

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİPOLAR ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜREKLİLİK

CAN METİN

KOCAELİ 2022

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİPOLAR ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜREKLİLİK

CAN METİN

Prof. Dr. Çiğdem GÜNDÜZ ARAS

Danışman, Kocaeli Üniversitesi

.....

Prof. Dr. Ahu AÇIKGÖZ

Jüri Üyesi, Balıkesir Üniversitesi

.....

Doç. Dr. Arzu COŞKUN

Jüri Üyesi, Kocaeli Üniversitesi

.....

Tezin Savunulduğu Tarih: 15.06.2022

ETİK BEYAN VE ARAŞTIRMA FONU DESTEĞİ

Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez/proje çalışmada,

- Bu tezin/projenin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu,
- Çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı,
- Bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi,
- Bu çalışmanın Kocaeli Üniversitesi'nin abone olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun olduğunu, - Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Tezin/Projenin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez/proje çalışması olarak sunmadığımı,

beyan ederim.

X Bu tez/proje çalışmasının herhangi bir aşaması hiçbir kurum/kuruluş tarafından maddi/alt yapı desteği ile desteklenmemiştir.

☐ Bu tez/proje çalışması kapsamında üretilen veri ve bilgiler tarafından no'lu proje kapsamında maddi/alt yapı desteği alınarak gerçekleştirilmiştir.

Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Can METİN

YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI

Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/projemin tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda belirtilen koşullarla kullanıma açma izninin Kocaeli Üniversitesi'ne verdiğimi beyan ederim. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin/projemin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanımı bana ait olacaktır.

Tezin/projenin kendi özgün çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin/projenin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim kurulu tarafından yayınlanan **“Lisanüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge”** kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricinde YÖK Ulusal Tez Merkezi/ Kocaeli Üniversitesi Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

- ☐ Enstitü yönetim kurulu kararı ile tezimin/projemin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 2 yıl ertelenmiştir.
- ☒ Enstitü yönetim kurulu gerekçeli kararı ile tezimin/projemin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 6 ay ertelenmiştir.
- ☐ Tezim/projem ile ilgili gizlilik kararı verilmemiştir.

Can METİN

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bilimin mühendislik, tıp, sosyal bilimler gibi pek çok dalındaki problemler karar verme odaklı problemlerdir. Bu tip problemlerin çözümü için bir çok teori ortaya atılmıştır. Bipolar esnek kümeler teorisi de bunlardan biridir. 2013 yılında M. Shabir ve M. Naz tarafından ortaya atılan teori, araştırmacıların ilgisini çekmiş ve matematiğin pek çok alanında uygulaması yapılmıştır. Bu teorinin pek çok uygulama alanı olduğu için topoloji alanında da geniş şekilde çalışılmıştır.

Yüksek lisans öğrenimim süresince, pandemi sürecinin getirdiği türlü zorluklara rağmen benden hiçbir yardımını esirgemeyen, çalışmalarında bana hep destek olan, yol gösteren hocam sayın Prof. Dr. Çiğdem GÜNDÜZ ARAS' a sonsuz teşekkürü bir borç bilir ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca bu günlerde maddi manevi desteklerini sürekli üzerimde hissettiğim aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

Mayıs- 2022

Can METİN



İÇİNDEKİLER

ETİK BEYAN VE ARAŞTIRMA FONU DESTEĞİ.....	i
YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI.....	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. ESNEK KÜMELER.....	5
3. BİPOLAR ESNEK KÜMELER.....	14
4. BİPOLAR ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR.....	24
4.1. Bipolar Esnek Topolojik Uzaylar.....	24
4.2. Bipolar Esnek Topolojik Uzaylarda Komşuluk Özellikleri.....	32
5. BİPOLAR ESNEK DÖNÜŞÜMLER.....	34
6. BİPOLAR ESNEK SÜREKLİ DÖNÜŞÜMLER.....	52
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	66
KAYNAKLAR.....	67
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER.....	70
ÖZGEÇMİŞ.....	71

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

(F, E)	: Esnek küme
$(X, \tilde{\tau}, \tilde{E})$	: Bipolar esnek topolojik uzay.
$(F, E)^c$	: Esnek kümenin esnek tümleyeni.
$F_{\tilde{E}}$	: Bipolar esnek kümenin bipolar esnek kapanışı.
$F_{\tilde{E}}^o$	: Bipolar esnek kümenin bipolar esnek içi.
$\tilde{X}_{\tilde{E}}$	: Bipolar esnek evrensel küme.
$\setminus$	: Esnek fark operatörü.
$\tilde{\cap}$	: Esnek kesişim.
$\tilde{\cup}$	: Esnek birleşim.
$\subseteq$	: Esnek alt küme.
$\supseteq$	: Esnek üst küme.
$\Phi_{\tilde{E}}$	: Bipolar esnek boş küme.
$F_{\tilde{E}}$	: Bipolar esnek küme.
$F_{\tilde{E}}^c$	: Bipolar esnek kümenin bipolar esnek tümleyeni.
$\tilde{X}$	: Esnek evrensel küme.
x_e^y	: Bipolar esnek nokta
$\psi_{f\varphi\vartheta}$	: Bipolar esnek dönüşüm.
$\forall$	: Evrensel niceleyici, her.
$\exists$	: Varlıksal niceleyici, en az bir.
$\notin$	: Elemanı değildir.
$\in$	: Elemanıdır.
$\cong$	: Esnek eşittir.
$\neg E$	: Değil kümesi.
Φ	: Esnek boş küme.
E	: Parametre kümesi.
$P(X)$	: Evrensel kümenin güç kümesi.
$U(x_e^y)$	: Bipolar esnek noktanın bipolar esnek komşuluk ailesi.
X	: Evrensel küme.

BİPOLAR ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜREKLİLİK

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, esnek küme tanımı verilerek, sonraki bölümler için temel teşkil edecek olan temel özellikleri incelenmiştir.

İkinci bölümde, bipolar esnek küme tanımı ve bu kümeler üzerindeki temel işlemler, verilerek, bu kavramlar örneklerle ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, bipolar esnek topolojik uzay, bipolar esnek iç, bipolar esnek kapanış ve bipolar esnek komşuluk tanımları verilerek bu kavramların özellikleri detaylı olarak incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, bipolar esnek dönüşüm tanımı verilmiş ve bu dönüşüm altında bipolar esnek kümenin görüntü ve ters görüntü kavramları ele alınmıştır.

Beşinci bölümde bipolar esnek sürekli dönüşüm kavramı tanımlanmış ve sürekliliği karakterize eden teoremler ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu bölümde ayrıca bipolar esnek açık dönüşümler, bipolar esnek kapalı dönüşümler ve bipolar esnek homeomorfizma kavramı tanıtılıp, bunların özellikleri örneklerle incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bipolar Esnek Açık Dönüşüm, Bipolar Esnek Kapalı Dönüşüm, Bipolar Esnek Küme, Bipolar Esnek Sürekli Dönüşüm.

CONTINUITY ON BIPOLAR SOFT TOPOLOGICAL SPACES

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, the definition of soft set is given and its basic properties, which will be the basis for the next chapters, are examined.

In the second chapter, the definition of bipolar soft set and basic operations on these sets are given and these concepts are discussed with examples.

In the third chapter, the definitions of bipolar soft topological space, bipolar soft interior, bipolar soft closure and bipolar soft neighborhood are given and the properties of these concepts are examined in detail.

In the fourth chapter, the definition of bipolar soft mapping is given and bipolar soft image and inverse image of bipolar soft sets are discussed.

In the fifth chapter, the concept of bipolar soft continuous mapping is defined and the theorems characterizing the continuity are examined in detail. In this section, the concepts of bipolar soft open mapping, bipolar soft closed mapping and bipolar soft homeomorphism are introduced and their properties are examined with examples.

Keywords: Bipolar Soft Open Mapping, Bipolar Soft Closed Mapping, Bipolar Soft Set, Bipolar Soft Continuous Mapping.

1.GİRİŞ

Mühendislik, sosyal bilimler ve tıp gibi bir çok bilim dalında karşılaşılan problemlerin içerdiği belirsizliklerin kaynağı, problemlerin karar verme ile ilgili olmasından dolayıdır. Bu belirsizlikleri çözmek için geçmişten günümüze kadar bir çok bilim insanı tarafından pek çok farklı teoriler geliştirilmiştir. Bunlardan bazıları; olasılık teorisi, bulanık (fuzzy) küme teorisi, sezgisel bulanık kümeler teorisi, yaklaşımlı (rough) kümeler teorisi olarak bilinen teorilerdir.

Geliştirilen bu teorilerin içerisinde en önemli olanı, 1965 yılında Azerbaycanlı matematikçi L. Zadeh tarafından geliştirilen “Bulanık (Fuzzy) küme teorisi” dir. Genel olarak bu teori, verilen bir klasik kümenin tüm elemanlarını $[0,1]$ kapalı aralığındaki bir reel sayıya eşleyen bir dönüşüm ile tanımlanmıştır. Bu dönüşüme, o elemanın üyelik fonksiyonu (membership function) adı verilir. Verilen bir A kümesindeki herhangi bir x elemanı için bu elemanı eşlediği $x \in [0,1]$ sayısına da x elemanının A kümesine üyelik(aidiyet) derecesi denir. Bu teorinin klasik mantık teorisine de katkısı büyüktür. Bilindiği gibi klasik mantık teorisine göre verilen bir önermenin doğru (1) ve yanlış (0) olmak üzere iki adet doğruluk değeri vardır. Ancak bulanık mantık teorisine göre verilen bir önermenin doğruluk değeri $[0-1]$ aralığındaki herhangi bir reel sayıya eşit olabilir. Bu da 2 değerli mantıktan sonsuz değerli mantığa geçiş aşamasında büyük bir adım teşkil etmektedir.

Bu teori matematiğin ve mühendisliğin pek çok alanına uygulanabilir olmasına karşın kendine has pek çok zorluk içermektedir. Teorinin anahtarı görevini gören üyelik fonksiyonunu oluşturmak her zaman basit olamayabilir.

1999 yılında, Rus matematikçi D. Molodtsov tarafından, tüm bu belirsizliklerin üstesinden gelebilmek için “Esnek kümeler teorisi” adında yeni bir teori ortaya atılmıştır. Molodtsov, bu teoriyi geliştirirken bulanık ve sezgisel bulanık kümeler teorisindeki gibi reel değerli üyelik fonksiyonlarını kullanmayı tercih etmemiş, bunun yerine parametreler aracılığı ile tanımladığı bir seçim fonksiyonunu ortaya koyarak bunu kullanmıştır.

Esnek kümeler teorisi, son yıllarda pek çok araştırmacı tarafından ilgi gören, üzerine pek çok alanda araştırmalar yapılan, bununla birlikte pek çok gelişme gösteren güncel bir konudur.

D. Molodtsov, 1999 yılında esnek kümeler teorisini matematikte Perron integrasyonu, Riemann integrasyonu, sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, oyun teorisi, olasılık gibi bir çok alana uygulandığını gösteren bir çalışma yayınlamıştır.

Molodtsov'un bu çalışmayı yayınlamasının peşinden bir çok araştırmacı da bu konu üzerine çalışmalar yapmış, bu teori hem teorik açıdan, hem de uygulamaları açısından pek çok alanda hız kazanmıştır.

Maji ve arkadaşları 2002 ve 2003 yıllarında yayınlamış olduğu çalışmalarda klasik küme teorisindeki temel işlemlerin (kesişim, birleşim, fark, tümleyen vb...) esnek kümelerdeki uygulamalarını yapmış ve esnek kümelerdeki parametrelerin yardımı ile bu teoriyi bir karar verme problemine uygulamışlardır.

Ali ve arkadaşları, 2009 yılında yayınladıkları çalışmada, esnek kümelerdeki esnek birleşim ve esnek kesişim işlemlerini yeniden tanımlamışlardır.

Çağman ve Enginoğlu ve arkadaşları 2010 ve 2011'de yayınladığı çalışmalarda, bilgi sistemlerindeki esnek bilgi tabanı ile ilgili esnek matris teorisini kurarak optimizasyon problemlerinde karar verme algoritmasını esnek küme teorisi yardımıyla yapmaya çalışmıştır.

Gündüz (Aras) ve arkadaşları, 2016 yılında yayınladığı bir çalışmada, Ali ve arkadaşlarının 2009 yılında tanımladığı işlemleri olasılıklı esnek kümelere taşımışlardır.

Esnek kümeler teorisi matematiğin pek çok teorik ve uygulamalı alanlarına da uygulanmıştır. Teorik alandaki ilk çalışmalar cebir alanında olup fonksiyonel analiz konularına da uyarlanmıştır. 2011 yılında ilk kez Shabir ve Naz tarafından bu teori topoloji alanında uygulanmıştır.

Shabir ve Naz, 2011 yılında yayınladıkları bir çalışmada esnek topolojik uzaylar tanımlanmış ve klasik kümelerde tanımlanan pek çok topolojik özellik esnek kümelere uyarlanmıştır. Shabir ve Naz, bu çalışmada esnek açık kümeler, esnek kapalı kümeler,

esnek komşuluk, esnek ayırma aksiyomları gibi topolojinin çok önemli konularını esnek kümelerle taşımışlardır. Özellikle esnek nokta tanımı pek çok araştırmacı tarafından çok farklı yaklaşımlar ile tanımlanmıştır.

Gündüz (Aras) ve arkadaşları, 2017 yılında yayınladığı çalışmada esnek topolojik uzaylar üzerindeki esnek açık, esnek kapalı dönüşüm ve esnek homeomorfizmaları tanımlamışlardır.

2013 yılında Shabir ve Naz, esnek küme teorisindeki parametrelere ek olarak negatif (değil) parametrelerini de ekleyerek esnek kümelerin genişletilmiş hali olan bipolar esnek kümeleri tanımlamış, esnek kümelerdeki temel tanım ve işlemleri bipolar esnek kümelerle uyarlamış ve bipolar esnek kümeler teorisini bir karar verme problemine uygulamışlardır.

Aslam ve arkadaşları 2014 yılında yayınladıkları çalışmada bipolar bulanık kümeler ve esnek kümeleri birleştirerek bipolar bulanık esnek kümeleri tanımlamışlardır. Shabir ve Naz 2013 yılında yayınladıkları çalışmada bipolar bulanık esnek kümeler üzerinde cebirsel yapıları tanımlamışlardır.

Hayat ve arkadaşları, 2015 yılında yayınladıkları çalışmada bipolar esnek kümeleri hemiring yapısına uygulamışlardır.

Karaaslan ve Karataş, 2015 yılında yayınladıkları çalışma ile bipolar esnek kümeler ve üzerindeki işlemleri, Shabir ve Naz'ın tanımlarından daha işlevsel olarak yeniden tanımlamışlardır.

Bipolar esnek kümeler teorisinin topolojik alana ilk uygulaması 2017 yılında Shabir ve Bakhtawar tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada bipolar esnek topoloji tanımı verilmiş ve bipolar esnek topolojik uzaylarda kompaktlık, bağlantılılık ve bağlantısızlık kavramları ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

2018 yılında Öztürk tarafından yayınlanan çalışmada bipolar esnek topolojik uzay tanımı verilmiş, bipolar esnek topolojik uzayda bipolar esnek iç, bipolar esnek kapanış tanımları ele alınarak bunların özellikleri incelenmiş ve daha sonra bipolar esnek alt uzay ve bipolar esnek taban tanımları verilip özellikleri incelenmiştir.

2020 yılında Öztürk tarafından yayınlanan çalışmada, bipolar esnek nokta tanımı verilip, bipolar esnek nokta yardımı ile bipolar esnek iç nokta, bipolar esnek kapanış noktası, bipolar esnek limit noktası tanımları ele alınmış ve özellikleri incelenmiştir. Bipolar esnek nokta yardımı ile bipolar esnek taban tanımı tekrardan verilmiştir.

2021 yılında Fadel ve Dzul Kifli tarafından yayınlanan çalışmada, bipolar esnek fonksiyon tanımı verilmiş, bir dönüşümün bipolar esnek dönüşüm olması için gereken şartlar, bipolar esnek dönüşümün bipolar esnek bire bir ve bipolar esnek örten olması için gereken şartlar tanıtılmış ve daha sonrasında bir bipolar esnek kümenin bipolar esnek dönüşüm altındaki görüntüsü ve ters görüntüsü tanımı verilip, özellikleri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, esnek kümelerin tanımı verilip, sonraki bölümler için temel teşkil edecek olan temel özellikleri incelenmiştir.

İkinci bölümde, bipolar esnek kümelerin tanımı, temel işlemler, bipolar esnek nokta ve bipolar esnek dönüşüm tanımı verilip örneklerle ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, bipolar esnek topolojik uzayların tanımı verilip temel özellikleri örneklerle incelenmiş ve bipolar esnek iç, bipolar esnek kapanış ve bipolar esnek komşuluk tanımları verilmiştir.

Dördüncü bölümde, bipolar esnek dönüşüm tanımı verilmiş ve bu dönüşüm altında bipolar esnek kümenin görüntü ve ters görüntü kavramları ele alınmıştır.

Beşinci bölümde bipolar esnek sürekli dönüşüm kavramı tanımlanmış ve sürekliliği karakterize eden teoremler ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu bölümde ayrıca bipolar esnek açık dönüşümler, bipolar esnek kapalı dönüşümler ve bipolar esnek homeomorfizma kavramı tanıtılıp, bunların özellikleri örneklerle incelenmiştir.

2.ESNEK KÜMELER

Bu bölümde esnek küme tanımı verilerek, esnek küme teorisi üzerindeki temel bilgiler tezin diğer bölümlerinde de kullanılacağından ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır. Tezin tamamında kullanılan X evrensel kümeyi, E parametre kümesini, $P(X)$ de X evrensel kümesinin kuvvet kümesini ifade etmektedir.

Tanım 2.1. X evrensel küme, E parametrelerin boştan farklı bir kümesi olmak üzere $F:E \rightarrow P(X)$ şeklinde tanımlanan küme değerli fonksiyona X üzerinde bir esnek küme denir ve F_E şeklinde gösterilir. (Molodtsov,1999.)

Diğer bir ifadeyle, X üzerinde tanımlanan bir esnek küme, bu evrensel kümenin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir ailesini verir ve

$$F_E = \{(e, F(e)): e \in E\}$$

şeklinde gösterilir.

X üzerinde E parametre kümesine göre tanımlanan tüm esnek kümelerin ailesi $S(X_E)$ ile gösterilecektir.

Uyarı 2.1. Eğer $A \subseteq E$ parametre kümesi $e \in E \setminus A$ için $F(e) = \emptyset$ ise o zaman F_E esnek kümesi F_A şeklinde gösterilir.

Örnek 2.1. Bir ailenin almak istediği evlerin kümesi $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, alacağı evlerin özellikleri ise ‘işlevsellik’, ‘sağlamlık’, ‘güzellik’, ‘enerji etkin yapı olması’, ‘esneklik’ şeklinde parametreler kümesini oluştursun. Parametre kümesinin elemanları $e_i, 1 \leq i \leq 5$, şeklinde gösterilirse $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ olur.

Farzedelim ki,

$$F(e_1) = \{x_2, x_4\}$$

$$F(e_2) = \{x_1, x_3\}$$

$$F(e_3) = \{x_1, x_3, x_5\}$$

$$F(e_4)=X$$

$$F(e_5)=\emptyset$$

olarak kabul edilirse, F_E esnek kümesi

$$F_E = \{(e_1, \{x_2, x_4\}), (e_2, \{x_1, x_3\}), (e_3, \{x_1, x_3, x_5\}), (e_4, X)\}$$

biçiminde yazılır. Burada $F(e_1)$ ‘işlevsel evler’ anlamındadır ve fonksiyonel değeri $\{x_2, x_4\}$ kümesidir.

Uyarı 2.2. Örnek 1.1. de $F(e_5)=\emptyset$ olması X in elemanlarının hiçbirinin E parametre kümesinin elemanları ile ilişkili olmadığı anlamına geldiğinden bu durum F_E esnek kümesinde gösterilmemiştir.

Tanım 2.2. $F_E, G_E \in S(X_E)$ olsun. Eğer $\forall e \in E$ için $F(e) \subseteq G(e)$ ise; F_E esnek kümesine G_E esnek kümesinin ‘esnek altkümesi’ denir ve $F_E \subseteq G_E$ şeklinde gösterilir. (Ali ve diğ., 2009.)

Örnek 2.2. $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ evrensel küme ve $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametrelerin kümesi olsun. F_E ve G_E esnek kümeleri,

$$F_E = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1, x_4\}), (e_3, \{x_6\}), (e_4, \{x_5\})\},$$

$$G_E = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_4\}), (e_3, \{x_5, x_6\}), (e_4, X)\}$$

şeklinde verilsin. $\forall e \in E$ için $F(e) \subseteq G(e)$ koşulu sağlandığından F_E esnek kümesi G_E esnek kümesinin esnek altkümesidir.

Uyarı 2.3. Klasik alt küme tanımından farklı olarak; $F_E \subseteq G_E$ olması için, F_E esnek kümesinin her elemanının F_E esnek kümesinin bir elemanı olması gerekmez. (Enginoğlu, 2010.)

Örnek 2.3. $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ evrensel küme ve $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametrelerin kümesi olsun. F_E ve G_E esnek kümeleri,

$$F_E = \{(e_1, \{x_1, x_3\}), (e_2, \{x_1, x_5\}), (e_3, \{x_3, x_6\}), (e_4, \{x_1, x_4\})\},$$

$$G_E = \{(e_1, \{x_1, x_3, x_4\}), (e_2, \{x_1, x_5\}), (e_3, \{x_3, x_6\}), (e_4, \{x_1, x_4\})\}$$

şeklinde tanımlanırsa, $(e_1, F(e_1)) \in F_E$ iken $(e_1, F(e_1)) \notin G_E$ dir.

Tanım 2.3. $F_E, G_E \in S(X_E)$ olsun. Eğer $F_E \cong G_E$ ve $G_E \cong F_E$ sağlanıyorsa, F_E ve G_E esnek kümelerine “esnek eşit kümeler” denir ve $F_E \cong G_E$ şeklinde gösterilir. (Ali ve diğ., 2009.)

Tanım 2.4. $F_E \in S(X_E)$ olsun. Eğer $\forall e \in E$ için $F(e) = \emptyset$ ise F_E esnek kümesine, “esnek boş küme” denir Φ veya Φ_E ile gösterilir. (Maji, Biswas, Roy., 2003.)

Tanım 2.5. $F_E \in S(X_E)$ olsun. Eğer $\forall e \in E$ için $F(e) = X$ ise F_E esnek kümesine, “esnek evrensel küme” denir ve $\tilde{X}$ ile gösterilir. (Maji, Biswas, Roy., 2003.)

Tanım 2.6. $F_E, G_E \in S(X_E)$ olsun. F_E ve G_E esnek kümelerinin “esnek birleşimi” $\forall e \in E$ için $H(e) = F(e) \cup G(e)$ ile tanımlanan H_E esnek kümesidir ve $F_E \cup G_E \cong H_E$ şeklinde gösterilir. (Ali ve diğ., 2009.)

Tanım 2.7. $F_E, G_E \in S(X_E)$ olsun. F_E ve G_E esnek kümelerinin “esnek arakesiti” $\forall e \in E$ için $K(e) = F(e) \cap G(e)$ ile tanımlanan K_E esnek kümesidir ve $F_E \cap G_E \cong K_E$ şeklinde gösterilir. (Ali ve diğ., 2009.)

Uyarı 2.4. İki esnek kümenin birleşimi ya da kesişiminde bulunan ikililer, bu esnek kümelere ait olmayabilir.

Örnek 2.4. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evrensel küme ve $E = \{e_1, e_2\}$ parametrelerin kümesi olsun. F_E ve G_E esnek kümeleri,

$$F_E \cong \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_3\})\},$$

$$G_E \cong \{(e_1, \{x_1, x_3\}), (e_2, \{x_2\})\}$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$F_E \cup G_E \cong \{(e_1, X), (e_2, \{x_2, x_3\})\},$$

$$F_E \cap G_E \cong \{(e_1, \{x_3\})\}.$$

Açıktır ki, (e_1, X) , $(e_2, \{x_2, x_3\})$ ve $(e_1, \{x_3\})$ ikilileri hem (F, E) hem de (G, E) esnek kümelerine ait değildir.

