YILDIZ GRAFI İÇİN TERS PROBLEM ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

EMİNE NUR YILMAZOĞLU

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

MERSİN
AĞUSTOS - 2022

YILDIZ GRAFI İÇİN TERS PROBLEM ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

EMİNE NUR YILMAZOĞLU
ORCID: 0000-0001-6209-5680

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU
ORCID: 0000-0002-3283-9535

MERSİN
AĞUSTOS- 2022

ÖZET

YILDIZ GRAFI İÇİN TERS PROBLEM ÜZERİNE

Bu çalışmada Yıldız Grafı biçiminde sınır değer problemi için spektral analizin ters problemi üzerine çalışılmıştır. Tellerin farklı yoğunlukları varsa tellerin uçlarındaki yayların sağlamlık katsayılarının doğal frekanslardan benzersiz geri kazandığını gösteriyoruz. Tellerin n ucunda yayların sağlamlık katsayılarının geri kazanılmasının benzersizliği için $n+1$ doğal frekansların kullanılmasının yeterli olduğunu gösteren örnekler de verilmiştir. Ele alınan problemler için düz problemler ve ters problemler bilgisayar hesaplamaları ile yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Doğal frekanslar, Yıldız şeklindeki grafik, Ters problemler, Teller, Yoğunluklar, Sınır şartları.

Danışman: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU, Iğdır Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Iğdır.

ABSTRACT

ON THE INVERSE PROBLEM FOR STAR GRAPH

In this study, the inverse problem of spectral analysis for the boundary value problem in the form of a Star Graph is studied. We show that the stiffness coefficients of the springs at the ends of the strings are uniquely recovered from natural frequencies if the strings have different densities. Examples are also given showing that it is sufficient to use $n+1$ natural frequencies for the uniqueness of recovering the stiffness coefficients of the springs at the n end of the strings. Straight problems and inverse problems are made by computer calculations for the problems discussed.

Keywords: Natural Frequencies, Star-Shaped Graph, Inverse Problems, Strings, Densities, Boundary Conditions.

Advisor: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU, Department of Mathematics, Iğdır University, Iğdır.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitim hayatına başladığım günden bugüne dek her konuda desteğini esirgemeyen ve her konuda yardım eden ve bilgilerinden faydalandığım danışman hocam Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU’na üzerimdeki emeklerinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca bilgilerinden faydalandığım tüm bölüm hocalarıma teşekkür ederim.

Hayatımın her aşamasında maddi ve manevi her zaman bana destek olan ve sevgisini esirgemeyen aileme teşekkür eder bu çalışmayı üzerimde emeği olanlara armağan ediyorum.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Kısaltma/Simge	**Tanım**
R	Reel Sayılar Kümesi
C	Kompleks Sayılar Kümesi
λ	Spektral Parametre
$\Delta(\lambda)$	Karakteristik Fonksiyon
$D(L)$	L Operatörünün Tanım Bölgesi
W	Wronskiyen
μ	Spektral Parametre
L_2	Karesi İntegre Edilebilir Fonksiyonlar Uzayı
H	Hilbert Uzayı
$\operatorname{Im}\rho$	ρ Kompleks sayısının Sanal Kısmı
ρ	Yoğunluk

1. GİRİŞ

Yapılan çalışmalar incelendiğinde spektral teori, modern fonksiyonel analiz ve uygulama ana dallarından biri olarak önemli yere sahiptir. Diferansiyel operatörlerin spektral teorisi özellikle fizikte ve matematiksel fizikte karşımıza çıkmaktadır.

Spektral problemler ve ters spektral problemler olmak üzere diferansiyel operatörler ikiye ayrılır.

Düz spektral problem bir diferansiyel operatörün spektrumunun ve öz fonksiyonlarının aranması ve bir fonksiyonun öz fonksiyonlarına göre ayrışımının incelenmesidir. Spektral analizin ters problemi denildiğinde lineer operatörün spektral analize göre inşası anlaşılmaktadır.

Euler, 1736 yılında Könisberg köprü problemi olarak adlandırılan çözümsüz problemi çözdüğü zaman graf teorinin babası oldu. Birbirine ve Pregel nehri kıyısına yedi köprü ile bağlı iki ada vardı. Problem dört arazi alanının herhangi birinden başlamak, her köprüden sadece bir kere geçmek ve başlangıç noktasına geri dönmekti (Harary, 1969).

Problemin çözülemez olduğunu kanıtlamada Euler her bir arazi alanı yerine bir nokta ve bu arazi alanlarını birbirine bağlayan her bir köprü yerine bir çizgi koyarak bir graf oluşturdu. Buna Könisberg köprü probleminin grafı adı verilmiştir. Problemi çözmekten ziyade, Euler problemi genelleştirdi ve bir grafın bu şekilde hareket edebilir olması için bir kriter geliştirdi; yani, graf bağlantılı ve her nokta çift sayıda kenar ile ilişik olmalıdır (Harary, 1969).

Kirchhoff 1847 yılında, her dalında ve bir elektrik ağının her devresinde akım veren eşzamanlı lineer denklem sistemlerini çözmek için ağaçlar teorisini geliştirmiştir.1857 de Cayley diferansiyel hesabındaki değişkenlerin değişimini göz önünde bulundurarak ağaç olarak adlandırılan grafların önemli bir sınıfını keşfetti. Jordan 1869 da bağımsız olarak sadece matematiksel bir disiplin olarak ağaçları keşfetti.1859 yılında Sir William Hamilton tarafından icat edilen bir oyun 20 noktası ünlü şehirlerin isimleriyle etiketlenen düzgün onikiyüzlü bir prizma kullanır. Oyuncu her bir noktadan tam olarak bir kez geçen kenarlar boyunca kapalı bir devre bularak tüm dünyayı gezmelidir (Harary, 1969).

Fizikte ters problemlere indirgenebilen örnekler mevcuttur. Bunlara örnek olarak parçacıkların enerji seviyelerine göre bu parçacıklar arasında etkileşim kuvvetlerinin belirlenmesi, mekanikte dalga boylarına göre homojen olmayan yayda yoğunluk dağılımının öğrenilmesi, jeofizikte yer altı yer altındaki elementlerin dağılım karakteristiklerine göre belirlenmesi verilebilir.

Sınır değer problemleri fiziksel birçok problemin çözümü için kullanılır. Kuantum mekaniği, kuantum fiziği, termodinamik problemler ve dalga denklemlerinde kullanılır. Matematiksel fizik ve birçok mühendislik problemi diferansiyel denklemlerden oluşan sınır değer problemini içermektedir.

Örneğin

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=\lambda\rho(x)y \tag{1.1}$$

diferansiyel denklemine Sturm-Liouville denklemi, farklı sınır koşulları tarafından üretilen operatörlere Sturm-Liouville operatörleri, bu operatör için kullanılan problemlere ise Sturm-Liouville problemleri adı verilmektedir. Tezin bölümleri hazırlanırken Freiling-Yurko (2001), Levitan Sargsyan (1988), Naimark (1968) gibi önemli kaynaklar esas alınmıştır. Diferansiyel operatörler regüler ve singüler olmak üzere iki farklı şekilde tanımlanmış ve bu operatörlerin spektral teorisi yapılandırılmıştır. Katsayıları sürekli ve tanım bölgesi sonlu fonksiyonlar olan diferansiyel operatörlere regüler diferansiyel operatör, tanım bölgesi sonsuz veya katsayılardan bazıları veya tamamı toplanabilir olmayan veya her iki durum da sağlanacak şekildeki diferansiyel operatörlere singüler diferansiyel operatör denir. İkinci mertebeden diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekildeki adi diferansiyel operatörlerin öz değerlerinin dağılımı 19.yüzyılın sonlarında (Birkoff,1908) tarafından incelenmiştir. Özellikle kuantum mekaniğinde ayrık spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin öz değerlerinin dağılımı önem taşımaktadır. İlk olarak Weyl (Marchenko,1986) tarafından singüler operatörler için spektral teori incelenmiştir. Yapılan çalışmalarda integral denklemler teorisinde, titreşim teorisi problemleri ve lineer cebir problemleri arasındaki benzerlikten faydalanan Hilbert uzayı kavramları kurulmuştur. Lineer self adjoint operatörler teorisi H hilbert uzayı tanımlandıktan sonra hızla gelişmeye başlamıştır. Daha sonra Friedrichs, Rietsz Neumann (Marchenko,1977) ve diğer birçok matematikçiler tarafından self-adjoint ve simetrik operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Diferansiyel denklemler için ilk çalışma sayılan ters problemler teorisinin başlangıcı (Ambartsumyan,1929) ‘a aittir. Sturm-Liouville operatörleri için ters problemlerle ilgili teorem 1929 yılında Ambartsumyan (Ambartsumyan,1929) tarafından ispatlanmıştır. Ambartsumyan ‘ın yaptığı bu çalışmasından sonra ters problemler teorisinde çeşitli problemler çıkmış dolayısıyla bu tip problemlerin çözümü için farklı yöntemler verilmiştir. Bu problemler ile ilgili en önemli sonuçlardan birisi Borg’a (Borg, 2945) aittir. İkinci mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde bir sonraki en önemli aşamalarından birisi Marchenko (1950) tarafından kaydedilmiştir. 1950 yılında Marchenko, ters problemlerin çözümünde Sturm-Liouville operatörün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır. Marchenko ‘nun çalışmaları ile hemen hemen aynı zamanda Krein (1951), çalışmalarında Sturm-Liouville tipindeki diferansiyel operatörü $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri yardımıyla değil, bu dizilerin yardımıyla kurulan yardımcı fonksiyon kullanarak verilmiştir. 1951 yılında Gelfand-Levitan (1951) çalışmasında, $\rho(\lambda)$ monotan fonksiyonun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerekli ye yeterli şartları verdi Ayrıca, bu çalışmada Sturm-Liouville operatörünün belirtilmesi için etkili bir yöntem verilmiştir.

Mekanik sistemlerin ve elektrik şebekelerinin tahribatsız muayenesi ve teşhisi hızla gelişmektedir. Ters Sturm-Liouville problemlerinin çözümünde de büyük ilerleme kaydedilmiştir. Bununla birlikte, geometrik bir grafikte verilen Sturm-Liouville probleminin sınır koşullarının sonlu bir özdeğer kümesi tarafından belirlenmesi sorunları hala yeterince incelenmemiştir.

Ters Sturm-Liouville problemleri Marchenko V.A., Levitan B.M., Sadovnichy V.A.'nın çalışmalarında ele alındı. Ancak bu görevler graflarla değil, aralıklarla verildi. Graflardakı diferansiyel denklemler için doğrudan problemler Pokorny Yu.V. (ve diğerleri), Yurko V.A.'nın çalışmalarında grafikler için ters problemler ele alındı. Ve ters spektral problemlerdeki diğer uzmanlar, ancak bu çalışmalarda, esas olarak diferansiyel denklemlerin katsayıları destek edildi ve destek olunan için birkaç spektrum kullanıldı.

Bu çalışmada verilen diferansiyel denklemler için sınır koşullarını geri yükleme işlemi yapıldı. Mekanik sistemin kendisinin doğal frekansları ve elektrik şebekesinin alternatif akımının salınımının restorasyonu için sadece bir spektrum veya bir kısmı kullanılır. Akhtyamov A.M., Yamilova L.S., Muftahova A.V., Safina G.F.'nin çalışmalarında sınır koşullarının tanımlanmasının ters problemleri ele alınmıştır. Bununla birlikte, geometrik grafikler için, sadece ters statik problemler ve yayların sertliğini doğal frekanslarla tanımlamanın ters problemi eklenen kütlelerin varlığı dikkate alınmadan çözülmüştür.

Ek olarak N.F Valeev, Yu.V. çalışmalarında, bilinmeyen parametreler kadar çok öz frekans kullanılarak parametreleri yeniden oluşturulan sonlu boyutlu operatörler için ters problemlere ayrılmıştır. Bu durumda, asimetrik sistemler de dahil olmak üzere çözümün benzersiz olmadığı ortaya çıkıyor. Bu çalışmada asimetrik sistemlerin benzersizliğini elde etmek için bilinmeyen sayısından daha fazla sayıda frekansın kullanılması önerilmiştir.

Bu çalışmada cihazları şoktan koruyan titreşim koruma sistemlerinin tasarlanmasını ve ayrıca bu tür yapıların teşhisinin yapılmasını mümkün kılan, belirli bir salınım spektrumu ile mekanik sistemlerin tespitlerinin tespit edilmesi ve yüklenmesine verilmiştir Ayrıca, doğrudan görsel inceleme için erişilmesi zor alanlarda elektrik şebekeleri için topraklama koşullarının teşhisi ve ayrıca istenen AC salınım frekansları spektrumunu sağlamak için topraklama koşullarının seçimi de dikkate alınmıştır. Bu çalışmanın amacı, yıldız şeklindeki bir yapının mekanik ve elektrik sistemlerinin matematiksel modellerini incelemek, geometrik bir dize grafiğinin çıkmaz köşelerinin sabitlenmesini ve yüklenmesini ve bunun için koşulları teşhis etmek için yöntemler geliştirmektir. Ek olarak elektrik şebekelerinin doğal salınım frekanslarıyla topraklanmasıdır.

Bu tezde aynı bir başlangıç noktasında (sıfır noktasında) birleşen farklı yoğunluğa sahip telden oluşan yıldız biçiminde graf göz önüne alınmıştır. Yıldızın kenarlarının uç noktaları esnek olarak bağlıdır. Her bir kenarda öz fonksiyon ve frekanslar için denklemler $0 \le x_i \le \pi$ ve $i = 1,2,3$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} -y_1'' + q_1(x_i) &= \lambda^2 \rho y_1 \\ -y_2'' + q_2(x_i) &= \lambda^2 \rho y_2 \\ -y_3'' + q_3(x_i) &= \lambda^2 \rho y_3 \end{aligned} \tag{1.2}$$

biçimindedir. Burada x_i merkezden uç noktaya olan uzaklık, $y(x_i)$ i 'ninci kenarın sapması ve λ spektral parametredir.

Ortak başlangıç koşul:

$$\begin{aligned} &y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) \\ &y_1'(0) + y_2'(0) + y_3'(0) = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Biçiminde ve uç noktalarda

$$\begin{aligned} y_1'(\pi) + h_1 y_1(\pi) &= 0 \\ y_2'(\pi) + h_2 y_2(\pi) &= 0 \\ y_3'(\pi) + h_3 y_3(\pi) &= 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

biçimindedir.

Bu çalışmadaki amacımız yukarıda bahsedilen yıldız grafı biçiminde sınır değer problemi için spektral analizin ters problemin incelenmesidir.

Hedefe uygun olarak, aşağıdaki görevler formüle edilmiş ve çözülmüştür:

1. Yıldız şeklindeki bir yapının mekanik ve elektrik sistemlerinin matematiksel modellerini keşfedilmiştir.

2. Yıldız şeklindeki bir yapının mekanik ve elektrik sistemlerinin parametrelerini belirlemek için ters problemin çözümü için bir yöntem geliştirilmiştir Yıldız şeklindeki bir yapının mekanik ve elektrik sistemlerinin parametrelerini belirlemek için ters problemi çözmek için önerilen yöntemlerin sayısal deneylerini yapılmıştır.

3. Sonlu bir doğal frekans kümesine göre bir dizi grafiğinin çıkmaz köşelerinde yayların ve yığılmış kütlelerin rijitlik katsayılarını belirlemenin ters problemlerinde en uygun çözüm sayısı sorusunu araştırılmıştır.

4. Bir dizi grafiğinin salınımlarının doğal frekanslarını hesaplamanıza ve ayrıca yıldız şeklindeki bir yapının mekanik ve elektrik sistemlerinin matematiksel modelinin parametrelerini teşhis etmenize izin veren bir yazılım paketi oluşturulmuştur. Bu çalışmada sonlu bir doğal salınım frekansları kümesinden bir dizi grafiğinin çıkmaz uçlarındaki yayların ve yığılmış kütlelerin (parametrelerin) rijitlik katsayılarını belirleme problemlerini çözmek için yeni sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Ayrıca lineer olmayan denklem sistemlerini, diferansiyel denklemler teorisini, tüm

fonksiyonlar teorisini, ters problemler teorisini, hesaplamalı matematik, matematiksel analiz ve lineer cebir çözmek için yöntemler kullanıldı.

Akhtyamov A.M., Yamilova L.S., Muftahova A.V., Safina G.F.'nin çalışmalarında sınır koşullarının tanımlanmasının ters sorunları ele alındı. Bununla birlikte, geometrik grafikler için, ters statik problemler ve yayların sertliğini doğal frekanslarla tanımlamanın ters problemi çözülmüştür (eklenen kütlelerin varlığı dikkate alınmamıştır). Bu çalışmalar, bilinmeyen parametreler kadar çok öz frekans kullanılarak parametreleri yeniden oluşturulan sonlu boyutlu operatörler için ters problemlere ayrılmıştır. Bu durumda, asimetrik sistemler de dahil olmak üzere çözümün benzersiz olmadığı ortaya çıkıyor. Bu çalışmada asimetrik sistemlerin benzersizliğini elde etmek için bilinmeyen sayısından daha fazla sayıda frekansın kullanılması önerilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALAR

Bir takım uygulamalı bilimlerde özellikle bazı fizik problemlerinde önemli bir yere sahip olan, diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, düz spektral problemler ve ters spektral problemler olarak iki ana kola ayrılır. Düz spektral problemler, verilen operatörün spektrumunun ve öz fonksiyonlarının aranması ve verilen bir fonksiyonun operatörün öz fonksiyonlarına göre ayrışımının incelenmesinden ibarettir. Spektral analizin ters problemi ise verilen belirli dizilere göre, spektral karakteristikleri bu diziler olan operatörün inşası ile ilgilenmektedir (Marchenko, 1977). 20. yüzyılda farklı operatör sınıfları için spektral teori daha hızlı bir biçimde gelişmiştir. Bu dönemde, Birkoff, Weyl, Hilbert, Neumann ve diğer birçok matematikçi önemli sonuçlar elde etmişlerdir. Sonlu aralıkta ikinci mertebeden diferansiyel ifadeler ve regüler sınır koşulları ile üretilen operatörlerin öz değerlerinin dağılımı G.D. Birkoff tarafından incelenmiştir. Lineer diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, adi diferansiyel operatörler için Sturm-Liouville ve bir boyutlu Dirac operatörlerin teorisi üzerinde yoğunlaşmıştır (Levitan, 1991). Sturm –Liouville operatörlerinin ters spektral uygulamaları Freiling ve Yurko, (2008). tarafından ele alınmıştır (Freiling ve Yurko, 2008).Tezde ele alınan problem ile ilgili bilgiler incelenmiştir (Akhtyamov, 2015). Temel tanım ve teoremler için kaynakları araştırılmıştır. Tezin genelinde ve özellikle de tartışma bölümünde detaylı olarak tez konusu üzerine araştırılma yapılmıştır (Akhtyamov ve Utyashev, 2015; Akhtyamov, 2009; Akhtyamov, Sadovnichy ve Sultanaev, 2017).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, literatürde yer alan ve bu çalışmada kullanılan bazı tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

Tanım 3.1.1. $V \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve K herhangi bir cisim olsun.
$+: V \times V \to V$ ve $: K \times V \to V$ fonksiyonları için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $V'ye$ K cismi üzerinde vektör uzayı denir (Akhiezer, ve Glazman, 1950).

