradan modellerin resimsel temsillere göre daha işlevsel olduğu söylenebilir. AÖ7, görselleştirme ile birlikte problemin ilk adımını yaparak özelleştirmeyi tamamlamıştır. Sonrasında farklı sayıdaki küpler üzerinde varsayımda bulunmuş ve genellemeye ulaşmıştır.

4.2.4. Görsel genelleme problemine yönelik bulgular

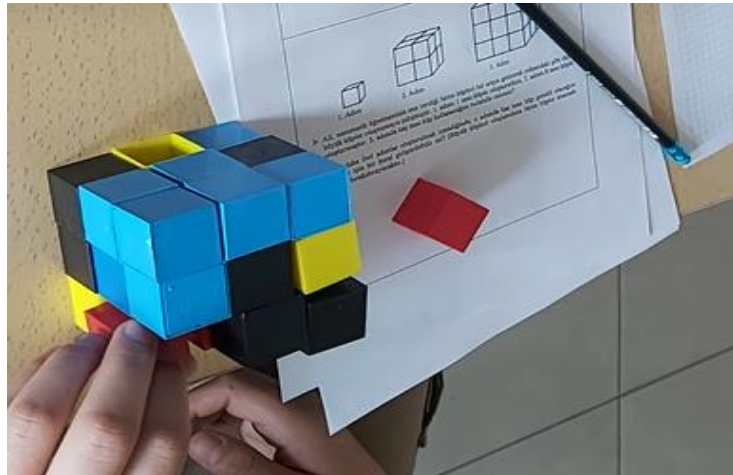
Beşinci ve altıncı sınıf öğrencileri için hazırlanan görsel genelleme probleminde, katılımcıların uzamsal düşünme becerilerini de kullanmalarının beklendiği söylenebilir. Bu probleme yönelik altıncı sınıf öğrencilerinden elde edilen bulgular Tablo 14’te sunulmaktadır:

Tablo 14

Altıncı sınıf öğrencilerinin görsel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	-
	Model	AÖ1, AÖ2, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ8
	Tablo	-
Görselleştirme	Dönüştürme	AÖ2, AÖ4, AÖ5
	Zihinde Canlandırma	AÖ1, AÖ3, AÖ6, AÖ8
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	AÖ1, AÖ2, AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ8
	Genelleme	AÖ6, AÖ8
	Varsayımda Bulunma	AÖ1, AÖ2, AÖ3, AÖ5, AÖ6, AÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	-

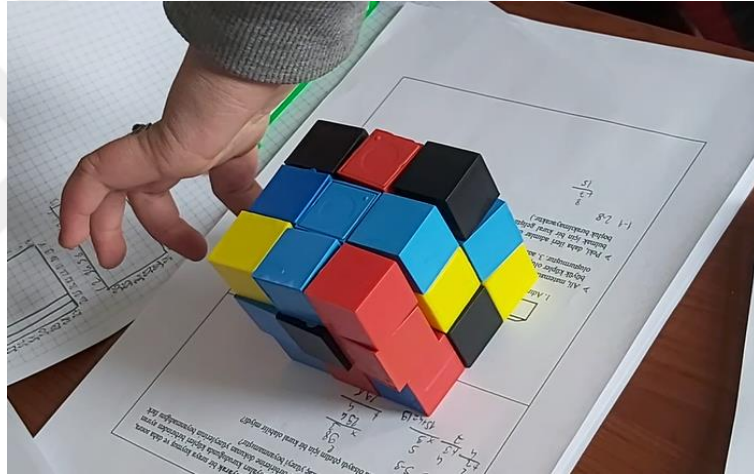
Tablo 14’e bakıldığında altıncı sınıf öğrencilerinin problemin çözümü için çoğunlukla model temsili kullandıkları anlaşılmaktadır. Katılımcılar ortamda bulunan birimküplerden faydalanarak problemdeki şekilleri oluşturmuşlardır. Katılımcılar böylelikle matematiksel düşünme göstergelerini sergilemeye çalışmışlardır. Katılımcılardan AÖ7 bu problemi çözme konusunda istekli olmamıştır. Bir başka katılımcı AÖ3 ise problemin çözümü sırasında herhangi bir görsel temsil kullanmamıştır. AÖ8 dışındaki diğer bütün katılımcılar problemin başında model kullanmışlardır. AÖ8 ise problemin ilk kısmını tamamladıktan sonra model kullanmak istemiştir. Katılımcılara ait bazı görseller aşağıda gösterilmektedir:



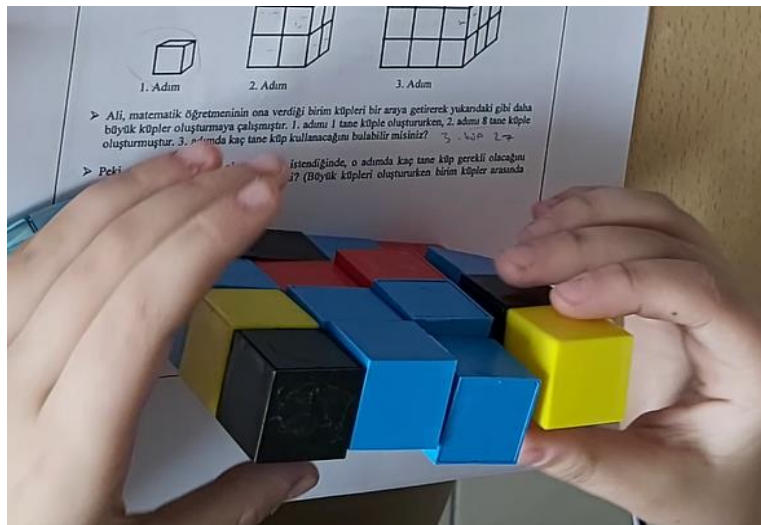
Şekil 74. AÖ2’nin görsel genelleme problemini çözme sürecinden bir kesit



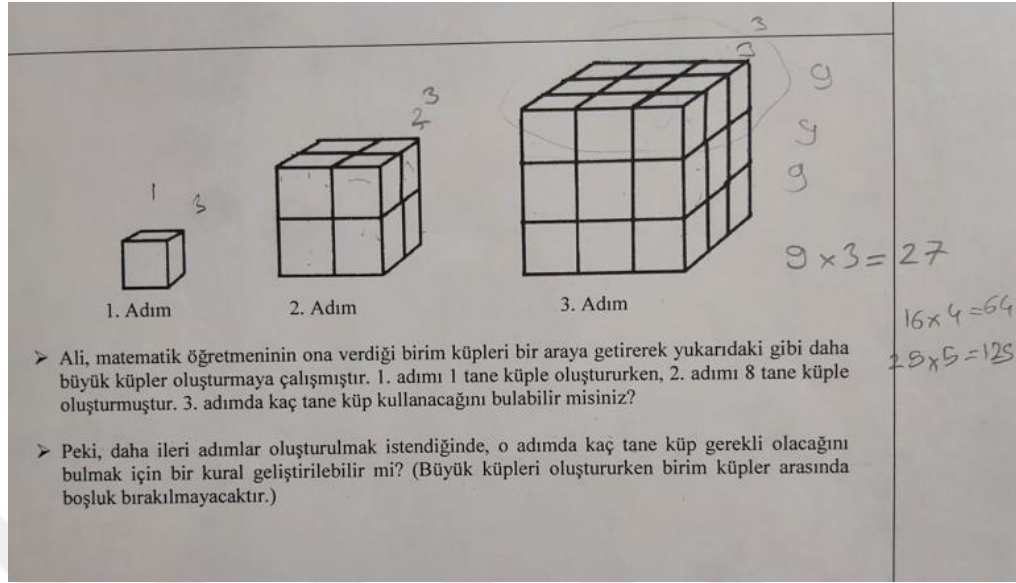
Şekil 75. AÖ4'ün görsel genelleme problemini çözme sürecinden bir kesit



Şekil 76. AÖ5'in görsel genelleme problemini çözme sürecinden bir kesit



Şekil 77. AÖ6'nın görsel genelleme problemini çözme sürecinden bir kesit



Şekil 78. AÖ8'in görsel genelleme problemini çözme süreci

Katılımcılardan bazıları görselleştirme bileşeni için oluşturdukları temsilleri, bazıları ise verilen temsilleri kullanarak dönüştürme veya zihinde canlandırma yapmışlardır. Üçüncü adımda kaç tane birimküp olduğunu bulmak için kullandığı birimküplerin tamamını tek tek sayan katılımcıların dönüştürme yaptığı kabul edilmiştir. Çünkü bu katılımcılar temsilin bütünü oluşturmuşlar ve oluşturdukları temsilden dönüşüm yapmışlardır. Bu katılımcıların temsili oluştururken zihinde canlandırma yapmadıkları kabul edilmiştir. Dönüştürme yaptığı düşünülen AÖ5 ile yapılan görüşmenin bir bölümü şu şekildedir:

AÖ5: Birimküpleri kullanarak yapsam?

A: Olur yap bakalım.

AÖ5: (3. adımı tamamlar ve oluşturduğu model üzerinden tekrar bir sayma yapar) 26 küp oluyor.

A: Emin misin?

AÖ5: Kaç tane oluyor ya? Ortada kalanı saymadım galiba (Tekrar sayma işlemi yapar) 27. Hepsini saydım.

A: Tamam probleme geri dönelim. Problemimizde 1. adımda 1, 2. adımda 8 küp varsa 3. adımda kaç tane küp olur diyordu. Sen birimküpleri kullanarak 27 buldun. Bu sayılar arasında bir ilişki var mı sence?

AÖ5: 1, 8, 27. (Şekillere odaklanarak küplerin ön yüzeylerine bakar) İlk başta ön yüzeyi 3 artmış, sonrasında 3 artmış, 2 daha artmış.

A: Peki 4. adımı sorsaydım ne olurdu?

AÖ5: Yine yüzeyleri artacak burası 4 (2. adımdan bahsediyor), burası 9 (3. adımdan bahsediyor). 9'dan 4 çıkarırdım 5. 9, 5 daha 14 bir sonraki adımda ön yüzeyinde 14 tane olurdu.

Dönüştürme yapan AÖ5 sonucu bularak özelleştirmeyi yapabilmiştir. Sonrasında ise genelleme için varsayımlarda bulunmuştur. Artış miktarına odaklanan katılımcı sistematik bir çözüm getirememiştir. AÖ2 ve AÖ4'ün de AÖ5 ile benzer bir süreç izlediği görülmüştür. Zihinde canlandırma yapan AÖ1 ile yapılan görüşmenin bir bölümü ise şöyledir:

AÖ1: Hemen bulalım. Göstermek için yine bunları kullanıyorum (Birimküpleri kast ediyor). İlk adımda 1 tane varken ikinci adımda 8 tane küp kullanmış. Yani şöyle oluyor (Birimküplerle modelleri oluşturmuştur). Bu Ali'nin birinci adımı iken bu da ikinci adımı olmuş. Kaç tane koymuş diye bakıyorum (Birimküpleri sayar). 7 tane daha yerleştirmiş. Toplamda 8 tane olmuş (Şekiller üzerine artış miktarını yazar). Buraya 7 tane küp daha koymuş. O zaman 8'e de 7 küp daha ekleriz.

A: 15 mi olur yani?

AÖ1: Bir dakika düşüneyim. Yok, 27 olabilir mi?

A: 27'yi nasıl buldun?

AÖ1: 27'yi şöyle buldum. Burada belki bir kat problemi olabilir diye düşündüm. O yüzden şöyle bir şey yaptım burada. Bu katmanı saydım (Üçüncü adımın üst yüzeyindeki birimküplerden bahsediyor). 9 tane var burada. 9 ile de 3'ü çarptığımda 27 oluyor.

A: Anladım. Problemin devamı da var sanırım.

AÖ1: (Problemin devamını okur) Bir kural geliştirilebilir belki. Şöyle bir şey yapalım. (27'den 8'i çıkartır) Burada 19 arttı. O zaman şöyle bir kural olabilir. 7 artmış sonra 19 artmış şimdi 7 artabilir mi?

A: Bilmem. Başka nasıl yapılabilir?

AÖ1: 27'nin katı olarak düşünebilir miyiz? (Bir süre düşünür ancak ilerleme gerçekleştiremez).

Katılımcı ikinci adımı modelle gösterdikten sonra üçüncü adımı model kullanmadan bulmuştur. Nasıl bulduğunu açıklayan AÖ1 böylece zihinde canlandırma yaptığını göstermiştir. Devamında özelleştirme ve varsayımda bulunma göstergelerini sergilese de

genellemeye ulaşamamıştır. Genellemeye ulaşan AÖ6 ve AÖ8'in genelleme yaptıklarına yönelik ifadeleri aşağıdaki gibidir:

“10 tane küp var diyelim şu şekilde (Küpleri yan yana dizer). 10 sıra da bunun üstünde olur ve arkasında da bunlar gibi 9 sıra daha olur. İlk baştaki ile 10 olur. Ön yüzünde 100 tane olur. 100 ile 10'u çarparsak toplam 1000 olur.” AÖ6

“4 ile 4'ü çarpacaktık. O zaman 16 olur her bir katta. 16 ile 4'ü çarparsak 64 olur. Sonra 5 kere 5, 25. Toplamda da 25 ile 5'i çarparsak 125 olur. Kural her seferinde kendisi ile kendisini çarpıp sonra tekrar kendisi ile çarpmak.” AÖ8

AÖ6, bir sonraki adımı oluşturan birimküp sayısını hesapladıktan sonra yukarıda ifade ettiği gibi daha büyük küpler üzerinde varsayımda bulunmuştur. Katılımcının burada yaptığı işlem genelleme olarak kabul edilmiştir. AÖ8 ise problemin özelleştirme aşamasını tamamlarken herhangi bir görsel temsil kullanmaya ihtiyaç duymamıştır. Verilen görselde üç kat olduğunu fark eden katılımcı zihinde canlandırma yaptığını göstermiştir. Bir sonraki adımda ise uzun bir süre düşündükten sonra model kullanarak sonucu bulmuştur. Bunun devamında da Şekil 78'deki gibi diğer adım için de sonuç bulmuş ve genellemeye varmıştır.

4.2.5. Sözel varsayımda bulunma problemine yönelik bulgular

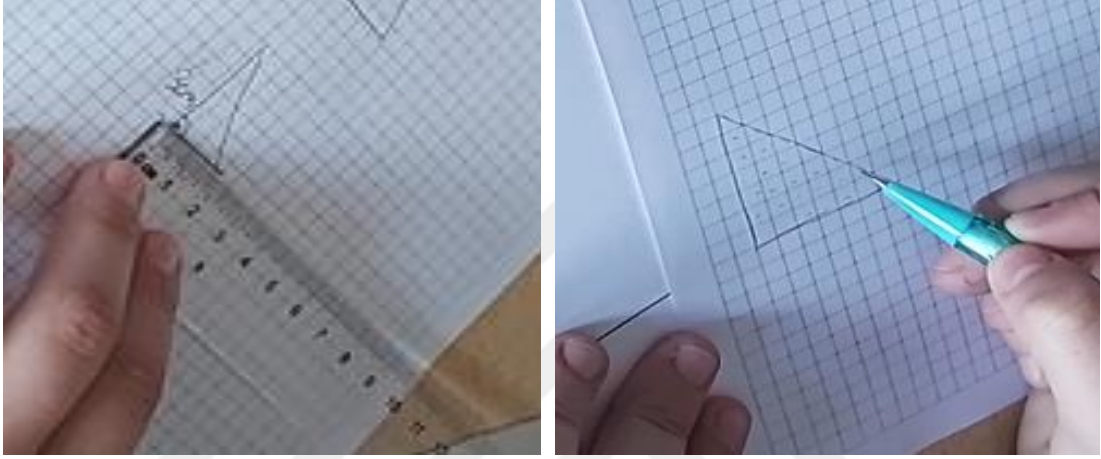
Altıncı sınıf öğrencilerine sözel varsayımda bulunma problemi için dik üçgenin alanının nasıl hesaplanabileceği sorulmuştur. Katılımcıların problemin çözümü için çeşitli görsel akıl yürütme süreçleri sergilediği söylenebilir. Sözel varsayımda bulunma probleminin çözümünden elde edilen bulgular Tablo 15'te gösterilmektedir:

Tablo 15

Altıncı sınıf öğrencilerinin sözel varsayımda bulunma problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	AÖ1, AÖ2, AÖ4, AÖ6, AÖ7, AÖ8
	Model	-
	Tablo	-
Görselleştirme	Dönüştürme	AÖ1, AÖ2, AÖ6, AÖ7, AÖ8
	Zihinde Canlandırma	AÖ1, AÖ7, AÖ8
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	AÖ1, AÖ6, AÖ7, AÖ8
	Genelleme	AÖ7, AÖ8
	Varsayımda Bulunma	AÖ1, AÖ2, AÖ7, AÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	-

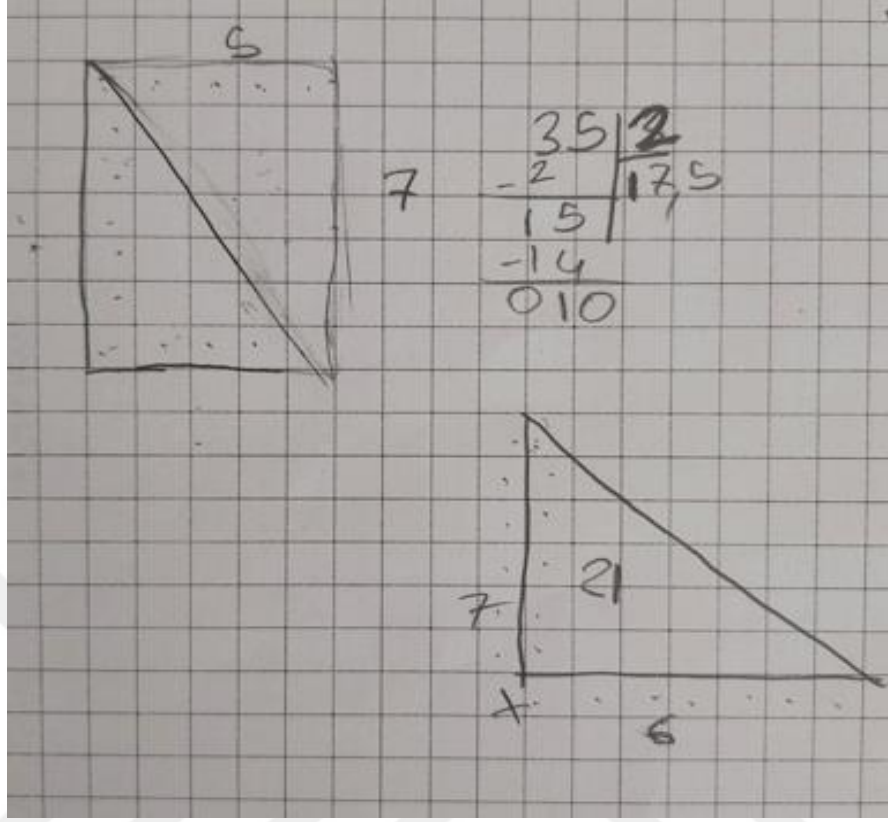
Tablo 15 incelendiğinde katılımcıların büyük çoğunluğunun problemin çözümü için çizim görsel temsilini oluşturdukları görülmektedir. AÖ3 ve AÖ5 dışındaki bütün katılımcılar problemin çözümüne yönelik girişimde bulunmuşlardır. AÖ5 üçgen çizmeye çalışsa da dik üçgen çizememiştir. Bunun öncelikli sebebi ise dik üçgene yönelik kavram yanlışlarının olmasıdır. Görsel temsil kullanan katılımcılardan bazılarının çizimleri şu şekildedir:



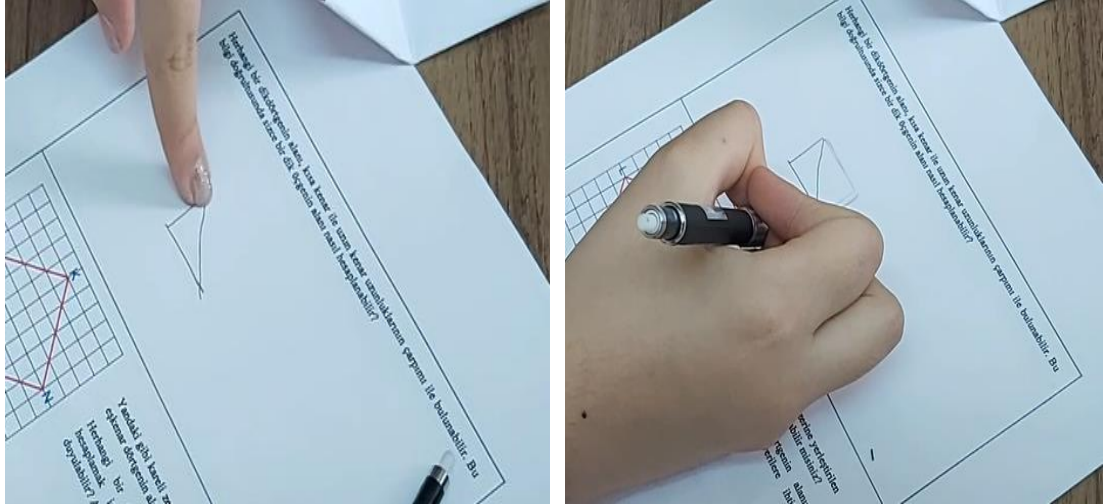
Şekil 79. AÖ2 ve AÖ6'nın sözel varsayımında bulunma problemi için oluşturdukları görsel temsiller



Şekil 80. AÖ1'in sözel varsayımında bulunma problemi için oluşturduğu görsel temsil



Şekil 81. AÖ8'in sözel varsayımda bulunma problemi için oluşturduğu görsel temsiller



Şekil 82. AÖ7'nin sözel varsayımda bulunma problemi için oluşturduğu görsel temsil

Yukarıda görüldüğü gibi çizim yapan bütün katılımcıların çoğu görsel akıl yürütmenin görselleştirme adımıyla yönelik göstergelerde de bulunmuşlardır. Görselleştirme adımıyla geçemeyen AÖ4, kareli kâğıt üzerinde bir dik üçgen çizmiştir. Birimkarelerden faydalanarak dik üçgenin alanını bulmak isteyen katılımcı, dik kenarlardan birini 7 birim diğer dik kenarı 8

birim uzunluğunda yaptığı için birimkareleri sayma konusunda zorlanmıştır. AÖ4 ile benzer bir çözüm yolu izleyen AÖ6, Şekil 79'un sağ tarafındaki gibi bir çizim yapmıştır. Bir ikizkenar dik üçgen çizen katılımcı, birimkareleri sayarak bir dönüştürme yapmıştır. Katılımcının çizdiği dik üçgenin alanını bu şekilde bulması özelleştirme olarak değerlendirilmiştir. Ancak bu duruma yönelik varsayımda bulunamaması matematiksel düşünmenin diğer göstergelerine ulaşmasını engellemiştir. Bir başka katılımcı AÖ2 ise Şekil 79'un sol tarafındaki dik üçgeni çizmiştir. Çizdiği dik üçgenin kenarlarını cetvel yardımıyla ölçen katılımcı bu şekilde bir dönüştürme gerçekleştirmiştir. Daha sonra ise kenar uzunluklarını çarparak alanın bulunabileceğini ifade etmiştir. Sebep olarak ise dikdörtgende alanın bu şekilde bulunduğunu belirtmiştir. Katılımcının bu düşüncesi bir varsayım olarak değerlendirilmiştir. Ancak çizdiği üçgenin alanını doğru bulamaması ve başka gerekçeler üretememesi sonucunda matematiksel düşünme bileşenine yönelik farklı göstergelerde bulunamamıştır.

Diğer katılımcılar AÖ1, AÖ7 ve AÖ8 görsel temsil kullandıktan sonra hem dönüştürme hem de zihinde canlandırma yapmışlardır. Bunun yanı sıra her 3 katılımcının özelleştirme ve varsayımda bulunmaya yönelik göstergeler de sergiledikleri görülmüştür. AÖ7 ve AÖ8 genellemeye de ulaşırken AÖ1 genellemeye ulaşamamıştır. AÖ1 ile yapılan görüşmenin bir bölümü şu şekildedir:

AÖ1: *Acaba burada bir dikdörtgenin alanı derken ipucu mu vermeye çalışıyor?*

A: *Problemde verdiği göre olabilir.*

AÖ1: *Evet. Bu üçgeni dikdörtgene tamamlasam böyle. Sonra kısa kenar ile uzun kenarı çarparsam alanını bulabilirim. (Çizdiği dikdörtgenin alanını hesaplamaya başlar) 5 birim burası, 4 birim de burası. Yani benim çizdiğim dikdörtgenin alanı 20 oluyor.*

A: *Peki dik üçgenin alanı ne oluyor burada?*

AÖ1: *Dik üçgeni de birimlerden yapabilir miyiz?*

A: *Daha önce öğrenmiş miydiniz dik üçgenin alanını bulmayı?*

AÖ1: *Hayır ilk kez karşılaşıyorum.*

A: *Ama bence buraya kadar güzel geldin. Biraz daha düşün bakalım.*

AÖ1: *Acaba 2'ye bölmekle olabilir mi?*

A: *Neden?*

AÖ1: *Çünkü ben dikdörtgen oluşturdum. Dik üçgende yarısından geçtiği için 10 olabilir mi acaba?*

A: Güzel doğru buldun. Peki, bu sonuç her zaman geçerli olabilir mi?

AÖ1: (Bir süre düşünür) Her zaman geçerli olmaz. Çünkü dik üçgeni büyükte yapabilirler küçükte yapabilirler.

Katılımcı üçgen çizdikten sonra çizdiği üçgeni dikdörtgene tamamlamıştır. Katılımcının bu yaptığı da zihinde canlandırma olarak değerlendirilmiştir. Daha sonra ise önceki bilgilerini kullanarak dikdörtgenin alanı bulmuş ve bu şekilde bir dönüştürme yapmıştır. Görselleştirmeyi yapan katılımcı üçgenin alanını bulmak için “Acaba 2’ye bölmekle olabilir mi?” sorusunu sorarak bir varsayımda bulunmuştur. Çizdiği üçgenin alanının dikdörtgenin alanının yarısına eşit olacağını belirten katılımcı böylece özelleştirme yapmıştır. Ancak sadece bu durum için geçerli olduğunu ifade etmesi genelleme yapamadığını göstermektedir. AÖ7 ve AÖ8 de AÖ1’e benzer performans sergilemişlerdir. Mesela; AÖ7 öncelikle dik kenarların çarpılarak bulunacağını belirterek bir varsayım üretmiştir. Sonrasında ise Şekil 82’deki gibi çizdiği üçgeni dikdörtgene tamamlarken “Aaaa buldum şu ikisini çarparız sonucu ikiye böleriz.” ifadesi ile temsil üzerinde görselleştirme yapmıştır. Yine bu katılımcılar AÖ1’den farklı olarak bütün dik üçgenlerin alanının bu şekilde bulunabileceğini ifade ederek genellemeye varmışlardır. AÖ8, Şekil 81’deki gibi farklı üçgenler üzerinde bu durumu göstermiştir.

4.2.6. Görsel varsayımda bulunma problemine yönelik bulgular

Eşkenar dörtgenin alanını hesaplama ile ilgili olan görsel varsayımda bulunma problemini altıncı ve yedinci sınıf öğrencilerinin yanıtlamaları istenmiştir. Bu problemin çözümü için altıncı sınıf öğrencilerinden elde edilen bulgular Tablo 16’da sunulmaktadır:

Tablo 16

Altıncı sınıf öğrencilerinin görsel varsayımda bulunma problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	AÖ7, AÖ8
	Model	-
	Tablo	-
Görselleştirme	Dönüştürme	AÖ2, AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ7, AÖ8
	Zihinde Canlandırma	AÖ5, AÖ7, AÖ8
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	AÖ2 AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ7, AÖ8
	Genelleme	AÖ7
	Varsayımda Bulunma	AÖ5, AÖ7, AÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	AÖ7

Tablo 16'ya bakıldığında katılımcıların görsel varsayımda bulunma probleminin çözümü için problemde verilen görseli kullanarak dönüştürme yaptıkları anlaşılmaktadır. Katılımcıların kareli zemin üzerinde bulunan eşkenar dörtgenin alanını, şeklin kapladığı birimkareler yoluyla hesaplaması dönüştürme olarak kabul edilmiştir. Nitekim ilk kez böyle bir problemle karşılaşan öğrencilerin önceden bildikleri bu yöntemi kullanmaları doğal karşılanmıştır. Bu noktada katılımcılardan sadece AÖ1 birimkareleri doğru sayamamış ve dolayısıyla görselleştirme yapamamıştır. Bununla birlikte bu katılımcıların dönüştürme sonucunda problemin ilk adımını hesaplamaları, özelleştirmeyi de gerçekleştirdiklerini göstermektedir. Bu durumu AÖ5 ile gerçekleşen aşağıdaki diyalog örneklendirmektedir:

A: Bulabilir miyiz eşkenar dörtgenin alanını?

AÖ5: İçindeki yerleri sayabilirim (Birimkarelerden bahsediyor).

A: Tamam hesaplayalım.

AÖ5: (Saymaya başlar. 2 üçgenin 1 birimkareye eşit olacağının farkındadır)

Burası 1, 3, 5. Burası 7. Burada da 7. Burası 5, 3, 1 olacak. Toplarsam 1, 3 daha 4. 4, 5 daha 9... 28, 3 daha 31. 31, 1 daha 32.

Diğer katılımcılar da AÖ5 ile benzer bir çözüm gerçekleştirmişlerdir. Daha sonra problemin ikinci adımında katılımcılara, “Herhangi bir eşkenar dörtgenin alanını hesaplamak için hangi verilere ihtiyaç duyulabilir?” sorusu yöneltilerek katılımcıların varsayımlar üretmeleri beklenmiştir. Katılımcılardan sadece AÖ5, AÖ7 ve AÖ8 problemin devamında farklı göstergeler sergilemiş ve varsayımda bulunmuşlardır. Katılımcılardan AÖ5 ile gerçekleşen diyalogun devamı aşağıdaki gibi sürmüştür:

A: Tamam ilk sorumuzun cevabını bulduk sanırım.

AÖ5: Evet 32 (Problemin devamını okumaya başlar).

A: Sana böyle bir şekil vermediğinde herhangi bir eşkenar dörtgenin alanını nasıl hesaplayabilirsin?

AÖ5: İçindeki kareleri vermediğinde mi mesela?

A: Verdiği durumda olabilir vermediği durumda olabilir.

AÖ5: Verdiği durumda yine birimkareleri sayarım.

A: Peki birimkareleri vermezse ne yapacaksın?

AÖ5: Vermezse kendim birimkareler çizerim.

A: Anladım. Peki, birimkareleri hiç kullanmadan çözüm olabilir mi?

AÖ5: (Biraz düşünür) Yarıya bölebilirim.

A: Nasıl yani?

AÖ5: Yarıya bölersem iki tane üçgen elde ederim. Onların alanlarını bulursam bunu da bulabilirim.

AÖ5 ile yapılan görüşme sonucunda katılımcının birimkarelere çok bağlı olduğu anlaşılmıştır. Devamında ise eşkenar dörtgeni, 2 üçgene ayırması zihinde canlandırma yapma olarak değerlendirilmiştir. Üçgenlerin alanlarını ayrı ayrı bulduktan sonra toplayarak eşkenar dörtgeni hesaplama fikri ise varsayımda bulunduğu işaret etmektedir. Ancak üçgenin alanını nasıl hesaplayacağı ile ilgili herhangi bir girişimde bulunmaması sonucu ilerleme gösterememiştir. Varsayımda bulunma göstergesini sergilemeyen katılımcıların da birimkarelere çok bağlı kaldıkları görülmüştür. Bu katılımcılardan bazıları ise eşkenar dörtgenin alanının kare ve dikdörtgendeki gibi kenar uzunlukları çarpımı ile bulunabileceğini ifade ederek bu konuda sık karşılaşılan bir kavram yanılgısını sergilemişlerdir.

Bütün matematiksel düşünme göstergelerini sergileyen AÖ7 ile yapılan görüşmenin bir bölümü şu şekildedir:

A: Sonucu 32 birimkare olarak buldun. Ama alanı başka nasıl bulabilirsin?

AÖ7: Bu şeklin yarısı üçgen oluyor.

A: Nasıl yarısı?

AÖ7: Şöyle (Eşkenar dörtgenin bir köşegenini çizdi).

A: Tamam. Ama üçgenin alanını bulmayı bilmiyorsun.

AÖ7: Şuradan da bölersem dik üçgenler oluyor (Diğer köşegeni de çizdi).

A: Güzel. Bir şeyler yakaladın mı acaba?

AÖ7: Bu şekilde böldüğümde 4 dik üçgen oldu. Biraz önce ne dedik (Üstteki soruda öğrendiğini kullanıyor). Dik kenarları çarpıp 2'ye bölüyorduk. O zaman şöyle yapabilirim. Şu ikisini çarpıp 2'ye bölerim (Eşkenar dörtgenin içindeki bir üçgenden bahsediyor). Şu ikisini çarpıp 2'ye bölerim. Şu ikisini çarpıp 2'ye bölerim. Şu ikisini çarpıp 2'ye bölerim.

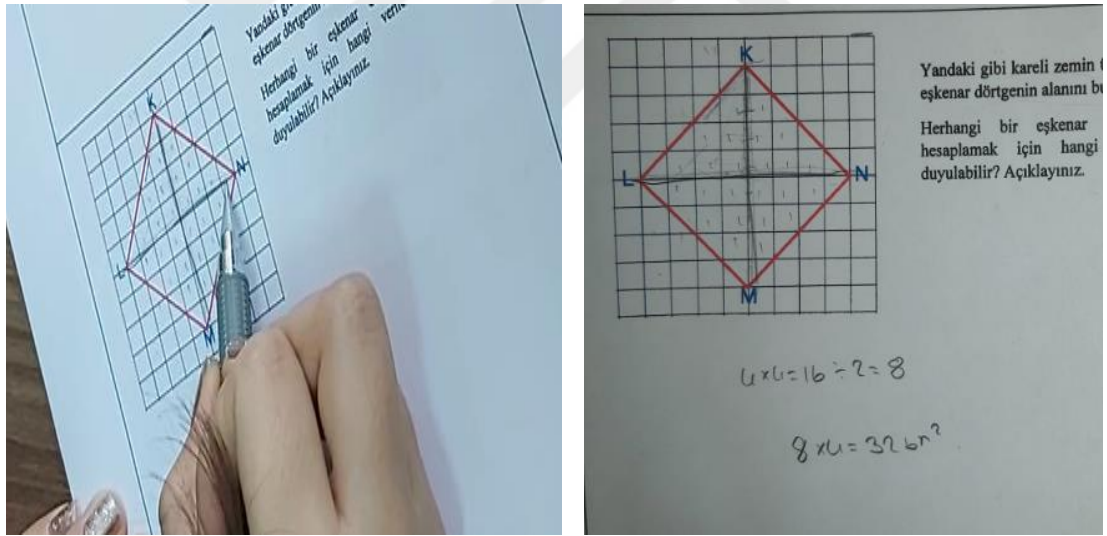
A: Çok güzel yap istersen bakalım 32 çıkacak mı?

AÖ7: Tamam. 1, 2, 3, 4 birim var. 1, 2, 3 burada da 4 birim var. 4 kere 4, 16. 16 bölü 2, 8 oluyor. Her bir üçgenin alanı 8 birimkare. 8 kere 4 de 32 oluyor. Aaa bulduk.

A: Evet harikası. Birimkareleri saymanın dışında bir kural elde ettin. Nasıl ifade edebilirsin bunu bana?

AÖ7: Eşkenar üçgeni 4'e bölerim dik üçgenler olur. Dik üçgenlerin alanlarını toplayarak bulabilirim.

Görüldüğü gibi AÖ7 öncelikle zihinde canlandırma yapmış sonrasında ise ek çizimler yaparak görsel temsil kullanmıştır. Daha sonra ise bir önceki problemde keşfettiği dik üçgenin alanını hesaplama kuralının burada uygulanabileceğini düşünmüştür. Katılımcı bu şekilde kavramlar arasında bir ilişkilendirme yaparken aslında bir varsayımda bulunmaktadır. Bununla birlikte yaptığı işlemlerle varsayımını doğrulamıştır. Görüşmenin sonunda ise diğer eşkenar dörtgenlerin alanını da bu şekilde hesaplayabileceğini ifade etmesi genellemeye ulaşma olarak görülmüştür. AÖ7'nin problem çözme sürecine ait görseller Şekil 83'te sunulmaktadır:



Şekil 83. AÖ7'nin görsel varsayımda bulunma problemini çözme süreci

AÖ8 de AÖ7'ye benzer bir süreç gerçekleştirmiştir. Öncelikle görsel olarak sunulan şeklin içinde üçgenler olduğunu vurgulayarak zihinde canlandırma yapmıştır. Sonrasında ise problemde verilen eşkenar dörtgenin bir köşegenini çizerek üçgenlerin toplamı ile bulunabileceğini iddia etmiştir. Nitekim bu iddiası varsayımda bulunma olarak değerlendirilmiştir. AÖ7 dik üçgenin alanından yola çıkarak ilerleme gerçekleştirirken, AÖ8 üçgenin alanını henüz öğrenmediği için başka bir gösterge sergileyememiştir.

4.2.7. Sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik bulgular

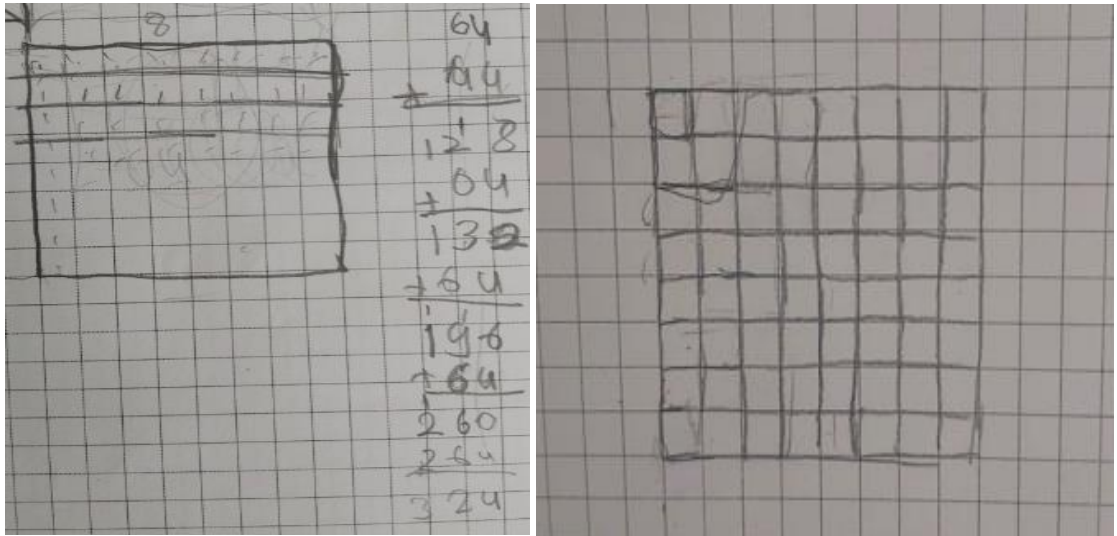
Tüm sınıf seviyelerine yöneltilen sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik altıncı sınıf öğrencilerinden elde edilen bulgular Tablo 17’de gösterilmektedir:

Tablo 17

Altıncı sınıf öğrencilerinin sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

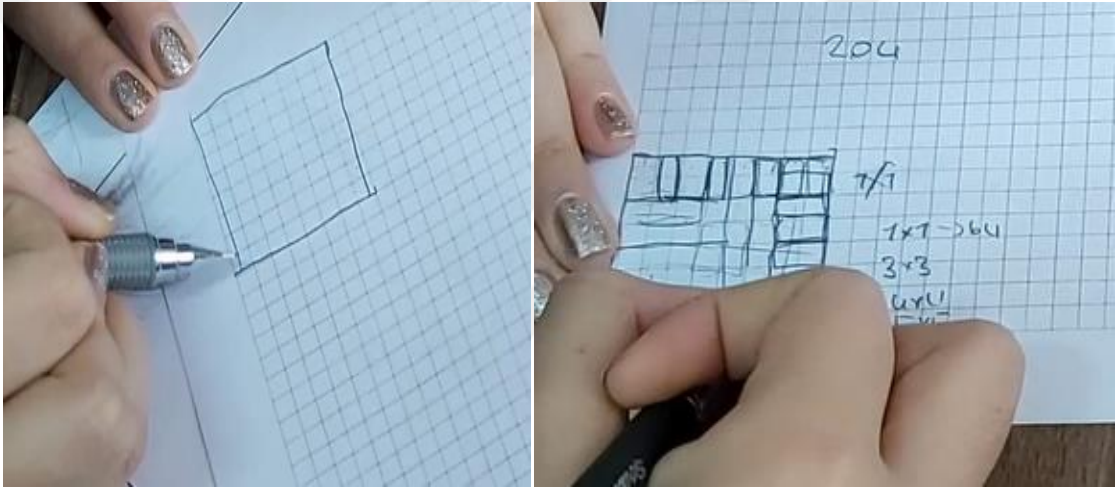
Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	AÖ1, AÖ5, AÖ6, AÖ7, AÖ8
	Model	-
	Tablo	AÖ8
Görselleştirme	Dönüştürme	AÖ7, AÖ8
	Zihinde Canlandırma	AÖ7, AÖ8
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	AÖ7, AÖ8
	Genelleme	AÖ7, AÖ8
	Varsayımda Bulunma	AÖ7, AÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	AÖ7, AÖ8

Tablo 17 incelendiğinde altıncı sınıf öğrencilerinin yaklaşık yarısının sözel doğrulama ve ikna etme probleminin çözümü için gerekli girişimlerde bulunduğu görülmektedir. Katılımcılardan AÖ1, AÖ5, AÖ6 ve AÖ7’nin problemin çözümü için sadece çizim temsili oluşturduğu görülmüştür. AÖ8 ise hem çizim temsilini hem de tablo temsilini kullanmıştır. Bu katılımcılardan sadece AÖ7 ve AÖ8 görsel akıl yürütmeye yönelik diğer bileşenleri de sergilemiştir. Katılımcılardan AÖ1 ve AÖ6’nın oluşturdukları görsel temsiller şu şekildedir:



Şekil 84. AÖ1 ve AÖ6’nın oluşturdukları görsel temsiller

Katılımcılardan AÖ1, Şekil 84'te görüldüğü gibi problemin başında bir görsel temsil oluşturmuştur. Ancak daha sonra görselleştirme yapamadığı için problemin çözümüne yönelik bir adım geliştirememiştir. Şu şekilde; "8 kere 8, 64. Burada 64 tane olması lazım. Neden 204 diyor? Acaba 204, 64'ün katı mı? Şöyle bir deneyeyim. Olmuyor zaten. 196-260-324 oldu." yaptığı açıklama da görselleştirme yapamadığını göstermektedir. AÖ5 ve AÖ6 da çizim temsili oluşturmalarına rağmen ilginç bir şekilde çizdikleri şekil üzerindeki diğer karelerin farkına varamamışlardır. Onlarda görselleştirmeyi gerçekleştirememişler ve dolayısıyla bir matematiksel düşünme göstergesi sergilememişlerdir. Katılımcılardan AÖ7'nin sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözüm süreci Şekil 85'te sunulmaktadır:



Şekil 85. AÖ7'nin sözel doğrulama ve ikna etme problemini çözüm süreci

Katılımcı, Şekil 85'teki gibi önce satranç tahtasının bir çizimini yapmıştır. Daha sonra ise oluşturduğu çizim üzerinde çalışmalarına devam etmiştir. AÖ7 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir bölümü aşağıdaki gibidir:

AÖ7: Sanırım buldum. Şimdi tahtanın kendisi zaten 1 kare. Şöyle karelerde olur (2 birimlik bazı kareleri gösteriyor). Buradan da büyük bir kare olur (3 birimlik bir kareyi gösteriyor). Bir sürü kare olur. Çok mantıklı bir şey. Önce 1 birimliklere bakalım 64 tane var. Kendisi de 1 kare. 1 kenarı 8 birim olan 1 tane kare var yani. Diğerlerini de bulmaya çalışalım. 3 çarpı 3 var, 4 çarpı 4 var. 5 çarpı 5 var, 6 çarpı 6 da var. Hepsinden var (Şu an özelleştirme yok, rastgele kareler buluyor).

A: 204'e ulaşmak kolay değil.

AÖ7: Bir sürü kare var. Ortadan başlasak, köşeden başlasak bir sürü yani.

A: Sen bir şeyler buldun aslında. Ama rastgele yaparak da bir yere varamayabiliriz.

AÖ7: Burada bir sürü var (Başka kareleri de bulmaya devam ediyor). Çok uzun sürer bunları bulmak.

A: Ne yapabiliriz peki?

AÖ7: 1 çarpı 1 olan 64 tane. 3 çarpı 3'ten kaç tane var? 8 çarpı 8 olan 1 tane var. O zaman şunu söyleyebiliriz en fazla 8 birimlik kare var. Neden doğru olduğunu nasıl açıklayabilirim? Bulamadım.

A: Tekrar düşünelim bakalım.

AÖ7: İlk satırda 2 birimlik 4 tane var.

A: Ondan emin misin?

AÖ7: (Tekrar bakar) Ama bu da 2 birim (Özelleştirme yapmaya başladı).

A: Güzel. Bak farklı bir şey buldun.

AÖ7: Şöyle 2 birimlik var. Burada da var. Böyle devam ediyor. 7 tane oldu (İlk iki satırdaki 2 birim büyüklüğündeki karelerden bahsediyor). Şöyle var (Diğer dik kenar üzerinden saymaya başlar). Şurada da 2 birimlik var. 7 tane var. Burada da 7, burada da. Toplam kaç tane 2 birimlik var? O zaman 7 kere 7, 49 ediyor. 49 tane 2 birimlik var.

A: Güzel. 1 birimlik 64, 2 birimlik 49 tane oldu. Bu şekilde 204'e ulaşabiliriz.

AÖ7: Evet. Acaba bir kural mı var? (Bir süre düşünür) Neyse 3 birimlik olanlara geçeyim. (Başka bir şekil çizip oradan devam ediyor). Burada bir tane 3 birim var (Köşeden başladı). Şöyle de 3 birim var. Şurada da var 3 oldu. 4, 5, 6 tane var. Burası da aynıdır çünkü kare (Diğer kenar üzerindikilerden bahsediyor).

A: Mantıklı. O zaman 3 birimlik kare kaç tane olacak?

AÖ7: 3 birim olan 36 tane olacak. 1 dakika belki bu bulduklarım arasında bir ilişki bulabilirim. 49'dan 64'e 15 artıyor. Burada da mı 15 olacak (49 ile 36'ya bakıyor.). Hayır 15 değil. 49 eksi 36, 13.

A: Demek ki dediğin gibi olmadı.

AÖ7: Belki 11 olur şimdi. Bundan 11 azalırsa, 25 tane 4 birimlik kare olur.

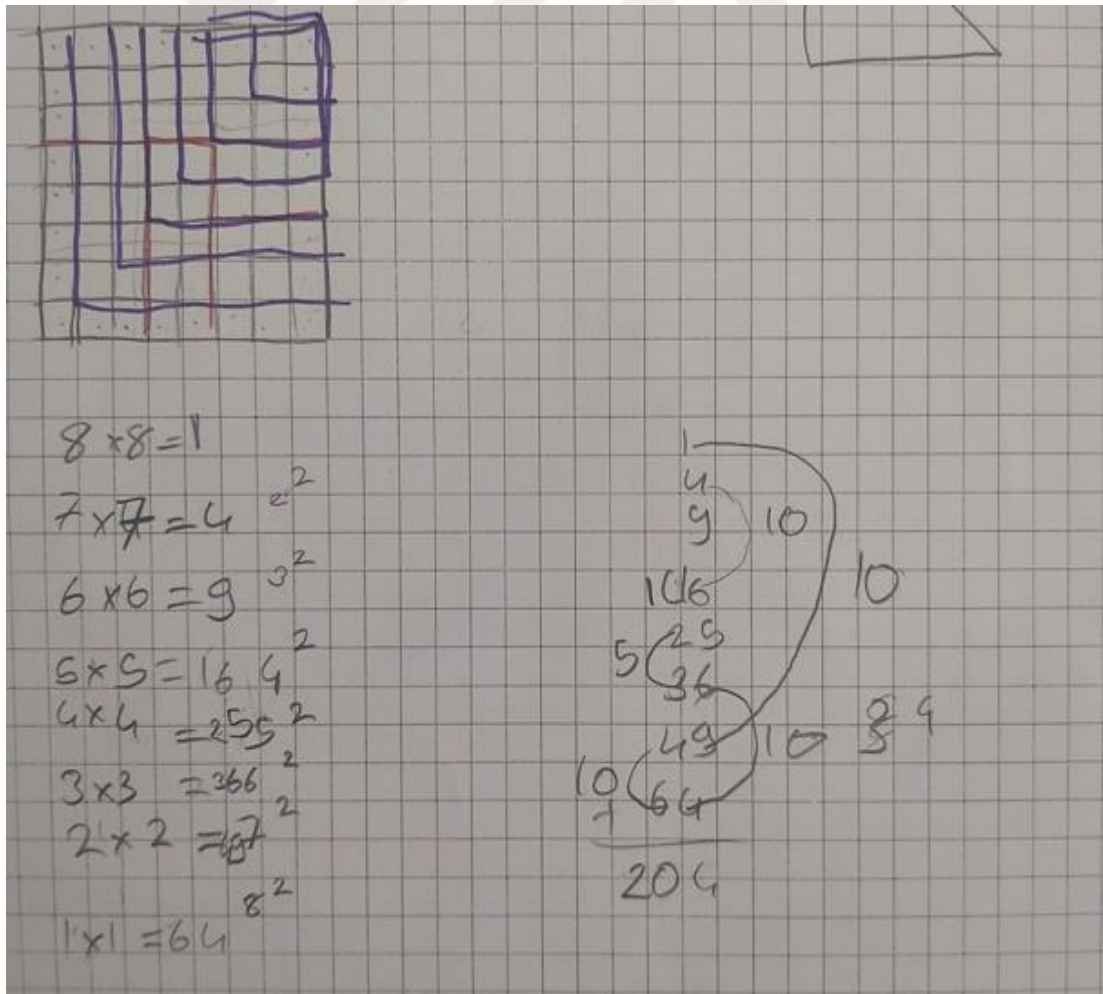
A: 5 birimlik kare kaç tane olur?

AÖ7: 5 birimlik kare de... Şimdi burada 11 oldu 25'ten 9 çıkarırsak 16 olur. Bir sonrakinde 7 azalacak 9 olacak. Bir sonrakinde de bu sefer 5 azalacak 4 olacak. Ondan da 3 çıkaracağız 1 olacak.

A: Zaten o da 8 birimlik kare oluyordu.

AÖ7: Evet. O zaman toplayalım. 64, 49, 36, 25, 16, 9, 4 ve 1. (Toplama işlemini yapar) 204 oldu.

AÖ7 çizimi üzerinde düşünürken diğer karelerin olabileceğini de fark etmiştir. Katılımcının diğer kareleri göstermesi zihinde canlandırma yaptığını göstermektedir. Daha sonra farklı birimlerdeki kareleri bulmayı çalışırken temsil üzerindeki yatay ve dikey sütunları hesaba katarak işlemler yapması ise dönüştürme olarak değerlendirilmiştir. Katılımcının bu adımları tamamladıktan sonra 2 birim ve 3 birim büyüklüğündeki kare sayılarını bulması özelleştirme yaptığına dair bir kanıttır. Özelleştirmeyi yaptıktan sonra kare sayıları arasında farka ilişkin yaptığı sorgulamalar da varsayımda bulunma olarak değerlendirilmiştir. Bununla birlikte katılımcı, bir genellemeye ulaşmış ve problemde isteneni doğrulamıştır. Matematiksel düşünme bileşenlerinin tamamını sergileyen AÖ8'in çözüm süreci de Şekil 86'daki gibidir:



Şekil 86. AÖ8'in sözel doğrulama ve ikna etme problemini çözüm süreci

AÖ8’de diğer katılımcılar gibi öncelikle satranç tahtasını temsil edecek bir çizim yapmıştır. Sonrasında ise Şekil 86’da görüldüğü gibi çizimi üzerinde çalışmalarını sürdürmüştür. Bununla birlikte AÖ8’in çizim temsiline ek olarak bulduğu değerleri sistematik olarak not alması tablo temsili olarak düşünülmüştür. AÖ8 ile yapılan görüşmenin bir bölümü şu şekildedir:

A: Ne yapabiliriz acaba bu problemde?

AÖ8: Şekil çizebiliriz (Çizim yapar). Evet, 64 kare var ama 204 nasıl olacak? Mesela şu şekilde de bir kare var (Farklı büyüklüklerde kareler çizer).

A: Çok güzel işte böyle karelerin toplamı 204 olabilir.

AÖ8: Evet mantıklı.

A: Gösterebilir misin peki böyle olduğunu?

AÖ8: Çizdiğim satranç tahtasındaki diğer kareleri de çizerek gösterebilirim. Belki hep artarak giden bir örüntü olabilir.

A: Anladım. Buradaki en büyük kare hangisi sence?

AÖ8: Dıştaki kare. 1 tane. Onun bir kenar uzunluğu 8 birim.

A: Tamam. 7 birimlik kare kaç tane sence?

AÖ8: (Kâğıda farklı açılardan bakar) 4 tane var. 6 birimliklere bakayım (Saymaya başlar). 9 tane onlardan oluyor (Buldukları üzerinden akıl yürütür. Örüntüyü hissetti). Kare özelliği olabilir mi acaba? Mesela bu 2’nin karesi, 3’ün karesi diye gitmiş. Sonraki 4’ün karesi, 5’in karesi diye gidebilir. Şimdi 5 birimlik kareler 16 tane mi diye bakalım. (Saymaya başlar)..... 8’e kadar gidiyor. (Tabloyu tamamlar ve bulduğu sayıları toplar) 204 yaptı. Yani doğru.

AÖ8’in çizim yaptıktan sonra farklı büyüklüklerdeki kareleri bulması zihinde canlandırma yaptığını göstermektedir. AÖ7’nin yaptığı gibi farklı birimlerdeki kareleri bulmayı çalışırken temsil üzerindeki yatay ve dikey sütunları hesaba katarak işlemler yapması ise dönüştürme olarak değerlendirilmiştir. Katılımcının en büyük kareden başlayarak daha küçük büyüklüklerdeki kareleri sırayla bulması da özelleştirme yaptığına bir işarettir. Özelleştirmeyi yapmasıyla birlikte problemde bir örüntünün olduğunu fark etmesi ve “Kare özelliği olabilir mi acaba?” şeklinde sorgulama yapması varsayımında bulunma olarak değerlendirilmiştir. Son olarak katılımcı bir genellemeye ulaşmış ve bulduğu değerleri tablo temsili göstermiştir. Bulduğu değerleri toplayarak problemde isteneni doğrulamıştır.