Tanım 2.8. $F_E, G_E \in S(X_E)$ olsun. $\forall e \in E$ için $H(e) = F(e) \setminus G(e)$ şeklinde tanımlanan H_E esnek kümesine F_E ve G_E esnek kümelerinin ‘’ esnek farkı’’ denir ve $H_E = F_E \setminus G_E$ ile gösterilir. (Shabir ve Naz, 2011.)

Örnek 2.5. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ evrensel küme ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametrelerin kümesi ve F_E ve G_E esnek kümeleri,

$$F_E \cong \{(e_1, \{x_3, x_4\}), (e_3, X), (e_4, \{x_2, x_3, x_5\})\},$$

$$G_E \cong \{(e_1, \{x_3\}), (e_3, \{x_1, x_2\}), (e_4, \{x_4\})\}$$

şeklinde ise,

$$F_E \setminus G_E \cong \{(e_1, \{x_4\}), (e_3, \{x_3, x_4, x_5, x_6\}), (e_4, \{x_2, x_3, x_5\})\}$$

olarak elde edilir.

Tanım 2.9. $F_E \in S(X_E)$ olsun. F_E esnek kümesinin esnek tümleyeni $F_E^c \cong F_E^c$ esnek kümesidir. Burada $F^c: E \rightarrow P(X)$, her $e \in E$ için $F^c(e) = X \setminus F(e)$ şeklinde verilen bir dönüşümdür. (Shabir ve Naz, 2011.)

Uyarı 2.5. Esnek tümleyen tanımından $\tilde{X}^c = \emptyset$ ve $\Phi^c = \tilde{X}$ olduğu açıktır.

Örnek 2.6. Örnek 1.1. de verilen (F, E) esnek kümesi için,

$$(F, E)^c = \{(e_1, \{x_1, x_3, x_5, x_6\}), (e_2, \{x_2, x_4, x_5, x_6\}), (e_3, \{x_2, x_4, x_6\}), (e_5, X)\}.$$

Önerme 2.1. $F_E \in S(X_E)$ olsun. O zaman F_E esnek kümesi için aşağıdaki eşitlikler sağlanır: (Çağman ve Enginoğlu, 2010.)

$$(1) F_E \cup F_E \cong F_E,$$

$$(2) F_E \cup \Phi_E \cong F_E,$$

$$(3) F_E \cup \tilde{X}_E \cong \tilde{X}_E,$$

$$(4) F_E \tilde{\cup} F_E^c \cong \tilde{X}_E.$$

Kanıt. $F_E \in S(X_E)$ olsun. Bu durumda;

$$(1) \text{ Her } e \in E \text{ için, } F(e) \cup F(e) = F(e) \text{ olduğundan } F_E \tilde{\cup} F_E \cong F_E \text{ sağlanır.}$$

$$(2) \text{ Her } e \in E \text{ için, } F(e) \cup \Phi(e) = F(e) \text{ olduğundan } F_E \tilde{\cup} \Phi_E \cong F_E \text{ sağlanır.}$$

$$(3) \text{ Her } e \in E \text{ için, } F(e) \cup \tilde{X}(e) = \tilde{X}(e) \text{ olduğundan } F_E \tilde{\cup} \tilde{X}_E \cong \tilde{X}_E \text{ sağlanır.}$$

$$(4) \text{ Her } e \in E \text{ için, } F(e) \cup (F(e))^c = F(e) \cup (X \setminus F(e)) = X \text{ olduğundan } F_E \tilde{\cup} F_E^c \cong \tilde{X}_E \text{ sağlanır.}$$

Önerme 2.2. $F_E \in S(X_E)$ olsun. O zaman F_E esnek kümesi için aşağıdaki eşitlikler sağlanır: (Çağman ve Enginoğlu, 2010.)

$$(1) F_E \tilde{\cap} F_E \cong F_E,$$

$$(2) F_E \tilde{\cap} \Phi_E \cong \Phi_E,$$

$$(3) F_E \tilde{\cap} \tilde{X}_E \cong F_E,$$

$$(4) F_E \tilde{\cap} F_E^c \cong \Phi_E.$$

Kanıt. $F_E \in S(X_E)$ olsun. Bu durumda,

$$(1) \text{ Her } e \in E \text{ için, } F(e) \cap F(e) = F(e) \text{ olduğundan } F_E \tilde{\cap} F_E \cong F_E \text{ sağlanır.}$$

$$(2) \text{ Her } e \in E \text{ için, } F(e) \cap \Phi(e) = \Phi(e) \text{ olduğundan } F_E \tilde{\cap} \Phi_E \cong \Phi_E \text{ sağlanır.}$$

$$(3) \text{ Her } e \in E \text{ için, } F(e) \cap \tilde{X}(e) = F(e) \text{ olduğundan } F_E \tilde{\cap} \tilde{X}_E \cong F_E \text{ sağlanır.}$$

$$(4) \text{ Her } e \in E \text{ için, } F(e) \cap (F(e))^c = F(e) \cap (X \setminus F(e)) = \emptyset \text{ olduğundan } F_E \tilde{\cap} F_E^c \cong \Phi_E \text{ sağlanır.}$$

Önerme 2.3. $F_E, G_E, H_E \in S(X_E)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır: (Çağman ve Enginoğlu, 2010.)

$$(1) F_E \cup (G_E \cap H_E) = (F_E \cup G_E) \cap (F_E \cup H_E)$$

$$(2) F_E \cap (G_E \cup H_E) = (F_E \cap G_E) \cup (F_E \cap H_E)$$

Kanıt. $F_E, G_E, H_E \in S(X_E)$ olsun. Bu durumda

(1) Kümelerde birleşme işleminin kesişim işlemi üzerine dağılma özelliğinden dolayı her $e \in E$ için,

$$F(e) \cup (G(e) \cap H(e)) = (F(e) \cup G(e)) \cap (F(e) \cup H(e))$$

sağlanır. Buradan,

$$F_E \cup (G_E \cap H_E) = (F_E \cup G_E) \cap (F_E \cup H_E)$$

elde edilir.

(2) Kümelerde kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine dağılma özelliğinden dolayı her $e \in E$ için,

$$F(e) \cap (G(e) \cup H(e)) = (F(e) \cap G(e)) \cup (F(e) \cap H(e))$$

sağlanır. Buradan,

$$F_E \cap (G_E \cup H_E) = (F_E \cap G_E) \cup (F_E \cap H_E)$$

elde edilir.

Önerme 2.4. $F_E, G_E \in S(X_E)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır: (Çağman ve Enginoğlu, 2010.)

$$(1) (F_E \cup G_E)^c \cong F_E^c \cap G_E^c$$

$$(2) (F_E \cap G_E)^c \cong F_E^c \cup G_E^c$$

Kanıt. $F_E, G_E \in S(X_E)$ olsun.

(1) $F_E \cup G_E \cong H_E$ olsun. Her $e \in E$ için,

$$H(e) = F(e) \cup G(e)$$

dir. Kümeler teorisindeki De Morgan kuralından dolayı,

$$(H(e))^c = (F(e) \cup G(e))^c$$

$$(H(e))^c = (F(e))^c \cap (G(e))^c$$

sağlanır. Buradan,

$$H_E^c \cong F_E^c \tilde{\cap} G_E^c$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$(F_E \tilde{\cup} G_E)^c \cong F_E^c \tilde{\cap} G_E^c.$$

(2) $F_E \tilde{\cap} G_E \cong H_E$ olsun. Her $e \in E$ için,

$$H(e) = F(e) \cap G(e)$$

dir. Kümeler teorisindeki De Morgan kuralından dolayı,

$$(H(e))^c = (F(e) \cap G(e))^c$$

$$(H(e))^c = (F(e))^c \cup (G(e))^c$$

sağlanır. Buradan,

$$H_E^c \cong F_E^c \tilde{\cup} G_E^c$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$(F_E \tilde{\cap} G_E)^c \cong F_E^c \tilde{\cup} G_E^c.$$

Önerme 2.5. $F_E, G_E, H_E \in S(X_E)$ olsun Bu durumda,

$$(F_E \tilde{\cup} G_E) \tilde{\setminus} H_E \cong (F_E \tilde{\setminus} H_E) \tilde{\cup} (G_E \tilde{\setminus} H_E)$$

eşitliği sağlanır (Çağman ve Enginoğlu, 2010.).

Kanıt. Her $e \in E$ için küme teorisinde

$$(F(e) \cup G(e)) \setminus H(e) = (F(e) \setminus H(e)) \cup (G(e) \setminus H(e))$$

eşitliği sağlandığından

$$(F_E \cup G_E) \setminus H_E \cong (F_E \setminus H_E) \cup (G_E \setminus H_E)$$

elde edilir.

Tanım 2.10. X evrensel küme, E parametreler kümesi ve $i \in I$ olmak üzere $\mathfrak{R} = \{F_{i_E} : i \in I\}$ esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu durumda, keyfi sayıdaki esnek kümenin esnek birleşimi, her $e \in E$ için $H(e) = \bigcup_{i \in I} F_i(e)$ şeklinde tanımlanan $H_E \cong \bigcup_{i \in I} F_{i_E}$ esnek kümesidir. (Zorlutuna ve diğ., 2012.)

Tanım 2.11. X evrensel küme, E parametreler kümesi ve $i \in I$ olmak üzere $\mathfrak{R} = \{F_{i_E} : i \in I\}$ esnek kümelerin bir ailesi olsun. O halde, keyfi sayıdaki esnek kümenin esnek arakesiti, her $e \in E$ için $M(e) = \bigcap_{i \in I} F_i(e)$ şeklinde tanımlan $M_E \cong \bigcap_{i \in I} F_{i_E}$ esnek kümesidir. (Zorlutuna ve diğ., 2012.)

Önerme 2.6. X evrensel küme, E parametreler kümesi ve $\mathfrak{R} = \{F_{i_E} : i \in I\}$ ailesi X üzerinde tanımlanmış esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu durumda,

$$(1) \left(\bigcap_{i \in I} F_{i_E} \right)^c \cong \bigcup_{i \in I} (F_{i_E})^c$$

$$(2) \left(\bigcup_{i \in I} F_{i_E} \right)^c \cong \bigcap_{i \in I} (F_{i_E})^c$$

eşitlikleri sağlanır. (Zorlutuna ve ark., 2012.)

Kanıt. $\{(F_i, E) : i \in I\}$ ailesi X üzerinde tanımlanmış esnek kümelerin bir ailesi olsun.

(1) Her $e \in E$ için, $\left(\bigcap_{i \in I} F_i(e)\right)^c = \bigcup_{i \in I} F_i^c(e)$ olduğundan, $(\bigcap_{i \in I} F_{i_E})^c \cong \bigcup_{i \in I} (F_{i_E})^c$ elde edilir.

(2) Her $e \in E$ için, $\left(\bigcup_{i \in I} F_i(e)\right)^c = \bigcap_{i \in I} F_i^c(e)$ olduğundan, $(\bigcup_{i \in I} F_{i_E})^c \cong \bigcap_{i \in I} (F_{i_E})^c$ elde edilir.



3.BİPOLAR ESNEK KÜMELER

Bu bölümde bipolar esnek küme tanımı verilerek bu küme üzerindeki işlemler ve bu işlemlerin temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.1. X evrensel küme, $E = \{e_i: i = 1, 2, \dots, n\}$ parametrelerin bir kümesi olsun. Bu durumda $\neg E = \{\neg e_i: i = 1, 2, \dots, n\}$ şeklinde tanımlanan kümeye E kümesinin değil kümesi adı verilir. Burada $\neg e_i$, her i için e_i parametresinin değiline eşittir. (Maji, Biswas ve Roy, 2003.)

Tanım 3.2. X evrensel küme, $\tilde{E} = E \cup \neg E$ parametrelerin kümesi olsun. $F: \tilde{E} \rightarrow P(X)$ giden bir dönüşüm olmak üzere $\forall e \in E$ için $F(e) \cap F(\neg e) = \emptyset$ koşulu sağlayan $(F, \tilde{E})$ ikilisine X üzerinde tanımlı bir bipolar esnek küme denir (Shabir ve Naz, 2013.)

Çalışma boyunca, X üzerindeki bir bipolar esnek küme $(F, \tilde{E})$ ikilisi yerine $F_{\tilde{E}}$ şeklinde, X üzerinde E parametrelerine göre tanımlı olan tüm bipolar esnek kümelerin ailesi ise $BS(X_{\tilde{E}})$ ile gösterilecektir. $F_{\tilde{E}} \in BS(X_{\tilde{E}})$ bipolar esnek kümesi,

$$F_{\tilde{E}} = \{(e_i, F(e_i), F(\neg e_i)): e_i \in E\}$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 3.1. Bir ailenin almak istediği evlerin kümesi $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, alacağı evlerin özellikleri ise ‘işlevsellik’, ‘sağlamlık’, ‘güzellik’, ‘enerji etkin yapı olması’, ‘esneklik’ şeklinde parametreler kümesini oluştursun. Parametre kümesinin elemanları $e_i, 1 \leq i \leq 5$, şeklinde gösterilirse $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ ve $\neg E = \{\neg e_1, \neg e_2, \neg e_3, \neg e_4, \neg e_5\}$ olur.

Farzedelim ki,

$$F(e_1) = \{x_2, x_4\}, F(\neg e_1) = \{x_1, x_3\}$$

$$F(e_2) = \{x_1, x_3\}, F(\neg e_2) = \{x_4, x_5\}$$

$$F(e_3) = \{x_1, x_3, x_5\}, F(\neg e_3) = \{x_2, x_6\}$$

$$F(e_4) = X, F(\neg e_4) = \emptyset$$

$$F(e_5) = \emptyset, F(\neg e_5) = \{x_1, x_3\}$$

olarak kabul edilirse, $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesi

$$F_{\tilde{E}}$$

$$= \{(e_1, \{x_2, x_4\}, \{x_1, x_3\}), (e_2, \{x_1, x_3\}, \{x_4, x_5\}), (e_3, \{x_1, x_3, x_5\}, \{x_2, x_6\}), (e_4, X, \emptyset), (e_5, \emptyset, \{x_1, x_3\})\}$$

biçiminde yazılır.

Tanım 3.3. $F_{\tilde{E}}, G_{\tilde{E}} \in BS(X_{\tilde{E}})$ olsun. Eğer,

$$\forall e \in E \text{ için } F(e) \subset G(e) \text{ ve } \forall \neg e \in \neg E \text{ için } G(\neg e) \subset F(\neg e)$$

koşulları sağlanıyorsa, $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesine $G_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesinin bipolar esnek alt kümesi denir ve $F_{\tilde{E}} \subseteq G_{\tilde{E}}$ şeklinde gösterilir. (Shabir ve Naz, 2013.)

Tanım 3.4. $F_{\tilde{E}}, G_{\tilde{E}} \in BS(X_{\tilde{E}})$ olsun. Eğer $F_{\tilde{E}} \subseteq G_{\tilde{E}}$ ve $G_{\tilde{E}} \subseteq F_{\tilde{E}}$ ise $F_{\tilde{E}}$ ve $G_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümelerine bipolar esnek eşit kümeler denir ve $F_{\tilde{E}} \cong G_{\tilde{E}}$ şeklinde gösterilir. (Shabir ve Naz, 2013.)

Tanım 3.5. $F_{\tilde{E}} \in BS(X_{\tilde{E}})$ olsun. $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesinin bipolar esnek tümleyeni $F_{\tilde{E}}^c$ ile gösterilir ve $\forall e \in E$ parametresi için $F^c(e) = F(\neg e)$ ve $F^c(\neg e) = F(e)$ şeklinde tanımlanır. (Shabir ve Naz, 2013.)

Örnek 3.2. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, E = \{e_1, e_2\}, \neg E = \{\neg e_1, \neg e_2\}$ olsun.

$$F_{\tilde{E}} = \{(e_1, \{x_1, x_4\}, \{x_3\}), (e_2, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_4\})\}$$

olarak tanımlanırsa,

$$F_{\tilde{E}}^c = \{(e_2, \{x_3\}, \{x_1, x_4\}), (e_2, \{x_2, x_4\}, \{x_1, x_3\})\}$$

dir.

Tanım 3.6. $F_{\tilde{E}} \in BS(X_{\tilde{E}})$ olsun. Eğer $\forall e \in E$ için $F(e) = X$ ve $\forall \neg e \in \neg E$ için $F(\neg e) = \emptyset$ ise $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesine bipolar esnek evrensel küme adı verilir ve $\tilde{X}_{\tilde{E}}$ ile gösterilir. (Shabir ve Naz, 2013.)

Tanım 3.7. $F_{\tilde{E}} \in BS(X_{\tilde{E}})$ olsun. Eğer $\forall e \in E$ için $F(e) = \emptyset$ ve $\forall \neg e \in \neg E$ için $F(\neg e) = X$ ise $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesine bipolar esnek boş küme adı verilir ve $\Phi_{\tilde{E}}$ ile gösterilir. (Shabir ve Naz, 2013.)

Uyarı 3.1. $\Phi_{\tilde{E}}^c = \tilde{X}_{\tilde{E}}, \tilde{X}_{\tilde{E}}^c = \Phi_{\tilde{E}}$.

Tanım 3.8. $F_{\tilde{E}}, G_{\tilde{E}'} \in BS(X_{\tilde{E}})$ olsun. Bipolar esnek iki küme arasındaki “veya” işlemi $F_{\tilde{E}} \vee G_{\tilde{E}'} \cong H_{\tilde{E} \times \tilde{E}'}$ şeklinde gösterilir ve $\forall (e, e') \in E \times E'$ için $H(e, e') = F(e) \cup G(e')$ ve $H(\neg e, \neg e') = F(\neg e) \cap G(\neg e')$ şeklinde tanımlanır. (Shabir ve Naz, 2013.)

Tanım 3.9. $F_{\tilde{E}}, G_{\tilde{E}'} \in BS(X_{\tilde{E}})$ olsun. Bipolar esnek iki küme arasındaki “ve” işlemi $F_{\tilde{E}} \wedge G_{\tilde{E}'} \cong K_{\tilde{E} \times \tilde{E}'}$ şeklinde gösterilir ve $\forall (e, e') \in E_1 \times E_2$ için $K(e, e') = F(e) \cap G(e')$ ve $K(\neg e, \neg e') = F(\neg e) \cup G(\neg e')$ şeklinde tanımlanır. (Shabir ve Naz, 2013.)

Önerme 3.1. $F_{\tilde{E}}, G_{\tilde{E}'} \in BS(X_{\tilde{E}})$ olsun. O halde;

$$(1) (F_{\tilde{E}} \vee G_{\tilde{E}'})^c \cong F_{\tilde{E}}^c \wedge G_{\tilde{E}'}^c,$$

$$(2) (F_{\tilde{E}} \wedge G_{\tilde{E}'})^c \cong F_{\tilde{E}}^c \vee G_{\tilde{E}'}^c$$

özellikleri sağlanır. (Shabir ve Naz, 2013.)

Kanıt: Önermenin ispatı bipolar esnek kümeler üzerinde tanımlanan ve, veya, tümleyen tanımlarından kolayca elde edilir.

Tanım 3.10. $F_{\tilde{E}}, G_{\tilde{E}'} \in BS(X_{\tilde{E}})$ olsun. Bipolar esnek kümenin bipolar esnek birleşimi $F_{\tilde{E}} \tilde{\cup} G_{\tilde{E}'} = H_{\tilde{E}''}$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır: $E'' = E \cup E'$ ve $\forall e \in E''$ parametresi için

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & e \in E \setminus E' \\ G(e), & e \in E' \setminus E \\ F(e) \cup G(e), & e \in E \cap E' \end{cases}$$

ve

$$H(\neg e) = \begin{cases} F(\neg e), & \neg e \in \neg E \setminus \neg E' \\ G(\neg e), & \neg e \in \neg E' \setminus \neg E \\ F(\neg e) \cap G(\neg e), & \neg e \in \neg E \cap \neg E' \end{cases}$$

dir.(Shabir ve Naz, 2013.)

Örnek 3.3. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, $\neg E = \{\neg e_1, \neg e_2, \neg e_3\}$, $E_1 = \{e_1, e_2\} \subset E$, $E_2 = \{e_2, e_3\} \subset E$ olsun. $F_{\widetilde{E_1}}, G_{\widetilde{E_2}}$ bipolar esnek kümeleri

$$F_{\widetilde{E_1}} = \{(e_1, \{x_1, x_4\}, \{x_3\}), (e_2, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_4\})\},$$

$$G_{\widetilde{E_2}} = \{(e_2, \{x_2, x_3\}, \{x_1\}), (e_3, \{x_4\}, \{x_1\})\}$$

şeklinde tanımlansın.

$$F_{\widetilde{E_1}} \widetilde{\cup} G_{\widetilde{E_2}} =$$

$$\{(e_1, \{x_1, x_4\}, \{x_3\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\}, \emptyset), (e_3, \{x_4\}, \{x_1\})\}$$

olarak elde edilir.

Tanım 3. 11. $F_{\widetilde{E}}, G_{\widetilde{E}} \in BS(X_{\widetilde{E}})$ olsun. Bipolar esnek kümelerin bipolar esnek kesişimi $F_{\widetilde{E}} \widetilde{\cap} G_{\widetilde{E'}} = K_{\widetilde{E''}}$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır: $E'' = E \cap E'$ ve $\forall e \in E''$ parametresi için

$$K(e) = F(e) \cap G(e), K(\neg e) = F(\neg e) \cup G(\neg e)$$

dir.(Shabir ve Naz, 2013.)

Uyarı 3.2. Açıktır ki, iki bipolar esnek kümenin kesişiminden bahsettiğimizde bu kümelerin parametre kümelerinin kesişimi boştan farklıdır.

Örnek 3.4. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, $E_1 = \{e_1, e_2\} \subset E$, $E_2 = \{e_2, e_3\} \subset E$ olsun. $F_{\widetilde{E_1}}, G_{\widetilde{E_2}}$ bipolar esnek kümeleri

$$F_{\widetilde{E_1}} = \{(e_1, \{x_1, x_4\}, \{x_3\}), (e_2, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_4\})\},$$

$$G_{\widetilde{E_2}} = \{(e_2, \{x_2, x_3\}, \{x_1\}), (e_3, \{x_4\}, \{x_1\})\}$$

şeklinde tanımlansın. O halde

$$F_{\widetilde{E_1}} \widetilde{\cap} G_{\widetilde{E_2}} = \{(e_2, \{x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\})\}$$

olarak elde edilir.

Önerme 3.2. $F_{\widetilde{E}} \in BS(X_{\widetilde{E}})$ olsun. Bu taktirde,

$$(1) F_{\widetilde{E}} \widetilde{\cup} F_{\widetilde{E}} = F_{\widetilde{E}},$$

$$(2) F_{\widetilde{E}} \widetilde{\cap} F_{\widetilde{E}} = F_{\widetilde{E}},$$

$$(3) F_{\widetilde{E}} \widetilde{\cup} \widetilde{X}_{\widetilde{E}} = \widetilde{X}_{\widetilde{E}},$$

$$(4) F_{\widetilde{E}} \widetilde{\cap} \widetilde{X}_{\widetilde{E}} = F_{\widetilde{E}}$$

$$(5) F_{\widetilde{E}} \widetilde{\cup} \Phi_{\widetilde{E}} = F_{\widetilde{E}},$$

$$(6) F_{\widetilde{E}} \widetilde{\cap} \Phi_{\widetilde{E}} = \Phi_{\widetilde{E}} \text{ (Shabir ve Naz, 2013.)}$$

Kanıt. Burada sadece (1), (2) nin ispatı yapılacaktır. (3),(4),(5) ve (6)'nın ispatı tanımdan hemen elde edilir.

(1) Her $e \in E$ için,

$$(F \cup F)(e) = F(e) \cup F(e) = F(e),$$

$$(F \cap F)(\neg e) = F(\neg e) \cap F(\neg e) = F(\neg e)$$

olduğundan $F_{\widetilde{E}} \widetilde{\cup} F_{\widetilde{E}} = F_{\widetilde{E}}$ elde edilir.

(2) Her $e \in E$ için,

$$(F \cap F)(e) = F(e) \cap F(e) = F(e),$$

$$(F \cup F)(\neg e) = F(\neg e) \cup F(\neg e) = F(\neg e)$$

olduğundan $F_{\widetilde{E}} \widetilde{\cap} F_{\widetilde{E}} = F_{\widetilde{E}}$ elde edilir.