A) $(V,+)$ cebirsel yapısı değişmeli guruptur.

A1) $\forall x, y \in V$ için $x + y \in V$ 'dir. (Kapalılık özelliği)

A2) $\forall x, y, z \in V$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$ 'dir. (Birleşme özelliği)

A3) $\forall x \in V$ için $x+e=e+x=x$ olacak şekilde bir tek $e \in V$ vardır.

A4) $\forall x \in V$ için $x+x^* = x^* + x = 0$ olacak şekilde bir tek $x^* \in V$ vardır.

A5) $\forall x, y \in V$ için $x+y=y+x$ 'dir. (Değişme özelliği)

B) $\forall x, y \in V$ ve $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

B1) $\alpha x \in V$ 'dir.

B2) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ 'dir.

B3) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ 'dir.

B4) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$ 'dir.

B5) $\forall x \in V$ için $1.x = x$ olacak şekilde $1 \in K$ dir. Burada $1, K$ cisminin birim elemanıdır.

Tanım 3.1.2. $D(L)$ ve $R(L)$ aynı cisim üzerindeki vektör uzayı olmak üzere biçiminde tanımlanan dönüşüme operatör denir. Bu operatör $\forall x, y \in D(L)$ ve $\forall \alpha$ skaleri için

L1) $L(x+y)=L(x)+L(y)$

L2) $L(\alpha x)=\alpha L(x)$

$L: D(L) \to R(L)$ Koşullarını sağlıyorsa L ' ye lineer operatör veya lineer homomorfizim denir. L operatörü birebir ve örten ise L operatörüne lineer izomorfizm denir. Değer kümesi reel sayılar veya kompleks sayılar olan operatörlere ise fonksiyonel denir (Akhiezer, ve Glazman, 1950).

Tanım 3.1.3. H, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olmak üzere , $\forall x, y, z \in H$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $\langle .,. \rangle$ $H \times H \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna H de bir iç çarpım denir.

a) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

c) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

d) $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$

$\| x \| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ifadesi x' in normu olarak tanımlamaktadır.

Bir iç çarpımdaki her Cauchy dizisi uzay içinde bir limite sahipse bu uzaya Hilbert uzay adı verilir. Örneğin,

$$L_2[a,b] = \left\{ f(x) : \int_a^b [f(x)]^2 dx < \infty \right\} \tag{3.1}$$

uzayı

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x).\overline{g(x)}\, dx \tag{3.2}$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzaydır (Akhiezer, ve Glazman, 1950).

Tanım 3.1.4. Bir H Hilbert uzayında tanımlı L lineer operatörü verilsin. Eğer $\forall x \in D(L)$ için $\| Lx \| \leq m \| x \|$ olacak şekilde bir $m > 0$ sayısı varsa L ye sınırlı lineer operatör denir (Akhiezer, ve Glazman, 1950).

Tanım 3.1.5. H bir Hilbert uzayı ve M, H ın alt uzayı olsun. $\forall x \in H$ için $\lim_{x \to \infty} x_n = x$ olacak şekilde $\exists (x_n) \subset M$ dizisi varsa M ye H da yoğun alt uzay adı verilir ve $\overline{M} = H$ ile gösterilir (Akhiezer, ve Glazman, 1950).

Tanım 3.1.6. $\{ x : \forall m \in M \ \text{için} \ (x, m) = 0 \}$ kümesine M kümesinin ortogonal tümleyeni denir ve $M^{\perp}$ ile gösterilir (Akhiezer, ve Glazman, 1950).

Tanım 3.1.7. $\overline{M} = H$ olması için gerek ve yeter koşul $M^{\perp} = \{0\}$ olmasıdır (Akhiezer, ve Glazman, 1950).

Tanım 3.1.8. L bir H Hilbert uzayından kendi üzerine tanımlı bir lineer operatör ve $\overline{D(L)} = H$ olsun.

$$M = \{ y \in H : \forall x \in D(L) \text{ için } (Lx, y) = (x, x) \text{ olacak şekilde } x \in H \text{ mevcut} \}$$

kümesi üzerinde $y \in M$ için $L^* y = z$ şeklinde tanımlı operatöre L operatörünün eşlenik (adjoint) operatörü denir (Akhiezer, ve Glazman, 1950).

Tanım 3.1.9. $[a,b]$ aralığında tanımlı sonlu değerli $f(x)$ fonksiyonu verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ için $[a,b]$ ye ait olan ve $\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta$ koşulunu sağlayan keyfi sonlu sayıda ikişerli ayrık $\{(a_k, b_k)\}$ aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f(b_k) - f(a_k) \right| < \varepsilon \tag{3.3}$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa $f(x)$ fonksiyonuna $[a,b]$ kapalı aralığında mutlak süreklidir denir. $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli olan fonksiyonlar uzayı $AC[a,b]$ sembolü ile gösterilir (Akhiezer, ve Glazman, 1950).

Tanım 3.1.10. (a,b) aralığında tanımlı f fonksiyonunun $k = \overline{0, n-1}$ için $f^{(k)} \in AC[a,b]$ ve $f^{(n)} \in L_2[a,b]$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayına Sobolev uzayı denir ve $W_2^n[a,b]$ ile gösterilir (Akhiezer, ve Glazman, 1950).

Tanım 3.1.11. n. mertebeden bir lineer diferansiyel ifade

$$\ell(y) = p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y \tag{3.4}$$

formundadır. Burada $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ fonksiyonlarına diferansiyel ifadenin katsayıları, n sayısına da mertebesi denir (Bellman, ve Kuk, 1967).

Tanım 3.1.12. a ve b sonlu sayılar olmak üzere $\dfrac{1}{p_0(x)}, p_1(x), \ldots, p_n(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilirlerse, (3.4) diferansiyel ifadesine regüler diferansiyel ifade , a veya b sonsuz ya da $\dfrac{1}{p_0(x)}, p_1(x), \ldots, p_n(x)$ fonksiyonlarından en az biri

$[a,b]$ aralığında integrallenebilir değilse, (3.4) diferansiyel ifadesine singüler diferansiyel ifade denir (Bellman, ve Kuk, 1967).

Tanım 3.1.13.

$$U(y)=a_{v0}y(a)+a_{v1}y^{'}(a)+...+a_{v(n-1)}y^{(n-1)}(a)+b_{v0}y(b)+b_{v1}y^{'}(b)+...+b_{v(n-1)}y^{(n-1)}(b)=0$$

eşitliklerine $y\in C^{(n)}(a,b)$ fonksiyonu için konulan sınır koşulları adı verilir. Burada $C^{(n)}(a,b)$, (a,b) aralığında $n.$ mertebeden sürekli türeve sahip fonksiyonların uzayı ve a_{vi}, b_{vi} $(v=\overline{1,m}\ ,\ i=\overline{1,n-1})$ reel katsayılardır (Bellman, ve Kuk, 1967).

Tanım 3.1.14. $D=\left\{y\in C^{(n)}(a,b):U_v(y)=0, v=\overline{1,m}\right\}$ kümesi üzerinde $L_y=\ell(y)$ eşitliği ile bir lineer operatör tanımlanır. Bu operatöre $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve $U_v(y)=0$ sınır koşulları tarafından üretilen diferansiyel operatör denir (Bellman, ve Kuk, 1967).

Tanım 3.1.15. λ bir kompleks parametre olmak üzere

$$L:=\begin{cases}\ell(y)=\lambda y\\ U_v(y)=0\ ,\ \ v=\overline{1,m}\end{cases} \tag{3.5}$$

sınır değer probleminin sıfırdan farklı bir $y(x)$ çözümü varsa λ' ya bu sınır değer probleminin öz değeri $y(x)$' e de λ'ya karşılık gelen öz fonksiyonu denir. L sınır değer problemine $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve $U_v(y)=0$ sınır koşulları tarafından üretilen öz değer problemi denir (Bellman, ve Kuk, 1967).

Tanım 3.1.16. Tanım 3.1.15 te $n=m$ olsun. $y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda),...,y_n(x,\lambda)$ fonksiyonları

$$\ell(y)=\lambda y \tag{3.6}$$

denkleminin

$$y_i^{(j-1)}(a,\lambda)=\begin{cases}0, & i\neq j\ \ ise\\ 1, & i=j\ \ ise\end{cases} \tag{3.7}$$

$i, j = \overline{1, n}$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümler olmak üzere;

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix} \tag{3.8}$$

determinantına L problemine karşılık gelen diferansiyel operatörün karakteristik fonksiyonu denir.

Tanım 3.1.17. $\rho(A) = \left\{\lambda \in C : (A - \lambda I)^{-1} \in L(x)\right\}$ kompleks sayılar kümesine A operatörünün regüler değerler (veya rezolvent) kümesi, $\sigma(A) = C / \rho(A)$ kümesine ise A operatörünün spektrumu adı verilir. $\lambda \in \rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda; A) = (A - \lambda I)^{-1}$ operatörüne A operatörünün rezolventi veya çözücü operatörü denir (Musayev ve Alp, 2000).
Dolasıyla,

- Regüler olmayan tüm $\lambda \in C$ noktalarına A operatörünün spektrumu denir.
- $A - \lambda I$ operatörünü tüm H Hilbert uzayında tanımlı yapan ve $(A - \lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olmadığı λ değerlerine A operatörünün özdeğerleri denir. Bir operatörün özdeğerleri spektrum kümesine dâhildir.
- Bütün özdeğerlerin kümesine operatörün diskret spektrumu denir.
- $(A - \lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olduğu ancak tüm uzayda tanımlı olmadığı veya $(A - \lambda I)^{-1}$ tersinin sınırsız olduğu λ değerlerinin oluşturduğu kümeye operatörünün sürekli spektrumu denir.

Tanım 3.1.18. Analitik bir $f(z)$ fonksiyonun bir ayrık tekil noktası z_0 olsun. Eğer $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ ise z_0 noktasına $f(z)$ nin bir kutup noktasıdır (Başkan, 2005).

Tanım 3.1.19 Kompleks düzlemde analitik fonksiyona tam fonksiyon denir. Başka bir deyişle, kompleks düzlemde $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n + ...$. Kuvvet serisi biçiminde gösterilen fonksiyona tam fonksiyon denir (Başkan, 2005).

Tanım 3.1.20. $M_f(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ olsun. $M_f(r) < e^{r^k}$ eşitsizliğini sağlayan $k > 0$ sayısı varsa, $f(z)$'e sonlu mertebeli fonksiyon, $\inf\{k\} = \rho$ sayısına ise, $f(z)$'nin mertebesi denir. Gösterilir ki,

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ell n \ell n M_f(r)}{\ell n r} = \rho \text{ dur (Başkan, 2005).}$$

Tanım 3.1.21. $\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \dfrac{\ell n M_f(r)}{r^{\rho}}$ sayısına $f(z)$ tam fonksiyonunun tipi denir (Başkan, 2005).

Teorem 3.1.1. (Rezidü Teoremi) D bölgesinde (sonlu sayıdaki ayrık tekil $z_1, z_2, ..., z_n$ noktaları hariç) analitik ve D nin Γ sınırındaki sürekli $f(z)$ fonksiyonu için $\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi in \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}_{z=z_i} sf(z)$ eşitliği sağlanır. z_0 noktası $f(z)$ nin k katlı kutup noktası ise $\int_{\Gamma} f(z)dz = \dfrac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \dfrac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[f(z)(z-z_0)^k \right]$ ve z_0 noktası $f(z)$ nin basit kutup noktası olduğunda ise $\int_{\Gamma} f(z) = \lim_{z\to z_0} \left[f(z)(z-z_0) \right]$ sağlanır (Başkan, 2005).

Teorem 3.1.2. (Rouche Teoremi) f ve g fonksiyonları, basit kapalı bir C eğrisinin içinde ve üzerinde analitikse ve C üzerinde $|g(z)| < |f(z)|$ ise f ve $f+g$ fonksiyonları C içinde aynı sayıda sıfırlara (köklere) sahiptir (Başkan, 2005).

Teorem 3.1.3. (Maksimum Teoremi) $f(z)$ fonksiyonu R bölgesinde analitik ve $M = \max_{z\in R} |f(z)|$ olsun. Özdeş olarak sabit olmayan $f(z)$ fonksiyonunun modülü R nin hiçbir noktasında M değerini alamaz. Yani $|f(z)|$ fonksiyonu $\overline{R}$ de maksimumunu sadece bölgenin sınırında alabilir (Başkan, 2005).

Teorem 3.1.4. (Liouville Teoremi) $f(z)$ sınırlı ve tüm kompleks düzlemde analitik fonksiyon ise o halde $f(z)$ sabit bir fonksiyondur (Musayev, ve Alp, 2000).

Teorem 3.1.5. L, $\ell(y) = p_0 \dfrac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + p_n(x) y$ diferansiyel ifadesi ve $V_v(y) = 0$, $v = 1, 2, ..., n$ sınır koşullarıyla oluşturulmuş bir diferansiyel operatör olsun Şöyle ki; $Ly = 0$ sınır değer problemi sadece $y = 0$ aşikar çözümüne sahipse, o halde L operatörünün L^{-1} tersi vardır. L^{-1} operatörü, sürekli bir çekirdeğe sahipse bir integral operatördür. Bu çekirdek L operatörünün Green fonksiyonu olarak adlandırılır. Green fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

- $G(x,\zeta)$ fonksiyonu süreklidir ve $[a,b]$ aralığındaki tüm x ve ζ ler için $(n-2)$-nci mertebeden sürekli türevlere sahiptir.

- $[a,b]$ aralığındaki sabitlenmiş keyfi ζ değeri için $G(x,\zeta)$ fonksiyonu $[a,\zeta]$ ve $[\zeta,b]$ aralıklarında x'e göre $(n-1)$-nci ve n-nci mertebeden türeve sahiptir, $(n-1)$-nci mertebeden türevin $x=\zeta$ de $\dfrac{1}{p_0(\zeta)}$ sıçrama süreksizliği vardır:

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\zeta+0,\zeta)-\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\zeta-0,\zeta)=\frac{1}{p_0(\zeta)} \tag{3.9}$$

- $[a,\zeta]$ ve $[\zeta,b]$ aralıklarının her ikisinde de $G(x,\zeta)$ fonksiyonu x' in bir fonksiyonu olarak düşünülür ve $\ell(G)=0$ denklemi ve $V_v(G)=0 \quad (v=1,2,...,n)$ sınır koşullarını sağlar (Naimark, 1968)

Teorem 3.1.6. (Hadamard) Sonlu ρ mertebeden $f(z)$ fonksiyonu

$$f(z)=z^m e^{P(z)}\prod_{m-1}^{w}G\left(\frac{z}{a_n};p\right) \qquad (w\leq\infty) \tag{3.10}$$

biçiminde gösterilir. Burada m $f(z)$ fonksiyonunun sıfır kökünün tekrarlanma derecesi a_n ise sıfır olmayan kökleridir. $P(z)$ q dereceli polinom olur ve $q\leq\rho$

$$G(u;p)=(n-u)\exp\left(u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+...+\frac{u^p}{p}\right) \qquad G(u,0)=1-u \tag{3.11}$$

- Hadamard teoreminden elde ederiz ki , $f(z)$ tam fonksiyonunun sıfırlarına göre sabit çarpanın ile inşa edilebilir, yani $f(z)$ tam fonksiyonunu a_n sıfırlarına göre sabit çarpanı ile inşa etmek olur. Bu teoreme göre 1. mertebeden $f(z)$ tam fonksiyonunu $(f(0)\neq 0)$ aşağıdaki biçimde gösterilir: (Naimark, 1968).
-

$$f(z)=f(0)e^{cz}\prod_{n-1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z_n}{a_n}} \tag{3.12}$$

Teorem 3.1.7. (Cauchy İntegral Teoremi) $f(z)$ bağlantılı G bölgesinde birebir analitik fonksiyon γ ise G'de bulunan keyfi düzlendirebilir kapalı eğri olacak biçimde $f(z)$ nin γ eğrisi üzerinden integral, sıfıra eşittir yani,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0 \tag{3.13}$$

Teorem 3.1.8. (Cauchy İntegral Formülü) B bir bölge ve γ bu bölge içinde bir kapalı eğri olsun. Eğer a , γ 'nın sınırlandırdığı bölge içinde bir nokta ve $f(z)$, B ' de analitik ise,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-a}dz \tag{3.14}$$

Teorem 3.1.9. (Ahlfors, 1966) f , bir B bölgesinde analitik bir fonksiyon , γ ise B de bulunan ve f 'nin sıfır yerinden geçmeyen basit kapalı eğri olsun. f 'nin γ 'nın iç kısmındaki sıfır yerleri $z_1, z_2, ..., z_n$ ve katlılıkları da sırasıyla $m_1, m_2, ..., m_n$ ise

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f^{'}(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{n} m_i \tag{3.15}$$

dir.

Teorem 3.1.10. (Ahlfors, 1966) f , bir B bölgesinde meromorf fonksiyon , γ ise B de bulunan f nin hiçbir sıfıryeri ve kutup yerinden geçmeyen basit kapalı eğri olsun. Eğer f nin γ içindeki sıfır yerlerinin sayısı Z_f ve kutup yerlerinin sayısı P_f ise

$$Z_f - P_f = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f^{'}(z)}{f(z)}dz \tag{3.16}$$

dir.

