

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA AÇIK VE KAPALI
KÜMELERE BİR YAKLAŞIM

MERYEM ÖZCAN

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ

YOZGAT – 2022

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA AÇIK VE KAPALI
KÜMELERE BİR YAKLAŞIM

MERYEM ÖZCAN

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ

YOZGAT – 2022

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY SAYFASI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111320007 numaralı öğrencisi Meryem Özcan'ın hazırladığı “**İdeal Topolojik Uzaylarda Açık ve Kapalı Kümelere Bir Yaklaşım**” başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 29/08/2022 Pazartesi günü saat 13:00'da yapılmış, tezin onayına oy birliği/oy çokluğu ile karar verilmiştir.

Başkan:

Jüri Üyesi:

(Danışman)

Jüri Üyesi:

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih vesayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

...../...../.....

Prof. Dr. Hamdi TEMEL
Müdür

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

MERYEM ÖZCAN

...../...../.....

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA AÇIK VE KAPALI KÜMELERE BİR YAKLAŞIM

MERYEM ÖZCAN

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİ DALI

TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ HÜRMET FULYA AKIZ

Bu tezin birinci bölümü giriş kısmından oluşmaktadır. Giriş kısmında, topolojik uzaylar ve ideal topolojik uzaylardaki açık ve kapalı kümeler ile ilgili literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, daha sonraki bölümde kullanılacak olan ideal topolojik uzaylar ve bazı genelleştirilmiş kümelerin tanımı ve özellikleri verilmiştir. Üçüncü bölümde bir γ işlemi yardımıyla oluşturulan γ -açık ve γ -kapalı, γ -pre -açık küme, γ -semi -açık küme ve γ -b -açık kümelerin özelliklerinden bahsedilmiştir. Dördüncü bölüm özgün olarak hazırlanmıştır. Bu bölümde γ işlemi yardımıyla tanımlanan kümeler ideal topolojik uzaylara aktarılmıştır.

2022, 40 SAYFA

ANAHTAR KELİMELER: İdeal Topolojik Uzaylar, Pre -Açık Küme, Semi -Açık Küme, Genelleştirilmiş Küme.

ABSTRACT

MASTER THESIS

AN APPROACH TO OPEN AND CLOSED SETS IN IDEAL TOPOLOGICAL SPACES

MERYEM ÖZCAN

**YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
SCHOOL OF GRADUATES STUDIES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

SUPERVISOR: ASSIST. PROF. DR. HÜRMET FULYA AKIZ

The first part of this thesis consists of the introduction part. In the introduction, literature information about topological spaces and open and closed sets in ideal topological spaces is given. In the second chapter, the definition and properties of ideal topological spaces and some generalized sets, which will be used in the next chapter, are given. In the third chapter, the properties of γ -open and γ -closed, γ -pre-open sets, γ -semi-open sets and γ -b-open sets created with the help of a γ operation are mentioned. The fourth chapter was originally prepared. In this section, the sets defined with the help of the γ operation are transferred to ideal topological spaces.

2022, 40 PAGES

KEYWORDS: Ideal Topological Spaces, Pre -Open Set, Semi -Open Set, Generalized Set.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında, topolojik uzaylarda γ işlemi yardımıyla tanıtılmış olan genelleştirilmiş açık kümeler ve özellikleri, ideal topolojik uzaylara taşınmıştır.

Yüksek lisans eğitimim süresince kıymetli bilgilerinden ve deneyimlerinden istifade ettiğim, her konuda bilgisine ve desteğine müracaat etmekten çekinmediğim, tezimin planlanmasından yazılmasına kadar çalışmamın tüm safhalarında yardımlarını esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ (Yozgat Bozok Üniversitesi)'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tezimi 981 kodlu BAP projesi kapsamında destekleyen Bilimsel Araştırmalar Proje Komisyonuna teşekkür ederim.

Sevgi ve destekleriyle her daim yanımda olan, başta beni yetiştirip bugünlere getiren sevgili annem ve babam Saadet ve Gaffari TAŞKINA'a ve aileme, eğitimim boyunca hiçbir zaman desteğini esirgemeyen sevgili eşim Mustafa ÖZCAN'a ve bu süreçte her zaman bana moral ve motivasyon kaynağı olan güzel kızlarım Şeyma Beril ve Hatice Saadet ÖZCAN'a teşekkürlerimi sunarım.

MERYEM ÖZCAN

...../...../.....

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI.....	i
TEZ BEYANI.....	ii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Topolojik Uzaylarda Temel Kavramlar.....	3
2.2. İdeal Topolojik Uzaylar	3
2.3. İdeal Topolojik Uzaylarda Bazı Küme Çeşitleri ve Özellikleri.....	5
3. TOPOLOJİK UZAYLARDA BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ AÇIK KÜMELER.....	10
4. İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ AÇIK KÜMELERİN ÖZELLİKLERİ	17
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	29
KAYNAKLAR	30

SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

Simgeler	Açıklamalar
X	: Evrensel küme
$P(X)$: Güç kümesi
$M \subset N$: N, M kümesini kapsar
$M \not\subset N$: N, M kümesini kapsamaz
M^c	: M kümesinin tümleyeni
M'	: M kümesinin yığılma noktaları
$M - N$: M fark N
I	: X kümesi üzerindeki herhangi bir ideal
I_n	: X kümesi üzerinde hiçbir yerde yoğun olmayan kümelerin ideali
I_f	: X kümesinin sonlu alt kümelerinden oluşan ideal
τ	: Topolojik yapı
(X, τ)	: Topolojik uzay
$G_{(x)}$: (X, τ) topolojik uzayında x noktasının açık komşuluklar ailesi
γ	: Gamma işlemi
$\Gamma(X)$: Gamma fonksiyonu
(X, τ, I)	: İdeal topolojik uzay
$int_\gamma(M)$: M nin gamma içi
$cl_\gamma(M)$: M nin gamma kapanışı
$IO_\gamma(X)$: İdeal topolojik uzaydaki γ - I -açık kümelerin ailesi
$PIO_\gamma(X)$: İdeal topolojik uzaydaki γ -pre - I -açık kümelerin ailesi
$PIC_\gamma(X)$: İdeal topolojik uzaydaki γ -pre - I -kapalı kümelerin ailesi
$SIO_\gamma(X)$: İdeal topolojik uzaydaki γ -semi - I -açık kümelerin ailesi
$SIC_\gamma(X)$: İdeal topolojik uzaydaki γ -semi - I -kapalı kümelerin ailesi
$pInt_\gamma(M)$: İdeal topolojik uzaydaki M kümesinin γ -pre - I -içi

- $pIcl_{\gamma}(M)$: İdeal topolojik uzaydaki M kümesinin γ -pre - I -kapanışı
- $sInt_{\gamma}(M)$: İdeal topolojik uzaydaki M kümesinin γ -semi - I -içi
- $sIcl_{\gamma}(M)$: İdeal topolojik uzaydaki M kümesinin γ -semi - I -kapanışı
- $bInt_{\gamma}(M)$: İdeal topolojik uzaydaki M kümesinin γ -b - I -içi
- $bIcl_{\gamma}(M)$: İdeal topolojik uzaydaki M kümesinin γ -b - I -kapanışı



1. GİRİŞ

Bir (X, τ) topolojik uzayında bir $M \subseteq X$ in içerdiği en büyük açık küme M nin içi denir ve $int(M)$ ile gösterilir. M yi içeren en küçük kapalı küme ise M nin kapanışı denir ve $cl(M)$ ile gösterilir denir (Brown, 2006; Mucuk 2010). Topolojik uzaylarda çeşitli küme, fonksiyon ve uzay kavramları, topoloji ile uğraşan bilim adamları tarafından uzun yıllardır çalışılan bir alandır. Bu konuyla ilgili çalışmalar gün geçtikçe artmakta ve birçok kavramın yeni tanımlarla tekrar ele alınıp incelenmesine katkı sağlamaktadır. Bunlardan başlıcaları (Levine, 1963; Njastad, 1965; Mashhour ve ark. 1982; Abd El-Monsef ve ark.,1983) tarafından yapılan sırasıyla, semi -açık küme, α -açık küme, pre -açık küme ve β -açık kümelerle ilgili çalışmalardır. Bu yeni açık ve kapalı küme tanımları, topolojik uzaylardaki pek çok kavramın yeniden tanımlanabilmesini sağlamıştır. Uzayın elemanlarının yani açık kümelerin tanımlanmasıyla birlikte, kapalı küme, kapanış, iç nokta ve sınır gibi temel tanımların yeniden yapılması topolojik açıdan oldukça merak uyandırıcı ve çok ilgi gören bir hale gelmiştir.

1979 yılında Kasahara, her $V \in \tau$ için $V^\gamma \subseteq V$ olacak şekilde $\gamma : \tau \rightarrow P(X)$ işlemini tanımlamıştır. Bu işleme göre her V^γ kümesi γ -açık küme olarak adlandırılır. Bir $M \subseteq X$ in içerdiği en geniş γ -açık küme M nin γ -içi denir ve $int_\gamma(M)$ ile gösterilir. M kümesini kapsayan en küçük γ -kapalı küme de M nin γ -kapanışı denir ve $Cl_\gamma(M)$ ile gösterilir (Ogata, 1991). Daha sonra γ -açık kümeler ve özellikleri üzerine birçok çalışma yapılmıştır. 2018 yılında (Hussain 2018), genelleştirilmiş küme olarak adlandırılan γ -pre -açık küme ve γ -b -açık kümeleri tanıtmış ve bazı özelliklerini vermiştir.

(X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere, X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir I sınıfının bazı şartları sağlaması durumunda bu sınıfa bir ideal denir ve (X, τ, I) üçlüsüne de bir ideal topolojik uzay denir. M nin τ ve I ya bağlı local fonksiyonu $(.)^* : P(X) \rightarrow P(X)$ (Hayashi, 1964; Kuratowski, 1966) tarafından tanıtılmış $M^*(I, \tau) = \{x \in X \mid \forall U \in G_x \text{ için, } (U \cap M) \notin I\}$ şeklinde ifade edilmiştir. Kuratowski kapanış operatörü $Cl^*(.)$, M ve $M^*(I, \tau)$ birleşiminden oluşur. $M \subset int(M^*)$ olması durumunda M ye I -açık küme denir (Jankovic ve Hamlett, 1992).