Önerme 3.3. $F_{\widetilde{E}}, G_{\widetilde{E}} \in BS(X_{\widetilde{E}})$ ve $F_{\widetilde{E}} \widetilde{\subseteq} G_{\widetilde{E}}$ olsun. Bu taktirde,

$$(1) F_{\tilde{E}} \tilde{\cap} G_{\tilde{E}} = F_{\tilde{E}},$$

$$(2) F_{\tilde{E}} \tilde{\cup} G_{\tilde{E}} = G_{\tilde{E}},$$

$$(3) (F_{\tilde{E}}^c)^c \cong F_{\tilde{E}},$$

$$(4) \Phi_{\tilde{E}} \cong F_{\tilde{E}} \tilde{\cap} F_{\tilde{E}}^c \cong F_{\tilde{E}} \tilde{\cup} F_{\tilde{E}}^c \cong \tilde{X}_{\tilde{E}}$$

dir. (Fadel ve Dzul-Kifli, 2020.)

Kanıt. $F_{\tilde{E}}, G_{\tilde{E}} \in BS(X_{\tilde{E}})$ ve $F_{\tilde{E}} \cong G_{\tilde{E}}$ olsun.

O zaman her $e \in E$ için $F(e) \subset G(e)$ ve her $\neg e \in \neg E_1$ için $G(\neg e) \subset F(\neg e)$ sağlanır.

(1) $F_{\tilde{E}} \tilde{\cap} G_{\tilde{E}} = H_{\tilde{E}}$ olsun. $E' = E \cap E = E$ olduğundan, her $e \in E$ için $F(e) \cap G(e) = F(e)$ ve her $\neg e \in \neg E$ için $G(\neg e) \cup F(\neg e) = F(\neg e)$ dir. Böylece $F_{\tilde{E}} \tilde{\cap} G_{\tilde{E}} = F_{\tilde{E}}$ elde edilir.

(2) $F_{\tilde{E}} \tilde{\cup} G_{\tilde{E}} = K_{\tilde{E}}$ olsun. $E' = E \cup E = E$ olduğundan, her $e \in E$ için $F(e) \cup G(e) = G(e)$ ve her $\neg e \in \neg E$ için $G(\neg e) \cap F(\neg e) = G(\neg e)$ dir. Böylece $F_{\tilde{E}} \tilde{\cup} G_{\tilde{E}} = G_{\tilde{E}}$ elde edilir.

(3) $F_{\tilde{E}}^c \cong Q_{\tilde{E}}$ olsun. Bu durumda bipolar esnek tümleyen tanımı gereğince $\forall e \in E$ için $Q(e) = F(\neg e)$ ve $Q(\neg e) = F(e)$ dir. Benzer şekilde $Q_{\tilde{E}}^c = K_{\tilde{E}}$ olsun. O zaman, $K(e) = Q(\neg e)$ ve $K(\neg e) = Q(e)$ dir. $\forall e \in E$ için $K(e) = F(e)$ ve $K(\neg e) = F(\neg e)$ olduğundan $K_{\tilde{E}} = (F_{\tilde{E}}^c)^c = F_{\tilde{E}}$ elde edilir.

(4) $F_{\tilde{E}} \tilde{\cap} F_{\tilde{E}}^c = H_{\tilde{E}}$ olsun. Bipolar esnek arakesit tanımından her $e \in E$ için,

$$H(e) = F(e) \cap F^c(e) = F(e) \cap F(\neg e) = \emptyset,$$

$$H(\neg e) = F(\neg e) \cup F^c(\neg e) = F(\neg e) \cup F(e) \subseteq X$$

oldüğundan,

$$\Phi_{\tilde{E}} \cong H_{\tilde{E}} = F_{\tilde{E}} \tilde{\cap} F_{\tilde{E}}^c \dots (1) \dots \text{dir.}$$

$F_{\tilde{E}} \tilde{\cup} F_{\tilde{E}}^c = K_{\tilde{E}}$ olsun. Bipolar esnek birleşim tanımından her $e \in E$ için,

$$K(e) = F(e) \cup F^c(e) = F(e) \cup F(\neg e) \subseteq X,$$

$$K(\neg e) = F(\neg e) \cap F^c(\neg e) = F(\neg e) \cap F(e) = \emptyset$$

olduğundan,

$$F_{\tilde{E}} \tilde{\cup} F_{\tilde{E}}^c \cong \tilde{X}_{\tilde{E}} \dots (2) \dots$$

elde edilir.

Buradan her $e \in E$ için,

$$H(e) = \emptyset \subseteq K(e) \subseteq X,$$

$$K(\neg e) = \emptyset \subseteq H(\neg e) \subseteq X$$

olduğundan

$$F_{\tilde{E}} \tilde{\cap} F_{\tilde{E}}^c = H_{\tilde{E}} \cong K_{\tilde{E}} = F_{\tilde{E}} \tilde{\cup} F_{\tilde{E}}^c \dots (3) \dots$$

dir. (1), (2), (3) ifadeleri birlikte ele alındığında,

$$\Phi_{\tilde{E}} \cong F_{\tilde{E}} \tilde{\cap} F_{\tilde{E}}^c \cong F_{\tilde{E}} \tilde{\cup} F_{\tilde{E}}^c \cong \tilde{X}_{\tilde{E}} \text{ elde edilir.}$$

Önerme 3.4. $F_{\tilde{E}}, G_{\tilde{E}} \in BS(X_{\tilde{E}})$ olsun. Bu taktirde, $(F_{\tilde{E}} \tilde{\cup} G_{\tilde{E}})^c = F_{\tilde{E}}^c \tilde{\cap} G_{\tilde{E}}^c$

sağlanır. (Fadel ve Dzul-Kifli, 2021.)

Kanıt. $F_{\tilde{E}} \tilde{\cup} G_{\tilde{E}} = H_{\tilde{E}}$ olsun. Bipolar esnek birleşim tanımından $\forall e \in E$ için $H(e) = F(e) \cup G(e)$, $H(\neg e) = F(\neg e) \cap G(\neg e)$ olduğu ve bipolar esnek tümleyen tanımından $H^c(e) = H(\neg e) = F(\neg e) \cap G(\neg e)$ ve $H^c(\neg e) = H(e) = F(e) \cup G(e)$ şeklinde yazılır. $F_{\tilde{E}}^c \tilde{\cap} G_{\tilde{E}}^c = K_{\tilde{E}}$ olsun. Bipolar esnek kesişim tanımından $\forall e \in E$ için $K(e) = F^c(e) \cap G^c(e) = F(\neg e) \cap G(\neg e)$ ve $K(\neg e) = F^c(\neg e) \cup G^c(\neg e) = F(e) \cup G(e)$ şeklinde yazılır. Buradan $\forall e \in E$ için $H^c(e) = K(e)$ ve $H^c(\neg e) = K(\neg e)$ olup $(F_{\tilde{E}} \tilde{\cup} G_{\tilde{E}})^c = F_{\tilde{E}}^c \tilde{\cap} G_{\tilde{E}}^c$ sağlanır.

Tanım 3.12. $F_{\tilde{E}}, G_{\tilde{E}'} \in BS(X_{\tilde{E}})$ ve $E \cap E' \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $F_{\tilde{E}}$ ve $G_{\tilde{E}'}$ bipolar esnek kümelerinin bipolar esnek farkı $F_{\tilde{E}} \setminus G_{\tilde{E}'} = F_{\tilde{E}} \tilde{\cap} G_{\tilde{E}'}^c$ şeklinde tanımlanır. (Fadel ve Dzul-Kifli, 2021.)

Örnek 3.5. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, $\neg E = \{\neg e_1, \neg e_2, \neg e_3\}$, $E_1 = \{e_1, e_2\} \subset E$, $E_2 = \{e_2, e_3\} \subset E$ ve $F_{\tilde{E}_1}, G_{\tilde{E}_2}$ bipolar esnek kümeleri

$$F_{\tilde{E}_1} = \{(e_1, \{x_1, x_4\}, \{x_3\}), (e_2, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_4\})\},$$

$$G_{\tilde{E}_2} = \{(e_2, \{x_2, x_3\}, \{x_1\}), (e_3, \{x_4\}, \{x_1\})\}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman,

$$F_{\tilde{E}_1} \tilde{\setminus} G_{\tilde{E}_2} = \{(e_2, \{x_1\}, \{x_2, x_3, x_4\})\}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 3.13. $F_{\tilde{E}}, G_{\tilde{E}} \in BS(X_{\tilde{E}})$ olsun. Eğer her $e \in E$ için $F(e) \cap G(e) = \emptyset$ ise o zaman $F_{\tilde{E}}$ ve $G_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümelerine bipolar esnek ayık kümeler denir. (Shabir ve Bakhtawar, 2017.)

Tanım 3.14. $F_{\tilde{E}} \in BS(X_{\tilde{E}})$ olsun. Eğer $x, y \in X$ ($x \neq y$ olmak zorunda değil) ve $e \in E$ olmak üzere;

$$x_e^y(e_1) = \begin{cases} \{x\}, & e = e_1 \\ \emptyset, & e \neq e_1 \end{cases}$$

ve

$$x_e^y(\neg e_1) = \begin{cases} X \setminus \{x, y\}, & e = e_1 \\ X, & e \neq e_1 \end{cases}$$

ise $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesine X üzerinde tanımlı bipolar esnek nokta denir ve kısaca x_e^y ile gösterilir. (Gunduz ve ark., 2022.)

Tanım 3.15. x_e^y ve $x_{1_{e_1}}^{y_1}$ noktaları X üzerinde tanımlı iki bipolar esnek nokta olsun. Eğer $x \neq x_1$ veya $e \neq e_1$ ise o zaman x_e^y ve $x_{1_{e_1}}^{y_1}$ noktalarına farklı bipolar esnek nokta denir.

Tanım 3.16. x_e^y bipolar esnek nokta ve $F_{\bar{E}} \in BS(X_{\bar{E}})$ olsun. Eğer her $e \in E$ için, $x_e^y(e) = \{x\} \subseteq F(e)$ ve $F(\neg e) \subseteq x_e^y(\neg e)$ ise o zaman x_e^y bipolar esnek noktası $F_{\bar{E}}$ bipolar esnek kümesine aittir denir ve $x_e^y \tilde{\in} F_{\bar{E}}$ ile gösterilir. (Öztürk, 2020.)

Örnek 3.6. $X = \{x_1, x_2, x_3\}, E = \{e\}$ ve

$$F_{\bar{E}} = \{(e, \{x_1\}, \{x_2, x_3\})\}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $x_1^{x_1} \tilde{\in} F_{\bar{E}}$ dir.

Uyarı 3.3. $F_{\bar{E}} \in BS(X_{\bar{E}})$ olsun. Her $F_{\bar{E}}$ bipolar esnek kümesi kendisine ait bipolar esnek kümelerin birleşimine eşittir.

Örnek 3.6. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, E = \{e_1, e_2\}, \neg E = \{\neg e_1, \neg e_2\}$ ve

$$F_{\bar{E}} = \{(e_1, \{x_1, x_2\}, \{x_4\}), (e_2, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_4\})\}$$

şeklinde tanımlansın. Aşağıdaki bipolar esnek noktaları ele aldığımızda,

$$x_1^{x_2}(e_1) = \{x_1\}, \quad x_1^{x_2}(\neg e_1) = \{x_3, x_4\},$$

$$x_1^{x_3}(e_1) = \{x_1\}, \quad x_1^{x_3}(\neg e_1) = \{x_2, x_4\},$$

$$x_2^{x_1}(e_1) = \{x_2\}, \quad x_2^{x_1}(\neg e_1) = \{x_3, x_4\},$$

$$x_2^{x_3}(e_1) = \{x_2\}, \quad x_2^{x_3}(\neg e_1) = \{x_1, x_4\},$$

$$x_2^{x_3}(e_2) = \{x_2\}, \quad x_2^{x_3}(\neg e_2) = \{x_1, x_4\},$$

$$x_3^{x_2}(e_2) = \{x_3\}, \quad x_3^{x_2}(\neg e_2) = \{x_1, x_4\}$$

her $e_1, e_2 \in E$ için,

$$F(e_1) = (x_1^{x_2} \cup x_1^{x_3} \cup x_2^{x_1} \cup x_2^{x_3})(e_1),$$

$$F(\neg e_1) = (x_1^{x_2} \cap x_1^{x_3} \cap x_2^{x_1} \cap x_2^{x_3})(\neg e_1),$$

$$F(e_2) = (x_{2_{e_2}}^{x_3} \cup x_{3_{e_2}}^{x_2})(e_2),$$

$$F(\neg e_2) = (x_{2_{e_2}}^{x_3} \cap x_{3_{e_2}}^{x_2})(\neg e_2)$$

olduğundan $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesi kendisine ait bipolar esnek kümelerin birleşimine eşit olduğu elde edilir.



4. BİPOLAR ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

4.1. Bipolar Esnek Topolojik Uzaylar

Bu bölümde bipolar esnek topolojik uzay tanımı verilerek bipolar esnek kapanış, bipolar esnek iç kavramları araştırılmış ve bunlar arasındaki ilişkiler ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Tanım 4.1.1. X evrensel küme, E parametrelerin kümesi ve $\tilde{\tau}$, X üzerinde tanımlı bipolar esnek kümelerin bir ailesi olsun. Eğer $\tilde{\tau}$ ailesi;

$$(1) \Phi_{\tilde{E}}, \tilde{X}_{\tilde{E}} \in \tilde{\tau},$$

(2) $\tilde{\tau}$ ailesine ait olan bipolar esnek kümelerin keyfî sayıdaki birleşimi yine $\tilde{\tau}$ ailesine aittir.

(3) $\tilde{\tau}$ ailesine ait olan bipolar esnek kümelerin sonlu sayıdaki arakesiti yine $\tilde{\tau}$ ailesine aittir.

özelliklerini sağlıyorsa, $\tilde{\tau}$ ailesine X üzerinde tanımlı bir bipolar esnek topoloji, $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E})$ üçlüsüne de X üzerinde tanımlı bipolar esnek topolojik uzay denir ve kısaca $BSTS(X_{\tilde{E}})$ ile gösterilir. (Shabir ve Bakhtawar, 2017.)

Tanım 4.1.2. $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \in BSTS(X_{\tilde{E}})$ olsun. Bu durumda $\tilde{\tau}$ ailesine ait olan bipolar esnek kümelere bipolar esnek açık kümeler denir. (Shabir ve Bakhtawar, 2017.)

Tanım 4.1.3. $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \in BSTS(X_{\tilde{E}})$ ve $F_{\tilde{E}} \in BS(X_{\tilde{E}})$ olsun. Eğer $F_{\tilde{E}}^c \in \tilde{\tau}$ ise $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesine bipolar esnek kapalı küme denir. (Shabir ve Bakhtawar, 2017.)

Tanım 4.1.4. $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \in BSTS(X_{\tilde{E}})$ ve $F_{\tilde{E}} \in BS(X_{\tilde{E}})$ olsun. $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesi hem bipolar esnek açık hemde bipolar esnek kapalı küme ise bu kümeye bipolar esnek clopen küme denir. (Shabir ve Bakhtawar, 2017.)

Önerme 4.1.1. $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \in BSTS(X_{\tilde{E}})$ olsun. Bu durumda; $\tau_e = \{(F(e)): F_{\tilde{E}} \in \tilde{\tau}\}$ ailesi her $e \in E$ için X üzerinde bir topoloji tanımlar. (Öztürk, 2018.)

Kanıt. $\forall e \in E$ için,

$\tau_1: \Phi_{\tilde{E}} \tilde{\tau}$ ve $\tilde{X}_{\tilde{E}} \tilde{\tau}$ olduğundan $\emptyset, X \in \tau_e$ olur.

$\tau_2: \{F_i(e): i \in J\}$ ailesi τ_e üzerindeki kümelerin keyfi bir ailesi olsun. $\forall i \in J$ için $F_{i_{\tilde{E}}} \tilde{\tau}$ olduğundan $\bigcup_{i \in J} F_{i_{\tilde{E}}} \tilde{\tau}$ elde edilir. Buradan $\bigcup_{i \in J} F_i(e) \in \tau_e$ olur.

$\tau_3: \{F_i(e): i \in J\}$ (J sonlu bir indis kümesi) ailesi τ_e üzerindeki kümelerin keyfi bir ailesi olsun. $\forall i \in J$ için $F_{i_{\tilde{E}}} \tilde{\tau}$ olduğundan $\bigcap_{i \in J} F_{i_{\tilde{E}}} \tilde{\tau}$ olup buradan $\bigcap_{i \in J} F_i(e) \in \tau_e$ olur.

Önerme 4.1.2. (X, τ, E) X üzerinde tanımlı bir esnek topolojik uzay olsun. O halde, $(F, E) \in \tau$ ve $\forall \neg e \in \neg E$ için $F(\neg e) = X \setminus F(e)$ olacak şekildeki $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümelerinin ailesi, X üzerinde bipolar esnek topoloji tanımlar. (Öztürk, 2018.)

Kanıt. Önermenin kanıtı açıktır.

Önerme 4.1.3. $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \in BSTS(X_{\tilde{E}})$ olsun. Bu durumda $\rho = \{(F, E); F_{\tilde{E}} \tilde{\tau}\}$ ailesi X üzerinde bir esnek topoloji tanımlar. (Öztürk, 2018.)

Kanıt: $\rho_1: \Phi_{\tilde{E}}, \tilde{X}_{\tilde{E}} \tilde{\tau}$ olduğundan $\Phi, \tilde{X} \in \rho$.

$\rho_2: \{(F_i, E)\}_{i \in I}$ ρ daki esnek kümelerin bir ailesi olsun. O halde $\forall i \in I$ için $F_{i_{\tilde{E}}} \tilde{\tau}$ ve $\tilde{\tau}$ ailesi X üzerinde bipolar esnek topoloji olduğundan $\bigcup_{i \in I} F_{i_{\tilde{E}}} \tilde{\tau}$ sağlanır. Buradan $\bigcup_{i \in I} (F_i, E) \tilde{\tau}$ elde edilir.

$\rho_3: \{(F_i, E): i = 1, 2, \dots, n\}$ ρ daki esnek kümelerin bir ailesi olsun. O halde $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $F_{i_{\tilde{E}}} \tilde{\tau}$ ve $\tilde{\tau}$ ailesi X üzerinde bipolar esnek topoloji olduğundan $\bigcap_{i=1}^n F_{i_{\tilde{E}}} \tilde{\tau}$ sağlanır. Buradan $\bigcap_{i=1}^n (F_i, E) \tilde{\tau}$ elde edilir.

Tanım 4.1.5. X evrensel küme, E parametrelerin bir kümesi olsun. O zaman $\tilde{\tau} = \{\Phi_{\tilde{E}}, \tilde{X}_{\tilde{E}}\}$ ailesi X üzerinde bir bipolar esnek topoloji tanımlar. Bu topolojiye bipolar esnek kaba (indiscrete) topoloji ve $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E})$ üçlüsüne bipolar esnek kaba (indiscrete) topolojik uzay denir. (Öztürk, 2018.)

Tanım 4.1.6. X evrensel küme, E parametrelerin bir kümesi ve $\tilde{\tau}$, X üzerinde tanımlanan tüm bipolar esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu durumda $\tilde{\tau}$, X üzerinde bir

topoloji tanımlar. Bu topolojiye bipolar esnek ayrık (discrete) topoloji ve $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E})$ üçlüsüne de bipolar esnek ayrık (discrete) topolojik uzay denir. (Öztürk, 2018.)

Tanım 4.1.7. $(X, \tilde{\tau}_1, \tilde{E}), (X, \tilde{\tau}_2, \tilde{E}) \in BSTS(X_{\tilde{E}})$ olsun. Eğer $\tilde{\tau}_1 \subseteq \tilde{\tau}_2$ ise $\tilde{\tau}_2$ topolojisine $\tilde{\tau}_1$ topolojisinden daha ince veya $\tilde{\tau}_1$ topolojisine $\tilde{\tau}_2$ topolojisinden daha kaba topoloji denir. (Öztürk, 2018.)

Önerme 4.1.4. $(X, \tilde{\tau}_1, \tilde{E}), (X, \tilde{\tau}_2, \tilde{E}) \in BSTS(X_{\tilde{E}})$. Bu durumda $(X, \tilde{\tau}_1 \tilde{\cap} \tilde{\tau}_2, \tilde{E})$ de X üzerinde bipolar esnek topolojik uzaydır. (Öztürk, 2018.)

Kanıt: (1) $\Phi_{\tilde{E}}, \tilde{X}_{\tilde{E}} \tilde{\cap} \tilde{\tau}_1 \tilde{\cap} \tilde{\tau}_2$.

(2) $\{F_{i_{\tilde{E}}}: i \in I\}$ ailesi $\tilde{\tau}_1 \tilde{\cap} \tilde{\tau}_2$ deki bipolar esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu durumda $\forall i \in I$ için $F_{i_{\tilde{E}}} \tilde{\cap} \tilde{\tau}_1$ ve $F_{i_{\tilde{E}}} \tilde{\cap} \tilde{\tau}_2$ dir. $\tilde{\tau}_1$ ve $\tilde{\tau}_2$ bipolar esnek topoloji olduğundan, $\bigcup_{i \in I} F_{i_{\tilde{E}}} \tilde{\cap} \tilde{\tau}_1$ ve $\bigcup_{i \in I} F_{i_{\tilde{E}}} \tilde{\cap} \tilde{\tau}_2$ dir. Buradan $\bigcup_{i \in I} F_{i_{\tilde{E}}} \tilde{\cap} \tilde{\tau}_1 \tilde{\cap} \tilde{\tau}_2$ olarak elde edilir.

(3) $\{F_{i_{\tilde{E}}}: i = 1, 2, \dots, n\}$ ailesi $\tilde{\tau}_1 \tilde{\cap} \tilde{\tau}_2$ deki bipolar esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu durumda $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $F_{i_{\tilde{E}}} \tilde{\cap} \tilde{\tau}_1$ ve $F_{i_{\tilde{E}}} \tilde{\cap} \tilde{\tau}_2$ dir. $\tilde{\tau}_1$ ve $\tilde{\tau}_2$ bipolar esnek topoloji olduğundan, $\bigcap_{i=1}^n F_{i_{\tilde{E}}} \tilde{\cap} \tilde{\tau}_1$ ve $\bigcap_{i=1}^n F_{i_{\tilde{E}}} \tilde{\cap} \tilde{\tau}_2$ dir. Buradan $\bigcap_{i=1}^n F_{i_{\tilde{E}}} \tilde{\cap} \tilde{\tau}_1 \tilde{\cap} \tilde{\tau}_2$ olarak elde edilir.

Uyarı 4.1.1. $(X, \tilde{\tau}_1, \tilde{E}), (X, \tilde{\tau}_2, \tilde{E}) \in BSTS(X_{\tilde{E}})$ olsun. O zaman $(X, \tilde{\tau}_1 \tilde{\cup} \tilde{\tau}_2, \tilde{E})$ nin X üzerinde bipolar esnek topolojik uzay olması gerekmez.

Örnek 4.1.1. $X = \{x_1, x_2, x_3\}, E = \{e_1, e_2\}, \neg E = \{\neg e_1, \neg e_2\}$ olsun. O halde,

$$F_{1_{\tilde{E}}} = \{(e_1, \{x_1\}, \{x_3\}), (e_2, \{x_1, x_2\}, \{x_3\})\}$$

$$F_{2_{\tilde{E}}} = \{(e_1, \{x_2\}, \{x_1\}), (e_2, \{x_1\}, \{x_2\})\}$$

$$F_{3_{\tilde{E}}} = \{(e_1, \{x_1, x_2\}, \emptyset), (e_2, \{x_1, x_2\}, \emptyset)\}$$

$$F_{4_{\tilde{E}}} = \{(e_1, \emptyset, \{x_1, x_3\}), (e_2, \{x_1\}, \{x_2, x_3\})\}$$

$$G_{1_{\tilde{E}}} = \{(e_1, \{x_1\}, \{x_2, x_3\}), (e_2, \emptyset, \{x_3\})\}$$

$$G_{2\tilde{E}} = \{(e_1, \{x_3\}, \{x_2\}), (e_2, \emptyset, \{x_1\})\}$$

$$G_{3\tilde{E}} = \{(e_1, \{x_1, x_3\}, \{x_2\}), (e_2, \emptyset, \emptyset)\}$$

$$G_{4\tilde{E}} = \{(e_1, \emptyset, \{x_2, x_3\}), (e_2, \emptyset, \{x_1, x_3\})\}$$

olmak üzere,

$$\tilde{\tau}_1 = \{\Phi_{\tilde{E}}, \tilde{X}_{\tilde{E}}, F_{1\tilde{E}}, F_{2\tilde{E}}, F_{3\tilde{E}}, F_{4\tilde{E}}\}, \tilde{\tau}_2 = \{\Phi_{\tilde{E}}, \tilde{X}_{\tilde{E}}, G_{1\tilde{E}}, G_{2\tilde{E}}, G_{3\tilde{E}}, G_{4\tilde{E}}\}$$

aileleri X üzerinde bipolar esnek topoloji tanımlar.

$$\tilde{\tau}_1 \tilde{\cup} \tilde{\tau}_2 = \{\Phi_{\tilde{E}}, \tilde{X}_{\tilde{E}}, F_{1\tilde{E}}, F_{2\tilde{E}}, F_{3\tilde{E}}, F_{4\tilde{E}}, G_{1\tilde{E}}, G_{2\tilde{E}}, G_{3\tilde{E}}, G_{4\tilde{E}}\}$$

dir. Eğer $F_{3\tilde{E}} \tilde{\cup} G_{3\tilde{E}} = K_{\tilde{E}}$ olarak alırsak,

$$K_{\tilde{E}} = \{(e_1, X, \emptyset), ((e_2, \{x_1, x_2\}, \emptyset))\}$$

şeklinde elde edilir. Fakat $K_{\tilde{E}} \not\tilde{\in} \tilde{\tau}_1 \tilde{\cup} \tilde{\tau}_2$ olduğundan $\tilde{\tau}_1 \tilde{\cup} \tilde{\tau}_2$ ailesi X üzerinde bir bipolar esnek topoloji değildir.