4.2.8. Görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik bulgular

Beşinci sınıf öğrencileri dışındaki bütün katılımcılardan aynı görsel doğrulama ve ikna etme problemini yanıtlamaları istenmiştir. Bu probleme yönelik altıncı sınıf öğrencilerinden elde edilen bulgular Tablo 18’de sunulmaktadır:

Tablo 18

Altıncı sınıf öğrencilerinin görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	-
	Model	-
	Tablo	-
Görselleştirme	Dönüştürme	AÖ2, AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ7, AÖ8
	Zihinde Canlandırma	
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ7, AÖ8
	Genelleme	-
	Varsayımda Bulunma	AÖ2, AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ7, AÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ7

Katılımcıların genel olarak görsel doğrulama ve ikna etme probleminin çözümü için verilen görseli kullandıkları ve ek görsel temsil kullanmadıkları ortaya çıkmıştır. AÖ1 dışındaki bütün katılımcıların verilen görsel temsil ile etkileşimde bulunarak dönüştürme yaptıkları görülmüştür. Aynı zamanda bu katılımcıların tamamı varsayımlarda bulunmuş ve büyük çoğunluğu özelleştirmeye yönelik göstergeler üretmişlerdir. Bununla birlikte katılımcıların yaklaşık yarısı varsayımlarını doğrulamaya yönelik girişimlerde bulunmuşlardır. Bu sınıf seviyesindeki en dikkat çekici sonuç, katılımcıların hiçbirinin genelleme adımı için bir çaba içine girmemesidir.

Katılımcıların problem çözme süreçlerine bakıldığında öncelikle bir varsayımda bulunmaya çalıştıkları görülmüştür. Problemi okuyan katılımcıların tamamı ise başlangıçta yanlış varsayımlarda bulunmuşlardır. Katılımcıların varsayımda bulundukları kabul edilen bazı örnek ifadeleri aşağıdaki gibidir:

“Mavilerin alanı daha fazladır. Daha fazla kare olduğu için.” AÖ4

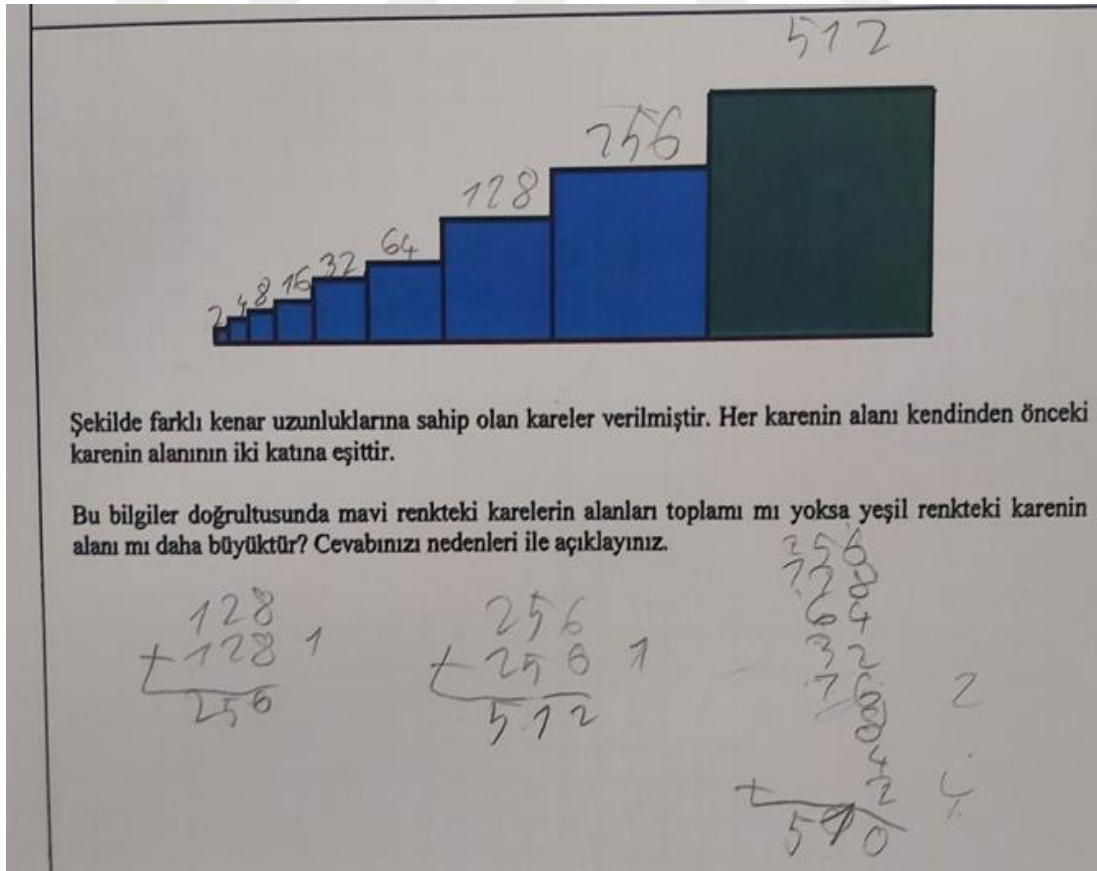
“Maviler daha büyüktür bence. Çünkü burada 1 tane yeşil kare var. Ama mavilerden bir sürü var.” AÖ5

“Bence maviler daha büyüktür. Topladıkça daha çok büyür ve yeşili geçebilir (Mavilerin birleştikçe daha büyük olacağını düşünüyor).” AÖ6

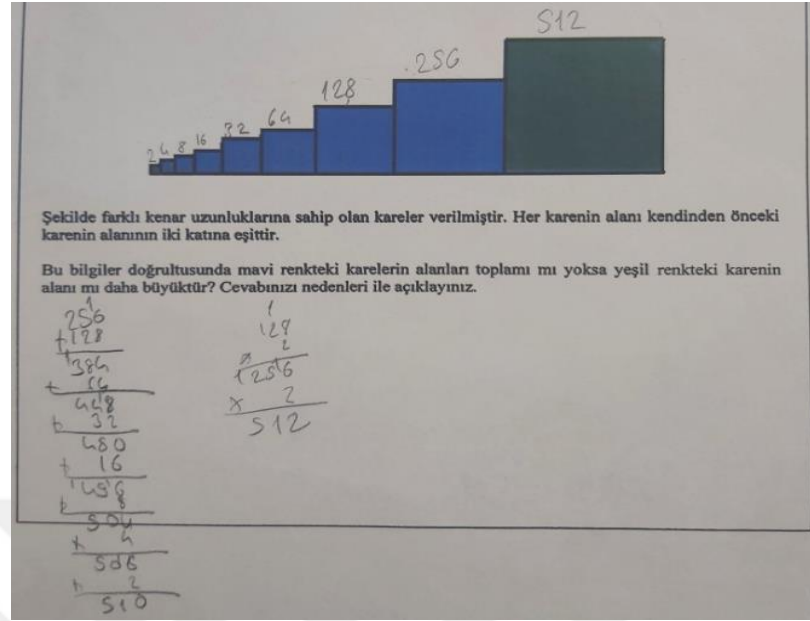
“Mavilerin toplamı daha büyük olabilir. Daha çok olduğu için alanı daha büyük gibi düşündüm. Ama olmaya da bilir.” AÖ7

“Bence mavilerin toplamı daha büyüktür. Çünkü daha fazla kare var. Belki eşitte olabilir.” AÖ8

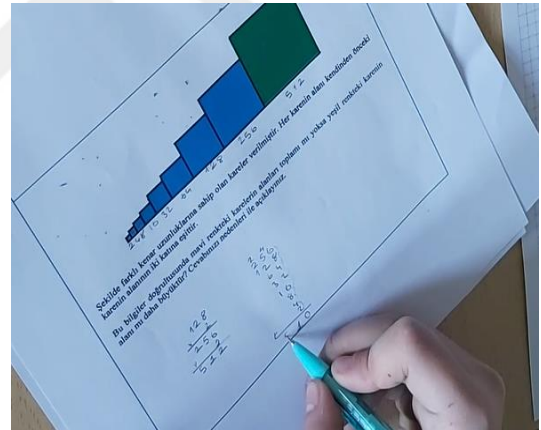
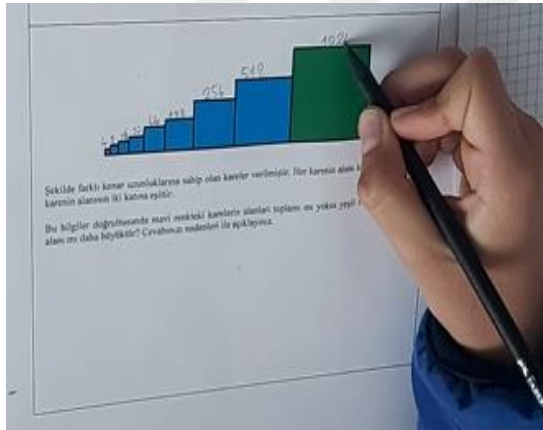
Altıncı sınıf öğrencilerinin yukarıdaki ifadelerine bakıldığında problemde verilen görselin onları yanılgıya götürdüğü görülmektedir. Katılımcılar genel olarak kare sayısı çok olan kısmın daha büyük alana sahip olacağını düşünmektedir. Problemin ilerleyen bölümlerinde yukarıdaki ifadelerini doğrulamak için katılımcıların büyük çoğunluğu karelerin alanlarına değer vermiştir. Katılımcıların bu girişimleri de varsayımda bulunma olarak değerlendirilebilir. Bazı katılımcıların çözüm örnekleri şu şekildedir:



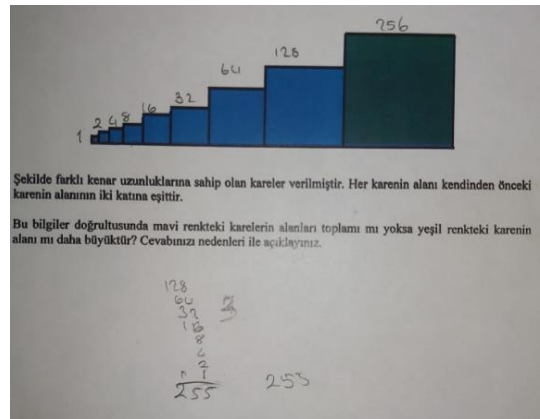
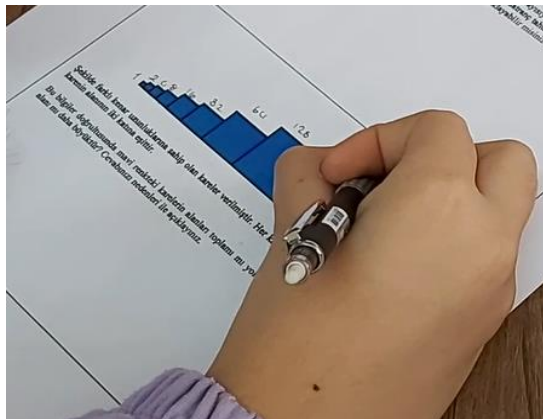
Şekil 87. AÖ4'ün görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözümü



Şekil 88. AÖ5'in görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözümü



Şekil 89. AÖ3 ve AÖ6'nın görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözümleri



Şekil 90. AÖ7'nın görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözümü.

Katılımcıların herhangi bir sayısal değer verilmemesine rağmen kendilerinin görsel temsile matematiksel bir anlam yüklemeleri dönüştürme yaptıklarını göstermektedir. Dönüştürmeyi yapan katılımcılardan, AÖ2 dışındaki katılımcılar aynı zamanda özelleştirmeyi de gerçekleştirmişlerdir. Bununla birlikte AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ6 ve AÖ7'nin doğrulama ve ikna etme adımını da tamamladığı tespit edilmiştir. Katılımcılardan AÖ1 problemi anlasa da çözüme yönelik bir akıl yürütme yapamamıştır. AÖ2 ise başlangıçta mavi karelerin toplamının büyük olabileceğini düşünmüş. Devamında mavi karelere değer vermiş ama yeşil kareye gelince aynı işlemi tekrar ettirememiştir. Sonrasında kullandığı ifadelerde yeşili nasıl bulacağını bilmediğini söylemiştir. Bununla birlikte katılımcı, problemde herhangi bir sayısal değer verilmediği için problemin çözülemeyeceğini düşünmektedir. Diğer katılımcılardan AÖ7 ile yapılan görüşmenin bir kısmı şu şekildedir:

A: *Peki nasıl açıklayabilirsin bu durumu?*

AÖ7: *En küçüğe 1 desem. Hep 2 kat olarak gidecek. 1 olur, 2 olur, 4 olur, 8 olur, 16 olur, 32 olur, 64 olur, 128 olur. 128'in de 2 katı 256. Şimdi bunların hepsini toplarsam bundan büyük olur mu olmaz mı ona bakacağım. 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1. (Toplama işlemi yapar) 255 oldu. 1 farkla küçük oldu.*

A: *Mavi kare daha çok olmasına rağmen toplamları yeşilden küçük oldu.*

AÖ7: *İlginç bir sonuç.*

Bir başka katılımcı AÖ6 ile yapılan görüşmenin bir kısmı da aşağıdaki gibidir:

A: *Bu söylediğinin doğru olup olmadığını bana gösterebilir misin?*

AÖ6: *Mesela diyelim bu 2 olsun (En küçük kareye değer verir). 2 kat 2 kat devam edeceği için 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 olur. Yeşil de 512 yapar.*

A: *Güzel, şimdi tekrar bakalım yeşil mi daha büyük maviler mi?*

AÖ6: *Burada mavilerin toplamı diyor. O yüzden mavileri toplayalım (Toplamayı yapar). Yeşil 2 fazla oluyormuş. İlk başta söylediğim yanlış çıktı.*

Görüldüğü gibi katılımcılar başlangıçta mavilerin büyük olduğunu düşünse de yaptıkları doğrulama işlemleri ile varsayımlarının yanlış olduklarını bulmuşlardır. Buldukları sonucun ise onları şaşırttığı söylenebilir. Katılımcıların tahminlerini kontrol etmek için yaptıkları işlemler doğrulama ve ikna etme göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Doğrulama ve ikna adımına ulaşan diğer katılımcılar da benzer süreçlerden geçmiştir.

4.3. Yedinci Sınıf Öğrencilerinin Geometri Problemlerinde Görsel Akıl Yürütme Becerilerinin Rolü Nedir ve Nasıldır?

4.3.1. Sözel özelleştirme problemine yönelik bulgular

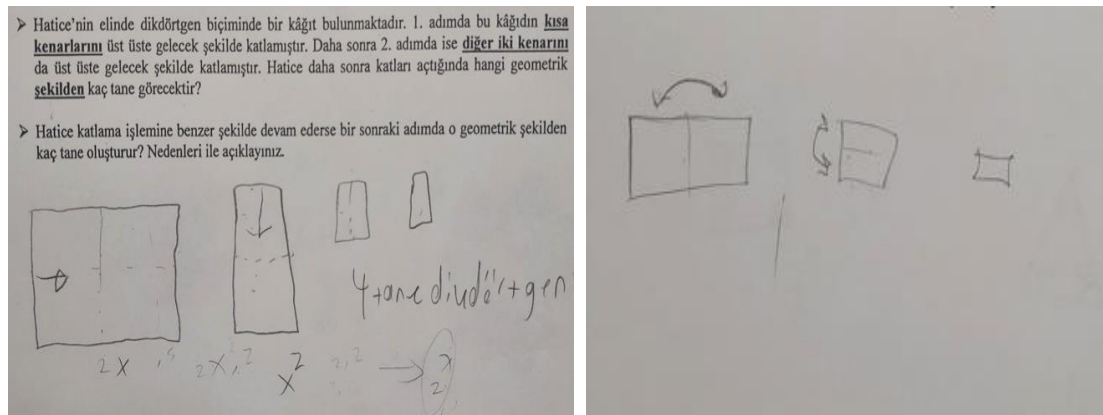
Yedinci sınıf öğrencileri için sözel özelleştirme problemine yönelik olarak diğer sınıf düzeylerinde olduğu gibi kâğıt katlama ile ilgili bir problem sorulmuştur. Bu problemde elde edilen bulgular aşağıda sunulmaktadır:

Tablo 19

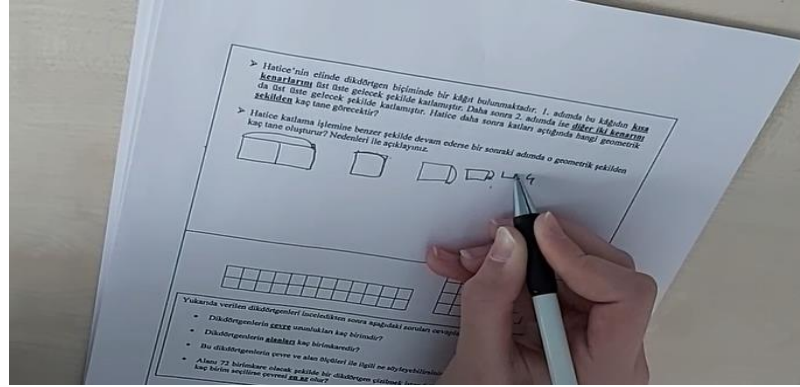
Yedinci sınıf öğrencilerinin sözel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	YÖ1, YÖ4, YÖ6, YÖ7, YÖ8
	Model	YÖ1, YÖ2, YÖ3, YÖ5, YÖ6
	Tablo	YÖ3
Görselleştirme	Dönüştürme	YÖ3
	Zihinde Canlandırma	YÖ1, YÖ2, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ6, YÖ7, YÖ8
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	YÖ1, YÖ2, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ6, YÖ7, YÖ8
	Genelleme	YÖ1, YÖ3, YÖ4, YÖ7, YÖ8
	Varsayımda Bulunma	YÖ1, YÖ3, YÖ7, YÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	YÖ3, YÖ7, YÖ8

Tablo 19'a göre yedinci sınıf öğrencilerinin sözel özelleştirme probleminin çözümü için farklı görsel temsilleri kullandıkları söylenebilir. Beşinci ve altıncı sınıf seviyeleri ile karşılaştırıldığında, yedinci sınıf seviyesinde çizim temsili kullanan katılımcı sayısı model temsili kullanan katılımcı sayısına göre artmıştır. Katılımcılardan YÖ1 ve YÖ6 hem çizim hem de model temsili kullandı. YÖ3 ise model temsili yanında tablo temsili de kullanmıştır. Öğrencilerin oluşturdukları bazı çizim örnekleri şu şekildedir:

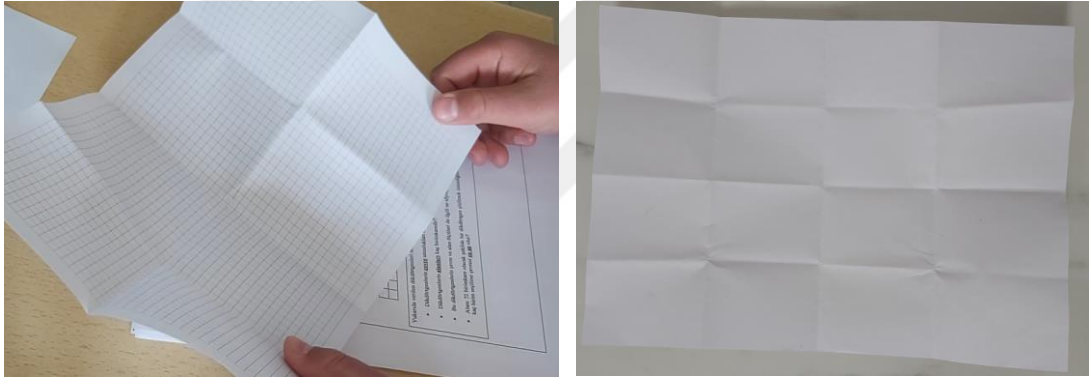


Şekil 91. YÖ4 ve YÖ7'nin sözel özelleştirme problemi için oluşturdukları görsel temsiller

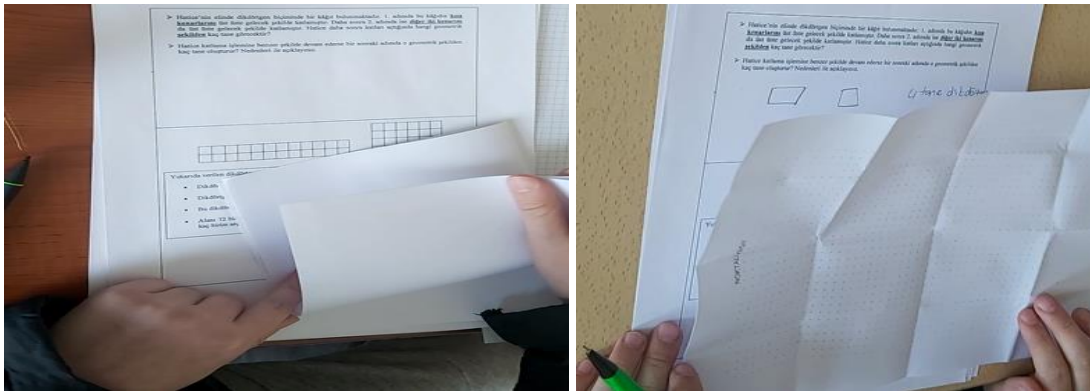


Şekil 92. YÖ8'in sözel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil

Katılımcıların kullandıkları bazı model örnekleri ise aşağıdaki gibidir:

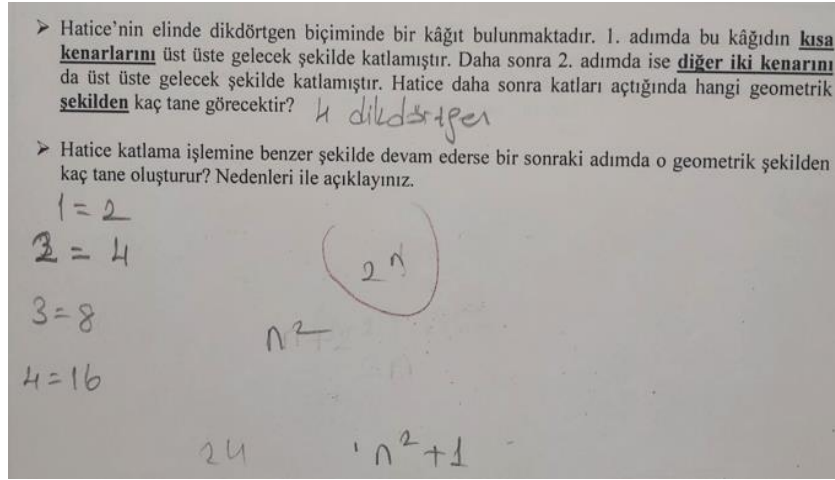


Şekil 93. YÖ2 ve YÖ5'in sözel özelleştirme problemi için oluşturdukları görsel temsiller



Şekil 94. YÖ1 ve YÖ6'nın sözel özelleştirme problemi için oluşturdukları görsel temsiller

YÖ3, problemin çözümü sırasında bulduğu değerleri sistematik bir şekilde not almıştır. Sistematik bir şekilde aldığı notlar ise her ne kadar çerçevesi olmasa da tablo temsili olarak değerlendirilmiştir. YÖ3'ün çözümü Şekil 95'te verilmiştir:



Şekil 95. YÖ3'ün sözel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil

Birtakım görsel temsiller kullanan katılımcılar aynı zamanda görselleştirme aşamasını da tamamlamışlardır. Katılımcıların tamamı zihinde canlandırma yapmışlardır. Örneğin; model kullanan YÖ1'in "İkinci adımda katladığımızda 4 tane dikdörtgen oluşturmuş olması lazım." ifadesi ile yine model kullanan YÖ5'in "Bir daha katlayacağız. Sonra açtığımızda 4 tane küçük dikdörtgen olacak." ifadesi zihinde canlandırma göstergeleri olarak kabul edilmiştir. YÖ6'nın "Kafamdaki şekli buraya yansıttım" cümlesi de yine zihinde canlandırmanın bir göstergesidir. Bir başka katılımcı YÖ2'nin de ellerini bir kâğıdı katlıyormuş gibi kullanması zihinde canlandırma olarak kabul edilmiştir. Katılımcılardan YÖ3 ise hem zihinde canlandırma hem de dönüştürme yapmıştır. YÖ3 ile gerçekleşen diyalogun bir bölümü aşağıdaki gibidir:

YÖ3: Bunu bir kâğıt alıp yapsam olur mu?. (Bir kâğıdı katlamaya başlar) Şu şekilde oluyor. Açtığımızda 4 tane dikdörtgen oluyor.

A: Sonraki adım için tahminin var mı?

YÖ3: Daha küçük dikdörtgenler elde edebiliriz. Şimdi 2 kere katladım 4 tane dikdörtgen oldu. 4 kere katlasam 2'nin kuvveti olarak düşünersek 16 olur diye düşünüyorum.

A: Göster bakalım öyle mi?

YÖ3: 8 tane oldu.

A: Bir sonraki adımda kaç olur?

YÖ3: (Kâğıdı katlamaya devam eder) 16 oldu. (Bulduklarını not alır) İlk katladığımda 2 tane idi. 2 kere katladığımda 4 tane oldu. 3 kere katladığımda 8 tane idi. 4 kere katladığımda 16 tane idi.

A: Bundan sonra ne olacak peki? Artık kâğıdı katlamak da zor olacak.

Bununla ilgili ne düşünüyorsun?

YÖ3: Beşinci kere katlasam kaç olur? (Bir süre düşünür) Hı anladım 5 kere katlasam 32 tane çıkar.

A: Çok güzel, nasıl buldun?

YÖ3: 2'nin 2 katını aldım 4. 4'ün 2 katını aldım 8. 8'in 2 katını aldım 16. 16'nın 2 katını alınca 32 oluyor. Bir sonrakinde de 64 olur.

A: Bir kural buldun mu burada?

YÖ3: (Denemeler yapar ve genel kurala ulaşır).

YÖ3 ile gerçekleşen görüşmede katılımcı problemin çözümü için öncelikle kâğıt katlamak istemiştir. Daha sonra yaptığı tahminle katılımcının hem zihinde canlandırma yaptığı hem de varsayımda bulunduğu belirlenmiştir. Tahminini doğrulayan katılımcı daha sonra bulduğu değerleri sistematik bir şekilde not alarak yeni bir görsel temsil oluşturmuştur. Böylece özelleştirmeyi de tamamlayan katılımcı, oluşturduğu tablo üzerindeki değerler üzerinde düşünerek örüntüye odaklanmış ve devamında matematiksel bir dönüştürme gerçekleştirmiştir. Daha sonra başka varsayımlarda bulunmuş ve cebirsel ifadeleri kullanarak bir genellemeye ulaşmıştır.

Sözel özelleştirme problemine matematiksel düşünme açısından bakıldığında yedinci sınıf öğrencilerinin tamamının özelleştirmeyi başardığı görülmüştür. Bu katılımcıların çoğunluğu ise genelleme adımını da gerçekleştirmişlerdir. Katılımcılardan sadece YÖ1, YÖ3, YÖ7 ve YÖ8 problem çözümleri sırasında varsayımlarda bulunurken, bu katılımcılardan YÖ1 dışındaki katılımcılar doğrulama ve ikna etmeye yönelik girişimlerde de bulunmuşlardır. Katılımcılardan YÖ8 ile yapılan görüşme aşağıdaki gibi gerçekleşmiştir:

A: Ne anladın problemde?

YÖ8: Katlama işlemi ile ilgili bir problem. Bunu çizerek yapacağım. İlk önce bir tane dikdörtgen çezeceğim. Çünkü çizerek daha iyi oluyor bence. İlk önce kısa kenarları katlıyormuş yani şu kenarı şu kenar üstüne katlıyoruz (Çizerek gösterir). Sonra şöyle bir şey oluşacak.

A: Peki bir tahminin var mı?

YÖ8: 8 tane oluşabilir ama emin değilim.

A: Tamam sen işlemi yap madem.

YÖ8: (Çizime devam eder) Önce katladığımda 2, bir daha katladığımda 4 tane oluyor. Bir daha katlarsa şöyle küçük parça olur. Bu sefer 8 tane olur.

A: Güzel, peki burada bir kural var mı sence?

YÖ8: Evet katlama yaptıkça 2 katına çıkıyor. Muhtemelen bir daha katladığımızda 16 olacak.

A: Altıncı katlamada kaç tane olur diye sorsam?

YÖ8: (Biraz düşünür) 64 tane. Dördüncü katlamada 16, beşinci katlamada 32, altıncı katlamada 64 olur.

A: Cebirsel olarak yazabilir misin peki?

YÖ8: Adım sayısı n olsun. (Biraz düşünür) Üçüncü adımda 8 oluyordu mesela. n 'e 3 desek 8 olması için 2 üssü n olabilir mi?

A: Dene bakalım oluyor mu?

YÖ8: Evet oluyor. Kuralımız buymuş.

Katılımcılardan YÖ8 problemi anladıktan sonra çizim temsili kullanarak problemin çözümüne başlamış ve ardından bir tahminde bulunmuştur. Daha sonra her katlamada oluşacak yeni şekilleri çizerek göstermiş ve sözel olarak açıklamalar yapmıştır. Bu şekilde zihinde canlandırma yaptığı tespit edilen katılımcı, bu açıklamaların devamında özelleştirmeyi tamamlamıştır. Bununla birlikte cebirsel olarak genelleme de yapan katılımcı, son olarak bulduğu genel kuralı bir adım üzerinde denemiştir. Bu yaptığı işlem de doğrulama olarak kabul edilmiştir. Matematiksel düşünme bileşenlerinin tamamını sergileyen YÖ7 ile yapılan görüşmenin bir bölümü ise aşağıdaki gibidir:

A: Sen ne düşünüyorsun?

YÖ7: Çizerek yapmaya çalışacağım. Düşündüğüm zaman aklımdan 4 geçti ama yine de çizerek görmek istiyorum (Çizimini yapar). Bu ilk hali, bu da katlanmış hali. Sonra bunu tekrar katlıyor. O zaman şöyle bir şekil oluyor.

A: Peki açtığımızda kaç tane şekil oluyor?

YÖ7: 4 oluyor. Katlamayı bölme olarak düşündüm. Yani böldüğümüz zaman onu tekrar katlıyor. O zamanda 4 tane oluyor.

A: Peki bir sonraki adımda nasıl olurdu?

YÖ7: Bunu bir daha katlasaydık 8 olurdu sanırım.

A: Nasıl bulduğunu biraz daha açıklar mısın?

YÖ7: Zihninden yaptım. Şimdi 4 tane vardı. Kâğıdı tekrar katladığımızda 2 katına çıkmış oluyor. Bu yüzden 8 tane oluyor.

A: Dördüncü katlama olsaydı peki?

YÖ7: Tekrar 2 katına çıkar 16 olurdu. Yani 2 katına çıkarak gidiyor hep. Üslü ifadeler gibi düşünebiliriz.

A: Anladım. Mesela onuncu katlamada kaç tane dikdörtgen olur diye sorsam?

YÖ7: O zaman 2 üssü 10 olur.

YÖ7 problemin çözümü için önce varsayım üretmiş ve ardından çizim yapmıştır. YÖ8 gibi çizimi üzerinden açıklamalar yaparak zihinde canlandırma yaptığı düşünülmüştür. Devamında ise varsayımını doğrulamıştır. Sonraki adımı da bulması özelleştirme olarak değerlendirilmiş ve son olarak üslü sayılarla ilişkilendirme yaparak bir genellemeye varmıştır.

4.3.2. Görsel özelleştirme problemine yönelik bulgular

Dikdörtgende çevre ve alan ilişkisi ile ilgili olan görsel özelleştirme problemi sekizinci sınıf dışındaki bütün katılımcılara yöneltilmiştir. Problemde katılımcıların verilen görsellerden yararlanarak çıkarımlar yapmaları ve bu çıkarımları farklı durumlara uyarlamaları beklenmiştir. Bu probleme yönelik yedinci sınıf öğrencilerinden elde edilen bulgular Tablo 20’de gösterilmektedir:

Tablo 20

Yedinci sınıf öğrencilerinin görsel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	YÖ3, YÖ5
	Model	-
	Tablo	YÖ4, YÖ7, YÖ8
Görselleştirme	Dönüştürme	YÖ1, YÖ2, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ6, YÖ7, YÖ8
	Zihinde Canlandırma	YÖ5
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	YÖ1, YÖ2, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ6, YÖ7, YÖ8
	Genelleme	YÖ1, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ7, YÖ8
	Varsayımda Bulunma	YÖ1, YÖ2, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ6, YÖ7, YÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	-

Görsel özelleştirme probleminde katılımcılar probleme ait ilk 3 soruyu verilen görselleri kullanarak cevaplamışlardır. Bundan dolayı ek görsel temsile ihtiyaç duymamışlardır. Nitekim Tablo 20’ye bakıldığında yedinci sınıf öğrencilerinin tamamının görsel özelleştirme problemine yönelik olarak dönüştürme yaptıkları görülmektedir. Katılımcılar birimkareler ile verilen dikdörtgenlerin çevre ve alanlarını hesaplayarak görsel

temsilleri matematiksel bilgiye dönüştürmüşlerdir. Bununla birlikte katılımcılardan YÖ5 dönüştürmeye ek olarak “İkinci dikdörtgeni şöyle parçalarsak burası buraya gelir. O zaman bu dikdörtgenler birbirinin aynısı olurdu.” şeklinde bir ifade de bulunmuştur. Katılımcının ikinci dikdörtgenden birinci dikdörtgeni elde etme düşüncesi zihinde canlandırma yaptığını göstermektedir.

Görselleştirme adımını tamamlayan bütün katılımcılar daha sonra problemin son alt sorusu için varsayımda bulunmuşlardır. Katılımcıların varsayımları çoğunlukla 72 sayısının çarpanlarına yönelik olmuştur. Bu şekilde çevresi en az olan dikdörtgene yönelik tahminler oluşturmuşlardır. Bunun yanı sıra YÖ4 “Kareye en yakın şekli bulmam lazım” diyerek bir varsayım üretirken, YÖ6’nın “Uzun kenarı daha uzun olursa alanı daha büyük olabilir” şeklindeki ifadesi varsayımda bulunma olarak kodlanmıştır. Varsayımdan sonra bazı katılımcıların doğrudan özelleştirme yaptığı, bazı katılımcıların ise görsel temsiller oluşturduktan sonra özelleştirme yaptıkları gözlenmiştir. Bunun devamında ise YÖ2 ve YÖ6 dışındaki bütün katılımcıların genelleme yaptıkları sonucuna varılmıştır. Görsel temsil kullanmadan sonuca ulaşan YÖ1’in problemi çözme sürecine ait görsel Şekil 96’da gösterilmektedir:

Yukarıda verilen dikdörtgenleri inceledikten sonra aşağıdaki soruları cevaplamaya çalışınız.

- Dikdörtgenlerin **çevre** uzunlukları kaç birimdir?
- Dikdörtgenlerin **alanları** kaç birimkaredir?
- Bu dikdörtgenlerin çevre ve alan ölçüleri ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?
- Alanı 72 birimkare olacak şekilde bir dikdörtgen çizilmek istendiğinde kenar uzunlukları kaç birim seçilirse çevresi **en az** olur?

Handwritten calculations:

$$\begin{array}{r} 72 \div 6 \\ \underline{-6} \\ 72 \end{array}$$

$$6 + 6 + 12 + 12 = 36$$

$$9 + 9 + 8 + 8 = 34$$

Şekil 96. YÖ1’in görsel özelleştirme problemini çözme süreci

YÖ1 ile yapılan görüşmenin bir kısmı aşağıda sunulmaktadır:

YÖ1: Alanı 72 ise kenar uzunlukları ne olabilir? Çarpmanın tersi bölmedir. Tahmini olarak yapalım. 72'yi kaç bölmem lazım ki. Mesela 9'a bölünebiliyor.

A: Evet çok güzel. Kaç oluyor 9'a böldüğünde?

YÖ1: 8. O zaman kısa kenar 8 uzun kenar 9 oluyor. 7'ye bölünmüyor. 6'ya bölünüyor mu? (Bölme işlemi yapar) Tam bölündü 12.

A: Peki bulduğun dikdörtgenlerin hangisinin çevresi daha kısa?

YÖ1: (Bulduğu dikdörtgenlerin çevrelerini hesaplar). 9 ile 8 olan dikdörtgenin daha az.

A: Şimdi önceki yaptıklarımızı ve bu son bulduklarını düşün bakalım. Alanı aynı ama çevresinin az olmasını istiyorsan kenar uzunluklarını nasıl seçebilirsin?

YÖ1: Uzun kenarı ne kadar büyük olursa, kısa kenarları da ne kadar küçük olursa çevresi o kadar büyük olur. Mesela sayıların uzaklıklarına bakalım. 12 ile 6 arasında 6 fark var. Bunların arasında da 1 fark var. Yani aralarındaki fark fazla ise çevresi büyük çıkıyor. Çevresinin az olmasını istiyorsak kenar uzunluklarını birbirine yakın seçiyoruz.

Şekil 96'da ve yukarıdaki diyalog da görüldüğü gibi YÖ1 problemde görsel temsil kullanmadan genellemeye varmıştır. YÖ1'in aksine bazı katılımcılar ise problemin son alt sorusunun çözümü sırasında görsel temsil kullanmışlardır. Bazı katılımcıların çizim, bazı katılımcıların tablo yaptıkları görülmüştür. Tablo temsili kullanan YÖ4 ve YÖ7'nin oluşturdukları görsel temsiller Şekil 97'deki gibidir:

iz?

inde kenar uzunlukları

1, 72

2, 36

3, 24

4, 18

6, 12

8, 9

Yukarıda verilen dikdörtgenleri inceledikten sonra aşağıdaki soruları cevaplamaya çalışınız.

- Dikdörtgenlerin çevre uzunlukları kaç birimdir? 28 - 20
- Dikdörtgenlerin alanları kaç birimkaredir? 24 - 24
- Bu dikdörtgenlerin çevre ve alan ölçüleri ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?
- Alanı 72 birimkare olacak şekilde bir dikdörtgen çizilmek istendiğinde kenar uzunlukları kaç birim seçilirse çevresi en az olur?

72-1 36-2

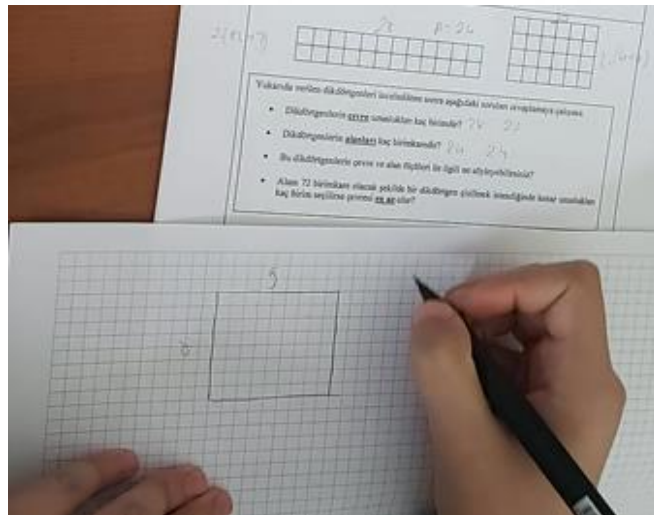
24-3 18-4 12-6 9-8

Şekil 97. YÖ4 ve YÖ7'nin görsel özelleştirme problemi için oluşturdukları görsel temsiller

YÖ4 ve YÖ7'nin çözümlerini Şekil 97'deki gibi sistematik olarak ele alması tablo temsili olarak değerlendirilmiştir. Katılımcılardan çizim kullanan YÖ3 ve YÖ5'in oluşturdukları görsel temsiller şu şekildedir:



Şekil 98. YÖ3'ün görsel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil



Şekil 99. YÖ5'in görsel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil

Sunulan görsel özelleştirme probleminin yedinci sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme bileşenlerini sergiledikleri bir problem olduğu görülmüştür. Katılımcıların tamamı varsayımda bulunmuş ve özelleştirme aşamasını tamamlamıştır. Bunun yanı sıra YÖ2 ve YÖ6 dışındaki katılımcılar dikdörtgenin alanı ve kenarlarının ilişkisine yönelik genellemeye de varmışlardır.

4.3.3. Sözel genelleme problemine yönelik bulgular

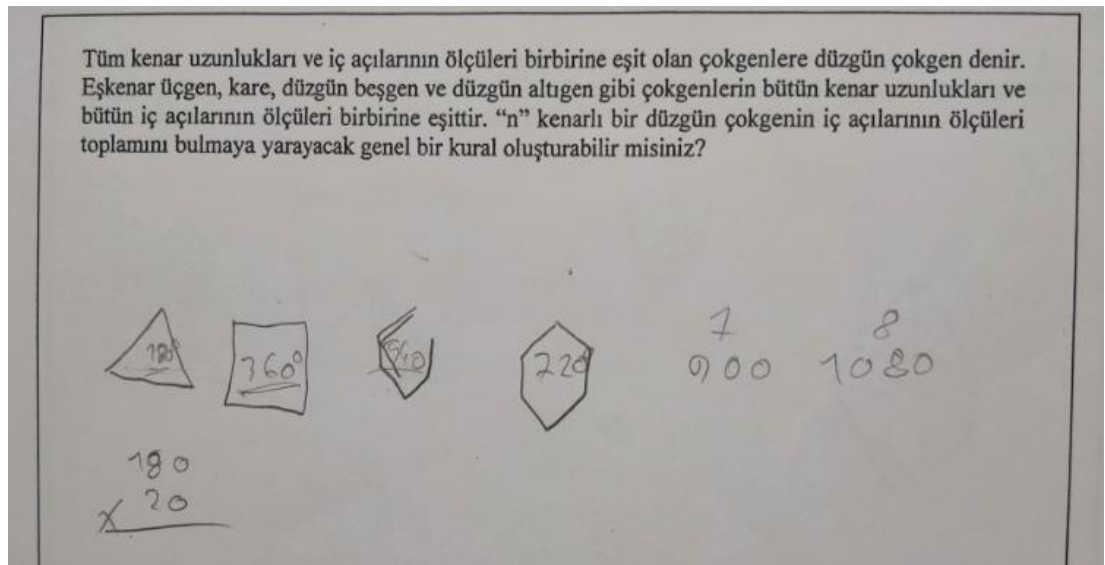
Sözel genelleme problemine yönelik olarak çokgenlerin iç açıları toplamı ile ilgili bir problem sorulmuştur. Yedinci sınıf düzeyindeki bir kazanımla yakından ilişkili olan bu problem aynı zamanda sekizinci sınıf öğrencilerine de yöneltilmiştir. Bu problemin çözüm sürecinde ortaya çıkan bulgular Tablo 21’de sunulmaktadır:

Tablo 21

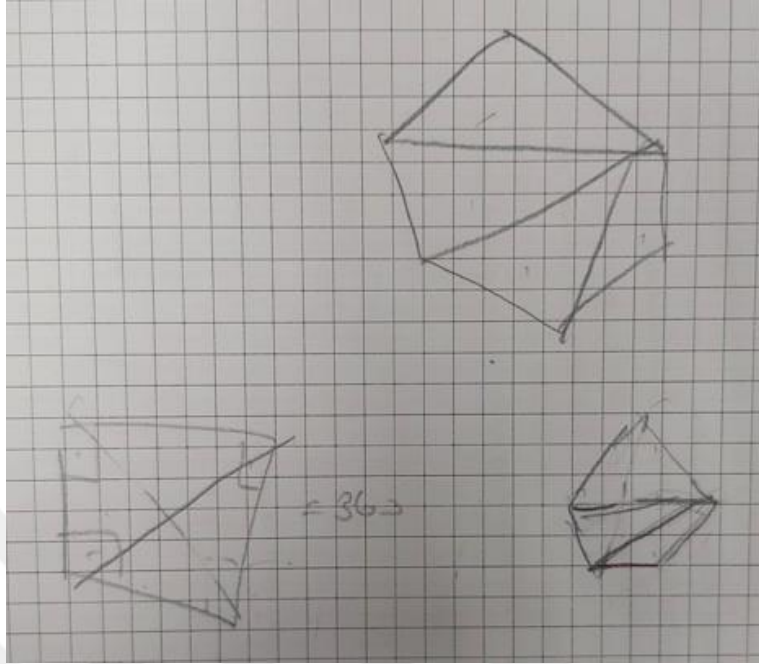
Yedinci sınıf öğrencilerinin sözel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	YÖ1, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ7, YÖ8
	Model	-
	Tablo	-
Görselleştirme	Dönüştürme	YÖ1, YÖ3, YÖ7, YÖ8
	Zihinde Canlandırma	-
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	YÖ1, YÖ3, YÖ7, YÖ8
	Genelleme	YÖ3, YÖ8
	Varsayımda Bulunma	YÖ3, YÖ7, YÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	-

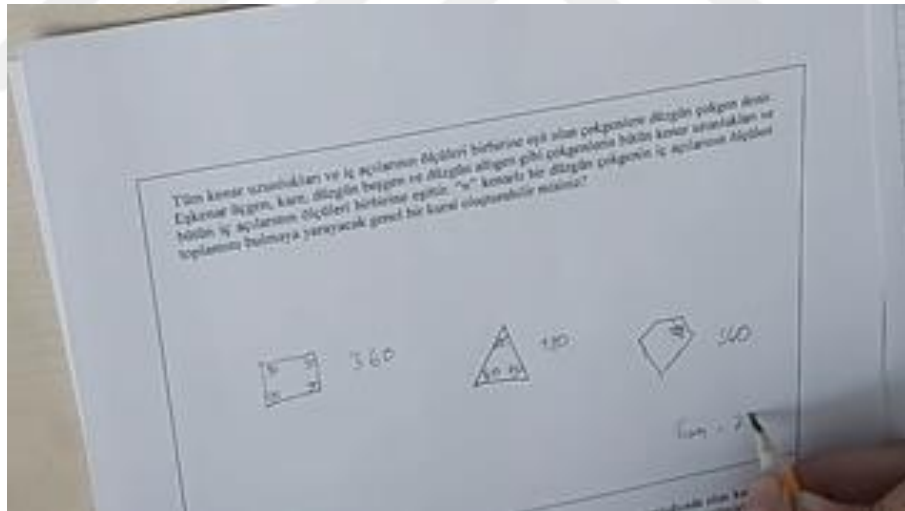
Tablo 21’e bakıldığında sözel genelleme probleminin çözümü için katılımcıların çoğunluğunun çizim yaptıkları anlaşılmaktadır. Bununla birlikte başka temsil oluşturmamaları dikkat çekmektedir. YÖ4 ve YÖ5 çizim yapmalarına rağmen görselleştirme yapmayı başaramadıkları için problemin çözümüne ulaşamamışlardır. Katılımcıların oluşturdukları bazı görsel temsiller aşağıdaki gibidir:



Şekil 100. YÖ1’in sözel genelleme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil



Şekil 101. YÖ3'ün sözel genelleme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil



Şekil 102. YÖ7'nin sözel genelleme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil

Katılımcılardan YÖ1, YÖ3 ve YÖ7 yukarıdaki şekillerde görüldüğü gibi sözel olarak verilen problemi anlamlandırmak için görsel temsiller oluşturmuşlardır. Katılımcılardan YÖ1 ve YÖ7 benzer çözüm yollarını takip etmişlerdir. Katılımcıların eşkenar üçgen, kare ve düzgün beşgen gibi çokgenlerin iç açıları toplamalarını biliyor olmaları problem çözümlerini kolaylaştırmıştır. Görsel temsil kullanan bu katılımcılar daha sonra açı derecelerini de not alarak artış miktarlarına odaklanmışlardır. YÖ1'in "İlk başta 180^0 idi. Sonra 2 katına çıkmış 360^0 olmuş. Sonra bunun üstüne 180^0 eklersek 540^0 oluyor. Kenar her arttığında 180^0

artıyor.” şeklindeki ifadesi ile YÖ7’nin “3’teyken 180, 4’teyken 360 ve 5’teyken 540 oluyor. 180, 180 artıyor aslında.” ifadesi katılımcıların çizimlerinin akabinde bir dönüştürme yaptıklarını göstermektedir. Artış miktarını bulan katılımcılar, düzgün altıgenin iç açıları toplamını da bularak özelleştirmeyi gerçekleştirmişlerdir. Sonrasında katılımcıların cebirsel temsile geçiş yaparak varsayımlar üretilip genelleme yapımları beklenmiştir. Bu noktada katılımcılardan YÖ7, “Kenar sayısını 180 ile çarpmamız gerekiyor?” şeklinde bir varsayımda bulunmuştur. Katılımcı, görüşmenin devamında bu varsayımının yanlış olduğunun farkına varsa da buradan sonra genelleme yapamamıştır. YÖ1 ise cebirsel temsile geçiş konusunda yaşadığı sorunlar nedeniyle genelleme yapamamıştır. Genelleme yapabilen YÖ3 ile yapılan görüşmenin son kısmı şu şekildedir:

YÖ3: *Köşegenlerden kurala ulaşabiliriz galiba?*

A: *Ne demek istiyorsun?*

YÖ3: *(Beşgen çizer) Şu şekilde yapabiliriz. Bu şekilde 3 tane üçgen oluyor köşegenleri çizdiğimiz zaman. Üçgenin iç açıları toplamı 180^0 . Üçgen sayısı ile 180’i çarparsak mesela tüm iç açılar toplamını bulabiliriz.*

A: *Güzel bir çözüm yaptın. Diğer düzgün çokgenler için de böyle mi peki?*

YÖ3: *Kare de mesela 180 ile 2’yi çarparsak olur. Kenar sayısından 2’yi çıkarttığımızda kaç tane üçgen çizilebildiğini buluyoruz. Sonra 180 ile çarpığımızda tüm iç açıların ölçüleri toplamını buluyoruz. Yani $n-2$ çarpı 180 kuralı ile bulunabilir.*

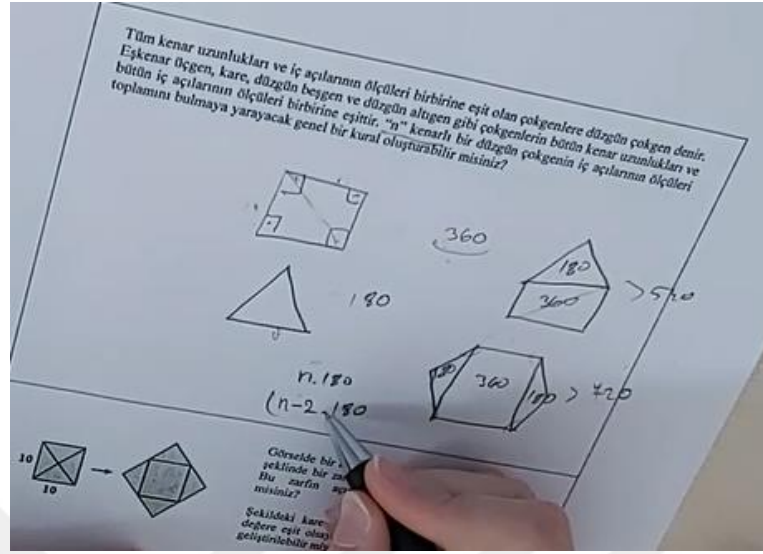
A: *Altıgeni bulabilir misin mesela?*

YÖ3: *(Altıgen çizer) Burada 4 tane üçgen çizilebilir. 180 ile 4’ü çarpığımızda 720^0 olur.*

A: *Ongeni sorsaydım sana?*

YÖ3: *10’dan 2 çıkarıp 180 ile çarpardım.*

YÖ3 yaptığı çizimlerden hareketle bir çokgendeki köşegenlere odaklanarak bir varsayım üretmiştir. Sonrasında ise çokgenin içinde çizilebilecek üçgen sayılarına göre çözüm bulmuştur. Üçgen sayısı ile bir üçgenin iç açıları toplamı olan 180^0 ’nin çarpılması sonucu çokgenin iç açıları toplamını bulacağını düşünmesi görselleştirme adımı olarak değerlendirilmiştir. Bu düşüncesini örneklerle çeşitlendirerek de özelleştirme yapmıştır. Nitekim devamında da cebirsel temsil ile genellemeye varmıştır. Genelleme yapan bir başka katılımcı YÖ8’in problemi çözme sürecine ait görsel Şekil 103’te sunulmaktadır:



Şekil 103. YÖ8'in sözel genelleme problemini çözüm süreci

Şekil 103'te görüldüğü gibi YÖ8 de YÖ3 gibi akıl yürütmüş ve üçgen sayılarına göre hareket etmiştir. Katılımcının görsel akıl yürütme sürecinde sırasıyla çizim, dönüştürme, özelleştirme, varsayımda bulunma ve genellemeye yönelik göstergeler sergilediği görülmüştür.