Daha sonraki çalışmalarda, pre - I -açık kümeler, semi - I -açık kümeler ve b - I -açık kümeler tanıtılmıştır (Ekici, 2012). γ işlemi yardımıyla pre - γ - I -açık kümeler ise (İbrahim, 2013) de verilmiştir. Diğer taraftan (Bukhatwa ve Demiralp, 2020) genelleştirilmiş kümeleri ideal topolojik uzaylarda ele almıştır.

Bu çalışmada genelleştirilmiş kümeler olarak adlandırılan γ -pre -açık küme, γ -semi -açık küme ve γ -b -açık kümeler ideal topolojik uzaylarda incelenmiştir ve bazı özellikleri verilmiştir.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ileriki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1. Topolojik Uzaylarda Temel Kavramlar

Bu kısımda (Brown, 2006) ve (Mucuk, 2010) kaynaklarından yararlanılarak topolojik uzaylardaki bazı tanımlar açıklanmıştır.

Tanım 2.1.1. (X, τ) bir topolojik uzay, $M \subseteq X$ ve $a \in M$ olsun. Eğer $a \in G \subseteq M$ olacak şekilde bir $G \in \tau$ açık kümesi varsa M kümesine a nın bir komşuluğu, a elemanına M nin bir iç noktası denir. M nin tüm iç noktalarının kümesine M nin içi denir ve $int(M)$ ile gösterilir (Brown, 2006; Mucuk, 2010).

Eğer özel olarak M açık ise M ye bir açık komşuluk denir (Brown, 2006; Mucuk, 2010).

Tanım 2.1.2. Bir (X, τ) topolojik uzayında bir $M \subseteq X$ alt kümesi verilsin. Eğer M^c açık ise M ye kapalı bir küme denir (Brown, 2006; Mucuk, 2010).

Tanım 2.1.3. X bir küme ve $M \subseteq X$ olsun. $X - M = \{x \in X : x \notin M\}$ kümesine M nin tümleyeni denir (Bülbül, 1994).

Tanım 2.1.4. (X, τ) bir topolojik uzay, $M \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. Eğer x in her G açık komşuluğu için $(G - \{x\}) \cap M \neq \emptyset$ ise $x \in X$ noktasına M nin bir yığılma noktası denir. M nin tüm yığılma noktalarının kümesi M' ile gösterilir (Brown, 2006; Mucuk, 2010).

Tanım 2.1.5. (X, τ) bir topolojik uzay $\mathcal{B} \subseteq \tau$ olsun. $B_i \in \mathcal{B}$ olmak üzere her $T \in \tau$ için $T = \bigcup_{i \in I} B_i$ oluyorsa \mathcal{B} ailesine (X, τ) topolojik uzayı için bir baz (taban)dır denir (Atay, 2016).

2.2. İdeal Topolojik Uzaylar

Bu kısımda ideal kavramı ve ideal topolojik uzaylar (Kuratowski, 1933; Jankovic ve Hamlett, 1990) ile ilgili temel tanımlar verilmiştir.

Tanım 2.2.1. X boştan farklı bir küme ve $P(X)$, X in güç kümesi olmak üzere; boş olmayan bir $I \subset P(X)$ ailesi, eğer

- a) $M \in I$ ve $N \subset M$ iken, $N \in I$ (kalıtımsallık özelliği)
- b) $M, N \in I$ iken $M \cup N \in I$ (sonlu toplamsallık özelliği)

şartlarını sağlıyorsa; bu durumda I ailesine X kümesi üzerinde bir idealdir denir (Kuratowski,1933; Kuratowski, 1966).

Örnek 2.2.1.

$X = \{d, e, f, g\}$ olsun. Bu durumda $I = \{\emptyset, \{d\}, \{f\}, \{d, f\}\}$ ailesi X kümesi üzerinde bir idealdir.

Gerçekten;

- a) (1) $\emptyset \in I$ için, $\emptyset \subset \emptyset \in I$,
 (2) $\{d\} \in I$ için, $\emptyset \subset \{d\}$ ve $\emptyset \in I$,
 (3) $\{f\} \in I$ için, $\emptyset \subset \{f\}$ ve $\emptyset \in I$,
 (4) $\{d, f\} \in I$ için, $\emptyset \subset \{d, f\}$ ve $\emptyset \in I$, $\{d\} \subset \{d, f\}$ ve $\{d\} \in I$, $\{f\} \subset \{d, f\}$ ve $\{f\} \in I$ dir. Kalıtımsallık özelliği sağlanıyor.
- b) (1) $\emptyset \in I$ için, $\emptyset \cup \{d\} = \{d\} \in I$, $\emptyset \cup \{f\} = \{f\} \in I$, $\emptyset \cup \{d, f\} = \{d, f\} \in I$,
 (2) $\{d\} \in I$ için, $\{d\} \cup \{f\} = \{d, f\} \in I$, $\{d\} \cup \{d, f\} = \{d, f\} \in I$,
 (3) $\{f\} \in I$ için, $\{f\} \cup \{d, f\} = \{d, f\} \in I$ olduğundan sonlu toplamsallık özelliği sağlıyor.
- (a) ve (b) den I ailesi X üzerinde bir idealdir.

Bazı idealler; minimal ideal $I = \{\emptyset\}$, hiçbir yerde yoğun olmayan kümelerin ideali (I_n), sonlu kümelerin ideali (I_f), maksimal ideal $I = P(X)$ olarak bilinir.

Önerme 2.2.1. (X, τ) bir topolojik uzay, $M \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. x noktası M kümesinin bir kapanış noktasıdır ancak ve ancak x noktasını içeren

$$\forall U \in \tau \text{ için } M \cap U \neq \emptyset \text{ dir (Yüksel, 2015).}$$

Tanım 2.2.2. (X, τ) topolojik uzay, $M \subset X$ kümesi verilsin ve I ailesi, X kümesi üzerinde bir ideal olsun. $M^*(I, \tau) = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap M) \notin I\}$ kümesine M kümesinin I ideali ve τ topolojisine bağlı lokal fonksiyonu denir (Jankovic ve Hamlett, 1990).

Kısaca $M^*(I, \tau)$ yerine M^* gösterimini kullanacağız.

Örnek 2.2.2. (X, τ) bir topolojik uzayı, $M \subset X$ kümesi verilsin ve I ailesi, X kümesi üzerinde ideal olsun. Eğer,

- 1) $I = \{\emptyset\}$ ise,

$$\begin{aligned} M^*(I, \tau) &= \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap M) \notin I\} \\ &= \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap M) \notin \{\emptyset\}\} \text{ olduğundan } M^* = cl(M) \text{ olur.} \end{aligned}$$

- 2) $I = P(X)$ ise,

$$M^*(I, \tau) = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap M) \notin I\}$$

$$= \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap M) \notin P(X)\}$$

olduğundan, $M^* = \emptyset$ olur (Jankovic ve Hamlett, 1990).

Tanım 2.2.3. (X, τ) bir topolojik uzay ve I , X kümesi üzerinde tanımlı bir ideal olsun. $M \subset X$ kümesi için $CI^*(M) = M \cup M^*$ şeklinde tanımlanan $CI^*: P(X) \rightarrow P(X)$ operatörü

- a) $CI^*(\emptyset) = \emptyset$
- b) $M \in P(X) \Rightarrow M \subset CI^*(M)$
- c) $M, N \in P(X) \Rightarrow CI^*(M \cup N) = CI^*(M) \cup CI^*(N)$
- d) $M \in P(X) \Rightarrow CI^*(CI^*(M)) = CI^*(M)$

şartlarını sağlıyorsa CI^* işlemine Kuratowski kapanış işlemi denir (Kuratowski, 1933).

Bir M kümesinin $*$ –kapanışı $cl^*(M)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.4. (X, τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. Bu durumda,

$$\tau^*(I) = \{U \subset X \mid cl^*(X - U) = (X - U)\}$$

şeklinde tanımlanan $\tau^*(I)$ ailesi X kümesi üzerinde bir topoloji belirtir. Bu topoloji τ topolojisinden daha ince bir topolojidir (Vaidyanathaswamy, 1960).

Jankovic ve Hamlett (1990), minimal ideal ($I = \{\emptyset\}$) ile maksimal ideali ($I = P(X)$) kullanılarak $\tau^*(I)$ topolojilerini aşağıdaki gibi elde etmiştir.

- (1) $I = \{\emptyset\}$ için $M^* = cl(M)$ ve $cl^*(M) = cl(M)$ olduğundan $\tau^*(I) = \tau$,
- (2) $I = P(X)$ için $M^* = \emptyset$ ve $cl^*(M) = M$ olduğundan $\tau^*(I) = P(X)$.

Ayrıca, diğer idealler bu iki ideal arasında yer aldığından, (1) ve (2) ifadelerinden faydalanarak onlara karşılık gelen $\tau^*(I)$ topolojileri ile ilgili şu sonuçlar verilmiştir.

(X, τ) topolojik uzayı verilsin. X kümesi üzerindeki her I ideali için, $\{\emptyset\} \subset I \subset P(X)$ olduğundan,

$$\tau = \tau^*(\{\emptyset\}) \subset \tau^*(I) \subset \tau^*(P(X)) = P(X)$$

elde edilir.

Tanım 2.2.5. (X, τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. Bu durumda,

$$\beta(I, \tau) = \{U - I \mid U \in \tau, I \in I\}$$

ailesi, $\tau^*(I)$ topolojisi için bir tabandır (Vaidyanathaswamy, 1960).

Tanım 2.2.6. (X, τ, I) ideal topolojik uzayında, M alt kümesi verilsin. $M^* \subset M$ ise M kümesi τ^* –kapalı ya da $*$ –kapalı olarak adlandırılır (Jankovic ve Hamlett, 1990).

2.3. İdeal Topolojik Uzaylarda Bazı Küme Çeşitleri ve Özellikleri

Tanım 2.3.1. (X, τ) topolojik uzayı ve herhangi bir $M \subset X$ kümesi verilsin.

- a) $M \subset \text{int}(cl(\text{int}(M)))$ ise, M kümesine α -açık küme (Njastad, 1965),
- b) $M \subset cl(\text{int}(M))$ ise, M kümesine semi -açık küme (Levine, 1963),
- c) $M \subset \text{int}(cl(M))$ ise, M kümesine pre -açık küme (Mashhour, Abd El-Monsef ve El-Deeb, 1982),
- d) $M \subset cl(\text{int}(cl(M)))$ ise, M kümesine β -açık küme (Abd El-Monsef, El-Deeb, ve Mahmoud, 1983),
- e) $M \subset \text{int}(cl(M)) \cup cl(\text{int}(M))$ ise, M kümesine b -açık küme denir (Andrejevic, (1996).