Teorem 4.1.1. $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \in BSTS(X_{\tilde{E}})$ olsun. Bu taktirde,

(1) $\Phi_{\tilde{E}}, \tilde{X}_{\tilde{E}}$ X üzerinde bipolar esnek kapalı kümedir.

(2) X üzerinde keyfi sayıdaki bipolar esnek kapalı kümelerin bipolar esnek kesişimi bipolar esnek kapalı kümedir.

(3) X üzerinde sonlu sayıda bipolar esnek kapalı kümelerin bipolar esnek birleşimi bipolar esnek kapalı kümedir. (Öztürk, 2018.)

Kanıt: (1) $\Phi_{\tilde{E}}^c = \tilde{X}_{\tilde{E}} \tilde{\in} \tilde{\tau}$ ve $\tilde{X}_{\tilde{E}}^c = \Phi_{\tilde{E}} \tilde{\in} \tilde{\tau}$ olduğundan bipolar esnek kapalı küme tanımına göre $\Phi_{\tilde{E}}, \tilde{X}_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümeleri bipolar esnek kapalı kümelerdir.

(2) $\{F_{i\tilde{E}}: i \in I\}$ X üzerinde tanımlı bipolar esnek kapalı kümelerin bir ailesi olsun. Her $i \in I$ için $F_{i\tilde{E}}^c \tilde{\in} \tilde{\tau}$ olduğundan bipolar esnek topoloji tanımına göre $\bigcup_{i \in I} F_{i\tilde{E}}^c \tilde{\in} \tilde{\tau}$ dir. $(\bigcap_{i \in I} F_{i\tilde{E}})^c = \bigcup_{i \in I} F_{i\tilde{E}}^c \tilde{\in} \tilde{\tau}$ olduğundan $\bigcap_{i \in I} F_{i\tilde{E}}$ X üzerinde bipolar esnek kapalı kümedir.

(3) $\{F_{i_{\tilde{E}}}: i = 1, 2, \dots, n\}$ X üzerindeki bipolar esnek kapalı kümelerin sonlu bir ailesi olsun. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $F_{i_{\tilde{E}}}^c \cong \tilde{\tau}$ olduğundan bipolar esnek topoloji tanımına göre $\bigcap_{i=1}^{\tilde{n}} F_{i_{\tilde{E}}}^c \cong \tilde{\tau}$ dir. $(\bigcup_{i=1}^{\tilde{n}} F_{i_{\tilde{E}}})^c = \bigcap_{i=1}^{\tilde{n}} F_{i_{\tilde{E}}}^c \cong \tilde{\tau}$ olduğundan $\bigcup_{i=1}^{\tilde{n}} F_{i_{\tilde{E}}}$ X üzerinde bipolar esnek kapalı kümedir.

Tanım 4.1.8. $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \in BSTS(X_{\tilde{E}})$ ve $F_{\tilde{E}} \in BS(X_{\tilde{E}})$ olsun.

$F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesini kapsayan tüm bipolar esnek kapalı kümelerin bipolar esnek arakesitine $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesinin bipolar esnek kapanışı denir ve $\overline{F_{\tilde{E}}}$ şeklinde gösterilir.

Uyarı 4.1.2. $\overline{F_{\tilde{E}}}$, $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesini kapsayan en dar bipolar esnek kapalı kümedir.(Öztürk, 2018.)

Teorem 4.1.2. $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \in BSTS(X_{\tilde{E}})$ ve $F_{1_{\tilde{E}}}, F_{2_{\tilde{E}}} \in BS(X_{\tilde{E}})$ olsun. O halde,

$$(1) \overline{\Phi_{\tilde{E}}} = \Phi_{\tilde{E}} \text{ ve } \overline{\tilde{X}_{\tilde{E}}} = \tilde{X}_{\tilde{E}},$$

$$(2) F_{1_{\tilde{E}}} \cong \overline{F_{1_{\tilde{E}}}},$$

$$(3) F_{1_{\tilde{E}}} \text{ bipolar esnek kapalı kümedir} \Leftrightarrow F_{1_{\tilde{E}}} = \overline{F_{1_{\tilde{E}}}},$$

$$(4) \overline{\overline{F_{1_{\tilde{E}}}}} = \overline{F_{1_{\tilde{E}}}},$$

$$(5) F_{1_{\tilde{E}}} \cong F_{2_{\tilde{E}}} \Rightarrow \overline{F_{1_{\tilde{E}}}} \cong \overline{F_{2_{\tilde{E}}}}$$

$$(6) \overline{F_{1_{\tilde{E}}} \cup F_{2_{\tilde{E}}}} = \overline{F_{1_{\tilde{E}}}} \cup \overline{F_{2_{\tilde{E}}}}$$

$$(7) \overline{F_{1_{\tilde{E}}} \cap F_{2_{\tilde{E}}}} \cong \overline{F_{1_{\tilde{E}}}} \cap \overline{F_{2_{\tilde{E}}}}$$

özellikleri sağlanır. (Öztürk, 2018.)

Kanıt: (1) ve (2) açıktır.

(3) $F_{1_{\tilde{E}}}$ bipolar esnek kapalı küme olsun. Bu durumda $F_{1_{\tilde{E}}}$ bipolar esnek kümesini kapsayan en dar bipolar esnek kapalı küme kendisi olduğundan $F_{1_{\tilde{E}}} = \overline{F_{1_{\tilde{E}}}}$ sağlanır.

Tersine $F_{1\bar{E}} = \overline{F_{1\bar{E}}}$ olsun. $\overline{F_{1\bar{E}}}$ bipolar esnek kapalı küme olduğundan $F_{1\bar{E}}$ de bipolar esnek kapalı kümedir.

(4) $\overline{F_{1\bar{E}}}$ bipolar esnek kapalı küme olduğundan (3) gereğince $\overline{\overline{F_{1\bar{E}}}} = \overline{F_{1\bar{E}}}$ dir.

(5) $F_{1\bar{E}} \subseteq F_{2\bar{E}}$ olsun. (2) den dolayı $F_{1\bar{E}} \subseteq \overline{F_{1\bar{E}}}$ ve $F_{2\bar{E}} \subseteq \overline{F_{2\bar{E}}}$ olur. $\overline{F_{1\bar{E}}}$, $F_{1\bar{E}}$ yi kapsayan en dar bipolar esnek kapalı küme olduğundan $\overline{F_{1\bar{E}}} \subseteq \overline{F_{2\bar{E}}}$ olur.

(6) $F_{1\bar{E}} \subseteq F_{1\bar{E}} \cup F_{2\bar{E}}$ ve $F_{2\bar{E}} \subseteq F_{1\bar{E}} \cup F_{2\bar{E}}$ olduğundan (5) den dolayı $\overline{F_{1\bar{E}}} \subseteq \overline{F_{1\bar{E}} \cup F_{2\bar{E}}}$ ve $\overline{F_{2\bar{E}}} \subseteq \overline{F_{1\bar{E}} \cup F_{2\bar{E}}}$ sağlanır. Buradan, $\overline{F_{1\bar{E}}} \cup \overline{F_{2\bar{E}}} \subseteq \overline{F_{1\bar{E}} \cup F_{2\bar{E}}}$ elde edilir.

Tersine (2) den dolayı $F_{1\bar{E}} \subseteq \overline{F_{1\bar{E}}}$ ve $F_{2\bar{E}} \subseteq \overline{F_{2\bar{E}}}$ olduğundan $F_{1\bar{E}} \cup F_{2\bar{E}} \subseteq \overline{F_{1\bar{E}}} \cup \overline{F_{2\bar{E}}}$ sağlanır. Burada $\overline{F_{1\bar{E}}} \cup \overline{F_{2\bar{E}}}$ kümesi bipolar esnek kapalı kümelerin birleşimi olduğundan bipolar esnek kapalı kümedir. $F_{1\bar{E}} \cup F_{2\bar{E}}$ bipolar esnek kümesini kapsayan en dar bipolar esnek kapalı küme $\overline{F_{1\bar{E}} \cup F_{2\bar{E}}}$ olduğundan $\overline{F_{1\bar{E}}} \cup \overline{F_{2\bar{E}}} \subseteq \overline{F_{1\bar{E}} \cup F_{2\bar{E}}}$ sağlanır. Buradan da $\overline{F_{1\bar{E}}} \cup \overline{F_{2\bar{E}}} = \overline{F_{1\bar{E}} \cup F_{2\bar{E}}}$ eşitliği elde edilir.

(7) $F_{1\bar{E}} \cap F_{2\bar{E}} \subseteq F_{1\bar{E}}$ ve $F_{1\bar{E}} \cap F_{2\bar{E}} \subseteq F_{2\bar{E}}$ olduğundan (5) den dolayı $\overline{F_{1\bar{E}} \cap F_{2\bar{E}}} \subseteq \overline{F_{1\bar{E}}}$ ve $\overline{F_{1\bar{E}} \cap F_{2\bar{E}}} \subseteq \overline{F_{2\bar{E}}}$ sağlanır. Buradan da $\overline{F_{1\bar{E}} \cap F_{2\bar{E}}} \subseteq \overline{F_{1\bar{E}}} \cap \overline{F_{2\bar{E}}}$ elde edilir.

Örnek 4.1.2. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, E = \{e_1, e_2\}, \neg E = \{\neg e_1, \neg e_2\}$ olsun. O halde,

$$F_{1\bar{E}} = \{(e_1, \{x_2\}, \{x_4\}), (e_2, \emptyset, \{x_2, x_3\})\},$$

$$F_{2\bar{E}} = \{(e_1, \{x_1, x_3\}, \{x_2\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4\})\},$$

$$F_{3\bar{E}} = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_3\}, \emptyset), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\}, \emptyset)\},$$

$$F_{4\bar{E}} = \{(e_1, \emptyset, \{x_2, x_4\}), (e_2, \emptyset, \{x_2, x_3, x_4\})\}$$

olmak üzere,

$$\tilde{\tau} = \{\Phi_{\bar{E}}, \tilde{X}_{\bar{E}}, F_{1\bar{E}}, F_{2\bar{E}}, F_{3\bar{E}}, F_{4\bar{E}}\},$$

ailesi X üzerinde bipolar esnek topoloji tanımlar.

Bu uzaydaki bipolar esnek kapalı kümeler

$$F_{1\tilde{E}}^c = \{(e_1, \{x_4\}, \{x_2\}), (e_2, \{x_2, x_3\}, \emptyset)\},$$

$$F_{2\tilde{E}}^c = \{(e_1, \{x_2\}, \{x_1, x_3\}), (e_2, \{x_4\}, \{x_1, x_2, x_3\})\},$$

$$F_{3\tilde{E}}^c = \{(e_1, \emptyset, \{x_1, x_2, x_3\}), (e_2, \emptyset, \{x_1, x_2, x_3\})\},$$

$$F_{4\tilde{E}}^c = \{(e_1, \{x_2, x_4\}, \emptyset), (e_2, \{x_2, x_3, x_4\}, \emptyset)\}$$

olmak üzere

$$\tilde{\tau}^c = \{\Phi_{\tilde{E}}, \tilde{X}_{\tilde{E}}, F_{1\tilde{E}}^c, F_{2\tilde{E}}^c, F_{3\tilde{E}}^c, F_{4\tilde{E}}^c\}$$

ailesini oluşturur.

$H_{\tilde{E}} = \{(e_1, \{x_2\}, \{x_1, x_3, x_4\}), (e_2, \{x_4\}, \{x_1, x_2, x_3\})\}$ bipolar esnek kümesini ele alalım.

Bu bipolar esnek kümenin bipolar esnek kapanışı

$$\overline{H_{\tilde{E}}} = \bigcap_{\substack{H_{\tilde{E}} \subseteq K_{\tilde{E}} \\ K_{\tilde{E}}^c \subseteq \tilde{\tau}}} K_{\tilde{E}} = F_{2\tilde{E}}^c \tilde{\cap} F_{4\tilde{E}}^c \tilde{\cap} \tilde{X}_{\tilde{E}} = F_{2\tilde{E}}^c$$

olarak bulunur.

Tanım 4.1.9. $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \in BSTS(X_{\tilde{E}})$ ve $F_{\tilde{E}} \in BS(X_{\tilde{E}})$ olsun. $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesinin tüm bipolar esnek açık alt kümelerinin bipolar esnek birleşimine $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesinin bipolar esnek içi denir ve $F_{\tilde{E}}^o$ şeklinde gösterilir. (Öztürk, 2018.)

Uyarı 4.1.3. $F_{\tilde{E}}^o$, $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesinin kapsadığı en geniş bipolar esnek açık kümedir. (Öztürk, 2018.)

Teorem 4.1.3. $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \in BSTS(X_{\tilde{E}})$ ve $F_{1\tilde{E}}, F_{2\tilde{E}} \in BS(X_{\tilde{E}})$ olsun. O halde,

$$(1) \Phi_{\tilde{E}}^o = \Phi_{\tilde{E}} \text{ ve } \tilde{X}_{\tilde{E}}^o = \tilde{X}_{\tilde{E}},$$

$$(2) F_{1\tilde{E}}^o \subseteq F_{1\tilde{E}},$$

$$(3) F_{1\tilde{E}} \text{ bipolar esnek açık kümedir} \Leftrightarrow F_{1\tilde{E}}^o = F_{1\tilde{E}},$$

$$(4) (F_{1\tilde{E}}^o)^o = F_{1\tilde{E}}^o,$$

$$(5) F_{1\tilde{E}} \subseteq F_{2\tilde{E}} \Rightarrow F_{1\tilde{E}}^o \subseteq F_{2\tilde{E}}^o,$$

$$(6) F_{1\tilde{E}}^o \cap F_{2\tilde{E}}^o = [F_{1\tilde{E}} \cap F_{2\tilde{E}}]^o,$$

$$(7) F_{1\tilde{E}}^o \cup F_{2\tilde{E}}^o \subseteq [F_{1\tilde{E}} \cup F_{2\tilde{E}}]^o$$

özellikleri sağlanır. (Öztürk, 2018.)

Kanıt: (1) ve (2) açıktır.

(3) $F_{1\tilde{E}}$ bipolar esnek açık küme olsun. Bu durumda $F_{1\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesinin kapsadığı en geniş bipolar esnek açık küme $F_{1\tilde{E}}$ olduğundan $F_{1\tilde{E}}^o = F_{1\tilde{E}}$ sağlanır.

Tersine $F_{1\tilde{E}}^o = F_{1\tilde{E}}$ olsun. $F_{1\tilde{E}}^o$ bipolar esnek açık küme olduğundan $F_{1\tilde{E}}$ bipolar esnek açık kümedir.

(4) $F_{1\tilde{E}}^o$ bipolar esnek açık küme olduğundan (3) gereğince $(F_{1\tilde{E}}^o)^o = F_{1\tilde{E}}^o$ sağlanır.

(5) $F_{1\tilde{E}} \subseteq F_{2\tilde{E}}$ olsun. (2) gereğince $F_{1\tilde{E}}^o \subseteq F_{1\tilde{E}}$ ve $F_{2\tilde{E}}^o \subseteq F_{2\tilde{E}}$ dir. $F_{2\tilde{E}}^o$, $F_{2\tilde{E}}$ ’nin kapsadığı en geniş bipolar esnek açık küme olduğundan $F_{1\tilde{E}}^o \subseteq F_{2\tilde{E}}^o$ sağlanır.

(6) $F_{1\tilde{E}}^o \subseteq F_{1\tilde{E}}$ ve $F_{2\tilde{E}}^o \subseteq F_{2\tilde{E}}$ olduğundan $F_{1\tilde{E}}^o \cap F_{2\tilde{E}}^o \subseteq F_{1\tilde{E}} \cap F_{2\tilde{E}}$ dir. $(F_{1\tilde{E}} \cap F_{2\tilde{E}})^o$ bipolar esnek açık kümesi $F_{1\tilde{E}} \cap F_{2\tilde{E}}$ ’nin kapsadığı en geniş bipolar esnek açık küme olduğundan, $F_{1\tilde{E}}^o \cap F_{2\tilde{E}}^o \subseteq (F_{1\tilde{E}} \cap F_{2\tilde{E}})^o$ elde edilir.

Tersine $F_{1\tilde{E}} \cap F_{2\tilde{E}} \subseteq F_{1\tilde{E}}$ ve $F_{1\tilde{E}} \cap F_{2\tilde{E}} \subseteq F_{2\tilde{E}}$ olduğundan (2) gereğince $[F_{1\tilde{E}} \cap F_{2\tilde{E}}]^o \subseteq F_{1\tilde{E}}^o$ ve $[F_{1\tilde{E}} \cap F_{2\tilde{E}}]^o \subseteq F_{2\tilde{E}}^o$ sağlanır. Buradan da $[F_{1\tilde{E}} \cap F_{2\tilde{E}}]^o \subseteq F_{1\tilde{E}}^o \cap F_{2\tilde{E}}^o$ dir. Böylece $[F_{1\tilde{E}} \cap F_{2\tilde{E}}]^o = F_{1\tilde{E}}^o \cap F_{2\tilde{E}}^o$ elde edilir.

(7) $F_{1\tilde{E}}^o \subseteq F_{1\tilde{E}}$ ve $F_{2\tilde{E}}^o \subseteq F_{2\tilde{E}}$ olduğundan $F_{1\tilde{E}}^o \cup F_{2\tilde{E}}^o \subseteq F_{1\tilde{E}} \cup F_{2\tilde{E}}$ dir. Burada $[F_{1\tilde{E}} \cup F_{2\tilde{E}}]^o$ bipolar esnek açık kümesi $F_{1\tilde{E}} \cup F_{2\tilde{E}}$ kümesinin kapsadığı en geniş bipolar esnek açık küme olduğundan $F_{1\tilde{E}}^o \cup F_{2\tilde{E}}^o \subseteq [F_{1\tilde{E}} \cup F_{2\tilde{E}}]^o$ elde edilir.

Örnek 4.1.3. Örnek 3.1.2. de verilen bipolar esnek topolojik uzay ve $H_{\tilde{E}} = \{(e_1, \{x_2\}, \emptyset), (e_2, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\})\}$ bipolar esnek kümesi için bu kümenin bipolar esnek içi

$$H_{\tilde{E}}^o = \bigcup_{\substack{F_{\tilde{E}} \tilde{\subseteq} \tilde{\tau} \\ F_{\tilde{E}} \tilde{\subseteq} H_{\tilde{E}}}} F_{\tilde{E}} = F_{1_{\tilde{E}}} \tilde{\cup} F_{4_{\tilde{E}}} \tilde{\cup} \Phi_{\tilde{E}} = F_{1_{\tilde{E}}}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.1.4. $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \in BSTS(X_{\tilde{E}})$ ve $F_{\tilde{E}} \in BS(X_{\tilde{E}})$ olsun. O halde, $[\overline{F_{\tilde{E}}}]^c \cong ([F_{\tilde{E}}]^c)^o$ sağlanır. (Öztürk, 2018.)

Kanıt: Bipolar esnek iç ve bipolar esnek kapanış tanımlarından kolaylıkla elde edilir.

4.2. Bipolar Esnek Topolojik Uzaylarda Komşuluk Özellikleri

Tanım 4.2.1. $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \in BSTS(X_{\tilde{E}})$, x_e^y bipolar esnek nokta ve $F_{\tilde{E}} \in BS(X_{\tilde{E}})$ olsun. Eğer $x_e^y \tilde{\subseteq} G_{\tilde{E}} \tilde{\subseteq} F_{\tilde{E}}$ olacak biçimde bir $G_{\tilde{E}} \tilde{\subseteq} \tilde{\tau}$ bipolar esnek açık kümesi mevcut ise, bu durumda $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesine, x_e^y bipolar esnek noktasının bipolar esnek komşuluğu denir.

Uyarı 4.2.1. x_e^y bipolar esnek noktasının $\tilde{\tau}$ bipolar esnek topolojisine göre bütün komşuluklarından oluşan aile $U(x_e^y)$ ile gösterilmiştir.

Önerme 4.2.1. $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \in BSTS(X_{\tilde{E}})$, x_e^y bipolar esnek nokta olsun. O zaman $U(x_e^y)$ bipolar esnek komşuluk ailesi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (1) Eğer $F_{\tilde{E}} \tilde{\subseteq} U(x_e^y) \Rightarrow x_e^y \tilde{\subseteq} F_{\tilde{E}}$,
- (2) Eğer $F_{\tilde{E}} \tilde{\subseteq} U(x_e^y)$ ve $F_{\tilde{E}} \tilde{\subseteq} G_{\tilde{E}} \Rightarrow G_{\tilde{E}} \tilde{\subseteq} U(x_e^y)$,
- (3) Eğer $F_{\tilde{E}}, G_{\tilde{E}} \tilde{\subseteq} U(x_e^y) \Rightarrow F_{\tilde{E}} \tilde{\cap} G_{\tilde{E}} \tilde{\subseteq} U(x_e^y)$,
- (4) Eğer $F_{\tilde{E}} \tilde{\subseteq} U(x_e^y)$ ise her $x_{e'}^{y'} \tilde{\subseteq} G_{\tilde{E}}$ için $F_{\tilde{E}} \tilde{\subseteq} U(x_{e'}^{y'})$ sağlanacak şekilde $G_{\tilde{E}} \tilde{\subseteq} U(x_e^y)$ vardır. (Öztürk, 2020.)

Kanıt. (1) $F_{\tilde{E}} \tilde{\in} U(x_e^y)$ olsun. Bipolar esnek komşuluk tanımından, $x_e^y \tilde{\in} G_{\tilde{E}} \subseteq F_{\tilde{E}}$ olacak şekilde $F_{\tilde{E}} \tilde{\in} \tilde{\tau}$ bipolar esnek açık kümesi vardır. Buradan $x_e^y \tilde{\in} F_{\tilde{E}}$ elde edilir.

(2) $F_{\tilde{E}} \tilde{\in} U(x_e^y)$ ve $F_{\tilde{E}} \subseteq G_{\tilde{E}}$ olsun. $F_{\tilde{E}} \tilde{\in} U(x_e^y)$ olduğundan, $x_e^y \tilde{\in} H_{\tilde{E}} \subseteq F_{\tilde{E}}$ olacak şekilde $H_{\tilde{E}} \tilde{\in} \tilde{\tau}$ bipolar esnek açık kümesi vardır. Buradan $x_e^y \tilde{\in} H_{\tilde{E}} \subseteq F_{\tilde{E}} \subseteq G_{\tilde{E}}$ olduğundan $G_{\tilde{E}} \tilde{\in} U(x_e^y)$ elde edilir.