4.3.4. Görsel genelleme problemine yönelik bulgular

Yedinci sınıf öğrencilerinin görsel genelleme probleminin çözüm sürecindeki görsel akıl yürütmelerine ait bulgular Tablo 22'de verilmektedir:

Tablo 22

Yedinci sınıf öğrencilerinin görsel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	-
	Model	-
	Tablo	-
Görselleştirme	Dönüştürme	YÖ3, YÖ7
	Zihinde Canlandırma	YÖ1, YÖ3, YÖ4, YÖ6, YÖ7, YÖ8
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	YÖ1, YÖ3, YÖ4, YÖ6, YÖ7, YÖ8
	Genelleme	YÖ1, YÖ3, YÖ4, YÖ7, YÖ8
	Varsayımda Bulunma	YÖ1, YÖ3, YÖ4, YÖ7, YÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	-

Katılımcılar görsel genelleme problemini çözerken problemde sunulan görsel temsili kullanarak çözüm gerçekleştirmişlerdir. Bundan dolayı hiçbir katılımcının ek bir görsel temsil oluşturmadığı görülmüştür. Katılımcıların çoğunluğu bu problemde zihinde canlandırma

yapmıştır. Bununla birlikte katılımcılardan YÖ3 ve YÖ7 hem zihinde canlandırma hem de dönüştürme gerçekleştirmiştir. Katılımcıların zihinde canlandırma yaptığına yönelik bazı ifadeleri şu şekildedir:

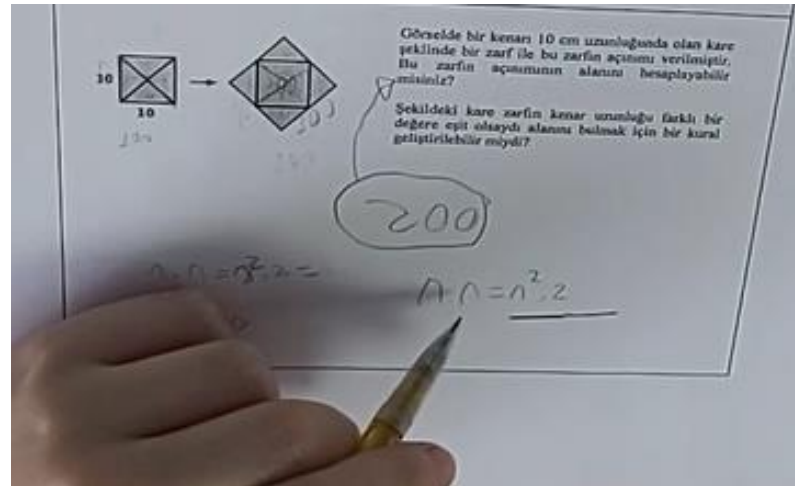
“Şeklin kapalı halini düşünürsek şurası 10 cm imiş. Kare olduğu için her yeri 10 cm olur. Şimdi bunun alanını hesaplayacağım. Bunun alanı 10 çarpı 10, 100 (İkinci şeklin ortasındaki kareye odaklanır). Bir de bu üçgenlerin hepsini birleştirdiğimizde yine kare oluyor.” YÖ1

“Burası katlandığında ortadaki kareden 2 tane oluyor. Demek ki ortadaki kare ile dışındaki üçgenlerin alanı eşit.” YÖ4

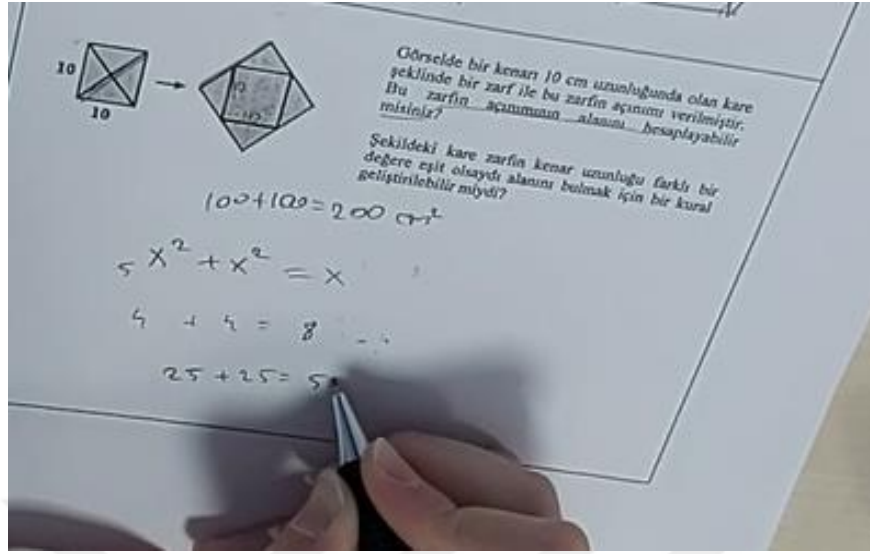
“Bu 4 tane üçgen bu kareyi oluşturuyor.” YÖ6

“Bir karenin içinde aslında 4 tane üçgen var.” YÖ8

Problemde bahsedilen zarfta katlama veya açma işlemi yapıldığında verilen görsel temsillerle bağlantı kurabilen katılımcıların zihinde canlandırma yaptığı kabul edilmiştir. Yukarıdaki gibi düşünen katılımcılar bu sayede problemin ilk adımında istenen cevabı bulabilmişlerdir. Sonrasında ise ikinci adımda istenen karenin kenar uzunluğunu değiştirmeye yönelik hareket etmişlerdir. Karenin kenar uzunluğuna farklı bir değer vererek özelleştirme yapmışlardır. Ondan sonra YÖ6 dışındaki katılımcılar varsayımda bulunup genelleme yapmışlardır. Bu katılımcılardan YÖ4 ve YÖ8’in problem çözme süreçleri aşağıdaki gibidir:



Şekil 104. YÖ4'ün görsel genelleme problemini çözüm süreci



Şekil 105. YÖ8'in görsel genelleme problemini çözüm süreci

Bu katılımcıların varsayımda bulunup genellemeye ulaştıklarını kanıtlayan ifadeleri ise şöyledir:

"10 olsaydı 10 çarpı n. 20 olsaydı 20 çarpı n.....n çarpı n mi oluyor? Tamam, buldum. Karede n çarpı n oluyor. Bunda da n ile n'i çarptıktan sonra çıkan sonuç ile 2'yi çarpıyoruz." YÖ1

"Burası n olsun...n çarpı n eşittir n kare, çarpı 2, bu şekilde bulunur." YÖ4

"Karenin bir kenarı x olsaydı. Ortadaki karenin alanı x üssü 2 olur. Bunu da tekrar x üssü 2 ile toplarsınız ." YÖ8

Dönüştürme göstergesine sahip katılımcılar YÖ3 ve YÖ7 ise problemi, katlama ilişkisinden ziyade matematiksel işlemler yoluyla çözmeyi tercih etmişlerdir. Bu katılımcılardan YÖ3, katlama ilişkisini problemin başında fark etmesine rağmen matematiksel işlemler kullanarak görseli matematiksel yapıya dönüştürmüştür. YÖ3'ün ortaya koyduğu göstergeler sırasıyla varsayımda bulunma, zihinde canlandırma, dönüştürme, özelleştirme ve genelleme yapma şeklindedir. YÖ7 ise görsel üzerinde dönüştürme yaptıktan sonra çıkan sonuç ile birlikte katlama ilişkisini fark etmiştir. YÖ7 ile yapılan görüşme aşağıdaki gibi gerçekleşmiştir:

YÖ7: *Şu zarfı açmış o zaman şu uzunluklar 10 cm oluyor. Zarfın açınımının alanını soruyor bize.*

A: *Ne yapabiliriz?*

YÖ7: *(Bir süre düşünür) Karenin alanı 10 çarpı 10'dan 100 yapıyor. Şuradaki açılar 45^0 yapıyor ama açı ile bulamam (Üçgenlerden bahsediyor).*

A: *Üçgenin alanını nasıl buluyorduk?*

YÖ7: *Üçgenin alanını şu alt kısmı ile yüksekliğini çarpıp 2'ye bölerek buluyorduk. Şimdi şöyle bulunabilir. Buranın (Ortadaki kare) alanı 100. Eğer bir üçgenin alanını bulup 4 ile çarparsam 100 ile toplayıp tüm alanı bulabilirim. Ama nasıl bulacağız? Üçgenin şu yüksekliğini bulmam lazım. Yükseklik dediğimiz şey birinci şekilde buraya denk geliyor. Şöyle yapsak birinci şeklin alanı 100. 100'ü 4'bölersem her bir üçgenin alanını bulurum. Yani bir üçgenin alanı 25 olacak. Üçgenlerin toplam alanı 100 o zaman. 100 daha 200 olacak.*

A: *Doğru bu kadar. Probleme devam edelim.*

YÖ7: *(Problemin devamını okur) Kenar farklı olsaydı nasıl olurdu diyor. Mesela 20 olsaydı. Buranın alanı 400 olurdu. Açık hali de 800 olurdu. Aslında şimdi şunu fark ettim. Zaten bu üçgenlerin alanı alttaki kare tabana eşit.*

A: *Evet başka şeylere odaklandığın için başta göremedin sanırım.*

YÖ7: *Evet. Kapattığımızda kareyi oluşturuyor.*

A: *Tamam kural ne olacak?*

YÖ7: *n çarpı n mi olacak? Yani bir sayıyla kendisini çarpıyoruz. n üssü 2 oluyor. Açık hali de bunun 2 katı olacak.*

YÖ7 ile yapılan görüşmeye bakıldığında katılımcının öncelikle verilen görseldeki şekillerin özellikleri ile ilgilendiği anlaşılmaktadır. Daha önceden bildiği kare ve üçgenin alanı ile ilgili özellikleri görseller üzerinde uygulamaya çalışmıştır. Bu da katılımcının bir dönüştürme yaptığını göstermektedir. Yaptığı çözüm ile sonuca ulaşarak özelleştirme yaptığı düşünülmüştür. Sonrasında problemin ikinci kısmına geçtiğinde karenin bir kenar uzunluğunu değiştirerek “Mesela 20 olsaydı” ifadesi varsayımda bulunma olarak değerlendirilmiştir. Bu varsayımı doğrultusunda çözüm yapan katılımcı daha sonra görseldeki üçgenlerin alanları toplamının karenin alanına eşit olacağını fark etmiştir. Bunu ifade etmesi de zihinde canlandırma yaptığını göstermektedir. Son olarak katılımcı problemdeki durumu cebirsel olarak ifade ederek bir genelleme yapmıştır.

4.3.5. Sözel varsayımda bulunma problemine yönelik bulgular

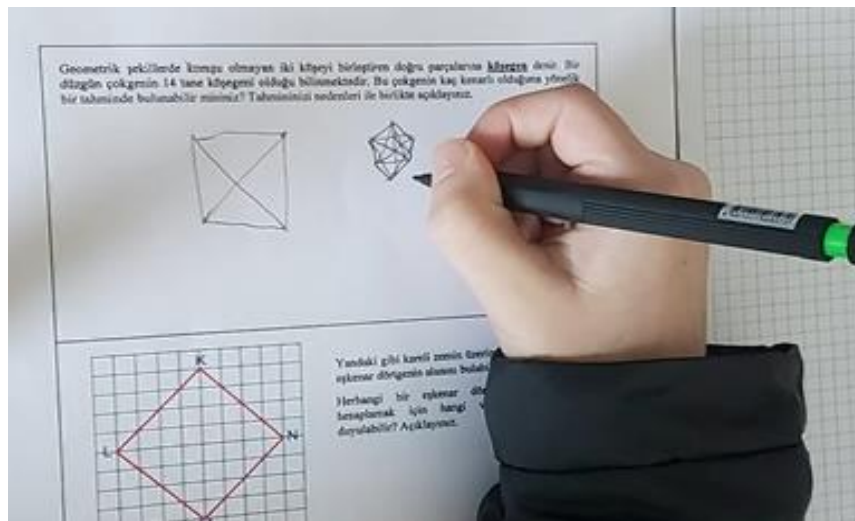
Düzgün çokgenlerin köşegen sayısı ile ilgili olan sözel varsayımda bulunma probleminin katılımcıların ilgisini çektiği görülmüştür. Problemin çözümü için katılımcıların görsel akıl yürütme becerilerini işe koştukları söylenebilir. Sözel varsayımda bulunma probleminin çözümünden elde edilen bulgular Tablo 23’te gösterilmektedir:

Tablo 23

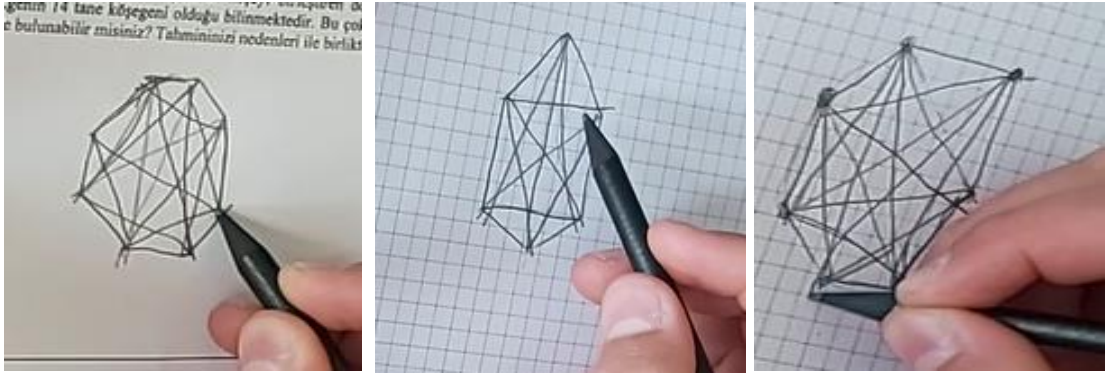
Yedinci sınıf öğrencilerinin sözel varsayımda bulunma problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	YÖ1, YÖ2, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ7, YÖ8
	Model	-
	Tablo	-
Görselleştirme	Dönüştürme	YÖ1, YÖ2, YÖ4, YÖ5, YÖ7, YÖ8
	Zihinde Canlandırma	-
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	YÖ1, YÖ2, YÖ4, YÖ5, YÖ7, YÖ8
	Genelleme	-
	Varsayımda Bulunma	YÖ2, YÖ4, YÖ5, YÖ7, YÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	-

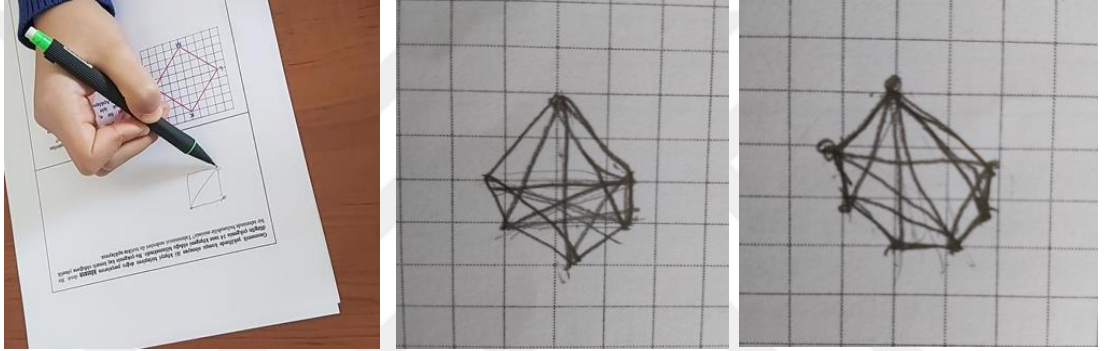
Tablo 23 incelendiğinde katılımcıların büyük çoğunluğunun problemin çözümü için çizim görsel temsili oluşturdukları söylenebilir. Katılımcılardan sadece YÖ6 problemin çözümüne yönelik girişimde bulunmamıştır. Bunun yanı sıra YÖ3 ise çizim yapmasına rağmen problemin devamında görselleştirme yapamamıştır. Bazı katılımcıların oluşturdukları görsel temsiller şu şekildedir:



Şekil 106. YÖ1’in sözel varsayımda bulunma problemine yönelik oluşturduğu çizimler

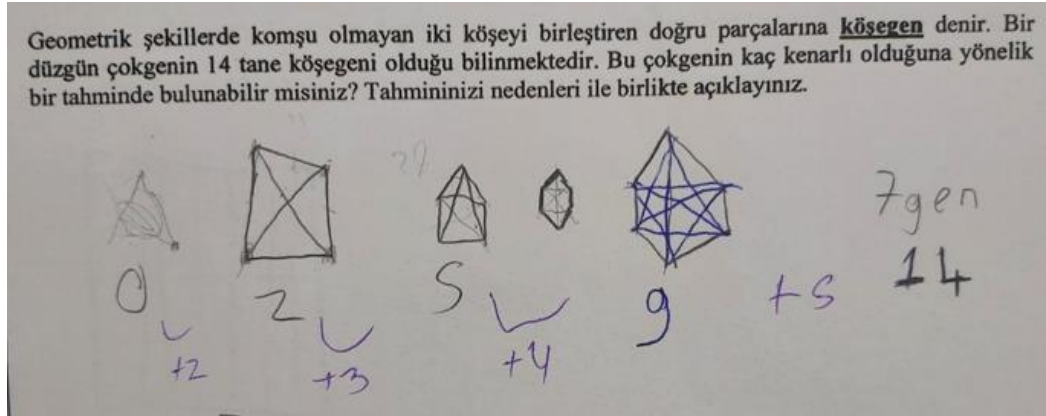


Şekil 107. YÖ2'nin sözel varsayımda bulunma problemine yönelik oluşturduğu çizimler

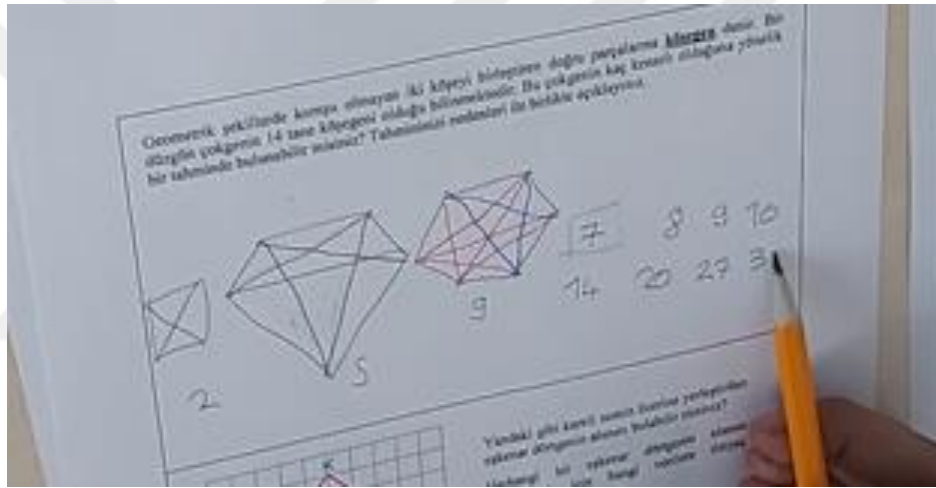


Şekil 108. YÖ5'in sözel varsayımda bulunma problemine yönelik oluşturduğu çizimler

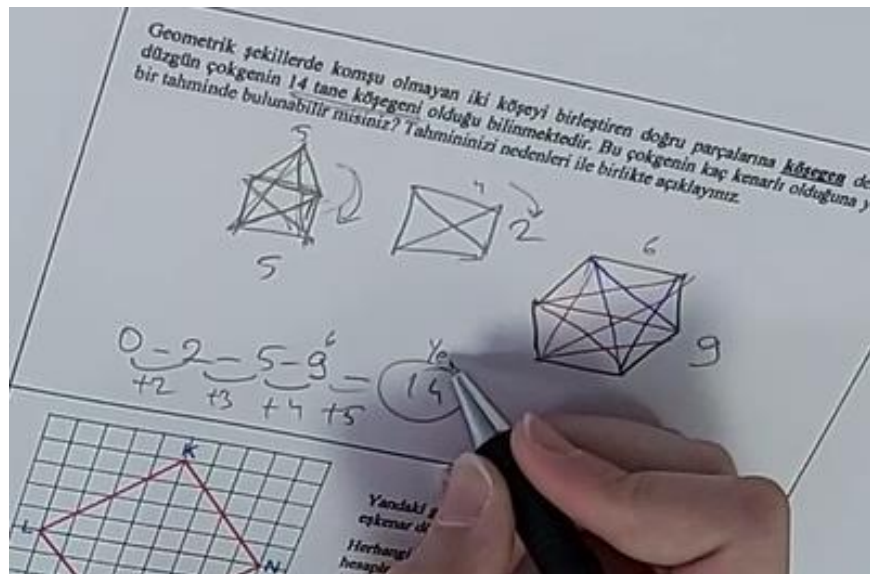
Problemde sözel olarak bahsedilen çokgenlerin çizimlerini yapan katılımcılar daha sonra çokgenlerin köşegenlerini sayarak dönüştürme gerçekleştirmişlerdir. Bununla birlikte katılımcıların farklı çokgenlere yönelik köşegen sayılarını bulması aynı zamanda özelleştirme olarak değerlendirilmiştir. Özelleştirme yapan katılımcıların çoğunluğu varsayımda bulunarak problemin çözümüne ulaşırken katılımcılardan YÖ1'in varsayım üretmediği görülmüştür. Şekil 106'da görüldüğü gibi kare ve düzgün altıgenin köşegenlerini gösteren katılımcı yedigen çizmek istemiştir. Ancak yedigen çizemediği için köşegen sayısı konusunda yorum yapamamıştır. Bir başka katılımcı YÖ5 ise Şekil 108'deki gibi önce kare çizerek köşegenlerini göstermiştir. Sonrasında altıgen çizerek onun da köşegen sayısını bulmuştur. Katılımcının *"İlerledikçe kendisinden (Kenar sayısından bahsediyor) daha büyük oluyor. Denemeye devam etsek aslında olabilir."* ifadesi varsayımda bulunma olarak değerlendirilmiştir. Nitekim bir yedigen çizerek göstermeye çalışmış ancak yedigene ait bütün köşegenleri gösterememiştir. YÖ2 ise YÖ5 ile benzer bir yolu izlemiş ancak YÖ5'ten farklı olarak sonuca ulaşmıştır. Bu durumun temel sebebi ise daha büyük ve düzgün şekil çizmesi görülmektedir. Özelleştirmeyi yapan diğer katılımcılar YÖ4, YÖ7 ve YÖ8 ise yedigen çizmeden sonucu bulmuşlardır. Bu katılımcıların problem çözme süreçlerine ait görseller aşağıda sunulmaktadır:



Şekil 109. YÖ4'ün sözel varsayımda bulunma problemini çözme süreci



Şekil 110. YÖ7'nin sözel varsayımda bulunma problemini çözme süreci



Şekil 111. YÖ8'in sözel varsayımda bulunma problemini çözme süreci

Katılımcılardan YÖ4, YÖ7 ve YÖ8'in yukarıda yer alan sözel varsayımda bulunma problemini çözme süreçlerine ait görsellere bakıldığında katılımcıların benzer çözümler yapmaları dikkat çekmektedir. Her üç katılımcı da problemde sözel biçimde verilen ifadeye yönelik çizim yaparak görsel temsil oluşturmuşlardır. Daha sonra katılımcılar oluşturdukları görsel temsillerin köşegenlerini çizmişlerdir. Köşegen kavramı öğretilmesi gereken temel kavramların başında geldiği için katılımcıların bazı matematiksel bilgilere ihtiyaç duyduğu söylenebilir. Bundan dolayı görsel üzerinden matematiksel bilgiyi kullanarak köşegen sayılarını belirtmeleri dönüştürme olarak ele alınmıştır.

Katılımcıların kare ve beşgene ait köşegen sayılarını çizerek bulmaları sonrasında altıgene ait köşegenleri de çizerek göstermeleri özelleştirmeyi tamamladıkları anlamına gelmektedir. Bu noktadan sonra YÖ4, YÖ7 ve YÖ8 diğer bazı katılımcılar gibi yedigen çizmek yerine buldukları değerleri not alma yoluna gitmişlerdir. Bu şekilde sembolik temsile geçiş yapan katılımcılar örüntü arama çabasına girmişlerdir. Katılımcılar bu adımda köşegen sayıları arasındaki artış miktarlarına yönelik varsayımlar üretmişlerdir. Bununla birlikte her üç katılımcı artış miktarlarını bularak bir sonraki adımda 14 köşegen olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Bunun sonucunda da 14 köşegene sahip çokgenin yedigen olması gerektiğini bulmuşlardır.

4.3.6. Görsel varsayımda bulunma problemine yönelik bulgular

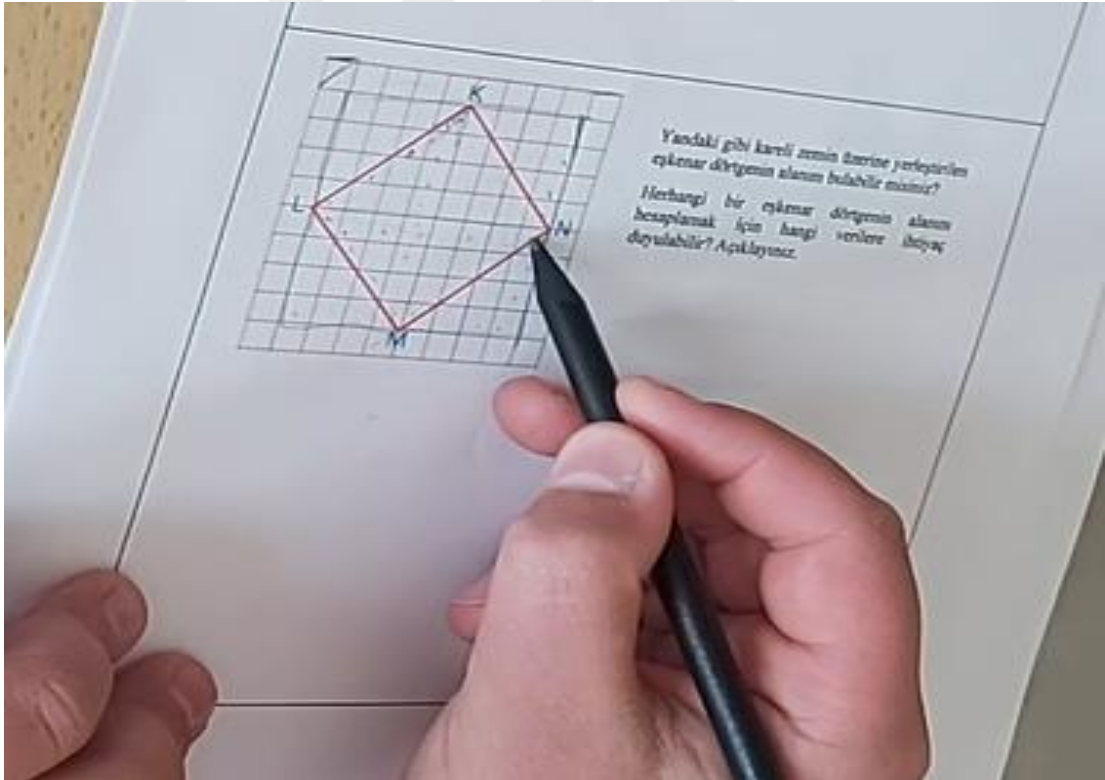
Eşkenar dörtgenin alanını hesaplama ile ilgili olan görsel varsayımda bulunma problemini altıncı ve yedinci sınıf öğrencilerinin yanıtlamaları istenmiştir. Bu problemin sonucunda yedinci sınıf öğrencilerinden elde edilen bulgular Tablo 24'te gösterilmektedir:

Tablo 24

Yedinci sınıf öğrencilerinin görsel varsayımda bulunma problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	YÖ1, YÖ2, YÖ3, YÖ8
	Model	-
	Tablo	-
Görselleştirme	Dönüştürme	YÖ2, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ8
	Zihinde Canlandırma	YÖ3
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ8
	Genelleme	YÖ3, YÖ8
	Varsayımda Bulunma	YÖ2, YÖ3, YÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	YÖ3

Tablo 24'e göre görsel varsayımda bulunma probleminin çözümü için katılımcıların yarısının problemde verilen görsele ek olarak çizim yaptıkları anlaşılmaktadır. Bununla birlikte bazı katılımcılar ek çizim yapmadan problemdeki görsel üzerinden görselleştirme yapmışlardır. Katılımcılardan YÖ6 ve YÖ7 problemin çözümü için altıncı sınıf öğrencilerinin yaptığı birimkareleri sayma yöntemini kullanmamışlardır. Ayrıca diğer öğrencilerin yaptığı gibi görsel akıl yürütmeye yönelik herhangi bir adım atmamışlardır. Bunun yerine birimkarenin köşegen uzunluğunun 1 birim olduğunu kabul ederek problemin çözülebileceği inancını taşımaktadırlar. Verilen eşkenar dörtgenin kenar uzunluklarını 4 birim hesapladıktan sonra alanının kare ve dikdörtgen gibi şekillere benzer olarak hesaplanacağı şeklinde bir yanlışlığa sahip oldukları ortaya çıkmıştır. Katılımcılardan YÖ1 ise her ne kadar çizim yapsa da onun da aynı yanlışlıklara sahip olduğu görülmüştür. Bir başka katılımcı YÖ2 ise şu şekilde bir görsel temsil üretmiştir:

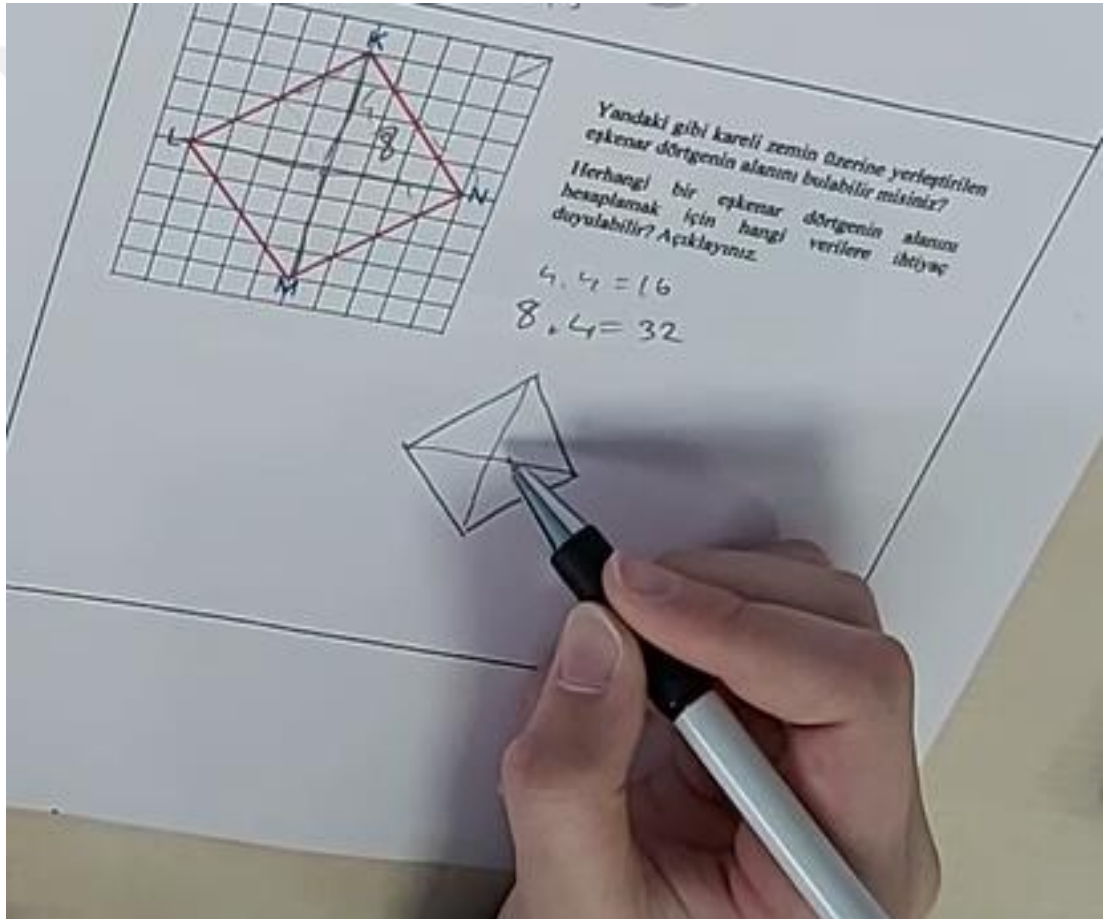


Şekil 112. YÖ2'nin görsel varsayımda bulunma problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil

YÖ2 öncelikle eşkenar dörtgeni Şekil 112'de görüldüğü gibi bir kareye tamamlamıştır. Karenin alanının da 64 birimkare olduğunu ifade ederek bazı dönüştürmeler yapmıştır. Sonrasında ise katılımcı zihinde canlandırma yapamamıştır. Çizdiği karenin eşkenar dörtgenden büyük olduğunun farkındadır. Bundan dolayı da “Yarısı olabilir mi?”

Acaba 2'ye mi bölmemiz gerekiyor?" şeklinde bazı varsayımlar üretmiştir. Ancak bu varsayımlarının doğruluğu konusunda geçerli gerekçeler sunamamıştır. Sonucu bulamadığı için de diğer matematiksel düşünme bileşenlerine yönelik göstergeler sergileyememiştir.

Katılımcılardan YÖ4 ve YÖ5 altıncı sınıf öğrencilerinin yaptığı gibi birimkareleri sayarak bir dönüştürme gerçekleştirmişlerdir. Bunun devamında da sonuca ulaşarak özelleştirmeyi tamamlamışlardır. Ancak problemin ikinci kısmında istenene yönelik herhangi bir varsayımda bulunamamışlardır. Görsel akıl yürütmenin tüm bileşenlerini sergileyen YÖ8'in çözüm süreci Şekil 113'te sunulmaktadır:



Şekil 113. YÖ8'in görsel varsayımda bulunma problemini çözme süreci

Şekil 113'te görüldüğü üzere katılımcı ek çizimlerde bulanarak görsel akıl yürütme gerçekleştirmiştir. YÖ8 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıdaki gibidir:

YÖ8: Şekli parçalasam bulabilir miyim acaba?

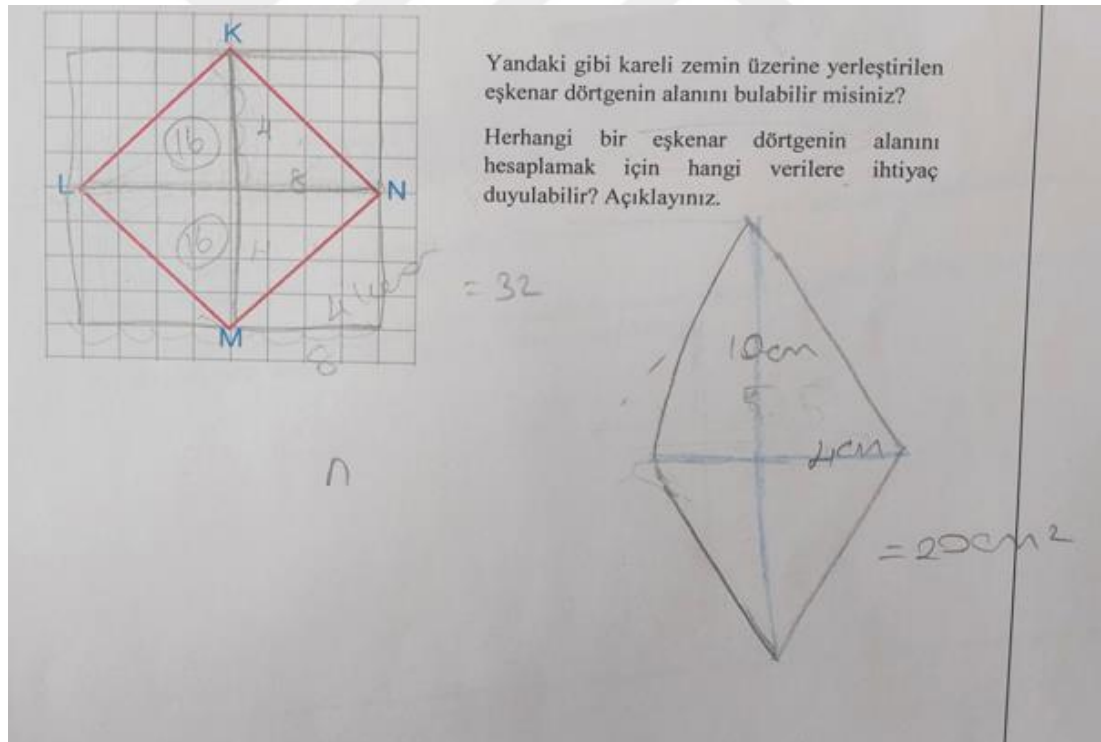
A: Olabilir belki.

YÖ8: (Şekli köşegenlerinden parçalar) Üçgenin alanından bulabiliriz. 4 kere 4, 16. 2'ye bölersek 8. Bu üçgenden 4 tane olduğu için bu şeklin alanı 32 olur.

A: Güzel devam edelim probleme?

YÖ8: Hangi verilere ihtiyaç duyulabilir diyor. (Bir eşkenar dörtgen çizer) Şurayı bilsem iyi olur (Köşegeni gösterir), diğer köşegene de ihtiyacım var. Çünkü üçgenin alanından yararlanabilirim.

YÖ8 problemin çözümü için bir varsayımda bulunmuş ve devamında eşkenar dörtgenin köşegenlerini çizerek şekli eş üçgenlere ayırmıştır. Dönüştürme olarak kabul edilen bu işlemin ardından sonuca ulaşarak özelleştirmeyi tamamlamıştır. Bu yaptıklarının ise bütün eşkenar dörtgenler için geçerli olabileceğini ileri sürerek bir genelleme yapmıştır. Ancak bu iddiasını doğrulamaya yönelik bir açıklama getirememiştir. YÖ8 ile benzer göstergeleri gösteren YÖ3'ün çözüm süreci aşağıda gösterilmektedir:



Şekil 114. YÖ3'ün görsel varsayımda bulunma problemini çözme süreci

Şekil 114'te görüldüğü üzere YÖ3, YÖ8 gibi ek çizimler yaparak görsel akıl yürütme gerçekleştirmiştir. YÖ3 ile yapılan görüşme şu şekildedir:

A: Ne diyor sana?

YÖ3: Eşkenar dörtgenin alanını soruyor. Şu şekilde 2 üçgen ile yapabiliriz (Eşkenar dörtgeni 2'ye böler). Burayı buluruz sonra burası ile çarpar, 2 ye böleriz. Sonra 2 ile çarpar tamamını buluruz. (Denemeye başlar) 8 ile 4'ü çarptım 32. 2'ye böldüm 16. Bu üçgen de 16. Toplam 32.

A: Güzel başka nasıl bulabilirdik peki.

YÖ3: Şu dik üçgenlerle de yapabilirdik.

A: O da bu çözümüne benzer oluyor. Başka?

YÖ3: Böyle uzatsak da bulunabilir (Şekli kareye tamamlar).

A: Çok mantıklı dene istersen.

YÖ3: Karenin alanı 64 birimkare. Eşkenar dörtgen karenin yarısına eşit oluyor 32 olur.

A: Tamam devam edelim probleme.

YÖ3: (Problemin devamını okur) Hangi verilere ihtiyaç duyulabilir diyor. Kare çizerek, üçgen çizerek bulabilirim.

A: Peki problemde birimkare vermezse nasıl olacak? O zaman neye ihtiyacın olur?

YÖ3: (Bir süre düşünür) Köşegenlerin uzunluğuna ihtiyacım var.

A: Nasıl bulurdun bilseydin?

YÖ3: (Eşkenar dörtgen çizer ve kenar uzunluklarına değer vererek gösterir).

YÖ3'ün eşkenar dörtgenin alanını bulmak için üçgenlerden yararlanacağını belirtmesi varsayımda bulunma olarak değerlendirilmiştir. Bununla birlikte katılımcı, varsayımını göstermek için ek çizim yaparak görsel temsil kullanmıştır. Devamında da üçgenlerin alanını bulma ile ilgili bildiği kuralı burada uygulayarak bir dönüştürme yapmış ve bulduğu sonuç ile özelleştirmeyi tamamlamıştır. Katılımcıya, eşkenar dörtgenin alanını nasıl bulacağına yönelik yöneltilecek ek sorularla zihinde canlandırma yaptığı da ortaya çıkmıştır. Katılımcının; “Böyle uzatsak da bulunabilir..... Karenin alanı 64 birimkare. Eşkenar dörtgen karenin yarısına eşit oluyor” şeklindeki ifadelerinin bunun kanıtı olduğu söylenebilir. Bunun yanı sıra katılımcının yaptığı çözümler sonucunda köşegenlere ihtiyacı olduğunu bilmesi genelleme olarak değerlendirilmiştir. Son olarak ise Şekil 114'teki gibi bu genellemesini bir örnek üzerinden açıklaması doğrulama ve ikna etme olarak kodlanmıştır.

4.3.7. Sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik bulgular

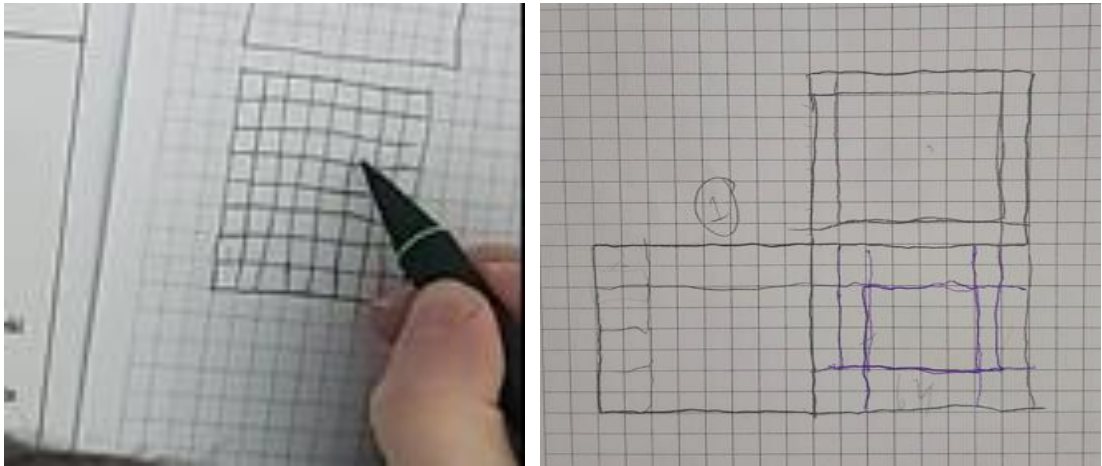
Tüm sınıf seviyelerine yöneltilen sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik yedinci sınıf öğrencilerinden elde edilen bulgular Tablo 25’te gösterilmektedir:

Tablo 25

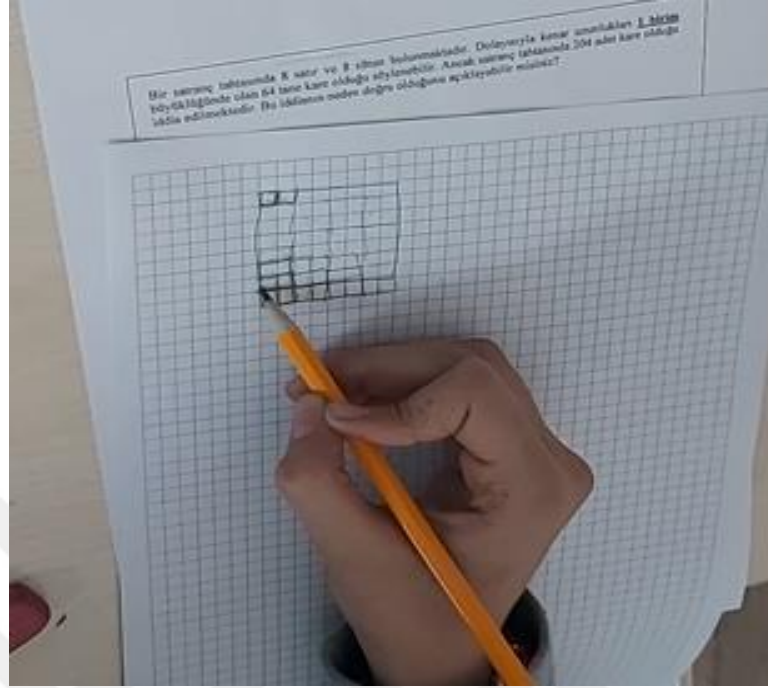
Yedinci sınıf öğrencilerinin sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	YÖ1, YÖ4, YÖ5, YÖ7, YÖ8
	Model	-
	Tablo	YÖ8
Görselleştirme	Dönüştürme	YÖ8
	Zihinde Canlandırma	YÖ1, YÖ4, YÖ7, YÖ8
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	YÖ1, YÖ7, YÖ8
	Genelleme	YÖ8
	Varsayımda Bulunma	YÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	YÖ8

Yedinci sınıf öğrencilerinin yaklaşık yarısının sözel doğrulama ve ikna etme probleminin çözümü için girişimlerde bulunduğu ortaya çıkmıştır. Katılımcılardan YÖ1, YÖ4, YÖ5 ve YÖ7’nin problemin çözümü için sadece çizim temsili oluşturduğu görülmüştür. YÖ8 ise hem çizim temsilini hem de tablo temsilini kullanmıştır. Bu katılımcılardan YÖ1, YÖ4, YÖ7 ve YÖ8 görselleştirme adımı için de çaba sarf etmişlerdir. Bunun yanı sıra katılımcılardan YÖ1, YÖ7 ve YÖ8 özelleştirmeye yönelik göstergelerde bulunmuşlardır. Ancak sadece YÖ8 matematiksel düşünmeye ait diğer göstergeleri de ortaya koymuştur. Katılımcılardan bazılarının oluşturdukları görsel temsiller aşağıdaki gibidir:



Şekil 115. YÖ1 ve YÖ4’ün oluşturdukları görsel temsiller



Şekil 116. YÖ7'nin sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil

Katılımcılardan YÖ5, satranç tahtasını çizdikten sonra problemde belirtilen 64 karenin dışında başka karelerin olabileceğini fark edememiştir. Bundan dolayı da problemin çözümü için bir ilerleme yapamamıştır. YÖ4, çizim yaptıktan sonra Şekil 115'te görüldüğü gibi başka karelerin olduğunu zihninde canlandırmış ve bu kareleri göstermeye yönelik ek çizimler yapmıştır. Bir sistematik geliştirmeden bazı kareleri gösterebilen katılımcı özelleştirmeyi gerçekleştirememiştir. YÖ7 ise YÖ4 gibi benzer çözüm yollarından gitmiştir. 2 birim büyüklüğündeki karelerin sayısını da bulduğu için katılımcının özelleştirme yaptığı kabul edilmiştir. Bir başka katılımcı YÖ1 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir bölümü şu şekildedir:

YÖ1: (Satranç tahtasının bir temsilini çizer) Şimdi burada 64 tane var. Bir de en dıştakini sayarsak 65. Kenar uzunluğu 7 birim olan kareler de var (Bir süre düşünür). 4 tane (Onları da gösterir).

A: Çok güzel.

YÖ1: 8 birim olan 1. 7 birim olan 4.

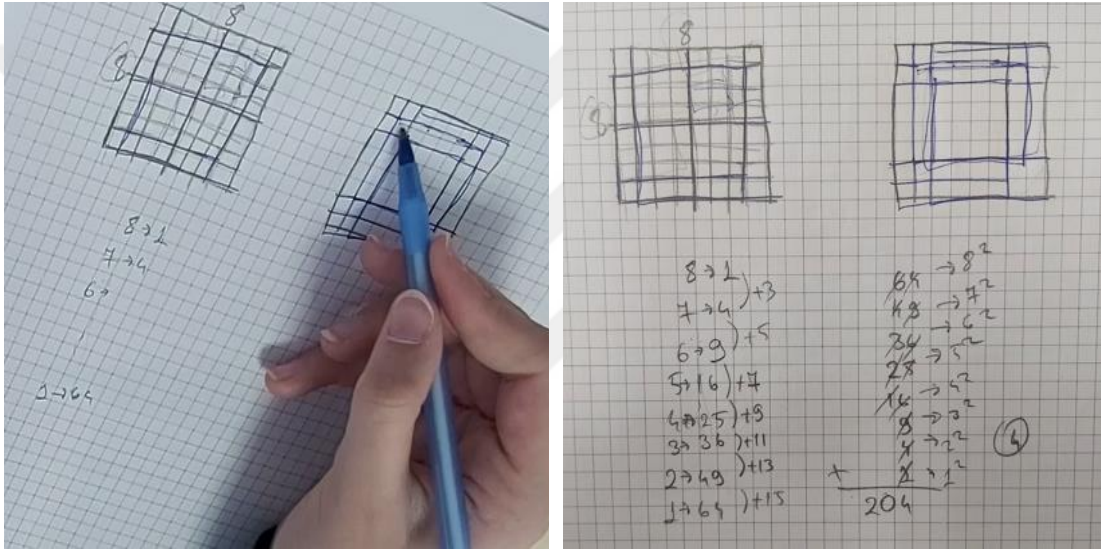
A: Tamam 1 birim olanları da biliyorsun.

YÖ1: 64.

A: 6 birim olan kaç tane kare olacak?

YÖ1: (Saymaya başlar) 9 tane sanırım.

YÖ1, çizim temsilinden sonra diğer katılımcılardan farklı olarak en büyük kareden başlayarak probleme devam etmiştir. Bu şekilde zihinde canlandırma yapan katılımcı 7 birim büyüklüğündeki kareleri de keşfederek özelleştirme yapmıştır. Bunun yanı sıra 6 birim büyüklüğündeki kareleri de hesaplayan katılımcı daha sonraki adımı hesaplayamamıştır. Katılımcının problemde ilerleme yapamamasının en büyük sebeplerinden biri varsayımlarda bulunmamasıdır. Çünkü örüntüyü fark etmemiş ve görsel temsilden sistematik çıkarımlarda bulunamamıştır. Katılımcılardan YÖ8'in sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözüm süreci ise Şekil 117'deki gibidir:



Şekil 117. YÖ8'in sözel doğrulama ve ikna etme problemini çözüm süreci

YÖ8'de diğer katılımcılar gibi öncelikle satranç tahtasını temsil edecek bir çizim yapmıştır. Sonrasında ise Şekil 117'nin ilk kısmında görüldüğü gibi çizimi üzerinde çalışmalarını sürdürmüştür. Bununla birlikte YÖ8'in çizim temsiline ek olarak bulduğu değerleri de Şekil 117'nin ikinci kısmındaki gibi sistematik olarak not alması tablo temsili olarak düşünülmüştür. YÖ8 ile yapılan görüşme şu şekildedir:

A: Ne yapabiliriz bu problemde?

YÖ8: Satranç tahtası çizelim. Şu şekilde 64 kare var. Nasıl 204 olabilir? Peki, 204 tane olduğu doğru mu? Onu mu ispatlayacağım?

A: Evet onu ispatlamayı istiyor?

YÖ8: (Bir süre düşünür ve problemi tekrar okur). 1 birimin altı çizilmiş.

A: Şunu sorayım çizdiğin şekle baktığında başka kare görebiliyor musun?

YÖ8: *Hu, evet görüyorum. Mesela tahtanın kendisi de bir kare. Burada da var (4 birim büyüklüğünde bir kareyi gösterir). Buradan bölerek de kare olur (5 birimlik bir kareyi gösterir). Çok farklı kareler elde edebiliriz.*

A: *Demek ki 64'ün dışında da kareler varmış. Peki, 204 tane olduğunu hesaplayabilir misin?*

YÖ8: *(Tekrar düşünmeye başlar). 1 birim büyüklüğünde 64 kare var. Şekli 4'e bölssem kareleri hesaplayıp sonra da 4 ile çarpsam olabilir. Ya da şöyle yapalım kenar uzunluğu 8 birim olan 1 tane kare var. 7 birim olan da var (7 birim büyüklüğündeki kareleri farklı renkteki bir kalem ile çizer). 4 tane oluyormuş.*

A: *Güzel, bu buldukların senin ipucun olabilir.*

YÖ8: *(Bulduğu değerleri tablo temsili kullanarak not alır). Tamam, şimdi de 6 birim olan kareleri bulayım. Belki oradan yola çıkabilirim. Yeni bir şekil çizerek göstereyim (6 birim büyüklüğündeki kareleri gösterir). 9 tane oluyor (Not almaya devam eder). Örüntüden gidelim şimdi.*

A: *Tamam, belki bir örüntü yakalarsın.*

YÖ8: *İlk önce artı 3 olmuş, sonra artı 5 olmuş. Bir sonrakinde büyük ihtimal 7 olacak. 7 artarsa 16 olur. 4 birim uzunluğunda ise 9 artar 25 olur. Sonra 3 olduğunda 11 artar 36 olur. 2 olduğunda 13 artacak 49 yapar. 1 olduğunda 15 artacak 64 olacak. Zaten problemde verilmişti. (Toplama işlemini yapmak için bulduğu sayıları tekrar yazar) Bu sayılar hep bir şeyin karesi oluyor aynı zamanda. Şimdi toplayalım. Evet, 204 oldu.*

YÖ8 problemi okuduktan sonra problemi anlamlandırmak için görsel temsil oluşturmuştur. Katılımcı, satranç tahtasının bir temsilini çizmiş ve sonrasında problemi tekrar okuyarak anlamaya çalışmıştır. Bununla birlikte çizdiği şekil üzerinde, birimkarelerin dışında başka kareleri göstermesi de zihinde canlandırma yaptığını göstermektedir. Görselleştirmeyi yaptığı düşünülen katılımcı, 8 birim ve 7 birim büyüklüğündeki kareleri belli bir düzen içinde gösterdiği için özelleştirmeyi tamamlamıştır. Sonrasında ise bulduğu değerleri tablo temsiline belirtmiştir. YÖ8 tablo sayesinde örüntüyü fark etmiş ve artış miktarına odaklanarak dönüştürme göstergesi de sergilemiştir. Bununla birlikte artış miktarlarına yönelik yaptığı tahminler de varsayımda bulunma işaretidir. Katılımcı daha sonra genellemeye ulaşmıştır. Son olarak ise bulduğu değerleri toplayarak problemde isteneni doğrulamıştır.

4.3.8. Görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik bulgular

Beşinci sınıf öğrencileri dışındaki bütün katılımcılardan aynı görsel doğrulama ve ikna etme problemini yanıtlamaları istenmiştir. Bu probleme yönelik yedinci sınıf öğrencilerinden elde edilen bulgular Tablo 26’da sunulmaktadır:

Tablo 26

Yedinci sınıf öğrencilerinin görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	-
	Model	-
	Tablo	-
Görselleştirme	Dönüştürme	YÖ1, YÖ2, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ6, YÖ7, YÖ8
	Zihinde Canlandırma	-
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	YÖ1, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ6, YÖ7, YÖ8
	Genelleme	-
	Varsayımda Bulunma	YÖ1, YÖ2, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ6, YÖ7, YÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	YÖ1, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ6, YÖ7, YÖ8

Katılımcıların görsel doğrulama ve ikna etme probleminin çözümü için verilen görseli kullandıkları ve ek görsel temsil kullanmadıkları ortaya çıkmıştır. Bütün katılımcıların verilen görsel temsil ile etkileşimde bulunarak dönüştürme yaptıkları görülmüştür. Aynı zamanda bu katılımcıların tamamı varsayımlarda bulunmuşlardır. YÖ2 dışındaki katılımcılar özelleştirmeye yönelik göstergeler üretmişler ve varsayımlarını doğrulamaya yönelik girişimlerde bulunmuşlardır. Bu sınıf seviyesindeki en dikkat çekici sonuç, altıncı sınıf düzeyinde olduğu gibi katılımcıların hiçbirinin genelleme adımı için bir çaba içine girmemesidir.