Teorem 3.1.11. (Riemann-Lebesgue) Eğer $f(x)$, $x \in (a,b)$ aralığında mutlak integrallenebilir bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n \ &: = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx dx = 0 \\ \lim_{n\to\infty} b_n \ &: = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx dx = 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım 3.1.22. $\forall f \in D(L)$ için $\langle Lf, f \rangle \geq 0$ eşitsizliği sağlanıyor ise L operatörüne pozitif operatör denir (Naimark, 1968).

Teorem 3.1.12. Pozitif bir operatörün tüm öz değerleri pozitiftir (Naimark, 1968).

Tanım 3.1.23. O ve o sembollerine Landau sembolleri denir ve $x \to x_0$ için

$$|f(x)| \leq c|g(x)| \Rightarrow f(x) = O(g(x)) \tag{3.18}$$

ve

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow f(x) = o(g(x)) \tag{3.19}$$

dir (Naimark, 1968).

3.2. Lineer Diferansiyel Denklemler

Tanım 3.2.1. $L(y) \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x)$ biçimindeki denkleme lineer diferansiyel denklem denir. Burada $p_0(x), p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x)$ katsayıları ve $f(x)$ fonksiyonu verilmiş olsun. $I = [a,b]$ aralığında süreklidir. $f(x) \equiv 0$ ise, bu denkleme homojen denklem, $f(x) \neq 0$ ise homojen olmayan denklem denir. $L(y)$ 'ye n . mertebeden diferansiyel ifade denir (Hasanov, E., Uzgören, G., Büyükaksoy, A., 2002).

Tanım 3.2.2. $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ fonksiyonları verilmiş (a,b) aralığında tanımlı ve $(n-1)$ mertebeden türeve sahip olsunlar. O halde

$$W(x) = W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{3.20}$$

Tanımlanmış fonksiyonel $W(x)$ determinantına $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ fonksiyonunun Wronskiyeni veya Wronski determinantı denir (Hasanov, E., Uzgören, G., Büyükaksoy, A., 2002).

Tanım 3.2.3. $p_0(x)y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0$ homojen denkleminin n tane lineer bağımsız $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ çözümlerinden oluşan sisteme bu denklemin temel çözümü denir. Dolayısıyla bu denklemin n ' den fazla lineer bağımsız çözümü olamaz (Hasanov, E., Uzgören, G., Büyükaksoy, A., 2002).

Teorem 3.2.1. $y^{(n)}(x)+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_n(x)y=0$ homojen denkleminin $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)$ çözümlerinin verilmiş I aralığında lineer bağımsız olması için gerekli ve yeter koşul, bu çözümlerin Wronskiyan determinantının sıfırdan farklı olmasıdır.

$y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)$ fonksiyonları homojen lineer denklemin temel çözümleri ise, $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+...+c_ny_n(x)$ fonksiyonun homojen Tanım 3.2.3'deki denklemin genel çözümüdür (Hasanov, E., Uzgören, G., Büyükaksoy, A., 2002).

3.3. Sturm-Liouville Operatörünün Özellikleri

$L_2(0,\pi)$ uzayında aşağıdaki L regüler Sturm-Liouville operatörünü ele alalım.

$$\ell(y):=-y''+q(x)=\lambda y \tag{3.21}$$

$$U(y):=y'(0)-hy(0)=0 \tag{3.22}$$

$$V(y):=y'(\pi)+Hy(\pi)=0 \tag{3.23}$$

Burada $q(x)$, $L_2(0,\pi)$ sınıfından reel değerli bir fonksiyon , $h,H\in\mathbb{R}$ ve λ kompleks spektral parametredir. (3.21)-(3.23) sınır değer probleminin, tanım kümesi $D(L)=\{y:y\in W_2^1[0,\pi],\ell(y)\in L_2(0,\pi),\ \ y'(0)-hy(0)=0\ ,\ y'(\pi)+H(y)=0\}$ biçiminde olan $Ly=\ell y$ şeklinde tanımlı L operatörü üretir. (3.21) denkleminin

$$\varphi(0,\lambda)=1,\ \varphi'(0,\lambda)=h \tag{3.24}$$

$$S(0,\lambda)=0,\ S'(0,\lambda)=1 \tag{3.25}$$

$$\psi(\pi,\lambda)=0,\ \psi'(\pi,\lambda)=-H \tag{3.26}$$

Şeklindeki başlangıç koşullarını sağlayan çözümler sırasıyla $\varphi(x,\lambda),S(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ olsun. Bu durumda lineer diferansiyel denklemler için bilinen başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği teoreminden $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ çözümleri var ve tektir. (3.22)-(3.23) sınır koşulları dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}&\varphi'(0,\lambda)-h\varphi(0,\lambda)=0\\&\psi'(\pi,\lambda)+H\psi(\pi,\lambda)=0\end{aligned} \tag{3.27}$$

eşitlikleri her bir λ için geçerli olur. Ayrıca

$$W(\varphi,\psi)=\psi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)-\psi'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{3.28}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ çözümlerinin Wronskiyan'ı denir.

Bu fonksiyonun x 'e bağlı olmadığı (3.21) denklemi kullanılarak kolayca gösterilebilir. Şöyle ki, (3.28) eşitliğinin her iki yanı $[0,\pi]$ aralığında x değişkenine göre türevlenirse,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}W[\varphi,\psi] &= \frac{d}{dx}\left[\varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)\psi(x,\lambda)\right]\\ &=\varphi'(x,\lambda)\psi'(x,\lambda)+\varphi(x,\lambda)\psi''(x,\lambda)-\varphi''(x,\lambda)\psi(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)\psi'(x,\lambda)\\ &=\varphi(x,\lambda)\psi''(x,\lambda)-\varphi''(x,\lambda)\psi(x,\lambda)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\varphi''(x,\lambda)$ ve $\psi''(x,\lambda)$ ifadeleri (3.21) denkleminden alınarak yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dx}W[\varphi,\psi]=\varphi(x,\lambda)\big(q(x)-\lambda\big)\psi(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\big(q(x)-\lambda\big)\psi(x,\lambda)=0$$

olduğu sonucuna ulaşılır.

Dolayısıyla,

$W[\varphi,\psi]$ fonksiyonu , $[0,\pi]$ aralığında x değişkenine göre fonksiyondur. Bu nedenle bu fonksiyon $\Delta(\lambda)$ ile gösterilir.

(3.28) eşitliğinde $x=0$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= \psi(0,\lambda)\varphi'(0,\lambda)-\psi'(0,\lambda)\varphi(0,\lambda)\\ &=\psi(0,\lambda)h-\psi'(0,\lambda)\\ &=-\left(\psi'(0,\lambda)+h\psi(0,\lambda)\right)\\ &=-U(\psi)\end{aligned}$$

ve $x=\pi$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= \psi(\pi,\lambda)\varphi'(\pi,\lambda)-\psi'(\pi,\lambda)\varphi(\pi,\lambda)\\ &=\varphi'(\pi,\lambda)-(-H)\varphi(\pi,\lambda)\\ &=\varphi'(\pi,\lambda)+H\varphi(\pi,\lambda)\\ &=V(\varphi)\end{aligned}$$

alınır. Böylece $\Delta(\lambda)$ için

$$\Delta(\lambda)=-U(\psi)=V(\varphi) \tag{3.29}$$

elde edilmiş olur.

$\Delta(\lambda)$ fonksiyonuna L operatörünün karakteristik fonksiyonu denir. Bu fonksiyon λ ' nın tam fonksiyonudur. Bu nedenle $\Delta(\lambda)$ 'nın en fazla sayılabilir sayıda $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ sıfırına sahiptir.

Teorem 3.3.1. L operatörünün tüm öz değerleri reeldir (Freiling, G., Yurko, V., 2008).

İspat : L operatörünün bir öz değeri $\lambda=\lambda_0$ ve bu λ_0 a karşılık gelen bir öz fonksiyon $y(x,\lambda_0)$ olsun. Bu durumda $\ell y(x,\lambda_0)=\lambda_0 y(x,\lambda_0)$ sağlanır. Burada $\langle \ell f, g\rangle=\langle f,\ell g\rangle$ eşitliğinden yararlanılırsa, $\langle \ell y(x,\lambda_0), y(x,\lambda_0)\rangle=\langle y(x,\lambda_0), \ell y(x,\lambda_0)\rangle=\overline{\langle \ell y(x,\lambda_0), y(x,\lambda_0)\rangle}$ olduğundan $\langle \ell y(x,\lambda_0), y(x,\lambda_0)\rangle\in\mathbb{R}$ elde ederiz.

Diğer taraftan $\langle \ell y(x,\lambda_0), y(x,\lambda_0)\rangle=\lambda_0\langle y(x,\lambda_0), y(x,\lambda_0)\rangle=\lambda_0 \,||\, y(x,\lambda_0)\,||^2$ olduğundan $\lambda_0\in\mathbb{R}$ olur. Yani L operatörünün tüm öz değerleri reeldir.

Teorem 3.3.2. L operatörünün farklı öz değerlerine karşılık gelen öz fonksiyonlar ortogonaldir (Freiling, ve Yurko, 2008).

İspat:

$\lambda_1\neq\lambda_2$ iki öz değer ve bu öz değere karşılık gelen öz fonksiyonlar sırasıyla $y_1(x)=y(x,\lambda_1)$ ve $y_2(x)=y(x,\lambda_2)$ olsun. Bu durumda Lagrange eşitliğinden,

$$\langle \ell y_1(x), y_2(x)\rangle=\langle y_1(x), \ell y_2(x)\rangle$$

$$\langle \lambda_1 y_1(x), y_2(x)\rangle=\langle y_1(x), \lambda_2 y_2(x)\rangle$$

$$\lambda_1\langle y_1(x), y_2(x)\rangle=\lambda_2\langle y_1(x), y_2(x)\rangle$$

$$(\lambda_1-\lambda_2)\langle y_1(x), y_2(x)\rangle=0$$

elde edilir. $\lambda_1-\lambda_2\neq 0$ olduğundan $\langle y_1(x), y_2(x)\rangle=0$ olur. Yani $y_1(x)$ ile $y_2(x)$ öz fonksiyonları ortogonaldir.

Teorem 3.3.3. Karakteristik fonksiyonun $\{\lambda_n\}$ sıfırları ile L sınır değer probleminin öz değerleri çakışır. $\varphi(x,\lambda_n)$ ve $\psi(x,\lambda_n)$ fonksiyonları öz fonksiyonlardır ve $\psi(x,\lambda_n)=\beta_n\varphi(x,\lambda_n)$, $\beta_n\neq 0$ sağlanacak şekilde bir $\{\beta_n\}$ dizisi vardır (Freiling, ve Yurko, 2008).

Lemma 3.3.1. Aşağıdaki asimptotik formüller, $|\rho| \to \infty$ için, $x \in [0, \pi]$ ye göre düzgün olarak sağlanır (Freiling, ve Yurko, 2008).

$$\begin{cases} \varphi(x,\lambda) = \cos \rho x + O\left(\dfrac{1}{|\rho|} \exp(|\tau| x) \right) = O(\exp(|\tau| x)), \\ \varphi'(x,\lambda) = -\rho \sin \rho x + O(\exp(|\tau| x)) = O(|\rho| \exp(|\tau| x)), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi(x,\lambda) = \cos \rho(\pi - x) + O\left(\dfrac{1}{|\rho|} \exp(|\tau|(\pi - x)) \right) = O(\exp(|\tau|(\pi - x))), \\ \psi'(x,\lambda) = \rho \sin \rho(\pi - x) + O(\exp(|\tau|(\pi - x))) = O(\exp(|\rho||\tau|(\pi - x))), \end{cases}$$

burada $\lambda = \rho^2$ ve $\operatorname{Im} \rho = \tau$ dur.

Teorem 3.3.4. L sınır değer problemi sayılabilir sayıda $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ öz değerler kümesine sahiptir ve $n \geq 0$ için

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{w}{\pi n} + \frac{\kappa_n}{n}, \qquad \{\kappa_n\} \in \mathrm{I}_2$$

sağlanır. Burada $w = h + H + \dfrac{1}{2}\int_0^x q(t)dt$ dir (Freiling, G., Yurko, V., 2008).

Teorem 3.3.5.

- L sınır değer probleminin $\{\varphi(x, \lambda_n)\}_{n\geq 0}$ öz fonksiyonlar sistemi $L_2(0,\pi)$ de tamdır.
- $x \in [0,\pi]$ için $f(x)$ mutlak sürekli fonksiyon olsun. O halde,
-

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(x, \lambda_n), \qquad a_n = \frac{1}{\alpha_n}\int_0^x f(t)\varphi(t,\lambda_n)dt \tag{3.30}$$

sağlanır ve bu seri $[0,\pi]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

- $f(x) \in L_2(0,\pi)$ için (3.30) serisi $L_2(0,\pi)$ de yakınsaktır ve

$$\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |a_n|^2 \qquad \text{(Parseval eşitliği)}$$

sağlanır (Freiling, ve Yurko, 2008).

Şimdi yukarıda anlatılan kavramları bir örnek üzerinde görelim:

L operatörü ;

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y, \quad 0 \le x \le \pi \\ y'(0) = 0 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

şeklinde verilmiş olsun. Bu operatörün öz değerlerini ve öz fonksiyonlarını bulalım.

Bu denklemin genel çözümü

$$y(x,\lambda) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

şeklindedir. Buradan

$$y'(x,\lambda) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$$

alınır. Sınır koşullarından

$$y'(0,\lambda) = c_2\sqrt{\lambda} = 0 \quad \text{ise} \quad c_2 = 0$$

ve

$$y'(\pi,\lambda) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned} &\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \\ &\quad \sqrt{\lambda}\pi = n\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda} = n \\ &\qquad\qquad \Rightarrow n^2, \quad n = 1,2,\ldots \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan $\lambda = 0$ için,

$$-y'' = 0$$

denklemi alınır. Bu denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

şeklindedir.

Sınır koşullarından

$$y'(x) = c_2$$
$$y'(0) = y'(\pi) = 0 \ \ ise \quad c_2 = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $c_1 \neq 0$ için $y(x,0) \neq 0$ olacağından $\lambda = \lambda_0 = 0$ bir öz değer olur. Böylece verilen problemin öz değerleri $\lambda_n = n^2, \ \ n = 0,1,2,...$ şeklindedir. Bu öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar ise $y(x,\lambda_n) = y_n(x) = \cos(nx), \quad n = 0,1,2,...$ şeklinde elde edilir. Şimdi $n \neq m$ olmak üzere $\lambda_n \neq \lambda_m$ öz değerlerine karşılık gelen öz fonksiyonlar sırasıyla $y_n(x)$ ve $y_m(x)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\langle y_n(x), y_m(x)\rangle &= \int_0^{\pi} y_n(x)\overline{y_m(x)}dx = \int_0^{x} \cos(nx)\cos(mx)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+m}\sin(n+m)x + \frac{1}{n-m}\sin(n-m)x\right]\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} = 0
\end{aligned}$$

olduğundan farklı öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonların ortogonal olduğu görülür.

Şimdi yukarıda anlatılan kavramları başka bir örnek üzerinde görelim.

Örneğin,

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y, \ \ x \in (0,\pi) \\ y'(0) = 0 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

operatörünü ele alalım. $\varphi(x,\lambda)$ ile verilen diferansiyel denklemin $\varphi(0) = 1, \ \varphi'(0) = 0$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümlerini gösterirsek $\varphi(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x$ alınır. Buradan karakteristik denklemi $\Delta(\lambda) = \varphi'(\pi,\lambda) = \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x$ öz değerleri $\sqrt{\lambda} = n \ , \ n \geq 0$ öz fonksiyonları $\varphi(x,\lambda_n) = \cos nx \ , \ \ n \geq 0$ ve normalleştirici sayıları $\alpha_n \int_0^{\pi} \varphi^2(x,\lambda_n)dx = \int_0^{\pi} \cos^2 nxdx = \frac{\pi}{2}$ şeklinde bulunur.

Dolayısıyla

- $\{\cos nx\}_{n\geq 0} = \{1, \cos x, \cos 2x, ...\}$ kümesi $L_2(0,\pi)$ uzayında tamdır.
- $(0,\pi)$ aralığında mutlak sürekli $f(x)$ fonksiyonu için

- $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

sağlanır ve

- $\forall f \in L_2 \in (0,\pi)$ için $\int_0^{\pi} \left| f(x)\right|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2}\left|a_n\right|^2$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 3.3.5. (Salınım Teoremi) L operatörünün $\varphi(x,\lambda_n)$, $n \geq 0$ öz fonksiyonlarının her biri $(0,\pi)$ aralığında tam olarak n tane sıfıra sahiptir (Freiling ve Yurko, 2008).

İspat : $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunu düşünelim.

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\rho x + o\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\rho|x}}{|\rho|}\right)$$

eşitliğinden dolayı $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu yeterince büyük λ negatif sayısı için sıfırlara sahip değildir. Öyle ki $\varphi(x,\lambda) > 0,\ \lambda \leq -\lambda^* < 0$, $x \in [0,\pi]$ dir. Diğer taraftan $\varphi(\pi,\mu_n) = 0$ dır. Burada $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$, L operatörünün öz değeridir. Eğer $\lambda, -\infty$ ' dan $+\infty$ 'a taşınabilirse $[0,\pi]$ aralığında $\varphi(x,\lambda)$ ' nın sıfırları sürekli olarak sola taşınır. Yeni sıfırlar sadece $x = \pi$ noktası boyunca görülebilir. Böylece

- $\varphi(x,\mu_n)$ fonksiyonlarının $x \in [0,\pi]$ aralığında n tane sıfırı vardır.
- Eğer $\lambda \in (\mu_n, \ldots, \mu_m)$, $n \geq 1$, $\mu_1 := -\infty$ ise $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu $x \in [0,\pi]$ aralığında n tane sıfıra sahiptir. $\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1$, $\mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \ldots$ dır. Sonuç olarak $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında n sayıda sıfıra sahiptir.

3.4. Weyl Fonksiyonu ve Teklik Teoremleri

$\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ spektral verileri, $q(x)$ potansiyel fonksiyonunu sınır koşullarındaki h ve H kat sayılarını tek türlü belirler.

Teorem 3.4.1. $\lambda_n = \lambda_n$ ve $\alpha_n = \alpha_n$ $(n \geq 0)$ ise o halde $L = L$ dir. Yani $q(x) = q(x)$ $(x \in (0,\pi))$, $h = h$ ve $H = H$ dır (Freiling ve Yurko, 2008).

Böylece $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ spektral verileri $q(x)$ potansiyel fonksiyonunu ve sınır koşullarındaki katsayıları tek türlü belirler.