Örnek 2.3.1. $X = \{1,2,3,4\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{3,4\}\}$ olmak üzere,

$\mathcal{K} = \{\emptyset, X, \{1,2\}\}$ kapalı kümelerin kümesidir.

M kümesi şu şekilde elemanlara sahip olsun. $M = \{1,3\}$

$1 \in X$ in τ daki açık komşulukları $\{X\}$

$2 \in X$ in τ daki açık komşulukları $\{X\}$

$3 \in X$ in τ daki açık komşulukları $\{\{3,4\}, X\}$

$4 \in X$ in τ daki açık komşulukları $\{\{3,4\}, X\}$

- a) $M \subset \text{int}(cl(\text{int}(M)))$ olmadığından, M kümesi α -açık küme değildir.

Gerçekten;

$$M = \{1,3\}$$

$$\text{int}(M) = \emptyset$$

$$cl(\text{int}(M)) = \emptyset$$

$$\text{int}(cl(\text{int}(M))) = \emptyset$$

$M \not\subset \text{int}(cl(\text{int}(M)))$ olduğu için, M kümesi α -açık küme değildir.

- b) $M \subset cl(\text{int}(M))$ olmadığından, M kümesi semi -açık küme değildir. Gerçekten;

$$M = \{1,3\}$$

$$\text{int}(M) = \emptyset$$

$$cl(\text{int}(M)) = \emptyset$$

$M \not\subset cl(\text{int}(M))$ olduğu için, M kümesi semi -açık küme değildir.

- c) $M \subset \text{int}(cl(M))$ ise, M kümesi pre -açık kümedir. Gerçekten;

$$M = \{1,3\}$$

$$cl(M) = X$$

$$\text{int}(cl(M)) = X$$

$$\{1,3\} \subset X$$

$M \subset \text{int}(cl(M))$ olduğu için M kümesi pre -açık kümedir.

d) $M \subset cl(\text{int}(cl(M)))$ ise, M kümesi β -açık kümedir. Gerçekten;

$$M = \{1,3\}$$

$$cl(M) = X$$

$$\text{int}(cl(M)) = X$$

$$cl(\text{int}(cl(M))) = X$$

$$\{1,3\} \subset X$$

$M \subset cl(\text{int}(cl(M)))$ olduğu için M kümesine β -açık kümedir.

e) $M \subset \text{int}(cl(M)) \cup cl(\text{int}(M))$ ise, M kümesi b -açık kümedir. Gerçekten;

$$\text{int}(cl(M)) = X \text{ ve } cl(\text{int}(M)) = \emptyset \text{ ve}$$

$$\text{int}(cl(M)) \cup cl(\text{int}(M)) = X \text{ dir. O halde;}$$

$M \subset \text{int}(cl(M)) \cup cl(\text{int}(M))$ olduğu için M kümesi b -açık kümedir.

Yukarıda verilen (X, τ) topolojik uzayındaki bazı küme çeşitleri, (X, τ, I) ideal topolojik uzayında benzer şekilde aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.3.2. (X, τ, I) ideal topolojik uzayı ve herhangi bir $M \subset X$ kümesi verilsin.

a) $M \subset \text{int}(cl^*(\text{int}(M)))$ ise, M kümesine α - I -açık küme (Hatır ve Noiri, 2002),

b) $M \subset cl^*(\text{int}(M))$ ise, M kümesine semi - I -açık küme (Hatır ve Noiri, 2002),

c) $M \subset \text{int}(cl^*(M))$ ise, M kümesine pre - I -açık küme (Dontchev ve Przemski, 1996),

d) $M \subset cl(\text{int}(cl^*(M)))$ ise, M kümesine β - I -açık küme (Hatır ve Noiri, 2002),

e) $M \subset \text{int}(cl^*(M)) \cup cl^*(\text{int}(M))$ ise, M kümesine b - I -açık küme denir (Guler ve Aslim, 2005).

Örnek 2.3.2. $X = \{e, f, g, h\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{f\}, \{g, h\}, \{f, g, h\}\}$ olmak üzere,

$I = \{\emptyset, \{h\}\}$ olsun. O halde;

$\mathcal{K} = \{\emptyset, X, \{e, g, h\}, \{e, f\}, \{e\}\}$ olarak bulunur. Ayrıca,

$e \in X$ in τ daki açık komşulukları $\{X\}$

$f \in X$ in τ daki açık komşulukları $\{X, \{f\}, \{f, g, h\}\}$

$g \in X$ in τ daki açık komşulukları $\{X, \{g, h\}, \{f, g, h\}\}$

$h \in X$ in τ daki açık komşulukları $\{X, \{g, h\}, \{f, g, h\}\}$

M kümesini şu şekilde oluşturalım: $M = \{e, f, g\}$

a) $M \subset \text{int}(cl^*(\text{int}(M)))$ ise M kümesi α - I -açık küme değildir. Gerçekten;

$M^\circ = \{f\}$ olur. $cl^*(M) = M \cup M^*$ olmak üzere,

$\text{int}(M) \cup \text{int}(M)^* = cl^*(\text{int}(M))$ olduğundan,

$$\{f\} \cup \{e, f\} = cl^*(\text{int}(M))$$

$$\{e, f\} = cl^*(\text{int}(M))$$

$\text{int}(cl^*(\text{int}(M))) = \{f\}$ olur.

$M \not\subset \text{int}(cl^*(\text{int}(M)))$ olduğundan M kümesi α - I -açık küme değildir.

b) $M \subset cl^*(\text{int}(M))$ ise; M kümesi semi- I -açık küme değildir. Gerçekten;

$M = \{e, f, g\}$ olmak üzere,

$$\text{int}(M) = \{f\}$$

$\text{int}(M) \cup \text{int}(M)^* = cl^*(\text{int}(M))$

$$\{f\} \cup \{e, f\} = cl^*(\text{int}(M))$$

$$\{e, f\} = cl^*(\text{int}(M))$$

$M \not\subset cl^*(\text{int}(M))$ olduğundan M kümesi semi- I -açık küme değildir.

c) $M \subset \text{int}(cl^*(M))$ ise; M kümesi pre- I -açık kümedir. Gerçekten;

$$M = \{e, f, g\}$$

$cl^*(M) = M \cup M^*$ olduğundan M^* in elemanlarını bulalım.

$M^* = \{e, f, g, h\}$ olduğundan,

$$\{e, f, g\} \cup \{e, f, g, h\} = cl^*(M)$$

$$\{e, f, g, h\} = cl^*(M)$$

$\text{int}(cl^*(M)) = X$ olduğundan $M \subset \text{int}(cl^*(M))$ ise; M kümesi pre- I -açık kümedir.

d) $M \subset cl(\text{int}(cl^*(M)))$ ise, M kümesi β - I -açık kümedir. Gerçekten;

$$M = \{e, f, g\}$$

$$cl^*(M) = \{e, f, g, h\}$$

$$\text{int}(cl^*(M)) = X$$

$$cl(\text{int}(cl^*(M))) = X$$

$M \subset cl(\text{int}(cl^*(M)))$ olduğundan M kümesi β - I -açık kümedir.

- e) $M \subset \text{int}(cl^*(M)) \cup cl^*(\text{int}(M))$ ise, M kümesine b - I -açık kümedir. Gerçekten;
 $\text{int}(cl^*(M)) = X$ ve $cl^*(\text{int}(M)) = \{e, f\}$ dir. O halde;
 $\text{int}(cl^*(M)) \cup cl^*(\text{int}(M)) = X$
 $M \subset \text{int}(cl^*(M)) \cup cl^*(\text{int}(M))$ olduğundan M kümesi b - I -açık kümedir.



3. TOPOLOJİK UZAYLARDA BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ AÇIK KÜMELER

Tanım 3.1. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bir $\gamma: \tau \rightarrow P(X)$ işlemi, her $V \in \tau$ için $V \subseteq V^\gamma$ olacak şekilde τ dan X in güç kümesine bir işlemdir. Burada V^γ , V nin γ işlemi altındaki değerini gösterir.

Buna göre $\gamma(G) = G$, $\gamma(G) = cl(G)$ ve $\gamma(G) = intcl(G)$ ile tanımlanan işlemler γ fonksiyonuna örnek olarak verilebilir (Kasahara, 1979).

X kümesi üzerinde verilen bu işlemlerin kümesi $\Gamma(X)$ ile gösterilecektir.

Tanım 3.2. (X, τ) bir topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $x \in X$ olsun. x in her bir açık U komşuluğu için $U^\gamma \cap M \neq \emptyset$ ise, x elemanına $M \subseteq X$ in bir γ -kapanış noktası denir. M nin γ -kapanış noktaları kümesi, M nin γ -kapanışı olarak adlandırılır ve $cl_\gamma(M)$ ile gösterilir. Eğer $cl_\gamma(M) \subseteq M$ ise, X in M alt kümesine γ -kapalı denir. Bu durumda $cl_\gamma(M)$ M nin her γ -kapalı alt kümesini kapsar (Ogata, 1991).

Tanım 3.3. (X, τ) bir topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve bir $x \in M \subseteq X$ olsun. $G^\gamma \subseteq M$ olacak şekilde x in açık bir G komşuluğu varsa, x noktasına M nin bir γ -iç noktası denir. M nin bütün γ -iç noktalarının kümesi $int_\gamma(M)$ şeklinde gösterilir. Böylece;

$int_\gamma(M) = \{x \in M | x \in G \in \tau \text{ ve } G^\gamma \subseteq M\} \subseteq M$ dir.

(1) M γ -açıktır ancak ve ancak $M = int_\gamma(M)$ dir.

(2) Eğer $M \subseteq N$ ise, $int_\gamma(M) \subseteq int_\gamma(N)$ ve $cl_\gamma(M) \subseteq cl_\gamma(N)$ dir (Rehman ve Ahmad, 1992).

Tanım 3.4. (X, τ) bir topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ olsun. O zaman $M \subseteq int_\gamma(cl_\gamma(M))$ ise M ye bir γ -pre -açık küme denir. X deki tüm γ -pre -açık kümelerin ailesi $PO_\gamma(X)$ ile gösterilir. (Hussain, 2018).