Katılımcıların problem çözme süreçlerine bakıldığında öncelikle bir varsayımda bulunmaya çalıştıkları görülmüştür. Problemi okuyan katılımcıların tamamı ise başlangıçta yanlış varsayımlarda bulunmuşlardır. Katılımcıların varsayımda bulundukları kabul edilen bazı örnek ifadeleri aşağıdaki gibidir:

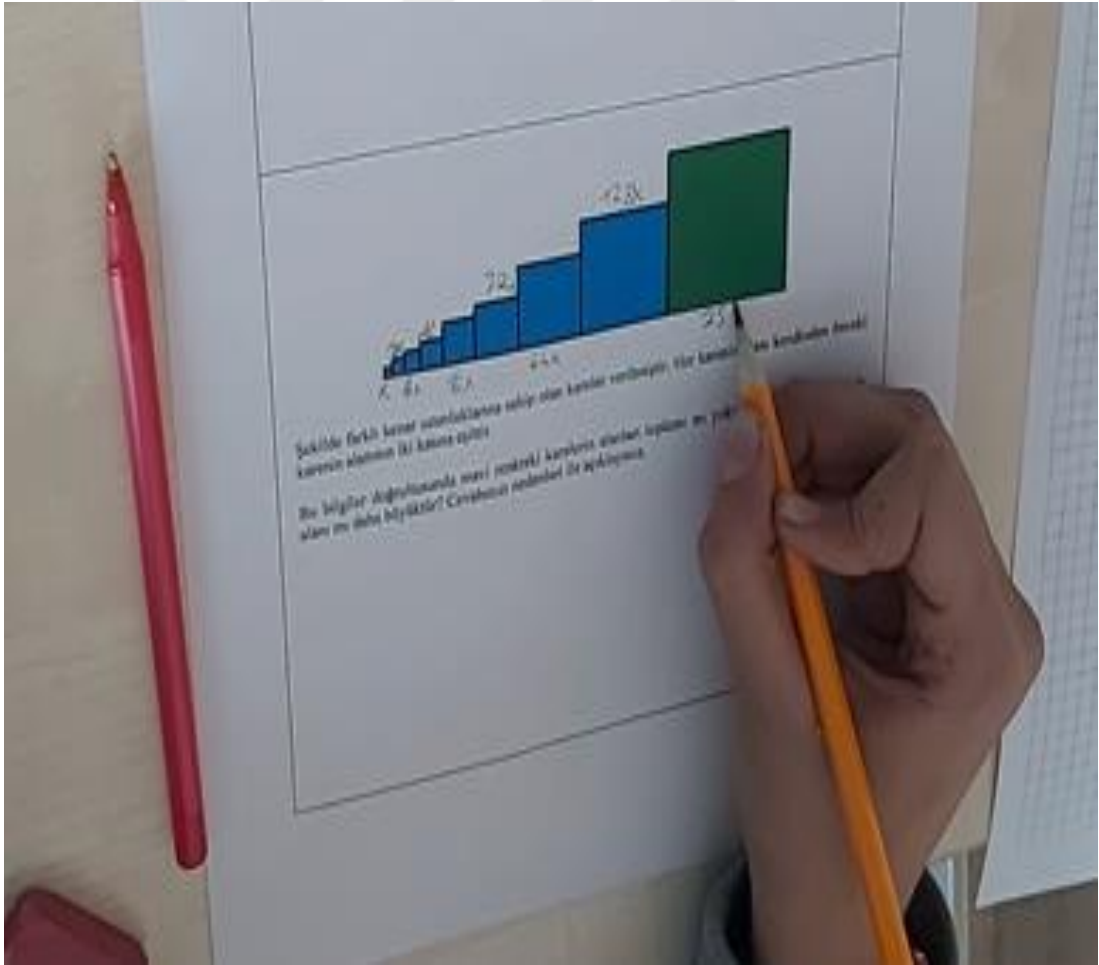
“Maviler daha büyüktür çünkü sayısı daha çok.” YÖ1

“Bence maviler daha çoktur. Çünkü kareler gittikçe iki katına çıkıyor. Mesela bu ikisini toptasam bile yeşilden büyük olabilir (Yeşilden önceki iki mavi kareyi gösteriyor).” YÖ5

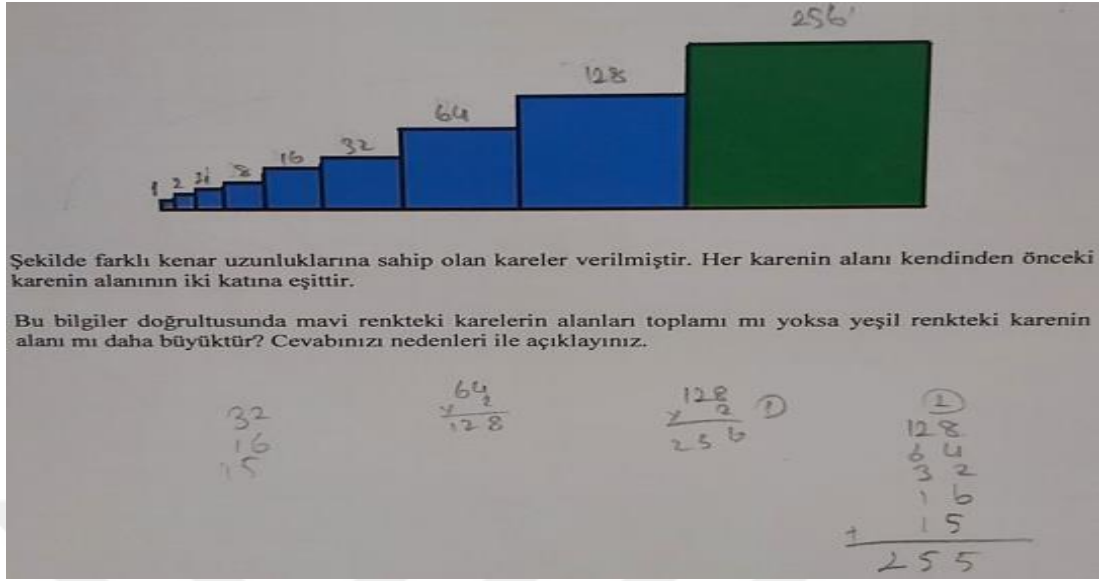
“Bence mavi karelerin alanı daha büyüktür. Çünkü hepsini teker teker alıp bir araya getirdiğimizde yeşilden daha büyük olacağını düşünüyorum.” YÖ7

“Bence maviler daha büyüktür. Bilmiyorum ama görsel açıdan bakınca maviler daha büyük gibi geldi.” YÖ8

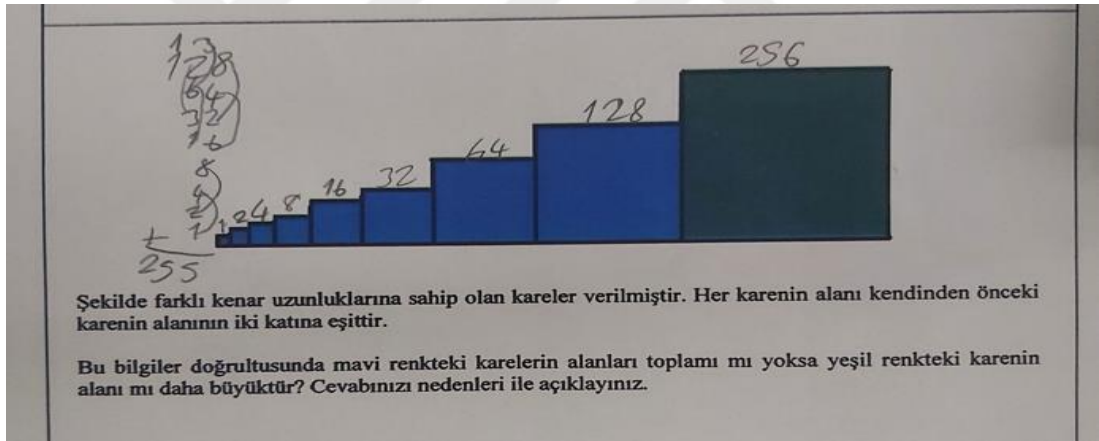
Yedinci sınıf öğrencilerinin yukarıdaki ifadelerine bakıldığında problemde verilen görselin onları yanılgıya götürdüğü görülmektedir. Problemin ilerleyen bölümlerinde yukarıdaki ifadelerini doğrulamak için katılımcıların tamamı karelerin alanlarına değer vermiştir. Burada YÖ7 dışındaki katılımcılar sayısal bir değer vermeyi kullanırken sadece YÖ7 cebirsel bir değer vermiştir. Katılımcıların bu girişimleri de varsayımında bulunma olarak değerlendirilebilir. Bazı katılımcıların çözüm örnekleri şu şekildedir:



Şekil 118. YÖ7'nin görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözümü



Şekil 119. YÖ3'ün görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözümü



Şekil 120. YÖ6'nın görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözümü

Katılımcıların herhangi bir sayısal değer verilmemesine rağmen kendilerinin görsel temsile matematiksel bir anlam yüklemeleri dönüştürme yaptıklarını göstermektedir. Bu aşamadan sonra bütün katılımcılar, en küçük kareden başlayarak dönüştürme yaparak özelleştirme aşamasını da tamamlamışlardır. Daha sonra ise YÖ2 dışındaki bütün katılımcıların doğrulama ve ikna etme adımını da tamamladığı tespit edilmiştir. YÖ2 de diğer katılımcılar gibi varsayımlarda bulunmuş, bu sayede belli kareler için dönüştürme yapmıştır. Ancak bu dönüştürme işlemlerinde sistematik değerler vermemesi özelleştirme yapamamasına sebep olmuştur. Ayrıca YÖ2'nin "Herhangi bir sayı belirtseydi yapabilirdim." söylemi doğrulama ve ikna etme yapamadığını göstermiştir. Diğer katılımcılardan YÖ5 ile yapılan görüşmenin bir kısmı ise şu şekildedir:

A: Peki işlem yapmak istesen ne yapabilirsin?

YÖ5: Bir karenin alanını buluruz önce.

A: Nasıl buluruz peki?

YÖ5: Değer vererek olabilir. Buraya 2 desek (En küçük kareden bahsediyor)
4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 şeklinde olur.

A: Tamam şimdi mavilerin daha çok olduğuna beni ikna et.

YÖ5: Şimdi bunların (mavilerin) alan ölçülerini toplarsak 512'den büyük olur.

A: Öyle mi peki?

YÖ5: Evet.

A: Neden? Ben ikna olmadım hala.

YÖ5: (Verdiği değerleri toplamaya başlar).

A: Topluyorsun sanırım mavi karelerin alanlarını?

YÖ5: Evet ama hepsini değil (256+128+64+32 işlemini yapar sadece). 480 yaptı. Kalanları da topladığımda 512'yi geçecektir. 16+8+4+2, 30 yapıyor. 30 daha ekleyelim.

A: Evet güzel düşündün.

YÖ5: (480+30 işlemini yapar) 510 yaptı.

A: Yani?

YÖ5: Yeşil karenin alanı daha büyükmüş. Çok şaşırtıcı.

YÖ5 problemin başından itibaren hep aynı iddiasına devam etmiştir. Problemin sonucuna yönelik yaptığı varsayımlarda ve özelleştirme aşamasında mavi karelerin toplamının hep büyük olacağını düşünmüştür. En sonda ulaştığı sonuç ise onu şaşırtmıştır. Diğer katılımcıların da büyük çoğunluğu benzer ifadelerde bulunmuş ve benzer süreçlerden geçmiştir. Örneğin; YÖ8 “Birinci kareye 1 diyelim. Sonra 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 diye gidecek. Bunları toplayalım. (Mavi karelere verdiği değerleri toplar) 255 oldu. 1 küçük çıktı. Çok yakın çıkmasına rağmen yeşil daha büyükmüş.” şeklinde bir ifade de bulunmuştur. Başka bir katılımcı YÖ7 ise “Bu 8x, 16x, 32x, 64x, 128x. Bu da 256x oluyor. Şimdi bunların alanını toplayacağız. Bakalım 256'dan büyük mü? (Toplama işlemini yapar) 255 yaptı. Yani yeşil karenin alanı daha büyük oldu. İlk baştaki bakışım beni yanılttı. Çok şaşırdım bu sonuca.” şeklinde doğrulama yapmıştır. Katılımcılar başlangıçta yanlış tahminlerde bulunsalar da tahminlerini kontrol etmek için yaptıkları işlemler doğrulama ve ikna etme göstergesi olarak değerlendirilmiştir.

4.4. Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Geometri Problemlerinde Görsel Akıl Yürütme Becerilerinin Rolü Nedir ve Nasıldır?

4.4.1. Sözel özelleştirme problemine yönelik bulgular

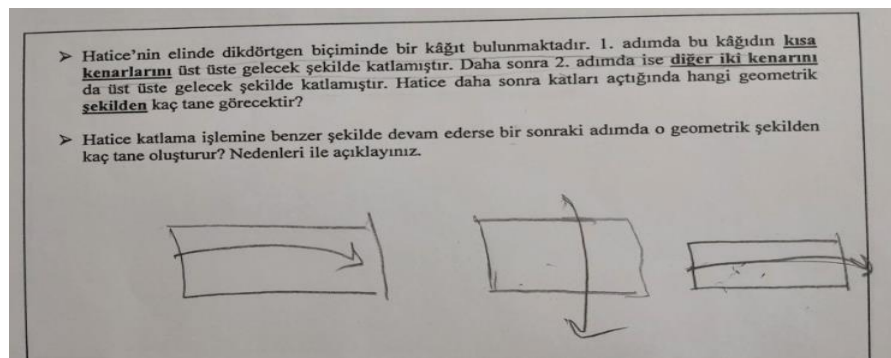
Sekizinci sınıf öğrencileri için sözel özelleştirme problemine yönelik olarak diğer sınıf düzeylerinde olduğu gibi kâğıt katlama ile ilgili bir problem sorulmuştur. Bu problemde elde edilen bulgular aşağıda sunulmaktadır:

Tablo 27

Sekizinci sınıf öğrencilerinin sözel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ6, SÖ8
	Model	SÖ3, SÖ4, SÖ7
	Tablo	-
Görselleştirme	Dönüştürme	SÖ6
	Zihinde Canlandırma	SÖ1, SÖ3, SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	SÖ1, SÖ3, SÖ4, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Genelleme	SÖ1, SÖ3, SÖ4, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Varsayımda Bulunma	SÖ3, SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7
	Doğrulama ve İkna Etme	SÖ3, SÖ4, SÖ6, SÖ7

Tablo 27'ye bakıldığında sözel özelleştirme probleminde sekizinci sınıf öğrencilerinin büyük çoğunluğunun görsel akıl yürütme becerilerini harekete geçirebildiği söylenebilir. SÖ5 dışındaki bütün katılımcıların çizim veya model kullanarak görsel temsil oluşturdukları görülmektedir. Katılımcılardan SÖ3 ise hem çizim hem model kullanarak çözüm yapmıştır. Bunun yanında çizim yerine model kullanan bütün katılımcılar matematiksel düşünme bileşeninin tüm göstergelerini sergilemişlerdir. Bu problemin çözümüne yönelik olarak sekizinci sınıf öğrencilerinden SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ6 ve SÖ8 çizim yapmışlardır. Öğrencilerin oluşturdukları bazı çizim örnekleri şu şekildedir:

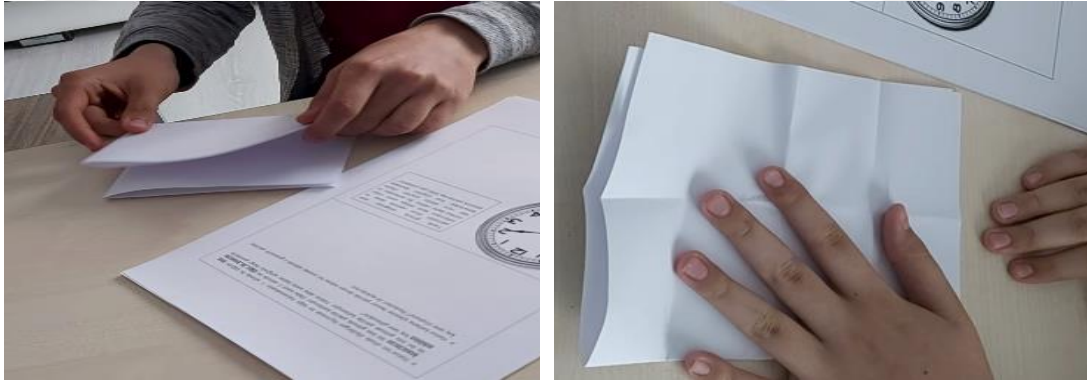


Şekil 121. SÖ2'nin sözel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil



Şekil 122. SÖ6'nın sözel özelleştirme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil

Çizim yapan öğrencilerin yanı sıra SÖ3, SÖ4, SÖ7 kodlu öğrenciler model kullanarak çözüm yapmayı planlamışlardır. Bu öğrencilerin kullandıkları bazı model örnekleri aşağıda gösterilmiştir:



Şekil 123. SÖ4 ve SÖ7'nin sözel özelleştirme problemi için oluşturdukları görsel temsiller

Görselleştirme bileşenine bakacak olursak SÖ2 dışındaki bütün öğrencilerin görselleştirme yaptıklarına yönelik göstergeler bulunmuştur. SÖ2 problemin çözümüne yönelik görsel temsil kullanmış ancak görselleştirme ve matematiksel düşünme aşamasına geçememiştir. Öğrencinin bu aşamaya geçemediğini gösteren diyalog aşağıdaki gibidir:

A: Evet nasıl katlayacağız peki bu sefer?

SÖ2: Diğer iki kenarı yani üst ile alt kenarı (Şekil üzerinden gösterir). Bu sefer toplam 4 tane dikdörtgen oldu.

A: Güzel, problemin birinci kısmı bitti. Devam edelim probleme.

SÖ2: İlk iki adımı bulduk. Sonra yine burayı katlarsak 6 olur. Her katladığımızda 2 tane dikdörtgen artıyorsa bu sefer 6 olur.

İlk iki adımı çizdiği şekil üzerinden bulan SÖ2 bir sonraki adımda artış sayısına odaklanarak yanlış bir cevap vermiştir. Katılımcı katlama yönünü doğru yapsa da katlama sonucunda oluşacak dikdörtgenleri zihninde canlandıramadığı söylenebilir. Yukarıdaki görüşmeye bir süre devam edilmiş ancak diğer bileşenlere ait göstergeler elde edilememiştir.

Katılımcılardan SÖ5 ise hiçbir görsel temsil kullanmasa da önce bir varsayımda bulunmuş devamında görselleştirmeye yönelik göstergelerde bulunmuştur. SÖ5 ile geçen diyalog şu şekildedir:

A: Peki nasıl bir çözüm izleyeceksin burada? Ne düşünüyorsun?

SÖ5: Ben dikdörtgen olabileceğini düşünüyorum. 4 tane oluyor.

A: Adım adım anlatabilir misin nasıl yaptığını?

SÖ5: İlk önce kısa kenarları katlayınca 2 eş dikdörtgen oluyor. Ondan sonra diğer katlamada 4 tane dikdörtgen olur.

A: Tamam devam edelim probleme.

SÖ5: (Düşünmeye başlar).

A: Sana bir sonraki adımla ilgili bir şeyler soruyor.

SÖ5: Bir daha katladığımda 16 tane oluyor. Yok, 8 oluyor.

A: 8 mi 16 mı oluyor?

SÖ5: (Düşünmeye devam eder). 8.

A: Peki başka nasıl çözülebilir bu problem? Sen zihninden yapmaya çalıştın sadece başka bir yolu var mı sence?

SÖ5: Şekil çizmeye çalışsam... Olmaz.

A: Neden şekil çizerek olmaz?

SÖ5: Çünkü çok uğraştırır.

SÖ5 problemi okuyup düşündükten sonra bir tahminde bulunmuş ancak tahminini açıklamak için somut bir girişimde bulunamamıştır. Katlamaların nasıl olacağına dair yaptığı sözel açıklama zihinde canlandırma yapabildiğini göstermektedir. Bunun yanında şekil çizmek öğrencinin aklına gelse de uğraştırıcı bulduğu için denememiştir. Görüşmenin devamında öğrenci bazı denemeler yapsa da katlama işleminin üçüncü adımına ulaşamamıştır.

Diğer katılımcıların görselleştirme bileşeni için zihinde canlandırma yapabildiklerine yönelik birçok kanıt bulunmuştur. Örneğin; SÖ1 “Çünkü zaten 4 tane vardı. Bir katlama daha yaptığımda üst üste 4 dikdörtgen gelmiş olur. O zamanda 8 olur.” yorumunda bulunarak zihinde canlandırma yaptığını göstermiştir. SÖ8 ise “Şekil kullanmak daha kolay oldu benim için. Hem zihnimde canlandırıdım hem de görmüş oldum.” şeklinde bir ifade de bulunmuştur. Katılımcılardan SÖ4 ve SÖ6 ise problemin çözümü için açıklamalar yaparken sanki elleri ile katlamalar yapıyormuş gibi davranışlar göstermişlerdir (bkz. Şekil 122). Elleri ile katlama işlemlerini yapması yaşadıkları bilişsel sürecin bir dış temsili olarak yorumlanmıştır. Görselleştirme yapabilen öğrencilerden SÖ6’nın hem dönüştürme hem de zihinde canlandırma yaptığı görülmüştür. Katılımcı problemin çözümü için öncelikle dikdörtgen çizmiş ve çizdiği dikdörtgende cebirsel ifadelere de yer vererek bir ilişkilendirme yapmıştır. Daha sonra ise bu temsilden ayrı olarak yukarıda da bahsedildiği gibi zihinde canlandırma yaptığı görülmüştür.

Matematiksel düşünme bileşenine bakıldığında ise özelleştirme yapan SÖ1, SÖ3, SÖ4, SÖ6, SÖ7 ve SÖ8’in aynı zamanda genelleme de yaptıklarına ulaşılmıştır. Bu öğrencilerden SÖ3, SÖ4, SÖ6 ve SÖ7’nin ise görsel akıl yürütme süreçlerinde varsayımda bulundukları ve varsayımlarını doğrulamaya yönelik açıklamalar yaptıkları da tespit edilmiştir. SÖ3 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıdaki gibi gerçekleşmiştir:

A: Aklından ne geçiyor bana da açıkla mısın?

SÖ3: İlk başta kısa kenarları katlanacakmış (Ortamdaki kâğıdı eline alır).

A: Tahminin var mı peki önce onu sorayım?

SÖ3: Galiba 4 tane dikdörtgen olacak (Kâğıdı katlayarak gösterir).

A: Peki sonraki adımda nasıl olacak?

SÖ3: (Kâğıdı tekrar eline alır).

A: Yine önce tahminini alayım senin?

SÖ3: (Bir süre düşünür). 8 olabilir.

A: Tamam bakalım öyle mi?

SÖ3: Böyle katlayacakmışız. Evet, 8 tane oldu. 2’nin katları şeklinde olacak.

A: O zaman bir sonraki adımda nasıl olur?

SÖ3: 16.

A: Sonraki?

SÖ3: 32, 64, 128 şeklinde olur.

A: Bu durum matematiksel olarak nasıl ifade edilebilir?

SÖ3: 2’nin kuvvetleri olarak gidiyor. 2 üssü 1, 2 üssü 2, 2 üssü 3 gibi.

A: Cebirsel olarak söylesek nasıl olur?

SÖ3: x kare mi? Yok 2 üssü x .

SÖ3 ile yapılan görüşmede katılımcı problemin başında bir tahminde bulunmuş sonra model kullanarak tahmininin doğruluğunu göstermiştir. Kullandığı model sayesinde özelleştirmeyi tamamlamış ve devamında da genellemeye ulaşmıştır. Tüm matematiksel düşünme göstergelerini ortaya koyan bir diğer katılımcı SÖ7 ile yapılan görüşme şu şekildedir:

A: Tamam diğer kenarları da katladın. Açtığına ne oluşacak?

SÖ7: Herhalde dikdörtgen olur. Bakalım kaç tane oluyor. 4 tane oldu.

A: Güzel problemin ilk kısmını bu şekilde yaptın peki ikinci kısımda ne diyor?

SÖ7: (Problemin devamını okur ve tekrar kâğıdı eline alır).

A: Önce bir tahminde bulunalım mı?

SÖ7: Tamam. (Bir süre düşünür) Tekrar böyle katlarsak 16 tane olabilir.

A: 16 mı tamam deneyelim.

SÖ7: (Katlamaya devam eder).

A: İkinci katlamayı yapmadan şu an kaç tane oldu?

SÖ7: Şu anda 8 oldu.

A: Bir daha yaparsak?

SÖ7: 16.

A: Tamam yapalım onu da.

SÖ7: (Kâğıdı katlar ve sonra açarak gösterir).

A: Güzel. Peki, neden böyle oldu?

SÖ7: Çünkü ilk katladığımızda 1 taneydi, 2 ile çarptık 2 oldu. Sonra iki dikdörtgen olduğunda tekrar katladık 2 kere 2, 4 oldu. Bir daha katladığımızda 8 olacak. Sonra da 16 olacak.

A: Kuralımız böyle devam edecek yani? Beşinci adımı sorsaydım peki?

SÖ7: Beşinci adımda da 2 üzeri 5, 32 olurdu.

A: Evet güzel. n . adımda ne olacak?

SÖ7: 2 üzeri n .

SÖ7 de SÖ3 ile benzer süreçleri gerçekleştirmiştir. Önce tahminde bulunmuş sonrasında model kullanarak varsayımını doğrulamıştır. Devamında ise özelleştirmeyi gerçekleştirmiş ve genellemeye ulaşmıştır.

4.4.2. Görsel özelleştirme problemine yönelik bulgular

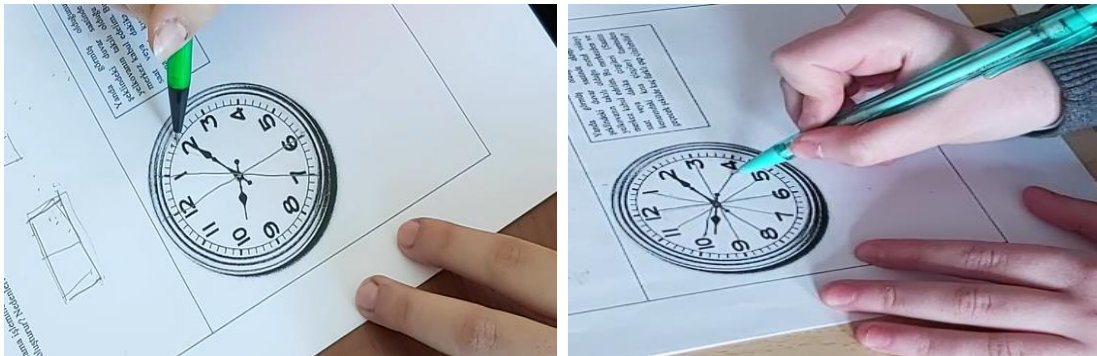
Görsel özelleştirme problemine yönelik olarak daire şeklindeki bir duvar saatinin kenarındaki kısa çizgiler üzerinden geçecek şekilde kaç farklı çap çizilebileceği ile ilgili bir problem öğrencilere yöneltilmiştir. Bu probleminden elde edilen bulgular Tablo 28’de gösterilmektedir:

Tablo 28

Sekizinci sınıf öğrencilerinin görsel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Model	-
	Tablo	-
Görselleştirme	Dönüştürme	SÖ2, SÖ3, SÖ5, SÖ7, SÖ8
	Zihinde Canlandırma	-
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	SÖ3, SÖ5, SÖ7, SÖ8
	Genelleme	-
	Varsayımda Bulunma	-
	Doğrulama ve İkna Etme	-

Sekizinci sınıf öğrencilerinin görsel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri incelendiğinde öğrencilerin tamamının çizim temsilini kullandığı tespit edilmiştir. Öğrencilerin verilen görsel üzerinde ek çizimler yaparak problemi anlamlandırmaya çalıştıkları söylenebilir. Yapılan çizimler ise problemde de sınırlandırıldığı gibi çap oluşturmakla ilgili olmuştur. Bu problemde öğrencilerin diğer temsil çeşitlerine ihtiyaç duymadıkları görülmüştür. Çizim yapan öğrencilerden SÖ1, SÖ4 ve SÖ6 problemin çözümüne yönelik ilerlemede bulunamamıştır. Bu öğrencilerden SÖ1 ve SÖ6’nın yaptıkları çizimler aşağıdaki gibidir:



Şekil 124. SÖ1 ve SÖ6’nın görsel özelleştirme problemine yönelik oluşturdukları görsel temsiller

Görsel özelleştirme problemi görselleştirme ve matematiksel düşünme bileşenleri açısından değerlendirildiğinde SÖ2, SÖ3, SÖ5, SÖ7 ve SÖ8'in verdikleri cevaplardan görselleştirmenin gerçekleştirildiğine yönelik kanıtlar bulunduğu görülmüştür. Görselleştirme yapan bütün öğrencilerin ise problem çözüm süreçlerinde dönüştürme işlemini yaptıkları görülmüştür. Yani bu öğrenciler bir görsel temsil kullanmışlar ve bu temsil sayesinde matematiksel ifadelere geçiş yapmışlardır. Bunun yanında SÖ2 dışındaki katılımcıların özelleştirmeyi de yapabildikleri bulgusuna ulaşılmıştır. Sadece görselleştirme yapan SÖ2 ile gerçekleşen diyalog ise şu şekildedir:

A: Çap nasıl oluyordu?

SÖ2: Mesela şöyle bir şey yaparsam bu çap olur (Saat üzerinde bir çap çizer).

A: Güzel. Bunun gibi kaç tane çap olabilir bu saat üzerinde?

SÖ2: Saatte 12 sayı olduğu için 12 tane olabilir. Şöyle 1, 2 dersek olur (Saat çizgilerinden geçen diğer çapları da gösterir).

A: Emin misin?

SÖ2: (Tekrar düşünür) 6 tane olur.

A: Neden?

SÖ2: Çünkü saatte 12 sayı var. Biz burada yarıçap değil çap oluşturuyoruz. Yarıçap olsaydı 12 tane olurdu. Çap olduğu için 6 olacak.

A: Tamam saat çizgileri üzerinden bu şekilde olacak. Başka çap çizilemez mi peki?

SÖ2: (Problemi tekrar okur). Saatin kenarındaki kısa çizgiler diyor. Bu çizgileri diyor (Kalemle gösterir). Bunlarla beraber bulacağız. Burada 5 tane var (İki saat çizgisi arasını gösterir). 5 kere 6, 30 tane.

A: Nasıl buldun?

SÖ2: Çünkü 6 tane bulmuştuk. 6 kere 5'ten 30.

SÖ2 problem üzerinde bir süre düşündükten sonra doğru yanıtı ulaşmıştır ancak doğru bir akıl yürütme gerçekleştirdiği söylenemez. Diyaloğu yorumlayacak olursak, katılımcı saat çizgileri üzerinden geçen çapların sayısı için ilk başta 12 dese de daha sonra üzerinde tekrar düşünerek 6 sonucuna varmıştır. Yaptığı açıklama ile de görselleştirmenin olduğu düşünülmektedir. Ancak problemin devamında yaptığı açıklamalar matematiksel düşünmenin gerçekleştiği konusunda yeterli bulunmamıştır. Görselleştirmeye ve matematiksel düşünmeye yönelik göstergelere sahip olan SÖ3'ün düşünceleri ise şu şekildedir:

A: Ne düşünüyorsun peki?

SÖ3: Buradan bir defa çizilebilir (2 ve 8 üzerinden bir çap çizer). Buralardan da çizilebilir. Dakika çizgileri de var. (Bir süre düşünür) 72 galiba.

A: Nasıl buldun?

SÖ3: Bir dakika. Yok 60.

A: Neden?

SÖ3: Çünkü bir saat diliminde 5 tane var 12 ile çarparsak 60.

A: Sadece saat çizgileri üzerinden çizsek kaç tane olur?

SÖ3: 12 tane.

A: Gösterir misin?

SÖ3: (Çizmeye başlar) Aaa şimdi anladım 30 tane.

A: Neden?

SÖ3: Çünkü ikisi 1 defa bağlanıyor. Bu durumda 30 tane oluyor.

SÖ3 problemin çözümüne bir görsel temsil ile başlamış ve devamında problemin sonucunu bulmaya çalışmıştır. Ancak bu aşamaya kadar görselleştirme yapamadığı görülmüştür. Daha sonra öğrenciden bulduğu çapları göstermesi istenmiştir. Öğrencinin tekrar çizim yapması sonucunda görsel temsilin matematiksel bir yapıya dönüştüğü söylenebilir. Bu da görselleştirmenin gerçekleştiğini göstermektedir. Yaptığı açıklama da matematiksel düşünme göstergesi olarak düşünülmüştür. Görselleştirmeye ve matematiksel düşünmeye yönelik göstergelere sahip olan bir diğer katılımcı SÖ8'in düşünceleri ise şu şekildedir:

A: Ne yapacaksın çözüm için?

SÖ8: 60 tane çizgi var.

A: 60 tane mi çizilebiliyor bu durumda?

SÖ8: 60 tane çiziliyor muhtemelen (Bir süre düşünür ve sonrasında saat üzerindeki bazı çapları çizmeye başlar).

A: Hepsini çizerek mi bulacağız peki?

SÖ8: Bazılarını çizip sonrasında çarpma yapacağım. Bir saat diliminde 5 tane yapıyormuş. 1, 2, 3, 4, ..., 12 ile çarpmamız lazım. 12 çarpı 5, 60 tane. Sonra bölü 2 30 olur.

A: Neden?

SÖ8: Çünkü mesela burada ve burada 1 tane çap oluşur (Karşılıklı olan 5 ve 11 sayılarını gösterir).

SÖ8 de yaptığı çizimler sonrasında dönüştürmeyi gerçekleştirmiş ve bu işlem görselleştirme göstergesi olarak kabul edilmiştir. Son olarak yapılan açıklama ile de özelleştirmenin yapıldığı düşünülmektedir.

4.4.3. Sözel genelleme problemine yönelik bulgular

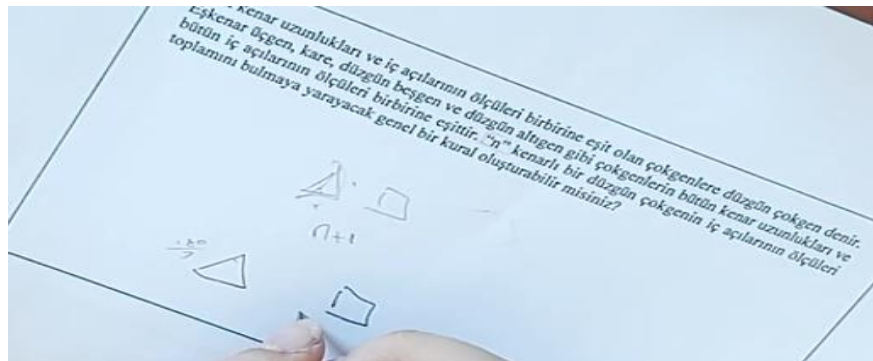
Sözel genelleme problemine yönelik olarak çokgenlerin iç açıları toplamı ile ilgili bir problem sorulmuştur. Aynı problem yedinci sınıf düzeyindeki bir kazanımla yakından ilişkili olduğu için her iki sınıf düzeyine de yöneltmiştir. Bu problemin çözüm sürecinde ortaya çıkan bulgular Tablo 29’da gösterilmektedir.

Tablo 29

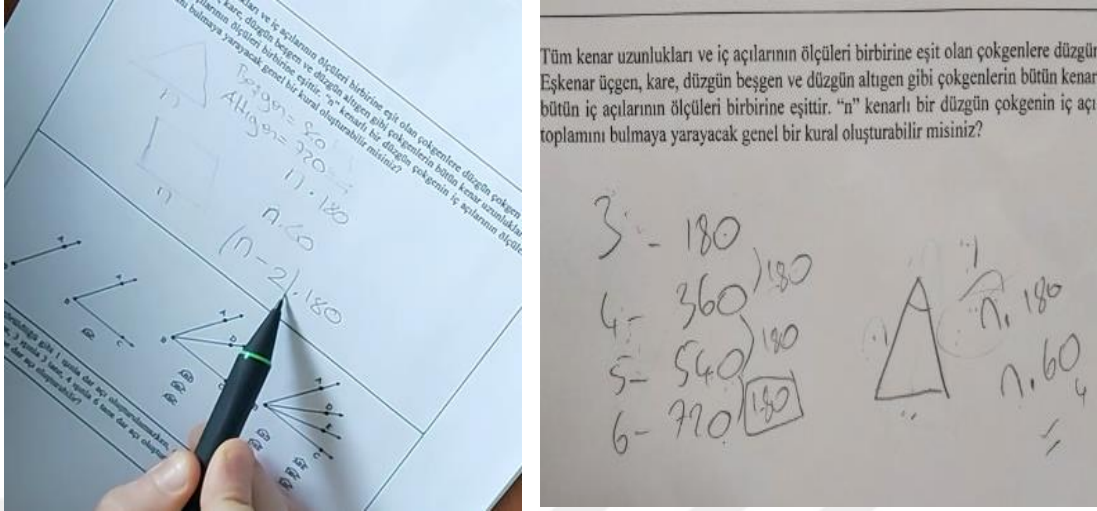
Sekizinci sınıf öğrencilerinin sözel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	SÖ1, SÖ5, SÖ8
	Model	-
	Tablo	SÖ5, SÖ7, SÖ8
Görselleştirme	Dönüştürme	SÖ5, SÖ7, SÖ8
	Zihinde Canlandırma	-
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	SÖ5, SÖ7, SÖ8
	Genelleme	SÖ5, SÖ7
	Varsayımda Bulunma	SÖ5, SÖ7, SÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	-

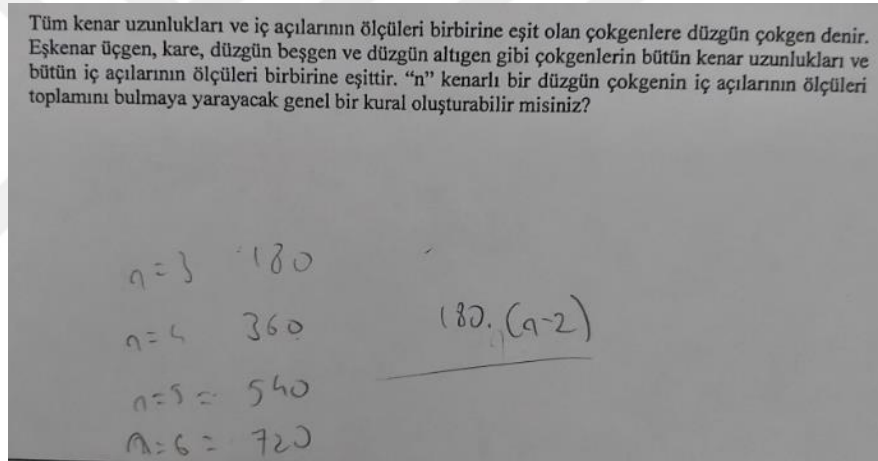
Katılımcıların sözel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri incelendiğinde katılımcıların yarısının problem çözümünde ilerleme gerçekleştiremedikleri görülmüştür. Sadece 4 katılımcının görsel temsil kullandığı tespit edilmiştir. Temsil olarak ise çizim ve tablo kullandıkları belirlenmiştir. SÖ1 çizim, SÖ7 tablo, SÖ5 ve SÖ8 ise hem çizim hem tablo kullanarak problemi çözmeye çalışmışlardır. Katılımcıların oluşturdukları görsel temsiller aşağıdaki gibidir:



Şekil 125. SÖ1’in sözel genelleme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil



Şekil 126. SÖ5 ve SÖ8'in sözel genelleme problemine yönelik oluşturdukları görsel temsiller



Şekil 127. SÖ7'nin sözel genelleme problemine yönelik oluşturduğu görsel temsil

Katılımcılardan SÖ1 görsel temsil kullandıktan sonra görselleştirme gerçekleştirememiştir. Diğer katılımcıların ise kullandıkları temsillerden dönüştürme yaparak görselleştirme yaptıkları bulunmuştur. Görselleştirme yapan SÖ8 ile yapılan görüşmenin bir kısmı aşağıdadır:

SÖ8: Kenar sayısı arttıkça açılar toplamı da artıyor.

A: Evet artıyor.

SÖ8: 3 kenarlı da 180. 4 kenarlı da 360. 5 kenarlı da 540. 6 kenarlı olduğunda 720. Belki buradan bulabilirim.

A: Olabilir.

SÖ8: Hep 180, 180 artıyor. n artı 180 mi olacak? Ama olmuyor.

SÖ8 ile yapılan görüşmede katılımcı problem üzerinde düşündükten sonra tablo temsilini kullanır. Bu aynı zamanda problem için bir özelleştirme yapıldığını göstermektedir. Devamında ise artış miktarını bulması tablodan çıkardığı bir yorumdur ve bu bir dönüştürme göstergesidir. Görselleştirmenin yanında problemin çözümü için varsayımda da bulunmuş ancak bir genellemeye ulaşamamıştır. SÖ7 ile gerçekleşen görüşme ise şu şekildedir:

SÖ7: *Şu an bildiklerimi düşünüyorum. n'e 3 dersek 180 oluyor. n'e 4 dersek 360 olur.*

A: *Evet. n'e 5 dersen ne olur?*

SÖ7: *520 idi galiba. Yok 540. O zaman her seferinde 180 artıyor.*

A: *Güzel önemli bir şey yakaladın. Bu senin bulacağın kural ile ilgili olabilir.*

SÖ7: *Evet. 6. adımda da 720 olur.*

A: *Buradan sonra ne yapabiliriz peki?*

SÖ7: *İlk başta 180'in 1 katıydı. Sonra 2 katı, 3 katı, 4 katı şeklinde gitti.*

A: *Bunlar da senin için bir ipucu tabi ki. Tahminlerde bulunalım istersen.*

Kural dediğimiz şey nasıl bir şey olabilir?

SÖ7: *(Bir süre düşünür). İçinde n geçecek.*

A: *Güzel. Başka?*

SÖ7: *Belki 180 de geçebilir. n çarpı 180 desek olabilir mi? İlk önce üçgenden başlayalım. 180 çarpı 3, 540 eder.*

A: *Yani sağlamadı kuralını?*

SÖ7: *Evet. O zaman şöyle olabilir. 180 çarpı n eksi 2.*

SÖ7'nin bu problemin başından sonuna kadar bilinçli bir şekilde hareket ettiği söylenebilir. Genellemeye ulaşmak için çokgenler ile ilgili temel bilgilerini hatırlamaya çalışmış ve bunları tablo temsili kullanarak not almıştır. Yapılan işlem SÖ8'in yaptığı gibi bir özelleştirmedir. Bunun yanında tabloya yazdığı açılış değerlerini kullanarak matematiksel bir çıkarım yapmıştır. Bu adım bir dönüştürme, dolayısıyla da görselleştirme olarak sayılabilir. Devamında ise varsayımda bulunmuş ve sonuç olarak genellemeye ulaşmıştır. SÖ7 ile benzer süreçleri yaşayan SÖ5'in çözümünün son aşaması ise şu şekildedir:

SÖ5: *Bunu 1 kere 180 ile çarpıyoruz (Üçgeni gösteriyor). Bunu 2 kere (Kareyi gösteriyor). Böyle gidiyor.*

A: *Evet.*

SÖ5: Kenar sayısı 3, çarpı 60. n çarpı 60 mı? Hayır, 1 dakika.

A: Bu yazdığın kural üçgen için sağlarken dörtgen için sağlamıyor. 4 çarpı 60, 240.

SÖ5: Evet.

A: Her seferinde sağlayacak bir kural olması lazım.

SÖ5: Bunu da 3 ile çarpınca oluyor (Beşgeni gösteriyor). Bunda da 4 (Altıgeni gösteriyor). Ama ne yapacağım? Kenar sayısının iki eksiği ile çarpıyor $((n - 2) \times 180)$ yazar).

A: Bu sağlıyor mu acaba?

SÖ5: (Altıgen için sağlama yapıyor) Evet sağlıyor.

Katılımcı özelleştirme ve görselleştirmeyi tamamladıktan sonra bazı varsayımlarda bulunmuştur. Problemin sonucuna yaklaştığı anda bir kafa karışıklığı yaşadığı söylenebilir. Devamında ise varsayımını kontrol ederken genellemeye ulaşmıştır.

4.4.4. Görsel genelleme problemine yönelik bulgular

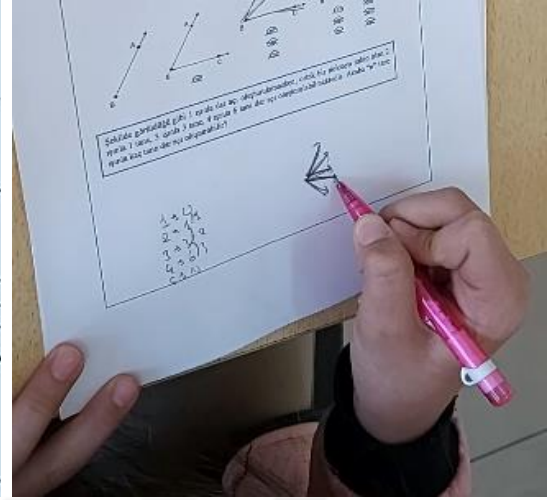
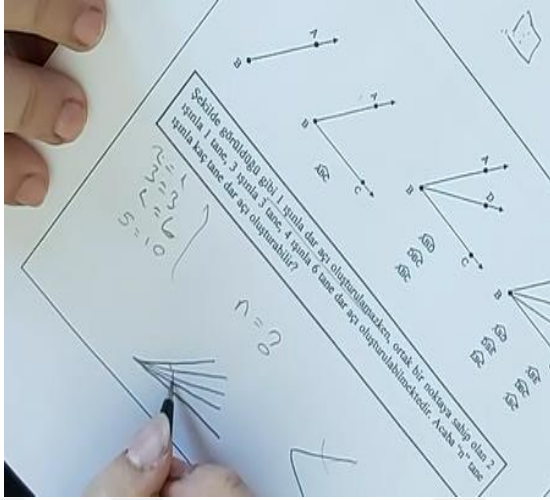
Sekizinci sınıf öğrencilerine görsel genelleme problemi için açılış bilgilerini kullanarak örüntü aramaya sevk eden bir problem yöneltilmiştir. Katılımcılardan sunulan görseller yardımıyla ileriki adımlar için oluşturulacak açılış sayılarını bulmaları istenmektedir. Bu problemten elde edilen bulgular aşağıda sunulmaktadır:

Tablo 30

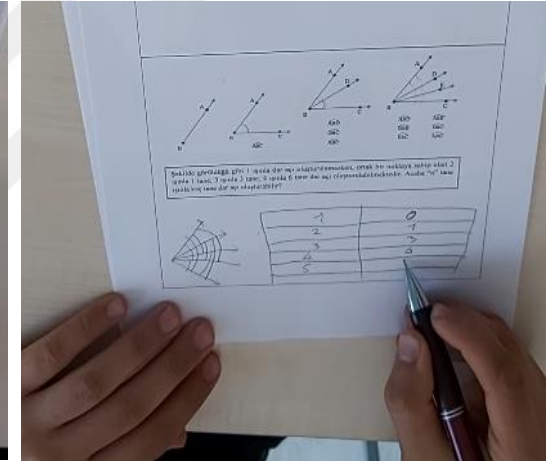
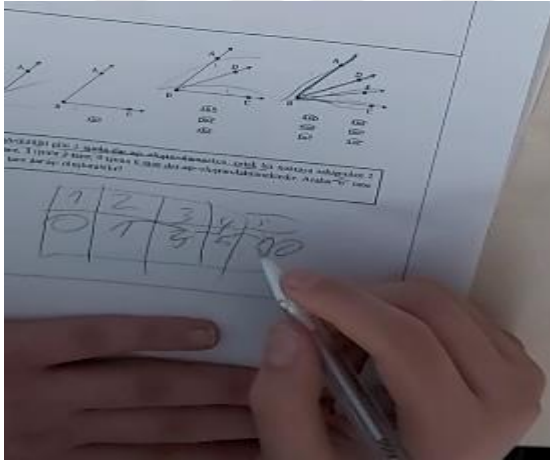
Sekizinci sınıf öğrencilerinin görsel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Model	-
	Tablo	SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ4, SÖ6, SÖ7, SÖ8
Görselleştirme	Dönüştürme	SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Zihinde Canlandırma	-
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Genelleme	SÖ7
	Varsayımda Bulunma	SÖ2, SÖ3, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	-

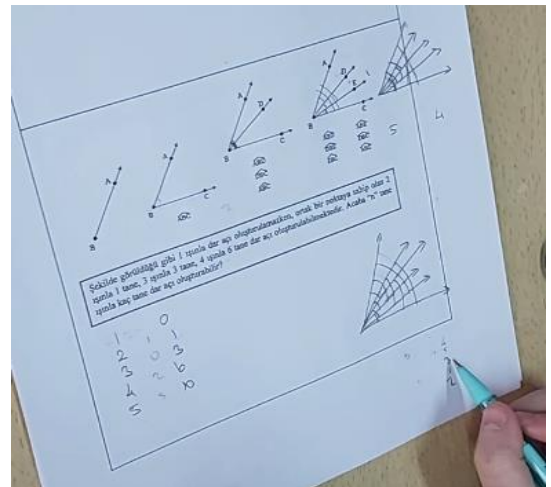
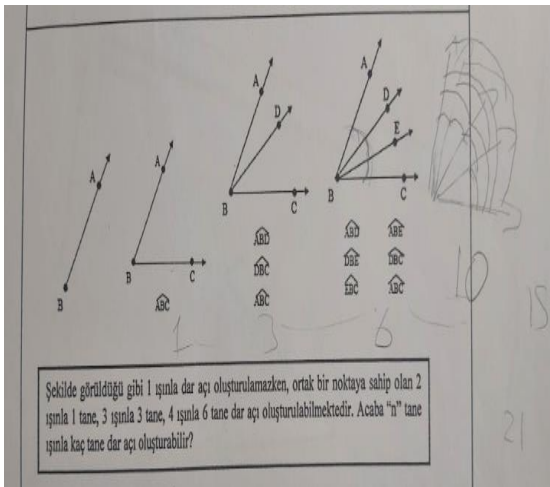
Tablo 30 incelendiğinde katılımcıların tamamının görsel genelleme problemini çözerken çizim temsili kullandığı gözlenmiştir. Bunun yanında SÖ5 dışındaki öğrencilerin çizim temsili için yanı sıra tablo yaptıkları da görülmüştür. Katılımcıların oluşturdukları bazı görsel temsiller aşağıda gösterilmektedir:



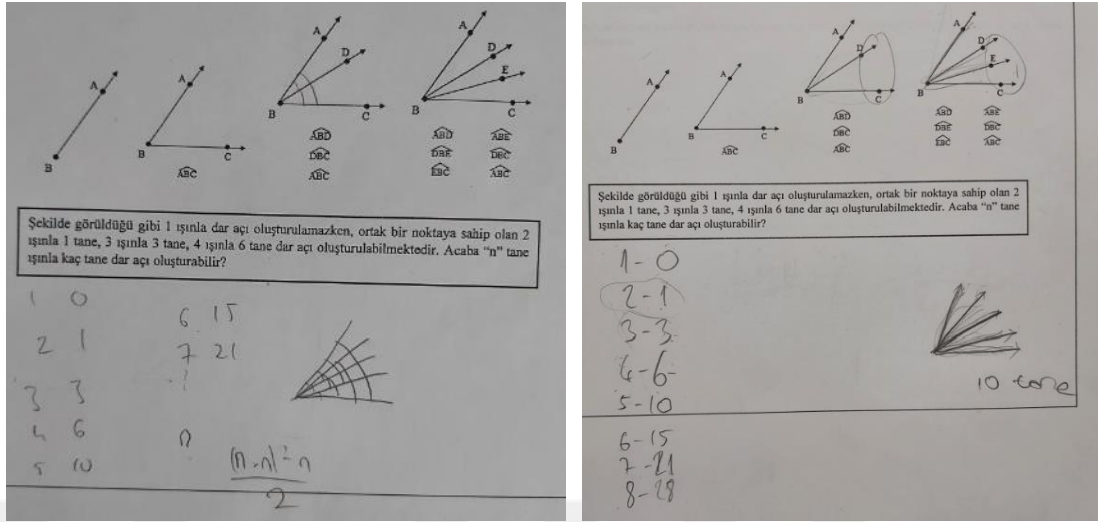
Şekil 128. SÖ1 ve SÖ2'nin görsel genelleme problemi için oluşturdukları görsel temsiller



Şekil 129. SÖ3 ve SÖ4'ün görsel genelleme problemi için oluşturdukları görsel temsiller



Şekil 130. SÖ5 ve SÖ6'nın görsel genelleme problemi için oluşturdukları görsel temsiller



Şekil 131. SÖ7 ve SÖ8'in görsel genelleme problemi için oluşturdukları görsel temsiller

Katılımcılar genel olarak problemi çözerken öncelikle örüntüyü keşfetmeye odaklanmışlardır. Bunun için de bir sonraki adımı şekil çizerek bulmaya çalışmışlardır. Daha sonra ise buldukları değerleri tabloya yerleştirerek görselleştirme yaptıkları söylenebilir. Görselleştirme için bütün katılımcıların dönüştürmeye yönelik göstergelerde bulunduklarına ulaşılmıştır. Katılımcıların dönüştürme yaptıklarına yönelik bazı örnek ifadeler şu şekildedir:

"Burada 2 artmış. 3 artmış. Sonra da 4 artarak gidecek." **SÖ1**

"(Verilenleri tablo halinde yazmaya başlar). 1, 2, 3 sırasıyla artmış bunlar böyle (Artış miktarını bulur). 5 ışın olsaydı 4 artacaktı. Yani 10 olurdu." **SÖ2**

"2 tane ışın ile 1 açı, 3 tane ile 3 açı oluyordu. 2 arttı yani (Tablo yaparak verilenleri not alır). 5 tane ile 15 olabilir mi? Artış miktarına göre hareket ettim. 5 açı olduğunda da 4 artacak. Pardon 10 olur." **SÖ3**

"(Tablo yapmaya başlar) 1. adımda yoktu. 2. adımda 1 tane. 3. adımda 3 tane. 4. adımda 6 tane oldu. 5'te de 10 tane oldu. 2 artmış, 3 artmış, 4 artmış. Hım kural böyle o zaman. Bir daha olsa 5 artıp 15 tane olur." **SÖ4**

"Şuraya çizeyim. 5 tane çizdiğimizde arada 4 tane açı olacak. Sonra 2 tanesi 1 tane daha oluşturacak. 5, 6, 7. Şu ikisi ile 8, 9. Bir de kendisi 10." **SÖ6**

“Şu şekilde oluyor o zaman. 2’de 1, 3’te 3, 4’te 6, 5’te 10 olacak büyük ihtimalle (Tablo yaparak yazmaya başlar). İlk önce 1 artmış sonra 2 artmış sonra 3 artmış. Bu düzende devam ediyor. Şimdi 4 artacak, sonra 5 artacak, sonra 6 artacak ve bu şekilde devam edecek.” SÖ7

Yukarıdaki gibi tablo veya çizim yoluyla dönüştürme yapabilen öğrencilerin aynı zamanda özelleştirme yaptıkları da düşünülmektedir. Çünkü artış miktarlarını bularak bir dönüştürme yapmışlar ve devamında sonraki adımlara da rahatlıkla ulaşmışlardır. Buradan sonra ise katılımcılardan bazıları çeşitli varsayımlarda bulunmuşlardır. Bu varsayımların doğru ya da yanlış olmasından ziyade ortaya bir iddia atabilmeleri değerli görülmektedir. Katılımcılardan SÖ2, SÖ3, SÖ6 ve SÖ8 yaptıkları varsayımların yanlış olduğuna ulaşmışlar ancak doğru varsayımı yapamamışlardır. SÖ7 de yanlış varsayımlarda bulunmuş ancak varsayımlarını çeşitlendirerek doğru varsayımda bulunmuştur. Nitekim bu öğrencilerden sadece SÖ7 genellemeye ulaşmıştır. Genellemeye ulaşamayıp sadece varsayımlarda bulunabilen SÖ6 ile gerçekleşen diyalog alttaki gibidir:

A: Verilmeyen adımı da sen buldun. Şimdi yazdığın sayılara tekrar bakalım.