Ters Problem 3.4.1. $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$, L sınır değer probleminin $H=0$ durumundaki öz değerleri olmak üzere , $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ öz değer kümesi $q(x)$ potansiyel fonksiyonunu ve sınır koşullarındaki h ve H katsayılarını tek türlü belirler (Freiling ve Yurko, 2008).

Sturm-Liouville operatörleri için ters problemler teorisini başlatan çalışma 1929 yılında Ambarzumain tarafından yapılmıştır. Şimdi Ambarzumain Teoremi'ni ve ispatını verelim.

Teorem 3.4.2. (Ambarzumain Teoremi) $q(x)\in\mathbb{C}(0,\pi)$ olmak üzere

$$-y^{''}+q(x)y=\lambda y,\quad x\in(0,\pi) \tag{3.31}$$

$$y^{'}(0)=0\,,\quad y^{'}(\pi)=0 \tag{3.32}$$

problemi verilsin. Eğer bu problemin öz değerleri $\lambda_n=n^2$, $n\geq 0$ şeklinde ise $q(x)\equiv 0$ olur (Ambartsumyan, 1929).

İspat: Verilen (3.21)-(3.31) probleminin öz değerleri $\sqrt{\lambda_n}=n+\dfrac{\omega}{n\pi}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ asimptotik ifadesini sağlar. Burada $\omega=\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi}q(t)dt$ şeklindedir. Verilen problemin öz değerleri $\lambda_n=n^2$ olduğundan

$$\omega=0 \;\; veya \int_0^{\pi}q(t)dt=0 \tag{3.33}$$

olmak zorundadır.

Şimdi $n=0$ için $\lambda_0=0$ öz değerini dikkate alalım. Buna karşılık gelen öz fonksiyon $y_0(x)\neq 0$ olsun. Dolayısıyla $y_0(x)$ fonksiyonu (3.31) denkleminin $\lambda_0=0$ için sağlandığından

$$-y_0^{''}+q(x)y_0=0$$

denklemini sağlar. Buradan

$$q(x)=\frac{y_0^{''}}{y_0}=\frac{y_0^{''}y_0}{y_0^2}=\frac{y_0^{''}y_0-(y_0^{'})^2+(y_0^{'})^2}{y_0^2}=\frac{y_0^{''}y_0-(y_0^{'})^2}{y_0^2}+\left(\frac{y_0^{'}}{y_0}\right)^2$$

yazılabildiğinden

$$q(x) = \left(\frac{y_0'}{y_0}\right)' + \left(\frac{y_0'}{y_0}\right)^2$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafını $(0,\pi)$ aralığında integrallersek,

$$\int_0^\pi q(x)dx = \int_0^\pi \left(\frac{y_0'}{y_0}\right)' dx + \int_0^\pi \left(\frac{y_0'}{y_0}\right)^2 dx$$

veya (3.33) ifadesinden

$$0 = \frac{y_0'(\pi)}{y_0(\pi)} - \frac{y_0'(0)}{y_0(0)} + \int_0^\pi \left(\frac{y_0'}{y_0}\right)^2 dx$$

alınır. Burada $y_0'(\pi) = 0$, $y_0(\pi) \neq 0$, $y_0'(0) = 0$ olduğundan

$$\int_0^\pi \left(\frac{y_0'}{y_0}\right)^2 dx = 0 \Rightarrow \frac{y_0'}{y_0} = 0 \Rightarrow y_0'(x) = 0$$

ve

$$y_0(x) = c \quad (c \in \mathbb{R})$$

bulunur. Burada $c \neq 0$ dır. Bu $y_0(x) = c$ değer $-y_0'' + q(x)y_0(x) = 0$ denkleminde yerlerine yazılırsa, $0 + q(x)c = 0$ ise $q(x) = 0$ alınır.

Ambarzumain Teoremi, ilk bakışta öz değerlerin $q(x)$ fonksiyonunu tek olarak belirleyebileceğini düşündürse de genel durumda bu mümkün değildir. 1945 yılında Borg, farklı iki Sturm-Liouville probleminin aynı öz değerlere sahip olabileceğini göstermiştir. Bunun yanı sıra $q(x)$ ‘i tek olarak belirlemek için farklı iki öz değer dizisinin yeterli olduğunu ispatlamıştır. Borg’a göre

$$y_0'(0) - h_1 y(0) = 0, \quad (h_1 \neq h) \tag{3.34}$$

Yeni bir sınır koşulu olmak üzere (3.31) , (3.32) probleminin öz değerleri $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve (3.31), (3.34) probleminin öz değerleri ise $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ olmak üzere $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizisi verilmişse $q(x)$ fonksiyonu tek olarak belirlenir.

Borg'un çalışmasından sonra birçok matematikçi ters problemler teorisi ile ilgili çalışmalar yapmış ve bu teorinin gelişmesine katkı sağlamışlardır.

Teorem 3.4.3. $\lambda_n = \lambda_n$ ve $\mu_n = \mu_n$ $(n \geq 0)$ ise o halde $L = L$ dir. Yani $q(x) = q(x)$ $(x \in (0,\pi))$, $h = h$ ve $H = H$ dır. Böylece $\{\lambda_n, \mu_n\}_{n\geq 0}$ spektral verileri $q(x)$ potansiyel fonksiyonunu ve sınır koşullarındaki katsayıları tek türlü belirler (Freiling ve Yurko, 2008).

Ters Problem 3.4.4. $\{\lambda_n^0\}_{n\geq 0}$, L sınır değer probleminin $h = 0$ durumundaki öz değerleri olmak üzere $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\lambda_n^0\}_{n\geq 0}$ öz değer kümeleri $q(x)$ potansiyel fonksiyonunu ve sınır koşullarındaki h ve H katsayılarını tek türlü olarak belirler (Freiling ve Yurko, 2008).

Teorem 3.4.5. $\lambda_n = \lambda_n$ ve $\lambda_n^0 = \lambda_n{}^0$ $(n \geq 0)$ ise o halde $L = L$ dir. Yani $q(x) = q(x)$ $(x \in (0,\pi))$, $h = h$ ve $H = H$ dır. Böylece $\{\lambda_n, \lambda_n{}^0\}_{n\geq 0}$ spektral verileri $q(x)$ potansiyel fonksiyonunu ve sınır koşullarındaki katsayıları tek türlü belirler (Freiling ve Yurko, 2008).

Weyl Fonksiyonu ve Weyl Fonksiyonuna Göre Ters Problem: L operatörünü ele alalım. Bu operatörünün $\varphi(x,\lambda)$ ve $s(x,\lambda)$ çözümleri için $W(s,\varphi) = s(0)\varphi'(0) - s'(0)\varphi(0) = -1 \neq 0$ olduğundan $s(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ çözümleri lineer bağımsızdır. Dolayısıyla $\{s(x,\lambda), \varphi(x,\lambda)\}$ kümesi (3.31) denkleminin temel çözüm sistemidir. Bu nedenle

$$\psi(x,\lambda) = c_1 s(x,\lambda) + c_2 \varphi(x,\lambda) \tag{3.35}$$

eşitliği sağlanacak şekilde c_1 ve c_2 sabitleri vardır. Buradan türev alınırsa,

$$\psi'(x,\lambda) = c_1 s'(x,\lambda) + c_2 \varphi'(x,\lambda) \tag{3.36}$$

olur. (3.35) ve (3.36) eşitliklerinde $x = 0$ yazılırsa,

$$\psi(0,\lambda) = c_1 s(0,\lambda) + c_2 \varphi(0,\lambda) = c_1 0 + c_2 1 = c_2$$

ve

$$\psi'(0,\lambda)=c_1 s'(0,\lambda)+c_2\varphi'(0,\lambda)=c_1+c_2 h=c_1+\psi(0,\lambda)h$$
$$c_1=\psi'(0,\lambda)-h\psi(0,\lambda)=-\Delta(\lambda)$$

elde edilir. Buna göre (3.35) eşitliği düzenlenirse,

$$\psi(x,\lambda)=-\Delta(\lambda)s(x,\lambda)+\psi(0,\lambda)\varphi(x,\lambda)$$
$$-\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}=s(x,\lambda)-\frac{\psi(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\varphi(x,\lambda) \qquad (3.37)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$M:=-\frac{\psi(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \qquad \text{ve} \qquad \Phi(x,\lambda):=-\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

işaretlemeleri dikkate alınırsa (3.37) eşitliği

$$\Phi(x,\lambda)=s(x,\lambda)+M(\lambda)\varphi(x,\lambda) \qquad (3.38)$$

şeklinde elde edilir. (3.38) ‘deki $M(\lambda)$ fonksiyonuna L operatörünün Weyl Fonksiyonu denir. Dikkat edilirse Weyl Fonksiyonu, iki tam fonksiyonunun oranı şeklindedir. Ayrıca problemin öz değerleri $M(\lambda)$ ‘nın basit kutup noktalarıdır. Dolayısıyla $M(\lambda)$ Weyl fonksiyonu bir Meromorf fonksiyondur (Freiling ve Yurko, 2008).

Lemma 3.4.1. $G_\delta=\{\rho:|\rho-n|>\delta, n\in Z\}$ bölgesindeki yeterince büyük ρ' lar için $\Delta(\lambda)\geq c_\delta|\rho|e^{\tau\pi}$, $\tau=|\mathrm{Im}\,\rho|$ eşitliği geçerlidir.

İspat : $\Delta(\lambda)=-\rho\sin\rho\pi+O\left(\mathrm{e}^{\tau\pi}\right)$ olduğundan G_δ bölgesinde yeterince büyük ρ ’ lar için $|\sin\rho\pi|\geq ce^{\tau\pi}$ olacak şekilde $c>0$ sabiti mevcuttur. Bu durumda $\Delta(\lambda)\geq c|\rho|e^{\tau\pi}-c_1\exp\tau\pi=c_\delta|\rho|e^{\tau\pi}$ eşitsizliği alınır.

Şimdi L operatörünün $L=L(q,h,H)$ ile gösterelim ve $L=L(q,h,H)$ operatörünü

$$L(q,h,H)=\begin{cases}-y''+q(x)y=\lambda y\\ y'(0)-hy(0)=0\\ y'(\pi)+Hy(\pi)=0\end{cases} \tag{3.39}$$

şeklinde tanımlayalım. L operatörünün Weyl fonksiyonu $M(\lambda)$, L operatörünün Weyl fonksiyonu $M(\lambda)$ olsun. Bundan böyle L operatörü ile alakalı bir bilgi s ile gösterilirse buna karşılık olarak L operatörü ile alakalı bir bilgi $\tilde{s}$ ile gösterilecektir.

Teorem 3.4.6. Eğer $M(\lambda)=M(\lambda)$ ise $q(x)=q(x)$ $(0,\pi)$ aralığında h.h.y. ve $h=h$, $H=H$ geçerlidir. Yani $M(\lambda)$ Weyl fonksiyonu , L operatörünün kat sayılarını belirlemek için yeterlidir (Freiling ve Yurko, 2008).

İspat:

$$\begin{aligned}P_1(x,\lambda)&:=\varphi(x,\lambda)\Phi'(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)\Phi(x,\lambda)\\ P_2(x,\lambda)&:=\varphi(x,\lambda)\Phi(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\Phi(x,\lambda)\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}P_1(x,\lambda)&:=\varphi(x,\lambda)\Phi'(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)\Phi(x,\lambda)\\ P_2(x,\lambda)&:=\varphi(x,\lambda)\Phi(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\Phi(x,\lambda)\end{aligned} \tag{3.41}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. (3.38) eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}P_1(x,\lambda)=&\varphi(x,\lambda)\left(s'(x,\lambda)+M(\lambda)\varphi'(x,\lambda)\right)\\ &-\varphi'(x,\lambda)\left(s(x,\lambda)+M(\lambda)\varphi(x,\lambda)\right)\\ &=\varphi(x,\lambda)s'(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)s(x,\lambda)\\ &+\varphi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)\left(M(\lambda)-M(\lambda)\right)\\ &=\varphi(x,\lambda)s'(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)\tilde{s}(x,\lambda)\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
P_2(x,\lambda) &= \varphi'(x,\lambda)\big(s(x,\lambda)+M(\lambda)\varphi(x,\lambda)\big) \\
&\quad -\varphi(x,\lambda)\big(\tilde{s}(x,\lambda)+M(\lambda)\varphi(x,\lambda)\big) \\
&= \varphi(x,\lambda)s(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\tilde{s}(x,\lambda) \\
&\quad +\varphi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\big(M(\lambda)-M(\lambda)\big) \\
&= s(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\tilde{s}(x,\lambda)
\end{aligned}
$$

ifadeleri elde edilir. $s(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ çözümleri λ ’ nın tam fonksiyonları olduğundan $P_1(x,\lambda)$ ve $P_2(x,\lambda)$ fonksiyonları tamdır. Diğer yandan

$$
\varphi(x,\lambda)=O(\pi\exp\tau x) \quad , \quad \varphi'(x,\lambda)=O\left(\sqrt{\lambda}\exp\tau\pi\right)
$$
$$
\psi(x,\lambda)=O\big(\exp\tau(\pi-x)\big) \quad , \quad \psi'(x,\lambda)=O\left(\sqrt{\lambda}\exp\tau(\pi-x)\right)
$$

asimptotik ifadeleri ve $\forall\in G_\delta$ olmak üzere $\left|\Delta(\lambda)\right|\geq c_\delta\sqrt{\lambda}e^{\tau\pi}$ ifadesi kullanılırsa,

$$
\left|P_1(x,\lambda)\right|\leq c_1 \quad , \quad \left|P_2(x,\lambda)\right|\leq\frac{c_2}{\sqrt{\lambda}}
$$

oldukları görülebilir. Bu durumda $P_1(x,\lambda)$ ve $P_2(x,\lambda)$ fonksiyonları λ ’ya göre tam ve sınırlı fonksiyonlar olup Liouville Teoremi gereğince bu fonksiyonlar λ ’ya bağlı değil sadece x ’e bağlıdırlar. O halde

$$
\begin{aligned}
P_1(x,\lambda) &= A(x) \\
P_2(x,\lambda) &= B(x)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. $P_2(x,\lambda)=o(1)$, $|\lambda|\to\infty$ olduğundan $B(x)\equiv 0$ ’ dır. Dolayısıyla $P_2(x)\equiv 0$ ’dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} W(\varphi,\Phi) &= \varphi(x,\lambda)\Phi'(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)\Phi(x,\lambda) \\ &= \frac{\varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \\ &= \frac{\Delta(\lambda)}{\Delta(\lambda)}=1 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $W(\varphi,\Phi)=1$ olduğu gösterilebilir. (3.40) eşitliklerinden alınan

$$\begin{cases} \varphi(x,\lambda)\Phi'(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)\Phi(x,\lambda)=A(x) \\ \varphi(x,\lambda)\Phi(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\Phi(x,\lambda)=0 \end{cases}$$

sistemi Cramer yöntemiyle çözülürse,

$$\varphi(x,\lambda)=A(x)\varphi(x,\lambda)$$

ve

$$\Phi(x,\lambda)=A(x)\Phi(x,\lambda)$$

alınır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} 1=W(\varphi,\Phi)=W(A\varphi,A\Phi)&=\begin{vmatrix} A\varphi(x,\lambda) & A\Phi(x,\lambda) \\ \left(A\varphi(x,\lambda)\right)' & \left(A\Phi(x,\lambda)\right)' \end{vmatrix} \\ &=\begin{vmatrix} A(x)\varphi(x,\lambda) & A(x)\Phi(x,\lambda) \\ A(x)\varphi'(x,\lambda)+A(x)'\varphi(x,\lambda) & A(x)\Phi'(x,\lambda)+A(x)'\Phi(x,\lambda) \end{vmatrix} \\ &=A^2(x)W(\varphi,\Phi)=A^2(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da $A(x)=\pm 1$ olmalıdır. Ayrıca

$$\begin{cases} \varphi(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}x+O\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}e^{\tau x}\right) \\ \varphi(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}x+O\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}e^{\tau x}\right) \end{cases}$$

asimptotik ifadeleri geçerli olduğundan $\varphi(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonları ters işaretli olamaz.

$\varphi(x,\lambda) = A(x)\varphi(x,\lambda)$ olduğundan $A=-1$ olamaz. Bu nedenle $A(x)=1$ olmalıdır. Dolayısıyla $\varphi(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)$ ‘ dir. Bu durumda (3.21) denklemi kullanılırsa h.h.y. $q(x)=q(x)$ elde edilir. Benzer şekilde (3.22) ve (3.23) sınır koşullarından

$$\begin{cases} \varphi'(0)-h\varphi(0)=0 \\ \varphi'(0)-h\varphi(0)=0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} \varphi'(\pi)+H\varphi(\pi)=0 \\ \varphi'(\pi)+H\varphi(\pi)=0 \end{cases}$$

eşitlikleri taraf taraf çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} &\varphi'(0)-h\varphi(0)-\varphi'(0)+h\varphi(0)=0 \\ &-h\varphi(0)+h\varphi(0)=(h-h)\varphi(0)=0 \\ &h-h=0 \Rightarrow h=h \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &\varphi'(\pi)+H\varphi(\pi)-\varphi'(\pi)-H\varphi(\pi)=0 \\ &H-H=0 \Rightarrow H=H \end{aligned}$$

elde edilir.

O halde $M(\lambda)=M(\lambda)$ iken $q(x)=q(x)$, $(0,\pi)$ aralığında h.h.y. ve $h=h$, $H=H$ oldukları gösterilmiş olur.

Spektral Verilere Göre Ters Problem

$L=L(q,h,H)$ ve $L=(q,h,H)$ operatörlerini ele alalım. $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n\geq 0}$, L operatörünün spektral verileri ve $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n\geq 0}$ ise L operatörünün spektral verileri olsun. Burada iki spektral verinin L operatörünün katsayılarını tek olarak belirlediği ispatlanacaktır.

Lemma 3.4.2. (Freiling ve Yurko, 2001)

$$M(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)} \tag{3.42}$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 3.4.7. $\forall n$ için $\lambda_n = \lambda_n$ ve $\alpha_n = \alpha_n$ ise $q(x) = q(x)$ h.h.y. ve $h = h$, $H = H$ dır. Yani L probleminin katsayıları, öz değerler ve normalleştirici sayılar tarafından tek olarak belirlenir (Freiling ve Yurko, 2001).