Tanım 3.5. (X, τ) bir topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ olsun. Bu durumda M^c γ -pre -açık ise M ye bir γ -pre -kapalı küme denir. Buna denk olarak $M \subseteq cl_\gamma(int_\gamma(M))$ ise M bir γ -pre -kapalı küme olarak adlandırılır. X deki tüm γ -pre -kapalı kümelerin ailesi $PC_\gamma(X)$ ile gösterilir (Hussain, 2018).

Not: Her γ -açık(kapalı) kümesinin γ -pre -açık (kapalı) kümesi olduğuna dikkat edelim. Ancak aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi tersi genel olarak doğru değildir.

Örnek 3.1. $X = \{p, r, s\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{p\}, \{s\}, \{p, s\}, \{p, r\}\}$ $r \in X$ için $\gamma: \tau \rightarrow P(X)$ işlemi

$$\gamma(M) = M^\gamma = \begin{cases} M, & r \in M \\ cl(M), & r \notin M \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Buna göre kapalı kümeler aşağıdaki şekildedir.

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, X, \{r, s\}, \{p, r\}, \{r\}, \{s\}\}$$

τ daki her bir elemanın γ işlemi altındaki görüntüsünü bulalım.

$$\emptyset \quad \text{için} \quad r \notin \emptyset \quad \rightarrow \quad cl(\emptyset) = \emptyset$$

$$X \quad \text{için} \quad r \in X \quad \rightarrow \quad X$$

$$\{p\} \quad \text{için} \quad r \notin \{p\} \quad \rightarrow \quad cl(\{p\}) = \{p, r\}$$

$$\{s\} \quad \text{için} \quad r \notin \{s\} \quad \rightarrow \quad cl(\{s\}) = \{s\}$$

$$\{p, s\} \quad \text{için} \quad r \notin \{p, s\} \quad \rightarrow \quad cl(\{p, s\}) = X$$

$$\{p, r\} \quad \text{için} \quad r \in \{p, r\} \quad \rightarrow \quad \{p, r\}$$

γ -açık kümeler $\{\emptyset, X, \{s\}, \{p, r\}\}$ dir. O halde

γ -kapalı kümeler $\{\emptyset, X, \{s\}, \{p, r\}\}$ dir.

Örnek 3.2. Örnek 3.1 göz önüne alınırsa, $cl_\gamma(M) = X$ $M = \{p, s\}$ olduğundan

$$int_\gamma(X) = X \text{ yani } int_\gamma(cl_\gamma(\{p, s\})) = X \text{ olur ve}$$

$$\{p, s\} \subseteq X \text{ olduğundan}$$

M kümesi γ -pre -açık fakat, γ -açık değildir.

Örnek 3.3 $X = \{f, g, h\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{f\}, \{f, g\}\}$ ve $M = \{g, h\}$ olmak üzere

$g \in X$ için $\gamma: \tau \rightarrow P(X)$ işlemi

$$\gamma(M) = M^\gamma = \begin{cases} M, & g \in M \\ cl(M), & g \notin M \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$\mathcal{K} = \{\emptyset, X, \{g, h\}, \{h\}\}$ olduğu elde edilir.

τ daki her bir elemanın γ işlemi altındaki görüntüsünü bulalım.

$$\emptyset \quad \text{için} \quad g \notin \emptyset \quad \text{olduğundan} \quad cl(\emptyset) = \emptyset$$

$$X \quad \text{için} \quad g \in X \quad \text{olduğundan} \quad X$$

$$\{f\} \quad \text{için} \quad g \notin \{f\} \quad \text{olduğundan} \quad cl(\{f\}) = X$$

$$\{f, g\} \quad \text{için} \quad g \in \{f, g\} \quad \text{olduğundan} \quad \{f, g\}$$

γ -açık kümeler $\{\emptyset, X, \{f, g\}\}$, γ -kapalı kümeler $\{\emptyset, X, \{h\}\}$ dir. $M = \{g, h\}$ için

$M \subseteq int_\gamma(cl_\gamma(M))$ olduğundan M γ -pre -açık kümedir. Gerçekten $cl_\gamma(\{g, h\}) = X$ ve

$int_\gamma(X) = X$ olduğundan M γ -pre -açık küme olur.

Şimdi de $M \subseteq cl_\gamma(int_\gamma(M))$ ise γ -pre -kapalı küme olduğunu göstermek için aşağıdaki yol izlensin.

$M = \{g, h\}$ için, $int_\gamma(M) = \emptyset$, $cl_\gamma(\emptyset) = \emptyset$ ve $\{g, h\} \not\subseteq \emptyset$ olduğundan γ -pre -kapalı küme değildir, gerçekten

$M^c = \{f\}$ için, $int_\gamma(\{f\}) = \emptyset$ ve $cl_\gamma(\emptyset) = \emptyset$ dir.

Tanım 3.6. (X, τ) bir topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ olsun. M nin γ -dışı $ext_\gamma(M)$ ya da $(X - M)$ nin γ -içi şeklinde yazılır. Yani $ext_\gamma(M) = int_\gamma(X - M)$ dir (Rehman ve Ahmad, 1992).

Tanım 3.7. (X, τ) bir topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ olsun. M nin γ -sınırı $bd_\gamma(M)$ şeklinde gösterilir. γ -içine ve γ -dışına ait olmayan kümeler γ -sınır olarak tanımlanmıştır. Her $M \subseteq X$ için, $bd_\gamma(M) = cl_\gamma(M) \cap cl_\gamma(X - M)$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca X in herhangi bir M alt kümesi için şu işlemler kolaylıkla görülebilir:

$$1) cl_\gamma(M) = M \cup bd_\gamma(M),$$

$$2) X = int_\gamma(M) \cup bd_\gamma(M) \cup ext_\gamma(M) \text{ (Rehman ve Ahmad, 1992).}$$

Örnek 3.4. $X = \{3,4,5\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{3\}, \{5\}, \{3,5\}, \{3,4\}\}$ ve $N = \{4,5\}$ olmak üzere $4 \in X$ için $\gamma: \tau \rightarrow P(X)$ işlemi

$$\gamma(M) = M^\gamma = \begin{cases} M, & 4 \in M \\ cl(M), & 4 \notin M \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Sırasıyla γ -açık, γ -kapalı kümeler ile N kümesinin γ -içi, γ -kapanışı, γ -dışı ve γ -sınırı aşağıdaki şekildedir.

$$\gamma \text{ -açık kümeler} = \{\emptyset, X, \{5\}, \{3,4\}\}$$

$$\gamma \text{ -kapalı kümeler} = \{\emptyset, X, \{3,4\}, \{5\}\}$$

$$* int_\gamma(N) = \{5\}$$

$$* cl_\gamma(N) = X$$

$$* ext_\gamma(N) = int_\gamma(X - N) \quad int_\gamma(\{3\}) = \emptyset$$

$$* bd_\gamma(N) = \{3,4\} \text{ dir.}$$

Örnek 3.5. $X = \{p, r, s\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{p\}, \{r\}, \{p, r\}, \{p, s\}\}$

$r \in X$ için $\gamma: \tau \rightarrow P(X)$ işlemi

$$\gamma(M) = M^\gamma = \begin{cases} M, & r \in M \\ cl(M), & r \notin M \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$M = \{r, s\}$ kümesi ele alınsın.

Buna göre sırasıyla γ -açık, γ -kapalı, γ -pre -açık, γ -pre -kapalı kümeler ile M nin γ -içi, γ -dışı ve γ -sınırı aşağıdaki şekildedir.

$\mathcal{K} = \{\emptyset, X, \{r, s\}, \{p, s\}, \{s\}, \{r\}\}$ kümesi kapalı kümelerin sınıfı olup,

τ 'daki her bir elemanın γ işlemi altındaki görüntüsü aşağıdaki şekildedir.

\emptyset için $r \notin \emptyset$ olduğundan $cl(\emptyset) = \emptyset$

X için $r \in X$ olduğundan X

$\{p\}$ için $r \notin \{p\}$ olduğundan $cl(\{p\}) = \{p, s\}$

$\{r\}$ için $r \in \{r\}$ olduğundan $\{r\}$

$\{p, r\}$ için $r \in \{p, r\}$ olduğundan $\{p, r\}$

$\{p, s\}$ için $r \notin \{p, s\}$ olduğundan $cl(\{p, s\}) = \{p, s\}$

* γ -açık kümeler $\{\emptyset, X, \{r\}, \{p, r\}, \{p, s\}\}$

* γ -kapalı kümeler $\{\emptyset, X, \{p, s\}, \{r\}, \{s\}\}$ şeklindedir.

* $M \subseteq int_\gamma (cl_\gamma(M))$ kümesi γ -pre -açıktır, gerçekten,

$$cl_\gamma(M) = cl_\gamma(\{r, s\}) = X \text{ olduğundan } int_\gamma(X) = X$$

$\{r, s\} \subseteq X$ dir.

* $M \subseteq cl_\gamma (int_\gamma(M))$ kümesi γ -pre -kapalı değildir, gerçekten,

$$int_\gamma(M) = int_\gamma(\{r, s\}) = \{r\} \text{ olduğundan } cl_\gamma(\{r\}) = \{r\}$$

$\{r, s\} \not\subseteq \{r\}$ dir. Diğer taraftan

* $int_\gamma(M) = \{r\}$

* $cl_\gamma(M) = X$

* $ext_\gamma(M) = int_\gamma(X - M) = int_\gamma(\{p\}) = \emptyset$

* $bd_\gamma(M) = \{p, s\}$ dir.

Tanım 3.8. (X, τ) bir topolojik uzay ve $\gamma \in \Gamma(X)$ olsun. Eğer bir $x \in X$ için $x \in G^\gamma \subseteq U$ olacak şekilde bir γ -açık G kümesi varsa, U ya x in bir γ -komşuluğu ve x elemanına da U nun bir γ -iç noktası denir. Özel olarak U γ -açık ise U ya x in bir γ -açık komşuluğu denir (Ahmad ve Hussain, 2005).