SÖ6: (Işın sayısı ile açı sayısına odaklanarak örüntü aramaya çalışır).

A: Adım sayısı sürekli artıyor buna karşılık oluşan açılar nasıl değişiyor peki?

SÖ6: (Bir süre düşünür ama çözüm üretmez).

A: Peki 6. adımı bul bakalım.

SÖ6: (Sonraki adımı da çizer). 5 tane kesin oluyor. Sonra 2’li olanlar 4 tane oldu. 3’lü olanlar 3 tane oldu. 4’lü 2 tane. Bir de tamamı var. Toplarsak 15 tane oldu.

A: 6. adımı da buldun baya ilerledin aslında.

SÖ6: Önce 1 artıyor. Sonra 2 artıyor, 3 artıyor, 4 artıyor. $n+1$ olabilir mi?

Ama 1 verirse $1+1$, 2 olur. Olmaz. $n+2$ olsa, 1 koyarsak olmuyor. $2n-1$ olsa, 2 kere 2, 4 eksi 1, 3 olur. Olmaz.

SÖ6 ile gerçekleşen görüşmede yukarıdaki diyalogdan önce görselleştirme yaptığına ulaşılmıştı. Diyaloğa bakıldığında katılımcının örüntünün altıncı adımını da yapabilmesi özelleştirme yaptığını göstermektedir. Diyalogdaki son ifadesinden ise bazı varsayımlarda bulunabildiği ancak doğru varsayıma ulaşamadığı ve dolayısıyla genelleme yapamadığı görülmektedir. Genellemeye ulaşan SÖ7 ile yapılan görüşme ise şu şekilde olmuştur:

SÖ7: (5. adımı çizmeye başlar ve açıları sayar). Evet, 10 oluyor.

A: O zaman senin artış miktarların muhtemelen doğru.

SÖ7: Evet. Şimdi n ile bağlantı kuralım. Her seferinde sıralı artıyor. (Bir süre düşünür).

A: Ne düşünüyorsun?

SÖ7: Şu anda kural oluşturmaya çalışıyorum.

A: Tamam düşündüklerini deneyelim. Hemen aklımıza gelmeyebilir çünkü. Ama çabaladıkça ulaşabilirsin.

SÖ7: (Tekrar düşünmeye başlar).

A: Aklına bir şey gelmedi sanırım.

SÖ7: İlk önce n artı n ile bir şeyler yapmaya çalıştım.

A: Güzel.

SÖ7: n çarpı n de olabilir. Hım şöyle olsa 2 kere 2, 4. 4 eksi 2, 2. 2 bölü 2, 1. 3 kere 3, 9. 9 eksi 3, 6. 6 bölü 2, 3. 4 kere 4, 16. 16 eksi 4, 12. 12 bölü 2, 6. Hım tamam.

A: Buldun mu?

SÖ7: Buldum şöyle olacak. n çarpı n , eksi n , bölü 2.

A: Nasıl buldun bunu?

SÖ7: Deneye deneye buldum. Hepsinde de sağlıyor.

SÖ7 ile yapılan görüşmeye bakacak olursak yukarıdaki diyalogun öncesinde katılımcı çizim ve tablo temsili kullanmış ve bunun devamında görselleştirmeyi gerçekleştirmiştir. Bununla birlikte örüntünün sonraki adımını da kolaylıkla bularak özelleştirme yapmıştır. Özelleştirme yaptıktan sonra genelleme yapma arayışına girmiştir. Bunun için de bir süre düşünüp çeşitli varsayımlarda bulunmuştur. Birkaç denemeden sonra doğru varsayımda bulunmuş ve genellemeye ulaşmıştır. Katılımcının buradaki tek eksik noktasının, bulduğu kuralın sebebini matematiksel olarak açıklayamamış olmasıdır. Yani katılımcı doğrulama ve ikna etme bileşenine yönelik yeterli açıklamalarda bulunamamıştır.

4.4.5. Sözel varsayımda bulunma problemine yönelik bulgular

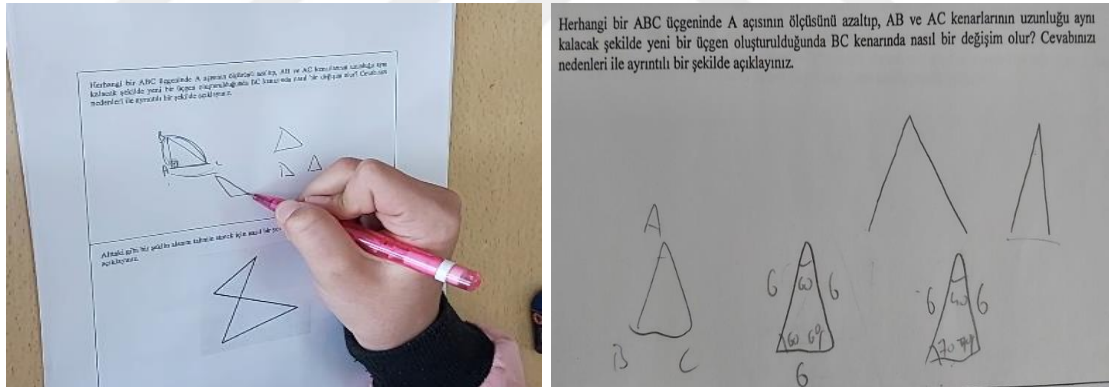
Sekizinci sınıf öğrencilerine sözel varsayımda bulunma problemine yönelik olarak, “Bir üçgenin kenar uzunlukları ile bu kenarların karşısındaki açılarının ölçülerini ilişkilendirir” kazanımı ile ilgili bir problem sorulmuştur. Hazırlanan problemin temelinde katılımcıların varsayımda bulunmaları hedeflenmiştir. Bu probleminden elde edilen bulgular Tablo 31’de gösterilmektedir:

Tablo 31

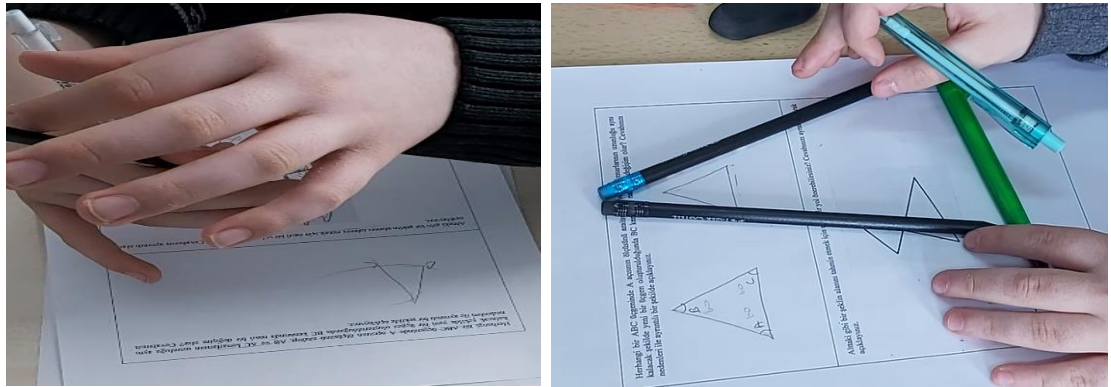
Sekizinci sınıf öğrencilerinin sözel varsayımda bulunma problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	SÖ1, SÖ2, SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Model	SÖ3, SÖ4, SÖ6
	Tablo	-
Görselleştirme	Dönüştürme	SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Zihinde Canlandırma	-
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Genelleme	SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ4, SÖ5, SÖ7, SÖ8
	Varsayımda Bulunma	SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ4, SÖ5, SÖ7, SÖ8

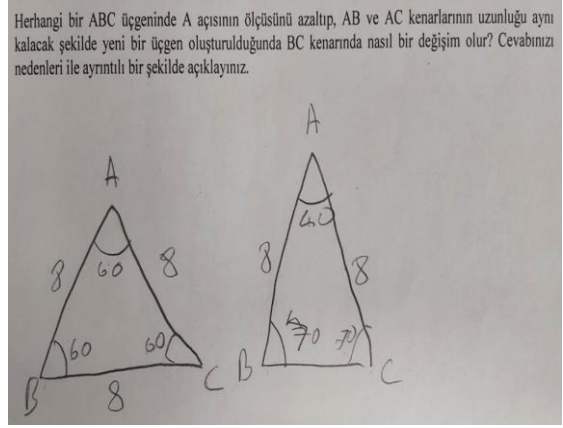
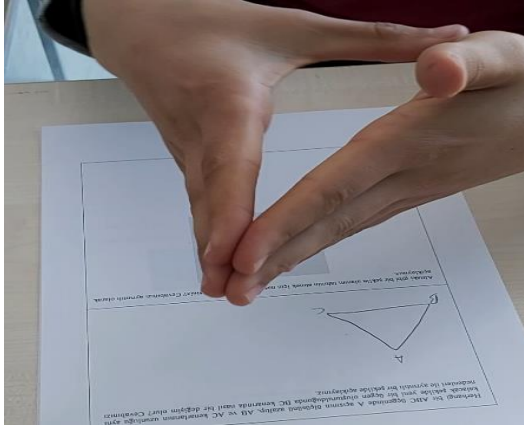
Tablo 31'e bakıldığında katılımcıların sözel varsayımda bulunma problemindeki görsel akıl yürütme performanslarının iyi düzeyde olduğu söylenebilir. Bütün katılımcılar problemi çözerken çizim ya da model temsili kullanmışlardır. SÖ4 ve SÖ6 ise her iki temsili de kullanmıştır. Katılımcıların oluşturdukları bazı görsel temsiller aşağıdaki gibidir:



Şekil 132. SÖ2 ve SÖ7'nin oluşturdukları görsel temsiller



Şekil 133. SÖ3 ve SÖ6'nın oluşturdukları görsel temsiller



Şekil 134. SÖ4'ün yaptığı model ve çizimler

Katılımcıların tamamı kullandıkları temsillerle dönüştürme yaparak görselleştirme adımını tamamlamışlardır. Örneğin; SÖ4 problemi anladıktan sonra bir varsayımda bulunmuş ve bunu Şekil 134'teki gibi ellerini kullanarak göstermek istemiştir. Devamında ise “Açıyı daraltırsam şuradaki boşluk azalır (Başparmağı ile göstermeye çalışır). O yüzden BC kısalmır.” şeklinde bir ifade de bulunarak modelden bir dönüştürme yapmaya çalışmıştır. SÖ3 de benzer bir şekilde önce bir varsayımda bulunmuş ve bunu göstermek için Şekil 133'teki gibi eline 2 tane kalem almıştır. Daha sonra “Şöyle bir şey üçgen olduğunda (Kalemleri model olarak kullanır) buradaki A açısı azalınca kalemlerin arasındaki mesafe kısalmıyor.” şeklinde bir ifade ile görselleştirme yapmıştır. SÖ6 ise “Üçgenin iç açıları toplamı değişmeyecek. A açısını azaltırsam diğer iki açıyı artırmalıyım.” diyerek üçgenlerle ilgili bir bilgisini yeni oluşacak üçgen üzerinde yorumlamıştır.

Sekizinci sınıf öğrencilerinin sözel varsayımda bulunma problemine yönelik görsel akıl yürütmelerine matematiksel düşünme açısından bakıldığında katılımcıların tamamının varsayımda bulunduğu görülmüştür. Katılımcıların varsayımda bulunduklarını gösteren bazı örnek ifadeler şunlardır:

“Bir ABC üçgeni var. A açısının ölçüsü daralacak. O zaman B ile C birbirine yaklaşır zaten. AB ve AC kenarlarının uzunlukları aynı kalacak. BC kenarında nasıl bir değişim olur diyor? B ve C birbirine yaklaşır. Burası ve burası (AB ile AC kenarlarını gösteriyor) aynı kalırsa bir tek burası (BC kenarından bahsediyor) yaklaşır.” **SÖ1**

“Açı azalırsa bu kenar uzunluğu da azalır. Daha doğrusu açıyı azalttıkça azalır. Çoğalttıkça çoğalır.” **SÖ2**

“A açısını azaltırsak burası daralacağı için köşeler birbirine yakınlaşır ve BC kısalır.” SÖ3

“Bence A azalırsa BC kısalır.” SÖ4

“Üçgenin açıları ile kenar uzunlukları doğru orantılı olduğu için A açısı azalırsa BC kenarının ölçüsü de azalır diye tahmin ediyorum.” SÖ7

Yukarıdaki gibi varsayımlarda bulunan katılımcılar daha sonra varsayımlarının doğruluğunu göstermeye çalışmışlardır. Bu noktada katılımcıların oluşturdukları üçgenler özelleştirme göstergesi olarak düşünülmüştür. Bununla birlikte katılımcıların tamamının özelleştirme yaptığı görülmüştür. Katılımcılardan SÖ1 ikizkenar üçgen çizmiş ve tepe açısını azaltmıştır. SÖ2 dik açılı üçgen çizerek dik açının ölçüsünü azaltıp artırmayı düşünmüştür. SÖ3, SÖ5 ve SÖ8 dar açılı üçgenler çizmiştir. SÖ4, SÖ6 ve SÖ7 ise eşkenar üçgenleri düşünerek verilen yönergeleri uygulamaya çalışmışlardır.

Özelleştirmeyi gerçekleştirmiş olan katılımcıların, varsayımlarının başka üçgenlerde de geçerli olduğunu göstermeleri genelleme olarak değerlendirilmiştir. Genelleme yaptığı düşünülen SÖ1 ile gerçekleşen görüşmenin bir kısmı şu şekildedir:

A: Neden böyle oluyor?

SÖ1: Çünkü A açısının daralmasını istiyorum. O yüzden benim burayı (A açısından bahsediyor) daha da küçük yapmam gerekecek. Ama buralarında (AB ve AC kenarlarını gösteriyor) değişmesini istemiyorum. Bu durumda B ve C birbirine yakınlaşınca BC uzunluğu kısalır.

A: Peki A açısını genişletseydik ne olurdu?

SÖ1: Buraların (AB ve AC kenarlarından bahsediyor) yine eşit kalmasını istiyorsam eğer B ile C biraz yukarı çıkar ve birbirinden uzaklaşırdı.

Bir diğer katılımcı SÖ2 ise Şekil 132'deki gibi önce dik açılı üçgen çizmiştir. Daha sonra dik açının değişimine göre varsayımını başka üçgenlere de genellemiştir. Bu düşüncesini şöyle belirtmiştir:

SÖ2: A açısı 90° değil de 80° olursa üçgenin bu kenarı da azalır. Açı artsaydı bu kenar da artardı (Tüm bunları farklı üçgenler çizerek gösterir).

SÖ6 dışındaki katılımcılar problemin çözüm sürecinde öne sürdükleri varsayımlarının doğruluğunu göstermek için çaba göstermişlerdir. Bunun için problem boyunca çeşitli örnekler vermişler ve gerekli açıklamalarda bulunmuşlardır. Katılımcıların bu problemde çoğunlukla doğrulama ve ikna etme bileşenini karşıladıkları görülmüştür. Bu katılımcılardan SÖ7 ile yapılan görüşme aşağıdadır:

SÖ7: (Problemi okur ve şekil çizmeye başlar).

A: Burada ne diyor?

SÖ7: A açısının ölçüsünü azaltacaktı. AB ve AC aynı kalacaktı. BC kenarında nasıl bir değişim olacağını soruyor.

A: Ne düşünüyorsun?

SÖ7: Üçgenin açıları ile kenar uzunlukları doğru orantılı olduğu için A açısı azalırsa BC kenarının ölçüsü de azalır diye tahmin ediyorum.

A: Bunu bana nasıl gösterebilirsin?

SÖ7: Bir üçgen çizelim (Önce çeşitkenar üçgen çizer ancak yeterli açıklamayı yapamayacağını anlar). Eşkenar üçgen çizersem daha iyi olabilir. Açılar 60° . Kenar uzunlukları da 6 olsun. Şimdi A açısını azaltıp şu kenarlar da sabit olacak şekilde düşünelim.

A: Tamam.

SÖ7: (Yeni bir üçgen çizer). A açısına 40° diyelim. Diğer açıları da 10° artıralım.

A: Güzel. Şu iki kenar da aynı kalacaktı.

SÖ7: Evet 6, 6 oldu. Bu mesafe de azaldı. Şöyle açıklayabiliriz (Yeni çizimler yapar). 60° olacağı zaman karşısı daha çok açılacağı için bu uzunluk daha büyük olur. Ama açıyı azalttığımız zaman bu uzunluk daha kısa olur.

SÖ7 problemi okuduktan sonra şekil çizerek problemi anlamlandırmaya çalışmıştır. Daha sonra varsayımda bulunup onun doğruluğunu göstermeye çalışmıştır. Bunun için çizdiği eşkenar üçgen özelleştirme göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Çizdiği farklı üçgenlerle ise durumu genelleştirir. Yaptığı açıklamalar ve örneklerle varsayımının doğruluğunu göstermeye çalışması ise doğrulama ve ikna etme göstergesi olarak düşünülmüştür.

4.4.6. Görsel varsayımda bulunma problemine yönelik bulgular

Görsel varsayımda bulunma probleminde verilen şeklin alanını bulmak için katılımcıların varsayımlar ortaya koymaları istenmiştir. Bununla birlikte varsayımlarını

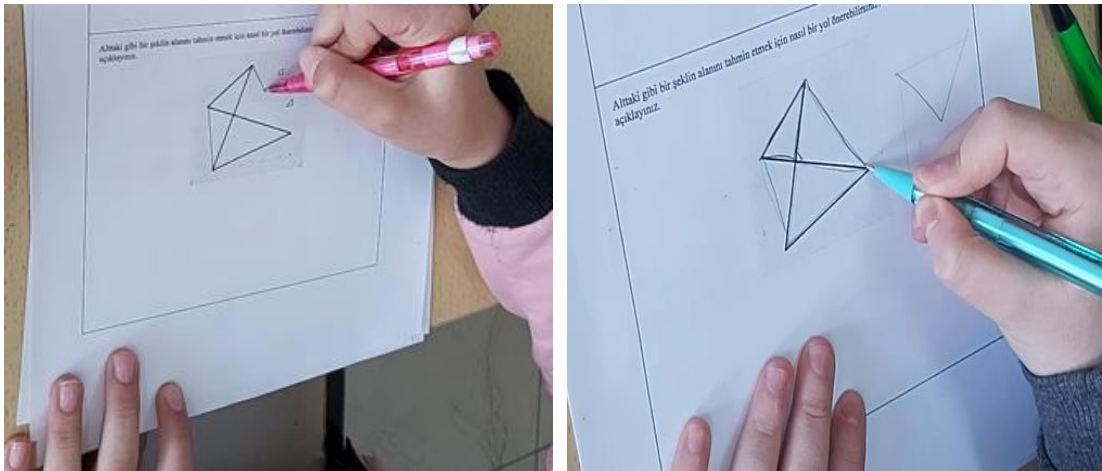
matematiksel olarak ifade ederek ikna edici yanıtlar vermeleri de beklenmiştir. Bu problemin sonucunda ortaya çıkan bulgular Tablo 32’de sunulmaktadır:

Tablo 32

Sekizinci sınıf öğrencilerinin görsel varsayımda bulunma problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	SÖ2, SÖ4, SÖ6
	Model	-
	Tablo	-
Görselleştirme	Dönüştürme	SÖ4, SÖ5, SÖ7, SÖ8
	Zihinde Canlandırma	-
	Özelleştirme	-
Matematiksel Düşünme	Genelleme	-
	Varsayımda Bulunma	SÖ1, SÖ2, SÖ5, SÖ7, SÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	-

Katılımcılardan SÖ2, SÖ4 ve SÖ6’nın problemde verilen görsele ek çizimler yaptıkları görülmüştür. Bu katılımcılardan SÖ2 ve SÖ6 herhangi bir görselleştirme yapamamıştır. Tablonun geneline bakıldığında SÖ1, SÖ2, SÖ5, SÖ7 ve SÖ8’in varsayımda bulundukları söylenebilir. Katılımcılardan SÖ4 problemde verilen temsile ek temsiller yaparak dönüştürmede bulunurken SÖ5, SÖ7 ve SÖ8 sadece problemde verilen görsel temsilden hareket ederek dönüştürme yapmışlardır. SÖ3 ise problemin çözümü için matematiksel olarak geçerli bir akıl yürütme gerçekleştirememiştir. Ek çizim yapan SÖ2 ve SÖ6’nın oluşturdukları görsel temsiller şu şekildedir:

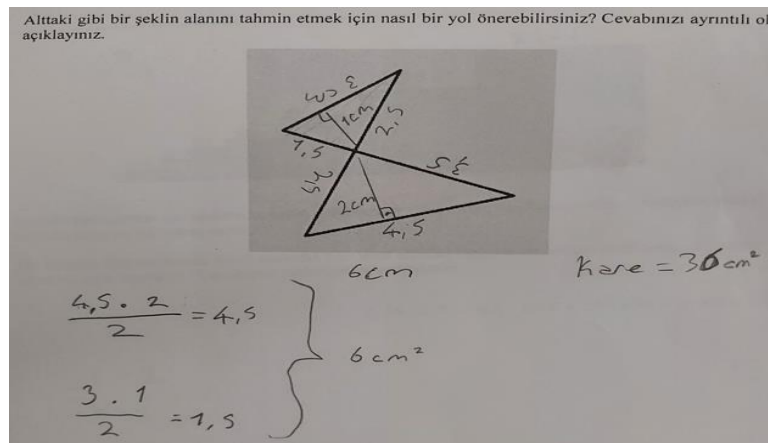


Şekil 135. SÖ2 ve SÖ6’nın oluşturdukları ek çizimler

Şekil 135'e bakıldığında her iki katılımcının verilen şekli dörtgene tamamladığı anlaşılmaktadır. Katılımcılardan SÖ6 “*Mesela bu kenar ile bu kenarı, şu kenar ile de şu kenarı birleştirebilirim (Şekli dörtgene tamamlıyor). Yamuk oluşur. Yamuğun alanını bularak yapabiliriz.*” biçiminde bir ifadede bulunmuştur. Katılımcının bu noktada bir kavram yanılışına sahip olduğu anlaşılmaktadır. Bu yüzden sadece yaptığı ek çizim görsel akıl yürütme süreci açısından dikkate alınmıştır. Diğer katılımcı SÖ2 ise “*Bu şekli başka bir şekle benzetebilirdim (Şekli dörtgene tamamlar). Eğer bu kareli kâğıt olsaydı birimini bulurdum. Oradan hareket ederek şeklin alanını bulmaya çalışırdım. Birimkareleri birbirine tamamlayarak kaç birimkare olduğunu bulabilirdim.*” demiştir. SÖ2’nin ifadesinden görsel temsil kullandığı ve bir varsayımda bulunduğu görülmektedir. Ancak bu noktadan sonra temsilini kullanarak bir dönüştürme yapmamış veya varsayımını destekleyici açıklamalarda bulunmamıştır. Bir diğer katılımcı SÖ4’ün ise bu problemde görsel akıl yürütme süreci şöyledir:



Şekil 136. SÖ4’ün oluşturduğu ek çizimler



Şekil 137. SÖ4’ün görsel varsayımda bulunma problemine yönelik çözümü

SÖ4 problemin çözümüne yönelik bir varsayımda bulunmadan kenar uzunluklarını bulmaya çalışmıştır. Bunu yaparken ortamda bulunan cetveli kullanmıştır. Daha sonra üçgenin alanını bulmak için yükseklik çizmiş ve onun uzunluğunu da ölçmüştür. Kenar uzunluklarını ve yükseklikleri bulmasıyla birlikte üçgenlerin alanlarını ayrı ayrı hesaplayarak şeklin alanını elde etmiştir. SÖ4'ün çizdiği yükseklikler ile görsel temsil kullandığı ve verilen şekil ile ek çizimleri üzerinde üçgenin alan formülünü uygulayarak dönüştürme yaptığı söylenebilir.

SÖ1, SÖ5, SÖ7 ve SÖ8 ise şekli iki farklı üçgen olarak düşünmüşlerdir. Katılımcılardan SÖ1 şeklin alanını bulabileceğini düşünürken şu şekilde görüş belirtmiştir: *“Bunun alanını bulmak istiyorsam eğer iki üçgen olarak bakardım. Çünkü üçgenin alanını bulmak daha kolaydır. Buradan şekli kesip bakardım (Şeklin kesiştiği noktadan bahsediyor). Eğer kareli kâğıt üzerinde olsaydı önce bunun (Altta ki üçgeni gösteriyor) alanını sonra bunun (Üstteki üçgeni gösteriyor) alanını bulup toplardım. Zaten ikisinin toplamı bütün şeklin alanına eşit oluyor.”* SÖ1'in ifadesinden şeklin kareli zemin üzerinde olması halinde alanını bulabileceğini belirtmesi bir varsayım olarak değerlendirilmiştir. Bu varsayımı ile şekil arasında görselleştirmeye yönelik bir adımda bulunmamıştır. Diğer katılımcılar SÖ5, SÖ7 ve SÖ8 ise üçgenlerin dik üçgen olduklarını varsayarak verilen görsel temsilden dönüştürme yapmışlardır. SÖ8 ile yapılan görüşmenin bir kısmı şöyledir:

SÖ8: Hiç sayı yok ki.

A: Evet sayı yok ama sen ne yapabilirsin?

SÖ8: Değer verebilirim ya da harf koyayım. Buraya x , buraya z , y , k , l , m diyelim. Sonra bunların yüksekliğini bulmam lazım. (Tekrar düşünür) k çarpı m bölü 2 yapabilir miyim burada?

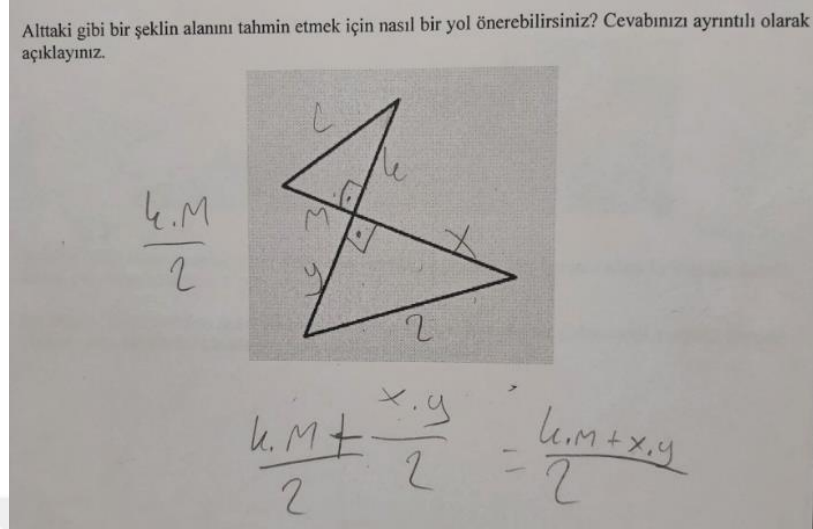
A: Onu yapman için ne gerekiyor?

SÖ8: Dik üçgen. Bunun dik üçgen olduğunu varsayarsam olur. Diğer üçgende dik açı olur (Dik işaretlerini yapar). O zaman bu üçgenin alanı x çarpı y bölü 2. Diğeri de k çarpı m bölü 2 idi. Onları toplayarak buluruz.

A: Peki dik açı olmasaydı bu sonucun geçerli olur muydu?

SÖ8: Hayır sadece dik açı olursa sonuç böyle bulunur.

Görüldüğü üzere SÖ8 üçgenlerin dik üçgen olması halinde şeklin alanını hesaplayacağını belirtmiştir. Bununla birlikte şekil üzerinde sembolik temsille rde kullanarak matematiksel bir dönüştürme gerçekleştirmiştir. SÖ8'in çözümü ise aşağıdaki gibidir:



Şekil 138. SÖ8'in görsel varsayımda bulunma problemine yönelik çözümü

SÖ7 ise “Bize bu uzunlukların birbirine dik olduğu söylense ve uzunlukları verilse bulabilirim. Mesela burası dik, bu uzunluk 5, bu uzunluk 3 olsun. Burası 5, burası da 6 olsun. Bu durumda üstteki üçgenin alanı 7,5 olur. Bu üçgenin alanı da 5 kere 6, 30 bölü 2’den 15 olur. Topladığımızda 22,5 çıkar.” diyerek SÖ8 ile benzer bir şekilde akıl yürüttüğünü göstermiştir. Bir diğer katılımcı SÖ5 ile gerçekleşen diyalog aşağıdaki gibidir:

SÖ5: Önce şu üçgenin alanını bulurdum (Küçük olanı işaret ediyor).

A: Nasıl bulacaksın peki onun alanını?

SÖ5: Taban çarpı yükseklik bölü iki.

A: Nasıl uygulayacaksın ki onu?

SÖ5: Şu kenarlara x ve y diyelim. Bunları çarpıp ikiye böleceğiz.

A: Burada hangisi taban hangisi yükseklik?

SÖ5: Bu taban (y ’yi gösteriyor), bu da (x ’i gösteriyor) yükseklik.

A: Nereden biliyorsun öyle olduğunu?

SÖ5: Çünkü bu dik üçgen.

A: Dik üçgen olduğunu bilmiyoruz ama.

SÖ5: Aaa doğru. Ama dik üçgen olsaydı böyle bulabilirdim.

SÖ5 de önce görsel temsili iki farklı üçgen olarak değerlendirmiştir. Sonrasında görsel temsil üzerinde sembolik temsiller kullanmış ve bu sembolik temsilleri üçgenin alan formülü üzerinde uygulayabileceğini ifade etmiştir. Katılımcıya yöneltilen ek sorularla da esasında katılımcının problemin başında zihninde bir varsayımda bulunduğu düşünülmüştür.

4.4.7. Sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik bulgular

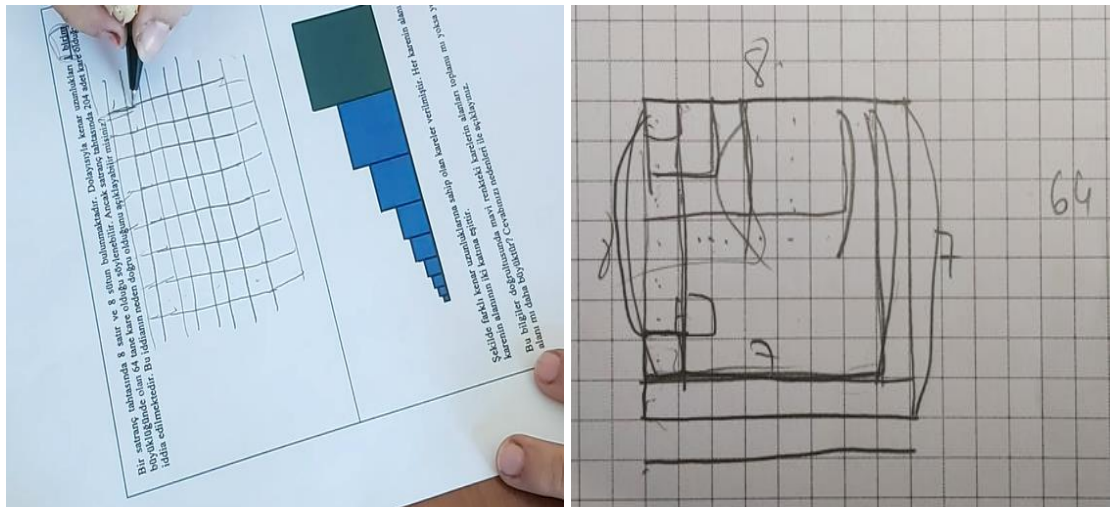
Tüm sınıf seviyelerine yöneltilen sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik sekizinci sınıf öğrencilerinden elde edilen bulgular Tablo 33'te gösterilmektedir:

Tablo 33

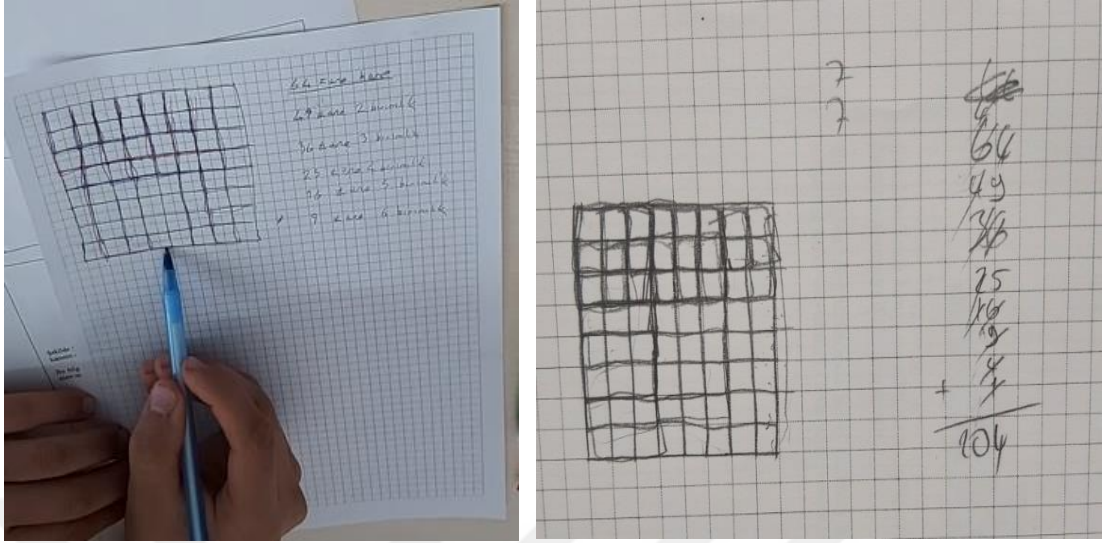
Sekizinci sınıf öğrencilerinin sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Model	SÖ6
	Tablo	SÖ4
Görselleştirme	Dönüştürme	SÖ3, SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Zihinde Canlandırma	SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	SÖ3, SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Genelleme	SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Varsayımda Bulunma	SÖ1, SÖ4, SÖ5, SÖ7, SÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8

Tablo 33 incelendiğinde sekizinci sınıf öğrencilerinin tamamının sözel doğrulama ve ikna etme probleminin çözümü için gerekli girişimlerde bulunduğu ifade edilebilir. Katılımcıların tamamı problemin çözümü için görsel temsil kullanmışlardır. Bu anlamda bütün katılımcıların çizim yaptığı ve buna ilave olarak bir katılımcının model, bir başka katılımcının ise tablo temsili kullandıkları görülmüştür. Katılımcıların oluşturdukları bazı çizim örnekleri şu şekildedir:

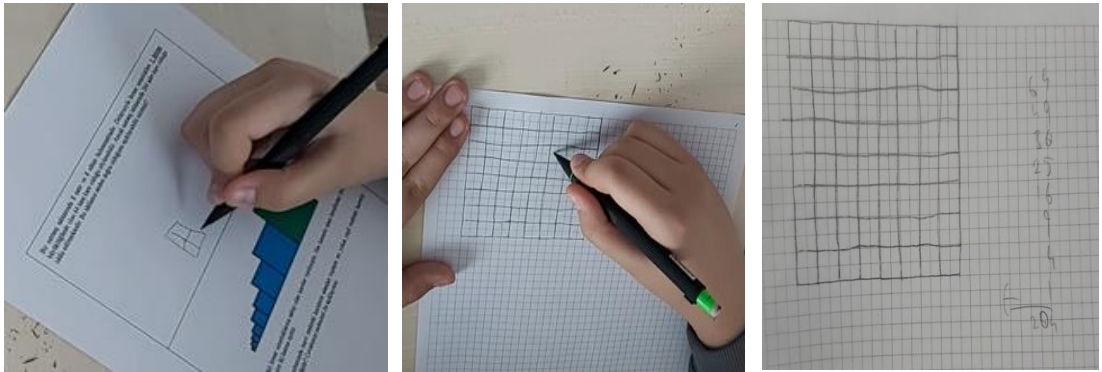


Şekil 139. SÖ1 ve SÖ2'nin oluşturdukları görsel temsiller



Şekil 140. SÖ4 ve SÖ8'in oluşturdukları görsel temsiller

Şekillerde görüldüğü gibi katılımcılar satranç tahtasının temsili çizmişlerdir. Yaptıkları çizimlerden hareket ederek problemi çözmeye çalışmışlardır. Bu katılımcılardan SÖ4 ilk olarak çizim yapmış devamında ise elde ettiği verileri tablo haline getirmiştir. Katılımcılardan SÖ7 ise Şekil 141'de gösterildiği gibi önce küçük bir kare çizerek problemi anladığını göstermiş ve devamında daha büyük bir kare çizerek çözümünü gerçekleştirmiştir.



Şekil 141. SÖ7'nin oluşturduğu görsel temsiller ve çözüm süreci

Katılımcılardan SÖ6 ile yapılan görüşme, okulun satranç odasında yapıldığı için ortamda bulunan satranç tahtasını Şekil 142'deki gibi model olarak kullanmak istemiştir.



Şekil 142. SÖ6'nın model olarak kullandığı satranç tahtası

Sözel doğrulama ve ikna etme probleminin çözüm sürecinde bütün katılımcıların görselleştirme bileşeninde de birtakım girişimlerde bulundukları görülmektedir. Bu duruma yönelik olarak katılımcıların tamamının zihinde canlandırma yaptıkları tespit edilmiştir. Katılımcıların zihinde canlandırma yaptıklarını gösteren bazı örnek ifadeler şunlardır:

“Bunun içinde 64 kare var ama bütün olarak da baktığımızda 1 tane daha kare (8 birimlik kareyi gösterir) elde etmiş olacağız. Yani şöyle baktığımızda da kare (3 birimlik bir kareyi gösterir) elde etmiş olacağız. Farklı bakarsak da bir sürü kare elde edebiliyoruz.” SÖ1

“Şöyle bir şey mi peki? Mesela bu şeklin içinde şöyle kareler de var (3 birimlik bazı kareleri gösterir).” SÖ2

“4 tane kare de bir kare yapıyor aslında (Çizim yaparak 2 birimlik bir kareyi gösterir).” SÖ4

“İşte mesela bu şekilde kareler var (1x1 birimlik bir kareyi gösterir) ama şöyle de kareler var (2x2 birimlik bazı kareleri gösterir).” SÖ5

Yukarıda gösterildiği gibi katılımcıların bazı ifadelerinden zihinde canlandırma yaptıkları sonucuna varılmıştır. Bununla birlikte görselleştirme bileşeni için SÖ3, SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7 ve SÖ8'in dönüştürme yaptıklarına da ulaşılmıştır. Örneğin; SÖ4 yukarıdaki açıklamayı yapmış ve bir tane de bahsettiği kareden göstermiştir. Daha sonra ise 2x2 birim

büyükliğünde olan bütün kareleri bulmaya çalışmış ve ilk iki satırı kullanarak 7 tane kare olduğunu göstermiştir. Devamında ise “7, 14, 21, 28, 35, 42, 49” şeklinde bir sayma yaparak 2x2 birim büyüklüğünde olan bütün kareleri bulmuştur. Katılımcı burada çizdiği şekli kullanarak bir dönüştürme gerçekleştirmiştir. Diğer katılımcıların da benzer şekilde bir dönüştürme yaptıkları görülmüştür.

Dönüştürme yapan katılımcılardan SÖ3, SÖ4, SÖ6, SÖ7 ve SÖ8, 2x2 birim büyüklüğünde olan kareleri bulduktan sonra 3x3 birim büyüklüğünde olan kareleri de benzer şekilde hesaplamışlardır. Bundan dolayı bu katılımcılar özelleştirme aşamasını da başarıyla tamamlamışlardır. SÖ5 ise bu noktada daha farklı bir akıl yürütme gerçekleştirmiştir. SÖ5 ile yapılan görüşmenin bir bölümü aşağıdaki gibidir:

SÖ5: (2x2 birim olan kareleri en üst satırdan çizmeye başlar) Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi oldu. Altındaki satırda da var. Burada da yedi oluyor. (Üçüncü satırdaki 2x2 birim olan kareleri çizer) Yine yedi oldu. Hepsinde yedi çıkıyor o zaman. (Alt satıra kadar sayar) 14, 21, 35, 42, 49 olacak.

A: Tamam 1 birimlik kareler soruda verilmişti. 2 birimlik olanları da sen buldun. Başka kare var mı peki bunun içinde?

SÖ5: 4 birimlik de var (Bir tane 4x4 birimlik kare çizer). Altı birimlik de olur. Sekiz birimlik de var. Sekiz birimlik zaten kendisi.

A: Başka yok mu?

SÖ5: Beş birimlik de oluyor (5x5'lik bir kare çizer). Üç birimlik de olur. Yedi de olur.

A: Bu bulduklarından bir şeyler çıkartabilir miyiz?

SÖ5: Başta 64 tane oluyor... sonra 49.

A: Sonrakini bilmiyoruz şimdilik. Ama en sonrakini de bulmuştun?

SÖ5: Evet 1 oluyor. 64'ten 49'a 15 iniyor. Bilmiyoruz gerisini. En son 1 olacak.

A: Yani sürekli ne oluyor burada?

SÖ5: Azalıyor.

A: Tamam kuralımız bu şekilde olacak demek ki. Ama devamında nasıl azalacak?

SÖ5: 7 birimliklere bakayım (Kareli kâğıt kullanarak 7x7 birim büyüklüğünde kareler çizer). 4 tane oluyor.

A: Tamam bunları da buldun. Nasıl bir şey var burada?

SÖ5: Karekökle mi ilgili?

A: Nasıl yani?

SÖ5: Sekiz kere sekiz, 64. Yedi kere yedi, 49. Altı kere altı, 36, 25, 16, 9, 4 diye mi devam ediyor acaba?

A: Burada bir tahminde bulundun galiba. Şimdi ne yapacaksın peki?

SÖ5: (Toplamaya başlar) ... 113, 149, 174, 190, 199. 5 daha 204. Evet doğruymuş.

SÖ5 özelleştirme aşamasında diğer katılımcılardan farklı olarak 3x3 birim büyüklüğünde olan kareleri bulmak yerine örüntü aramayı tercih etmiştir. Ancak bu süreçte 7x7 birim büyüklüğünde olan kareleri hesaplaması özelleştirme olarak düşünülmüştür. Daha sonra ise bulduğu sayılara bağlı olarak “Karekökle mi ilgili?” şeklinde yaptığı sesli düşünme bir varsayımda bulunma olarak değerlendirilmiştir. Buradan yola çıktıktan sonra diğer adımları hesaplamadan bir genellemeye gitmiş ve problemi doğrulamıştır.

Matematiksel düşünme bileşenlerinden genelleme ve doğrulamayı gerçekleştiren bir diğer katılımcı SÖ6 olmuştur. Şekil 142’deki model temsilini kullanan SÖ6 ile yapılan görüşmenin bir bölümü ise şu şekildedir:

SÖ6: Mesela bu dördü birleşirse kare oluyor (2 birimlik bir kare gösterir).

Sonra şu şekilde çok büyük bir kare olabilir (4 birimlik bir kare gösterir).

A: Bu şekilde 204 tane varmış demek ki. Bunun doğru olduğunu nasıl gösterebilirsin?

SÖ6: 64 tane var zaten. Farklı birimlere sahip kareler de var. 2 birim uzunluğunda olan kareleri bulalım. (İlk satırı sayar) 7. 7 de buradan olursa 49 olur. (Sonra 3 birim olanları sayar) 6 tane de 36. Sonra 5 kere 5, 25 olur. Sonra 16, 9, 4 ve 1 olur. Şimdi toplayalım (Toplama işlemini yapar). Evet, bulduk 204.

Yukarıdaki diyalog da görüldüğü gibi SÖ6 görselleştirmeye yönelik bazı göstergeler sergilemiş ve devamında özelleştirme yapmıştır. Bununla birlikte bir genellemeye varmış ve doğrulamayı tamamlamıştır. Ancak SÖ6’nın bu süreçte sözlü olarak bir varsayımda bulunduğu tespit edilememiştir. Matematiksel düşünme bileşenlerinin tamamını sergileyen SÖ8 ile gerçekleşen görüşmenin bir bölümü ise aşağıdaki gibidir:

SÖ8: Şekli çizersem hemen söyleyebilirim. (Kareli kâğıt üzerinde çizim yapmaya karar verir). Bu karenin içinde başka kareler de oluşturulabiliyor. 64 tane 1x1'lik kare var. 2x2'lik, 3x3'lük kareler de var (Çizimine devam eder).

A: Peki, ne yapacaksın şimdi?

SÖ8: Şimdi 64 tane var zaten. Sonra böyle kareleri bulacağım (2x2 birim büyüklüğünde olan karelerden bahsediyor. Biraz uğraştıktan sonra 49 sonucuna ulaşır). 8 kere 8, 64. 7 kere 7, 49. Acaba 6 kere 6'dan 36 mı yapacak? Şimdi 3x3 olan kareleri de bulayım (Bir kenarı 3 birim olan kareleri sayar). Aynen dediğim gibi 36 olacak. 4 çarpı 4'lük, 25. 5 kere 5'lik, 16. 6 çarpı 6'lık, 9. 7 olduğunda 4. 8 de hepsi 1 tane. Şimdi kontrol edeyim. (Toplama işlemini yapar) Evet, 204'ü buldum.

SÖ8 ile yapılan görüşmeye bakacak olursak öncelikle çizim yaptığı, devamında görselleştirmeye ait her iki göstergeyi de sergilediği görülmüştür. Buna bağlı olarak özelleştirme gerçekleştirmiştir. Devamında ise her adımda oluşan kare sayısının karesel sayılarla ilgili olduğu varsayımını öne sürmüştür. Bu durumu genellemeye gitmiş ve son olarak doğrulamasını yapmıştır.

4.4.8. Görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik bulgular

Beşinci sınıf öğrencileri dışındaki bütün katılımcılardan aynı görsel doğrulama ve ikna etme problemini yanıtlamaları istenmiştir. Bu probleme yönelik sekizinci sınıf öğrencilerinden elde edilen bulgular Tablo 34'te sunulmaktadır:

Tablo 34

Sekizinci sınıf öğrencilerinin görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri

Bileşenler	Göstergeler	Katılımcılar
Görsel Temsil	Resim	-
	Çizim	-
	Model	-
	Tablo	-
Görselleştirme	Dönüştürme	SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Zihinde Canlandırma	-
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Genelleme	SÖ1, SÖ3, SÖ6, SÖ7
	Varsayımda Bulunma	SÖ1, SÖ3, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8

Katılımcıların görsel doğrulama ve ikna etme probleminin çözümü için verilen görseli kullandıkları ve ek görsel temsil kullanmadıkları ortaya çıkmıştır. Katılımcılardan sadece SÖ4'ün problemin çözümü için matematiksel olarak geçerli bir akıl yürütme gerçekleştiremediği görülmüştür. Diğer bütün katılımcılar verilen görsel üzerinde matematiksel dönüştürme yaparak görselleştirmeyi başarmışlardır. Yine bu katılımcıların özelleştirmede ve doğrulama ikna etmede başarılı oldukları söylenebilir. Genellikle katılımcılardan problemin başında varsayımda bulunmaları beklenmiştir. SÖ2 yanlış varsayımda bulunduğu için bu aşamada başarısız kabul edilmiştir. Ancak problemin çözümüne yönelik doğru adımlar gerçekleştirmiştir. Katılımcıların varsayımda bulundukları kabul edilen bazı örnek ifadeleri aşağıdaki gibidir:

“Yeşil daha büyüktür. Çünkü 2 üssü 9 daha büyük olur diye düşünüyorum.”

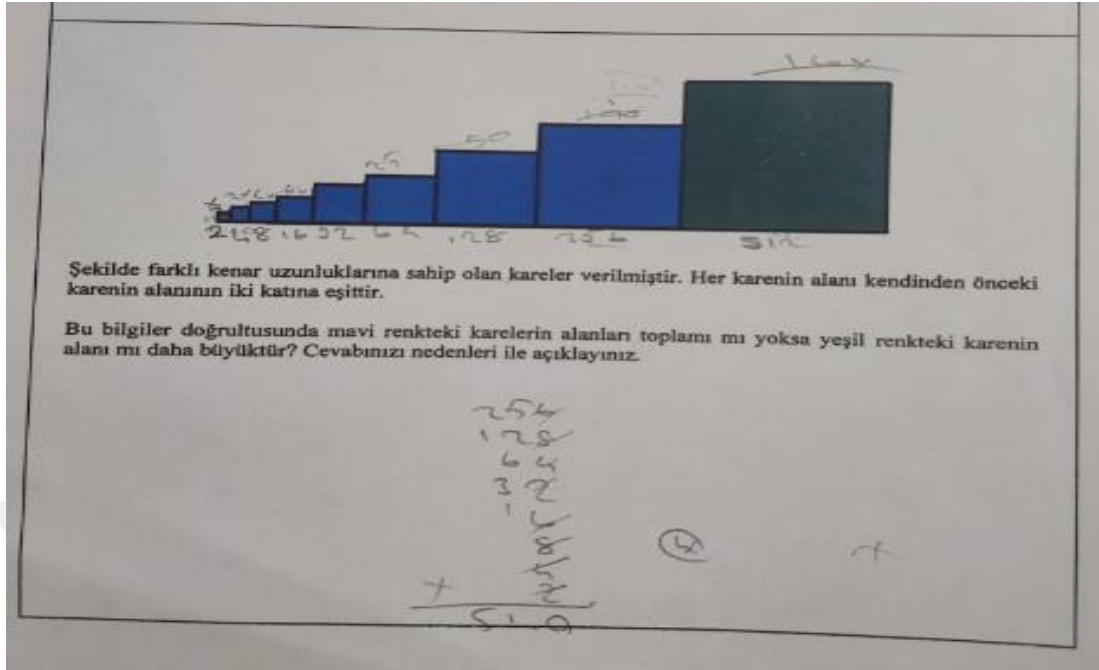
SÖ3

“Bence yeşil daha büyüktür. Çünkü hepsi iki katına çıkarak gidiyor.” **SÖ5**

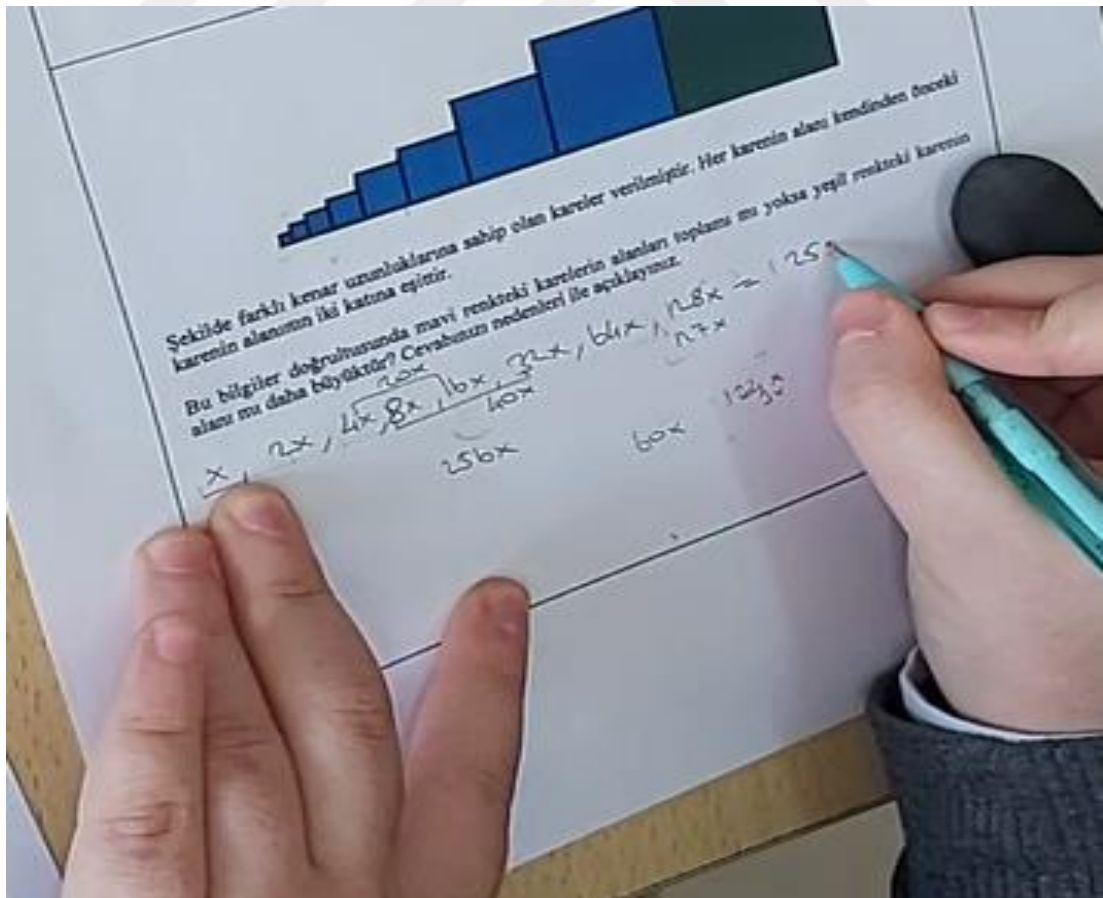
“Aslında yeşil. Bu (En büyük mavi kareyi gösterir) yani mavilerin bile en büyüğü yeşilin yarısına eşit oluyormuş. O yüzden mavilerin toplamı küçük olur bence.” **SÖ6**

“Yeşil daha büyüktür. Bunların toplamı diğeri kadar olmaz bence.” **SÖ8**

Sekizinci sınıf öğrencilerinin yukarıdaki yanıtlarına bakıldığında genel olarak görsele bakarak yanılgıya düşmedikleri söylenebilir. Hatta varsayımlarını destekleyici gerekçelerde öne sürmüşlerdir. Bu noktadan sonra katılımcıların varsayımlarını doğrulaması beklenmiştir. Bunun için katılımcılar verilen görselden matematiksel çıkarımlar yapmaya çalışmışlar ve bu çalışmaları dönüştürme olarak değerlendirilmiştir. Katılımcıların çoğu cebirsel ifadeler kullanarak sembolik temsile geçiş yapmıştır. Bazı katılımcıların çözüm örnekleri şu şekildedir:



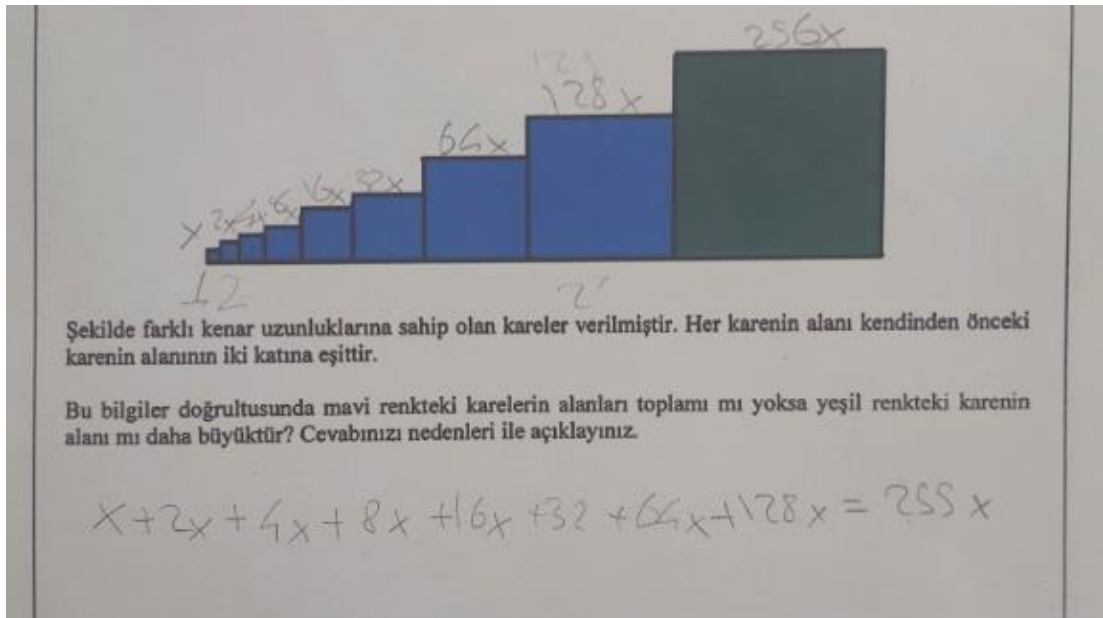
Şekil 143. SÖ1'in görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözümü



Şekil 144. SÖ6'nın görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözümü



Şekil 145. SÖ2'nin görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözümü



Şekil 146. SÖ5'in görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik çözümü

Katılımcıların görselleştirme yaparken kullandıkları bazı ifadeler veya en küçük kareden başlayarak dönüştürme yapmaları özelleştirme olarak görülmüştür. İşlemleri

sonucunda da SÖ4 dışındaki bütün katılımcılar doğrulama yapabilmişlerdir. Katılımcılardan SÖ7 ile yapılan görüşme şu şekildedir:

SÖ7: *Bence yeşil daha büyüktür.*

A: *Neden?*

SÖ7: *Çünkü her seferinde 2 katına eşit oluyor. Yeşile 32 desek burası 16, burası da 8 olur (Yeşil kareden önceki diğer iki kareden bahsediyor). Öncekilerin değeri küçük olacağı için çok fazla bir şey ifade etmeyecek. O yüzden onların toplamı yeşilden daha küçük olur.*

A: *Bunu nasıl ispatlayabilirsin bana?*

SÖ7: *Sadece en baştaki kareleri düşünsek bile şu kare önceki ikisinden daha büyüktür. Bu şekilde değer versek mesela görebiliriz. Ya da değişken kullanalım. En baştakine x diyelim $2x$, $4x$, $8x$, $16x$, $32x$, $64x$, $128x$, $256x$ diye devam eder. Bu x 'leri toplarsak. Büyük ihtimalle $256x$ eksi x $255x$ çıkacak.*

A: *Neden öyle tahmin ettin?*

SÖ7: *Önceki örneklerden öyle olacağını çıkarttım. (İşlemini yapar) $255x$ çıktı.*

Diğer katılımcıların da SÖ7 gibi benzer süreçlerden geçerek doğrulama yaptıkları görülmüştür. Katılımcılardan SÖ6'nın doğrulama süreci şu şekildedir: “(En küçük kareye x yazarak cebirsel ifadeleri kullanır). En büyük olan da $256x$ olur. Amacım bunların toplamı $256x$ 'ten az mı olacak çok mu olacak bunu bulmak. (Toplama işlemi yapar) Bu (Yeşil) büyük çıkıyor.” Başka bir katılımcı SÖ1 ise “Şöyle yapsam en baştaki kareye bir sayı vereyim. Vereceğim sayı çok büyük olmasın katını almak zor olabilir. En küçük kare 2 olsun. Bu 4, bu 8, 16, ..., 256. En sondaki de 512. Şimdi toplayarak bulabiliriz (İşlem yapar ve 510 bulur). Evet dediğim gibi yeşil daha büyük oluyor.” şeklinde doğrulama yapmıştır.