İspat : (3.42) eşitliğine göre $\lambda_n = \lambda_n$, $\alpha_n = \alpha_n$ ise $M(\lambda) = M(\lambda)$ eşitliği geçerlidir. Teorem (3.4.6) ya göre $M(\lambda) = M(\lambda)$ geçerli ise $q(x) = q(x),$ $(0, \pi)$ aralığında hemen hemen her yerde ve $H = H$ ‘dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4.7 nin ispatı aşağıdaki gibi de yapılabilir.

$\lambda_n = \lambda_n$, $\alpha_n = \alpha_n$ olsun. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu λ nın tam fonksiyonu olduğundan Hadamard Faktorizasyon Teoremi gereğince

$$\Delta(\lambda) = c\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right)$$

eşitliği geçerlidir. Burada c sayısı yalnızca λ_n lere bağlı olan bir sabittir. Buna göre $\lambda_n = \lambda_n$ ise

$$\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda) \tag{3.43}$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{cases} \Delta(\lambda_n) = -\alpha_n \beta_{\partial n} \\ \Delta(\lambda_n) = -\alpha_n \beta_n \end{cases}$$

eşitliklerine göre $\beta_n = \beta_n$ ‘dır ve ayrıca $\beta_n = \psi(0, \lambda_n)$ olduğundan

$$\psi(0, \lambda_n) = \psi(0, \lambda_n)$$

yazılabilir. Buna göre

$$K(\lambda) = \frac{\psi(0, \lambda_n) - \psi(0, \lambda_n)}{\Delta(\lambda)}$$

fonksiyonunu tanımlarsak λ_n öz değerleri bu fonksiyonun hem payını hem de paydasını sıfır yaptığından ve bu öz değerler fonksiyonun basit sıfırları olduğundan $K(\lambda)$ bir tam fonksiyondur. Ayrıca

$$\left|\psi(0,\lambda_n)-\psi(0,\lambda_n)\right| \le c\exp\tau\pi$$
$$\left|\Delta(\lambda)\right| \ge c_\delta \left|\rho\right| \exp\tau\pi$$

eşitsizliklerinden

$$\left|K(\lambda)\right| \le \frac{c}{|\rho|}$$

olur. Burada ρ nun yeterince büyük değerinde

$$\left|K(\lambda)\right| \equiv 0$$

alınır. Dolayısıyla

$$\psi(0,\lambda_n)=\psi(0,\lambda_n) \tag{3.44}$$

yazılır. Buna göre (3.43) ve (3.44) eşitliklerinden

$$\frac{\psi(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)}=\frac{\psi(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

eşitliği yazılabilir. Bu ise $M(\lambda)=M(\lambda)$ demektir. Buradan $q(x)=q(x)$ h.h.y. ve $h=h$, $H=H$ olduğu elde edilir.

Şimdi $h \ne h_1$ olmak üzere

$$y'(0)-h_1 y(0)=0 \tag{3.45}$$

sınır koşulu (3.22) koşulu ile yer değiştirerek elde edilen (3.21), (3.45), (3.23) problemini $L_1 = L\left(q, h_1, H\right)$ operatörü şeklinde gösterelim ve bu operatörün öz değerler dizisi $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ olsun.

Tanım 3.4.1. $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\lambda_n, \mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine L operatörünün klasik spektral verileri denir (Freiling ve Yurko, 2001)

Şimdi ise iki öz değerler dizisi denilen $\{\lambda_n, \mu_n\}_{n\geq 0}$ spektral verilerinin, operatörün kat sayılarını tek olarak belirlediğini ispatlayalım

Teorem 3.4.7 $\forall n$ için $\lambda_n = \lambda_n$ ve $\mu_n = \mu_n$ ise $\left[0, \pi\right]$ aralığında $q(x) = q(x)$ h.h.y. ve $h = h$, $H = H$ dır (Freiling ve Yurko, 2008).

İspat: $\forall n$ için $\lambda_n = \lambda_n$ olduğundan $\Delta\left(\lambda\right) = \Delta\left(\lambda\right)$' dır. Diğer yandan öz değerleri $\left\{\mu_n\right\}$'ler olan L_1 operatörünün karakteristik fonksiyonu

$$\Delta_1\left(\lambda\right) = \psi'\left(0, \lambda\right) - h_1\psi\left(0, \lambda\right)$$

şeklindedir. Buna göre $\Delta_1\left(\lambda\right)$ fonksiyonu μ' ler tarafından tek olarak belirlenen bir tam fonksiyon olduğundan

$$\mu = \mu_n \Rightarrow \Delta_1\left(\lambda\right) = \Delta_1\left(\lambda\right)$$

eşitliği geçerlidir. Buradan her λ için

$$\Delta_1\left(\lambda\right) = \psi'\left(0, \lambda\right) - h_1\psi\left(0, \lambda\right) = \psi'\left(0, \lambda\right) - h_1\psi\left(0, \lambda\right) = \Delta_1\left(\lambda\right)$$

Yazılabilir. O halde

$$\psi\left(0, \lambda\right) = \psi\left(0, \lambda\right)$$

elde edilir. Buna göre

$$\psi\left(0, \lambda\right) \equiv \psi\left(0, \lambda\right)$$

ve

$$\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda)$$

olduğundan

$$M(\lambda) = M(\lambda)$$

eşitliği geçerlidir. Bu da ispatı tamamlar.

L operatörünün katsayılarını belirlemek için $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ öz değer dizisi tek başına yeterli olmamasına rağmen potansiyel fonksiyon denilen $q(x)$ fonksiyonunun her x için

$$q(\pi - x) = q(x)$$

simetriklik koşulunu sağladığı biliniyorsa bu durumda yalnızca öz değerler dizisi ile katsayıları belirlemek mümkündür. Bu aşağıdaki teoremle ifade edilebilir:

Teorem 3.4.8 L opetaröründe $h = H$, $\forall x$ için $q(\pi - x) = q(x)$ ve $\forall n$ için $\lambda_n = \lambda_n$ ise $q(x) = q(x)$ h.h.y. ve $h = h$ dir (Freiling ve Yurko, 2008).

İspat : $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonlarının yanı sıra $\varphi_1(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$\begin{cases} \varphi_1'' + q(\pi - x)\varphi_1 = \lambda\varphi_1 \\ \varphi_1(0) = 1 \, , \, \varphi_1'(0) = H \end{cases}$$

probleminin çözümü olsun. Bu durumda

$$\psi(x,\lambda) = \varphi(\pi - x, \lambda)$$

eşitliği sağlanmaktadır. Hipoteze göre $h = H$, ve $\forall x$ için $q(\pi - x) = q(x)$ olduğundan $\varphi_1(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda)$ eşitliği ve dolayısıyla $\psi(x,\lambda) = \varphi(\pi - x, \lambda)$ olduğu elde edilir.

Daha önce $\forall n$ için ;

$$\psi(x,\lambda_n) = \beta_n \varphi(x,\lambda_n)$$

sağlandığından

$$\begin{aligned}\varphi(\pi - x, \lambda_n) &= \psi(x, \lambda_n) \\ &= \beta_n \varphi(x, \lambda_n) = \beta_n \psi(\pi - x, \lambda_n) \\ &= \beta_n \beta_n \varphi(\pi - x, \lambda_n) \\ &= \beta_n^2 \varphi(\pi - x, \lambda_n)\end{aligned}$$

alınır. Buradan ise

$$\beta_n^2 = 1 \text{ veya } \beta_n = \pm 1$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\Delta(\lambda) = -\alpha_n \beta_n$$

eşitliğinden $\lambda_n = \lambda_n$ ve $\alpha_n = \alpha_n$ elde edilir. Dolayısıyla Teorem 3.4.7 gereği $q(x) = q(x)$, $(0, \pi)$ aralığında h.h.y. ve $h = h$ olur.

□

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu çalışmada farklı yoğunlukta n dizisine sahip yıldız şekilli geometrik grafların matematiksel modellenmesine ve graflardaki Sturm-Liouville farklı operatörleri için sınır ters spektral probleminin çözümüne ayrılmıştır. Çalışmada, sicimler aynı uzunluk ve yoğunluklara sahipse sicimlerin uçlarındaki yayların sağlamlık kat sayılarının doğal frekanslardan benzersiz bir şekilde geri kazanılmadığı gösterilmiştir. Yerlerinin permütasyonlarına kadar bulunurlar. Tellerin farklı yoğunlukları varsa tellerin uçlarındaki yayların sağlamlık katsayılarının doğal frekanslardan benzersiz geri kazandığını gösteriyoruz. Bunlar sicimlerin uçlarındaki yayların benzersizliği veya benzersiz olmaması sicim yoğunluklarının aynı veya farklı olmasına bağlıdır. ρ ' ların yani yoğunlukların birbirinden farklı olması farklı şekilde inşası benzersizlik durumunu verir.

4.1. Yıldız Graflarında Sturm-Liouville Fark Operatörleri İçin Öz Değerler

$\Gamma = \gamma_1 \times \gamma_2 \times ... \times \gamma_n$ ışınlarından oluşan yıldız şekilli bir graf olsun.
$\gamma_j = \{x_j \in (0, \ell_j)\} \quad j = 1,...,n$

orijinli grafın tepe noktası tanımlanan her ışının denklem üzerinde olduğunu düşünüyoruz.

$$\begin{aligned} Ly_i &= -\frac{d^2 y_j(x_j)}{dx_j^2} + q(x_j) y_j(x_j) \\ &= \rho_j \lambda y_j(x_j) \qquad\qquad x_j \in \gamma_j \\ &= \rho_j \mu^2 y_j(x_j) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Tepe üzerimdeki doğal Kirchhoff sınır koşullarını sağlayan fonksiyonlar için tanımlanmıştır.

$$y_1(0) = ... = y_n(0) \tag{4.2}$$

$$y_1'(0) + ... + y_n'(0) = 0 \tag{4.3}$$

Ayrıca $x_j = \ell_j$ uç noktalarındaki sınır koşullarını da gerekli kılıyoruz.

$$y_j'(\ell_j) + H_j y_j(\ell_j) = 0 \quad , \; j = 1,...,n \tag{4.4}$$

Burada $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ farklı sayılardır. λ ve μ spektral parametrelerdir. $H_j \in \mathbb{C}$, $q(x) \in L(\gamma_j)$ ise potansiyel fonksiyondur. ($j = 1,...,n$)
$s_j(x,\mu)$ ve $c_j(x,\mu)$ $j = 1,...,n+1$ γ_j üzerindeki başlangıç koşullarını sağlayan (4.1) 'in çözümleri olsun.

$$s_j(0,\mu) = 1 - c_j(0,\mu) = 0$$

$$1-s_j^{'}(0,\mu)=c_j^{'}(0,\mu)=0 \quad , \quad (j=1,...,n)$$

Her aralıktaki yine çözüm şu şekilde temsil edilebilir:

$$y_j(x,\mu)=\alpha_j(\mu)c_j(x,\mu)+\beta_j(\mu)s_j(x,\mu) \tag{4.5}$$

İlk bileşen (4.5) için ilk Kirchchoff koşulunu (4.2) karşılaması gerekir.

$$\begin{aligned} &\alpha_1(\mu)=...=\alpha_n(\mu) \\ &\alpha(\mu)=\alpha_1(\mu)=...=\alpha_n(\mu) \end{aligned} \tag{4.6}$$

olarak ifade ederiz.

Sonlu aralıkların (4.4) uçlarındaki sınır koşulları $\alpha(\mu),\ \beta_1(\mu),\ ...,\ \beta_n(\mu)$ üzerine alır. $(j=1,...,n)$, $(i=1,...,n)$ olmak üzere,

$$\alpha(\mu)[c_j^{'}(\ell_j,\mu)+H_jc_j(\ell_j,\mu)]+\beta(\mu)[s_j^{'}(\ell_j,\mu)+H_js_j(\ell_j,\mu)]=0 \tag{4.7}$$

$$\sigma_j(\mu)=s_j^{'}(\ell_j,\mu)+H_js_j(\ell_j,\mu) \tag{4.8}$$

$$\kappa_j(\mu)=c_j^{'}(\ell_j,\mu)+H_jc_j(\ell_j,\mu) \tag{4.9}$$

Daha sonra koşul (4.7) aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\alpha(\mu)\kappa_j(\mu)+\beta_j(\mu)\sigma_j(\mu)=0 \tag{4.10}$$

$\sigma_j(\mu)$ ve $\kappa_j(\mu)$ ' nin aynı anda yok olamayacağını belirtmek önemlidir.

(4.8) ‘i $c_j(\ell_j,\mu)$ ile (4.9) ‘u $s_j(\ell_j,\mu)$ ile çarpalım.

$$\sigma_jc_j(\ell_j,\mu)-\kappa_j(\mu)s_j(\ell_j,\mu)=s_j^{'}(\ell_j,\mu).c_j(\ell_j,\mu)-c_j^{'}(\ell_j,\mu).s_j(\ell_j,\mu)=1 \tag{4.11}$$

İkinci Kirchkoff koşulu (4.3) ‘ ü gerektirir.

$$\beta_1(\mu)+...+\beta_n(\mu)=0 \tag{4.12}$$

İlk öz değer serisi:

$$\sigma_1(\mu).\sigma_2(\mu)...\sigma_n(\mu)\neq 0 \tag{4.13}$$

Sonra (4.7) den şunu takip eder :

$$\beta_j(\mu)=-\alpha(\mu)\frac{c_j^{'}(\ell_j,\mu)+H_jc_j(\ell_j,\mu)}{s_j^{'}(\ell_j,\mu)+H_js_j(\ell_j,\mu)} \tag{4.14}$$

(4.12)'den

$$\alpha(\mu).\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j^{'}(\ell_j,\mu)+H_j c_j(\ell_j,\mu)}{s_j^{'}(\ell_j,\mu)+H_j s_j(\ell_j,\mu)} \tag{4.15}$$

Burada $\alpha(\mu)$ keyfi olduğunda, eğer $\alpha(\mu)$=0 ise $y_j \equiv 0$ olur. Buradan öz değerlerimiz bulunamaz. Öyleyse öz değerlerimiz:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j^{'}(\ell_j,\mu)+H_j c_j(\ell_j,\mu)}{s_j^{'}(\ell_j,\mu)+H_j s_j(\ell_j,\mu)}=0 \tag{4.16}$$

Bu denklemin kökleridir.

İkinci öz değer serisi:

$$\sigma_1(\mu).\sigma_2(\mu)...\sigma_n(\mu)=0 \tag{4.17}$$

$$J=\{j:\sigma_j(\mu)=0\} \tag{4.18}$$

Sonra $\kappa_j(\mu)\neq 0$, $j\in J$ için ve (4.7) 'yi tamamlamak için

$$\alpha(\mu)=0 \tag{4.19}$$

dır.

Yani bu durumda genel çözüm şu şekilde olmalıdır:

$$y_j(x,\mu)=\beta_j(\mu).s_j(x,\mu) \tag{4.20}$$

(4.5)'te $\alpha_j(\mu)=0$ alınırsa (4.20) elde ediliyor. Fakat $\sigma_j(\mu)\neq 0$, $j\in J$ ve sonuç olarak (4. 7)'yi sağlaması için $\beta_j=0$ olması gerekir.

Ve sonuç olarak bu durumda genel çözüm:

$$y_j(x,\mu)=\beta_j(\mu)s_j(x,\mu) \quad , \quad (j\in J) \tag{4.21}$$

$$y_j(x,\mu)\equiv 0 \ , \quad (j\notin J) \tag{4.22}$$

$\beta_j(\mu)$ keyfidir.

Eğer $\beta_j\equiv 0$ $(j\in J)$, $y_j\equiv 0$ olur ve buradan öz değerlerimiz bulunamaz. Öyleyse öz değerler (4.23) denkleminin kökleridir.

$$s_j(x,\mu)=0 \quad , \quad (j\in J) \tag{4.23}$$

4.2. Sınır Ters Problemi İçin Çözümün Benzersizliği

Sınır ters problemi, öz değerlerden H_j 'nin belirlenmesinden oluşur. İkinci serinin öz değerlerini belirleyen denklem H_j içermediğinden ikinci serinin öz değerlerinin ters problemi çözmek için kullanılmayacağını not edelim. Bu nedenle ilk seriden öz değerleri bildiğimizi varsayıyoruz. L Sturm-Liouviile öz değer problemini (4.1)-(4.4) göstersin.

Bundan sonra, denklemde farklı kat sayılarla L tipi problemi ve sınır formlarında farklı parametreden L ile gösterilsin. Ek olarak, eğer belirli bir sembol L problemindeki bir nesneyi gösteriyorsa, dalga işareti aynı sembol L problemindeki karşılığını gösterir.

Teorem 4. 2 L probleminin ilk serisinin öz değerleri cebirsel çokluklarını sayan L probleminin öz değerlerine eşitse L ve L 'nin sınır koşullarının katsayıları da birbirine eşittir. Yani, $j = 1, 2, ..., n$ için $H_j = H_j$ dır.

İspat: Eğer λ_i, L problemi için ilk serinin öz değerleriyse (4. 16)'dan λ_i tüm fonksiyonun kökleri olur.

$$\Delta(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} (c_j'(\ell_k, \mu) + H_k c_k(\ell_k, \mu)). \prod_{j=1;\, j\neq k}^{n} (s_j'(\ell_j, \mu) + H_j s_j(\ell_j, \mu)) \tag{4.24}$$

Görüldüğü gibi , $\Delta(\lambda)$ birinci dereceden tam bir fonksiyondur. Ayrıca teoremin varsayımlarına göre L ve $\tilde{L}$ ' nın cebirsel çoklukları ile listelenen öz değerleri birbirine eşittir. Bu nedenle, Hadamard çarpanlarına ayırma teoremi C 'nin sıfır olmayan bir sabit olduğu $\Delta(\lambda) = C\Delta(\lambda)$ anlamına gelir. Bunu şu takip eder:

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) - C\Delta(\lambda) = {} & \sum_{k=1}^{n} (c_k'(\ell_k, \mu) + H_k c_k(\ell_k, \mu)). \prod_{j=1;\, j\neq k}^{n} (s_j'(\ell_j, \mu) + H_j s_j(\ell_j, \mu)) - \\ & C.\sum_{k=1}^{n} (c_k'(\ell_k, \mu) + H_k c_k(\ell_k, \mu)). \prod_{j=1;\, j\neq k}^{n} (s_j'(\ell_j, \mu) + H_j s_j(\ell_j, \mu))\end{aligned} \tag{4.25}$$

Asimptotik formüllere sahibiz. Bunlar:

$$c_j(x_j, \mu) = \cos(\mu x_j) + \frac{1}{\mu} u_j(x_j) \sin(\mu x_j) + O(\frac{1}{\mu^2})$$

$$s_j(x_j, \mu) = \frac{1}{\mu} \sin(\mu x_j) - \frac{1}{\mu^2} u_j(x_j) \cos(\mu x_j) + O(\frac{1}{\mu^3})$$

$$c_j'(x_j, \mu) = -\mu \sin(\mu x_j) + u_j(x_j) \cos(\mu x_j) + O(\frac{1}{\mu})$$

$$s_j'(x_j, \mu) = \cos(\mu x_j) + \frac{1}{\mu} u_j(x_j) \sin(\mu x_j) + O(\frac{1}{\mu^2}) \quad ,(j = 1, 2, ..., n)$$

Burada yeterine büyük $\mu \in \mathbb{R}$ için $u_j(x_j) = \dfrac{1}{2}\int_0^x q(t_j)dt_j$ dir.