Örnek 3.6. $X = \{p, r, s\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{p\}, \{r\}, \{p, r\}, \{p, s\}\}$ ve

$r \in X$ için $\gamma: \tau \rightarrow P(X)$ işlemi

$$\gamma(M) = M^\gamma = \begin{cases} M, & r \in M \\ cl(M), & r \notin M \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

X in γ -açık kümesinin elemanları şu şekildedir; $\{\emptyset, X, \{p, r\}, \{p, s\}, \{r\}\}$

Bu durumda X kümesinin elemanlarının sırasıyla γ -açık komşulukları şu şekildedir;

$$U_p = \{\{p, r\}, \{p, s\}, \{p, r, s\}\}$$

$$U_r = \{\{p, r\}, \{p, r, s\}, \{r\}\}$$

$$U_s = \{\{p, s\}, \{p, r, s\}\} \text{ (Ahmad ve Hussain, 2005).}$$

Önerme 3.1. $M, N \subseteq X$ için;

$$(1) \text{ } int_{\gamma}(int_{\gamma}(M)) = int_{\gamma}(M),$$

$$(2) \text{ } int_{\gamma}(M \cup N) \supseteq int_{\gamma}(M) \cup int_{\gamma}(N),$$

$$(3) \text{ } int_{\gamma}(M \cap N) \subseteq int_{\gamma}(M) \cap int_{\gamma}(N) \text{ (Rehman ve Ahmad, 1992).}$$

İspat:

(1) (\Rightarrow) $x \in int_{\gamma}(int_{\gamma}(M))$ olsun. $int_{\gamma}(M) = A$ olsun. $int_{\gamma}(A) \subseteq A$ olduğundan $x \in int_{\gamma}(M)$ dir.

(\Leftarrow) $x \in int_{\gamma}(M)$ olsun. $x \in G$ ve $G^{\gamma} \subseteq M$ olacak şekilde bir G açık kümesi vardır.

Buradan $G^{\gamma} = int_{\gamma}(G^{\gamma}) \subseteq int_{\gamma}(M)$ olur ve $x \in int_{\gamma}(int_{\gamma}(M))$ dir.

(2) $int_{\gamma}(M) \subseteq M$ ve $int_{\gamma}(N) \subseteq N$ olduğundan

$int_{\gamma}(M) \cup int_{\gamma}(N) \subseteq M \cup N$ dir. Buradan

$$int_{\gamma}(int_{\gamma}(M) \cup int_{\gamma}(N)) \subseteq int_{\gamma}(M \cup N) \text{ ve}$$

$int_{\gamma}(M) \cup int_{\gamma}(N) \subseteq int_{\gamma}(M \cup N)$ olduğu görülür.

Tersinin olmadığına dair bir örnek olarak Örnek 3.6. dan $M = \{r, s\}$ ve $N = \{p\}$ kümeleri için

$$int_{\gamma}(M) = \{r\}$$

$$int_{\gamma}(N) = \emptyset$$

$int_{\gamma}(M \cup N) = X$ olduğundan $int_{\gamma}(M \cup N) \not\subseteq int_{\gamma}(M) \cup int_{\gamma}(N)$ dir.

(3) $M \cap N \subseteq M$ ve $M \cap N \subseteq N$ olduğundan

$$int_{\gamma}(M \cap N) \subseteq int_{\gamma}(M) \text{ ve } int_{\gamma}(M \cap N) \subseteq int_{\gamma}(N) \text{ dir.}$$

Kesişimleri alınırsa $int_{\gamma}(M \cap N) \subseteq int_{\gamma}(M) \cap int_{\gamma}(N)$ olur.

Tersinin doğru olmadığı Örnek 3.6. dan aşağıdaki şekilde görülebilir.

$M = \{p, s\}$ ve $N = \{p, r\}$ kümeleri için

$$int_{\gamma}(M) = \{p, s\}$$

$$int_{\gamma}(N) = \{p, r\}$$

$int_{\gamma}(M) \cap int_{\gamma}(N) = \{p\}$ ve $int_{\gamma}(M \cap N) = \emptyset$ olduğundan

$int_{\gamma}(M) \cap int_{\gamma}(N) \not\subseteq int_{\gamma}(M \cap N)$ dir.

Tanım 3.9. (X, τ) bir topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ için $O \subseteq M \subseteq cl_{\gamma}(O)$ olacak şekilde bir γ -açık O kümesi mevcutsa M ye γ -semi -açık küme denir. Tüm γ -semi -açık kümelerin ailesi $SO_{\gamma}(X)$ ile ifade edilir. Eğer M^c kümesi γ -semi -açıksa M kümesine γ -semi -kapalıdır denir. Ayrıca buna denk olarak M nin γ -semi -açık olması $M \subseteq cl_{\gamma}(int_{\gamma}(M))$ olduğunu gösterir (Hussain, Ahmad ve Noiri 2010). M yi kapsayan γ -semi -kapalı kümelerin kesişimi γ -semi -kapanış olarak tanımlanır ve $scl_{\gamma}(M)$ ile ifade edilir. Yine M nin γ -semi -içi $sint_{\gamma}(M)$ ile ifade edilir ve M nin kapsadığı γ -semi -açık alt kümelerinin birleşimidir (Ahmad ve Hussain, 2005).

Örnek 3.7. $X = \{d, e, f\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{d\}, \{d, e\}\}$ ve $e \in X$ için $\gamma: \tau \rightarrow P(X)$ işlemi

$$\gamma(M) = M^{\gamma} = \begin{cases} cl(M), & e \in M \\ M, & e \notin M \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

γ -açık kümeler $\emptyset, X, \{d\}$ dir. $M = \{d, e\}$ için

$O = \{d\}$ seçersek $cl_{\gamma}(O) = \{X\}$ olur. $O \subseteq M \subseteq cl_{\gamma}(O)$ olacak şekilde bir γ -açık O kümesi vardır. O halde M kümesi γ -semi -açıktır.

Tanım 3.10. (X, τ) bir topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ için $M \subseteq cl_{\gamma}(int_{\gamma}(M)) \cup int_{\gamma}(cl_{\gamma}(M))$ ise M ye γ - b -açık küme denir. Tüm γ - b -açık kümelerinin ailesi $BO_{\gamma}(X)$ ile ifade edilir (Hussain, 2018).

Örnek 3.8. $X = \{d, e, f\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{d\}, \{e\}, \{d, e\}, \{d, f\}\}$ ve $e \in X$ için bir $\gamma: \tau \rightarrow P(X)$ işlemi

$$\gamma(M) = M^{\gamma} = \begin{cases} M, & e \in M \\ cl(M), & e \notin M \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

γ -açık kümeler $\emptyset, X, \{e\}, \{d, e\}, \{d, f\}$ dir.

$M = \{e, f\}$ için $int_\gamma(M) = \{e\}$ ve $cl_\gamma(\{e\}) = \{e\}$ bu durumda $cl_\gamma(int_\gamma(M)) = \{e\}$,

$cl_\gamma(M) = X$ ve $int_\gamma(X) = X$ bu durumda $int_\gamma(cl_\gamma(M)) = X$ bulunur.

$M \subseteq cl_\gamma(int_\gamma(M)) \cup int_\gamma(cl_\gamma(M))$ olduğundan M kümesi γ - b -açıktır.

Tanım 3.11. (X, τ) bir topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ için $M \supseteq cl_\gamma(int_\gamma(M)) \cap int_\gamma(cl_\gamma(M))$ ise M ye γ - b -kapalı küme denir. Tüm γ - b -kapalı kümelerinin ailesi $BC_\gamma(X)$ ile ifade edilir (Hussain, 2018).

Teorem 3.1. (X, τ) bir topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur

- i. M γ - b -açıktır ancak ve ancak M^c γ - b -kapalıdır.
- ii. Eğer M γ -pre-açık(kapalı) ise, M γ - b -açık (kapalı) dır.
- iii. Eğer M γ -semi-açık(kapalı) ise, M γ - b -açık (kapalı) dır (Hussain, 2018).

Lemma 3.1. (X, τ) bir topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i. X deki herhangi bir γ -açık U kümesi için, $cl_\gamma(M) \cap U \subseteq cl_\gamma(M \cap U)$.
- ii. X deki herhangi bir γ -kapalı V kümesi için, $int_\gamma(M \cup V) \subseteq int_\gamma(M) \cup V$ (Ahmad ve Hussain, 2007).

4. İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ AÇIK KÜMELERİN ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda (Akız ve Özcan, 2022) kaynağından yararlanılarak ideal topolojik uzaylarda bazı genelleştirilmiş açık kümelerin tanımları ve özellikleri verilmiştir.

Tanım 4.1. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ için $M \subset \text{int}_\gamma(M^*)$ ise M kümesine γ - I -açıktır denir.

Tanım 4.2. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ için $M \subseteq \text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma^*(M))$ ise M ye γ -pre- I -açık küme denir. Bütün γ -pre- I -açık kümeler $\text{PIO}_\gamma(X)$ ile gösterilecektir.

Örnek 4.1. $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}\}$ ve $I = \{\emptyset, \{b\}\}$ olsun. $b \in X$ için $\gamma: \tau \rightarrow P(X)$ işlemi

$$\gamma(M) = M^\gamma = \begin{cases} M, & b \in M \\ \text{cl}(M), & b \notin M \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

γ -açık kümeler $\emptyset, X, \{c\}, \{a, b\}$ ve

γ -kapalı kümeler $\emptyset, X, \{a, b\}, \{c\}$ dir.

$M = \{a\}$ olsun.

Buna göre $\text{cl}_\gamma^*(M) = M \cup M^*$ olduğundan,

$M^* = \{x \in X \mid x \text{ in her } \gamma\text{-açık } U \text{ komşuluğu için } U \cap M \notin I\}$ ve

$M^* = \{a, b\}$ için

$\text{cl}_\gamma^*(M) = \{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}$ dir. O halde

$\text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma^*(M)) = \{a, b\}$ dir.

$M \subseteq \text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma^*(M))$ olduğundan $M = \{a\}$ γ -pre- I -açıktır.

Tanım 4.3. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ için eğer M^c γ -pre- I -açık ise, M ye γ -pre- I -kapalı küme denir.

Buradaki tanıma denk olarak eğer $M \supseteq \text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma^*(M))$ ise, M ye γ -pre- I -kapalıdır denir.

Bütün γ -pre $-I$ -kapalı kümeleri $PIC_\gamma(X)$ ile gösterilecektir.

Önerme 4.1. Her γ -açık küme γ -pre $-I$ -açıktır.

İspat: $M \subseteq X$ γ -açık küme olsun. $M \subseteq int_\gamma(M) \subseteq int_\gamma(M^* \cup M) = int_\gamma(cl_\gamma^*(M))$.
Olduğundan M γ -pre $-I$ -açıktır.

Teorem 4.1. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ için aşağıdakiler doğrudur.

- i. Bir M kümesi γ - I -açık ise γ -pre $-I$ -açıktır.
- ii. Bir M kümesi γ -pre $-I$ -açık ise γ -pre -açıktır.

İspat:

- i. M γ - I -açık olsun.