Katılımcıların çoğu probleme yönelik doğru varsayımda bulunup doğrulama ve ikna etmeye yönelik başarılı olsalar da katılımcılardan sadece SÖ1, SÖ3, SÖ6 ve SÖ7'nin genellemeye yönelik ifadelerde bulundukları görülmüştür. Katılımcılardan SÖ1'in şu ifadesi genelleme olarak düşünülmüştür: “Ama aldığı değer önemli sonuçta. Mesela buradan (En küçük kareyi gösterir) büyük bir sayı ile başlarsam yeşil çok büyük bir değer olacak ve mavilerin toplamı bile buna eşit olamayacak. Yeşil her zaman büyük olacak.” SÖ6 “En büyük mavi kare de diğer mavi karelerin toplamından büyük olur” diyerek genelleme yapmıştır. Katılımcılardan SÖ3 ise problemi üslü sayılarla ilişkilendirerek bir genellemede bulunmuştur.

4.5. Sınıf Düzeylerinin Karşılaştırılmasına İlişkin Bulgular

Bu kısımda farklı sınıf düzeylerinin analiz edilmesinden elde edilen bulguların karşılaştırılmasına ilişkin bulgular verilmiştir. Bulgular, farklı sınıf düzeylerine yöneltilen ortak problemlerin karşılaştırılmasına dayanmaktadır. Her bir probleme yönelik farklı sınıf düzeylerindeki katılımcıların sahip oldukları göstergeler yorumlanmıştır.

4.5.1. Sözel özelleştirme probleminden elde edilen bulguların karşılaştırılması

Bütün sınıf düzeylerinde ortak olan sözel özelleştirme problemi, farklı sınıf düzeylerindeki katılımcıların görsel akıl yürütmelerine yönelik geniş bir bakış açısı sağlamaktadır. Hazırlanan problemin çözümü için araştırmaya katılan katılımcıların çoğu görsel akıl yürütmeye yönelik göstergeler sergilemişlerdir. Ortaokul öğrencilerinin sözel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri Tablo 35'te sunulmaktadır:

Tablo 35

Katılımcıların sözel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmelerinin karşılaştırılması

Bileşenler	Göstergeler	Sınıf Düzeyleri			
		5	6	7	8
Görsel Temsil	Resim	-	-	-	-
	Çizim	BÖ2, BÖ3, BÖ4, BÖ6, BÖ8	AÖ1, AÖ5	YÖ1, YÖ4, YÖ6, YÖ7, YÖ8	SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ6, SÖ8
	Model	BÖ7, BÖ8	AÖ1, AÖ2, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ7, AÖ8	YÖ1, YÖ2, YÖ3, YÖ5, YÖ6	SÖ3, SÖ4, SÖ7
	Tablo	-	-	YÖ3	-
Görselleştirme	Dönüştürme	-	AÖ4, AÖ6	YÖ3	SÖ6
	Zihinde	BÖ2, BÖ4, BÖ5, BÖ7, BÖ8	AÖ1, AÖ2, AÖ3, AÖ5, AÖ7, AÖ8	YÖ1, YÖ2, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ6, YÖ7, YÖ8	SÖ1, SÖ3, SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Canlandırma				
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	BÖ2, BÖ4, BÖ5, BÖ7, BÖ8	AÖ1, AÖ2, AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ7, AÖ8	YÖ1, YÖ2, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ6, YÖ7, YÖ8	SÖ1, SÖ3, SÖ4, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Genelleme	BÖ4, BÖ8	AÖ2, AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ7, AÖ8	YÖ1, YÖ3, YÖ4, YÖ7, YÖ8	SÖ1, SÖ3, SÖ4, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Varsayımda Bulunma	BÖ2, BÖ4, BÖ5, BÖ8	AÖ1, AÖ2, AÖ3, AÖ7, AÖ8	YÖ1, YÖ3, YÖ7, YÖ8	SÖ3, SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7
	Doğrulama ve İkna Etme	BÖ4, BÖ8	AÖ7, AÖ8	YÖ3, YÖ7, YÖ8	SÖ3, SÖ4, SÖ6, SÖ7

Tablo 35'e bakıldığında sözel özelleştirme probleminin çözümü için ortaokul öğrencilerinin çoğunlukla çizim veya model görsel temsillerini kullandıkları görülmektedir. Bunun yanı sıra zihinde canlandırma yaptıkları ve birçok farklı matematiksel düşünmeye yönelik göstergeler sergiledikleri görülmektedir. Altıncı sınıf öğrencilerinin diğer öğrencilere göre daha çok model kullandıkları gözlenmiştir. Bu durumun da altıncı sınıf öğrencilerinin diğer öğrencilere göre daha fazla genellemeye ulaşmalarını sağlamıştır. Yani bu problem için çizim yerine model temsili kullanmak genellemeye ulaşmada daha başarılı sonuçlar vermiştir.

Beşinci sınıf öğrencilerinin diğer sınıf düzeylerine göre daha az görselleştirme yaptıkları sonucuna ulaşılmıştır. Bunun en temel sebebi öğrencilerin boyutlar arası geçiş yapmakta zorlanmalarındır. Yani problemde sunulan kâğıt katlama işlemi üç boyutlu bir durumu düşünmeyi gerekli kılmaktadır. Ancak katılımcıların iki boyutlu bir kâğıda çizim yapıp üç boyutlu bir durumu düşünmeleri bu sınıf düzeyindeki katılımcıları zorlamıştır. Çok çizim kullanan yedinci ve sekizinci sınıf katılımcılarına bakıldığında ise bu zorlanmanın daha az olduğu görülmüştür. Dolayısıyla bilişsel görevleri yerine getirmekte katılımcıların yaşlarının önemli bir rolü olduğu görülmektedir. Altıncı sınıf katılımcılarına yönelik ortaya çıkan bulgu ile beşinci sınıf katılımcılarına yönelik bulgu karşılaştırıldığında, ortaokul kademesinde özellikle küçük yaş gruplarında somut materyallerin daha işlevsel olduğu söylenebilir. Bununla birlikte birden fazla görsel temsil kullanan birçok katılımcının da problemi daha organize bir şekilde çözdüğü gözlenmiştir.

Matematiksel düşünmenin bir başka göstergesi olan doğrulama ve ikna etmeye yönelik olarak öğrencilerin çok azının bu göstergeye sahip olduğu görülmektedir. Sınıf seviyesi arttıkça bu göstergenin daha çok ortaya çıktığı söylenebilir. Bu bulguların yanı sıra başarı düzeyi yüksek öğrencilerin de farklı matematiksel düşünme göstergelerine daha çok sahip oldukları görülmüştür.

4.5.2. Görsel özelleştirme probleminden elde edilen bulguların karşılaştırılması

Öğrencilerin ilkokul yıllarından itibaren sürekli olarak karşılaştığı çevre ve alan kavramları ile ilgili olan görsel özelleştirme problemi sekizinci sınıftaki katılımcılar dışında bütün öğrencilere yöneltilmiştir. Beşinci sınıfta yer alan bir kazanımla bağlantılı olan problem, farklı sınıf düzeylerindeki katılımcıların görsel akıl yürütmelerine yönelik geniş bir bakış açısı sağlamaktadır. Hazırlanan problemin çözümü için araştırmaya katılan katılımcıların çoğu görsel akıl yürütmeye yönelik göstergeler sergilemişlerdir. Ortaokul öğrencilerinin görsel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri Tablo 36'da gösterilmektedir:

Tablo 36

Katılımcıların görsel özelleştirme problemine yönelik görsel akıl yürütmelerinin karşılaştırılması

Bileşenler	Göstergeler	Sınıf Düzeyleri		
		5	6	7
Görsel Temsil	Resim	-	-	-
	Çizim	BÖ1, BÖ2, BÖ4, BÖ5, BÖ6, BÖ7	AÖ5	YÖ3, YÖ5
	Model	-	-	-
	Tablo	BÖ8	AÖ1, AÖ7, AÖ8	YÖ4, YÖ7, YÖ8
Görselleştirme	Dönüştürme	BÖ1, BÖ2, BÖ3, BÖ4, BÖ5, BÖ6, BÖ7, BÖ8	AÖ1, AÖ2, AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ7, AÖ8	YÖ1, YÖ2, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ6, YÖ7, YÖ8
	Zihinde Canlandırma	BÖ7	-	YÖ5
	Özelleştirme	BÖ1, BÖ4, BÖ5, BÖ7, BÖ8	AÖ1, AÖ3, AÖ5, AÖ7, AÖ8	YÖ1, YÖ2, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ6, YÖ7, YÖ8
Matematiksel Düşünme	Genelleme	BÖ4, BÖ7, BÖ8	AÖ3, AÖ5, AÖ7, AÖ8	YÖ1, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ7, YÖ8
	Varsayımda Bulunma	BÖ4, BÖ7, BÖ8	AÖ1, AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ7, AÖ8	YÖ1, YÖ2, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ6, YÖ7, YÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	-	-	-

Tablo 36 incelendiğinde bütün katılımcıların görsel akıl yürütme sürecinde dönüştürme yapabildikleri anlaşılmaktadır. Yani araştırmaya katılan katılımcıların tamamı görsel olarak verilen dikdörtgenlerin çevre ve alan uzunluklarını hesaplayabilmişlerdir. Problemin devamında sorulan durum için ise beşinci sınıf öğrencilerinin diğer sınıftaki katılımcılara göre daha çok görsel temsil kullandıkları ortaya çıkmıştır. Ancak her ne kadar beşinci sınıf öğrencileri daha çok görsel temsil kullansa da matematiksel düşünme göstergeleri açısından diğer sınıflardan geride kalmışlardır. Bunun sebebi ise beşinci sınıf öğrencilerinin geometrik kavramları karıştırmaları ve çevre-alan konusunda bazı kavram yanlışlarına sahip olmalarıdır. Onların bu hataları problemde verilen görseli yanlış yorumlamalarına sebep olmakta ve çözüme ulaşma süreçlerini olumsuz etkilemektedir. Matematiksel düşünme açısından en başarılı grup ise yedinci sınıftaki katılımcılar olmuştur. Ayrıca bu problemde varsayımda bulunan birçok katılımcının genellemeye ulaşması da dikkat çekmektedir.

Görsel temsil türü açısından beşinci sınıf öğrencileri sıklıkla çizim yaparken, altıncı ve yedinci sınıf katılımcıları daha çok tablo temsili oluşturmuştur. Bununla birlikte görsel temsil kullanmadan problemi çözen katılımcılar da bulunmaktadır. Bunun sebebi olarak katılımcıların verilen görsel temsillerden yararlanarak zihinde canlandırma yapmaları görülmektedir. Diğer bir deyişle bu katılımcıların içsel temsilleri dışsal temsil olarak yansıtmadıkları düşünülmektedir.

4.5.3. Beşinci ve altıncı sınıf öğrencilerine yöneltilen sözel genelleme probleminden elde edilen bulguların karşılaştırılması

Beşinci ve altıncı sınıf öğrencilerinin sözel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri Tablo 37’de sunulmaktadır:

Tablo 37

Katılımcıların sözel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmelerinin karşılaştırılması

Bileşenler	Göstergeler	Sınıf Düzeyleri	
		5	6
Görsel Temsil	Resim	BÖ2, BÖ3, BÖ4, BÖ8	AÖ3, AÖ7, AÖ8
	Çizim	-	-
	Model	BÖ1, BÖ2, BÖ5	AÖ1, AÖ2, AÖ4, AÖ5, AÖ7
	Tablo	-	-
Görselleştirme	Dönüştürme	-	-
	Zihinde	BÖ2, BÖ4, BÖ5, BÖ7, BÖ8	AÖ2, AÖ4, AÖ5, AÖ7, AÖ8
	Canlandırma	-	-
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	BÖ2, BÖ4, BÖ5, BÖ7, BÖ8	AÖ2, AÖ4, AÖ5, AÖ7, AÖ8
	Genelleme	BÖ4, BÖ7, BÖ8	AÖ2, AÖ5, AÖ7, AÖ8
	Varsayımda Bulunma	BÖ4, BÖ8	AÖ5, AÖ7, AÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	-	-

Tablo 37’ye bakıldığında her iki sınıf düzeyindeki katılımcıların benzer performanslar sergiledikleri görülmektedir. Beşinci sınıf düzeyindeki katılımcılar altıncı sınıf öğrencilerine göre daha çok resim temsili kullanırken, altıncı sınıf düzeyindeki katılımcılar beşinci sınıf öğrencilerine göre daha çok model temsili kullanmışlardır. İki sınıf düzeyinde de her iki temsili kullanan birer öğrenci bulunmaktadır. Altıncı sınıf öğrencileri için model temsili resimsel temsillere göre daha işlevsel olduğu söylenebilir. Beşinci sınıf öğrencileri için tersi bir durum ortaya çıkmıştır. Ancak bu problemde hangi temsilin daha işlevsel olduğundan ziyade katılımcıların temsil üzerinden zihinde canlandırma yapabilmeleri daha önemli görülmektedir. Resimsel temsil kullanan bazı öğrencilerin problemde ilerleme sağlayamamaların nedeni boyutlar arası geçişi hesaba katmamaları olmuştur. Dolayısıyla resimsel temsiller görselleştirme yapmayı güçleştirmektedir. Sadece 1 öğrenci görsel temsil kullanmadan problemi çözebildiğinden dolayı genel olarak öğrencilerin görsel temsil kullanmaya ihtiyaç duydukları söylenebilir. Görselleştirme ve matematiksel düşünme açısından da birçok göstergede eşit sayıda katılımcının yer aldığı ortaya çıkmıştır. Her iki sınıf düzeyinde genellemeye ulaşabilen öğrenci sayısı azdır. Genelleme yapabilen birçok öğrenci de başarı düzeyi yüksek öğrencilerden oluşmaktadır. Bununla birlikte problem çözme sürecinde varsayım üreten öğrencilerin genellemeye daha rahat ulaştıkları görülmüştür.

4.5.4. Yedinci ve sekizinci sınıf öğrencilerine yöneltilen sözel genelleme probleminden elde edilen bulguların karşılaştırılması

Yedinci sınıf düzeyindeki bir kazanımdan yola çıkarak hem yedinci hem sekizinci sınıf öğrencilerine aynı problem yöneltilmiştir. Yedinci ve sekizinci sınıf öğrencilerinin sözel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri Tablo 38’deki gibidir:

Tablo 38

Katılımcıların sözel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmelerinin karşılaştırılması

Bileşenler	Göstergeler	Sınıf Düzeyleri	
		7	8
Görsel Temsil	Resim	-	-
	Çizim	YÖ1, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ7, YÖ8	SÖ1, SÖ5, SÖ8
	Model	-	-
	Tablo	-	SÖ5, SÖ7, SÖ8
Görselleştirme	Dönüştürme	YÖ1, YÖ3, YÖ7, YÖ8	SÖ5, SÖ7, SÖ8
	Zihinde Canlandırma	-	-
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	YÖ1, YÖ3, YÖ7, YÖ8	SÖ5, SÖ7, SÖ8
	Genelleme	YÖ3, YÖ8	SÖ5, SÖ7
	Varsayımda Bulunma	YÖ3, YÖ7, YÖ8	SÖ5, SÖ7, SÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	-	-

Tablo 38 incelendiğinde her iki sınıf düzeyindeki katılımcıların benzer performanslar sergiledikleri görülmektedir. Yedinci sınıf düzeyindeki katılımcılar sekizinci sınıf öğrencilerine göre daha çok çizim yapmışlardır. Sekizinci sınıf öğrencilerinin arasında ise çizim yerine tablo yapan veya her iki temsili de kullanan katılımcılar bulunmaktadır. Görsel temsili doğru bir şekilde kullanarak görselleştirme yapan katılımcıların matematiksel düşünmeye yönelik göstergeleri de benzer bir sırayla sergilediği ortaya çıkmıştır. Bu problem ile ilgili olarak her iki sınıf düzeyinde de matematiksel düşünme göstergelerini sergileyen öğrenci sayısı beklenenin altındadır. Bunun sebeplerinden biri olarak katılımcıların ön bilgilerinde eksikler olması gösterilebilir. Bir başka sebep ise cebirsel temsilleri problemde nasıl kullanacaklarını bilmemeleridir. Sonuç itibari ile her iki sebebin de katılımcıların matematik konuları arasında ilişkilendirme yapamamaları ile ilgili olduğu söylenebilir.

4.5.5. Beşinci ve altıncı sınıf öğrencilerine yöneltilen görsel genelleme probleminden elde edilen bulguların karşılaştırılması

Beşinci ve altıncı sınıf öğrencilerinin görsel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri Tablo 39’da sunulmaktadır:

Tablo 39

Katılımcıların görsel genelleme problemine yönelik görsel akıl yürütmelerinin karşılaştırılması

Bileşenler	Göstergeler	Sınıf Düzeyleri	
		5	6
Görsel Temsil	Resim	BÖ4	-
	Çizim	-	-
	Model	BÖ1, BÖ2, BÖ3, BÖ4, BÖ8	AÖ1, AÖ2, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ8
	Tablo	-	-
Görselleştirme	Dönüştürme	BÖ1, BÖ3, BÖ4	AÖ2, AÖ4, AÖ5
	Zihinde Canlandırma	BÖ2, BÖ4, BÖ5, BÖ7, BÖ8	AÖ1, AÖ3, AÖ6, AÖ8
	Özelleştirme	BÖ2, BÖ3, BÖ4, BÖ5, BÖ7, BÖ8	AÖ1, AÖ2, AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ8
Matematiksel Düşünme	Genelleme	BÖ4, BÖ8	AÖ6, AÖ8
	Varsayımda Bulunma	BÖ4, BÖ5, BÖ7, BÖ8	AÖ1, AÖ2, AÖ3, AÖ5, AÖ6, AÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	-	-

Tablo 39'a göre görsel genelleme probleminin çözümü için beşinci ve altıncı sınıf öğrencileri çoğunlukla model temsilini tercih etmişlerdir. Uzamsal düşünme gerektiren bir problem olması dolayısıyla katılımcıların bu tercihleri onların görselleştirme yapmalarına da yardımcı olmuştur. Görsel temsil kullanmadan görselleştirme yapabilen öğrencilerin olduğu da görülmüştür. Ancak bu katılımcılar genelleme yapamamışlardır. Bu yaş grubundaki öğrencilerin matematiksel düşünmeyi gerçekleştirebilmeleri için somut materyallerle etkileşimde bulunmalarının önem taşıdığı söylenebilir. Diğer taraftan her iki sınıf düzeyindeki katılımcıların sahip oldukları göstergeler incelendiğinde net bir fark olmadığı anlaşılmaktadır. Her iki gruptaki katılımcıların büyük çoğunluğu özelleştirme yapabilmişlerdir. Yani görselde verilen üçüncü adımdaki birimküp sayısına ulaşabilmişlerdir. Daha ileri adımlar için ise bazı katılımcılar tahminler üretmişlerdir. Ancak çok az sayıdaki katılımcı genellemeye ulaşmıştır. Katılımcıların bir sayının küpünün nasıl hesaplanacağını bildikleri halde bu problemde bunu düşünememeleri kavramlar arası ilişkilendirmeyi kullanamadıklarını göstermektedir.

4.5.6. Altıncı ve yedinci sınıf öğrencilerine yöneltilen görsel varsayımda bulunma probleminden elde edilen bulguların karşılaştırılması

Yedinci sınıf düzeyindeki bir kazanımdan yola çıkarak hem yedinci hem de altıncı sınıf öğrencilerine aynı problem yöneltilmiştir. Kareli kâğıt üzerinde verilen şeklin alanı istendiğinden dolayı altıncı sınıf öğrencilerinin de yorumda bulunduğu bir problem olmuştur. Yedinci ve altıncı sınıf öğrencilerinin görsel varsayımda bulunma problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri Tablo 40'ta gösterilmektedir:

Tablo 40

Katılımcıların görsel varsayımda bulunma problemine yönelik görsel akıl yürütmelerinin karşılaştırılması

Bileşenler	Göstergeler	Sınıf Düzeyleri	
		6	7
Görsel Temsil	Resim	-	-
	Çizim	AÖ7, AÖ8	YÖ1, YÖ2, YÖ3, YÖ8
	Model	-	-
	Tablo	-	-
Görselleştirme	Dönüştürme	AÖ2, AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ7, AÖ8	YÖ2, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ8
	Zihinde Canlandırma	AÖ5, AÖ7, AÖ8	YÖ3
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	AÖ2, AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ7, AÖ8	YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ8
	Genelleme	AÖ7	YÖ3, YÖ8
	Varsayımda Bulunma	AÖ5, AÖ7, AÖ8	YÖ2, YÖ3, YÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	AÖ7	YÖ3

Tablo 40'a bakıldığında görsel olarak sunulan problemde katılımcıların ek çizimler yaptığı anlaşılmaktadır. Yedinci sınıf öğrencileri daha çok görsel temsil kullanmışlardır. Görselleştirmeye ve özelleştirmeye bakıldığında ise altıncı sınıf öğrencilerinin yedinci sınıf öğrencilerine göre daha başarılı olduğu söylenebilir. Bu şekilde bir fark olmasının en temel sebebi problemde verilen şeklin birimkareler üzerinde olmasıdır. Katılımcılar verilen şeklin alanını birimkareler yardımıyla bulmuşlardır. Altıncı sınıf öğrencilerinin kareli kâğıt üzerinde daha çok etkinlik yapmaları bu durumun nedeni olarak söylenebilir. Ancak birimkarelere bağlı kalmadan ön bilgilerini kullanarak ve ek çizimler yaparak ilerleyen katılımcıların daha ileri matematiksel düşünme göstergelerine ulaştıkları gözlenmiştir. Bunun yanı sıra bazı katılımcıların eşkenar dörtgen ve kareye yönelik kavram yanılgılarının olması, onların akıl yürütmelerini engellemiştir. Bilhassa kareye ait bazı özelliklerin eşkenar dörtgende de uygulanabileceğini düşünen katılımcılar bulunmaktadır. Bununla birlikte görselleştirmenin her iki göstergesine de sahip olan katılımcıların görsel akıl yürütmeye daha etkili sonuçlar aldığı görülmüştür.

4.5.7. Sözel doğrulama ve ikna etme probleminden elde edilen bulguların karşılaştırılması

Bütün sınıf düzeylerinde ortak olan sözel doğrulama ve ikna etme problemi, farklı sınıf düzeylerindeki katılımcıların görsel akıl yürütmelerine yönelik bir bakış açısı sağlamaktadır. Hazırlanan problemin çözümünde araştırmaya katılan katılımcıların çoğunluğunun zorlandığı söylenebilir. Ortaokul öğrencilerinin sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri Tablo 41'de sunulmaktadır:

Tablo 41

Katılımcıların sözel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik görsel akıl yürütmelerinin karşılaştırılması

Bileşenler	Göstergeler	Sınıf Düzeyleri			
		5	6	7	8
Görsel Temsil	Resim	-	-	-	-
	Çizim	BÖ2, BÖ4, BÖ5, BÖ6, BÖ7, BÖ8	AÖ1, AÖ5, AÖ6, AÖ7, AÖ8	YÖ1, YÖ4, YÖ5, YÖ7, YÖ8	SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Model	-	-	-	SÖ6
	Tablo	BÖ8	AÖ8	YÖ8	SÖ4
Görselleştirme	Dönüştürme	BÖ4, BÖ8	AÖ7, AÖ8	YÖ8	SÖ3, SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Zihinde Canlandırma	BÖ4, BÖ7, BÖ8	AÖ7, AÖ8	YÖ1, YÖ4, YÖ7, YÖ8	SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
Matematiksel Düşünme	Özelleştirme	BÖ4, BÖ7, BÖ8	AÖ7, AÖ8	YÖ1, YÖ7, YÖ8	SÖ3, SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Genelleme	BÖ4, BÖ8	AÖ7, AÖ8	YÖ8	SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Varsayımda Bulunma	BÖ4, BÖ8	AÖ7, AÖ8	YÖ8	SÖ1, SÖ4, SÖ5, SÖ7, SÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	BÖ4, BÖ8	AÖ7, AÖ8	YÖ8	SÖ4, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8

Tablo 41’de görüldüğü üzere katılımcıların büyük çoğunluğu problemi çözmek için çizim yapmışlardır. Bunun yanı sıra az sayıdaki katılımcı çizimle birlikte model ve tablo temsili de kullanmıştır. Bu şekilde birden fazla temsil kullanan katılımcıların bu problemde görselleştirme yaptıkları ve bütün matematiksel düşünme göstergelerini sergiledikleri görülmüştür. Problemin çözümü ile ilgili olarak sekizinci sınıf öğrencilerinin diğer sınıflardaki öğrencilerden daha başarılı oldukları söylenebilir. Diğer sınıflarda birkaç katılımcı en ileri seviye olarak görülen doğrulama ve ikna etmeye ulaşırken, sekizinci sınıftaki katılımcıların yarısından fazlası doğrulama yapabilmıştır. Beşinci, altıncı ve yedinci sınıftaki katılımcıların performanslarının ise birbirine benzediği, hatta beşinci ve altıncı sınıftaki katılımcıların yedinci sınıflara göre biraz daha başarılı oldukları söylenebilir.

Katılımcıların görsel temsil kullanmalarına rağmen görselleştirme yapamamaları, görsel akıl yürütme sürecini ilerletememelerine neden olmuştur. Özellikle farklı büyüklükteki kareleri fark edemeyen öğrenciler zihinde canlandırma yapamamışlardır. Bununla birlikte zihinde canlandırma yapan katılımcılar ise genel olarak dönüştürme de yaparak farklı matematiksel düşünme göstergelerini sergilemişlerdir. Katılımcıların görselleştirme yapamamalarının bir diğer sebebi ise birim kavramını tam olarak içselleştirememiş olmalarıdır. Problemde ipucu olarak verilen 1 birim ifadesinin katılımcıların çoğunda pek fazla

çağrışım yaptığı söylenemez. Bundan dolayı da aynı zemin üzerinde farklı uzunluklarda karelerin olabileceğini düşünememişlerdir. Problemden matematiksel düşünme göstergelerini sergileyen katılımcılar ise çoğunlukla yüksek sosyoekonomik düzeyde olduğu kabul edilen okuldaki öğrencilerdir. Bu bulguların yanı sıra genellikle başarı düzeyi yüksek öğrencilerin farklı matematiksel düşünme göstergelerine daha çok sahip oldukları görülmüştür.

4.5.8. Görsel doğrulama ve ikna etme probleminden elde edilen bulguların karşılaştırılması

Altıncı, yedinci ve sekizinci sınıflar için ortak olan görsel doğrulama ve ikna etme problemi, farklı sınıf düzeylerindeki katılımcıların görsel akıl yürütmelerine yönelik geniş bir bakış açısı sağlamaktadır. Hazırlanan problemin çözümü için araştırmaya katılan katılımcıların çoğu görsel akıl yürütmeye yönelik göstergeler sergilemişlerdir. Ortaokul öğrencilerinin görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik görsel akıl yürütmeleri Tablo 42'deki gibidir:

Tablo 42

Katılımcıların görsel doğrulama ve ikna etme problemine yönelik görsel akıl yürütmelerinin karşılaştırılması

Bileşenler	Göstergeler	Sınıf Düzeyleri		
		6	7	8
Görsel Temsil	Resim	-	-	-
	Çizim	-	-	-
	Model	-	-	-
	Tablo	-	-	-
Görselleştirme	Dönüştürme	AÖ2, AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ7, AÖ8	YÖ1, YÖ2, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ6, YÖ7, YÖ8	SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Zihinde Canlandırma	-	-	-
	Özelleştirme	AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ7, AÖ8	YÖ1, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ6, YÖ7, YÖ8	SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
Matematiksel Düşünme	Genelleme	-	-	SÖ1, SÖ3, SÖ6, SÖ7
	Varsayımda Bulunma	AÖ2, AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ7, AÖ8	YÖ1, YÖ2, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ6, YÖ7, YÖ8	SÖ1, SÖ3, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8
	Doğrulama ve İkna Etme	AÖ3, AÖ4, AÖ5, AÖ6, AÖ7	YÖ1, YÖ3, YÖ4, YÖ5, YÖ6, YÖ7, YÖ8	SÖ1, SÖ2, SÖ3, SÖ5, SÖ6, SÖ7, SÖ8

Tablo 42'de görüldüğü üzere görsel doğrulama ve ikna etme probleminin çözümü için katılımcıların tamamının verilen görseli kullandıkları ve ek görsel temsil kullanmadıkları ortaya çıkmıştır. Problemin çözümüne başlamadan önce katılımcıların hemen hemen hepsi

varsayımda bulunmuştur. Altıncı ve yedinci sınıflardaki birçok katılımcı verilen görseldeki kare sayılarına aldanarak yanlış varsayım üretirken, sekizinci sınıftaki katılımcıların çoğunluğunun bu yanılgıya düşmedikleri gözlenmiştir. Hatta sekizinci sınıftaki katılımcılar varsayımlarını destekleyici gerekçeler de üretmişlerdir.

Katılımcılar varsayımda bulunduktan sonra verilen görselden matematiksel çıkarımlar yapmaya çalışmışlardır. Katılımcıların bu çabaları dönüştürme olarak değerlendirilmiştir. Bu noktada altıncı sınıf katılımcılarının hiç biri cebirsel ifade kullanmazken, yedinci sınıf katılımcılarından ise sadece 1 katılımcı cebirsel ifade kullanmıştır. Sekizinci sınıf katılımcılarının çoğunluğu ise cebirsel ifadeler kullanarak sembolik temsile geçiş yapmıştır. Katılımcılar genellikle buldukları sonuçlar ile doğrulama yapmışlardır. Bu süreçte yanlış varsayımda bulunan katılımcılar varsayımlarının yanlış olduğunu fark etmişlerdir. Sekizinci sınıf seviyesindeki bazı katılımcılar problemdeki özel durumu genellerken, altıncı ve yedinci sınıftaki katılımcılardan genellemede bulunan katılımcı olmamıştır. Sekizinci sınıf katılımcılarının cebirsel temsilleri daha etkin kullanmaları bu durumun sebebi olarak düşünülmektedir.

BÖLÜM V

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Yapılan araştırmada ortaokul öğrencilerinin geometri problemlerinde görsel akıl yürütme becerilerini incelemek amaçlanmıştır. Bu doğrultuda ortaokul kademesinde yer alan bütün sınıf düzeylerinden belirlenen öğrencilerle klinik mülakatlar yapılmıştır. Araştırmada her sınıf düzeyine ait görsel akıl yürütme süreçleri ortaya konduktan sonra sınıf düzeylerine ait görsel akıl yürütme süreçleri birbiriyle de karşılaştırılmaya çalışılmıştır. Araştırmanın bu bölümünde, bulgulara dayalı olarak ortaya çıkan sonuçlara, literatür ışığında yapılan tartışmaya ve önerilere yer verilmektedir.

5.1. Tartışma ve Sonuç

Öğrencilerle yapılan görüşmelerde öğrencilere görsel temsil kullanabilecekleri problemler yöneltilmiştir. Buradan hareketle araştırma sonucunda da öğrencilerin birçok farklı görsel temsil kullanması dikkat çekmektedir. Kullanılan görsel temsillerin başında ise çizim yapmanın geldiği ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin geometride okul yıllarının başından itibaren çizim çalışmaları yapmalarının bu sonucun ortaya çıkmasında bir etken olduğu söylenebilir. Öklid geometrisine bağlı olarak öğretilen kavramlarda da böyle bir sonucun ortaya çıkması doğal görülebilir. Yapılan görüşmelerde birçok katılımcı şekil çizerek problemi daha iyi anladığını ifade etmiştir. Özellikle öğrencilere zor gelen problemlerde veya problemi ilk başta anlayamadıklarında görsel yaklaşımların öğrencilere farklı bir bakış açısı getirdiği söylenebilir (Lowrie ve Kay, 2001). Benzer bir sonuca kesirler üzerine çalışma yapan Özkan ve arkadaşları (2018) da ulaşmıştır. Özkan ve arkadaşları (2018), öğrencilerin problemi algılamak için çizim yaptıklarını belirterek, öğrencilerin çizimlerinin problemde verilen çizimlerden daha etkili olduğunu da ifade etmişlerdir. Bu araştırmada da özellikle sözel olarak sunulan problemlerde çizim yapma davranışına sahip öğrenciler problemin çözümü için başarılı bir görsel akıl yürütme süreci gerçekleştirmişlerdir. Nitekim Csikos ve arkadaşları (2012), çizim yapan öğrencilerin matematik problemi çözmede daha başarılı olduğunu ve yapılan müdahale eğitimi ile öğrencilerin çizim yapmanın önemini kavradığını ortaya çıkarmışlardır. Lowrie ve Kay (2001) öğrencilerin zor buldukları sözel bir problemi çözmek için görsel temsilleri kullanmayı tercih ettiklerini ifade etmişlerdir. Posamentier ve Krulik (2016) ise bir problemi çözmek için ne zaman çizim yapmak gerektiğini belirlemenin deneyimlerle kazandırılacağını belirtmektedirler. Aksi takdirde görsel temsiller bazı öğrenciler için problemleri kolaylaştırırken, bazı öğrenciler için ise işleri daha zor hale getirebilmektedir (Pantziara vd., 2009). Bunun yanında Stylianou (2002), görsel temsilleri kullanabilmek için zengin bir

şemaya sahip olmak gerektiğini düşünmektedir. Buradan yola çıkarak çizim oluşturma davranışının öğrencilere nasıl kazandırılması gerektiği düşünülmelidir. Bu davranışın kazandırılmasında ise öncelikle öğretmenlerin bilinçli olması gerekmektedir. Bunun yanında ders kitaplarında yer alan etkinlikler vasıtasıyla da bu davranışın kazandırılabilceği söylenebilir.

Çizim yapmak problem çözme sürecinde önemli olduğu gibi yanlış çizim yapmak da öğrencileri yanlış sonuçlara götürmektedir. Bu durumla benzer bir sonuca ulaşan Önal-Durmaz (2019), şekillerdeki yanlış ve eksik gösterimin problemin doğru çözülmesini engellediğini ve çizilen şekillerin problemin çözümüne fayda sağlaması için öğrencilerin bir takım yönlendirmelere ihtiyaç duyduklarını tespit etmiştir. Boonen ve diğerleri (2014) ise araştırmalarında doğru görsel-şematik temsil kullananların bir sözel probleme daha çok doğru cevap verdiklerini, resimsel ve görsel olmayan temsilleri kullananların ise daha çok yanlış cevap verdiklerini belirtmişlerdir. Bundan dolayı görsel temsilin içeriğinin ve gösteriliş biçiminin de problem çözme sürecinde dikkat edilmesi gereken bir durum olduğu söylenebilir (Çilingir-Altın ve Önal, 2022). Delice ve Sevimli (2010), görsel temsil içeren veya görsel temsil kullanmayı gerektiren problemlerin çözüm sürecinde şekil üzerinde yapılacak değişikliklerin yansıtılamadığı ya da yanlış kullanıldığı durumlarda öğrencilerin süreci başarı ile tamamlamadıklarını gözlemişlerdir. Karpuz ve diğerleri (2014), bir ilişkinin genellenabilirliğinin sağlanabilmesi için kavramı temsil eden şeklin genellemeyi sağlayacak şekilde doğru çizilmesinin önemini vurgulamışlardır. Araştırmadaki birçok problemde de öğrencilerden genelleme yapmaları beklendiği için bir kavramı temsil edecek en uygun çizimlerin yapılması gerektiği söylenebilir. Bunun yanı sıra yanlış çizim yapan öğrencilerin hatalı imaj oluşturabilecekleri de göz ardı edilmemelidir. Burada öğretmenlere büyük görev düştüğünü belirten Ahmad ve diğerleri (2010), öğrencilerin temsil tercihlerinin çoğunlukla öğretmenlerinin onlara sınıfta ne öğrettiğine bağlı olduğunu vurgulamışlardır. Dolayısıyla öğretmenlerin derslerde kullandıkları görsel temsillerin öğrencilerin bilişsel yapılarını etkileyebileceği göz önüne alındığında, öğrencilerin yanlış çizim yapmalarında eksik öğrenmelerin de önemli bir etken olduğu unutulmamalıdır.

Uygun ortamlar sunulması halinde model kullanma da öğrencilerin ilgisini çeken bir diğer görsel temsil türüdür. Uysal-Koğ ve Başer (2012), öğrenme sürecinde görsel materyal kullanımının dersi ilgi çekici ve anlaşılır yaptığından dolayı öğrencilerin bilişsel ve duyuşsal açıdan olumlu etkileneceğini belirtmektedirler. Bunun yanında birçok çalışmada (Körükçü, 2008; Kükey vd., 2019) da görsel materyal kullanımının öğrencilerin matematiğe yönelik tutumlarını olumlu yönde etkilediği sonucuna varılmıştır. Araştırmada katılımcıların bir kısmı

model kullanmış ve bu sayede özelleştirme ve genelleme yapmışlardır. Bununla birlikte araştırma sonucunda çizim yerine model kullanan öğrencilerin genellikle matematiksel düşünme bileşenlerini sergileme açısından daha başarılı oldukları bulunmuştur. Kükey ve arkadaşları (2019) da öğretim sürecinde gerçek malzemeler kullanılarak yapılan görsel materyaller sayesinde öğrencilerin bilgileri somutlaştırdığını ve daha etkili öğrenmelerin gerçekleştiğini düşünmektedirler. Yine de katılımcıların temsil tercihlerini belirleyen en önemli nedenlerden birinin öğrencilere yöneltilen problemin yapısı ile ilgili olduğu söylenebilir (Corter ve Zahner, 2007; Pantziara vd., 2009; Xing, 2016). Yani bazı temsillerin belirli problem türleri için daha uygun olabileceği ifade edilebilir. Bundan dolayı öğrenciler birçok farklı temsil ile karşı karşıya getirilmeli ve hangi problem için hangi temsilin daha uygun olduğuna karar vermeleri için deneyim kazanmalıdırlar.

Verileri organize etmeyi sağlayan tablo temsili de öğrenciler zaman zaman kullanmışlardır. Tablonun veriyi takip etmede ve bir sonraki değerin nasıl olacağına karar vermede mükemmel bir araç olduğu vurgulanmaktadır (Posamentier ve Krulik, 2016). Mevcut araştırmada da tablo kullanmanın özellikle genelleme yapmada çok kullanışlı olduğu sonucuna varılmıştır. Örneğin; katılımcıların bazıları genellemeye ulaşmak için çokgenler ile ilgili en temel bildiklerini hatırlamaya çalışmış ve bunları tablo temsili kullanarak not almıştır. Devamında tabloya yazdığı açı değerlerini kullanarak matematiksel çıkarımlarda bulunmuşlardır. Bu noktada da öğrencilerin ön bilgilerinin ne kadar değerli olduğu bir kez daha ortaya çıkmıştır.

Öğrenciler tarafından en az tercih edilen görsel temsil türü ise resim temsidir. Bu durum öğrencilere yöneltilen problemlerin, geometri konuları ile ilgili olmasından kaynaklanmış olabilir. Örneğin; dört işlem gerektiren aritmetik problemlerinde öğrencilerin geometriye göre daha çok resim temsili kullanmak isteyeceği tahmin edilmektedir. Ancak resim temsili şematik temsillere göre daha yüzeysel görselleştirmeye sebep olduğu da söylenebilir. Nitekim yapılan araştırmaların sonuçları da şematik temsillerin resim temsiline göre problem çözme üzerinde daha olumlu bir etkisinin olduğunu göstermektedir (Boonen vd., 2014; Booth ve Thomas, 1999; Çilingir-Altın ve Önal, 2022; Ergen ve Özsoy, 2021; Hegarty ve Kozhevnikov, 1999; Özsoy, 2018; Uesaka, vd., 2007; Van Garderen ve Montague, 2003). Delibaş (2020) da yaptığı araştırmada öğrencilerin kullandıkları görsellerin tamamının şematik görseller olduğunu bulmuştur. Bu öğrencilerden uygun şematik görsel oluşturulabilenler problemlerin tamamını olmasa da büyük çoğunluğunu doğru çözebilmiştir. Mevcut araştırmanın sonucu literatürle karşılaştırıldığında öğrencilerin neden resim temsili çok fazla tercih etmedikleri daha iyi anlaşılmıştır. Doğru oluşturulmuş şematik görsellerin

problem çözme başarısı ile ilişkili (Hegarty ve Kozhevnikov, 1999; Zahner ve Corter, 2010) olduğu düşünüldüğünde öğrencilerin çizim, model veya tablo temsillerini daha sık kullanmaları normal karşılanmıştır.

Araştırma sonucunda farklı görsel temsil türlerini kullanmayı bilen öğrencilerin problemleri çözerken matematiksel düşünme bileşenlerini daha rahat sergiledikleri belirlenmiştir. Yani bir problemi çözerken öğrencinin tek bir görsel temsil yerine birden çok temsil kullanmasının matematiksel düşünme açısından önemli olduğu görülmüştür. Birden fazla görsel temsil kullanmanın problemi daha organize çözmeye yardımcı olduğu belirlenmiştir. Mesela bazı katılımcılar problemi çözerken öncelikle örüntüyü keşfetmeye odaklanmışlar ve bunun için de bir sonraki adımı şekil çizerek bulmaya çalışmışlardır. Daha sonra ise buldukları değerleri tabloya yerleştirerek görselleştirme yapmışlardır. Yapılan birçok araştırmada (Ahmad vd., 2010; Barbosa, 2013; Boonen vd., 2014; Delibaş, 2020; George, 1997; Stylianou ve Silver, 2004; Teahen, 2015; Usta vd., 2018; Zahner ve Corter, 2010) da görsel temsillerin problem çözme sürecindeki önemi vurgulanmıştır. Hatta matematik alanında doktora derecesine sahip olan kişiler için bile problem çözerken görsel temsillerin önemli bir araç olduğu bulunmuştur (Stylianou ve Silver, 2004). Presmeg ve Balderas-Cañas (2001), lisansüstü eğitim gören öğrencilerin çözümü tamamen cebirsel olan problemlerde bile sıklıkla görselleştirmeye başvurduğunu belirtmişlerdir. Kısacası farklı görsel temsilleri birlikte kullanmak problemi anlamlı hale getirmekte ve problemi anlayıp çözmeye yardımcı olmaktadır. Usta ve arkadaşları (2018), matematiksel düşüncenin gelişmesinin problem çözme gibi matematiksel becerilerin gelişmesine bağlı olduğunu vurgulayarak, görsellerin de problemin anlaşılmasına katkıda bulunduğunu belirtmişlerdir. Uysal-Koğ ve Başer (2012) de bir problemi görsel şekiller veya şemalarla görselleştirmenin problemi anlamaya katkı sağladığını vurgulamaktadırlar. Dolayısıyla bir problemi görselleştirmeden atılan adımların öğrencilerin problem çözme süreçlerini etkilediği düşünülmektedir. Örneğin; Tekin (2010) şekil çizmeden sadece aritmetik işlemler yoluyla problemleri çözmeye çalışan öğrencilerin çok fazla işlem hatası yaptığını görmüştür. Diğer taraftan Uesaka ve diğerleri (2007) problem çözerken diyagram kullanmanın doğru bir çözüme ulaşılacağını garanti etmeyeceğini belirtse de diyagram kullanan öğrencilerin diyagram kullanmayan öğrencilere göre daha başarılı olduğunu bulmuşlardır. Sonuç itibari ile görsel temsiller ile görselleştirme yapmak ve hatta farklı görsel temsilleri bir arada kullanmak bir problemi çözmeye gerekli bir araçtır.

Farklı temsilleri birlikte kullanmanın gerekli olduğu kadar temsiller arası geçiş yapabilmek de gereklidir. Araştırmada temsiller arası geçiş yapamayan öğrencilerin daha başarısız oldukları sonucuna varılmıştır. Woolner (2004), hem görsel hem de sözel düşünmeyi

esnek bir şekilde kullanarak bilişsel olarak dengeli olmanın önemine vurgu yapmaktadır. Alcock ve Simpson (2004), görsel ve cebirsel temsiller arası entegrasyon sağlanmadıkça görsel imajların harekete geçmeyeceğini belirtmişlerdir. Teahen (2015) ise bir problemin çözümündeki anahtarın öğrencilerin oluşturdukları temsil türünün ne olduğundan ziyade, temsilin içinde sayıların olmasına bağlı olduğunu belirterek problemin çözümündeki temsiller arası geçişe vurgu yapmıştır. Yılmaz ve Argun (2018) yaptıkları araştırmada katılımcıların süreç içerisinde bazen cebirsel olarak belirttikleri görüşlerini görselleştirme yoluyla açıklama veya destekleme ihtiyacı hissettiklerini belirtmişlerdir. Lowrie ve Clements (2001) de öğretmenlerin öğrencilere görsel ve görsel olmayan biçimlerde çözüm stratejilerini sunma ve modelleme konusunda bilinçli olmalarını önermektedir. Buradan hareketle sözel temsil kullanan öğrencilerin bunu görsel temsiller kullanarak desteklemelerinin önemli olduğu düşünülmektedir. Aynı zamanda gerektiğinde görsel temsillerin kendi aralarında da geçiş yapılabilirdir.

Temsiller arası geçişlerde içsel temsili dışsal temsil olarak ya da dışsal temsili içsel temsil olarak aktarmanın da bir problemi çözmede önemli bir yere sahip olduğu görülmüştür. Örneğin; varsayımda bulunan veya zihinde canlandırma yapan bazı katılımcılar açıklamalarını görsel temsil ile desteklemezse problemi çözmekte zorluk çekmişlerdir. Bu durumun tersi olan durumların da olduğu söylenebilir. Ancak genel itibari ile baktığımızda bu seviyede çok az ortaokul öğrencisinin olduğu düşünülmektedir. Booth ve Thomas (1999) da zihinsel görüntüden resim ve diyagram gibi ikincil temsillere ilerlemenin yorumlayıcı bir zihinsel işlem gerektirdiğinden bahsetmektedir. Günaydın (2011), görselleştirme sürecinde zihinde imgelemenin çok önemli olduğuna işaret ederek, dış temsilden ilk zihinsel imgenin oluşturulmasının problemin anlaşılması anlamına geldiğini belirtmiştir. Buna ilave olarak oluşturulan zihinsel imge yorumlandıktan sonra bir dışsal temsil üretilerek görselleştirme sürecinin tamamlandığını ifade etmiştir. Josef (2016) de yaptığı araştırmada, öğrencilerin bir diyagram, tablo veya resmi zihinlerinde canlandırmadan yazıp çizemeyeceklerini söylediklerini belirtmiştir. Bunun yanı sıra öğrenciler, herhangi bir problemi tam olarak çözmek için zihinlerinde bir imaja ya da en azından kısmi bir imaja sahip olmaları gerektiğini ileri sürmüşlerdir.

Öğrencilerle yapılan görüşmelerde öğrenciler görsel temsil içeren problemleri çözmenin daha kolay olduğunu ifade etmişlerdir. Bunun sebebi öğrencilerin kendilerinin görsel temsil oluşturmalarının daha zor olacağını düşünmeleridir. Benzer şekilde Delice ve Sevimli (2010), çalışmalarında görsel temsil verilerek sunulan problemleri öğrencilerin daha rahat çözdükleri sonucuna varmışlardır. Bu noktada öğrencilerin şekilleri birer yardımcı araç

olarak görmelerinin, ek çizimler ile şekli yeniden yapılandırmalarının ve matematiksel ilişkileri ortaya çıkarmalarının problem çözme sürecine rehberlik etmesi açısından önemli olduğunu vurgulamışlardır (Delice ve Sevimli, 2010). Bu durumun tersi olarak Yaprak (2019) çalışmasında öğrencilerin görsel olarak verilen problemlerde sözel olarak verilen problemlere göre daha az başarılı olduklarını bulmuştur. Bu sonucu ise öğrencilerin sözel problemleri görsel olarak çizip çözdüklerinde görselleştirmeyi daha iyi yapabilmelerine ve ilişkilendirme yapmakta daha az zorluk yaşamalarına bağlamaktadır. Bu sonuçların değişmesinde farklı etkenlerin olabileceği düşünülmektedir. Öğrenci başarısı, sunulan problemlerin zorluk derecesi, problemin içerdiği bağlam gibi birçok durum bu sonuçları etkileyebilir. Ancak sözel olarak verilen problemlerde görselleştirme yapmanın görsel olarak verilen problemlerde görselleştirme yapmaya göre daha çok uğraş gerektirdiği söylenebilir.

Görsel verilen bazı problemlerde öğrencilerin verilen görseli kullandıkları ve bazen ek görsel temsil kullandıkları bazen ise kullanmadıkları ortaya çıkmıştır. Delibaş (2020) da çalışmasında bazı problemlerdeki gerekli ilişkileri görebilen öğrencilerin aritmetiksel işlemlerle devam edip çözüme ulaştıklarını belirtirken, bazı problemlerde ise öğrencilerin yine çizdiği görsel üzerinde bulduğu ilişkilerle görseli revize edip tamamlayarak görsel üzerinden sonuca ulaştıklarını belirtmektedir. Josef (2016) de öğrencilerin görsel temsilleri farklı amaçlar için kullanabileceğini belirtmiştir. Josef'e (2016) göre öğrenciler, problem zor olduğunda onu basitleştirmek için görsel temsilleri kullanırken, problem çözme süreçlerinin ortasında takılıp kaldıklarında veya kafaları karıştığında da görsel temsilleri kullanmaktadırlar. Buradan problemlerde verilen görsellerin öğrencileri yönlendirdiği ve gerekli görülen durumlarda ise öğrencilerin ek görsel temsil kullandıkları söylenebilir. Bununla birlikte ister problemde görsel temsil verilsin ister öğrenci kendi görsel temsili oluştursun, bu temsillerin problem çözmenin birçok farklı aşamasında etkin bir şekilde kullanıldığı görülmüştür.