Bu nedenle s_j , c_j ve türevlerinin karşılık gelen sonuçları doğrusal olarak bağımsızdır. Bundan ve (4.25) ‘ten $H_j = H_j$ olduğu anlaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem, problem L ‘nin sınır koşullarının sonsuz öz değerler kümesinde benzersiz bir şekilde geri kazanılabileceğini gösterir. Bununla birlikte, bilgisayar hesaplamaları, L'nin n parametrelerini H_j 'yi geri yüklemek için yeterli sonlu sayıda öz değerin yeterli olduğunu göstermektedir. Bu durumda, yeniden yapılandırma için L probleminin n değil, $n+1$ öz değerlerini kullanmamız gerekir. H_j n katsayılarının benzersiz tanımlanması için yeterli değildir.

4.3. Örnekler ve Karşı Örnekler

Örnek 4.3.1. $\Gamma = \gamma_1 \times \gamma_2 \times \gamma_3$

ışınlarından oluşan yıldız şekilli bir graf olsun. $\gamma_j = \{x_j \in (0,1)\}$, $l_j = 1$, $j = 1,2,3$ her ışının orijini grafiğin tek tepe noktasıyla tanımlanmış şekilde Γ denklemini düşünüyoruz.

$$Ly_j = -\frac{d^2 y_j(x_j)}{dx_j^2} = \rho_j \mu^2 y_j(x_j), x_j \in \gamma_j \tag{4.26}$$

Tepe üzerindeki doğal Kirchhoff sınır koşullarını karşılayan fonksiyonlar için tanımlanmıştır:

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0 \tag{4.27}$$

$$y_1'(0) + y_2'(0) + y_3'(0) = 0 \tag{4.28}$$

Ayrıca $x_j = l_j = 1$ uç noktalarındaki sınır koşullarını da gerekli kılıyoruz:

$$y'_j(1) + H_j y_j(1) = 0,\ j = 1,...,n \tag{4.29}$$

Burada μ bir spektral parametredir, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$, $\rho_3 = 3$, $H_j \in \mathbb{C}$ alınırsa;

(4.1) ‘in başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri:

$$s_j(0,\mu) = 1 - c_j(0,\mu) = 0$$

$$1 - s'_j(0,\mu) = c'_j(0,\mu) = 0, \qquad (j = 1,2,3)$$

$$c_j(x_j,\mu) = \cos(\mu x_j) \quad ve \quad s_j(x_j,\mu) = \frac{1}{\mu}\sin(\mu x_j)$$

Problem (4.1)-(4.4) için $\mu_1 = 0,48450,\ \mu_2 = 1,\ 4165,\ \mu_3 = 2,\ 2721$ ilk öz değerler serisinin ilk öz değerlerini alalım. Bu değerleri kullanarak

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{c'_j(l_j,\mu) + H_j c_j(l_j,\mu)}{s'_j(l_j,\mu) + H_j s_j(l_j,\mu)} = 0 \tag{4.30}$$

Buradan üç denklem elde ederiz :

$$\begin{aligned}
&(0.088491H_1 - 0.22566)(0.85069H_2 + 0.56613)(0.68327H_3 + 0.11703) + \\
&(0.96133H_1 + 0.88491)(0.56613H_2 - 0.79876)(0.68327H_3 + 0.11703) + \\
&(0.96133H_1 + 0.88491)(0.85069H_2 + 0.56613)(0.11703H_3 - 1.4435) = 0 \\
&(0.15372H_1 - 1.3996)\ (0.10724H_2 - 0.95274)\ (-0.21055H_3 - 0.44664)\ + \\
&(0.69759H_1 + 0.15372)\ (-0.95274H_2 - 0.86063\ (-0.21055H_3 - 0.44664) + \\
&(0.69759H_1 + 0.15372)\ (0.10724H_2\ -0.95274)\ (-0.44664H_3 + 3.8020)\ =\ 0 \\
&(-0.64523H_1 - 1.73588)\ (-0.21696H_2 - 0.16736)\ (0.074565H_3 + 0.86121)\ + \\
&(0.33625H_1 - 0.64523)\ (-0.16736H_2\ +4.4801)\ (0.074565H_3 + 0.86120) + \\
&(0.33625H_1 - 0.64523)\ (-0.21696H_2 - 0.16736)\ (0.86120H_3 - 3.4645)\ =\ 0
\end{aligned} \tag{4.31}$$

(H_1, H_2, H_3) için altı durum bakalım;

$$\begin{aligned}
&\{H_1 = 0.081922, H_2 = 3.4849,\ H_3 = 6.0394\} \\
&\{H_1 = 0.31023, H_2 = 1.0390,\ H_3 = 31.632\} \\
&\{H_1 = 1.0000, H_2 = 2.0000,\ H_3 = 3.0000\} \\
&\{H_1 = 1.2269, H_2 = 0.90496,\ H_3 = 5.56392\} \\
&\{H_1 = -0.45154 + 0.17493i, H_2 = -3.8954 + 5.619i,\ H_3 = -0.55241 - 2.2121i\} \\
&\{H_1 = -045154 - 0.17493i, H_2 = -3.8954 - 5.6196i, H_3 = -0.55241 + 2.2121i\}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

(4.16) daki (4.26)- (4.29) probleminin dördüncü öz değerini $\mu_4 = 3,\ 2689$ değiştiriyoruz. Sonuç olarak, denklemi elde ederiz:

$$\begin{aligned}
&(-0.9919H_1 + 0.41503)\ (0.38526H_2 + 0.96776)\ (-0.038005H_3 - 0.92795)\ + \\
&(-0.038840H_1 - 0.99191)\ (096776H_2 - 1.6467)\ (-0.038005H_3 - 0.92795) + \\
&(-0.03884H_1 - 0.99191(0.038526H_2 + 0.96776)\ (-0.927795H_3 + 3.65503)\ =\ 0
\end{aligned} \tag{4.33}$$

(4.31) sisteminin ve (4.33) sisteminin ilk iki denkleminden yeni bir denklem sistemi oluşturalım. Bu yeni denklem sisteminin çözümü, diğer altı çözüm grubudur:

$\{H_1 = 1.4493, H_2 = 1.9584,\ H_3 = \ 2.5961\}$
$\{H_1 = 0.84897 + 1.2383i, H_2 = 0.81210 - 0.30203i,\ H_3 = \ 4.3564 - 1.0462i\}$
$\{H_1 = 1.0000, H_2 = 2.0000, = \ 3.0000\}$
$\{H_1 = -0.444254 + 0.06691i, H_2 = 14.573 + 6.2654i,\ H_3 = \ -2.9975 - 1.7914i\}$
$\{H_1 = \ -0.4425 - 0.066907i, H_2 = \ 14.573 - 6.2654i,\ H_3 = \ -2.9975 + 1.7914i\}$
$\{H_1 = 0.84897 - 1.2383i, H_2 = \ 0.81210 + 0.30203i, H_3 = \ 4.3565 + 1.0462i\}$

Bu nedenle, sınır koşullarının (4.4) ‘ün n-tane H_j katsayısı, L probleminin n öz değeri tarafından benzersiz bir şekilde geri kazanılmaz.

Bununla birlikte, somut örnekler üzerinde yapılan hesaplamalar, sınır koşullarının (4.4)’ ün H_j katsayılarının, L probleminin $n+1$ öz değerleri kullanılarak benzersiz bir şekilde belirlenebileceğini göstermektedir.

Örnek 4.3.2 : (4.26) –(4.29) dan μ_1 = 0, 48450, μ_2 = 1, 4165, μ_3 = 2, 2721, μ_4 = 3, 2689 için ilk öz değerler serisinin ilk dört öz değerini alalım. Çözüm Dört denklem sisteminin (4.31), (4.33) kümelerin (4.32) ve (4.34) kesişimimdir. Bu kesişim, benzersiz bir sistem çözümünden oluşur:

$$\{H_1 = 1.0000, H_2 = 2.0000,\ H_3 = \ 3.0000\}$$

Örnek 4.3.3(Karşı Örnek 2) $\Gamma = \gamma_1 x \gamma_2 x \gamma_3$ ışınlarından oluşan yıldız şekilli bir graf olsun. $\gamma_j = \{x_j \in (0,1)\}$, $l_j = 1$, $j = 1,2,3$ her ışının orijini grafiğin tek tepe noktasıyla tanımlanmış şekilde Γ denklemini düşünüyoruz.

$$\{H_1 = 1.0000, H_2 = 2.0000,\ H_3 = \ 3.0000\} \tag{4.34}$$

Tepe üzerindeki doğal Kirchhoff sınır koşullarını karşılayan fonksiyonlar için tanımlanmıştır:

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0 \tag{4.35}$$

$$y_1'(0) + y_2'(0) + y_3'(0) = 0 \tag{4.36}$$

Ayrıca $x_j = l_j = 1$ uç noktalarındaki sınır koşullarını da gerekli kılıyoruz:

$$y'_j(1) + H_j y_j(1) = 0,\ j = 1,...,n \tag{4.37}$$

$q_1(x) = x$, $q_2(x) = x + 2$, $q_3(x) = x + 3$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$, $\rho_3 = 3$, $H_j \in \mathbb{C}$, μ spektral parametre olmak üzere;

Düzlemsel elastisitenin gerilme problemine en uygun düşen ve en çok kullanılmış olan formülasyon, 1862 yılında G.B Airy tarafından önerilmiş olan ve bu nedenle "Airy Gerilme Fonksiyonu" adını alan bir skaler fonksiyon cinsinden yapılan formülasyondur.

(4.35) ' in $s_j(0,\mu)=1-c_j(0,\mu)=0$, $1-s_j^{'}(0,\mu)=c_j^{'}(0,\mu)=0$, $(j=1,2,3)$ başlangıç koşulunu sağlayan γ_j üzerindeki çözümleri Airy fonksiyonları cinsinden yazılırsa:

$$c_1(x,\mu)=\frac{Bi\left(1,-\mu^2\right).Ai\left(-\mu^2+x\right)}{\left(Bi\left(-\mu^2\right).Ai\left(1,-\mu^2\right)-Bi\left(1,-\mu^2\right).Ai\left(-\mu^2\right)\right)}+$$
$$+\frac{Ai\left(1,-\mu^2\right).Bi\left(-\mu^2+x\right)}{\left(Bi\left(-\mu^2\right).Ai\left(1,-\mu^2\right)-Bi\left(1,-\mu^2\right).Ai\left(-\mu^2\right)\right)},$$

$$c_2(x,\mu)=-\frac{Bi\left(1,-2\mu^2+2\right).Ai\left(-2\mu^2+x+2\right)}{Bi\left(-2\mu^2+2\right).Ai\left(1,-2\mu^2+2\right)-Bi\left(1,-2\mu^2+2\right).Ai\left(-2\mu^2+2\right)}+$$
$$+\frac{Ai\left(1,-2\mu^2+2\right).Bi\left(-2\mu^2+x+2\right)}{Bi\left(-2\mu^2+2\right).Ai\left(1,-2\mu^2+2\right)-Bi\left(1,-2\mu^2+2\right).Ai\left(-2\mu^2+2\right)},$$

$$c_3(x,\mu)=-\frac{Bi\left(1,-3\mu^2+3\right).Ai\left(-3\mu^2+x+3\right)}{Bi\left(-3\mu^2+3\right).Ai\left(1,-3\mu^2+3\right)-Bi\left(1,-3\mu^2+3\right).Ai\left(-3\mu^2+3\right)}+$$
$$+\frac{Ai\left(1,-3\mu^2+3\right).Bi\left(-3\mu^2+x+3\right)}{Bi\left(-3\mu^2+3\right).Ai\left(1,-3\mu^2+3\right)-Bi\left(1,-3\mu^2+3\right).Ai\left(-3\mu^2+3\right)},$$

$$s_1(x,\mu)=\frac{Bi\left(-\mu^2\right).Ai\left(-\mu^2+x\right)}{Bi\left(-\mu^2\right).Ai\left(1,-\mu^2\right)-Bi\left(1,-\mu^2\right).Ai\left(-\mu^2\right)}-$$
$$-\frac{Ai\left(-\mu^2\right).Bi\left(-\mu^2+x\right)}{Bi\left(-\mu^2\right).Ai\left(1,-\mu^2\right)-Bi\left(1,-\mu^2\right).Ai\left(-\mu^2\right)},$$

$$s_2(x,\mu)=\frac{Bi\left(-2\mu^2+2\right).Ai\left(-2\mu^2+x+2\right)}{Bi\left(-2\mu^2+2\right).Ai\left(1,-2\mu^2+2\right)-Bi\left(1,-2\mu^2+2\right).Ai\left(-2\mu^2+2\right)}-$$
$$-\frac{Ai\left(-2\mu^2+2\right).Bi\left(-2\mu^2+x+2\right)}{Bi\left(-2\mu^2+2\right).Ai\left(1,-2\mu^2+2\right)-Bi\left(1,-2\mu^2+2\right).Ai\left(-2\mu^2+2\right)},$$

$$s_3(x,\mu)=\frac{Bi\left(-3\mu^2+3\right).Ai\left(-3\mu^2+x+3\right)}{Bi\left(-3\mu^2+3\right).Ai\left(1,-3\mu^2+3\right)-Bi\left(1,-3\mu^2+3\right).Ai\left(-3\mu^2+3\right)}-$$
$$-\frac{Ai\left(-3\mu^2+3\right).Bi\left(-3\mu^2+x+3\right)}{Bi\left(-3\mu^2+3\right).Ai\left(1,-3\mu^2+3\right)-Bi\left(1,-3\mu^2+3\right).Ai\left(-3\mu^2+3\right)},$$

$$\begin{aligned}
&(-0.1250H_1-1.6315)(0.47686H_2-0.1384)(0.26508H_3-0.72008)+\\
&(0.61336H_1+0.0059937)(-0.42522H_2-1.8172)(0.26508H_3-0.72008)+\\
&(0.61336H_1+0.0059937)(0.47686H_2-0.31384)(-0.80651H_3-1.5816)=0\\
&(-0.58101H_1-1.8116)(0.13876H_2-0.88951)(-0.076473H_3-0.94666)+\\
&(0.39850H_1-0.47863)(-0.95980H_2-1.0540)(-0.076473H_3-0.94666)+\\
&(0.39850H_1-0.47863)(0.13876H_2-0.88951)(-0.98500H_3+0.88323)=0\\
&(-0.99573H_1-0.73943)(-0.21611H_2-0.11628)(-0.10434H_3+0.80048)+\\
&(-0.065638H_1-0.95554)(-0.11388H_2+4.5660)(-0.10434H_3+0.80048)+\\
&(-0.065638H_1-0.95554)(-0.21611H_2-0.11628)(0.81475H_3+3.3335)=0
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Problem (4.35) ve (4.38) için $\mu_1 = 1.7745$, $\mu_2 = 2.2430$, $\mu_3 = 3.4376$ serisinin ilk öz değerlerini alalım. Bu denklemleri kullanarak (4.16) ‘ dan yukarıdaki üç denklemi elde ederiz:

$$\begin{aligned}
&\{H_1 = 3.0000, H_2 = 2.0000, H_3 = 1.0000\}\\
&\{H_1 = 3.3145, H_2 = 0.29642, H_3 = 4.6856\}\\
&\{H_1 = 0.80324+6.5631i, H_2 = 0.86403-1.4760i, H_3 = -0.12302-4.2522i\}\\
&\{H_1 = -0.8175+0.49296i, H_2 = -0.42624+4.92103i, H_3 = -0.1230-4.2522i\}\\
&\{H_1 = -0.8185-0.49295i, H_2 = -0.42624-4.9210i, H_3 = -0.12302+4.2522i\}\\
&\{H_1 = 0.80324-6.5331i, H_2 = 0.86403+1.4760i, H_3 = 0.33506-1.3100i\}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

(4.16) da (4.35) - (4.38) probleminin dördüncü değeri $\mu_4 = 4.9887$ yerine koyarsak, aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\begin{aligned}
&(0.22829H_1+4.8126)(0.08121H_2+0.82564)(0.099045H_3-0.54720)+\\
&(-0.19737H_1+0.21965)(0.83356H_2-3.8390)(0.099045H_3-0.54720)+\\
&(-0.19737H_1+0.21965)(0.081213H_2+0.82564)(-0.55175H_3-7.0481)=0
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Sistem (4.38) ‘un ve denklem (4.40)’in ilk iki denkleminden yeni denklem sistemi oluşturalım. Bu yeni denklem sisteminin çözümü diğer altı çözüm kümesidir:

$$\begin{aligned}
&\{H_1 = 3.0000, H_2 = 2.0000, H_3 = 1.0000\} \\
&\{H_1 = 1.5805 + 2.4752i, H_2 = -0.22203 + 0.67498, H_3 = 1.0034 - 3.3602i\} \\
&\{H_1 = -0.059508 + 0.67472i, H_2 = -6.1889 - 6.1889i, H_3 = 0.93238 - 2.1799i\} \\
&\{H_1 = -0.46343, H_2 = 54.238, H_3 = 11.361\} \\
&\{H_1 = -0.059508 - 0.67473i, H_2 = -6.1889 - 0.090512i, H_3 = 0.93238 + 2.1799i\} \\
&\{H_1 = 1.5804 - 2.4751i, H_2 = -6.1889 + 0.090512i, H_3 = 1.0034 + 3.6901i\}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Bu nedenle her iki denklemin de benzersiz çözümü yoktur.