(3) $F_{\tilde{E}}, G_{\tilde{E}} \tilde{\in} U(x_e^y)$ olsun. $F_{\tilde{E}} \tilde{\in} U(x_e^y)$ olduğundan, $x_e^y \tilde{\in} H_{\tilde{E}} \subseteq F_{\tilde{E}}$ olacak şekilde $H_{\tilde{E}} \tilde{\in} \tilde{\tau}$ bipolar esnek açık kümesi ve $G_{\tilde{E}} \tilde{\in} U(x_e^y)$ olduğundan $x_e^y \tilde{\in} K_{\tilde{E}} \subseteq G_{\tilde{E}}$ olacak şekilde $K_{\tilde{E}} \tilde{\in} \tilde{\tau}$ bipolar esnek açık kümesi vardır. $H_{\tilde{E}} \cap K_{\tilde{E}} \tilde{\in} \tilde{\tau}$ olduğundan bipolar esnek komşuluk tanımına göre $F_{\tilde{E}} \cap G_{\tilde{E}} \tilde{\in} U(x_e^y)$ elde edilir.

(4) $F_{\tilde{E}} \tilde{\in} U(x_e^y)$ olsun. Bu durumda $x_e^y \tilde{\in} H_{\tilde{E}} \subseteq F_{\tilde{E}}$ olacak şekilde bir $H_{\tilde{E}} \tilde{\in} \tilde{\tau}$ bipolar esnek açık kümesi vardır. $G_{\tilde{E}} = F_{\tilde{E}}$ olarak alınırsa $\forall x_{e'}^{y'} \tilde{\in} G_{\tilde{E}}$ için, $x_{e'}^{y'} \tilde{\in} G_{\tilde{E}} \subseteq F_{\tilde{E}}$ sağlandığından $F_{\tilde{E}} \tilde{\in} U(x_{e'}^{y'})$ elde edilir.

Teorem 4.2.1. $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \in BSTS(X_{\tilde{E}})$ olsun. $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesi bipolar esnek açık kümedir $\Leftrightarrow F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesi kendisine ait olan tüm bipolar esnek noktaların bipolar esnek komşuluğudur. (Öztürk, 2020.)

Kanıt. $F_{\tilde{E}} \tilde{\in} \tilde{\tau}$ ve $x_e^y \tilde{\in} F_{\tilde{E}}$ keyfi bipolar esnek nokta olsun. Bu durumda $x_e^y \tilde{\in} F_{\tilde{E}} \subseteq F_{\tilde{E}}$ olduğundan $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesi, kendisine ait olan tüm bipolar esnek noktaların bipolar esnek komşuluğudur. Tersine $F_{\tilde{E}}$ kendisine ait olan tüm bipolar esnek noktaların bipolar esnek komşuluğu olsun. Bu durumda $x_e^y \tilde{\in} H_{\tilde{E}} \subseteq F_{\tilde{E}}$ olacak biçimde bir $H_{\tilde{E}} \tilde{\in} \tilde{\tau}$ bipolar esnek açık kümesi vardır.

$$F_{\tilde{E}} = \bigcup_{x_e^y \tilde{\in} F_{\tilde{E}}} \{x_e^y\} \subseteq \bigcup_{x_e^y \tilde{\in} F_{\tilde{E}}} H_{\tilde{E}} \subseteq \bigcup_{x_e^y \tilde{\in} F_{\tilde{E}}} F_{\tilde{E}} = F_{\tilde{E}}$$

dir. $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek açık kümelerin bipolar esnek birleşimi şeklinde yazıldığından bipolar esnek açık kümedir.

5.BİPOLAR ESNEK DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde bipolar esnek dönüşüm, bipolar esnek dönüşüm altında bipolar esnek kümenin görüntüsü ve bipolar esnek kümenin ters görüntüsü kavramları verilerek onların bazı özellikleri incelenmiştir. Burada X ve Y iki evrensel küme, E ve E' sırasıyla X ve Y evrensel kümelerinin parametrelerinin kümesi ve $\emptyset \neq E_1, E_2 \subseteq E$, $\emptyset \neq E'_1, E'_2 \subseteq E'$ olsun. X üzerindeki tüm bipolar esnek kümelerin ailesi, parametre kümeleri E nin boştan farklı alt kümeleri olmak üzere $BS(X_{\bar{E}})$ ile gösterilmiştir.

Tanım 5.1. $f: X \rightarrow Y$ bire-bir dönüşüm, $\varphi: E \rightarrow E'$ ve her $\neg e \in \neg E$ için $\vartheta: \neg E \rightarrow \neg E'$, $\vartheta(\neg e) = \neg\varphi(e)$ olacak şekilde tanımlanan iki dönüşüm olsun. $\psi_{f\varphi\vartheta}: BS(X_{\bar{E}}) \rightarrow BS(Y_{\bar{E}'})$ dönüşümüne X den Y ye bipolar esnek dönüşüm denir.

Tanım 5.2. $F_{\bar{E}} \in BS(X_{\bar{E}})$ olsun. $F_{\bar{E}}$ bipolar esnek kümesinin $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek dönüşümü altındaki görüntüsü $\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\bar{E}}) = \{(\psi_{f\varphi\vartheta}(F(e')), \psi_{f\varphi\vartheta}(F(\neg e')), E')\}$

olarak gösterilir ve

$$\psi_{f\varphi\vartheta}(F)(e') = \begin{cases} f\left(\bigcup_{e \in \varphi^{-1}(e') \cap E_1} F(e)\right), & \varphi^{-1}(e') \cap E_1 \neq \emptyset \\ \emptyset, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

$$\psi_{f\varphi\vartheta}(F)(\neg e') = \begin{cases} f\left(\bigcap_{\neg e \in \vartheta^{-1}(\neg e') \cap \neg E_1} F(\neg e)\right), & \vartheta^{-1}(\neg e') \cap \neg E_1 \neq \emptyset \\ Y, & \text{diğer durumda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. (Fadel ve Dzul-Kifli, 2021.)

Önerme 5.1. $F_{\bar{E}_1} \in BS(X_{\bar{E}})$ olsun. O halde $\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\bar{E}_1})$ kümesi Y üzerinde bir bipolar esnek kümedir.

Kanıt. Her $e' \in E'$ için,

$$\begin{aligned}\psi_{f\varphi\vartheta}(F)(e') \tilde{\cap} \psi_{f\varphi\vartheta}(F)(\neg e') &= f\left(\bigcup_{e \in \varphi^{-1}(e') \cap E_1} F(e)\right) \tilde{\cap} f\left(\bigcap_{\neg e \in \vartheta^{-1}(\neg e') \cap \neg E_1} F(\neg e)\right) \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

olduğundan $\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{E_1})$ kümesi Y üzerinde bir bipolar esnek kümedir.

Örnek 5.1. $X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ iki evrensel küme, $E = \{e_1, e_2, e_3\}, E' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ parametrelerin kümesi olsun. $\forall i \in 1, 2, 3$ için $f: X \rightarrow Y$ dönüşümü $f(x_i) = y_i$, $\varphi: E \rightarrow E'$ dönüşümü $\varphi(e_1) = \varphi(e_3) = e'_2, \varphi(e_2) = e'_1$ ve $\vartheta: \neg E \rightarrow \neg E'$ dönüşümü ise $\vartheta(\neg e_i) = \neg \varphi(e_i)$ şeklinde tanımlansın. $\psi_{f\varphi\vartheta}: BS(X_E) \rightarrow BS(Y_{E'})$ X den Y ye bipolar esnek dönüşü ve $E_1 = \{e_1, e_2\} \subseteq E$ olmak üzere;

$$F_{E_1} = \{(e_1, \{x_1, x_2\}, \{x_3\}), (e_2, \{x_2\}, \{x_1\})\}$$

bipolar esnek kümesinin $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek dönüşümü altındaki bipolar esnek görüntüsü aşağıdaki gibi elde edilir:

$E_1 = \{e_1, e_2\} \subseteq E$ olmak üzere $\varphi(E_1) = \varphi(\{e_1, e_2\}) = \{e'_1, e'_2\}$ ve $\varphi^{-1}(e'_1) \cap E_1 = \{e_2\} \cap \{e_1, e_2\} = \{e_2\}$ olmak üzere

$$\psi_{f\varphi\vartheta}(F)(e'_1) = f\left(\bigcup_{e \in \varphi^{-1}(e'_1) \cap E_1} F(e)\right)$$

$$= f((F(e_2)))$$

$$= f(\{x_2\})$$

$$= \{y_2\}$$

şeklinde elde edilir.

$\vartheta(\neg E_1) = \{\neg e'_1, \neg e'_2\}$ ve $\vartheta^{-1}(\neg e'_1) \cap \neg E_1 = \{\neg e_2\} \cap \{\neg e_1, \neg e_2\} = \{\neg e_2\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\psi_{f\varphi\vartheta}(F)(\neg e'_1) &= f\left(\bigcap_{\neg e \in \vartheta^{-1}(\neg e'_1) \cap \neg E_1} F(\neg e)\right) \\
&= f((F(\neg e_2))) \\
&= f(\{x_1\}) \\
&= \{y_1\}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Benzer şekilde, $\varphi^{-1}(e'_2) \cap E_1 = \{e_1, e_3\} \cap \{e_1, e_2\} = \{e_1\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\psi_{f\varphi\vartheta}(F)(e'_2) &= f\left(\bigcup_{e \in \varphi^{-1}(e'_2) \cap E_1} F(e)\right) \\
&= f((F(e_1))) \\
&= f(\{x_1, x_2\}) \\
&= \{y_1, y_2\}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$\vartheta^{-1}(\neg e'_2) \cap \neg E_1 = \{\neg e_1, \neg e_3\} \cap \{\neg e_1, \neg e_2\} = \{\neg e_1\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\psi_{f\varphi\vartheta}(F)(\neg e'_2) &= f\left(\bigcap_{\neg e \in \vartheta^{-1}(\neg e'_2) \cap \neg E_1} F(\neg e)\right) \\
&= f((F(\neg e_1))) \\
&= f(\{x_3\}) \\
&= \{y_3\}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. O halde,

$$\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\widetilde{E}_1}) = \{(e'_1, \{y_2\}, \{y_1\}), (e'_2, \{y_1, y_2\}, \{y_3\}), (e'_3, \emptyset, Y)\}.$$

Uyarı 5.1. Bir bipolar esnek dönüşüm tanımlarken, evrensel kümeler üzerinde tanımlı olan $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu bire-bir dönüşüm olmalıdır. Aksi halde bir bipolar esnek kümenin bipolar esnek dönüşüm altındaki bipolar esnek görüntüsü, bipolar esnek küme olmayabilir. (Fadel ve Dzul-Kifli, 2021.)

Örnek 5.2. Farzedelim ki, Örnek 5.1 de verilen $f(x_3) = y_1$ olarak ele alınsın. Bu durumda $f: X \rightarrow Y$ dönüşümü bire-bir olmadığı açıktır. Buradan $\psi_{f\varphi\vartheta}(F)(e'_2) = \{y_1, y_2\}$ ve $\psi_{f\varphi\vartheta}(F)(\neg e'_2) = \{y_1\}$ olup $\psi_{f\varphi\vartheta}(F)(e'_2) \widetilde{\cap} \psi_{f\varphi\vartheta}(F)(\neg e'_2) \neq \emptyset$ bulunur. Böylece $\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\widetilde{E}_1})$ bipolar esnek küme değildir. Dolayısıyla $f: X \rightarrow Y$ dönüşümünün bire-bir olması gereksiz değildir.

Tanım 5.3. $\psi_{f\varphi\vartheta}: BS(X_{\widetilde{E}}) \rightarrow BS(Y_{\widetilde{E}'})$ bipolar esnek dönüşüm, $F_{\widetilde{E}_1}, G_{\widetilde{E}_2} \widetilde{\in} BS(X_{\widetilde{E}})$ olsun. Her $e' \in E'$ için, $F_{\widetilde{E}_1}, G_{\widetilde{E}_2}$ bipolar esnek kümelerinin $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek dönüşümü altındaki bipolar esnek birleşimi ve bipolar esnek kesişimi sırasıyla

$$\begin{aligned} & \left(\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\widetilde{E}_1}) \widetilde{\cup} \psi_{f\varphi\vartheta}(G_{\widetilde{E}_2}) \right) (e') = \\ & \left(e', \psi_{f\varphi\vartheta}(F)(e') \widetilde{\cup} \psi_{f\varphi\vartheta}(G)(e'), \psi_{f\varphi\vartheta}(F)(\neg e') \widetilde{\cap} \psi_{f\varphi\vartheta}(G)(\neg e') \right), \\ & \left(\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\widetilde{E}_1}) \widetilde{\cap} \psi_{f\varphi\vartheta}(G_{\widetilde{E}_2}) \right) (e') \\ & = \left(e', \psi_{f\varphi\vartheta}(F)(e') \widetilde{\cap} \psi_{f\varphi\vartheta}(G)(e'), \psi_{f\varphi\vartheta}(F)(\neg e') \widetilde{\cup} \psi_{f\varphi\vartheta}(G)(\neg e') \right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. (Fadel ve Dzul-Kifli, 2021.)

Tanım 5.4. $\psi_{f\varphi\vartheta}: BS(X_{\widetilde{E}}) \rightarrow BS(Y_{\widetilde{E}'})$ bipolar esnek dönüşüm, $f: X \rightarrow Y$ bire-bir dönüşüm, $\varphi: E \rightarrow E'$ ve her $\neg e \in \neg E$ için $\vartheta: \neg E \rightarrow \neg E', \vartheta(\neg e) = \neg\varphi(e)$ olacak şekilde tanımlanan iki dönüşüm olsun.

(1) Eğer f ve φ dönüşümleri bire-bir ise $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek dönüşümü bipolar esnek bire bir dönüşümdür.

(2) Eğer f ve φ dönüşümleri örten ise $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek dönüşümü bipolar esnek örten dönüşümdür.

(3) Eğer f ve φ dönüşümleri biyektif (bire-bir ve örten) ise $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek dönüşümü bipolar esnek biyektif (bire-bir ve örten) dönüşümdür.

Uyarı 5.2. Tanım 5.4. de verilen bipolar esnek örten dönüşüm tanımı, klasik anlamdaki örten dönüşüm tanımına denktir. Yani, $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek dönüşümü, bipolar esnek örten dönüşüm ise $\psi_{f\varphi\vartheta}(\tilde{X}_{\tilde{E}}) = (\tilde{Y}_{\tilde{E}'})$ dir. (Fadel ve Dzul-Kifli, 2021.)

Uyarı 5.3. Tanım 5.4 de verilen bipolar esnek bire-bir dönüşüm tanımı, klasik anlamdaki bire-bir dönüşüm tanımına denk değildir. Yani, $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek dönüşümü bipolar esnek bire-bir dönüşüm olsun. O zaman $\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}_1}) = \psi_{f\varphi\vartheta}(G_{\tilde{E}_2})$ iken $(F_{\tilde{E}_1}) \neq (G_{\tilde{E}_2})$ olabilir. (Fadel ve Dzul-Kifli, 2021.)

Uyarı 5.4. Bipolar esnek iki küme aynı parametre kümesine sahip ise $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek dönüşümü, bipolar esnek bire-birdir. Yani, $F_{\tilde{E}_1}, G_{\tilde{E}_1} \in BS(X_{\tilde{E}})$ için $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek bire-birdir $\Leftrightarrow \psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}_1}) = \psi_{f\varphi\vartheta}(G_{\tilde{E}_1})$ iken $(F_{\tilde{E}_1}) = (G_{\tilde{E}_1})$. (Fadel ve Dzul-Kifli, 2021.)

Teorem 5.1. $\psi_{f\varphi\vartheta}: BS(X_{\tilde{E}}) \rightarrow BS(Y_{\tilde{E}'})$ bipolar esnek dönüşüm, $f: X \rightarrow Y$ bire-bir dönüşüm, $\varphi: E \rightarrow E'$ ve her $\neg e \in \neg E$ için $\vartheta: \neg E \rightarrow \neg E', \vartheta(\neg e) = \neg \varphi(e)$ olacak şekilde tanımlanan iki dönüşüm ve $F_{\tilde{E}_1}, G_{\tilde{E}_2} \in BS(X_{\tilde{E}})$ olsun. Bu takdirde;

$$(1) \psi_{f\varphi\vartheta}(\Phi_{\tilde{E}}) \cong (\Phi_{\tilde{E}'})$$

$$(2) \psi_{f\varphi\vartheta}(\tilde{X}_{\tilde{E}}) \cong (\tilde{Y}_{\tilde{E}}) \text{ (} f \text{ bipolar esnek örten dönüşüm ise eşitlik sağlanır.)}$$

$$(3) (F_{\tilde{E}_1}) \cong (G_{\tilde{E}_2}) \Rightarrow \psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}_1}) \cong \psi_{f\varphi\vartheta}(G_{\tilde{E}_2})$$

$$(4) \psi_{f\varphi\vartheta}((F_{\tilde{E}_1}) \cup (G_{\tilde{E}_2})) = \psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}_1}) \cup \psi_{f\varphi\vartheta}(G_{\tilde{E}_2})$$

$$(5) \psi_{f\varphi\vartheta}((F_{\tilde{E}_1}) \cap (G_{\tilde{E}_2})) \cong \psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}_1}) \cap \psi_{f\varphi\vartheta}(G_{\tilde{E}_2}) \text{ özellikleri sağlanır. (} \psi_{f\varphi\vartheta} \text{ bipolar esnek bire-bir dönüşüm olduğunda eşitlik sağlanır.) (Fadel ve Dzul-Kifli, 2021.)}$$

Kanıt. (1) ve (2) nin kanıtı açıktır.

(3) $\forall e' \in E'$ için $\psi_{f\varphi\vartheta}(F(e')) \subseteq \psi_{f\varphi\vartheta}(G(e'))$ ve $\forall \neg e' \in \neg E'$ için $\psi_{f\varphi\vartheta}(G(\neg e')) \subseteq \psi_{f\varphi\vartheta}(F(\neg e'))$ olduğunu göstermemiz gerekir. Keyfi $e' \in \varphi(E_1) \subseteq \varphi(E_2) \subseteq E'$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}\psi_{f\varphi\vartheta}(F(e')) &= f\left(\bigcup_{e \in \varphi^{-1}(e') \cap E_1} F(e)\right) \\ &\subseteq f\left(\bigcup_{e \in \varphi^{-1}(e') \cap E_2} G(e)\right) \\ &= \psi_{f\varphi\vartheta}(G(e')).\end{aligned}$$

Keyfi $\neg e' \in \vartheta(\neg E_1) \subseteq \vartheta(\neg E_2) \subseteq \neg E'$ olsun.

$$\begin{aligned}\psi_{f\varphi\vartheta}(G(\neg e')) &= f\left(\bigcap_{\neg e \in \vartheta^{-1}(\neg e') \cap \neg E_2} G(\neg e)\right) \\ &\subseteq f\left(\bigcap_{\neg e \in \vartheta^{-1}(\neg e') \cap \neg E_1} G(\neg e)\right) \\ &\subseteq f\left(\bigcap_{\neg e \in \vartheta^{-1}(\neg e') \cap \neg E_1} F(\neg e)\right) \\ &= \psi_{f\varphi\vartheta}(F(\neg e')).\end{aligned}$$

Böylece $\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\widetilde{E_1}}) \cong \psi_{f\varphi\vartheta}(G_{\widetilde{E_2}})$ elde edilir.

(4) $\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\widetilde{E_1}}) \widetilde{\cup} \psi_{f\varphi\vartheta}(G_{\widetilde{E_2}}) = (B_{\widetilde{E'}})$ ve $\psi_{f\varphi\vartheta}((F_{\widetilde{E_1}}) \widetilde{\cup} (G_{\widetilde{E_2}})) = \psi_{f\varphi\vartheta}(K_{\widetilde{E_1 \cup E_2}}) = (R_{\widetilde{E'}})$ şeklinde gösterelim. Burada $\forall e' \in E'$ için $B(e') = R(e')$, $\forall \neg e' \in \neg E'$ için $B(\neg e') = R(\neg e')$ olduğunu gösterirsek kanıtı tamamlamış oluruz.

Keyfi $e' \in \varphi(E_1 \cup E_2) = \varphi(E_1) \cup \varphi(E_2) = E'_1 \cup E'_2$ olsun. O zaman,

$$R(e') = \psi_{f\varphi\vartheta}(K)(e') = f(\cup_{e \in \varphi^{-1}(e') \cap (E_1 \cup E_2)} K(e)).$$

Şimdi üç farklı durumu ele alalım.

Durum 1: $e' \in E'_1 \setminus E'_2$ ise bu durumda $\varphi^{-1}(e') \cap E_2 = \emptyset$ olur. O halde

$$R(e') = \psi_{f\varphi\vartheta}(K)(e') = f\left(\left(\cup_{e \in \varphi^{-1}(e') \cap (E_1 \setminus E_2)} F(e)\right)\right).$$

Durum 2: $e' \in E'_2 \setminus E'_1$ ise bu durumda $\varphi^{-1}(e') \cap E_1 = \emptyset$ olur. O halde

$$R(e') = \psi_{f\varphi\vartheta}(K)(e') = f\left(\left(\cup_{e \in \varphi^{-1}(e') \cap (E_2 \setminus E_1)} G(e)\right)\right).$$

Durum 3: $e' \in E'_1 \cap E'_2$ ise bu durumda $\varphi^{-1}(e') \in E_1 \cup E_2$. O halde,

$$R(e') = \psi_{f\varphi\vartheta}(K)(e')$$

$$= f\left(\left(\cup_{e \in \varphi^{-1}(e') \cap E_1} F(e) \cup \cup_{e \in \varphi^{-1}(e') \cap E_2} G(e)\right)\right)$$

$$= f\left(\left(\cup_{e \in \varphi^{-1}(e') \cap E_1} F(e)\right) \cup f\left(\left(\cup_{e \in \varphi^{-1}(e') \cap E_2} G(e)\right)\right)\right).$$

Buradan;

$$R(e') = \begin{cases} f\left(\left(\cup_{e \in \varphi^{-1}(e') \cap (E_1 \setminus E_2)} F(e)\right)\right), & e' \in E'_1 \setminus E'_2 \\ f\left(\left(\cup_{e \in \varphi^{-1}(e') \cap (E_2 \setminus E_1)} G(e)\right)\right), & e' \in E'_2 \setminus E'_1 \\ f\left(\left(\cup_{e \in \varphi^{-1}(e') \cap E_1} F(e)\right) \cup f\left(\left(\cup_{e \in \varphi^{-1}(e') \cap E_2} G(e)\right)\right), & e' \in E'_1 \cap E'_2 \end{cases}$$

$$R(e') = \begin{cases} \psi_{f\varphi\vartheta}(F)(e'), & e' \in E'_1 \setminus E'_2 \\ \psi_{f\varphi\vartheta}(G)(e'), & e' \in E'_1 \setminus E'_2 \\ \psi_{f\varphi\vartheta}(F)(e') \cup \psi_{f\varphi\vartheta}(G)(e'), & e' \in E'_1 \cap E'_2 \end{cases}$$

elde edilir. $\forall e' \in E'_1 \setminus E'_2$ için $\psi_{f\varphi\vartheta}(G)(e') = \emptyset$ ve $\forall e' \in E'_2 \setminus E'_1$ için $\psi_{f\varphi\vartheta}(F)(e') = \emptyset$ olduğundan dolayı $\forall e' \in E'$ için

$$R(e') = \psi_{f\varphi\vartheta}(F)(e') \cup \psi_{f\varphi\vartheta}(G)(e') = B(e')$$

elde edilir. Böylece $\forall e' \in E'$ için, $R(e') = B(e')$ eşitliği sağlanır.

Keyfi $\neg e' \in \neg(E'_1 \cup E'_2) = \neg E'_1 \cup \neg E'_2$ olsun.

$$R(\neg e') = \psi_{f\varphi\vartheta}(K)(\neg e') = f\left(\bigcap_{\neg e \in \vartheta^{-1}(\neg e') \cap (\neg E'_1 \cup \neg E'_2)} K(\neg e)\right).$$

Benzer şekilde üç farklı durumu ele aldığımızda $f: X \rightarrow Y$ bire-bir dönüşüm olduğu için,

$$R(\neg e') = \begin{cases} \psi_{f\varphi\vartheta}(F)(\neg e'), & \neg e' \in \neg E'_1 \setminus \neg E'_2 \\ \psi_{f\varphi\vartheta}(G)(\neg e'), & \neg e' \in \neg E'_2 \setminus \neg E'_1 \\ \left(\psi_{f\varphi\vartheta}(F)(\neg e')\right) \cap \left(\psi_{f\varphi\vartheta}(G)(\neg e')\right), & \neg e' \in \neg E'_1 \cap \neg E'_2 \end{cases}$$

elde edilir. $\forall \neg e' \in \neg E'_1 \setminus \neg E'_2$ için $\psi_{f\varphi\vartheta}(G)(\neg e') = Y$ ve $\forall \neg e' \in \neg E'_2 \setminus \neg E'_1$ için $\psi_{f\varphi\vartheta}(F)(\neg e') = Y$ olduğundan dolayı, $\forall \neg e' \in \neg E'$ için $R(\neg e') = \psi_{f\varphi\vartheta}(F)(\neg e') \cap \psi_{f\varphi\vartheta}(G)(\neg e') = B(\neg e')$

olarak elde edilir. Böylece $\forall \neg e' \in \neg E'$ için $R(\neg e') = B(\neg e')$ eşitliği elde edilir.