Görsel akıl yürütme sürecinde görsel temsil kullanmanın matematiksel düşünme için tek başına yeterli olmadığı, kullanılan görsel temsiller üzerinde görselleştirme yapmak gerektiği düşünülmektedir. Bu düşünceye iten en temel sebep görselleştirmenin görünmeyeni görünür yapma (Arcavi, 2003) özelliğinin olması olduğu söylenebilir. Ayrıca, Abdullah vd. (2012) görsel temsil kullanarak düşünmeye teşvik edilen öğrencilerin daha iyi bir kavramsal anlayış kazanabildiklerini ve matematik başarılarını artırebildiklerini bulmuşlardır. Öğrencilerin oluşturulan temsil aracılığıyla problemleri görselleştirebilmeleri ve öğrenme süreçlerine aktif olarak katılmaları bunun nedeni olarak gösterilmiştir. Bunun yanı sıra görselleştirme kullanılarak yapılan öğretim birçok farklı duyu organına da hitap ettiğinden,

öğrencinin konuyu hatırlama oranını artırarak başarıyı da etkilemektedir (Körükçü, 2008; Şan, 2008). Tüm bunlar dikkate alındığında öğrencilerin sadece görsel temsil kullanmaları değil, kullandıkları görsel temsiller ile görselleştirme yapabilmeleri sağlanmalıdır. Diğer taraftan başarı düzeyi düşük öğrenciler uygun şekilleri oluşturabilmekte zorluk çekmektedirler (Van Garderen vd., 2014). Ergan ve Özsoy (2021) araştırmalarında akademik başarısı yüksek öğrencilerin problemi temsil edebilecek bir yapıyı diğer öğrencilere göre daha kolay oluşturabildiklerini görmüşlerdir. Önal-Durmaz (2019) da altıncı sınıf öğrencilerinin kesirlerle ilgili sözel problemleri anlamada ve bu problemleri şekil çizme stratejisi ile çözmede yetersizlikleri olduğunu ortaya koymuştur. Bazı öğrencilerin doğru çizimi yapmalarına rağmen problemi çözemediklerini ifade etmiştir. Buradan yola çıkılarak başarı düzeyi düşük öğrenciler için görselleştirme yapmanın tek başına yeterli olmayacağı düşünülmektedir (İpek, 2003). Görselleştirmeyi farklı öğretim teknikleri ile birleştirerek sunmanın da matematiksel düşünmeyi etkilediği söylenebilir.

Araştırmada uzamsal düşünme gerektiren problemlerde öğrencilerin boyutlar arası geçiş yapmakta zorlandıkları görülmüştür. Nitekim birçok araştırmada (Delice ve Sevimli, 2010; Karaaslan vd., 2012; Yaprak, 2019) da öğrencilerin problem çözümlerinde boyutlar arası geçiş gerektiren problemlerde boyut içi geçiş gerektiren problemlere göre daha çok zorluk yaşadıkları sonucuna varılmıştır. Yaprak (2019) araştırmasında bu durumun sebebini öğrencilerin derslerde veya kitaplarda gördükleri görsellere bağlı olarak standart çizim yapmalarına ve öğrencilerin şekilleri sürekli aynı açıdan izleyerek zihinde canlandırma yapmalarına bağlamıştır. Görselleştirmenin diğer bir faydası da bireylerde boyutsal düşünebilme yetisini geliştirmesidir (Şan, 2012). Weckbacher (2007) problemlerde başarılı olmanın uzamsal görselleştirmede güçlü olmakla ilgili olduğuna dikkat çekmiştir. Akkan ve arkadaşları (2018) matematik öğretmenlerinin görsel akıl yürütme becerileri ile uzamsal görselleştirme becerileri arasında ilişki olduğunu tespit etmişlerdir. Araştırmalarında uzamsal görselleştirme beceri puanı yüksek olan öğretmenlerin, görsel teoremleri tanımada, onlar üzerine akıl yürütmede ve bağıntıları doğrulamada daha yetenekli olduklarını bulmuşlardır. Mevcut araştırmada kullanılan çerçevenin görselleştirme bileşeninde yer alan zihinde canlandırma göstergesinin de bu durumla ilişkisi düşünüldüğünde öğrencilerin bu göstergeyi geliştirmeleri önem arz etmektedir. Bununla ilgili olarak öğrencilerin özellikle geometri konularında somut materyallerle etkileşime geçmeleri gerektiği düşünülmektedir. Ayrıca öğretim programlarının öğrencileri uzamsal düşünmeye sevk etmelerinin yanı sıra öğrendiklerini pekiştirebilecekleri, tartışabilecekleri ve daha fazla kullanabilecekleri öğrenme fırsatları sunmalıdır. Bu önerilen durumlara dikkat edildiği takdirde üç boyutlu problemleri

çözmekte ve boyutlar arası geçiş yapmakta zorlanan öğrenci sayılarının azalabileceği tahmin edilmektedir.

Araştırmada ortaya çıkan bir diğer sonuç öğrencilerin genelleme ve doğrulama yapmakta zorluk çekmeleri olmuştur. Canturk-Gunhan (2014) öğrencilerin özellikle örüntülerden genellemelere ulaşabilmeleri için akıl yürütmenin doğru bir şekilde gerçekleşmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Ayrıca genelleme sürecinde kavramlar ve aralarındaki ilişkiler belirlenirken görselleştirmenin önemli bir rolü bulunmaktadır (Yılmaz ve Argün, 2013). Araştırmada da öğrencilerin oluşturdukları veya kullandıkları görseller üzerinde görselleştirmeyi tam gerçekleştirememiş olmalarından dolayı genellemeye ulaşamadıkları düşünülmektedir. Yine doğrulama ve ikna etme göstergesine de çok az öğrencinin ulaştığı bulunmuştur. Karaman-Dundar ve Otten (2022), diyagramların çoğunun geometri ispatının önemli bir parçası olduğunu vurgulamışlar ve diyagramların bir ispatı özetlemelerinin yanı sıra bir argümanı iletmede veya akıl yürütmede de bir araç olabileceğini belirtmişlerdir. Bununla birlikte öğrencilerin cebirsel ispat sürecinde ispatın dayandığı görsel şekli ve kavramlar arası ilişkileri göremediklerinden dolayı yaptıkları hataların önüne geçilmesinde görsel şekillere dayalı ispat süreçlerinin etkili olabileceği düşünülmektedir (Arcavi, 2003; Tekin ve Konyalıoğlu, 2010). Araştırma bulguları doğrultusunda varsayımda bulunmanın da genellemeye giden süreçte çok önemli olduğu söylenebilir. Mesela, problemin başında varsayımda bulunan bazı katılımcıların genellemeye ulaşmakta daha az sorun yaşadıkları görülmüştür. Bundan dolayı öğrencilerin varsayımlarda bulunmaya teşvik edilmelerinin matematiksel düşünmeye önemli katkıları olduğuna inanılmaktadır.

Araştırmada öğrencilerin bazı temel geometri kavramlarını birbirine karıştırdıkları da görülmüştür. Örneğin; dikdörtgen ve karenin özellikleri, küp ile karenin ortak ve farklı yönleri veya çokgenlerin temel özellikleri vb. konularda öğrencilerin birçok hata yaptığı veya bazı kavram yanılgıları yaşadıkları ortaya çıkmıştır. Bunun da öğrencilerin görsel akıl yürütme performanslarını etkilediği düşünülmektedir. Benzer şekilde Yaprak (2019) öğrencilerin kavram bilgisini kullanmadaki eksikliklerinin problemlere yönelik çözümlerinde de belirli zorluklar yaşamalarına neden olduğunu ifade etmiştir. Karpuz vd.'nin (2014) araştırmasında da kavram bilgisi eksikliğinin problem çözümlerinde öğrencilerin bir takım güçlükler yaşamalarına neden olduğu sonucuna varılmıştır. Gunčaga ve Žilková (2019), geometrik terimlerin görselleştirilmesinin geometrik kavramların oluşturulması sürecinde önemli bir unsur olduğundan bahsetmektedir. Bishop (1989) da görselleştirme becerileri açısından öğrencilerin geometri problemleri ile sıklıkla karşılaştıklarını düşünülmektedir. Yine bazı araştırmalar (Konyalıoğlu vd., 2005; Kükey vd., 2019; Tekin, 2010; Yılmaz ve Argun, 2018)

görselleştirmenin öğretim sürecine dâhil edilmesinin, öğrencilerin kavramsal öğrenmelerini artıracak ve soyut kavramları anlamasını kolaylaştıracağını belirtmektedirler. Benzer şekilde Gülşen-Turgut (2019) matematiksel kavramların görselleştirilmesinin kavramların daha iyi öğrenilmesine ve öğretilmesine yardımcı olacağını düşünmekte ve bu noktada öğretmenlere önemli görevler düştüğünü vurgulamaktadır. Bununla birlikte geometri öğretiminde geometrik terimlere erişmek için doğru, etkili ve yaşa uygun görsel model seçimini uygulamak önemlidir (Gunčaga ve Žilková, 2019). Öğretmenlerin kavramı temsil eden şekli öğrencilerin çizmesine imkân tanıyacak etkinliklere yer vermesi durumunda kavram-şekil etkileşiminin de güçleneceği belirtilmektedir (Karpuz vd., 2014). Bununla birlikte özellikle çocukluğun ilk yıllarından itibaren matematiğin soyut kavramlarının somutlaştırılarak ve görselleştirilerek öğretilmesinin oldukça önemli olduğu vurgulanmaktadır (Usta vd., 2018). Dolayısıyla öğretmenler, geometri öğretiminde öğrencilere çizim etkinlikleri yaptırmalı, dinamik geometri yazılımlarını etkin kullanabilmeli ve geometri öğretiminde somut materyalleri sıkça kullanmalıdır.

Araştırma sonucunda öğrencilerin cebirsel temsilleri çok sık kullanmadıkları ortaya çıkmıştır. Özellikle genelleme yapabilen öğrenciler kuralı cebirsel temsil ile ifade etmek yerine aritmetik kullanarak ifade etmektedirler. Benzer sonuçların Yeşildere-İmre vd.'nin (2017) çalışmasında da olduğu görülmüştür. Yeşildere-İmre vd. (2017) ortaokul öğrencilerinin farklı temsil biçimlerini kullanarak matematiksel genelleme yapma becerilerini araştırmışlardır. Araştırmada öğrencilerin sayı ve şekil örüntülerinde cebirsel olarak genel kuralı ifade etmekte sıkıntı çektikleri sonucuna varmışlardır. Genelleme yapmak için önemli olan bu temsil türünde öğrencilerin geliştirilmesi gerektiği düşünülmektedir. Çünkü ilerleyen öğrenim yıllarında öğrenciler bu temsil türünü çok sık kullanacaklardır. Dolayısıyla bu temsil türünü kavramsal olarak öğrenmemeleri veya bu yaşlarda hiç kullanmamaları ileri düzey matematiksel düşünme becerilerini de etkileyecektir. Yılmaz ve Argun (2018) da görselden sembolîğe yapılan dönüşüm yoluyla öğrencilerin sembolik ifadeler oluşturmalarına teşvik edilmelerini önermektedir. Lowrie ve Clements (2001), öğrencilerin problemleri görsel temsilleri kullanarak çözmelerinden sonra, cebirsel temsiller de dâhil olmak üzere sembolik stratejilerle tanışmaları gerektiğini belirtmişlerdir. Çilingir-Altın ve Önal (2022) da öğrencilerin görsel olmayan temsillerle işlem yapmadan önce görsel temsiller ile problem çözmelerinin desteklenmesini, sonrasında ise öğrencilerin gelişim gösterdikçe görsel olmayan temsillerle çözüm stratejileri geliştirmeleri gerektiğini önermiştir. Nitekim öğretmen adayları ile çalışma yapan Yılmaz ve Argun (2013), genelleme sürecinde görselleştirme kullanan katılımcıların çözüme görsel olarak başlayıp devamında cebirsel işlemlerle devam ettiklerini

görmüşlerdir. Dolayısıyla üretilen herhangi bir görsel temsile sayıların dâhil edilmesi, öğrencilerin uygun denklemleri belirlemelerine ve problemleri çözmelerine yardımcı olması açısından önemlidir (Teahen, 2015). Lowrie ve Kay (2001) da görsel akıl yürütmeden görsel olmayan akıl yürütmeye doğru bir geçiş olması gerektiğini vurgulamaktadırlar.

5.2. Öneriler

Araştırma kapsamında elde edilen bulgular ve sonuçlar doğrultusunda, uygulamacılara ve araştırmacılara yönelik olarak aşağıdaki önerilerde bulunulmuştur.

5.2.1. Uygulamacılara yönelik öneriler

1. Öğrencilerden hatalı görsel temsil kullananların matematiksel düşünme göstergelerini sergileyemedikleri ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla derslerde öğrencilerin görsel temsil yeteneklerini geliştirebilecekleri etkinliklere yer verilebilir.
2. İçsel temsilleri dışsal temsil olarak ortaya koymak matematiksel düşünmenin gerçekleşip gerçekleşmediğini anlamada önemlidir. Bundan dolayı öğrencilerin düşüncelerini ifade etmelerine fırsat tanınmalıdır. Bu sayede oluşabilecek kavram yanlışlarının da önüne geçilebilir.
3. Boyutlar arası geçiş yapmakta zorlanan öğrencilerin olduğu görülmüştür. Bu durum görselleştirme yapabilmeyi de engellemektedir. Bundan dolayı uzamsal düşünme gerektiren etkinliklerde öğrencilerin somut materyallerle çalışmalarına imkân sağlanabilir.
4. Farklı temsilleri birlikte kullanabilen öğrencilerin problem çözmede daha başarılı oldukları ortaya çıkmıştır. Buradan yola çıkarak öğretmenlerin derslerde farklı temsilleri kullanması önerilebilir. Aynı zamanda öğretim sürecinin görsel temsilden sembolik temsile doğru yapılması yerinde olacaktır. Bu sayede öğrenciler temsiller arası geçiş yapmaya da alışacaklardır.
5. Varsayımda bulunma matematiksel düşünmenin önemli bir parçası olduğu gibi problem çözme için de önemli olduğu görülmüştür. Özellikle problem çözmenin başında varsayımda bulunulursa çözüme ulaşmak daha kolay hale gelebilmektedir. Derslerde yapılan problem çözümlerinde öğrencilerin varsayımda bulunmalarını desteklemek olumlu sonuçlar ortaya çıkarabilir.
6. Araştırmaya katılan öğrenciler özelleştirme aşamasını tamamlasalar da genellemeye ulaşmakta zorlanmaktadırlar. Öğrencilerin genelleme yapmalarının

istendiği durumlarda görsel veya sembolik temsilleri nasıl kullanacakları öğretilir.

7. Öğrencilerin bazı problemlere yabancı kalmaları dolayısıyla ders kitaplarında öğrencilerin görsel akıl yürütme becerilerini geliştirebilecekleri içeriklere daha çok yer verilmesi önerilebilir.

5.2.2. Araştırmacılara yönelik öneriler

1. Araştırmada ortaokul öğrencilerinin geometri problemlerine yönelik görsel akıl yürütme becerileri incelenmiştir. Ortaokul öğrencilerinin diğer öğrenme alanları ile ilgili problemlerdeki görsel akıl yürütme becerileri de araştırılabilir. Aynı zamanda farklı öğretim kademelerine yönelik araştırmalar da tasarlanabilir.
2. Araştırmada kullanılan görsel akıl yürütme çerçevesinin matematiksel düşünme boyutu da bulunmaktadır. Ancak geliştirilen problemlerde özellikle doğrulama ve ikna etme göstergesine çok az katılımcının ulaştığı görülmüştür. Matematik eğitimcilerinin uzun zamandır ilgisini çeken görsel ispatlar konusunda görsel akıl yürütme çerçevesinin kullanılabileceği araştırmaların yapılması önerilebilir.
3. Ders kitaplarında görsel temsillere ne ölçüde yer verildiği ve ders kitaplarında yer alan görsel temsillerin görsel akıl yürütme çerçevesine ne ölçüde hizmet ettiği incelenebilir.
4. Araştırmada görselleştirmenin öğrencilerin problem çözme performanslarını etkilediği görülmüştür. Görselleştirmenin matematik öğrenme sürecinde nasıl daha etkin kullanılabileceği konusunda eylem araştırmaları planlanabilir.
5. Yapılan araştırma öğrencilerin bireysel olarak problem çözme süreçleri üzerinden yürütülmüştür. Bununla birlikte sınıf içi uygulamalarla veya odak grup görüşmeleri yapılarak öğrencilerin öğrenme süreçlerinde görsel akıl yürütmeyi nasıl gerçekleştirdikleri araştırılabilir.
6. Yürütülen araştırmanın bir benzeri daha az sayıdaki öğrenciyle ve daha fazla sayıda gerçekleştirilen klinik mülakatlarla yapılabilir. Bu sayede öğrencilerin görsel akıl yürütme süreçlerinin gelişimi hakkında daha fazla bilgi sahibi olunabilir ve bu araştırmanın sonuçları ile karşılaştırma yapılabilir.

KAYNAKÇA

- Abd Hamid, H. (2017). *Visual reasoning in solving mathematical problems on functions and their derivatives among Malaysian pre-university students* [Doctoral dissertation]. University of Malaya.
- Abd Hamid, H., Idris, N., & Tapsir, R. (2019). Students' use of graphs in understanding the concepts of derivative. *Southeast Asian Mathematics Education Journal*, 9(1), 3-16. <https://doi.org/10.46517/seamej.v9i1.69>
- Abdullah, N., Zakaria, I., & Halim, L. (2012). The effect of a thinking strategy approach through visual representation on achievement and conceptual understanding in solving mathematical word problems. *Asian Social Science*, 8(16), 30-37. <https://doi.org/10.5539/ass.v8n16p30>
- Ahmad, A., Tarmizi, R. A., & Nawawi, M. (2010). Visual representations in mathematical word problem solving among form four students in Malacca. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 8, 356-361. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.050>
- Akkan, Y., Akkan, P., Öztürk, M. ve Demir, Ü. (2018). Görsel teoremler üzerine matematik öğretmenleriyle nitel bir çalışma. *Journal of Instructional Technologies & Teacher Education*, 7(2), 56-74.
- Aksu, N., & Zengin, Y. (2022). Disclosure of students' mathematical reasoning through collaborative technology-enhanced learning environment. *Education and Information Technologies*, 27(2), 1609-1634. <https://doi.org/10.1007/s10639-021-10686-x>
- Alcock, L., & Simpson, A. (2004). Convergence of sequences and series: interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, 57(1), 1-32. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000047051.07646.92>
- Alkan, H. ve Bukova-Güzel, E. (2005). Öğretmen adaylarında matematiksel düşünmenin gelişimi. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 25(3), 221-236.
- Altun, M. (2014). *Matematik öğretimi* (10. baskı). Aktüel.
- Anderson, M., & McCartney, R. (1997). Learning from diagrams. *International Journal of Machine Graphics & Vision*, 6(1), 57-76.

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241. <https://doi.org/10.1023/A:1024312321077>
- Arcavi, A. (2015). Revisiting aspects of visualization in mathematics education. *La Matematica Nella Società e Nella Cultura–Rivista della Unione Matematica Italiana*, 8(3), 143-160.
- Arıcı, S. (2012). *The effect of origami-based instruction on spatial visualization, geometry achievement and geometric reasoning of tenth-grade students* [Master's thesis]. Boğaziçi University.
- Arık-Karamık, G. (2020). Matematiksel düşünmenin, öğrenme ve öğretimin doğası. İçinde M. Ünlü (Ed.), *Uygulama örnekleriyle matematik öğretiminde yeni yaklaşımlar* (ss. 1-20). Pegem Akademi.
- Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, 35(156), 17-31.
- Artz, A. F., & Yaloz-Femia, S. (1999). Mathematical reasoning during small-group problem solving. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 115-127). National Council of Teachers of Mathematics.
- Aufmann, R. N., Lockwood, J., Nation, R. D., & Clegg, D. K. (2007). *Mathematical thinking and quantitative reasoning*. Nelson Education.
- Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi* (4. baskı). Harf Eğitim Yayıncılığı.
- Ball, D., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27-44). National Council of Teachers of Mathematics.
- Barbosa, A. (2013). Mathematical reasoning: The impact of visual patterns. In B. D. Paola (Ed.), *International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Education (CIEAEM 65)* (Issue 23, Vol. 1, pp. 343-351). Turin, Italy.
- Bardelle, C. (2010). Visual proofs: An experiment. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6* (pp. 251-260). Lyon, France.

- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). National Council of Teachers of Mathematics.
- Battista, M. T., Frazee, L. M., & Winer, M. L. (2018). Analyzing the relation between spatial and geometric reasoning for elementary and middle school students. In K. S. Mix & M. T. Battista (Eds.) *Visualizing mathematics* (pp. 195-228). Springer.
- Baxter, P., & Jack, S. (2008). Qualitative case study methodology: Study design and implementation for novice researchers. *The Qualitative Report*, 13(4), 544-559. <https://doi.org/10.46743/2160-3715/2008.1573>
- Baykul, Y. (2014). *Ortaokulda matematik öğretimi (5-8. sınıflar)* (2. baskı). Pegem Akademi.
- Ben-Zvi, D. (2014). Data handling and statistics teaching and learning. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 137-140). Springer.
- Bergqvist, T., & Lithner, J. (2012). Mathematical reasoning in teachers' presentations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(2), 252-269. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.12.002>
- Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 7-16.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446. <https://doi.org/10.2307/30034944>
- Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (2007). *Qualitative research for education: An introduction to theories and methods*. Pearson.
- Boonen, A. J., van Wesel, F., Jolles, J., & van der Schoot, M. (2014). The role of visual representation type, spatial ability, and reading comprehension in word problem solving: An item-level analysis in elementary school children. *International Journal of Educational Research*, 68, 15-26. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2014.08.001>
- Booth, R. D., & Thomas, M. O. (1999). Visualization in mathematics learning: Arithmetic problem-solving and student difficulties. *The Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 169-190. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(99\)00027-9](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00027-9)

- Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. Springer.
- Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(1), 35-49. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.15.1.0035>
- Büyüköztürk, Ş., Kılıç-Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2013). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (14. baskı). Pegem Akademi.
- Cai, J. (2003). Singaporean students' mathematical thinking in problem solving and problem posing: An exploratory study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(5), 719-737. <https://doi.org/10.1080/00207390310001595401>
- Canturk-Gunhan, B. (2014). A case study on the investigation of reasoning skills in geometry. *South African Journal of Education*, 34(2), 1-19.
- Chappell, M. F., & Thompson, D. R. (1999). Perimeter or area? Which measure is it? *Mathematics Teaching in the Middle School*, 5(1), 20-23. <https://doi.org/10.5951/MTMS.5.1.0020>
- Clements, M. A. (2014) Fifty years of thinking about visualization and visualizing in mathematics education: A historical overview. In: M. N. Fried & T. Dreyfus (Eds.), *Mathematics & mathematics education: Searching for common ground. Advances in mathematics education* (pp. 177–192). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7473-5_11
- Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Identifying kinds of reasoning in collective argumentation. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(3), 181-200. <https://doi.org/10.1080/10986065.2014.921131>
- Corter, J. E., & Zahner, D. C. (2007). Use of external visual representations in probability problem solving. *Statistics Education Research Journal*, 6(1), 22-50.
- Creswell, J. W. (2013). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4th ed.). SAGE Publications.

- Csikos, C., Szitányi, J., & Kelemen, R. (2012). The effects of using drawings in developing young children's mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics*, 81(1), 47-65. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9360-z>
- Çelik, D. (2007). *Öğretmen adaylarının cebirsel düşünme becerilerinin analitik incelenmesi*. [Doktora tezi]. Karadeniz Teknik Üniversitesi.
- Çelik, D. (2016). Matematiksel düşünme. İçinde E. Bingölbalı, S. Arslan ve I. O. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* (ss. 17-42). Pegem Akademi.
- Çepni, S. (2010). *Araştırma ve proje çalışmalarına giriş* (5. baskı). Ofset Matbaacılık.
- Çiftçi, Z. (2015). *Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel akıl yürütme becerilerinin incelenmesi* [Yayımlanmamış doktora tezi]. Atatürk Üniversitesi.
- Çilingir-Altınır, E. ve Önal, H. (2022). İlkokul öğrencilerinin sözel problem çözerken kullandıkları görsel ve görsel olmayan temsillerin incelenmesi. *Yaşadıkça Eğitim*, 36(1), 16-34. <https://doi.org/10.33308/26674874.2022361344>
- Davey, L. (1991). The application of case study evaluations. *Practical Assessment, Research, and Evaluation*, 2(9), 1-2. <https://doi.org/10.7275/02g8-bb93>
- Debrenti, E. (2015). Visual representations in mathematics teaching: An experiment with students. *Acta Didactica Napocensia*, 8(1), 19-25.
- Delibaş, M. E. (2020). Problem çözmede görselleştirme ve görsel temsil kullanma [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Kastamonu Üniversitesi.
- Delice, A., Öcal, M. F. ve Sevimli, E. (2014). Kuadratik yüzeyler konusundaki görselleme süreçlerinin fakülte farklılıkları bağlamında incelenmesi. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 34(3), 517-534. <https://doi.org/10.17152/gefad.18700>
- Delice, A. ve Sevimli, E. (2010). Geometri problemlerinin çözüm süreçlerinde görselleme becerilerinin incelenmesi: Ek çizimler. *Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Dergisi*, 31, 83-102.
- Delice, A. ve Sevimli, E. (2016). Matematik eğitiminde çoklu temsiller. İçinde E. Bingölbalı, S. Arslan ve İ.Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* (ss. 519-537). Pegem Akademi.

- Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2018). Introduction: The discipline and practice of qualitative research. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Ed.), *The SAGE handbook of qualitative research* (5. ed., pp. 29-71). SAGE Publications.
- Dindyal, J. (2003). *Algebraic thinking in geometry at high school level* [Doctoral dissertation]. Illinois State University.
- Donald, J. P. (1998). *A study of triangular and oblong numbers* [M. S. Thesis]. Central Missouri State University.
- Dongwi, B. L. (2018). Examining mathematical reasoning through enacted visualisation [Doctoral dissertation]. Rhodes University.
- Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference* (Vol. 1, pp. 33-48). Genova, Italy.
- Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Springer.
- Duatepe, A. (2004). *The effects of drama based instruction on seventh grade students' geometry achievement, Van Hiele geometric thinking levels, attitude toward mathematics and geometry* [Doctoral dissertation]. Middle East Technical University.
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Springer.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for 21st century* (pp. 37-52). Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-26). Mexico. Retrieved from <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466379.pdf>

- Eraslan-Yalçın, E. ve Özgeldi, M. (2019). 1924-2018 Ortaokul Matematik Öğretim Programlarının geometrik düşünme alışkanlıkları bakımından incelenmesi. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 15(1), 131-146. <https://doi.org/10.17860/mersinefd.479753>
- Eraso, M. (2007). *Connecting visual and analytic reasoning to improve students' spatial visualization abilities: A constructivist approach* [Unpublished doctoral dissertation]. Florida International University.
- Ergan, S. N. (2018). *İlkokul öğrencilerinin problem çözme sürecinde oluşturduğu görsel temsillerin incelenmesi* [Yüksek lisans tezi]. Ordu Üniversitesi.
- Ergan, S. N. ve Özsoy, G. (2021). İlkokul dördüncü sınıf öğrencilerinin problem çözme sürecinde oluşturduğu görsel temsillerin incelenmesi. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 51, 57-75. <https://doi.org/10.53444/deubefd.763452>
- Ferrando, E. (2006). The abductive system. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková, (Eds.), *Proceedings 30 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 57-64). Prague, Czech Republic.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Reidel Publishing Company.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162. <https://doi.org/10.1007/BF01273689>
- Fonseca, L. (2018). Mathematical reasoning and proof schemes in the early years. *Journal of the European Teacher Education Network*, 13, 34-44.
- Frazee, L. M. (2018). *The interaction of geometric and spatial reasoning: Student learning of 2D isometries in a special dynamic geometry environment* [Doctoral dissertation]. The Ohio State University.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel Publishing Company.
- Fujita, T., Kondo, Y., Kumakura, H., Kunimune, S., & Jones, K. (2020). Spatial reasoning skills about 2D representations of 3D geometrical shapes in grades 4 to 9. *Mathematics Education Research Journal*, 32(2), 235-255. <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00335-w>

- Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 163-183. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9232-y>
- Geçici, M. E., & Türnüklü, E. (2021). Visual reasoning in mathematics education: A conceptual framework proposal. *Acta Didactica Napocensia*, 14(1), 115-126. <https://doi.org/10.24193/adn.14.1.9>
- George, E. A. (1997). *Reasoning with visual representations: Student's use of diagrams, figures and graphs in solving problems advanced placement calculus examination* [Doctoral dissertation]. University of Pittsburgh.
- Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics. An epistemological study*. Oxford University Press.
- Gilbert, J. K. (2010). The role of visual representations in the learning and teaching of science: An introduction. *Asia-Pacific Forum on Science Learning & Teaching*, 11(1), 1-19.
- Goldin, G. A. (1998a). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 137-165. [https://doi.org/10.1016/S0364-0213\(99\)80056-1](https://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80056-1)
- Goldin, G., A. (1998b). Observing mathematical problem solving through task-based interviews. In A. R. Teppo (Ed.), *Qualitative Research Methods in Mathematics Education* (pp. 40-62). National Council of Teachers of Mathematics. <https://doi.org/10.2307/749946>
- Goldin, G. A. (2014). Mathematical representations. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 409-413). Springer.
- Goldin, G., & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397-430). Lawrence Erlbaum Associates.
- González, G., & Herbst, P. (2006). Competing arguments for the geometry course: Why were American high school students supposed to study geometry in the twentieth century? *International Journal for the History of Mathematics Education*, 1(1), 7-33.

- Gunčaga, J., & Žilková, K. (2019). Visualisation as a method for the development of the term rectangle for pupils in primary school. *European Journal of Contemporary Education*, 8(1), 52-68. <https://doi.org/10.13187/ejced.2019.1.52>
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference* (Vol. 1, pp. 3-19). Valencia, Spain.
- Guzman, M. (2002). The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis. In *Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate Level)*. Hersonissos, Greece. (ERIC Document Reproduction Service No. ED472047).
- Güler, G. (2020). Akıl yürütme ve ispat ilişkisi. İçinde I. Uğurel (Ed.), *Matematiksel ispat ve öğretimi* (ss. 89-112). Anı Yayıncılık.
- Gülşen, İ. (2012). *Matematik öğretmen adaylarının görsel akıl yürütme durumlarının incelenmesi* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Gazi Üniversitesi.
- Gülşen-Turgut, İ. (2019). *Matematik öğretmen adaylarının bazı matematiksel kavramları görselleştirme süreçlerinin incelenmesi: Kümeler ve fonksiyonlar* [Yayımlanmamış doktora tezi]. Gazi Üniversitesi.
- Günaydın, O. (2011). *Geometri ve cebir problemleri çözüm süreçlerinin görselleme ve göstergebilim bağlamında incelenmesi* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Marmara Üniversitesi.
- Gürbüz, S. ve Şahin, F. (2015). *Sosyal bilimlerde araştırma yöntemleri: Felsefe-yöntem-analiz* (2. baskı). Seçkin Yayıncılık.
- Güven, B. ve Karpuz, Y. (2016). Geometrik muhakeme: Bilişsel perspektifler. İçinde E. Bingölbalı, S. Arslan ve İ.Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* (ss. 245-263). Pegem Akademi.
- Hacısalıhoğlu, H., Hacıyev, A., Kalantarov, V. ve Sabuncuoğlu, A. (2000). *Matematik terimleri sözlüğü*. Türk Dil Kurumu Yayınları.

- Hanna, G., & Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: A brief survey of philosophical perspectives. *ZDM Mathematics Education*, 39(1-2), 73-78. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0005-0>
- Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced mathematical-thinking at any age: Its nature and its development. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 27-50. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0701_3
- Healy, L., & Hoyles, C. (1999). Visual and symbolic reasoning in mathematics: Making connections with computers?. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(1), 59-84. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0101_3
- Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91(4), 684-689. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.91.4.684>
- Henderson, P. B., Hitchner, L., Fritz, S. J., Marion, B., Scharff, C., Hamer, J., & Riedesel, C. (2003). Materials development in support of mathematical thinking. *ACM SIGCSE Bulletin*, 35(2), 185-190. <https://doi.org/10.1145/782941.783001>
- Herbert, S., Vale, C., Bragg, L., Loong, E., & Widjaja, W. (2015). A framework for primary teachers' perceptions of mathematical reasoning. *International Journal of Educational Research*, 74, 26-37. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2015.09.005>
- Herbst, P., Fujita, T., Halverscheid, S., & Weiss, M. (2017). *The teaching and learning of geometry in secondary schools*. Routledge.
- Hershkowitz, R., Arcavi, A., & Bruckheimer, M. (2001). Reflections on the status and nature of visual reasoning—the case of the matches. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(2), 255-265. <https://doi.org/10.1080/00207390010010917>
- Hoffmann, M. H. G. (2007). Cognitive conditions of diagrammatic reasoning. In J. Queiroz & F. Stjernfelt (Eds), *Special issue on peircian diagrammatical logic*, (pp. 1-28). Georgia Institute of Technology School of Public Policy.
- Holton, D., Stacey, K., & FitzSimons, G. (2012). Reasoning: A dog's tale. *The Australian Mathematics Teacher*, 68(3), 22-26.

- Hoyles, C., Noss, R., & Pozzi, S. (2001). Proportional reasoning in nursing practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(1), 4-27. <https://doi.org/10.2307/749619>
- Hunting, R. P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(2), 145-165. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(97\)90023-7](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90023-7)
- Isoda, M., & Katagiri, S. (2012). *Mathematical thinking: How to develop it in the classroom*. World Scientific.
- Işık, A. ve Konyalıoğlu, A. C. (2005). Matematik eğitiminde görselleştirme yaklaşımı. *Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11, 462-471.
- İlhan ve Aslaner (2018) İlhan, A. ve Aslaner, R. (2018). Matematik öğretmeni adaylarının geometrik şekiller üzerine akıl yürütme becerilerinin üniversite ve sınıf düzeyi değişkenleri açısından incelenmesi. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 19(2), 82-97. <https://doi.org/10.17679/inuefd.332285>
- İpek, A. S. (2003). *Kompleks sayılarla ilgili kavramların anlaşılmasında görselleştirme yaklaşımının etkinliğinin incelenmesi* [Doktora tezi]. Atatürk Üniversitesi.
- Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1-16. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8>
- Jones, K. (1998). Theoretical frameworks for the learning of geometrical reasoning. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18(1-2), 29-34.
- Josef, J. (2016). *An analysis of visualization processes used by selected Grade 11 and 12 learners when solving algebraic problems: A Namibian case study* [Master's thesis]. Rhodes University.
- Kaleli-Yılmaz, G. (2014). Durum çalışması. İçinde M. Metin (Ed.), *Kuramdan uygulamaya eğitimde bilimsel araştırma yöntemleri* (ss. 261-285). Pegem Akademi.
- Kar, T. ve İpek, A. S. (2009). Matematik tarihinde sözel problemlerin çözümünde görsel temsillerin kullanılması. *Journal of Qafqaz University*, 28, 138-147.

- Karaaslan, G., Karaaslan, K. G. ve Delice, A. (2012). Öğrencilerin uzamsal yeteneklerine göre üç boyutlu geometri problemlerinin çözümlerinin incelenmesi. *10. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, Niğde.
- Karaman-Dundar, R., & Otten, S. (2022). High school students' use of diagrams in geometry proofs. *International Journal of Science and Mathematics Education*, <https://doi.org/10.1007/s10763-022-10286-2>
- Karataş, İ. ve Güven, B. (2003). Problem çözme davranışlarının değerlendirilmesinde kullanılan yöntemler: Klinik mülakatın potansiyeli. *İlköğretim Online*, 2(2), 2-9.
- Karpuz, Y. (2018). *Duval'in bilişsel modeline uygun tasarlanan öğrenme ortamının değerlendirilmesi* [Yayımlanmamış doktora tezi]. Karadeniz Teknik Üniversitesi.
- Karpuz, Y., Koparan, T. ve Güven, B. (2014). Geometride öğrencilerin şekil ve kavram bilgisi kullanımı. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 5(2), 108-118.
- Karrass, M. (2012). *Diagrammatic reasoning skills of pre-service mathematics teachers* [Doctoral dissertation]. Columbia University.
- Khan, S., & VanWynsberghe, R. (2008). Cultivating the under-mined: Cross-case analysis as knowledge mobilization. *Forum: Qualitative Social Research*, 9(1), 34.
- Kızıltoprak, A. (2020). *Ortaokul öğrencilerinin dörtgenlere ilişkin geometrik muhakemelerinin gelişimi* [Yayımlanmamış doktora tezi]. Anadolu Üniversitesi.
- Kollosche, D. (2021). Styles of reasoning for mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 107(3), 471-486. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10046-z>
- Konyalıoğlu, A. C. (2003). *Üniversite düzeyinde vektör uzayları konusundaki kavramların anlaşılmasında görselleştirme yaklaşımının etkinliğinin incelenmesi* [Doktora tezi]. Atatürk Üniversitesi.
- Konyalıoğlu, S., Konyalıoğlu, A. C., Ipek, A. S., & Isik, A. (2005). The role of visualization approach on student's conceptual learning. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 47, 1-9.

- Körükçü, E. (2008). *Tam sayılar konusunun görsel materyal ile öğreniminin 6. sınıf öğrencilerinin matematik başarılarına etkisi* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Marmara Üniversitesi.
- Kükey, E. (2018). *Ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme biçimleri ile öğretmen ve öğretmen adaylarının bu konudaki görüşlerinin incelenmesi* [Doktora tezi]. İnönü Üniversitesi.
- Kükey, E., Tutak, A. M. ve Tutak, T. (2019). Kesirler konusunun görsel materyal ile öğretiminin ilköğretim 4. sınıf öğrencilerinin matematik başarı ve tutumlarına etkisinin incelenmesi. *Ulusal Eğitim Akademisi Dergisi (UEAD)*, 3(1), 115-125. <https://doi.org/10.32960/uead.532949>
- Lehning, H. (2015). Visualization and mathematical thinking. In *Handbook of Research on Maximizing Cognitive Learning through Knowledge Visualization* (pp. 103-112). IGI Global.
- Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Lawrence Erlbaum Associates.
- Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in school tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 41(2), 165-190. <https://doi.org/10.1023/A:1003956417456>
- Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics*, 52(1), 29-55. <https://doi.org/10.1023/A:1023683716659>
- Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercise. *Journal of Mathematical Behavior*, 23(4), 405-427. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.09.003>
- Lithner, J. (2006). *A framework for analysing creative and imitative mathematical reasoning*. Research Reports in Mathematics Education, Department of Mathematics, Umeå University.
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255-276. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2>

- Liu, P. H. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching?. *Mathematics Teacher*, 96(6), 416-421. <https://doi.org/10.5951/MT.96.6.0416>
- Lowrie, T., & Clements, M. A. K. (2001). Visual and nonvisual processes in Grade 6 students' mathematical problem solving. *Journal of Research in Childhood Education*, 16(1), 77-93. <https://doi.org/10.1080/02568540109594976>
- Lowrie, T., & Kay, R. (2001). Relationship between visual and nonvisual solution methods and difficulty in elementary mathematics. *The Journal of Educational Research*, 94(4), 248-255. <https://doi.org/10.1080/00220670109598758>
- Lutfiyya, L. A. (1998). Mathematical thinking of high school students in Nebraska. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 29(1), 55-64. <https://doi.org/10.1080/0020739980290106>
- Makina, A., & Wessels, D. (2009). The role of visualisation in data handling in Grade 9 within a problem-centred context. *Pythagoras*, 69, 56-68.
- Mancoğlu, E. (2019). *Ortaöğretim matematik öğretmenleri adaylarının matematiksel teoremlerin ispatlarını görselleştirme durumlarının incelenmesi* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Gazi Üniversitesi.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1985). *Thinking mathematically*. Pearson Education Limited.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (2nd ed.). Pearson Education Limited.
- Mayer, R. E., & Hegarty, M. (1996). The process of understanding mathematical problems. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking* (pp. 29-54). Routledge.
- Merriam, S. B. (2009). *Qualitative research: A guide to design and implementation* (2nd ed.). Jossey-Bass.
- Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *An expanded source book: Qualitative data analysis* (2nd ed.). SAGE Publications.

- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2009). *İlköğretim matematik dersi öğretim programı ve kılavuzu*. MEB Basımevi.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı*. MEB Basımevi.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018a). *Matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar)*. MEB Basımevi.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018b). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. MEB Basımevi.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standard for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematics success for all*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Natsheh, I., & Karsenty, R. (2014). Exploring the potential role of visual reasoning tasks among inexperienced solvers. *ZDM Mathematics Education*, 46(1), 109-122. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0551-1>
- Nelsen, R. (1993). *Proofs without words: Exercises in visual thinking*. Mathematical Association of America.
- Nunes, T. (2014). Learning difficulties, special needs, and mathematics learning. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 343-348). Springer.
- Ölçme, Seçme ve Yerleştirme Merkezi Başkanlığı [ÖSYM]. (2012). *Akademik personel ve lisansüstü eğitimi giriş sınavı [ALES] sonbahar dönemi temel soru kitapçığı*. <https://www.osym.gov.tr/Eklenti/2230,ales2012pdf.pdf?0> adresinden edinilmiştir.
- Önal-Durmaz, E. (2019). *Altıncı sınıf öğrencilerinin kesirlerle ilgili sözel problemleri şekil çizme stratejisi ile çözme becerilerinin incelenmesi* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Atatürk Üniversitesi.

- Öz, T. (2017). *7. sınıf öğrencilerinin matematiksel akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi* [Yayımlanmamış doktora tezi]. Atatürk Üniversitesi.
- Özdemir, E. ve İpek, A. S. (2020). Matematik öğretiminde çoklu temsillerin kullanımı. İçinde M. Ünlü (Ed.), *Uygulama örnekleriyle matematik öğretiminde yeni yaklaşımlar* (ss. 91-118). Pegem Akademi.
- Özkan, A., Arıkan, E. E., & Özkan, E. M. (2018). A study on the visualization skills of 6th grade students. *Universal Journal of Educational Research*, 6(2), 354-359. <https://doi.org/10.13189/ujer.2018.060219>
- Özsoy, G. (2018). Pre-service teachers' use of visual representations. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 11(1), 49-54. <https://doi.org/10.26822/iejee.2018143960>
- Pantziara, M., Gagatsis, A., & Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics*, 72(1), 39-60. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9181-5>
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods* (3th ed.). SAGE Publications.
- Peirce, C. S. (1956). Sixth paper: Deduction, induction, and hypothesis. In M. R. Cohen (Ed.), *Chance, love, and logic: Philosophical essays* (pp. 131-153). G. Braziller.
- Peirce, C. S. (1979). *Collected paper of Charles Sanders Peirce. Vol. III: Science and philosophy* (A. W. Burks, Ed.). Harvard University Press.
- Pittalis, M., & Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 191-212. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9251-8>
- Polat, K., Oflaz, G. ve Akgün, L. (2019). Görsel ispat becerisinin, Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ve uzamsal yetenek ile ilişkisi. *Erciyes Eğitim Dergisi*, 3(2), 105-122. <https://doi.org/10.32433/eje.604126>
- Polya, G. (1973). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

- Posamentier, A. S., & Krulik, S. (2016). *Matematikte problem çözme 3-6. sınıflar için* (L. Akgün, T. Kar ve M. F. Öçal, Çev.). Pegem Akademi.
- Presmeg, N. C. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 297-311. <https://doi.org/10.1007/BF00305075>
- Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. In A. Gutierrez & P. Borero (Eds.), *Handbook of research on psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205-235). Sense Publishers.
- Presmeg, N. (2014). Visualization and learning in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 636-640). Springer.
- Presmeg, N. C., & Balderas-Cañas, P. E. (2001). Visualization and affect in nonroutine problem solving. *Mathematical thinking and learning*, 3(4), 289-313. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0304_03
- Punch, K. F. (1998). *Introduction to social research: Quantitative and qualitative approaches*. SAGE Publications.
- Ramírez-Uclés, R., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2022). Reasoning, representing, and generalizing in geometric proof problems among 8th grade talented students. *Mathematics*, 10, 789. <https://doi.org/10.3390/math10050789>
- Reid, D. A. (2003). Forms and uses of abduction. In M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of 3rd Conference of European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1-10).
- Rivera, F. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics: Psychological and pedagogical considerations*. Springer.
- Russell, R. A. (1997). *The use of visual reasoning strategies in problem-solving activities by preservice secondary mathematics teachers* [Unpublished doctoral dissertation]. University of Georgia.
- Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education*, 196(2), 1-38. <https://doi.org/10.1177/002205741619600202>

- Sezer, N. (2019) *Ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreç ve becerilerinin boylamsal incelenmesi* [Yayımlanmamış doktora tezi]. Uludağ Üniversitesi.
- Sırtmaç, G. (2018). *Sekizinci sınıf öğrencilerinin geometrik akıl yürütme becerilerinin incelenmesi* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Dokuz Eylül Üniversitesi.
- Smith, J., & Thompson, P. W. (2007). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 95-132). Lawrence Erlbaum Associates.
- Stacey, K. (2006). *What is mathematical thinking and why is it important?* APECTsukuba International Conference, Tokyo and Sapporo, Japan. Erişim adresi: https://www.researchgate.net/publication/254408829_WHAT_IS_MATHEMATICAL_THINKING_AND_WHY_IS_IT_IMPORTANT
- Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. SAGE Publications.
- Stake, R. E. (2006). *Multiple case study analysis*. The Guilford Press.
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 258-288. <https://doi.org/10.1080/10986060903253954>
- Stylianou, D. A. (2000). *Expert and novice use of visual representations in advanced mathematical problem solving* [Doctoral dissertation]. University of Pittsburgh.
- Stylianou, D. A. (2002). On the interaction of visualization and analysis: The negotiation of a visual representation in expert problem solving. *The Journal of Mathematical Behavior*, 21(3), 303-317. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(02\)00131-1](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00131-1)
- Stylianou, D. A. (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: Towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics*, 76(3), 265-280. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9273-2>
- Stylianou, D. A., & Dubinsky, E. (1999). Determining linearity: The use of visual imagery in problem solving. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of PME-NA* (pp. 245-252). Columbus: ERIC/CSMEE.

- Stylianou, D. A., & Silver, E. A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Mathematical thinking and learning*, 6(4), 353-387. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0604_1
- Şadan, N. (2017). *Fen lisesi öğrencilerinin görsel ispat geliştirme süreçlerinin incelenmesi üzerine bir öğretim deneyi çalışması* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Dokuz Eylül Üniversitesi.
- Şan, İ. (2008). *Sekizinci sınıf öğrencilerinin özdeşlik konusu erişilerine görselleştirmenin etkisi* [Yüksek lisans tezi]. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi.
- Şan, İ. (2012). Matematik öğretiminde görselleştirme. *Journal of Qafqaz University*, 34, 109-123. <https://www.researchgate.net/publication/283211854> adresinden edinilmiştir.
- Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking'. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of XIX International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 61-75). Recife, Brazil.
- Tall, D. (2002). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Springer.
- Tan-Şişman, G. ve Aksu, M. (2009). Yedinci sınıf öğrencilerinin alan ve çevre konularındaki başarıları. *İlköğretim Online*, 8(1), 243-253.
- Tapan-BROUTIN, M. S. (2016). Çizim-geometrik şekil-geometrik nesne kavramları ışığında çizimlerin yorumlanmasını etkileyen faktörler. İçinde E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* (ss. 307-322). Pegem Akademi.
- Taşova, H. İ. (2011). *Matematik öğretmen adaylarının modelleme etkinlikleri ve performansı sürecinde düşünme ve görselleme becerilerinin incelenmesi* [Yüksek lisans tezi]. Marmara Üniversitesi.
- Teahen, R. J. (2015). *Exploring visualisation as a strategy for improving year 4 & 5 student achievement on mathematics word problems* [Master's thesis]. Victoria University of Wellington.

- Tekin, B. (2010). *Ortaöğretim düzeyinde trigonometri kavramlarının öğrenilmesinde görselleştirme yaklaşımının etkililiğinin araştırılması* [Doktora tezi]. Atatürk Üniversitesi.
- Tekin, B. ve Konyalıoğlu, A. C. (2010). Trigonometrik fonksiyonların toplam ve fark formüllerinin ortaöğretim düzeyinde görselleştirilmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 5(1-2), 24-37.
- Trends in International Mathematics and Science Study [TIMSS]. (2011). *TIMSS 2011 açıklanan matematik soruları*. <http://timss.meb.gov.tr/www/aciklanansorular/icerik/1> adresinden edinilmiştir.
- Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, 73(1), 3-19. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9201-5>
- Ubuz, B. (1999). 10. ve 11. sınıf öğrencilerinin temel geometri konularındaki hataları ve kavram yanılgıları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17, 95-104.
- Uesaka, Y., Manalo, E., & Ichikawa, S. I. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use of diagrams in mathematics problem solving?. *Learning and Instruction*, 17(3), 322-335. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.02.006>
- Uğurel, I., Morali, H. S., Karahan, O., & Boz, B. (2016). Mathematically gifted high school students' approaches to developing visual proofs (VP) and preliminary ideas about VP. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 4(3), 174-197.
- Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234-243.
- Usta, N., Yılmaz, M., Kartopu, S., & Kadan, Ö. F. (2018). Impact of visuals on primary school 4th graders' problem-solving success. *Universal Journal of Educational Research*, 6(10), 2160-2168. <https://doi.org/10.13189/ujer.2018.061014>
- Uysal-Koç, O. ve Başer, N. (2012). Görselleştirme yaklaşımının matematiğe yönelik tutum ve başarıdaki rolü. *İlköğretim Online*, 11(4), 945-957.

- Ünlü, M. (2014). *Geometri başarısını etkileyen faktörler: Bir yapısal eşitlik modellemesi* [Doktora tezi]. Necmettin Erbakan Üniversitesi.
- Van Garderen, D. (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities. *Journal of learning disabilities*, 39(6), 496-506. <https://doi.org/10.1177/00222194060390060201>
- Van Garderen, D., & Montague, M. (2003). Visual- spatial representation, mathematical problem solving, and students of varying abilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, 18(4), 246-254. <https://doi.org/10.1111/1540-5826.00079>
- Van Garderen, D., Scheuermann, A., & Poch, A. (2014). Challenges students identified with a learning disability and as high-achieving experience when using diagrams as a visualization tool to solve mathematics word problems. *ZDM Mathematics Education*, 46(1), 135-149. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0519-1>
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2014). *İlkokul ve ortaokul matematiği* (S. Durmuş, Çev. Ed.). Nobel Akademik Yayıncılık.
- Walcott, C. (2006). *Visual aspects of children's sense-making strategies related to shape clasification* [Doctoral dissertation]. Indiana University.
- Watanabe, T. (2015). Visual reasoning tools in action. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 21(3), 152-160. <https://doi.org/10.5951/mathteachmidscho.21.3.0152>
- Weckbacher, L. M. (2007). *The role of visualization in geometric problem solving* [Doctoral dissertation]. University of California.
- Wheatley, G. H. (1998). Imagery and mathematics learning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(2-3), 65-77.
- Woodward, E. (1982). Heidi's misconception about area and perimeter. *School Science and Mathematics*, 82(4), 332-334. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1982.tb17203.x>
- Woolner, P. (2004). A comparison of a visual-spatial approach and a verbal approach to teaching mathematics. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 449-456). Norway.

- Xing, C. (2016). *Effects of diagrams on strategy choice in probability problem solving* [Doctoral dissertation]. Columbia University.
- Yaprak, H. (2019). 7. sınıf öğrencilerinin geometrik problemlerin çözümünde görselleme süreçlerinin incelenmesi [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Dokuz Eylül Üniversitesi.
- Yazgan, Y. ve Arslan, Ç. (2017). *Matematiksel sıradışı problem çözme stratejileri ve örnekleri*. Pegem Akademi.
- Yeşildere, S. ve Türnüklü, E. (2007). Öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40(1), 181-213.
- Yeşildere-İmre, S., Akkoç, H. ve Baştürk-Şahin, B. N. (2017). Ortaokul öğrencilerinin farklı temsil biçimlerini kullanarak matematiksel genelleme yapma becerileri. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 8(1), 103-129.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (10. baskı). Seçkin Yayıncılık.
- Yıldırım, C. (2020). *Matematiksel düşünme* (16. baskı). Remzi Kitabevi.
- Yıldırım, D. (2015). *Ortaokul öğrencilerinin geometri problemlerindeki matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi* [Yüksek lisans tezi]. Anadolu Üniversitesi.
- Yıldırım, D. ve Yavuzsoy-Köse, N. (2018). Ortaokul öğrencilerinin çokgen problemlerindeki matematiksel düşünme süreçleri. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18(1), 605-633. <https://doi.org/10.17240/aibuefd.2018..-362044>
- Yılmaz, R. (2011). *Matematiksel soyutlama ve genelleme süreçlerinde görselleştirme ve rolü* [Doktora tezi]. Gazi Üniversitesi.
- Yılmaz, R. ve Argün, Z. (2013). Matematiksel genelleme sürecinde görselleştirme ve önemi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28(2), 564-576.
- Yılmaz, R., & Argun, Z. (2018). Role of visualization in mathematical abstraction: The case of congruence concept. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology (IJEMST)*, 6(1), 41-57.

- Yin, R. K. (2009). *Case study research: Design and methods* (4th ed.). SAGE Publications.
- Yin, R. K. (2017). *Durum çalışması araştırması uygulamaları* (İ. Günbayı, Çev.). Nobel Akademik Yayıncılık.
- Zahner, D., & Corter, J. E. (2010). The process of probability problem solving: Use of external visual representations. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 177-204. <https://doi.org/10.1080/10986061003654240>
- Zaskis, R., & Hazzan, O. (1998). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17(4), 429-439. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(99\)00006-1](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00006-1)
- Zaskis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 435-457. <https://doi.org/10.2307/749876>
- Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization?. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics*, (pp. 1-7). Mathematical Association of America.