Örnek 4.3.4. (4.1)-(4.29) problemi için $\mu_1 = 1.7745$, $\mu_2 = 2.2430$, $\mu_3 = 3.4376$ ilk öz değerlerini alalım. Dört denklem (4.38) , (4,40) sisteminin çözümü , (4.39) ve (4.41) kümelerinin kesişimidir. Bu çözüm benzersiz bir çözümden oluşur :

$$\{H_1 = 3.0000, H_2 = 2.0000, H_3 = 1.0000\}. \tag{4.42}$$

Rastgele bir $q_j(x_j)$ fonksiyonu durumunda, karakteristik determinantın (4.24) ‘ın hesaplanmasında, lineer bağımsız $c_j(x,\mu)$ ve $s_j(x,\mu)$ çözümlerinin tam değerleri yerine not edelin. Denklem (4.1) , bu çözümler için Taylor serisinin ana kısımları , x ve μ değişkenlerine göre kullanılır. Ayrıca, sınır koşullarının (ters problem için) ve öz değerlerin (doğrudan problem için) katsayıları küçük bir hata ile bulunur ve hesaplamaların doğruluğu yeterince yüksektir (Akhtyamov, 2015).

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

‘’Kaynak Araştırması’’ bölümünde, daha önceden pek çok bilim insanı tarafından araştırılmış olan ve tez problemleriyle yakından ilgili çalışmalara yer verildi.

‘’Materyal ve Yöntem ‘’ bölümünde, tezde bilinmesi gereken temel kavramlara ek olarak tezin ifade ve ispat edilen teoremleri için bazı tanım, lemma ve teoremlere yer verildi.

Son bölümde ise farklı yoğunlukta n dizisine sahip yıldız şekilli geometrik grafların matematiksel modellenmesine ve graflardaki Sturm-Liouville farklı operatörleri için sınır ters spektral probleminin çözümü incelenmiştir. Daha önce sicimler aynı uzunluk ve yoğunluklara sahipse o zaman grafik dizgilerinin uçlarındaki yayların sağlamlık kat sayılarının doğal frekanslardan benzersiz şekilde geri kazanılmadığı gösterilmişti. Yerlerinin permütasyonlarına kadar bulunurlar. Dizgelerin farklı yoğunlukların varsa grafik dizgelerinin uçlarındaki yayların sağlamlık katsayılarının doğal frekanslardan benzersiz bir şekilde geri kazanıldığı gösterildi. Karşı örnekler grafiğin n çıkmazındaki yayların durgunluk katsayılarının benzersiz geri kazanımı için n doğal frekansı kullanmanın yeterli olmadığı gösterilmişti. Tellerin n ucunda yayların sağlamlık katsayılarının geri kazanılmasının benzersizliği için $n+1$ doğal frekansların kullanılmasının yeterli olduğunu gösteren örnekler de verilmiştir. Bir dizinin adım yoğunluğunun geri kazanımının benzersizliği için, bir sınır değer probleminin öz değerleri yeterli değildir. İki sınır probleminin öz değerlerini kullanmamız gerekiyor. İki aşamalı bir işlevi benzersiz bir şekilde yeniden oluşturmak için, bir sınır probleminin iki öz değerini (iki doğal frekans) ve ilkinden yalnızca bir sınır koşuluyla farklı olan başka bir sınır sorununun iki öz değerini (iki doğal frekans) kullanmanız gerektiği gösterilmiştir.

5.2. Öneriler

Tezde incelenen sınır değer problemlerinin ters problemi değişik karakteristiklere göre incelenerek literatüre katkıda bulunulabilir.

KAYNAKLAR

Ahlfors, L. V. (1953). Complex Analysis, McGraw-Hill Book Company, Inc., Newyork-Tronto-London.

Akhiezer, N. I. ve Glazman, I. M. (1950). Theory of Linear Operators in Hilbert Space, Moskow.

Akhtyamov A.M., ve Aksenova Z.F. (2015). “Identi cation of Parameters of Elastic Fastening of a Mechanical System from Strings. Modern problems of science and education”, no. 1, available at: www.science-education.com/121-18706. (in Russian)

Akhtyamov A.M., ve Utyashev I.M. (2015). “Identi cation of Boundary Conditions at Both Ends of a String from the Natural Vibration Frequencies”. Acoustical Physics, vol. 61, no. 6, pp. 615 - 622.

Akhtyamov A.M., ve Utyashev I.M. (2015). “Identication of Boundary Conditions at Both Ends of a String from the Natural Vibration Frequencies.” Acoustical Physics, vol. 61, no. 6, pp.

Akhtyamov, A.M. (2017). “Inverse Problem for the Di usion Operator with Symmetric Functions and General Boundary Conditions” / A.M. Akhtyamov, V.A. Sadovnichii, Ya.T. Sultanaev / Eurasian Mathematical Journal, Vol 8, no: 1. P. 10-22.

Aksenova Z.F., Akhtyamov A.M. (2014). Acoustic diagnostic of concentrated mass at end of a string graph with elastic fastening at the ends, Vestnik Bashkirskogo uni-versiteta (Bulletin of Bashkir University), Vol. 19, №1 – PP. 14-18 (Russian).

Ambartsumyan, V. A. (1929). Über eine frage der eigenwerttheorie, Z. Physik, 53, 690-695.

Başkan, T. (2005). Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara,

Belishev M.I. (2004). “Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method,” Inverse Problems, Vol. 20. – PP. 647-672.

Belishev, M.I. (2004). “Boundary Spectral Inverse Problem on a Class of Graphs (Trees) by the BC Method”, M.I. Belishev / Inverse Problems. Vol 20. P. 647-672.

Bellman, R. ve Kuk, K. L. (1967). Di¤erence-di¤erential equations. M.,"Mir", (Russian).

Borg, G. (1945). Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen eigenwertaufgabe. Bestimnung der Di¤erentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math. 78, 1-96.

Brown B.M., Weikard R. A. (2005). “Borg-Levinson theorem for trees”, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., Vol. 464, no. 2062. – PP. 3231-3243.

Brown, B.M. A. (2005). Borg - Levinson Theorem for Trees / B.M. Brown, R.Weikard // Proceedings of the Royal Society. A Mathematical Physical and Engineering Sciences. Vol 464, 2062. P. 3231_3243.

Yurko, V. A., Buterin, S. A., ve Pikula, M. (2017). Sturm-Liouville differential operators with deviating argument. Tamkang Journal of Mathematics, Vol 48 No 1, pp. 49-59.

Faddeev L.D., Pavlov B.S. (1983). “Model of free electrons and the scattering problem”, Teor. Math. Fiz., Vol. 55, no. 2. – pp. 257-269.

Faddeev, M.D. (1983). “Model of Free Electrons and the Scattering Problem” / M.D. Faddeev, B.S. Pavlov / Theoretical and Mathematical Physics. Vol 55, no 2, pp. 485-492.

Freiling G., ve Yurko V.A., (2012). “Inverse problems for Sturm-Liouville differantial operators with a constant delay”, Applied Mathematics Letters , vol 25, pp. 1999-2004.

Freiling, G. ve Yurko, V. A. (2001). Inverse Sturm-Liouville problems and their applications, NOVA Science Publishers, New York.

Freiling, G., Yurko, V., (2008). Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications, Nova Science Publisher Inc., New York.

Gasymov M.G., Guseinov I.M., Nabiev I.M. (1991). “The Inverse Problem for the SturmLiouville Operator with Non-Separable Self-Adjoint Boundary Conditions.” Sibirskii Matematicheskii Journal, vol. 31, no. 6, pp. 4654. (in Russian)

Harary, F., (1969), Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, Mass, p.

Kadchenko S.I., Kakushkin S.N., ve Zakirova G.A. (2017). “Spectral Problems on Compact Graphs.” Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software, vol. 10, no. 3, pp. 156 162.

Kottos T., ve Smilansky U., (1997). “Quantum chaos on graphs,” Phys. Rev. Lett., Vol. 79. pp. 4794-4797.

Kottos, T. (1997). “Quantum Chaos on Graphs” / T. Kottos, U. Smilansky / Physical Review Letters. V. 79. pp. 4794-4797.

Krein, M. G. ve Levin, B. Ya (1948). “On entire almost periodic functions of exponential type,” Dokl. Akad. Nauk SSSR, 64, No. 3, 285-287.

Langese J.E., Leugering G., Schmidt J.P. (1994). Modelling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures. Birkh¨auser, Boston.

Langese, J.E. (1994). Modelling, Analysis and Control of Dynamic Elastic Multi-Link Structures / J.E. Langese, G. Leugering, J.P. Schmidt. Boston: Birkh-auser.

Levitan B. M. (1991). Sargsjan I. S., Sturm-Liouville and Dirac Operators; Kluwer Academic Publishers: Netherlands.

Levitan B.M. (1987). Inverse Sturm-Liouville problems, Nauka, Moscow, 1984; English transl., VNU Sci.Press, Utrecht.

Levitan B.M. (1987). Inverse SturmLiouville Problems. Utrecht, VNU Science Press.

Levitan B.M., ve Gasymov M.G. (1964). Determination of a Dierential Equation by Two of Its Spectra. Russian Mathematical Surveys, vol. 19, no. 2, pp. 163.

Levitan, B. M. ve Sargsjan, I. S., (1975). Introduction to Spectral Theory: Self Adjoint Ordinary Differential Operators, American Mathematical Society: Providence, Rhode Island.

Mamedov Kh.R, ve Cetinkaya F.A. (2015). “A Uniqueness Theorem for a SturmLiouville Equation with Spectral Parameter in Boundary Conditions.” Applied Mathematics and Information Sciences, vol. 9, no. 2, pp. 981-988.

Marchenko V.A. (1986). SturmLiouville Operators and Applications. Basel, Boston, Stuttgart, Birkhauser.

Marchenko V.A. (1986). Sturm-Liouville operators and their applications, Naukova Dumka, Kiev, 1977; English transl., Birkh¨auser.

Marchenko, V. A. (1977). Sturm-Liouville operators and their applications, Naukova Dumka, Kiev.

Marchenko, V.A. (1950). Some problems in the theory of second-order di¤er-ential operators, Dokl. Akad., Nauk SSSR. 72, 457-560.

Martynova Yu.V. (2011). A Model Inverse Spectral Problem for the Sturm Liouville Operator on a Geometric Graph. Bulletin of Bashkir University, vol. 16, no. 1, pp. 4-10. (in Russian)

Musayev, B., ve Alp, M., (2000). Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları.

Naimark M.A. (1968). Linear Dierential Operators. Part II. Linear Dierential Operators in Hilbert Space. London, Toronto, Sydney, Frederick Ungar Publishing.

Naimark, M. A. (1967). Linear di¤erential operators. Part I, II: Linear di¤er-ential operators in Hilbert space. Frederick Ungar Publishing Co.

Naimark, M. A., (1968). Linear Differential Operators I, Ungar, New York,

Naimark, M. A., (1969). Linear Differential Operators I; Nauka: Moscow, pp. 129.

Panakhov E.S., ve Koyunbakan H., (2010). "Unal Ic. Reconstruction Formula for the Potential Function of SturmLiouville Problem with Eigenparameter Boundary Condition." Inverse Problems in Science and Engineering, vol. 18, no. 1, pp. 173-180.

Pokornyi Yu.V., ve Borovskikh A.V. (2004). "Differential equations on networks (geometric graphs)" , J. Math. Sci., Vol. 119, no. 6. pp. 691-718.

Pokornyi Yu.V., ve Pryadiev V. (2004). "The qualitative Sturm-Liouville theory on spatial Networks", J. Math. Sci., Vol. 119, no. 6. pp. 788-835.

Pokornyi, Yu.V. (2004). Di erential Equations on Networks (Geometric Graphs) / Yu.V. Pokornyi, A.V. Borovskikh / Journal of Mathematical Sciences. Vol. 119, 6. pp. 691-718.

Pokornyi, Yu.V. (2004). “The Qualitative Sturm Liouville Theory on Spatial Networks” Yu.V. Pokornyi, V. Pryadiev / Journal of Mathematical Sciences. Vol. 119, □ 6. pp. 788-835.

Sadovnichii, V.A. (2015). “General Inverse Sturm Liouville Problem with Symmetric Potential / V.A. Sadovnichii, Ya.T. Sultanaev, A.M. Akhtyamov / Azerbaijan Journal of Mathematics. Vol. 5, 2. pp. 96-108.

Sobolev A., Solomyak M., (2002). “Schr¨odinger operator on homogeneous metric trees: spectrum in gaps”, Rev. Math. Phys., Vol.14, no. 5. pp. 421-467.

Sobolev, A. (2002). “Schr odinger Operator on Homogeneous Metric Trees: Spectrum in Gaps” / A. Sobolev, M. Solomyak / Reviews in Mathematical Physics. Vol. 14, □ 5. pp. 421-467.

Yurko V.A. (2009). “Inverse problems for Sturm-Liouville operators on bush-type graphs”, Inverse Problems vol. 25, no.10, pp.14.

Yurko V.A. (2008). “Inverse problems for Sturm-Liouville operators on graphs with a cycle”, Operators and Matrices, Vol. 2, no. 4. pp. 543-553.

Yurko V.A. (2009). “Uniqueness of recovering differential operators on hedgehog-type graphs”, Advances in Dynamical Systems and Applications, Vol. 4, no. 2. pp. 231-241.

Yurko, V. A. (2000). Inverse spectral problems for linear di¤erential operators and their applications, Gordon and Breach, New York.

EKLER

Ek 1: Maple kod ve çözümleri

```
> restart; Digits := 20;
```

$$Digits := 20$$

```
> c1 := cos(s·x); c2 := cos(2·s·x); c3 := cos(3·s·x); s1 := sin(s·x)/s; s2 := sin(2·s·x)/(2·s); s3 := sin(3·s·x)/(3·s);
```

$$c1 := \cos(s\,x)$$

$$c2 := \cos(2\,s\,x)$$

$$c3 := \cos(3\,s\,x)$$

$$s1 := \frac{\sin(s\,x)}{s}$$

$$s2 := \frac{1}{2}\,\frac{\sin(2\,s\,x)}{s}$$

$$s3 := \frac{1}{3}\,\frac{\sin(3\,s\,x)}{s}$$

```
> dc1 := diff(c1, x); dc2 := diff(c2, x); dc3 := diff(c3, x); ds1 := diff(s1, x); ds2 := diff(s2, x); ds3 := diff(s3, x);
```

$$dc1 := -\sin(s\,x)\,s$$

$$dc2 := -2\,\sin(2\,s\,x)\,s$$

$$dc3 := -3\,\sin(3\,s\,x)\,s$$

$$ds1 := \cos(s\,x)$$

$$ds2 := \cos(2\,s\,x)$$

$$ds3 := \cos(3\,s\,x)$$

> $D1 := (dc1 + H1 \cdot c1) \cdot (ds2 + H2 \cdot s2) \cdot (ds3 + H3 \cdot s3) + (ds1 + H1 \cdot s1) \cdot (dc2 + H2 \cdot c2) \cdot (ds3 + H3 \cdot s3) + (ds1 + H1 \cdot s1) \cdot (ds2 + H2 \cdot s2) \cdot (dc3 + H3 \cdot c3);$

$$D1 := (H1 \cos(s\,x) - \sin(s\,x)\,s)\left(\frac{1}{2}\,\frac{H2 \sin(2\,s\,x)}{s} + \cos(2\,s\,x)\right)\left(\frac{1}{3}\,\frac{H3 \sin(3\,s\,x)}{s} + \cos(3\,s\,x)\right) + \left(\frac{H1 \sin(s\,x)}{s} + \cos(s\,x)\right)(H2 \cos(2\,s\,x) - 2 \sin(2\,s\,x)\,s)\left(\frac{1}{3}\,\frac{H3 \sin(3\,s\,x)}{s} + \cos(3\,s\,x)\right) + \left(\frac{H1 \sin(s\,x)}{s} + \cos(s\,x)\right)\left(\frac{1}{2}\,\frac{H2 \sin(2\,s\,x)}{s} + \cos(2\,s\,x)\right)(H3 \cos(3\,s\,x) - 3 \sin(3\,s\,x)\,s)$$

> $H1 := 1; H2 := 2; H3 := 3; x := 1;\ p1 := fsolve(D1, s = 0..1); p2 := fsolve(D1, s = 1..2);\ p3 := fsolve(D1, s = 2..3);\ p4 := fsolve(D1, s = 3..4);$

$$H1 := 1$$

$$H2 := 2$$

$$H3 := 3$$

$$x := 1$$

$$p1 := 0.484498361181730387\text{5}$$

$$p2 := 1.41645992759860076\text{4}$$

$$p3 := 2.27211674109765371\text{6}$$

$$p4 := 3.26890085050486944\text{0}$$

> $restart;\ Digits := 20;$

$$Digits := 20$$

> $c1 := \cos(s \cdot x);\ c2 := \cos(2 \cdot s \cdot x);\ c3 := \cos(3 \cdot s \cdot x);\ s1 := \frac{\sin(s \cdot x)}{s};\ s2 := \frac{\sin(2 \cdot s \cdot x)}{2 \cdot s};\ s3 := \frac{\sin(3 \cdot s \cdot x)}{3 \cdot s};$

$$c1 := \cos(s\,x)$$

$$c2 := \cos(2\,s\,x)$$

$$c3 := \cos(3\,s\,x)$$

$$s1 := \frac{\sin(s\,x)}{s}$$

$$s2 := \frac{1}{2}\,\frac{\sin(2\,s\,x)}{s}$$

$$s3 := \frac{1}{3}\,\frac{\sin(3\,s\,x)}{s}$$

> $dc1 := diff(c1, x);\ dc2 := diff(c2, x);\ dc3 := diff(c3, x);\ ds1 := diff(s1, x);\ ds2 := diff(s2, x);\ ds3 := diff(s3, x);$

$$dc1 := -\sin(s\,x)\,s$$

$$dc2 := -2\,\sin(2\,s\,x)\,s$$

$$dc3 := -3\,\sin(3\,s\,x)\,s$$

$$ds1 := \cos(s\,x)$$

$$ds2 := \cos(2\,s\,x)$$

$$ds3 := \cos(3\,s\,x)$$

> $D1 := (dc1 + H1 \cdot c1) \cdot (ds2 + H2 \cdot s2) \cdot (ds3 + H3 \cdot s3) + (ds1 + H1 \cdot s1) \cdot (dc2 + H2 \cdot c2) \cdot (ds3 + H3 \cdot s3) + (ds1 + H1 \cdot s1) \cdot (ds2 + H2 \cdot s2) \cdot (dc3 + H3 \cdot c3);$

$$
\begin{aligned}
D1 := {} & (H1 \cos(s\,x) - \sin(s\,x)\,s) \left(\frac{1}{2} \frac{H2 \sin(2\,s\,x)}{s} + \cos(2\,s\,x) \right) \left(\frac{1}{3} \frac{H3 \sin(3\,s\,x)}{s} + \cos(3\,s\,x) \right) \\
& + \left(\frac{H1 \sin(s\,x)}{s} + \cos(s\,x) \right) (H2 \cos(2\,s\,x) - 2 \sin(2\,s\,x)\,s) \left(\frac{1}{3} \frac{H3 \sin(3\,s\,x)}{s} + \cos(3\,s\,x) \right) \\
& + \left(\frac{H1 \sin(s\,x)}{s} + \cos(s\,x) \right) \left(\frac{1}{2} \frac{H2 \sin(2\,s\,x)}{s} + \cos(2\,s\,x) \right) (H3 \cos(3\,s\,x) - 3 \sin(3\,s\,x)\,s)
\end{aligned}
$$