$M \subset int_\gamma(M^*) \subseteq int_\gamma(M^* \cup M) = int_\gamma(cl_\gamma^*(M))$ olduğundan

$M \subseteq int_\gamma(cl_\gamma^*(M))$ dir.

- ii. Burada

$M \subseteq int_\gamma(cl_\gamma^*(M)) = int_\gamma(M^* \cup M) \subseteq int_\gamma(cl_\gamma(M) \cup M) \subseteq int_\gamma(cl_\gamma(M))$ olduğundan
 M γ -pre -açıktır.

Teorem 4.2. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i. γ -pre $-I$ -açık kümelerin keyfi birleşimi de γ -pre $-I$ -açıktır.
- ii. γ -pre $-I$ -kapalı kümelerin keyfi kesişimleri de γ -pre $-I$ -kapalıdır.

İspat (i): $\{M_i \mid i \in I\}$ γ -pre $-I$ -açık kümelerin bir sınıfı olsun.

Bu durumda $M_i \subseteq int_\gamma(cl_\gamma^*(M_i))$ dir. O halde

$$\bigcup_{i \in I} M_i \subseteq \bigcup_{i \in I} int_\gamma(cl_\gamma^*(M_i)) \subseteq \left(int_\gamma \left(\bigcup_{i \in I} cl_\gamma^*(M_i) \right) \right) = int_\gamma \left(cl_\gamma^* \left(\bigcup_{i \in I} M_i \right) \right)$$

Yani

$$\bigcup_{i \in I} M_i \subseteq \text{int}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma^* \left(\bigcup_{i \in I} M_i \right) \right)$$

olur.

ii) (i)'deki ifadenin tümleyenini alarak hemen elde edilir.

Tanım 4.4. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ olsun. Bu durumda,

- 1) M kümesinin γ -pre $-I$ -kapanışı, M yi içeren tüm γ -pre $-I$ -kapalı kümelerin kesişimi olarak tanımlanır ve $pIcl_\gamma(M) = \bigcap \{K \mid M \subseteq K \text{ ve } K^c \in PIO_\gamma(X)\}$ ile gösterilir.
- 2) M kümesinin γ -pre $-I$ -içi, M nin kapsadığı γ -pre $-I$ -açık kümelerin birleşimidir ve $pInt_\gamma(M) = \bigcup \{O \mid O \subseteq M \text{ ve } O \in PIO_\gamma(X)\}$ ile gösterilir.

Teorem 4.3. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i. $pIcl_\gamma(M^c) = (pInt_\gamma(M))^c$
- ii. $(pIcl_\gamma(M))^c = pInt_\gamma(M^c)$
- iii. M γ -pre $-I$ -açık $\Leftrightarrow M = pInt_\gamma(M)$
- iv. M γ -pre $-I$ -kapalı $\Leftrightarrow M = pIcl_\gamma(M)$

İspat:

(i). $M^c \subseteq pIcl_\gamma(M^c)$. Bu durumda $(pIcl_\gamma(M^c))^c \subseteq M$ 'dir.

$(pIcl_\gamma(M^c))^c$, γ -pre $-I$ -açık olduğundan $(pIcl_\gamma(M^c))^c \subseteq pInt_\gamma(M)$ olur.

Böylece

$$(pInt_\gamma(M))^c \subseteq pIcl_\gamma(M^c) \text{ elde edilir.}$$

Diğer taraftan

$$pInt_\gamma(M) \subseteq M$$

$$\Rightarrow M^c \subseteq (pInt_\gamma(M))^c$$

$$\Rightarrow pIcl_\gamma(M^c) \subseteq (pInt_\gamma(M))^c \text{ dir.}$$

(ii). $(pIcl_\gamma(M))^c = pInt_\gamma(M^c)$ olduğunu gösterelim.

$M \subseteq pIcl_\gamma(M)$ olduğundan

$$\Rightarrow (pIcl_\gamma(M))^c \subseteq M^c$$

$(pIcl_\gamma(M))^c \subseteq pInt_\gamma(M^c)$ dir. Diğer taraftan

$$pInt_\gamma M^c \subseteq M^c$$

$$\Rightarrow M \subseteq (pInt_\gamma M^c)^c$$

$$\Rightarrow pIcl_\gamma(M) \subseteq (pInt_\gamma M^c)^c$$

$$\Rightarrow pInt_\gamma(M^c) \subseteq (pIcl_\gamma(M))^c \text{ dir.}$$

(iii). M nin içerdiği γ -pre $-I$ -açık kümelerin birleşimi $pInt_\gamma(M)$ olduğundan ispatı açıktır.

(iv). M yi içeren γ -pre $-I$ -kapalı kümelerin kesişimi $pIcl_\gamma(M)$ olduğundan ispatı açıktır.

Teorem 4.4. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i. $pIcl_\gamma(\emptyset) = \emptyset$ ve $pInt_\gamma(\emptyset) = \emptyset$
- ii. $pIcl_\gamma(M)$ X 'te γ -pre $-I$ -kapalıdır.
- iii. $pInt_\gamma(M)$ X 'te γ -pre $-I$ -açıktır.
- iv. Eğer $M \subseteq N$ ise $pIcl_\gamma(M) \subseteq pIcl_\gamma(N)$
- v. Eğer $M \subseteq N$ ise $pInt_\gamma(M) \subseteq pInt_\gamma(N)$
- vi. $pIcl_\gamma(pIcl_\gamma(M)) = pIcl_\gamma(M)$
- vii. $pInt_\gamma(pInt_\gamma(M)) = pInt_\gamma(M)$
- viii. $pIcl_\gamma(M) \cup pIcl_\gamma(N) \subseteq pIcl_\gamma(M \cup N)$
- ix. $pIcl_\gamma(M \cap N) \subseteq pIcl_\gamma(M) \cap pIcl_\gamma(N)$

Tanım 4.5. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ kümesi γ -semi $-I$ -açıktır ancak ve ancak $O \subseteq M \subseteq cl_\gamma^*(O)$ olacak şekilde bir γ - I -açık O kümesi vardır.

Örnek 4.2. $X = \{k, l, m, n\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{k, l\}, \{m\}, \{k, l, m\}\}$ ve $I = \{\emptyset, \{l, m\}\}$ olsun. $m \in X$ için $\gamma: \tau \rightarrow P(X)$ işlemi

$$\gamma(M) = M^\gamma = \begin{cases} M, & m \in M \\ cl(M), & m \notin M \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

γ -açık kümeler $\emptyset, X, \{k, l, n\}, \{m\}, \{k, l, m\}$ dir. $M = \{k, l\}$ için

$O = \{k\}$ seçersek $O^* = \{k, l, n\}$ olduğundan γ - I -açıktır.

Ayrıca $cl_\gamma^*(O) = \{k, l, n\}$ olur. Yani M γ -semi - I -açıktır.

Tanım 4.6. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ olsun. Eğer bir $M \subseteq X$ için M^c γ -semi - I -açık ise M ye γ -semi - I -kapalı küme denir.

Önerme 4.2. $M \subseteq X$ γ -semi - I -kapalıdır ancak ve ancak $int_\gamma(F) \subseteq M \subseteq F$ olacak şekilde en az bir γ - I -kapalı F kümesi vardır.

Teorem 4.5. $M \subseteq X$ γ -semi - I -kapalıdır ancak ve ancak $int_\gamma (cl_\gamma^*(M)) \subseteq M$ dir.

İspat: $M \subseteq X$ γ -semi - I -kapalı olsun.

$int_\gamma F \subseteq M \subseteq F$ olsun. F γ - I -kapalı küme vardır.

F , γ - I -kapalı olduğundan $cl_\gamma^*(F) = F$ dir.

$$int_\gamma (cl_\gamma^*(M)) \subseteq int_\gamma (F) \subseteq M$$

$$int_\gamma (cl_\gamma^*(M)) \subseteq M .$$

Diğer yandan $int_\gamma (cl_\gamma^*(M)) \subseteq M$ olsun.

$cl_\gamma^*(M) = F$ dersek,

$int_\gamma (F) \subseteq M \subseteq cl_\gamma^*(M) = F$ olur. Yani M γ -semi - I -kapalıdır.

Tanım 4.7. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ olsun. M yi içeren tüm γ -semi - I -kapalı kümelerinin kesişimlerine M nin γ -semi - I -kapanışı denir ve $sIcl_\gamma(M)$ ile gösterilir.

Tanım 4.8. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ olsun. M nin içerdiği tüm γ -semi $-I$ -açık kümelerinin birleşimine M nin γ -semi $-I$ -içi denir ve $slint_\gamma(M)$ ile gösterilir.

Teorem 4.6. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ olsun.

Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i. γ -semi $-I$ -açık kümelerin keyfi birleşimleri de γ -semi $-I$ -açıktır.
- ii. γ -semi $-I$ -kapalı kümelerin keyfi birleşimleri de γ -semi $-I$ -kapalıdır.

İspat: (i). $\{M_i | i \in I\}$ γ -semi $-I$ -açık kümelerin bir ailesi olsun.

$\forall i \in I$ için M_i γ -semi $-I$ -açık olduğundan

$O_i \subseteq M_i \subseteq cl_\gamma^*(O_i)$ olacak şekilde bir γ - I -açık O_i kümesi vardır. Buradan

$$\bigcup_{i \in I} O_i \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i \subseteq \bigcup_{i \in I} cl_\gamma^*(O_i) \subseteq cl_\gamma^*\left(\bigcup_{i \in I} O_i\right)$$

olur ki, bu da $\bigcup_{i \in I} M_i$ cümlesinin γ -semi $-I$ -açık olduğunu gösterir.

(ii), (i) ifadesine benzer olarak elde edilir.

Teorem 4.7. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ olsun.

Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i. M γ -semi $-I$ -açıktır $\Leftrightarrow M = slint_\gamma(M)$.
- ii. M γ -semi $-I$ -kapalıdır $\Leftrightarrow M = slcl_\gamma(M)$.

İspat: (i) ve (ii) nin ispatı tanımdan hemen elde edilir.

Teorem 4.8. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ olsun.

Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i. $slcl_\gamma(M)$ X de γ -semi $-I$ -kapalıdır.
- ii. $slint_\gamma(M)$ X de γ -semi $-I$ -açıktır.

İspat: (i). Tanımdan $slcl_\gamma(M)$ M yi kapsayan γ -semi $-I$ -kapalı kümelerin kesişimi olduğundan γ -semi $-I$ -kapalıdır.