(5) $\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\widetilde{E}_1} \widetilde{\cap} G_{\widetilde{E}_2}) = \psi_{f\varphi\vartheta}(H_{\widetilde{E_1 \cap E_2}}) = P_{\widetilde{E'}} \quad \text{ve} \quad \psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\widetilde{E}_1}) \widetilde{\cap} \psi_{f\varphi\vartheta}(G_{\widetilde{E}_2}) = (B_{\widetilde{E'}})$ olsun.

$\forall e' \in E'$ için $\psi_{f\varphi\vartheta}(H)(e') \subseteq B(e')$ ve $\forall \neg e' \in \neg E'$ için $B(\neg e') \subseteq \psi_{f\varphi\vartheta}(H)(\neg e')$ olduğunu göstermek yeterlidir. Keyfi $e' \in \varphi(E_1 \cap E_2) \subseteq E'$ için;

$$\psi_{f\varphi\vartheta}(H(e')) = f\left(\bigcup_{e \in \varphi^{-1}(e') \cap (E_1 \cap E_2)} H(e)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= f\left(\bigcup_{e \in \varphi^{-1}(e') \cap (E_1 \cap E_2)} F(e) \cap G(e)\right) \\
&\subseteq f\left(\bigcup_{e \in \varphi^{-1}(e') \cap (E_1 \cap E_2)} F(e)\right) \cap f\left(\bigcup_{e \in \varphi^{-1}(e') \cap (E_1 \cap E_2)} G(e)\right) \\
&\subseteq f\left(\bigcup_{e \in \varphi^{-1}(e') \cap E_1} F(e)\right) \cap f\left(\bigcup_{e \in \varphi^{-1}(e') \cap E_2} G(e)\right) \\
&= \psi_{f\varphi\vartheta}(F)(e') \cap \psi_{f\varphi\vartheta}(G)(e') \\
&= (B)(e').
\end{aligned}$$

Keyfi $\neg e' \in \vartheta(\neg(E_1 \cap E_2)) \subseteq \vartheta(\neg E_1 \cap \neg E_2) \subseteq \neg E'$ için;

$$\begin{aligned}
\psi_{f\varphi\vartheta}(H)(\neg e') &= f\left(\bigcap_{\neg e \in \vartheta^{-1}(\neg e') \cap (\neg E_1 \cap \neg E_2)} H(\neg e)\right) \\
&= f\left(\bigcap_{\neg e \in \vartheta^{-1}(\neg e') \cap (\neg E_1 \cap \neg E_2)} F(\neg e) \cup G(\neg e)\right) \\
&\supseteq f\left(\bigcap_{\neg e \in \vartheta^{-1}(\neg e') \cap (\neg E_1 \cap \neg E_2)} F(\neg e)\right) \cup f\left(\bigcap_{\neg e \in \vartheta^{-1}(\neg e') \cap (\neg E_1 \cap \neg E_2)} G(\neg e)\right) \\
&\supseteq f\left(\bigcap_{\neg e \in \vartheta^{-1}(\neg e') \cap \neg E_1} F(\neg e)\right) \cup f\left(\bigcap_{\neg e \in \vartheta^{-1}(\neg e') \cap \neg E_2} G(\neg e)\right) \\
&= \psi_{f\varphi\vartheta}(F)(\neg e') \cup \psi_{f\varphi\vartheta}(G)(\neg e') \\
&= (B)(\neg e').
\end{aligned}$$

$\forall e' \in E'$ için $\psi_{f\varphi\vartheta}(H)(e') \subseteq B(e')$ ve $\forall \neg e' \in \neg E'$ için $B(\neg e') \subseteq \psi_{f\varphi\vartheta}(H)(\neg e')$ elde edilir.

Tanım 5.5. $f: X \rightarrow Y$ bire-bir dönüşüm, $\varphi: E \rightarrow E'$ ve her $\neg e \in \neg E$ için $\vartheta: \neg E \rightarrow \neg E', \vartheta(\neg e) = \neg\varphi(e)$ olacak şekilde tanımlanan iki dönüşüm ve $\psi_{f\varphi\vartheta}: BS(X_{\widetilde{E}}) \rightarrow BS(Y_{\widetilde{E}'})$ bipolar esnek dönüşüm, $H_{\widetilde{E}'_1} \widetilde{\in} BS(Y_{\widetilde{E}'})$ olsun. $H_{\widetilde{E}'_1}$ bipolar esnek kümesinin $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek dönüşümü altındaki ters görüntüsü $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H_{\widetilde{E}'_1})$ olarak gösterilir ve $\forall e \in E$ için;

$$\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(e) = \begin{cases} f^{-1}(H(\varphi(e))), & \varphi(e) \in E'_1 \\ \emptyset, & \varphi(e) \notin E'_1 \end{cases}$$

$$\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(\neg e) = \begin{cases} f^{-1}(H(\vartheta(\neg e))), & \vartheta(\neg e) \in \neg E'_1 \\ X, & \vartheta(\neg e) \notin \neg E'_1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. (Fadel ve Dzul-Kifli, 2021.)

Önerme 5.2. $H_{\widetilde{E}'_1} \widetilde{\in} BS(Y_{\widetilde{E}'})$ olsun. O halde $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H_{\widetilde{E}'_1})$ kümesi X üzerinde bir bipolar esnek kümedir.

Kanıt. Her $e \in E$ için,

$$\begin{aligned} \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(e) \widetilde{\cap} \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(\neg e) &= f^{-1}\left(\left(H(\varphi(e))\right)\right) \widetilde{\cap} f^{-1}\left(H(\vartheta(\neg e))\right) \\ &= f^{-1}\left(\left(H(\varphi(e))\right) \widetilde{\cap} H(\vartheta(\neg e))\right) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \end{aligned}$$

olduğundan $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H_{\widetilde{E}'_1})$ kümesi X üzerinde bir bipolar esnek kümedir.

Örnek 5.3. Burada Örnek 5.1. de verilen bipolar esnek dönüşümü ele alalım.

$$H_{\widetilde{E}'_1} = \{(e'_1, \{y_1, y_2\}, \{y_3\}), (e'_2, \{y_2\}, \{y_1\})\}$$

bipolar esnek kümesinin $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek dönüşümü altındaki bipolar esnek ters görüntüsü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\varphi^{-1}(E'_1) = \varphi^{-1}(\{e'_1, e'_2\}) = \{e_1, e_2, e_3\} \text{ dür. } \varphi(e_1) = e'_2 \in E'_1 \text{ olduğundan,}$$

$$\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(e_1) = f^{-1}\left(H(\varphi(e_1))\right)$$

$$= f^{-1}(H(e'_2))$$

$$= f^{-1}(\{y_2\})$$

$$= \{x_2\}$$

$$\varphi(e_2) = e'_1 \in E'_1 \text{ olduğundan,}$$

$$\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(e_2) = f^{-1}\left(H(\varphi(e_2))\right)$$

$$= f^{-1}(H(e'_1))$$

$$= f^{-1}(\{y_1, y_2\})$$

$$= \{x_1, x_2\}$$

$$\varphi(e_3) = e'_2 \in E'_1 \text{ olduğundan,}$$

$$\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(e_3) = f^{-1}\left(H(\varphi(e_3))\right)$$

$$= f^{-1}(H(e'_2))$$

$$= f^{-1}(\{y_2\})$$

$$= \{x_2\}.$$

$$\vartheta^{-1}(\neg E'_1) = \vartheta^{-1}(\{\neg e'_1, \neg e'_2\}) = \{\neg e_1, \neg e_2, \neg e_3\}. \quad \text{Burada} \quad \vartheta(\neg e_1) = \neg e'_2 \in \neg E'_1 \text{ olduğundan,}$$

$$\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(\neg e_1) = f^{-1}\left(H(\vartheta(\neg e_1))\right)$$

$$= f^{-1}(H(\neg e'_2))$$

$$= f^{-1}(\{y_1\})$$

$$= \{x_1\}$$

$\vartheta(\neg e_2) = \neg e'_1 \in \neg E'_1$ olduğundan

$$\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(\neg e_2) = f^{-1}\left(H(\vartheta(\neg e_2))\right)$$

$$= f^{-1}(H(\neg e'_1))$$

$$= f^{-1}(\{y_3\})$$

$$= \{x_3\}$$

$\vartheta(\neg e_3) = \neg e'_2 \in \neg E'_1$ olduğundan

$$\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(\neg e_3) = f^{-1}\left(H(\vartheta(\neg e_3))\right)$$

$$= f^{-1}(H(\neg e'_2))$$

$$= f^{-1}(\{y_1\})$$

$$= \{x_1\}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda

$$\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}\left(H_{\widetilde{E'_1}}\right) = ((e_1, \{x_2\}, \{x_1\}), (e_2, \{x_1, x_2\}, \{x_3\}), (e_3, \{x_2\}, \{x_1\})).$$

Tanım 5.6. $\psi_{f\varphi\vartheta}: BS(X_{\widetilde{E}}) \rightarrow BS(Y_{\widetilde{E'}})$ bipolar esnek dönüşüm ve $(H_{\widetilde{E'_1}}), (Q_{\widetilde{E'_2}}) \in BS(Y_{\widetilde{E'}})$ olsun. Bu durumda $\forall e \in E$ için $(H_{\widetilde{E'_1}})$ ve $(Q_{\widetilde{E'_2}})$ bipolar esnek kümelerinin $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek dönüşümü altındaki bipolar esnek ters görüntülerinin birleşimi ve kesişimi sırasıyla,

$$\begin{aligned} & \left(\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}\left((H_{\widetilde{E'_1}})\right) \widetilde{\cap} \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}\left((Q_{\widetilde{E'_2}})\right) \right)(e) \\ &= \left(e, \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(e) \cup \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Q)(e), \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(\neg e) \right. \\ & \quad \left. \cap \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Q)(\neg e) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1} \left(\left(H_{\widetilde{E'_1}} \right) \right) \widetilde{\cap} \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1} \left(\left(Q_{\widetilde{E'_2}} \right) \right) \right) (e) \\
& = \left(e, \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(e) \cap \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Q)(e), \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(\neg e) \right. \\
& \quad \left. \cup \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Q)(\neg e) \right)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. (Fadel ve Dzul-Kifli, 2021.)

Teorem 5.2. $\psi_{f\varphi\vartheta}: BS(X_{\widetilde{E}}) \rightarrow BS(Y_{\widetilde{E'}})$ bipolar esnek dönüşüm, $f: X \rightarrow Y$ bire-bir dönüşüm, $\varphi: E \rightarrow E'$ ve her $\neg e \in \neg E$ için $\vartheta: \neg E \rightarrow \neg E', \vartheta(\neg e) = \neg\varphi(e)$ olacak şekilde tanımlanan iki dönüşüm ve $H_{\widetilde{E'_1}}, Q_{\widetilde{E'_2}} \widetilde{\in} BS(Y_{\widetilde{E'}})$ olsun. Bu takdirde;

- (1) $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(\widetilde{Y}_{\widetilde{E'}}) = (\widetilde{X}_{\widetilde{E}}),$
- (2) $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(\Phi_{\widetilde{E'}}) = (\Phi_{\widetilde{E}}),$
- (3) $(H_{\widetilde{E'_1}}) \widetilde{\subseteq} (Q_{\widetilde{E'_2}}) \Rightarrow \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H_{\widetilde{E'_1}}) \widetilde{\subseteq} \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Q_{\widetilde{E'_2}}),$
- (4) $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1} \left(\left(H_{\widetilde{E'_1}} \right) \widetilde{\cup} \left(Q_{\widetilde{E'_2}} \right) \right) = \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H_{\widetilde{E'_1}}) \widetilde{\cup} \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Q_{\widetilde{E'_2}}),$
- (5) $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1} \left(\left(H_{\widetilde{E'_1}} \right) \widetilde{\cap} \left(Q_{\widetilde{E'_2}} \right) \right) = \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H_{\widetilde{E'_1}}) \widetilde{\cap} \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Q_{\widetilde{E'_2}}),$
- (6) $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1} \left(\left(H_{\widetilde{E'_1}} \right)^c \right) = \left(\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H_{\widetilde{E'_1}}) \right)^c$

özellikleri sağlanır. (Fadel ve Dzul-Kifli, 2021.)

Kanıt. (1) ve (2) açıktır.

(3) $\forall e \in E$ için, $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H(e)) \subseteq \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Q(e))$ ve $\forall \neg e \in \neg E$ için $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Q(\neg e)) \subseteq \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H(\neg e))$ olduğunu göstermek gereklidir.

$\varphi(e) \in E'_1 \subseteq E'_2$ olacak şekilde keyfi $e \in E$ alalım. O zaman,

$$\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(e) = f^{-1}(H(\varphi(e)))$$

$$\subseteq f^{-1}(Q(\varphi(e)))$$

$$= \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Q)(e).$$

$\vartheta(\neg e) \in \neg E'_1 \subseteq \neg E'_2$ olacak şekilde keyfi $\neg e \in \neg E$ alalım. O zaman,

$$\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Q)(\neg e) = f^{-1}(Q(\vartheta(\neg e)))$$

$$\subseteq f^{-1}(H(\vartheta(\neg e)))$$

$$= \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(\neg e).$$

Böylece $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H_{E'_1}) \subseteq \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Q_{E'_2})$ elde edilir.

$$(4) \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}((H_{E'_1}) \cup (Q_{E'_2})) = \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Z_{E'_1 \cup E'_2}) = (A_{\bar{E}}),$$

$$\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H_{E'_1}) \cup \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Q_{E'_2}) = (B_{\bar{E}})$$

olsun. Eğer $\forall e \in E$ için $A(e) = B(e)$ ve $\forall \neg e \in \neg E$ için $A(\neg e) = B(\neg e)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\varphi(e) \in E'_1 \cup E'_2$ olacak şekilde keyfi $e \in E$ alalım. O zaman,

$$A(e) = \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Z(e))$$

$$= f^{-1}(Z(\varphi(e)))$$

$$= \begin{cases} f^{-1}(H(\varphi(e))), & \varphi(e) \in E'_1 \setminus E'_2 \\ f^{-1}(Q(\varphi(e))), & \varphi(e) \in E'_2 \setminus E'_1 \\ f^{-1}(H(\varphi(e)) \cup Q(\varphi(e))), & \varphi(e) \in E'_1 \cap E'_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f^{-1}(H(\varphi(e))), & \varphi(e) \in E'_1 \setminus E'_2 \\ f^{-1}(Q(\varphi(e))), & \varphi(e) \in E'_2 \setminus E'_1 \\ f^{-1}(H(\varphi(e)) \cup Q(\varphi(e))), & \varphi(e) \in E'_1 \cap E'_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(e), & \varphi(e) \in E'_1 \setminus E'_2 \\ \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Q)(e), & \varphi(e) \in E'_2 \setminus E'_1 \\ \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(e) \cup \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Q)(e), & \varphi(e) \in E'_1 \cap E'_2. \end{cases}$$

$\forall \varphi(e) \in E'_1 \setminus E'_2$ için $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Q)(e) = \emptyset$ ve $\forall \varphi(e) \in E'_2 \setminus E'_1$ için $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(e) = \emptyset$ olduğundan,

$$A(e) = \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(e) \cup \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Q)(e) = B(e)$$

olarak elde edilir. Böylece $\forall e \in E$ için $A(e) = B(e)$ sağlanır.

Şimdi $\vartheta(\neg e) \in \neg(E'_1 \cup E'_2) = \neg E'_1 \cup \neg E'_2$ olacak şekilde keyfî $\neg e \in \neg E$ alalım.

$$A(\neg e) = \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Z(\neg e))$$

$$= f^{-1}(Z(\vartheta(\neg e)))$$

$$= \begin{cases} f^{-1}(H(\vartheta(\neg e))), & \vartheta(\neg e) \in \neg E'_1 \setminus \neg E'_2 \\ f^{-1}(Q(\vartheta(\neg e))), & \vartheta(\neg e) \in \neg E'_2 \setminus \neg E'_1 \\ f^{-1}(H(\vartheta(\neg e)) \cap Q(\vartheta(\neg e))), & \vartheta(\neg e) \in \neg E'_1 \cap \neg E'_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f^{-1}(H(\vartheta(\neg e))), & \vartheta(\neg e) \in \neg E'_1 \setminus \neg E'_2 \\ f^{-1}(Q(\vartheta(\neg e))), & \vartheta(\neg e) \in \neg E'_2 \setminus \neg E'_1 \\ f^{-1}(H(\vartheta(\neg e)) \cap Q(\vartheta(\neg e))), & \vartheta(\neg e) \in \neg E'_1 \cap \neg E'_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H(\neg e)), & \vartheta(\neg e) \in \neg E'_1 \setminus \neg E'_2 \\ \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Q(\neg e)), & \vartheta(\neg e) \in \neg E'_2 \setminus \neg E'_1 \\ \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H(\neg e)) \cap \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Q(\neg e)), & \vartheta(\neg e) \in \neg E'_1 \cap \neg E'_1 \end{cases}$$

$\forall \vartheta(\neg e) \in \neg E'_1 \setminus \neg E'_2$ için $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Q(\neg e)) = X$ ve $\forall \vartheta(\neg e) \in \neg E'_2 \setminus \neg E'_1$

için $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H(\neg e)) = X$ olduğundan

$$A(\neg e) = \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(\neg e) \cap \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(Q)(\neg e) = B(\neg e)$$

olarak elde edilir. Böylece $\forall \neg e \in \neg E$ için $A(\neg e) = B(\neg e)$ sağlanır.

$$(5) \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1} \left(\left(H_{E'_1} \right) \tilde{\cap} \left(Q_{E'_2} \right) \right) = \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1} \left(Z_{E'_1 \cap E'_2} \right) = (A_{\bar{E}})$$

$$\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1} \left(H_{E'_1} \right) \tilde{\cap} \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1} \left(Q_{E'_2} \right) = (B_{\bar{E}})$$

olsun. $\forall e \in E$ için $A(e) = B(e)$ ve $\forall \neg e \in \neg E$ için $A(\neg e) = B(\neg e)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\varphi(e) \in E'_1 \cap E'_2$ olacak şekilde keyfi $e \in E$ alalım.

$$A(e) = \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1} (Z(e))$$

$$= f^{-1} (Z(\varphi(e)))$$

$$= f^{-1} (H(\varphi(e)) \cap Q(\varphi(e)))$$

$$= f^{-1} (H(\varphi(e))) \cap f^{-1} (Q(\varphi(e)))$$

$$= \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1} (H)(e) \cap \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1} (Q)(e)$$

$$= B(e).$$

$\vartheta(\neg e) \in \neg(E'_1 \cap E'_2) = \neg E'_1 \cap \neg E'_2$ olacak şekilde keyfi $\neg e \in \neg E$ alalım.

$$A(\neg e) = \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1} (Z(\neg e))$$

$$= f^{-1} (Z(\vartheta(\neg e)))$$

$$= f^{-1} (H(\vartheta(\neg e)) \cup Q(\vartheta(\neg e)))$$

$$= f^{-1} (H(\vartheta(\neg e))) \cup f^{-1} (Q(\vartheta(\neg e)))$$

$$= \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1} (H(\neg e)) \cup \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1} (Q(\neg e))$$

$$= B(\neg e)$$

elde edilir.

(6) $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H_{\widetilde{E}_1'}) = (A_{\widetilde{E}_1})$ olsun. Her $e \in E_1$ için,

$$\begin{aligned} \left(\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(e)\right)^c &= \left(f^{-1}\left(H(\varphi(e))\right)\right)^c \\ &= (A(e))^c \\ &= A(\neg e). \end{aligned}$$

$(H_{\widetilde{E}_1'})^c = (H^c(e), H^c(\neg e), E_1)$ dir. Böylece,

$$\begin{aligned} \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}((H)^c)(e) &= \left(f^{-1}\left((H)^c(\varphi(e))\right)\right) \\ &= \left(f^{-1}\left(H(\neg\varphi(e))\right)\right) \\ &= \left(f^{-1}\left(H(\vartheta(\neg e))\right)\right) \\ &= A(\neg e) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan her $e \in E_1$ için,

$$\left(\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(e)\right)^c = \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}((H)^c)(e).$$

Her $\neg e \in \neg E$ için,

$$\left(\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)(\neg e)\right)^c = \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(H)^c(\neg e)$$

olduğu kolaylıkla elde edilir. Böylece

$$\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}\left(\left(H_{\widetilde{E}_1'}\right)^c\right) = \left(\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}\left(H_{\widetilde{E}_1'}\right)\right)^c$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 5.3. $\psi_{f\varphi\vartheta}: BS(X_{\widetilde{E}}) \rightarrow BS(Y_{\widetilde{E}'})$ bipolar esnek dönüşüm, $f: X \rightarrow Y$ bire-bir dönüşüm, $\varphi: E \rightarrow E'$ ve her $\neg e \in \neg E$ için $\vartheta: \neg E \rightarrow \neg E', \vartheta(\neg e) = \neg\varphi(e)$ olacak

şekilde tanımlanan iki dönüşüm olsun. Eğer $F_{\widetilde{E}_1} \cong BS(X_{\widetilde{E}})$ ve $(H_{\widetilde{E}_1}) \cong BS(Y_{\widetilde{E}})$ ise o zaman

(1) $(F_{\widetilde{E}_1}) \cong \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1} \left(\psi_{f\varphi\vartheta} \left((F_{\widetilde{E}_1}) \right) \right)$ sağlanır. Eğer $E_1 = E$ ve $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek birebir dönüşüm ise $(F_{\widetilde{E}_1}) = \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1} \left(\psi_{f\varphi\vartheta} \left((H_{\widetilde{E}_1}) \right) \right)$.

(2) f örten dönüşüm ise $\psi_{f\varphi\vartheta} \left(\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1} (H_{\widetilde{E}_1}) \right) \cong (H_{\widetilde{E}_1})$ sağlanır. Eğer $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek örten dönüşüm ise $\psi_{f\varphi\vartheta} \left(\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1} (H_{\widetilde{E}_1}) \right) = (H_{\widetilde{E}_1})$. (Fadel ve Dzül-Kifli, 2021.)

Kanıt. Tanımlar kullanılarak kanıt elde edilir.

6.BİPOLAR ESNEK SÜREKLİ DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde, bipolar esnek topolojik uzaylar arasındaki bipolar esnek sürekli dönüşüm tanımı verilerek süreklilik kavramını karakterize eden temel teoremler incelenecektir. İlk olarak bipolar esnek dönüşümün bipolar esnek noktadaki sürekliliği bipolar esnek komşuluk yardımıyla verilecektir. Daha sonra bipolar esnek açık dönüşüm ve bipolar esnek kapalı dönüşüm tanımları verilerek bunlar arasındaki ilişki araştırılacaktır.

Tanım 6.1. $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E})$ ve $(Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ sırasıyla X ve Y üzerinde tanımlı iki bipolar esnek topolojik uzay, $\psi_{f\varphi\vartheta}: (X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \rightarrow (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ bipolar esnek dönüşüm, x_e^y ise X üzerinde bipolar esnek nokta olsun. Bu durumda $\psi_{f\varphi\vartheta}(x_e^y)$ bipolar esnek noktasının her $G_{\tilde{E}\tau}$ bipolar esnek komşuluğu için, x_e^y bipolar esnek noktasının $\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}}) \cong (G_{\tilde{E}\tau})$ sağlanacak şekilde bir $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek komşuluğu bulunabiliyorsa, $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek dönüşümüne x_e^y bipolar esnek noktasında bipolar esnek süreklidir denir.

Eğer $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek dönüşümü her $x_e^y \in X$ bipolar esnek noktasında sürekli ise $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek dönüşümüne X üzerinde bipolar esnek süreklidir denir.