EKLER

EK 1. ÖZGEÇMİŞ

ÖĞRENCİNİN AKADEMİK ÖZGEÇMİŞİ

Kişisel Bilgiler			
Adı ve Soyadı	Mehmet Ertürk GEÇİCİ		
E-postası/Web Sayfası			
Bildiği Yabancı Diller	İngilizce		
Uzmanlık Alanı	Problem çözme, problem kurma, görsel akıl yürütme, görselleştirme, görsel temsil, meta-analiz.		
Öğrenim Bilgileri			
	Üniversite	Bölüm/ ABD	Yıl
Lisans	Uşak Üniversitesi	İlköğretim Matematik Öğretmenliği	2010-2014
Yüksek Lisans	Dicle Üniversitesi	Matematik Eğitimi	2015-2018
YL Tez Başlığı	Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Geometri Problemi Kurma Becerilerinin İncelenmesi		
YL Tez Danışmanı	Dr. Öğr. Üyesi Mehmet AYDIN		
Akademik Eserler			
(Makale, kitap, kitap bölümü, bildiri, poster, sergi, konser vb. eserlerden kaynakça yazım kurallarına göre en fazla 10 eser yazılmalıdır.)			
Tezden üretilen yayınlar * ile işaretlenmelidir.			
Aydın, M. ve Geçici, M. E. (2017). 6. sınıf öğrencilerinin epistemolojik inançlarının bazı değişkenler açısından incelenmesi. <i>Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi</i> , 18(1), 213-229.			
Özgen, K., Aydın, M., Geçici, M. E. ve Bayram, B. (2017). Sekizinci sınıf öğrencilerinin problem kurma becerilerinin bazı değişkenler açısından incelenmesi. <i>Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi</i> , 8(2), 323-351.			
*Geçici, M. E. ve Aydın, M. (2019). Sekizinci sınıf öğrencilerinin geometri problemi kurma becerileri ile geometri öz-yeterlik inançları arasındaki ilişkinin incelenmesi. <i>Kuramsal Eğitimbilim Dergisi</i> , 12(2), 431-456. http://dx.doi.org/10.30831/akukeg.456427			
Özgen, K., Aydın, M., Geçici, M. E., & Bayram, B. (2019). An investigation of eighth grade students' skills in problem posing. <i>International Journal for Mathematics Teaching and Learning</i> , 20(1), 106-130.			
Mut, A. İ., Kutluca, T., & Geçici, M., E. (2019). Investigation of the articles published in the journal of 'Education and Science' between 2011 & 2016 in the context of the use of SPSS and AMOS. <i>Journal of Theory and Practice in Education</i> , 15(1), 37-46. https://dx.doi.org/10.17244/eku.465183			
Cantürk-Günhan, B., Geçici, M. E. ve Günkaya, B. (2019). Problem kurma temelli matematik öğretiminin öğrencilerin başarılarına etkisi: Bir meta-analiz çalışması. <i>Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi</i> , 13(2), 1042-1062. https://dx.doi.org/10.17522/balikesirnef.614345			

Geçici, M. E. ve Törnüklü, E. (2020). Türkiye’de problem kurma üzerine hazırlanan tezlerin tematik açıdan incelenmesi. *International e-Journal of Educational Studies (IEJES)*, 4(7), 56-69. <https://dx.doi.org/10.31458/iejcs.606783>

*Geçici, M. E., & Aydın, M. (2020). Determining the geometry problem posing performances of eighth grade students in different problem posing situations. *International Journal of Contemporary Educational Research*, 7(1), 1-17. <https://dx.doi.org/10.33200/ijcer.575063>

Bayırlı, H., Geçici, M. E., & Erdem, C. (2021). The relationship between mathematics anxiety and mathematics achievement: A meta-analysis study. *Pamukkale University Journal of Education*, 53, 87-109. <https://dx.doi.org/10.9779/pauefd.783083>

Geçici, M. E., & Törnüklü, E. (2021). Visual reasoning in mathematics education: A conceptual framework proposal. *Acta Didactica Napocensia*, 14(1), 115-126. <https://doi.org/10.24193/adn.14.1.9>

Alanıyla İlgili Bilimsel Kuruluşlara Üyelikler

Alanıyla İlgili Aldığı Ödüller

EK 2. ETİK KURUL İZNİ

**T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
HUKUK MÜŞAVİRLİĞİ**

09 Mart 2021

Sayı : 87347630/42104268/ **1254**
Konu : Etik Kurul İzni Hak.
Mehmet Ertürk GEÇİCİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi :a)03.11.2020 tarih ve 67493393-302.08.01-E.102761 sayılı yazınız.
b)06.01.2021 tarih ve 87347630/42104268/46 sayılı yazımız.
c)Afyonkarahisar Valiliği İl Milli Eğitim Müdürlüğünün 24.02.2021 tarih ve E-49809702-605.01-21164905 sayılı yazısı.

İlgi (a)'da kayıtlı yazınıza istinaden Enstitünüz lisansüstü öğrencisi Mehmet Ertürk GEÇİCİ'nin "Ortaokul Öğrencilerinin Geometri Problemlerinde Görsel Akıl Yürütme Becerilerinin İncelenmesi" konulu tez çalışması kapsamında yapacağı çalışmanın Üniversitemiz Sosyal ve Beşeri Bilimler Araştırma ve Yayın Etiği Kurulunun 10.12.2020 tarihli toplantısında alınan karar uyarınca uygun bulunduğu ilgi (b)'de kayıtlı yazımız ile bildirilmiştir.

Adı geçen öğrencinin söz konusu tez çalışması kapsamında çalışma yapma talebine ilişkin Afyonkarahisar Valiliği İl Milli Eğitim Müdürlüğünden alınan ilgi (c)'de kayıtlı yazı ve ekleri, işbu yazımız ekinde sunulmaktadır.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Prof. Dr. Nükhet HOTAR
Rektör

Eki :İlgi (e)'de kayıtlı yazı ve ekleri.

EK 3. AFYONKARAHİSAR İL MİLLİ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ İZİNİ



T.C.
AFYONKARAHİSAR VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü



Sayı : E-49809702-605.01-21164905
Konu : Araştırma İzni

24.02.2021

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜNE
(Hukuk Müşavirliği)

İlgi: a) Valilik Makamı'nın 23/02/2021 tarihli ve 21139709 sayılı Ohuru.
b) 06/01/2021 tarihli ve E.45 sayılı yazınız.

Üniversiteniz Eğitim Bilimler Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Doktora Programı öğrencisi Mehmet Ertürk GEÇİCİ'nin "Ortaokul Öğrencilerinin Geometri Problemlerinde Görsel Akıl Yürütme Becerilerinin İncelenmesi" konulu tez çalışmasında kullanılmak üzere 2020-2021 Öğretim Yılı içinde Müdürlüğümüze bağlı ilgi (b) yazı ekinde belirtilen okulda öğrenim gören öğretmenlere ve velilere araştırma çalışması yapabilmesine dair ilgi (b) talebinde bulunulmuştur.

Müdürlüğümüz AR-GE Birimi tarafından "Millî Eğitim Bakanlığı Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü" 21/01/2020 tarihli ve 81576613-10.06.02-E.1563890 sayılı yazısı ile yayımlanan 2020/2 No'lu Genelge doğrultusunda incelemiş olup ilgi (a) "Valilik Ohuru" ve onaylanmış veri toplama aracı ekte gönderilmiştir.

Bilgilerinizi ve gereğini arz ederim.

Metin YALÇIN
İl Millî Eğitim Müdürü

Not: 1- Anket çalışmalarında Müdürlüğünüz tarafından onaylanmış (mühürlü) veri toplama araçlarının çoğaltılarak kullanılması zorunludur.

2- Çalışmalar tamamlandıktan sonra sonuçlarının birer örneğinin İl Millî Eğitim Müdürlüğüne teslim edilmesi zorunludur.

EKLER:

- Makam Onayı.
- Onaylanmış Veri Toplama Aracı.

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Adres : İL MİLLÎ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ Ar-Ge Karaman İş
Merkezi/AFYONKARAHİSAR
Telefon No : (0 272) 214 24 28
E-Posta: afyonstrateji@gmail.com
Kep Adresi : meb@is01.kep.tr

Belge Doğrulama Adresi : <https://www.turkiye.gov.tr/meb-oby>
Bilgi için: TOLGAYEŞİLÇAYIR
Unvan :Memur
İnternet Adresi: <http://afyonarga.meb.gov.tr/>
Faks: (0 272) 2137605

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. <https://evraksorgu.meb.gov.tr> adresinden fa8a-1bbc-358a-a5cc-f31e kodu ile teyit edilebilir.



EK 4. VELİ BİLGİLENDİRME VE İZİN FORMU

Sayın Veli,

Öncelikle yapacağım bu çalışmaya gösterdiğiniz ilgi ve bana ayırdığınız zaman için teşekkür ederim. Afyon Kocatepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalında araştırma görevlisi olarak görev yapmaktayım. Aynı zamanda Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Matematik Öğretmenliği Doktora Programında öğrenim görmekteyim. Danışman hocam Sayın Prof. Dr. Elif TÜRNUKLÜ ile birlikte “Ortaokul Öğrencilerinin Geometri Problemlerinde Görsel Akıl Yürütme Becerilerinin İncelenmesi” isimli tez çalışmasını yürütmekteyiz. Bu tez çalışması kapsamında belirlenen öğrenciler ile görüşmeler gerçekleştirilecektir. Yapılması planlanan görüşmeler öğrencilerin geometri ile ilgili problemleri çözerken sergiledikleri görsel akıl yürütme becerilerini ortaya çıkarmayı hedeflemektedir. Görüşmeler öğrencilerle okul ortamında yapılacak ve 1 saat ile sınırlı tutulacaktır.

Araştırma T.C. Milli Eğitim Bakanlığı’nın ve okul yönetiminin de izni ile gerçekleştirilmektedir. Araştırma uygulamasına katılım tamamıyla gönüllülük esasına dayalı olmaktadır. Çocuğunuz çalışmaya katılıp katılmamakta özgürdür. Araştırma çocuğunuz için herhangi bir istenmeyen etki ya da risk taşımamaktadır. Çocuğunuzun katılımı **tamamen sizin isteğinize bağlıdır**, reddedebilir ya da araştırmanın herhangi bir aşamasında ayrılabilirsiniz. Araştırmaya katılmama veya araştırmadan ayrılma durumunda öğrencilerin akademik başarılarını, okul ve öğretmenleriyle olan ilişkilerini etkilemeyecektir. Çalışmada öğrencilerden kimlik belirleyici hiçbir bilgi istenmemektedir. Cevaplar tamamıyla gizli tutulacak ve sadece araştırmacı tarafından değerlendirilecektir. Saygılarımla,

Arş. Gör. Mehmet Ertürk GEÇİCİ
AKÜ Eğitim Fakültesi
Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı

Velisi bulunduğum öğrencinin yukarıda açıklanan araştırmaya katılmasına izin veriyorum.

.../...../.....

Velinin

İmzası:

EK 5. ÖĞRENCİ BİLGİLENDİRME VE İZİN FORMU

Sayın Katılımcı,

Öncelikle yapacağım bu çalışmaya gösterdiğiniz ilgi ve bana ayırdığınız zaman için teşekkür ederim. Afyon Kocatepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalında araştırma görevlisi olarak görev yapmaktayım. Aynı zamanda Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Matematik Öğretmenliği Doktora Programında öğrenim görmekteyim. Danışman hocam Sayın Prof. Dr. Elif TÜRÜKLÜ ile birlikte “Ortaokul Öğrencilerinin Geometri Problemlerinde Görsel Akıl Yürütme Becerilerinin İncelenmesi” isimli tez çalışmasını yürütmekteyiz. Bu tez çalışması kapsamında belirlenen katılımcılar ile görüşmeler gerçekleştirilecektir. Yapılması planlanan görüşmeler katılımcıların geometri ile ilgili problemleri çözerken sergiledikleri görsel akıl yürütme becerilerini ortaya çıkarmayı hedeflemektedir. Görüşmeler, katılımcılarla okul ortamında yapılacak ve 1 saat ile sınırlı tutulacaktır.

Araştırma T.C. Milli Eğitim Bakanlığı’nın ve okul yönetiminin de izni ile gerçekleştirilmektedir. Araştırma uygulamasına katılım tamamıyla **gönüllülük esasına dayalı** olmaktadır. Çalışmada sizden kimlik belirleyici hiçbir bilgi istenmemektedir. Cevaplar tamamıyla gizli tutulacak ve sadece araştırmacılar tarafından değerlendirilecektir. Veriler sadece araştırmada kullanılacak ve üçüncü kişilerle paylaşılmayacaktır.

Uygulamalar, kişisel rahatsızlık verecek sorunlar ve durumlar içermemektedir. Ancak, katılım sırasında sorulardan ya da herhangi başka bir nedenden dolayı rahatsız olursanız, cevaplama işini yarıda bırakabilirsiniz. Katılımı onaylamadan önce sormak istediğiniz herhangi bir konu varsa sormaktan çekinmeyiniz. Saygılarımla.

Arş. Gör. Mehmet Ertürk GEÇİCİ
AKÜ Eğitim Fakültesi
Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı

Yukarıda bilgileri bulunan araştırmaya katılmayı kabul ediyorum.

.../.../.....

Katılımcının

İmzası:

EK 6. GEOMETRİ PROBLEMİ ÇÖZME TESTİ UZMAN GÖRÜŞ FORMU

Sayın Hocam,

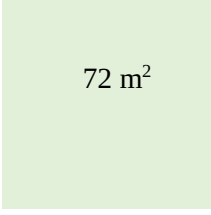
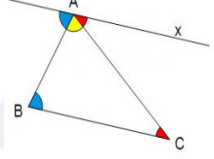
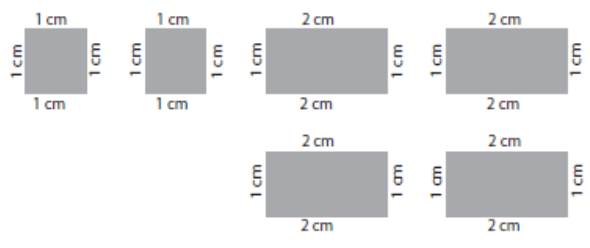
Bu form “Ortaokul Öğrencilerinin Geometri Problemlerinde Görsel Akıl Yürütme Becerilerinin İncelenmesi” isimli doktora tezi kapsamında, öğrencilerin görsel akıl yürütme becerilerini ölçmek için geliştirilen problem çözme testine yönelik uzman görüşü almak amacıyla hazırlanmıştır. Vereceğiniz cevaplar yalnızca test oluşturma sürecinde kullanılacaktır. Hazırlanan her bir problemin matematiksel düşünme bileşenlerine uygunluğu ile araştırma ve öğrenci seviyesine uygunluğu konusunda vereceğiniz dönütler bizim için çok değerlidir. Her soru için aşağıdaki seçeneklerden birini seçmeniz ve soruya ilişkin düzeltme ve yorumlarınızı bizimle paylaşmanız çalışmanın niteliği açısından büyük önem arz etmektedir. Araştırmaya katıldığınız için teşekkür ederim.

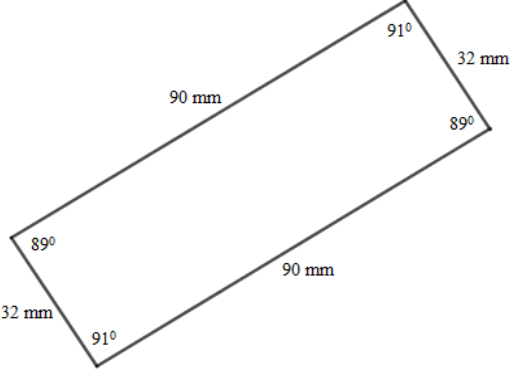
Arş. Gör. Mehmet Ertürk Geçici

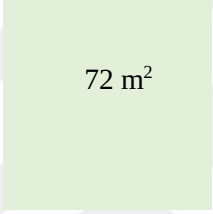
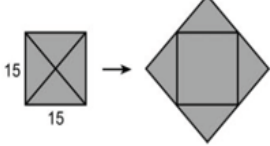
Puanlamalar;

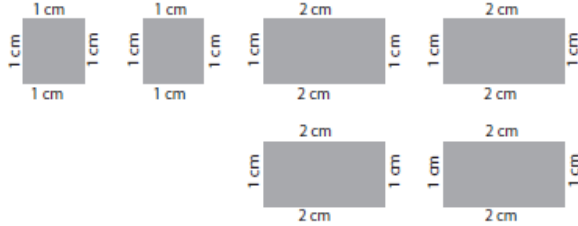
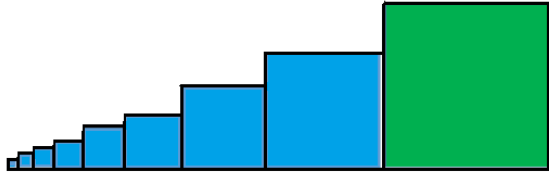
- (1) testten çıkarılmalıdır
- (2) düzeltme yapılmalıdır
- (3) testte kullanılabilir

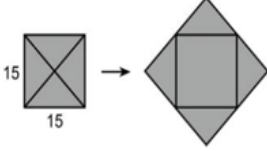
Soru Türü	5. Sınıf	Matematiksel Düşünme Bileşenlerine Uygunluk	Araştırmaya ve Öğrenci Seviyesine Uygunluk
Sözel Özelleştirme	➤ Hatice, dikdörtgen biçiminde olan bir kâğıdı kısa kenarları üst üste gelecek şekilde katladıktan sonra katlanmamış olan diğer iki kenarı da üst üste gelecek şekilde katlamıştır. Hatice daha sonra katları açtığı anda hangi geometrik şekli görecektir? ➤ Hatice katlama işlemine benzer şekilde devam ederse 5. adımda o geometrik şekilden kaç tane oluşturur? Nedenleri ile açıklayınız.		

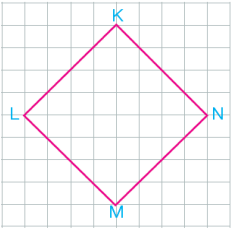
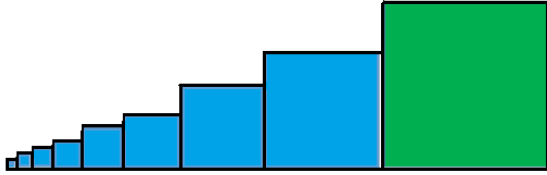
Görsel Özelleştirme	Afyonkarahisar Belediyesi, Cumhuriyet mahallesinde bulunan boş bir araziye park yapılmasına karar vermiştir. Dikdörtgen şeklinde olması planlanan bu parkın alanı 72 m^2 olacaktır. Bu parkın kenar uzunlukları kaç m seçilirse çevresi en az olur? 		
Sözel Genelleme	Mert, birbirine dayalı yedi küpü bir sıraya koymuş ve daha sonra, onları kırmızı bir spreyci boya ile boyamıştır. Boyaları kurduğunda küpleri birbirinden ayıran Mert, küplerin masaya ve aynı zamanda birbirlerine dokunan yüzelerinin boyanmadığını fark etmiştir. Bu durumda yedi küpün kaç yüzeyi boyanmamıştır? (Posamentier ve Krulik, 2016'dan uyarlanmıştır.)		
Görsel Genelleme	 Yandaki görselde bir üçgenin iç açılar toplamının nasıl bulunabileceği gösterilmektedir. Acaba dörtgenlerin iç açıları toplamını bulmaya yarayacak bir kural geliştirilebilir mi?		
Sözel Varsayımında Bulunma	Yusuf, odasının duvarına eş büyüklükte kare şeklinde 4 farklı resim asmak istemektedir. Annesi bu duruma izin vermiş fakat minimum sayıda çivi kullanmak zorunda olduğunu söylemiştir. Yusuf resimlerin her bir köşesine bir çivi çakmak için ısrar ettiğine göre Yusuf'un ihtiyaç duyduğu çivi sayısı en az kaç olabilir? (Posamentier ve Krulik, 2016'dan uyarlanmıştır.)		
Görsel Varsayımında Bulunma	 Suzan'ın yukarıda gösterildiği gibi 6 parça kartonu vardır. Suzan, kartonları kesmeden ve 6 parçanın tümünü kullanarak, hangi geometrik şekilleri oluşturabilir? (TIMMS, 2011'den uyarlanmıştır.)		

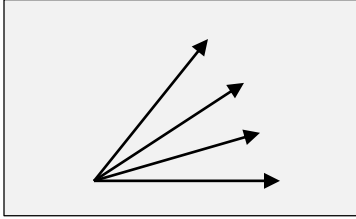
Sözel Doğrulama ve İkna Etme	Sıradan bir satranç tahtasında 204 adet kare olduğu iddia edilmektedir. Bu iddianın doğru olduğunu gösterebilir misiniz? (Mason vd., 2010)		
Görsel Doğrulama ve İkna Etme	Aşağıda uzunluk ve açı ölçüleri verilen şekle bakan Ahmet ile Yağmur arasında şöyle bir diyalog geçmektedir. Ahmet : Bu şekil bir dikdörtgendir. Yağmur : Ben dikdörtgen olmadığını düşünüyorum. Ahmet ile Yağmur'un bu konudaki tartışmalarında kimin haklı olduğunu düşünüyorsunuz? Cevabınızı ayrıntılı bir şekilde açıklayınız. (Battista vd., 2018'den uyarlanmıştır.) 		

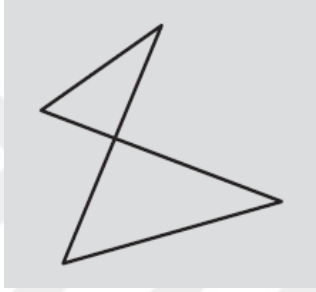
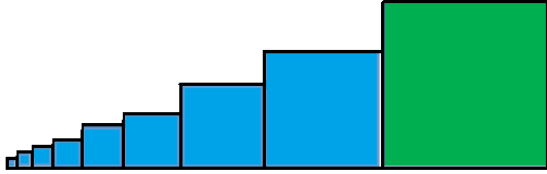
Soru Türü	6. Sınıf	Matematiksel Düşünme Bileşenlerine Uygunluk	Araştırmaya ve Öğrenci Seviyesine Uygunluk
Sözel Özelleştirme	➤ Hatice, dikdörtgen biçiminde olan bir kâğıdı kısa kenarları üst üste gelecek şekilde katladıktan sonra katlanmamış olan diğer iki kenarı da üst üste gelecek şekilde katlamıştır. Hatice daha sonra katları açtığı anda hangi geometrik şekli görecektir? ➤ Hatice katlama işlemine benzer şekilde devam ederse 5. adımda o geometrik şekilden kaç tane oluşturur? Nedenleri ile açıklayınız.		
Görsel Özelleştirme	Afyonkarahisar Belediyesi, Cumhuriyet mahallesinde bulunan boş bir araziye park yapılmasına karar vermiştir. Dikdörtgen şeklinde olması planlanan bu parkın alanı 72 m^2 olacaktır. Bu parkın kenar uzunlukları kaç m seçilirse çevresi en az olur? 		
Sözel Genelleme	Herhangi bir eşkenar üçgenin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek yeni eşkenar üçgenler elde edilebilir. Devamında üçgenin ortasında oluşan her eşkenar üçgen için bu işlemler devam ettirilerek sonsuz sayıda eşkenar üçgene ulaşılabilir. Buna göre herhangi bir adımdaki eşkenar üçgenin çevre uzunluğunu bulmaya yarayacak genel bir kural oluşturabilir misiniz?		
Görsel Genelleme	 Görselde bir kenarı 15 cm uzunluğunda olan kare şeklinde bir zarf ile bu zarfın açılımı verilmiştir. Verilenlerden yola çıkarak herhangi bir kenar uzunluğuna sahip olan kare şeklindeki bir zarfın açılımının alanı nasıl hesaplanabilir? (ÖSYM, 2012'den uyarlanmıştır.)		

Sözel Varsayımda Bulunma	Herhangi bir dikdörtgenin alanı, kısa kenar ile uzun kenar uzunluklarının çarpımı ile bulunabilir. Bu bilgi doğrultusunda sizce bir dik üçgenin alanı nasıl hesaplanabilir?		
Görsel Varsayımda Bulunma	 Suzan'ın yukarıda gösterildiği gibi 6 parça kartonu vardır. Suzan, kartonları kesmeden ve 6 parçanın tümünü kullanarak, hangi geometrik şekilleri oluşturabilir? (TIMMS, 2011'den uyarlanmıştır.)		
Sözel Doğrulama ve İkna Etme	Sıradan bir satranç tahtasında 204 adet kare olduğu iddia edilmektedir. Bu iddianın doğru olduğunu gösterebilir misiniz? (Mason vd., 2010)		
Görsel Doğrulama ve İkna Etme	 Şekilde farklı kenar uzunluklarına sahip olan kareler verilmiştir. Her karenin alanı kendinden önceki karenin alanının iki katına eşittir. a) Bu bilgiler doğrultusunda mavi renkteki karelerin alanları toplamı mı yoksa yeşil renkteki karenin alanı mı daha büyüktür? b) Cevabınızı nedenleri ile açıklayınız.		

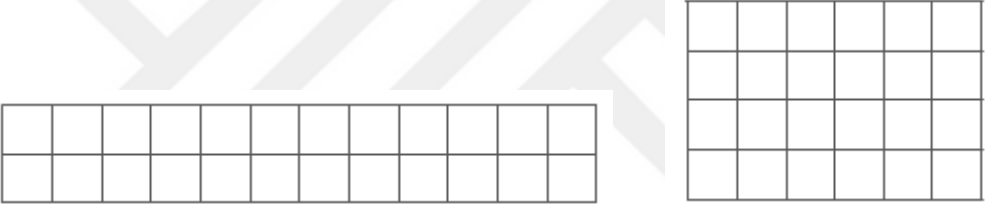
Soru Türü	7. Sınıf	Matematiksel Düşünme Bileşenlerine Uygunluk	Araştırmaya ve Öğrenci Seviyesine Uygunluk
Sözel Özelleştirme	➤ Hatice, dikdörtgen biçiminde olan bir kâğıdı kısa kenarları üst üste gelecek şekilde katladıktan sonra katlanmamış olan diğer iki kenarı da üst üste gelecek şekilde katlamıştır. Hatice daha sonra katları açtığı anda hangi geometrik şekli görecektir? ➤ Hatice katlama işlemine benzer şekilde devam ederse 5. adımda o geometrik şekilden kaç tane oluşturur? Nedenleri ile açıklayınız.		
Görsel Özelleştirme	 Yanda görmüş olduğunuz daire şeklindeki duvar saatinde akrep ve yelkovanın takılı olduğu metal vidayı merkez kabul edelim. Bu merkezden ve saat veya dakika çizgileri üzerinden geçecek şekilde kaç farklı çap çizilebilir?		
Sözel Genelleme	Herhangi bir eşkenar üçgenin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek yeni eşkenar üçgenler elde edilebilir. Devamında üçgenin ortasında oluşan her eşkenar üçgen için bu işlemler devam ettirilerek sonsuz sayıda eşkenar üçgene ulaşılabilir. Buna göre herhangi bir adımdaki eşkenar üçgenin çevre uzunluğunu bulmaya yarayacak genel bir kural oluşturabilir misiniz?		
Görsel Genelleme	 Görselde bir kenarı 15 cm uzunluğunda olan kare şeklinde bir zarf ile bu zarfın açılımı verilmiştir. Verilenlerden yola çıkarak herhangi bir kenar uzunluğuna sahip olan kare şeklindeki bir zarfın açılımının alanı nasıl hesaplanabilir? (ÖSYM, 2012'den uyarlanmıştır.)		

Sözel Varsayımda Bulunma	Bir düzgün çokgenin 14 tane köşegeni olduğu bilinmektedir. Bu çokgenin kaç kenarlı olduğuna yönelik bir tahminde bulunabilir misiniz? Tahmininizi nedenleri ile birlikte açıklayınız.		
Görsel Varsayımda Bulunma	 Yandaki gibi bir eşkenar dörtgenin alanını hesaplamak için nelere ihtiyaç duyulabilir? Verilenlerden yola çıkarak bu eşkenar dörtgenin alanını bulabilir misiniz? Varsayımlarınızı detayları ile açıklayınız.		
Sözel Doğrulama ve İkna Etme	Sıradan bir satranç tahtasında 204 adet kare olduğu iddia edilmektedir. Bu iddianın doğru olduğunu gösterebilir misiniz? (Mason vd., 2010)		
Görsel Doğrulama ve İkna Etme	 Şekilde farklı kenar uzunluklarına sahip olan kareler verilmiştir. Her karenin alanı kendinden önceki karenin alanının iki katına eşittir. a) Bu bilgiler doğrultusunda mavi renkteki karelerin alanları toplamı mı yoksa yeşil renkteki karenin alanı mı daha büyüktür? b) Cevabınızı nedenleri ile açıklayınız.		

Soru Türü	8. Sınıf	Matematiksel Düşünme Bileşenlerine Uygunluk	Araştırmaya ve Öğrenci Seviyesine Uygunluk
Sözel Özelleştirme	➤ Hatice, dikdörtgen biçiminde olan bir kâğıdı kısa kenarları üst üste gelecek şekilde katladıktan sonra katlanmamış olan diğer iki kenarı da üst üste gelecek şekilde katlamıştır. Hatice daha sonra katları açtığında hangi geometrik şekli görecektir? ➤ Hatice katlama işlemine benzer şekilde devam ederse 5. adımda o geometrik şekilden kaç tane oluşturur? Nedenleri ile açıklayınız.		
Görsel Özelleştirme	 Yanda görmüş olduğunuz daire şeklindeki duvar saatinde akrep ve yelkovanın takılı olduğu metal vidayı merkez kabul edelim. Bu merkezden ve saat veya dakika çizgileri üzerinden geçecek şekilde kaç farklı çap çizilebilir?		
Sözel Genelleme	Eşkenar üçgen, kare, düzgün beşgen ve düzgün altıgen gibi çokgenlerin bütün kenar uzunlukları ve bütün iç açılarının ölçüleri birbirine eşittir. “n” kenarlı bir düzgün çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamını bulmaya yarayacak genel bir kural oluşturabilir misiniz? (Yıldırım ve Yavuzsoy-Köse, 2018’den uyarlanmıştır.)		
Görsel Genelleme	 Şekildeki gibi ortak bir noktaya sahip olan “n” tane ışınla kaç tane dar açı oluşturabilirsiniz? (Yazgan ve Arslan, 2017’den uyarlanmıştır.)		

Sözel Varsayımda Bulunma	Herhangi bir ABC üçgeninde A açısının ölçüsünü azaltıp, AB ve AC kenarlarının uzunluğu aynı kalacak şekilde yeni bir üçgen oluşturulduğunda BC kenarında nasıl bir değişim olur? Cevabınızı nedenleri ile ayrıntılı bir şekilde açıklayınız.		
Görsel Varsayımda Bulunma	Alttağı gibi yer alan bir şeklin alanını belirlemek için nasıl bir yol önerebilirsiniz. Cevabınızı ayrıntılı olarak açıklayınız. (Mason vd., 2010) 		
Sözel Doğrulama ve İkna Etme	Sıradan bir satranç tahtasında 204 adet kare olduğu iddia edilmektedir. Bu iddianın doğru olduğunu gösterebilir misiniz? (Mason vd., 2010)		
Görsel Doğrulama ve İkna Etme	 Şekilde farklı kenar uzunluklarına sahip olan kareler verilmiştir. Her karenin alanı kendinden önceki karenin alanının iki katına eşittir. a) Bu bilgiler doğrultusunda mavi renkteki karelerin alanları toplamı mı yoksa yeşil renkteki karenin alanı mı daha büyüktür? b) Cevabınızı nedenleri ile açıklayınız.		

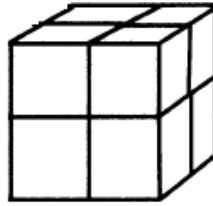
EK 7. GEOMETRİ PROBLEMİ ÇÖZME TESTİNİN SON HALİ

5. Sınıf
➤ Hatice'nin elinde dikdörtgen biçiminde bir kâğıt bulunmaktadır. 1. adımda bu kâğıdın kısa kenarlarını üst üste gelecek şekilde katlamıştır. Daha sonra 2. adımda ise diğer iki kenarını da üst üste gelecek şekilde katlamıştır. Hatice daha sonra katları açtığında hangi geometrik şekilden kaç tane görecektir? ➤ Hatice katlama işlemine benzer şekilde devam ederse bir sonraki adımda o geometrik şekilden kaç tane oluşturur? Nedenleri ile açıklayınız.

Yukarıda verilen dikdörtgenleri inceledikten sonra aşağıdaki soruları cevaplamaya çalışınız. • Dikdörtgenlerin çevre uzunlukları kaç birimdir? • Dikdörtgenlerin alanları kaç birimkaredir? • Bu dikdörtgenlerin çevre ve alan ölçüleri ile ilgili ne söyleyebilirsiniz? • Alanı 72 birimkare olacak şekilde bir dikdörtgen çizilmek istendiğinde kenar uzunlukları kaç birim seçilirse çevresi en az olur?

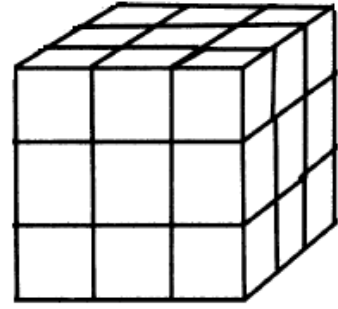
- Mert, birbirine dayalı olan yedi küpü **yan yana hizalayarak** bir sıraya koymuş ve daha sonra, onları kırmızı bir sprey boya ile boyamıştır. Boyaları kurduğunda küpleri birbirinden ayıran Mert, küplerin masaya ve aynı zamanda birbirlerine dokunan yüzeylerinin boyanmadığını fark etmiştir. Bu durumda yedi küpün kaç yüzeyi boyanmamıştır?
- Küp sayısı daha fazla olsaydı çözüm için bir kural olabilir miydi?



1. Adım



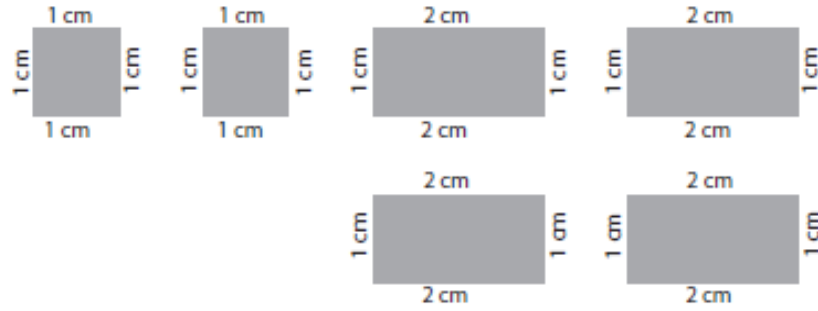
2. Adım



3. Adım

- Ali, matematik öğretmenin onna verdiği birimküpleri bir araya getirerek yukarıdaki gibi daha büyük küpler oluşturmaya çalışmıştır. 1. adımı 1 tane küple oluştururken, 2. adımı 8 tane küple oluşturmuştur. 3. adımda kaç tane küp kullanacağını bulabilir misiniz?
- Peki, daha ileri adımlar oluşturulmak istendiğinde, o adımda kaç tane küp gerekli olacağını bulmak için bir kural geliştirilebilir mi? (Büyük küpleri oluştururken birimküpler arasında boşluk bırakılmayacaktır.)

Yusuf, odasının duvarına **eş büyüklükte kare** şeklinde 4 farklı resim asmak istemektedir. Annesi bu duruma izin vermiş fakat minimum sayıda çivi kullanmak zorunda olduğunu söylemiştir. Yusuf resimlerin her bir köşesine bir çivi çakmak için ısrar ettiğine göre Yusuf'un ihtiyaç duyduğu çivi sayısı **en az** kaç olabilir?



Suzan'ın yukarıda gösterildiği gibi 6 parça kartonu vardır. Suzan, kartonları kesmeden ve 6 parçanın tümünü kullanarak, hangi geometrik şekilleri veya cisimleri oluşturabilir?

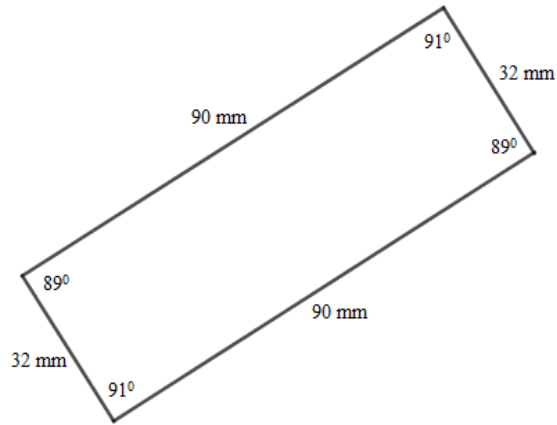
Bir satranç tahtasında 8 satır ve 8 sütun bulunmaktadır. Dolayısıyla kenar uzunlukları **1 birim** büyüklüğünde olan 64 tane kare olduğu söylenebilir. Ancak satranç tahtasında 204 adet kare olduğu iddia edilmektedir. Bu iddianın neden doğru olduğunu açıklayabilir misiniz?

Aşağıda uzunluk ve açı ölçüleri verilen şekle bakan Ahmet ile Yağmur arasında şöyle bir diyalog geçmektedir.

Ahmet : Bu şekil bir dikdörtgendir.

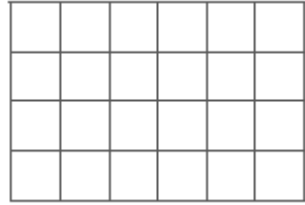
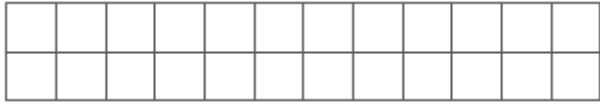
Yağmur : Ben dikdörtgen olmadığını düşünüyorum.

Ahmet ile Yağmur'un bu konudaki tartışmalarında kimin haklı olduğunu düşünüyorsunuz? Cevabınızı ayrıntılı bir şekilde açıklayınız.



6. Sınıf

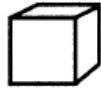
- Hatice'nin elinde dikdörtgen biçiminde bir kâğıt bulunmaktadır. 1. adımda bu kâğıdın **kısa kenarlarını** üst üste gelecek şekilde katlamıştır. Daha sonra 2. adımda ise **diğer iki kenarını** da üst üste gelecek şekilde katlamıştır. Hatice daha sonra katları açtığında hangi geometrik **şekilden** kaç tane görecektir?
- Hatice katlama işlemine benzer şekilde devam ederse bir sonraki adımda o geometrik şekilden kaç tane oluşturur? Nedenleri ile açıklayınız.



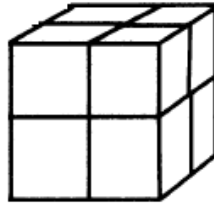
Yukarıda verilen dikdörtgenleri inceledikten sonra aşağıdaki soruları cevaplamaya çalışınız.

- Dikdörtgenlerin **çevre** uzunlukları kaç birimdir?
- Dikdörtgenlerin **alanları** kaç birimkaredir?
- Bu dikdörtgenlerin çevre ve alan ölçüleri ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?
- Alanı 72 birimkare olacak şekilde bir dikdörtgen çizilmek istendiğinde kenar uzunlukları kaç birim seçilirse çevresi **en az** olur?

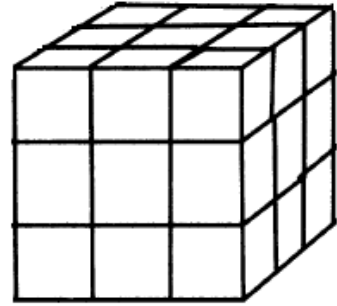
- Mert, birbirine dayalı olan yedi küpü **yan yana hizalayarak** bir sıraya koymuş ve daha sonra, onları kırmızı bir sprey boya ile boyamıştır. Boyaları kurduğunda küpleri birbirinden ayıran Mert, küplerin masaya ve aynı zamanda birbirlerine dokunan yüzeylerinin boyanmadığını fark etmiştir. Bu durumda yedi küpün kaç yüzeyi boyanmamıştır?
- Küp sayısı daha fazla olsaydı çözüm için bir kural olabilir miydi?



1. Adım



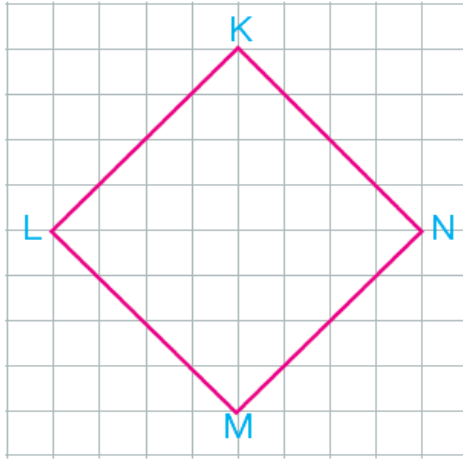
2. Adım



3. Adım

- Ali, matematik öğretmenin onına verdiği birimküpleri bir araya getirerek yukarıdaki gibi daha büyük küpler oluşturmaya çalışmıştır. 1. adımı 1 tane küple oluştururken, 2. adımı 8 tane küple oluşturmuştur. 3. adımda kaç tane küp kullanacağını bulabilir misiniz?
- Peki, daha ileri adımlar oluşturulmak istendiğinde, o adımda kaç tane küp gerekli olacağını bulmak için bir kural geliştirilebilir mi? (Büyük küpleri oluştururken birimküpler arasında boşluk bırakılmayacaktır.)

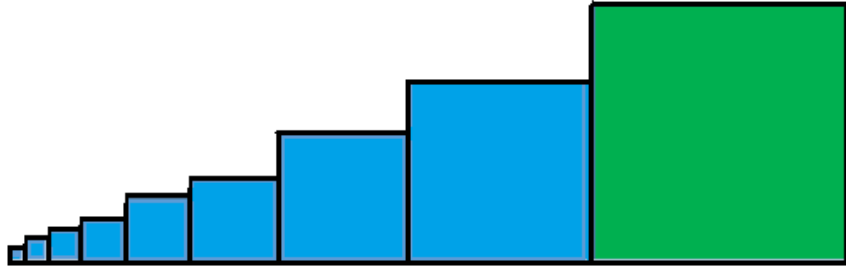
Herhangi bir dikdörtgenin alanı, kısa kenar ile uzun kenar uzunluklarının çarpımı ile bulunabilir. Bu bilgi doğrultusunda sizce bir dik üçgenin alanı nasıl hesaplanabilir?



Yandaki gibi kareli zemin üzerine yerleştirilen eşkenar dörtgenin alanını bulabilir misiniz?

Herhangi bir eşkenar dörtgenin alanını hesaplamak için hangi verilere ihtiyaç duyulabilir? Açıklayınız.

Bir satranç tahtasında 8 satır ve 8 sütun bulunmaktadır. Dolayısıyla kenar uzunlukları **1 birim** büyüklüğünde olan 64 tane kare olduğu söylenebilir. Ancak satranç tahtasında 204 adet kare olduğu iddia edilmektedir. Bu iddianın neden doğru olduğunu açıklayabilir misiniz?

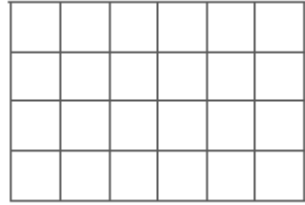
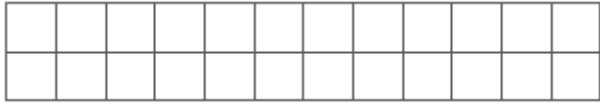


Şekilde farklı kenar uzunluklarına sahip olan kareler verilmiştir. Her karenin alanı kendinden önceki karenin alanının iki katına eşittir.

Bu bilgiler doğrultusunda mavi renkteki karelerin alanları toplamı mı yoksa yeşil renkteki karenin alanı mı daha büyüktür? Cevabınızı nedenleri ile açıklayınız.

7. Sınıf

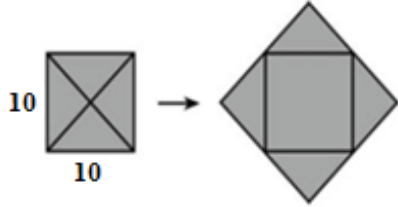
- Hatice'nin elinde dikdörtgen biçiminde bir kâğıt bulunmaktadır. 1. adımda bu kâğıdın **kısa kenarlarını** üst üste gelecek şekilde katlamıştır. Daha sonra 2. adımda ise **diğer iki kenarını** da üst üste gelecek şekilde katlamıştır. Hatice daha sonra katları açtığında hangi geometrik **şekilden** kaç tane görecektir?
- Hatice katlama işlemine benzer şekilde devam ederse bir sonraki adımda o geometrik şekilden kaç tane oluşturur? Nedenleri ile açıklayınız.



Yukarıda verilen dikdörtgenleri inceledikten sonra aşağıdaki soruları cevaplamaya çalışınız.

- Dikdörtgenlerin **çevre** uzunlukları kaç birimdir?
- Dikdörtgenlerin **alanları** kaç birimkaredir?
- Bu dikdörtgenlerin çevre ve alan ölçüleri ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?
- Alanı 72 birimkare olacak şekilde bir dikdörtgen çizilmek istendiğinde kenar uzunlukları kaç birim seçilirse çevresi **en az** olur?

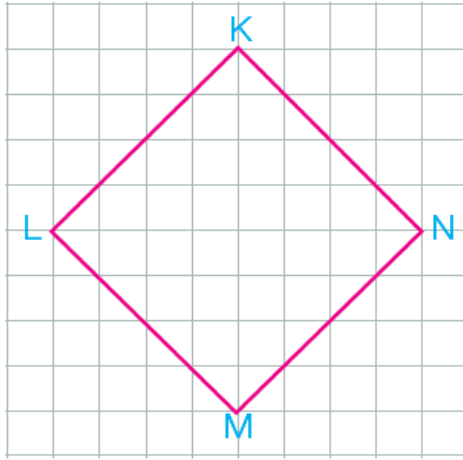
Tüm kenar uzunlukları ve iç açılarının ölçüleri birbirine eşit olan çokgenlere düzgün çokgen denir. Eşkenar üçgen, kare, düzgün beşgen ve düzgün altıgen gibi çokgenlerin bütün kenar uzunlukları ve bütün iç açılarının ölçüleri birbirine eşittir. “n” kenarlı bir düzgün çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamını bulmaya yarayacak genel bir kural oluşturabilir misiniz?



Görselde bir kenarı 10 cm uzunluğunda olan kare şeklinde bir zarf ile bu zarfın açılımı verilmiştir. Bu zarfın açılımının alanını hesaplayabilir misiniz?

Şekildeki kare zarfın kenar uzunluğu farklı bir değere eşit olsaydı alanını bulmak için bir kural geliştirilebilir miydi?

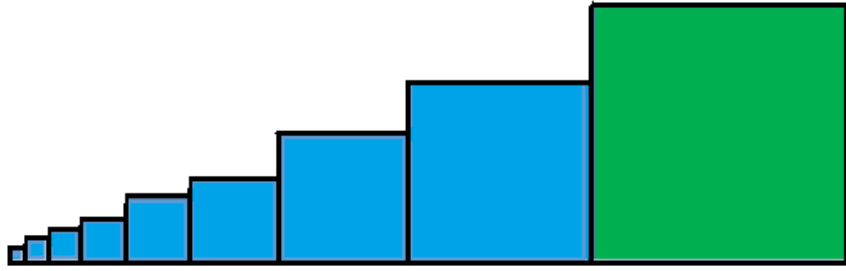
Geometrik şekillerde komşu olmayan iki köşeyi birleştiren doğru parçalarına **köşegen** denir. Bir düzgün çokgenin 14 tane köşegeni olduğu bilinmektedir. Bu çokgenin kaç kenarlı olduğuna yönelik bir tahminde bulunabilir misiniz? Tahmininizi nedenleri ile birlikte açıklayınız.



Yandaki gibi kareli zemin üzerine yerleştirilen eşkenar dörtgenin alanını bulabilir misiniz?

Herhangi bir eşkenar dörtgenin alanını hesaplamak için hangi verilere ihtiyaç duyulabilir? Açıklayınız.

Bir satranç tahtasında 8 satır ve 8 sütun bulunmaktadır. Dolayısıyla kenar uzunlukları **1 birim** büyüklüğünde olan 64 tane kare olduğu söylenebilir. Ancak satranç tahtasında 204 adet kare olduğu iddia edilmektedir. Bu iddianın neden doğru olduğunu açıklayabilir misiniz?



Şekilde farklı kenar uzunluklarına sahip olan kareler verilmiştir. Her karenin alanı kendinden önceki karenin alanının iki katına eşittir.

Bu bilgiler doğrultusunda mavi renkteki karelerin alanları toplamı mı yoksa yeşil renkteki karenin alanı mı daha büyüktür? Cevabınızı nedenleri ile açıklayınız.

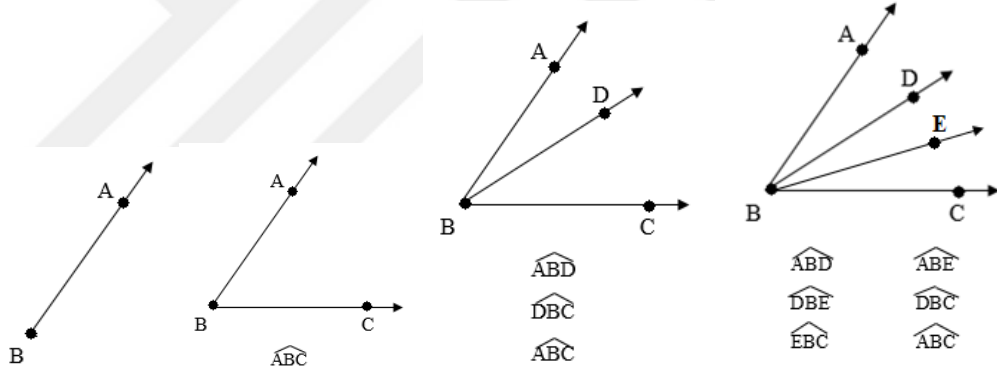
8. Sınıf

- Hatice'nin elinde dikdörtgen biçiminde bir kâğıt bulunmaktadır. 1. adımda bu kâğıdın **kısa kenarlarını** üst üste gelecek şekilde katlamıştır. Daha sonra 2. adımda ise **diğer iki kenarını** da üst üste gelecek şekilde katlamıştır. Hatice daha sonra katları açtığında hangi geometrik **şekilden** kaç tane görecektir?
- Hatice katlama işlemine benzer şekilde devam ederse bir sonraki adımda o geometrik şekilden kaç tane oluşturur? Nedenleri ile açıklayınız.



Yanda görmüş olduğunuz daire şeklindeki duvar saatinde akrep ve yelkovanın takılı olduğu metal vidayı merkez kabul edelim. Bu merkezden ve saat veya dakika çizgileri (Saatin kenarındaki kısa çizgiler) üzerinden geçecek şekilde kaç farklı çap çizilebilir?

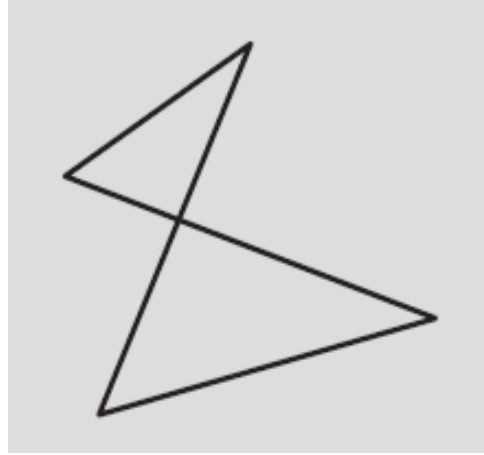
Tüm kenar uzunlukları ve iç açıların ölçüleri birbirine eşit olan çokgenlere düzgün çokgen denir. Eşkenar üçgen, kare, düzgün beşgen ve düzgün altıgen gibi çokgenlerin bütün kenar uzunlukları ve bütün iç açıların ölçüleri birbirine eşittir. “n” kenarlı bir düzgün çokgenin iç açıların ölçüleri toplamını bulmaya yarayacak genel bir kural oluşturabilir misiniz?



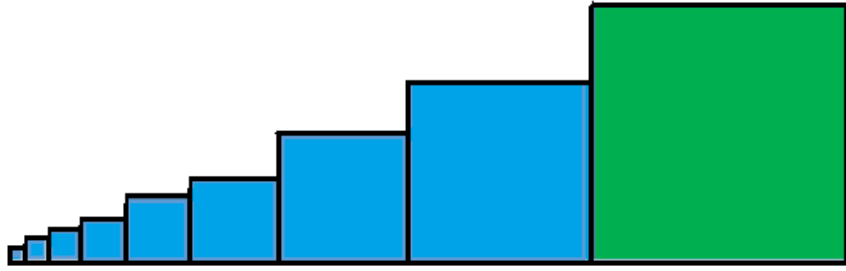
Şekilde görüldüğü gibi 1 ışınla dar açı oluşturulamazken, ortak bir noktaya sahip olan 2 ışınla 1 tane, 3 ışınla 3 tane, 4 ışınla 6 tane dar açı oluşturulabilmektedir. Acaba “n” tane ışınla kaç tane dar açı oluşturabilir?

Herhangi bir ABC üçgeninde A açısının ölçüsünü azaltıp, AB ve AC kenarlarının uzunluğu aynı kalacak şekilde yeni bir üçgen oluşturulduğunda BC kenarında nasıl bir değişim olur? Cevabınızı nedenleri ile ayrıntılı bir şekilde açıklayınız.

Altındaki gibi bir şeklin alanını tahmin etmek için nasıl bir yol önerebilirsiniz? Cevabınızı ayrıntılı olarak açıklayınız.



Bir satranç tahtasında 8 satır ve 8 sütun bulunmaktadır. Dolayısıyla kenar uzunlukları **1 birim** büyüklüğünde olan 64 tane kare olduğu söylenebilir. Ancak satranç tahtasında 204 adet kare olduğu iddia edilmektedir. Bu iddianın neden doğru olduğunu açıklayabilir misiniz?



Şekilde farklı kenar uzunluklarına sahip olan kareler verilmiştir. Her karenin alanı kendinden önceki karenin alanının iki katına eşittir.

Bu bilgiler doğrultusunda mavi renkteki karelerin alanları toplamı mı yoksa yeşil renkteki karenin alanı mı daha büyüktür? Cevabınızı nedenleri ile açıklayınız.

EK 8. KLİNİK MÜLAKATTA KULLANILAN GÖRÜŞME SORULARI

Mülakata başlamadan önce katılımcıya aşağıdaki açıklamalar yapılacaktır.

- ❖ Görüşmemiz gizli tutulacak ve gerçek isminiz araştırmada kullanılmayacaktır.
- ❖ Araştırmada önemli olan sizin doğru ya da yanlış bir sonuca varmanız değil süreçteki düşüncelerinizdir. Bundan dolayı size mülakat esnasında düşüncelerinizi anlamaya yönelik ek sorular soracağım.
- ❖ Görüşme süresince mümkün olduğunca sesli düşünmeniz önemlidir.
- ❖ Soruların çözümünde istediğiniz materyali kullanabilirsiniz.
- ❖ Başlamadan önce sormak istediğiniz herhangi bir şey var mı?

Katılımınız için şimdiden çok teşekkür ederim.

Mülakat sırasında öğrenciler problemleri çözerken aşağıdaki sorular sorulacaktır. Bunların yanında gerekli görülmesi halinde ek sorular da sorulabilir.

1. Problemden ne anladın?
2. Çözüm için nasıl bir yol izlenebilir?
3. Yaptığın çözümü açıklar mısın?
4. Niçin böyle bir yol tercih ettin?
5. Problemi çözerken neden bir görsel kullandın/kullanmadın?
6. Bu problem, farklı olarak nasıl çözülebilir?