(ii) Tanımdan $slint_\gamma(M)$ M nin içerdiği γ -semi $-I$ -açık kümelerin birleşimi olduğundan γ -semi $-I$ -açıktır.

Önerme 4.3. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq N$ için $sInt_\gamma(M) \subseteq sInt_\gamma(N)$ dir.

Önerme 4.4. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq N$ için $sIcl_\gamma(M) \subseteq sIcl_\gamma(N)$ dir.

Teorem 4.9. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ olsun. $M \subseteq X$ için aşağıdakiler doğrudur.

- i. X deki herhangi bir γ -kapalı V kümesi için, $int_\gamma^*(M \cup V) \subseteq int_\gamma^*(M) \cup V$ dir.
- ii. X deki herhangi bir γ -açık U kümesi için, $cl_\gamma^*(M) \cap U \subseteq cl_\gamma^*(M \cap U)$ dır.

Önerme 4.5. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ olsun. $M \subseteq X$ için aşağıdakiler doğrudur.

- i. $sIcl_\gamma(M) = M \cup int_\gamma(cl_\gamma^*(M))$
- ii. $sInt_\gamma(M) = M \cap cl_\gamma(int_\gamma^*(M))$

İspat: (i). $int_\gamma(cl_\gamma^*(M)) \subseteq int_\gamma(cl_\gamma^*(sIcl_\gamma(M))) \subseteq sIcl_\gamma(M)$ ve
 $M \cup sIcl_\gamma(M) = sIcl_\gamma(M) \supseteq M \cup int_\gamma(cl_\gamma^*(M)).$

Buradan,

$$M \cup int_\gamma(cl_\gamma^*(M)) \subseteq sIcl_\gamma(M)$$

Diğer taraftan

$$int_\gamma\left(cl_\gamma^*\left(M \cup int_\gamma\left(cl_\gamma^*(M)\right)\right)\right) \subseteq int_\gamma\left(cl_\gamma^*(M) \cup cl_\gamma^*\left(int_\gamma\left(cl_\gamma^*(M)\right)\right)\right) \subseteq cl_\gamma^*(M) \cup int_\gamma\left(cl_\gamma^*\left(int_\gamma\left(cl_\gamma^*(M)\right)\right)\right) = cl_\gamma^*(M) \cup int_\gamma\left(cl_\gamma^*(M)\right) = cl_\gamma^*(M).$$

Böylece

$$int_\gamma\left(cl_\gamma^*\left(M \cup int_\gamma\left(cl_\gamma^*(M)\right)\right)\right) \subseteq M \cup int_\gamma\left(cl_\gamma^*(M)\right).$$

Bu da gösterir ki,

$sIcl_\gamma(M) = M \cup int_\gamma(cl_\gamma^*(M))$ dir.

(ii) İlk ispata benzer olarak elde edilir.

Teorem 4.10. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ olsun ve $M \subseteq X$ için aşağıdakiler doğrudur.

- i. $pIcl_\gamma(M) = M \cup cl_\gamma(int_\gamma^*(M))$
- ii. $pIint_\gamma(M) = M \cap int_\gamma(cl_\gamma^*(M))$ dir.

İspat:(i). $cl_\gamma(int_\gamma^*(M \cup cl_\gamma(int_\gamma^*(M)))) \subseteq cl_\gamma(int_\gamma^*(M) \cup cl_\gamma(int_\gamma^*(M))) = cl_\gamma(cl_\gamma(int_\gamma^*(M))) = cl_\gamma(int_\gamma^*(M)) \subseteq M \cup cl_\gamma(int_\gamma^*(M))$ olduğunu biliyoruz.

Böylece,

$M \cup cl_\gamma(int_\gamma^*(M)) \gamma$ -pre -I -kapalıdır ve burada $pIcl_\gamma(M) \subseteq pIcl_\gamma(M \cup cl_\gamma(int_\gamma^*(M))) \subseteq M \cup cl_\gamma(int_\gamma^*(M))$ dir.

Böylece,

$pIcl_\gamma(M) \subseteq M \cup cl_\gamma(int_\gamma^*(M))$ olur.

Diğer taraftan $pIcl_\gamma(M)$ γ -pre -I -kapalıdır. O halde,

$cl_\gamma(int_\gamma^*(pIcl_\gamma(M))) \subseteq pIcl_\gamma(M)$

Buradan $M \subseteq pIcl_\gamma(M)$ olduğundan

$cl_\gamma(int_\gamma^*(M)) \subseteq cl_\gamma(int_\gamma^*(pIcl_\gamma(M))) \subseteq pIcl_\gamma(M)$ dir. Buradan her iki tarafı M kümesi ile birleştirirsek

$M \cup cl_\gamma(int_\gamma^*(M)) \subseteq pIcl_\gamma(M)$ olur.

(ii). $M \cap int_\gamma(cl_\gamma^*(M)) \subseteq int_\gamma(cl_\gamma^*(M)) = int_\gamma(cl_\gamma^*(M)) \cap int_\gamma(cl_\gamma^*(M)) \subseteq int_\gamma(cl_\gamma^*(M) \cap int_\gamma(cl_\gamma^*(M))) \subseteq int_\gamma(cl_\gamma^*(M \cap int_\gamma(cl_\gamma^*(M))))$ olduğunu biliyoruz.

Böylece $M \cap int_\gamma(cl_\gamma^*(M))$ kümesi γ -pre -I -açık bir kümedir.

Diğer taraftan her küme γ -pre $-I$ -içinin alt kümesi olduğundan;

$M \cap \text{int}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma^*(M) \right) \subseteq \text{plint}_\gamma \left(M \cap \text{int}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma^*(M) \right) \right) \subseteq \text{plint}_\gamma(M)$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ olsun ve $M \subseteq X$ için aşağıdakiler doğrudur.

- i. $s\text{Icl}_\gamma \left(s\text{Iint}_\gamma(M) \right) = s\text{Iint}_\gamma(M) \cup \text{int}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma^* \left(\text{int}_\gamma(M) \right) \right)$
- ii. $p\text{Icl}_\gamma \left(p\text{Iint}_\gamma(M) \right) = p\text{Iint}_\gamma(M) \cup \text{cl}_\gamma \left(\text{int}_\gamma^*(M) \right)$.

Tanım 4.9. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ olsun ve $M \subseteq X$ için eğer $M \subseteq \text{cl}_\gamma^* \left(\text{int}_\gamma(M) \right) \cup \text{int}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma^*(M) \right)$ ise M ye γ -b $-I$ -açık küme denir.

Tanım 4.10. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ olsun ve $M \subseteq X$ için eğer $M \supseteq \text{cl}_\gamma \left(\text{int}_\gamma^*(M) \right) \cap \text{int}_\gamma^* \left(\text{cl}_\gamma(M) \right)$ ise M ye γ -b $-I$ -kapalı küme denir.

Teorem 4.11. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

- i. Eğer M γ -b $-I$ -açık ise M^c γ -b $-I$ -kapalıdır.
- ii. Eğer M γ -pre $-I$ -açık (kapalı) ise, M γ -b $-I$ -açık (kapalıdır).
- iii. Eğer M γ -semi $-I$ -açık (kapalı) ise, M γ -b $-I$ -açık (kapalıdır).

İspat: (i) Tanımdan direkt olarak elde edilir.

(ii) Eğer M γ -pre $-I$ -açık olsun. Bu durumda $M \subseteq \text{int}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma^*(M) \right)$ dır.

$M \subseteq \text{int}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma^*(M) \right) \subseteq \text{int}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma^*(M) \right) \cup \text{int}_\gamma(M) \subseteq \text{int}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma^*(M) \right) \cup \text{cl}_\gamma^* \left(\text{int}_\gamma(M) \right)$ dir.

Bu da M nin γ -b $-I$ -açık olmasıdır.

İspat γ -pre $-I$ -kapalı kümeler için benzer şekilde yapılır.

(iii) M kümesi γ -semi $-I$ -kapalı olsun. Bu durumda

$\text{int}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma^*(M) \right) \subseteq M$ dir. Burada,

$\text{int}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma^*(M) \right) \cap \text{cl}_\gamma^*(M) \subseteq \text{int}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma^*(M) \right) \subseteq M$

$$int_{\gamma} \left(cl_{\gamma}^*(M) \right) \cap cl_{\gamma}^* \left(int_{\gamma}(M) \right) \subseteq int_{\gamma} \left(cl_{\gamma}^*(M) \right) \cap cl_{\gamma}^* \left(int_{\gamma}(M) \right) \subseteq M \text{ olsun.}$$

Bu M nin γ -b - I -kapalı olmasıdır.

Açıklık için de benzer ispat yapılır.

Not: burada dikkat edelim ki γ -açık olan bir küme aynı zamanda γ -b - I -açıktır. Çünkü $M \subseteq X$ γ -açık ise $M \subseteq int_{\gamma}(M)$ dir.

Burada $M \subseteq cl_{\gamma}^* \left(int_{\gamma}(M) \right)$ ve $M \subseteq cl_{\gamma}^* \left(int_{\gamma}(M) \right) \cup int_{\gamma} \left(cl_{\gamma}^*(M) \right)$ olur.

Burada M nin γ -b - I -açık olduğu da elde edilir. Tersinin doğru olmadığını aşağıdaki örnek göstermektedir.

Örnek 4.3. $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ve $I = \{\emptyset, \{a\}\}$ olsun.

$b \in X$ için bir $\gamma: \tau \rightarrow P(X)$ işlemi

$$\gamma(M) = M^{\gamma} = \begin{cases} M, & b \in M \\ cl(M) & b \notin M \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

γ -açık kümeler $\emptyset, X, \{a, c\}, \{b\}, \{a, b\}$ dir.

$$N = \{b, c\} \text{ için } cl_{\gamma}^* \left(int_{\gamma}(N) \right) = cl_{\gamma}^* (\{b\}) = \{b\} \cup \{b\}^* = \{b\} \cup \{b\} = \{b\},$$

$$int_{\gamma} \left(cl_{\gamma}^*(N) \right) = int_{\gamma} (N \cup N^*) = int_{\gamma} (\{b, c\} \cup \{a, b, c\}) = \{a, b, c\},$$

$N \subseteq cl_{\gamma}^* \left(int_{\gamma}(N) \right) \cup int_{\gamma} \left(cl_{\gamma}^*(N) \right)$ olduğundan N γ -b - I -açıktır fakat γ -açık değildir.

Önerme 4.6. (X, τ, I) ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ olsun.