Teorem 6.1. $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E})$ ve $(Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ sırasıyla X ve Y üzerinde tanımlı iki bipolar esnek topolojik uzay, $\psi_{f\varphi\vartheta}: (X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \rightarrow (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ bipolar esnek dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

- (1) $\psi_{f\varphi\vartheta}: (X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \rightarrow (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ bipolar esnek sürekli dönüşümdür.
- (2) Y üzerindeki her $G_{\tilde{E}\tau'}$ bipolar esnek açık kümesi için $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G_{\tilde{E}\tau'})$ kümesi, X üzerinde bipolar esnek açık kümedir.
- (3) Y üzerindeki her $K_{\tilde{E}\tau'}$ bipolar esnek kapalı kümesi için $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(K_{\tilde{E}\tau'})$ kümesi, X üzerinde bipolar esnek kapalı kümedir.
- (4) X üzerindeki her $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesi için, $\psi_{f\varphi\vartheta}(\overline{F_{\tilde{E}}}) \cong \overline{(\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}}))}$ sağlanır.
- (5) Y üzerindeki her $G_{\tilde{E}\tau'}$ bipolar esnek kümesi için,

$(\overline{(\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G_{\widetilde{E}'}))}) \cong \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(\overline{(G_{\widetilde{E}'}))}$ sağlanır.

(6) Y üzerindeki her $G_{\widetilde{E}'}$ bipolar esnek kümesi için $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G_{\widetilde{E}'}^o) \cong (\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G_{\widetilde{E}'}))^o$ sağlanır.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) $G_{\widetilde{E}'}$ Y üzerinde tanımlı bipolar esnek açık küme ve $x_e^y \in \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G_{\widetilde{E}'})$ keyfi bipolar esnek nokta olsun. O zaman, $x_e^y \in \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G_{\widetilde{E}'}) \Rightarrow \psi_{f\varphi\vartheta}(x_e^y) \in (G_{\widetilde{E}'})$.

$\psi_{f\varphi\vartheta}: (X, \widetilde{\tau}, \widetilde{E}) \rightarrow (Y, \widetilde{\tau}', \widetilde{E}')$ dönüşümü bipolar esnek sürekli olduğundan $\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\widetilde{E}}) \subseteq (G_{\widetilde{E}'})$ sağlanacak şekilde $x_e^y \in (F_{\widetilde{E}}) \subseteq \widetilde{\tau}$ bipolar esnek açık kümesi vardır. Buradan

$$x_e^y \in (F_{\widetilde{E}}) \subseteq \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G_{\widetilde{E}'})$$

olup $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G_{\widetilde{E}'})$ kümesi X üzerinde bipolar esnek açık kümedir.

(2) $\Rightarrow$ (1) x_e^y , X üzerinde bipolar esnek nokta, $G_{\widetilde{E}'}$ kümesi $\psi_{f\varphi\vartheta}(x_e^y)$ bipolar esnek noktasının keyfi komşuluğu olsun. O zaman $\psi_{f\varphi\vartheta}(x_e^y) \in G_{\widetilde{E}'} \subseteq \widetilde{\tau}'$ dir. (2) den dolayı $x_e^y \in \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G_{\widetilde{E}'}) \subseteq \widetilde{\tau}$ elde edilir. Bu takdirde $\psi_{f\varphi\vartheta}(\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G_{\widetilde{E}'})) \subseteq (G_{\widetilde{E}'})$ dir. Buradan $\psi_{f\varphi\vartheta}: (X, \widetilde{\tau}, \widetilde{E}) \rightarrow (Y, \widetilde{\tau}', \widetilde{E}')$ dönüşümü bipolar esnek sürekli dir.

(2) $\Rightarrow$ (3) $K_{\widetilde{E}'}$ kümesi Y üzerinde tanımlı bipolar esnek kapalı küme olsun. Bu durumda $(K_{\widetilde{E}'})^c \subseteq \widetilde{\tau}'$ dir. (2) den dolayı $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(K_{\widetilde{E}'})^c = (\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(K_{\widetilde{E}'}))^c \subseteq \widetilde{\tau}$

sağlanır. Buradan $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(K_{\widetilde{E}'})$ X üzerinde tanımlı bipolar esnek kapalı kümedir.

(3) $\Rightarrow$ (4) $F_{\widetilde{E}}$ X üzerinde tanımlı bipolar esnek küme olsun. $\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\widetilde{E}}) \subseteq \overline{\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\widetilde{E}})}$

olduğundan,

$$(F_{\widetilde{E}}) \subseteq \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(\overline{\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\widetilde{E}})})$$

dir. (3) den dolayı $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(\overline{\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\widetilde{E}})})$ kümesi X üzerinde bipolar esnek kapalı kümedir.

Böylece

$$\overline{(F_{\bar{E}})} \cong \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(\overline{\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\bar{E}})})$$

kapsaması elde edilir. Bu taktirde $\psi_{f\varphi\vartheta}(\overline{(F_{\bar{E}})}) \cong \overline{\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\bar{E}})}$ olur.

(4) $\Rightarrow$ (5) $G_{\bar{E}}$ Y üzerinde tanımlı bipolar esnek küme ve $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G_{\bar{E}}) = (F_{\bar{E}})$ olsun.

(4) den dolayı

$$\psi_{f\varphi\vartheta}(\overline{(F_{\bar{E}})}) = \psi_{f\varphi\vartheta}(\overline{\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}((G_{\bar{E}}))}) \cong$$

$$\overline{\psi_{f\varphi\vartheta}(\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}((G_{\bar{E}})))} \cong \overline{(G_{\bar{E}})}$$

dir. Buradan

$$(\overline{\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}((G_{\bar{E}}))}) = \overline{(F_{\bar{E}})} \cong \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(\overline{(G_{\bar{E}})})$$

sağlanır.

(5) $\Rightarrow$ (6) $G_{\bar{E}}$ Y üzerinde tanımlı bipolar esnek küme olsun. (5) den dolayı

$$\overline{\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}((G_{\bar{E}})^c)} \cong \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(\overline{(G_{\bar{E}})^c})$$

yazılabilir.

$$(G_{\bar{E}})^o = ((\overline{(G_{\bar{E}})^c})^c)$$

olduğundan,

$$\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}((G_{\bar{E}})^o) = \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}((\overline{(G_{\bar{E}})^c})^c) =$$

$$(\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(\overline{(G_{\bar{E}})^c}))^c \cong (\overline{(\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}((G_{\bar{E}})^c))})^c = (\overline{(\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G_{\bar{E}}))^c})^c =$$

$$(\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G_{\bar{E}}))^o$$

elde edilir.

(6) $\Rightarrow$ (2) $G_{\bar{E}}$ Y üzerinde tanımlı bipolar esnek açık küme olsun.

$$(\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G_{\bar{E}}))^o \cong (\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G_{\bar{E}})) = \psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}((G_{\bar{E}})^o) \cong (\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G_{\bar{E}}))^o$$

olup buradan $(\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G_{\bar{E}}))$ X üzerinde tanımlı bipolar esnek açık kümedir.

Örnek 6.1. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ iki küme $E = E' = \{e_1, e_2\}$ parametrelerin kümesi olsun. O halde

$$(F_{1\tilde{E}}) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}, \{x_3\}), (e_2, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_4\})\},$$

$$(F_{2\tilde{E}}) = \{(e_1, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_2, x_3\}, \{x_4\})\},$$

$$(F_{3\tilde{E}}) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_4\}, \{x_3\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4\})\},$$

$$(F_{4\tilde{E}}) = \{(e_1, \{x_1\}, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_3\}, \{x_2, x_4\})\}$$

olmak üzere

$$\tilde{\tau} = \{\Phi_{\tilde{E}}, \tilde{X}_{\tilde{E}}, F_{1\tilde{E}}, F_{2\tilde{E}}, F_{3\tilde{E}}, F_{4\tilde{E}}\}$$

ailesi X üzerinde bipolar esnek topoloji,

$$(G_{1\tilde{E}'}) = \{(e_1, \{y_1, y_2\}, \{y_3\}), (e_2, \{y_1, y_3\}, \{y_2, y_4\})\},$$

$$(G_{2\tilde{E}'}) = \{(e_1, \{y_1, y_4\}, \{y_2, y_3\}), (e_2, \{y_2, y_3\}, \{y_4\})\},$$

$$(G_{3\tilde{E}'}) = \{(e_1, \{y_1, y_2, y_4\}, \{y_3\}), (e_2, \{y_1, y_2, y_3\}, \{y_4\})\},$$

$$(G_{4\tilde{E}'}) = \{(e_1, \{y_1\}, \{y_2, y_3\}), (e_2, \{y_3\}, \{y_2, y_4\})\}$$

olmak üzere,

$$\tilde{\tau}' = \{\Phi_{\tilde{E}'}, \tilde{Y}_{\tilde{E}'}, G_{1\tilde{E}'}, G_{2\tilde{E}'}, G_{3\tilde{E}'}, G_{4\tilde{E}'}\}$$

ailesi Y üzerinde bipolar esnek topoloji tanımlar.

$f: X \rightarrow Y$ dönüşümü $i = 1, 2, 3, 4$ için $f(x_i) = y_i$, her $e \in E$ için $\varphi: E \rightarrow E'$ dönüşümü $\varphi(e_i) = e_i$, her $\neg e \in \neg E$ için $\vartheta: \neg E \rightarrow \neg E', \vartheta(\neg e_i) = \neg \varphi(e_i)$ olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda her $G_{\tilde{E}'} \in \tilde{\tau}'$ için $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G_{\tilde{E}'}) \in \tilde{\tau}$ olduğundan dolayı $\psi_{f\varphi\vartheta}: (X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \rightarrow (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ dönüşümü bipolar esnek süreklidir.

Teorem 6.2. $\psi_{f\varphi\vartheta}: (X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \rightarrow (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ bipolar esnek sürekli dönüşüm olsun. Bu durumda $f_\varphi: (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \tau', E')$ ve $f_\vartheta: (X, \tau, \neg E) \rightarrow (Y, \tau', \neg E')$ esnek dönüşümleri de esnek sürekli dönüşümlerdir.

Kanıt. Kanıt açıktır.

Uyarı 6.1. Eğer $\psi_{f\varphi\vartheta}: (X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \rightarrow (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ bipolar esnek sürekli dönüşüm ise, her $e \in E$ için $f_e: (X, \tau_e) \rightarrow (Y, \tau'_{\varphi(e)})$ ve $f_{\neg e}: (X, \tau_{\neg e}) \rightarrow (Y, \tau'_{\neg\varphi(e)})$ dönüşümleri topolojik uzaylarda sürekli dönüşümlerdir.

Örnek 6.2. Örnek 6.1. deki bipolar esnek sürekli dönüşümü ele alalım. O zaman $i = 1, 2$ olmak üzere $e_i \in E$ parametreleri için,

$$\tau_{e_1} = \{\emptyset, X, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_4\}, \{x_1, x_2, x_4\}, \{x_1\}\},$$

$$\tau_{\neg e_1} = \{\emptyset, X, \{x_3\}, \{x_2, x_3\}\},$$

$$\tau_{e_2} = \{\emptyset, X, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_3\}\},$$

$$\tau_{\neg e_2} = \{\emptyset, X, \{x_2, x_4\}, \{x_4\}\},$$

$$\tau'_{e_1} = \{\emptyset, Y, \{y_1, y_2\}, \{y_1, y_4\}, \{y, y_2, y_4\}, \{y_1\}\},$$

$$\tau'_{\neg e_1} = \{\emptyset, Y, \{y_3\}, \{y_2, y_3\}\},$$

$$\tau'_{e_2} = \{\emptyset, Y, \{y_1, y_3\}, \{y_2, y_3\}, \{y_1, y_2, y_3\}, \{y_3\}\},$$

$$\tau'_{\neg e_2} = \{\{\emptyset, Y, \{y_2, y_4\}, \{y_4\}\}\}.$$

O zaman $i = 1, 2$ için $f_{e_i}: (X, \tau_{e_i}) \rightarrow (Y, \tau'_{\varphi(e_i)})$ ve $f_{\neg e_i}: (X, \tau_{\neg e_i}) \rightarrow (Y, \tau'_{\neg\varphi(e_i)})$ dönüşümleri topolojik uzaylarda sürekli dönüşümlerdir.

Örnek 6.3. $X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ iki küme $E = E' = \{e_1, e_2\}$ parametrelerin kümesi olsun. O halde

$$F_{1\tilde{E}} = \{(e_1, \{x_1, x_3\}, \{x_2\}), (e_2, \{x_1\}, \{x_2, x_3\})\},$$

$$F_{2\tilde{E}} = \{(e_1, \{x_2, x_3\}, \{x_1\}), (e_2, \{x_1, x_3\}, \{x_2\})\},$$

$$F_{3\tilde{E}} = \{(e_1, X, \emptyset), (e_2, \{x_1, x_3\}, \{x_2\})\},$$

$$F_{4\tilde{E}} = \{(e_1, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1\}, \{x_2, x_3\})\}$$

olmak üzere

$$\tilde{\tau} = \{\Phi_{\tilde{E}}, \tilde{X}_{\tilde{E}}, F_{1\tilde{E}}, F_{2\tilde{E}}, F_{3\tilde{E}}, F_{4\tilde{E}}\}$$

ailesi X üzerinde bipolar esnek topoloji,

$$G_{\tilde{E}'} = \{(e_1, \{y_1\}, \{y_2, y_3\}), (e_2, \{y_1, y_2\}, \{y_3\})\},$$

olmak üzere,

$$\tilde{\tau}' = \{\Phi_{\tilde{E}'}, \tilde{Y}_{\tilde{E}'}, G_{\tilde{E}'}\}$$

ailesi Y üzerinde bipolar esnek topoloji tanımlar.

$f: X \rightarrow Y$ dönüşümü $f(x_1) = y_2, f(x_2) = y_1, f(x_3) = y_3$, her $e \in E$ için $\varphi: E \rightarrow E'$ dönüşümü $\varphi(e_i) = e_i$, her $\neg e \in \neg E$ için $\vartheta: \neg E \rightarrow \neg E', \vartheta(\neg e_i) = \neg \varphi(e_i)$ olacak şekilde tanımlansın. O zaman $\psi_{f\varphi\vartheta}: (X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \rightarrow (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ bipolar esnek dönüşümü için $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G_{\tilde{E}'}) \notin \tilde{\tau}$ olduğundan $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek sürekli değildir. Burada,

$$\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G)(e_1) = f^{-1}(G(\varphi(e_1))) = \{x_2\},$$

$$\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G)(\neg e_1) = f^{-1}(G(\vartheta(\neg e_1))) = \{x_1, x_3\},$$

$$\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G)(e_2) = f^{-1}(G(\varphi(e_2))) = \{x_1, x_2\},$$

$$\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}(G)(\neg e_2) = f^{-1}(G(\vartheta(\neg e_2))) = \{x_3\}.$$

Teorem 6.3. $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E}), (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ ve $(Z, \tilde{\tau}^*, \tilde{E}^*)$ sırasıyla X, Y ve Z üzerinde tanımlı bipolar esnek topolojik uzaylar olsun. Eğer $\psi_{f\varphi\vartheta}: (X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \rightarrow (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ ve $\omega_{g\varphi_1\vartheta_1}: (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}') \rightarrow (Z, \tilde{\tau}^*, \tilde{E}^*)$ dönüşümleri bipolar esnek sürekli dönüşümler ise o

zaman $(\omega_{g\varphi_1\vartheta_1} \circ \psi_{f\varphi\vartheta}): (X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \rightarrow (Z, \tilde{\tau}^*, \tilde{E}^*)$ dönüşümü de bipolar esnek sürekli dönüşümdür.

Kanıt. $K_{\tilde{E}^*} \tilde{\in} \tilde{\tau}^*$ Z üzerinde tanımlı keyfi bipolar esnek açık küme olsun. $\forall e \in E, \neg e \in \neg E$ parametresi için,

$$(\omega_{g\varphi_1\vartheta_1} \circ \psi_{f\varphi\vartheta})^{-1}(K)(e) = f^{-1}\left(g^{-1}\left(K(\varphi_1 \circ \varphi(e))\right)\right),$$

$$(\omega_{g\varphi_1\vartheta_1} \circ \psi_{f\varphi\vartheta})^{-1}(K)(\neg e) = f^{-1}\left(g^{-1}\left(K(\vartheta_1 \circ \vartheta(\neg e))\right)\right)$$

şeklindedir. $\omega_{g\varphi_1\vartheta_1}: (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}') \rightarrow (Z, \tilde{\tau}^*, \tilde{E}^*)$ bipolar esnek sürekli dönüşüm olduğundan $g^{-1}\left(K(\varphi_1 \circ \varphi(e))\right)$ Y üzerinde bir bipolar esnek açık kümedir. Benzer şekilde $\psi_{f\varphi\vartheta}: (X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \rightarrow (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ bipolar esnek sürekli dönüşüm olduğundan $f^{-1}\left(g^{-1}\left(K(\varphi_1 \circ \varphi(e))\right)\right)$ X üzerinde bipolar esnek açık kümedir. Buradan $(\omega_{g\varphi_1\vartheta_1} \circ \psi_{f\varphi\vartheta})^{-1}(K_{\tilde{E}^*})$ kümesi X üzerinde bipolar esnek açık küme olduğundan, $(\omega_{g\varphi_1\vartheta_1} \circ \psi_{f\varphi\vartheta}): (X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \rightarrow (Z, \tilde{\tau}^*, \tilde{E}^*)$ dönüşümü bipolar esnek sürekli dönüşümdür.

Tanım 6.2. $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E})$ ve $(Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ sırasıyla X ve Y üzerinde tanımlı iki bipolar esnek topolojik uzay ve $\psi_{f\varphi\vartheta}: (X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \rightarrow (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ bipolar esnek dönüşüm olsun.

(a) Eğer X üzerinde tanımlı her $F_{\tilde{E}} \tilde{\in} \tilde{\tau}$ bipolar esnek açık kümesi için, $\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}}) \tilde{\in} \tilde{\tau}'$ Y üzerinde tanımlı bipolar esnek açık küme ise $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek dönüşümüne bipolar esnek açık dönüşüm denir.

(b) Eğer X üzerinde tanımlı her $K_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kapalı kümesi için, $\psi_{f\varphi\vartheta}(K_{\tilde{E}})$ Y üzerinde tanımlı bipolar esnek kapalı küme ise $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek dönüşümüne bipolar esnek kapalı dönüşüm denir.

Önerme 6.1. $\psi_{f\varphi\vartheta}: (X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \rightarrow (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ bipolar esnek açık (kapalı) dönüşüm olsun. Bu durumda $f_{\varphi}: (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \tau', E')$ ve $f_{\vartheta}: (X, \tau, \neg E) \rightarrow (Y, \tau', \neg E')$ esnek dönüşümleri de esnek açık (kapalı) dönüşümlerdir.

Kanıt. Bipolar esnek açık ve bipolar esnek kapalı dönüşüm tanımından kanıt kolaylıkla elde edilir.

Teorem 6.4. $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E})$ ve $(Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ sırasıyla X ve Y üzerinde tanımlı iki bipolar esnek topolojik uzay ve $\psi_{f\varphi\vartheta}: (X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \rightarrow (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ bipolar esnek dönüşüm olsun.

(a) $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek açık dönüşümdür $\Leftrightarrow X$ üzerinde tanımlı her $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesi için $\psi_{f\varphi\vartheta}((F_{\tilde{E}})^o) \cong [\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}})]^o$ olur.

(b) $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek kapalı dönüşümdür $\Leftrightarrow X$ üzerinde tanımlı her $F_{\tilde{E}}$ bipolar esnek kümesi için $\overline{[\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}})]} \cong \psi_{f\varphi\vartheta}(\overline{(F_{\tilde{E}})})$ sağlanır.

Kanıt. (a) $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek açık dönüşüm ve $F_{\tilde{E}}$ X üzerinde tanımlı bir bipolar esnek küme olsun. $(F_{\tilde{E}})^o$, X üzerinde bipolar esnek açık küme ve $(F_{\tilde{E}})^o \cong F_{\tilde{E}}$ dir. $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek açık dönüşüm olduğundan $\psi_{f\varphi\vartheta}((F_{\tilde{E}})^o)$ Y üzerinde tanımlı bipolar esnek açık kümedir ve $\psi_{f\varphi\vartheta}((F_{\tilde{E}})^o) \cong \psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}})$. Aynı zamanda, $\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}})$ nın içindeki en geniş bipolar esnek açık küme $[\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}})]^o$ olduğundan

$$\psi_{f\varphi\vartheta}((F_{\tilde{E}})^o) \cong [\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}})]^o$$

elde edilir.

Tersine $F_{\tilde{E}}$ X üzerinde tanımlı bipolar esnek açık küme olsun. O halde $(F_{\tilde{E}})^o = F_{\tilde{E}}$. Teoremin hipotezi gereğince, $\psi_{f\varphi\vartheta}((F_{\tilde{E}})^o) \cong [\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}})]^o$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}}) = \psi_{f\varphi\vartheta}((F_{\tilde{E}})^o) \cong [\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}})]^o \cong \psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}})$$

dir. Buradan $\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}}) = [\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}})]^o$ elde edilir. O halde $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek açık dönüşümdür.

(b) $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek kapalı dönüşüm ve $F_{\tilde{E}}$ X üzerinde tanımlı bipolar esnek küme olsun. Bipolar esnek kapanış tanımı gereğince $\overline{(F_{\tilde{E}})}$ bipolar esnek kapalı küme ve

$F_{\tilde{E}} \cong \overline{(F_{\tilde{E}})}$ dir. $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek kapalı dönüşüm olduğundan $\psi_{f\varphi\vartheta}(\overline{(F_{\tilde{E}})})$, Y üzerinde tanımlı bipolar esnek kapalı kümedir ve $\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}}) \cong \psi_{f\varphi\vartheta}(\overline{(F_{\tilde{E}})})$.

$\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}})$ ' yi kapsayan en dar bipolar esnek kapalı küme $\overline{\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}})}$ olduğundan $\overline{\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}})} \cong \psi_{f\varphi\vartheta}(\overline{(F_{\tilde{E}})})$ elde edilir.

Tersine, $F_{\tilde{E}}$ X üzerinde tanımlı bipolar esnek kapalı küme olsun. Buradan $\overline{(F_{\tilde{E}})} = (F_{\tilde{E}})$ dir. Teoremin hipotezi gereğince, $\overline{\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}})} \cong \psi_{f\varphi\vartheta}(\overline{(F_{\tilde{E}})})$ dir. Bu durumda $\overline{\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}})} \cong \psi_{f\varphi\vartheta}(\overline{(F_{\tilde{E}})}) = \psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}}) \cong \overline{\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}})}$

olduğundan $\overline{\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}})} = \psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}})$ elde edilir. $\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\tilde{E}})$, Y üzerinde bipolar esnek kapalı kümedir. O halde $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek kapalı dönüşümdür.

Tanım 6.3. $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E})$ ve $(Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ sırasıyla X ve Y üzerinde tanımlı iki bipolar esnek topolojik uzay ve $\psi_{f\varphi\vartheta}: (X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \rightarrow (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ bipolar esnek dönüşüm olsun. Eğer $\psi_{f\varphi\vartheta}$ dönüşümü bipolar esnek bire-bir, bipolar esnek örten, bipolar esnek sürekli ve $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}$ dönüşümü de bipolar esnek sürekli dönüşüm ise, o zaman $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek dönüşümüne bipolar esnek homeomorfizma denir.

Teorem 6.5. $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E})$ ve $(Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ sırasıyla X ve Y üzerinde tanımlı iki bipolar esnek topolojik uzay ve $\psi_{f\varphi\vartheta}: (X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \rightarrow (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ bipolar esnek dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

- (1) $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek homeomorfizmadır.
- (2) $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek sürekli ve bipolar esnek açık dönüşümdür.
- (3) $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek sürekli ve bipolar esnek kapalı dönüşümdür.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek homeomorfizma olsun. $\psi_{f\varphi\vartheta}$ dönüşümünün bipolar esnek açık olduğunu göstermek yeterlidir.

$F_{\bar{E}}$ kümesi X üzerinde tanımlı bipolar esnek açık küme olsun. $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}$ dönüşümü bipolar esnek sürekli olduğundan $(\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1})^{-1}(F_{\bar{E}}) = \psi_{f\varphi\vartheta}(F_{\bar{E}})$ Y üzerinde tanımlı bipolar esnek açık olduğundan $\psi_{f\varphi\vartheta}$ dönüşümü bipolar esnek açık dönüşümdür.

(2) $\Rightarrow$ (3) $K_{\bar{E}}$ kümesi X üzerinde tanımlı keyfi bipolar esnek kapalı küme olsun. Bu durumda $(K_{\bar{E}})^c$ X üzerinde tanımlı bipolar esnek açık kümedir. $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek açık dönüşüm olduğundan $\psi_{f\varphi\vartheta}((K_{\bar{E}})^c) = (\psi_{f\varphi\vartheta}(K_{\bar{E}}))^c$ kümesi Y üzerinde tanımlı bipolar esnek açık kümedir. Dolayısıyla, $(\psi_{f\varphi\vartheta}(K_{\bar{E}}))$ ise Y üzerinde tanımlı bipolar esnek kapalı küme olduğundan $\psi_{f\varphi\vartheta}$ dönüşümü bipolar esnek kapalı dönüşümdür.

(3) $\Rightarrow$ (1) $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek sürekli ve bipolar esnek kapalı dönüşüm olduğundan, $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek homeomorfizma olduğu kolayca elde edilir.

Örnek 6.4. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ iki küme $E = E' = \{e_1, e_2\}$ parametrelerin kümesi olsun. O halde,

$$F_{1\bar{E}} = \{(e_1, \{x_2\}, \{x_4\}), (e_2, \{x_2, x_3\}, \{x_1\})\}$$

$$F_{2\bar{E}} = \{(e_1, \{x_3, x_4\}, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_4\}, \emptyset)\}$$

$$F_{3\bar{E}} = \{(e_1, \emptyset, \{x_1, x_2, x_4\}), (e_2, \emptyset, \{x_1\})\}$$

$$F_{4\bar{E}} = \{(e_1, \{x_2, x_3, x_4\}, \emptyset), (e_2, \{x_2, x_3, x_4\}, \emptyset)\}$$

olmak üzere

$$\tilde{\tau} = \{\Phi_{\bar{E}}, \tilde{X}_{\bar{E}}, F_{1\bar{E}}, F_{2\bar{E}}, F_{3\bar{E}}, F_{4\bar{E}}\}$$

ailesi X üzerinde bipolar esnek topoloji,

$$G_{1\bar{E}'} = \{(e'_1, \{y_1\}, \{y_2\}), (e'_2, \{y_1, y_4\}, \{y_3\})\}$$

$$G_{2\bar{E}'} = \{(e'_1, \{y_2, y_4\}, \{y_1, y_3\}), (e'_2, \{y_2\}, \emptyset)\}$$

$$G_{3\bar{E}'} = \{(e'_1, \emptyset, \{y_1, y_2, y_3\}), (e'_2, \emptyset, \{y_3\})\}$$

$$G_{4\bar{E}'} = \{(e'_1, \{y_1, y_2, y_4\}, \emptyset), (e'_2, \{y_1, y_2, y_4\}, \emptyset)\}$$

olmak üzere,

$$\tilde{\tau}' = \{\Phi_{\bar{E}'}, \tilde{Y}_{\bar{E}'}, G_{1\bar{E}'}, G_{2\bar{E}'}, G_{3\bar{E}'}, G_{4\bar{E}'}\}$$

ailesi Y üzerinde bipolar esnek topoloji tanımlar.

$f: X \rightarrow Y$ dönüşümü $f(x_1) = y_3, f(x_2) = y_1, f(x_3) = y_4, f(x_4) = y_2$, her $e \in E$ için $\varphi: E \rightarrow E'$ dönüşümü $\varphi(e_i) = e_i$, her $\neg e \in \neg E$ için $\vartheta: \neg E \rightarrow \neg E', \vartheta(\neg e_i) = \neg \varphi(e_i)$ olacak şekilde tanımlansın. O zaman $\psi_{f\varphi\vartheta}: (X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \rightarrow (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ bipolar esnek dönüşümü bipolar esnek açık dönüşümdür. Gerçekten,

$$\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{1\bar{E}}) = \{(e'_1, \{y_1\}, \{y_2\}), (e'_2, \{y_1, y_4\}, \{y_3\})\} = (G_{1\bar{E}'}) \tilde{\in} \tilde{\tau}',$$

$$\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{2\bar{E}}) = \{(e'_1, \{y_2, y_4\}, \{y_1, y_3\}), (e'_2, \{y_2\}, \emptyset)\} = (G_{2\bar{E}'}) \tilde{\in} \tilde{\tau}',$$

$$\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{3\bar{E}}) = \{(e'_1, \emptyset, \{y_1, y_2, y_3\}), (e'_2, \emptyset, \{y_3\})\} = (G_{3\bar{E}'}) \tilde{\in} \tilde{\tau}',$$

$$\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{4\bar{E}}) = \{(e'_1, \{y_1, y_2, y_4\}, \emptyset), (e'_2, \{y_1, y_2, y_4\}, \emptyset)\} = (G_{4\bar{E}'}) \tilde{\in} \tilde{\tau}'$$

sağlandığından $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek açık dönüşümdür.

Örnek 6.5. Yukarıda verilen Örnek 6.4.'ü ele alalım. Bu taktirde, $\psi_{f\varphi\vartheta}$ dönüşümü bipolar esnek kapalı dönüşümdür. Burada $(X, \tilde{\tau}, \tilde{E})$ ve $(Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ bipolar esnek topolojik uzaylarındaki bipolar esnek kapalı kümelerin ailesi

$$\tilde{k} = \{\Phi_{\bar{E}}, \tilde{X}_{\bar{E}}, F_{1\bar{E}}^c, F_{2\bar{E}}^c, F_{3\bar{E}}^c, F_{4\bar{E}}^c\},$$

$$\tilde{k}' = \{\Phi_{\bar{E}'}, \tilde{Y}_{\bar{E}'}, G_{1\bar{E}'}^c, G_{2\bar{E}'}^c, G_{3\bar{E}'}^c, G_{4\bar{E}'}^c\}$$

olmak üzere,

$$(F_{1\bar{E}})^c = \{(e_1, \{x_4\}, \{x_2\}), (e_2, \{x_1\}, \{x_2, x_3\})\} = (H_{1\bar{E}})$$

$$(F_{2\bar{E}})^c = \{(e_1, \{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}), (e_2, \emptyset, \{x_4\})\} = (H_{2\bar{E}})$$

$$(F_{3\tilde{E}})^c = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_4\}, \emptyset), (e_2, \{x_1\}, \emptyset)\} = (H_{3\tilde{E}})$$

$$(F_{4\tilde{E}})^c = \{(e_1, \emptyset, \{x_2, x_3, x_4\}), (e_2, \emptyset, \{x_2, x_3, x_4\})\} = (H_{4\tilde{E}})$$

$$(G_{1\tilde{E}'})^c = \{(e'_1, \{y_2\}, \{y_1\}), (e'_2, \{y_3\}, \{y_1, y_4\})\} = (K_{1\tilde{E}'})$$

$$(G_{2\tilde{E}'})^c = \{(e'_1, \{y_1, y_3\}, \{y_2, y_4\}), (e'_2, \emptyset, \{y_2\})\} = (K_{2\tilde{E}'})$$

$$(G_{3\tilde{E}'})^c = \{(e'_1, \{y_1, y_2, y_3\}, \emptyset), (e'_2, \{y_3\}, \emptyset)\} = (K_{3\tilde{E}'})$$

$$(G_{4\tilde{E}'})^c = \{(e'_1, \emptyset, \{y_1, y_2, y_4\}), (e'_2, \emptyset, \{y_1, y_2, y_4\})\} = (K_{4\tilde{E}'})$$

şeklinde elde edilir. Bu bipolar esnek kapalı kümelerin $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek dönüşümü altındaki bipolar esnek görüntüleri,

$$\Phi_{\tilde{E}} \tilde{\in} \tilde{k} \Rightarrow \psi_{f\varphi\vartheta} \Phi_{\tilde{E}} = \Phi_{\tilde{E}'} \tilde{\in} \tilde{k}'$$

$$\tilde{X}_{\tilde{E}} \tilde{\in} \tilde{k} \Rightarrow \psi_{f\varphi\vartheta} \tilde{X}_{\tilde{E}} = \tilde{Y}_{\tilde{E}'} \tilde{\in} \tilde{k}'$$

$$\begin{aligned} (H_{1\tilde{E}}) &= \{(e_1, \{x_4\}, \{x_2\}), (e_2, \{x_1\}, \{x_2, x_3\})\} \tilde{\in} \tilde{k} \Rightarrow \psi_{f\varphi\vartheta}(H_{1\tilde{E}}) \\ &= \{(e'_1, \{y_2\}, \{y_1\}), (e'_2, \{y_3\}, \{y_1, y_4\})\} = (K_{1\tilde{E}'}) \tilde{\in} \tilde{k}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (H_{2\tilde{E}}) &= \{(e_1, \{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}), (e_2, \emptyset, \{x_4\})\} \tilde{\in} \tilde{k} \Rightarrow \psi_{f\varphi\vartheta}(H_{2\tilde{E}}) \\ &= \{(e'_1, \{y_1, y_3\}, \{y_2, y_4\}), (e'_2, \emptyset, \{y_2\})\} = (K_{2\tilde{E}'}) \tilde{\in} \tilde{k}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (H_{3\tilde{E}}) &= \{(e_1, \{x_1, x_2, x_4\}, \emptyset), (e_2, \{x_1\}, \emptyset)\} \tilde{\in} \tilde{k} \Rightarrow \psi_{f\varphi\vartheta}(H_{3\tilde{E}}) \\ &= \{(e'_1, \{y_1, y_2, y_3\}, \emptyset), (e'_2, \{y_3\}, \emptyset)\} = (K_{3\tilde{E}'}) \tilde{\in} \tilde{k}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (H_{4\tilde{E}}) &= \{(e_1, \emptyset, \{x_2, x_3, x_4\}), (e_2, \emptyset, \{x_2, x_3, x_4\})\} \tilde{\in} \tilde{k} \Rightarrow \psi_{f\varphi\vartheta}(H_{4\tilde{E}}) \\ &= \{(e'_1, \emptyset, \{y_1, y_2, y_4\}), (e'_2, \emptyset, \{y_1, y_2, y_4\})\} = (K_{4\tilde{E}'}) \tilde{\in} \tilde{k}' \end{aligned}$$

şeklinde bipolar esnek kapalı kümeler olduğundan $\psi_{f\varphi\vartheta}: (X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \rightarrow (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ bipolar esnek dönüşümü bipolar esnek kapalı dönüşümdür.

Örnek 6.6. Yukarıda verilen Örnek 6.4.'ü ele alalım. Bu taktirde, $\psi_{f\varphi\vartheta}$ dönüşümü bipolar esnek homeomorfizmadır. Burada f , φ bire-bir ve örten dönüşümler

olduğundan $\psi_{f\varphi\vartheta}$ dönüşümünde bipolar esnek bire-bir ve örten dönüşümdür. O halde $\psi_{f\varphi\vartheta}$ dönüşümünün bipolar esnek homeomorfizma olduğunu göstermek için sadece $\psi_{f\varphi\vartheta}$ dönüşümünün bipolar esnek sürekli dönüşüm olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\Phi_{\widetilde{E'}} \widetilde{\tau'} \Rightarrow (\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1})\Phi_{\widetilde{E'}} = \Phi_{\widetilde{E}} \widetilde{\tau},$$

$$\widetilde{Y}_{\widetilde{E'}} \widetilde{\tau'} \Rightarrow (\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1})\widetilde{Y}_{\widetilde{E'}} = \widetilde{X}_{\widetilde{E}} \widetilde{\tau},$$

$$\begin{aligned} (G_{1\widetilde{E'}}) &= \{(e'_1, \{y_1\}, \{y_2\}), (e'_2, \{y_1, y_4\}, \{y_3\})\} \widetilde{\tau'} \Rightarrow (\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1})(G_{1\widetilde{E'}}) \\ &= \{(e_1, \{x_2\}, \{x_4\}), (e_2, \{x_2, x_3\}, \{x_1\})\} = (F_{1\widetilde{E}}) \widetilde{\tau}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (G_{2\widetilde{E'}}) &= \{(e'_1, \{y_2, y_4\}, \{y_1, y_3\}), (e'_2, \{y_2\}, \emptyset)\} \widetilde{\tau'} \Rightarrow (\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1})(G_{2\widetilde{E'}}) \\ &= \{(e_1, \{x_3, x_4\}, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_4\}, \emptyset)\} = (F_{2\widetilde{E}}) \widetilde{\tau}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (G_{3\widetilde{E'}}) &= \{(e'_1, \emptyset, \{y_1, y_2, y_3\}), (e'_2, \emptyset, \{y_3\})\} \widetilde{\tau'} \Rightarrow (\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1})(G_{3\widetilde{E'}}) \\ &= \{(e_1, \emptyset, \{x_1, x_2, x_4\}), (e_2, \emptyset, \{x_1\})\} = (F_{3\widetilde{E}}) \widetilde{\tau}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (G_{4\widetilde{E'}}) &= \{(e'_1, \{y_1, y_2, y_4\}, \emptyset), (e'_2, \{y_1, y_2, y_4\}, \emptyset)\} \widetilde{\tau'} \Rightarrow (\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1})(G_{4\widetilde{E'}}) \\ &= \{(e_1, \{x_2, x_3, x_4\}, \emptyset), (e_2, \{x_2, x_3, x_4\}, \emptyset)\} = (F_{4\widetilde{E}}) \widetilde{\tau}. \end{aligned}$$

Örnek 6.7. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ iki küme $E = E' = \{e_1, e_2\}$ parametrelerin kümesi olsun. O halde,

$$(F_{1\widetilde{E}}) = \{(e_1, \{x_3\}, \{x_1\}), (e_2, \{x_4\}, \{x_3\})\}$$

$$(F_{2\widetilde{E}}) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}, \emptyset), (e_2, \{x_4\}, \{x_1, x_2\})\}$$

$$(F_{3\widetilde{E}}) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_3\}, \emptyset), (e_2, \{x_4\}, \emptyset)\}$$

$$(F_{4\widetilde{E}}) = \{(e_1, \emptyset, \{x_1\}), (e_2, \{x_4\}, \{x_1, x_2, x_3\})\}$$

olmak üzere

$$\widetilde{\tau} = \{\Phi_{\widetilde{E}}, \widetilde{X}_{\widetilde{E}}, F_{1\widetilde{E}}, F_{2\widetilde{E}}, F_{3\widetilde{E}}, F_{4\widetilde{E}}\}$$

ailesi X üzerinde bipolar esnek topoloji,

$$(G_{1\tilde{E}'}) = \{(e'_1, \{y_4\}, \{y_3\}), (e'_2, \{y_2\}, \{y_1\})\}$$

$$(G_{2\tilde{E}'}) = \{(e'_1, \{y_3\}, \{y_1\}), (e'_2, \{y_1, y_2\}, \{y_3, y_4\})\}$$

$$(G_{3\tilde{E}'}) = \{(e'_1, \{y_3, y_4\}, \emptyset), (e'_2, \{y_1, y_2\}, \emptyset)\}$$

$$(G_{4\tilde{E}'}) = \{(e'_1, \emptyset, \{y_1, y_3\}), (e'_2, \{y_2\}, \{y_1, y_2, y_4\})\}$$

olmak üzere,

$$\tilde{\tau}' = \{\Phi_{\tilde{E}'}, \tilde{Y}_{\tilde{E}'}, G_{1\tilde{E}'}, G_{2\tilde{E}'}, G_{3\tilde{E}'}, G_{4\tilde{E}'}\}$$

aileleri Y üzerinde bipolar esnek topoloji tanımlar.

$f: X \rightarrow Y$ dönüşümü $f(x_1) = y_2, f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_1, f(x_4) = y_3$, her $e \in E$ için $\varphi: E \rightarrow E'$ dönüşümü $\varphi(e_i) = e_i$, her $\neg e \in \neg E$ için $\vartheta: \neg E \rightarrow \neg E', \vartheta(\neg e_i) = \neg \varphi(e_i)$ olacak şekilde tanımlansın. $\psi_{f\varphi\vartheta}: (X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \rightarrow (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ bipolar esnek dönüşümü için $\psi_{f\varphi\vartheta}(F_{1\tilde{E}}) = \{(e'_1, \{y_1\}, \{y_2\}), (e'_2, \{y_3\}, \{y_1\})\} \notin \tilde{\tau}'$ olduğundan bipolar esnek açık dönüşüm değildir.

Örnek 6.8. Yukarıda verilen Örnek 6.7.'yi ele alalım. $F_{1\tilde{E}} = \{(e_1, \{x_3\}, \{x_1\}), (e_2, \{x_4\}, \{x_3\})\} \in \tilde{\tau}$ bipolar esnek kümesi için $(F_{1\tilde{E}})^c = \{(e_1, \{x_1\}, \{x_3\}), (e_2, \{x_3\}, \{x_4\})\}$ bipolar esnek kapalı kümedir. $\psi_{f\varphi\vartheta}((F_{1\tilde{E}})^c) = \{(e'_1, \{y_3\}, \{y_2\}), (e'_2, \{y_3\}, \{y_1\})\} = (H_{\tilde{E}'})$ bulunur. $(H_{\tilde{E}'})^c = \{(e'_1, \{y_2\}, \{y_3\}), (e'_2, \{y_1\}, \{y_3\})\} \notin \tilde{\tau}'$ olduğundan $\psi_{f\varphi\vartheta}: (X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \rightarrow (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ bipolar esnek kapalı dönüşüm değildir.

Örnek 6.9. Yukarıda verilen Örnek 6.7.'yi ele alalım. $\psi_{f\varphi\vartheta}$ bipolar esnek bire-bir ve örten dönüşümdür. $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}: (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}') \rightarrow (X, \tilde{\tau}, \tilde{E})$ bipolar esnek dönüşümünde $F_{1\tilde{E}} = \{(e_1, \{x_3\}, \{x_1\}), (e_2, \{x_4\}, \{x_3\})\} \in \tilde{\tau}$ iken $(\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1})^{-1}(F_{1\tilde{E}}) = \psi_{f\varphi\vartheta}(F_{1\tilde{E}}) = \{(e'_1, \{y_4\}, \{y_3\}), (e'_2, \{y_2\}, \{y_1\})\} \notin \tilde{\tau}'$ dir. Buradan $\psi_{f\varphi\vartheta}^{-1}: (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}') \rightarrow (X, \tilde{\tau}, \tilde{E})$ bipolar esnek dönüşümü bipolar esnek sürekli dönüşüm değildir. Dolayısıyla $\psi_{f\varphi\vartheta}: (X, \tilde{\tau}, \tilde{E}) \rightarrow (Y, \tilde{\tau}', \tilde{E}')$ dönüşümü bipolar esnek homeomorfizma değildir.

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada esnek küme, bipolar esnek küme, bipolar esnek nokta, bipolar esnek iç, bipolar esnek kapanış, bipolar esnek topolojik uzay kavramları tanıtılmış, bu kavramlarla ilgili önermeler ve örnekler verilmiştir.

Sonra bipolar esnek dönüşüm ve bipolar esnek dönüşüm altında bipolar esnek kümenin görüntüsü, ters görüntüsü tanımları verilmiş ve bu tanımlara ait önermeler ve örnekler ele alınmıştır.

Daha sonra esnek noktanın bipolar esnek komşuluğu yardımıyla bipolar esnek süreklilik tanımı verilmiş ve bu tanımı karakterize eden teoremler ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Son olarak bipolar esnek açık, bipolar esnek kapalı dönüşüm ve bipolar esnek homeomorfizma kavramı tanıtılıp, bu kavramların özellikleri araştırılmıştır.

KAYNAKLAR

- Acar U., Koyuncu F., Tanay B.(2010), Soft sets and soft rings. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(11), 3458-3463.
- Aktaş H., Çağman N.(2007). Soft sets and soft groups. *Information Sciences*, 177(13), 2726-2735.
- Ali M. I., Feng F., Liu X., Min W. K., Shabir M.(2009). On some new operations in soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 57(9), 1547-1553.
- Aslam, M., Abdullah S., K. Ullah K.(2014). Bipolar fuzzy soft sets and its applications in decision making problem. *J. Intell. Fuzzy Systems*, 27(2), 729-742.
- Atanassov K.(1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20(1), 87-96.
- Bayramov S., Gunduz (Aras) C.(2013). Soft locally compact and soft paracompact spaces. *Journal of Mathematics and System Science*, 3(3), 122-130.
- Bayramov S., Gündüz (Aras) C.(2004). *Genel Topoloji*. Çağlayan Basımevi, İstanbul: Çağlayan Kitabevi.
- Chen D.(2005). The parametrization reduction of soft sets and its applications. *Computers and Mathematics with Applications*, 49(5-6), 757-763.
- Çağman N., Enginoglu S.(2010). Soft set theory and uni-int decision making. *European Journal of Operational Research*, 207(2), 848-855.
- Çağman N., Karataş S., Enginoğlu S.(2011). Soft topology. *Computers and Mathematics with Applications*, 62(1), 351-358.
- Das S., Samanta S.K.(2013). Soft metric. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 6(1), 77-94.
- Fadel E., Dzul-Kifli S.C.(2021). Bipolar soft functions. *AIMS Mathematics*, 6(5), 4428-4446.
- Fadel E., Dzul-Kifli S.C.(2020). Bipolar soft topological spaces. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 13(2), 227-245.
- Feng F., Jun Y. B., Zhao X.Z.(2008). Soft semirings. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(10), 2621-2628.
- Gunduz (Aras) C., Sonmez A.(2017). Çakallı H., An approach to soft functions. *Journal of Mathematical Analysis*, 8(2), 129-138.
- Gunduz (Aras) C., Al-shami T.M., Bayramov S., Local compactness and paracompactness on bipolar soft topological spaces. submitted.

- Gunduz Aras C., Posul H.(2016). On some new operations in probabilistic soft set theory. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 9(3), 333-339.
- Gunduz Aras C., Yazar M.I., Bayramov S.(2017). Some notes on compact sets in soft metric spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 14(4), 331-341.
- Hayat, K., Mahmood, T.(2015). Some applications of bipolar soft set: Characterizations of two isomorphic hemi-rings via BSI-h-ideals. *Br. J. Math. Comput. Sci.*13(2), 1-21.
- Hussain S., Ahmad B.(2011). Some properties of soft topological spaces. *Computers and Mathematics with Applications*, 62(11), 4058-4067.
- Karaaslan, F., Karataş, S. (2015). A new approach to bipolar soft sets and its applications. *Disc. Math. Alg.Appl.*,7(4), 19-31.
- Maji P. K., Biswas R., Roy A. R.(2001). Fuzzy soft sets. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 9(3), 589-602.
- Maji P. K., Biswas R., Roy A. R.(2003). Soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45(4-5), 555-562.
- Maji P. K., Roy A. R., Biswas R.(2002). An application of soft sets in a decision making problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 44(8-9), 1077-1083.
- Molodtsov D.(1999). Soft set theory-first results. *Computers and Mathematics with Applications*, 37(4-5), 19-31.
- Naz M., Shabir M.(2014). On fuzzy bipolar soft sets, their algebraic structures and applications. *J. Intell. Fuzzy Systems*, 26(4), 1645-1656.
- Ozturk, T.Y.(2020). On bipolar soft points. *TWMS J. Appl. Eng. Math.* 10(4),877-885.
- Ozturk, T.Y.(2018). On bipolar soft topological spaces. *Journal of New Theory*, 20(64), 64-75.
- Pawlak, Z.(1982). Rough sets. *International Journal of Information and Computer Sciences*, 11(1), 341-356.
- Shabir M., Naz M.(2011). On soft topological spaces. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(7), 1786–1799.
- Shabir M., Naz M.(2013.), On bipolar soft sets, Retrieved from <https://arxiv.org/abs/1303.1344v1>, 2013.
- Shabir M., Bakhtawar, A.(2017). Bipolar soft connected, bipolar soft disconnected and bipolar soft compact spaces, *Songklanakarin J.Sci. Technol.*, 39(3), 359-371.

Zadeh L. A.(1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353.

Zorlutuna I., Aktağ M., Min W. K., Atmaca S.(2012). Remarks on soft topological spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 3(2), 171-185.



KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

Gündüz (Aras) Ç., **Metin C.**, *A Note On Bipolar Soft Continuity*, International Conference of Mathematical Sciences, İstanbul, 23-27 Haziran 2021.



ÖZGEÇMİŞ

İlk, orta ve lise öğrenimini Kocaeli’nde tamamladı. 2012 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden 2020 yılında mezun oldu. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen burada öğrenimine devam etmektedir.