- i. γ -b - I -açık kümelerin keyfi birleşimleri de γ -b - I -açıktır.
- ii. γ -b - I -kapalı kümelerinin keyfi kesişimleri de γ -b - I -kapalıdır.

Önerme 4.7. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- i. M kümesi γ -b - I -açık kümedir.
- ii. $M \subseteq plcl_{\gamma} \left(plint_{\gamma}(M) \right)$
- iii. $M = plint_{\gamma}(M) \cup slint_{\gamma}(M)$

İspat: (i) \Rightarrow (iii) M kümesi γ -b $-I$ -açık olsun.

$M \subseteq cl_\gamma^*(int_\gamma(M)) \cup int_\gamma(cl_\gamma^*(M))$ dir. Önerme 4.5. ve Teorem 4.7. den

$$\begin{aligned} pInt_\gamma(M) \cup sInt_\gamma(M) &= M \cap int_\gamma(cl_\gamma^*(M)) \cup (M \cap cl_\gamma(int_\gamma^*(M))) \\ &= M \cap (int_\gamma(cl_\gamma^*(M)) \cup cl_\gamma(int_\gamma^*(M))) = M \text{ dir.} \end{aligned}$$

(iii) \Rightarrow (ii) Önerme 4.5. ve Sonuç 4.1. den,

$$\begin{aligned} M &= pInt_\gamma(M) \cup sInt_\gamma(M) = pInt_\gamma(M) \cup (M \cap cl_\gamma(int_\gamma^*(M))) \subseteq \\ pInt_\gamma(M) \cup cl_\gamma(int_\gamma^*(M)) &= pIcl_\gamma(pInt_\gamma(M)). \end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (i) Sonuç 4.1. ve Teorem 4.7. den,

$$\begin{aligned} M \subseteq pIcl_\gamma(pInt_\gamma(M)) &= (pInt_\gamma(M) \cup cl_\gamma^*(int_\gamma(M))) \subseteq \\ int_\gamma(cl_\gamma^*(M)) \cup cl_\gamma^*(int_\gamma(M)) &\text{ dir.} \end{aligned}$$

Bu da gösterir ki M γ -b $-I$ -açıktır. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 4.11. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ olsun.

1) M yi kapsayan γ -b $-I$ -kapalı kümelerin en küçüğüne M nin γ -b $-I$ -kapanışı denir ve $bIcl_\gamma(M)$ ile gösterilir.

2) M nin kapsadığı γ -b $-I$ -açık kümelerin en büyüğüne M nin γ -b $-I$ -içi denir ve $bInt_\gamma(M)$ ile gösterilir (Bilgin, 2022)

Tanım 4.12. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ olsun. X deki her γ -b $-I$ -açık kümesi için $U \cap (M - \{x\}) \neq \emptyset$ ise, bir $x \in X$ noktasına $M \subseteq X$ 'in γ -b $-I$ -yığılma noktası denir.

Tanım 4.13. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $M \subseteq X$ olsun Farklı x ve y noktaları için $x \in G$, $y \in H$ ve $H^\gamma \cap G^\gamma = \emptyset$ olacak şekilde, γ -b $-I$ -açık kümeleri varsa (X, τ, I) ideal topolojik uzayına γ -b $-I$ -Hausdorff uzay denir.

Örnek 4.4. $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$ ve $I = \{\emptyset, \{a\}\}$ olsun.

$b \in X$ için bir $\gamma: \tau \rightarrow P(X)$ işlemi

$$\gamma(M) = M^\gamma = \begin{cases} M, & b \in M \\ cl(M) & b \notin M \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

γ -açık kümeler $\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}$ dir.

γ -açık kümeler, γ -b -I -açık olduğundan

$a \in \{a\}, b \in \{b\}$ ve $H^\gamma \cap G^\gamma = \emptyset$ olacak şekilde $H = \{a\}$ ve $G = \{b\}$ γ -b -I -açık kümeleri bulunduğundan (X, τ, I) γ -b -I -Hausdorff uzaydır.

$b \in \{b\}, c \in \{c\}$ ve $H^\gamma \cap G^\gamma = \emptyset$ olacak şekilde $H = \{b\}$ ve $G = \{c\}$ γ -b -I -açık kümeleri bulunduğundan (X, τ, I) γ -b -I -Hausdorff uzaydır.

Örnek 4.5. $X = \{a, b, c\}, \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ve $I = \{\emptyset, \{a\}\}$ olsun.

$b \in X$ için bir $\gamma: \tau \rightarrow P(X)$ işlemi

$$\gamma(M) = M^\gamma = \begin{cases} M, & b \in M \\ cl(M) & b \notin M \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

γ -açık kümeler $\emptyset, X, \{a, c\}, \{b\}, \{a, b\}$ dir.

γ -açık kümeler, γ -b -I -açık olduğundan

$a \in \{a, c\}, b \in \{b\}$ ve $\{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$ olacak şekilde, $\{a, c\}$ ve $\{b\}$ γ -b -I -açık kümeleri,

$c \in \{a, c\}, b \in \{b\}$ ve $\{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$ olacak şekilde, $\{a, c\}$ ve $\{b\}$ γ -b -I -açık kümeleri vardır. Ancak $a \in G, c \in H$ ve $H^\gamma \cap G^\gamma = \emptyset$ olacak şekilde G ve H γ -b -I -açık kümeleri bulunamaz. (X, τ, I) γ -b -I -Hausdorff uzay değildir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, topolojik uzaylarda γ işlemi yardımıyla tanıtılmış olan genelleştirilmiş açık kümeler ve özellikleri, ideal topolojik uzaylara taşınmıştır. Bu kümeler ideal topolojik uzaylarda γ -pre- I -açık küme, γ -semi- I -açık küme ve γ -b- I -açık kümeler olarak adlandırılmıştır. Bu yeni açık kümeler yardımıyla bir kümenin içi, kapanışı, yığılma noktası gibi tanımlar yeniden verilmiştir ve bazı özellikleri incelenmiştir. Buradan yola çıkarak, topolojik uzaylardaki diğer kavramlar, ideal topolojik uzaylara taşınabilir.



KAYNAKLAR

- Abd El-Monsef, M. E., El-Deeb, S. N. and Mahmoud, R. A. (1983). b-Open Sets and B-Continuous Mappings, *Bull. Fac. Sci. Assiut Univ., Studies* 12: 77-90.
- Ahmad, B. and Hussain S. (2005). γ -Convergence in Topological Spaces, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 29, 835–842.
- Ahmad, B. and Hussain S. (2007). On γ -s- Closed Spaces. *Sci. Magna Journal*.3(4),89-93.
- Akız, H. F. and Özcan, M., Some Generalized Open Sets in Ideal Topological Spaces,(submitted) *Journal of New Theory* 34(2022) 100-108.
- Andrejevic, D. (1996). On b-open sets. *Math. Vesnik*, 48, 59-64.
- Atay, A. (2016). *İdeal topolojik uzaylarda düzenli yerel fonksiyonlar*, (doktora tezi), (5-6), Dicle Üniversitesi. Diyarbakır.
- Bilgin, B. (2022). *İdeal Topolojik Uzaylarda Süreklilik Üzerine Bir Çalışma*, (yüksek lisans tezi), (22-23), Yozgat Bozok Üniversitesi. Yozgat.
- Brown, R. (2006). *Topology and Groupoids*.Deganwy United Kingdom.
- Bukhatwa, İ. and Demiralp, S. (2020). On Some Generalized Open Sets in Ideal Bitopological Spaces, *Journal of New Theory*, 32 (2020) 1-10.
- Bülbül, A. (1994). *Genel Topoloji*, Karadeniz Teknik Üniversitesi.,172 (48), (Trabzon).
- Dontchev, J. and Przemski, M. (1996). *On pre-I-open sets and a decomposition of I-continuity*, *Banyan Math. J.*, vol. 2.
- Ekici, E. (2012). *On Pre-I-open sets, Semi-I-open sets and b-I-open sets in Ideal Topological Spaces*, *Acta Universitatis Apulensis* 30 (2012) 293-303.
- Guler, A. C. and Aslim, G. (2005). b-I-open sets and decomposition of continuity via idealization, *Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb.*, 22, 27-32.
- Hatır, E. and Noiri, T. (2002). On decompositions of continuity via idealization, *Acta Math. Hungar.* 96(4), 341-349.
- Hayashi, E. (1964). Topologies defined by local properties. *Math Ann.*, 156, 205-215.

- Hussain, S. (2018). On generalized open sets, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* Volume 47 (6), 1438-1446.
- Hussain, S., Ahmad, and B., Noiri, T. (2010) γ - Semi- Open Sets in Topological Spaces, *Asian Eur. J. Math.* 3(3), 427-433,
- İbrahim, H.Z. (2013). On pre- γ -I-open sets in ideal topological spaces. *Journal of University of Zakho (JUOZ)*, Vol. 1, 349-353.
- Jankovic, D.S. (1983). On functions with closed graphs, *Glasnik Mat.* 18, 141-148.
- Jankovic, D. and Hamlett, T. R. (1990). New topologies from old via ideals, *Amer. Math. Monthly*, 97, 295-310.
- Jankovic D. and T.R Hamlett, (1992) Compatible extension of ideals, *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana B(7)* 6, 453-465
- Kasahara, S. (1979). Operation-compact spaces, *Math. Japonica* 24, 97-105.
- Kuratowski, K. (1933). *Topologie I*, Warszawa.
- Kuratowski, K. (1966). *Topology. Vol. I, Academic Press. New York.*
- Levine, N. (1963). *Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces*, Amer. Math. Monthly, Studies 70: 36-41.
- Mashhour, A. S., Abd El-Monsef, M. E. and El-Deeb, S. N. (1982). On precontinuous and weak pre-continuous mappings, *Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, Studies* 53: 47-53.
- Mucuk, O. (2010). *Topoloji ve Kategori*. Nobel Yayınları. Ankara.
- Njastad, O. (1965). On some nearly open sets, *Pacific J. Math.*, Studies 15: 961-970.
- Ogata, H. (1991). Operations on topological spaces and associated topology, *Math. Japonica* 36(1), 175-184.
- Rehman, F.U. and Ahmad, B. (1992). Operations on topological spaces I, *Math. Today* 10, 29-36.
- Vaidyanathaswamy, R. (1960). *Set topology*, Chelsea Publishing Company, New York.
- Yüksel, Ş.(2015). *Genel Topoloji*. Eğitim Yayınevi. 127-133. Konya.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : ÖZCAN, Meryem