> $x := 1;\ s := 0.48449836118173038758;\ eq1 := D1;\ s := 1.4164599275986007647;\ eq2 := D1;\ s := 2.2721167410976537164;\ eq3 := D1;$

$$x := 1$$

$$s := 0.48449836118173038 75$$

$$\begin{aligned}
eq1 := {} & (0.88490870599875603040\,H1 \\
& - 0.22566214349344928783)\,(0.85069239851970857305\,H2 \\
& + 0.56612683590478567389)\,(0.68326897378522331617\,H3 \\
& + 0.11703242558459194027) + (0.96133351695254362514\,H1 \\
& + 0.88490870599875603040)\,(0.56612683590478567389\,H2 \\
& - 0.79876158156677524770)\,(0.68326897378522331617\,H3 \\
& + 0.11703242558459194027) + (0.96133351695254362514\,H1 \\
& + 0.88490870599875603040)\,(0.85069239851970857305\,H2 \\
& + 0.56612683590478567389)\,(0.11703242558459194027\,H3 \\
& - 1.4435068021569768422)
\end{aligned}$$

$$s := 1.41645992759860076 4$$

$$\begin{aligned}
eq2 := {} & (0.15372442010149910493\,H1 \\
& - 1.3996235449223476099)\,(0.10723721284862782020\,H2 \\
& - 0.95273760532891563584)\,(-0.21055131824069256484\,H3 \\
& - 0.44664249187765606396) + (0.69759386815590305682\,H1 \\
& + 0.15372442010149910493)\,(-0.95273760532891563584\,H2 \\
& - 0.86062527121436947368)\,(-0.21055131824069256484\,H3 \\
& - 0.44664249187765606396) + (0.69759386815590305682\,H1 \\
& + 0.15372442010149910493)\,(0.10723721284862782020\,H2 \\
& - 0.95273760532891563584)\,(-0.44664249187765606396\,H3 \\
& + 3.8019732725406698166)
\end{aligned}$$

$$s := 2.27211674109765371 6$$

$$\begin{aligned}
eq3 := {} & (-0.64522703391293961284\,H1 - 1.7358764833412821989)\,(\\
& -0.21695521393724234413\,H2 - 0.16736414941582054952) \\
& (0.07456505316072949401 3\,H3 + 0.86120278133480348924) \\
& + (0.33624631724050805765\,H1 - 0.64522703391293961284)\,(\\
& -0.16736414941582054952\,H2 + 4.4801377383420793770) \\
& (0.07456505316072949401 3\,H3 + 0.86120278133480348924) \\
& + (0.33624631724050805765\,H1 - 0.64522703391293961284)\,(\\
& -0.21695521393724234413\,H2 - 0.16736414941582054952) \\
& (0.86120278133480348924\,H3 - 3.4644885032718096867)
\end{aligned}$$

> $solve(\{eq1, eq2, eq3\}, \{H1, H2, H3\});$

$$\{H1 = 0.081922782883656529241, H2 = 3.4848816912115216496, H3$$
$$= 6.0393932665744331199\}, \{H1 = 0.31023119872649074779, H2$$
$$= 1.0389549664956661385, H3 = 31.632211919649873306\}, \{H1$$
$$= 1.0000000000000000003, H2 = 2.0000000000000000001, H3$$
$$= 2.9999999999999999993\}, \{H1 = 1.2268693657439369993, H2$$
$$= 0.90496368865016348240, H3 = 5.5639229991026805551\}, \{H1$$
$$= -0.45153734692957927133 + 0.17492686597207181791\, I, H2 =$$
$$-3.8954289600568516624 + 5.6195823468987506190\, I, H3 =$$
$$-0.55240922467207057755 - 2.2121493230860856483\, I\}, \{H1 =$$
$$-0.45153734692957927133 - 0.17492686597207181791\, I, H2 =$$
$$-3.8954289600568516624 - 5.6195823468987506190\, I, H3 =$$
$$-0.55240922467207057755 + 2.2121493230860856483\, I\}$$

> $x := 1; s := 0.48449836118173038758; eq1 := D1; s$
> $:= 1.4164599275986007647; eq2 := D1; s$
> $:= 3.2689008505048694402; eq4 := D1;$

$$x := 1$$

$$s := 0.4844983611817303875$$

$$\begin{aligned} eq1 := {} & (0.88490870599875603040\,H1 \\ & - 0.22566214349344928783)\,(0.85069239851970857305\,H2 \\ & + 0.56612683590478567389)\,(0.68326897378522331617\,H3 \\ & + 0.11703242558459194027) + (0.96133351695254362514\,H1 \\ & + 0.88490870599875603040)\,(0.56612683590478567389\,H2 \\ & - 0.79876158156677524770)\,(0.68326897378522331617\,H3 \\ & + 0.11703242558459194027) + (0.96133351695254362514\,H1 \\ & + 0.88490870599875603040)\,(0.85069239851970857305\,H2 \\ & + 0.56612683590478567389)\,(0.11703242558459194027\,H3 \\ & - 1.4435068021569768422) \end{aligned}$$

$$s := 1.416459927598600764$$

$$\begin{aligned} eq2 := {} & (0.15372442010149910493\,H1 \\ & - 1.3996235449223476099)\,(0.10723721284862782020\,H2 \\ & - 0.95273760532891563584)\,(-0.21055131824069256484\,H3 \\ & - 0.44664249187765606396) + (0.69759386815590305682\,H1 \\ & + 0.15372442010149910493)\,(-0.95273760532891563584\,H2 \\ & - 0.86062527121436947368)\,(-0.21055131824069256484\,H3 \\ & - 0.44664249187765606396) + (0.69759386815590305682\,H1 \\ & + 0.15372442010149910493)\,(0.10723721284862782020\,H2 \\ & - 0.95273760532891563584)\,(-0.44664249187765606396\,H3 \\ & + 3.8019732725406698166) \end{aligned}$$

$$s := 3.268900850504869440$$

$$\begin{aligned} eq4 := {} & (-0.99190725054907656746\,H1 \\ & + 0.41503464586304511079)\,(0.038525822591804556487\,H2 \\ & + 0.96775998738365711289)\,(-0.038005341628457233420\,H3 \\ & - 0.92794904600518814011) + (-0.038840146163341726106\,H1 \\ & - 0.99190725054907656746)\,(0.96775998738365711289\,H2 \\ & - 1.6467034978424910048)\,(-0.038005341628457233420\,H3 \\ & - 0.92794904600518814011) + (-0.038840146163341726106\,H1 \\ & - 0.99190725054907656746)\,(0.038525822591804556487\,H2 \\ & + 0.96775998738365711289)\,(-0.92794904600518814011\,H3 \\ & + 3.6550274794543421376) \end{aligned}$$

> $solve(\{eq1, eq2, eq4\}, \{H1, H2, H3\});$

$$
\begin{aligned}
&\{H1 = 0.99999999999999999943, H2 = 2.0000000000000000003, H3\\
&= 3.0000000000000000003\}, \{H1 = 1.4492514882764225101, H2\\
&= 1.9583554881972110728, H3 = 2.5960805251271023143\}, \{H1\\
&= 0.8489682656640047370 + 1.2383018919660190431\,I, H2\\
&= 0.8120964635390357651 - 0.30202863837316055298\,I, H3\\
&= 4.3564792853470305937 - 1.0461986611149586813\,I\}, \{H1 =\\
&-0.4425376774559286935 + 0.066906961297237081467\,I, H2\\
&= 14.573058934202484977 + 6.2653844072901924460\,I, H3 =\\
&-2.997463698856268865 - 1.7913627973982039305\,I\}, \{H1 =\\
&-0.4425376774559286935 - 0.066906961297237081467\,I, H2\\
&= 14.573058934202484977 - 6.2653844072901924460\,I, H3 =\\
&-2.997463698856268865 + 1.7913627973982039305\,I\}, \{H1\\
&= 0.8489682656640047370 - 1.2383018919660190431\,I, H2\\
&= 0.8120964635390357651 + 0.30202863837316055298\,I, H3\\
&= 4.3564792853470305937 + 1.0461986611149586813\,I\}
\end{aligned}
$$

```
> restart;
> Order := 100; Digits := 40;
  q1 := x → x : q2 := x → x + 2 : q3 := x → x + 3 :
```

$$Order := 100$$

$$Digits := 40$$

```
> eq1 := -y'' + q1(x)*y = λ^2*y; eq2 := -y'' + q2(x)*y = 2·λ^2*y;
      eq3 := -y'' + q3(x)*y = 3·λ^2*y;
  ics1 := y(0) = 1, y'(0) = 0 :
  ics2 := y(0) = 0, y'(0) = 1 :
```

$$eq1 := -\left(\frac{d^2}{dx^2}\, y(x)\right) + x\, y(x) = \lambda^2\, y(x)$$

$$eq2 := -\left(\frac{d^2}{dx^2}\, y(x)\right) + (x+2)\, y(x) = 2\, \lambda^2\, y(x)$$

$$eq3 := -\left(\frac{d^2}{dx^2}\, y(x)\right) + (x+3)\, y(x) = 3\, \lambda^2\, y(x)$$

```
y1 := rhs(dsolve({eq1, ics1}, y(x))) : yt1 := convert(y1,
    polynom) : c1 := unapply(yt1, (x, λ)); y4 := rhs(dsolve({eq2
    ics1}, y(x))) : yt4 := convert(y4, polynom) : c2
    := unapply(yt4, (x, λ)); y5 := rhs(dsolve({eq3, ics1},
    y(x))) : yt5 := convert(y5, polynom) : c3 := unapply(yt5, (x,
    λ));
y2 := rhs(dsolve({eq1, ics2}, y(x))) : yt2 := convert(y2,
    polynom) : s1 := unapply(yt2, (x, λ)); y2 := rhs(dsolve({eq2,
    ics2}, y(x))) : yt2 := convert(y2, polynom) : s2
    := unapply(yt2, (x, λ)); y2 := rhs(dsolve({eq3, ics2},
    y(x))) : yt2 := convert(y2, polynom) : s3 := unapply(yt2, (x,
    λ));
```

$$c1 := (x, \lambda) \to -\frac{\mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\ \mathrm{AiryAi}(-\lambda^2 + x)}{\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\ \mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2) - \mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\ \mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)} + \left(\mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2)\ \mathrm{AiryBi}(-\lambda^2 + x)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\ \mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2) - \mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\ \mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)\right)$$

$$c2 := (x, \lambda) \to -\left(\mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\ \mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + x + 2)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + 2)\ \mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2) - \mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\ \mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + 2)\right) + \left(\mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2)\ \mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + x + 2)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + 2)\ \mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2) - \mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\ \mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + 2)\right)$$

$$c3 := (x, \lambda) \to -\left(\mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + 3)\ \mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + x + 3)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + 3)\ \mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + 3) - \mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + 3)\ \mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + 3)\right) + \left(\mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + 3)\ \mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + x + 3)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + 3)\ \mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + 3) - \mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + 3)\ \mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + 3)\right)$$

$$s1 := (x,\lambda) \rightarrow \left(\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2+x)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(1,-\lambda^2) - \mathrm{AiryBi}(1,-\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)\right) - \left(\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2+x)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(1,-\lambda^2) - \mathrm{AiryBi}(1,-\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)\right)$$

$$s2 := (x,\lambda) \rightarrow \left(\mathrm{AiryBi}(-2\,\lambda^2+2)\,\mathrm{AiryAi}(-2\,\lambda^2+x+2)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-2\,\lambda^2+2)\,\mathrm{AiryAi}(1,-2\,\lambda^2+2) - \mathrm{AiryBi}(1,-2\,\lambda^2+2)\,\mathrm{AiryAi}(-2\,\lambda^2+2)\right) - \left(\mathrm{AiryAi}(-2\,\lambda^2+2)\,\mathrm{AiryBi}(-2\,\lambda^2+x+2)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-2\,\lambda^2+2)\,\mathrm{AiryAi}(1,-2\,\lambda^2+2) - \mathrm{AiryBi}(1,-2\,\lambda^2+2)\,\mathrm{AiryAi}(-2\,\lambda^2+2)\right)$$

$$s3 := (x,\lambda) \rightarrow \left(\mathrm{AiryBi}(-3\,\lambda^2+3)\,\mathrm{AiryAi}(-3\,\lambda^2+x+3)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-3\,\lambda^2+3)\,\mathrm{AiryAi}(1,-3\,\lambda^2+3) - \mathrm{AiryBi}(1,-3\,\lambda^2+3)\,\mathrm{AiryAi}(-3\,\lambda^2+3)\right) - \left(\mathrm{AiryAi}(-3\,\lambda^2+3)\,\mathrm{AiryBi}(-3\,\lambda^2+x+3)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-3\,\lambda^2+3)\,\mathrm{AiryAi}(1,-3\,\lambda^2+3) - \mathrm{AiryBi}(1,-3\,\lambda^2+3)\,\mathrm{AiryAi}(-3\,\lambda^2+3)\right)$$

> $dc1 := diff(c1, x);\ dc2 := diff(c2, x);\ dc3 := diff(c3, x);\ ds1 := diff(s1, x);\ ds2 := diff(s2, x);\ ds3 := diff(s3, x);$

$$dc1 := -\frac{\mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\ \mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2 + x)}{\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\ \mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2) - \mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\ \mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)} + \left(\mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2)\ \mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2 + x)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\ \mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2) - \mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\ \mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)\right)$$

$$dc2 := -\left(\mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\ \mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + x + 2)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + 2)\ \mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2) - \mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\ \mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + 2)\right) + \left(\mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2)\ \mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + x + 2)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + 2)\ \mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2) - \mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\ \mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + 2)\right)$$

$$dc3 := -\left(\mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + 3)\ \mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + x + 3)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + 3)\ \mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + 3) - \mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + 3)\ \mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + 3)\right) + \left(\mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + 3)\ \mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + x + 3)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + 3)\ \mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + 3) - \mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + 3)\ \mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + 3)\right)$$

$$ds1 := \frac{\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2 + x)}{\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2) - \mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)} - \left(\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2 + x)\right) / \left(\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2) - \mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)\right)$$

$$ds2 := \left(\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + x + 2)\right) / \left(\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2) - \mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + 2)\right) - \left(\mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + x + 2)\right) / \left(\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2) - \mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + 2)\right)$$

$$ds3 := \left(\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + x + 3)\right) / \left(\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + 3) - \mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + 3)\right) - \left(\mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + x + 3)\right) / \left(\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + 3) - \mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + 3)\right)$$

$$> D1 := (dc1 + H1 \cdot c1) \cdot (ds2 + H2 \cdot s2) \cdot (ds3 + H3 \cdot s3) + (ds1 + H1 \cdot s1) \cdot (dc2 + H2 \cdot c2) \cdot (ds3 + H3 \cdot s3) + (ds1 + H1 \cdot s1) \cdot (ds2 + H2 \cdot s2) \cdot (dc3 + H3 \cdot c3);$$

$$> H1 := 3; H2 := 2; H3 := 1; x := 1; D1 := D1 : p1 := fsolve(D1, \lambda = 1..2); p2 := fsolve(D1, \lambda = 2..3);\ p3 := fsolve(D1, \lambda = 3..4);\ p4 := fsolve(D1, \lambda = 4..6);$$

$$H1 := 3$$

$$H2 := 2$$

$$H3 := 1$$

$$x := 1$$

$$p1 := 1.774480006654843472276929633463872352$$

$$p2 := 2.242978480860250353700122785663740531$$

$$p3 := 3.437573278822737954772489789188782587$$

$$p4 := 4.988708797006153994046999923101866675$$

```
> restart;
> Order := 100; Digits := 40;
  q1 := x -> x : q2 := x -> x + 2 : q3 := x -> x + 3 :
```

$$Order := 100$$

$$Digits := 40$$

$c1 := -\frac{\mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2 + x)}{\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2) - \mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)} + \left(\mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2)\,\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2 + x)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2) - \mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)\right);$ $c2 := -\left(\mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + x + 2)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2) - \mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + 2)\right) + \left(\mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + x + 2)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2) - \mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + 2)\right);$ $c3 := -\left(\mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + x + 3)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + 3) - \mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + 3)\right) + \left(\mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + x + 3)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + 3) - \mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + 3)\right);$ $s1 := \left(\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2 + x)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2) - \mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)\right) - \left(\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2 + x)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2) - \mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)\right);$ $s2 := \left(\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + x + 2)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2) - \mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + 2)\right) - \left(\mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + x + 2)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2) - \mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + 2)\right);$ $s3 := \left(\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + x + 3)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + 3)\right) - \left(\mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + x + 3)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + 3) - \mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + 3)\right)$

$$c1 := -\frac{\mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2 + x)}{\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2) - \mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)} + \left(\mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2)\,\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2 + x)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2) - \mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)\right)$$

$$c2 := -\left(\mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + x + 2)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2) - \mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + 2)\right) + \left(\mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + x + 2)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2) - \mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + 2)\right)$$

$$c3 := -\left(\mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + x + 3)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + 3) - \mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + 3)\right) + \left(\mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + x + 3)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + 3) - \mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + 3)\right)$$

$$s1 := \frac{\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2 + x)}{\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2) - \mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)} - \left(\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2 + x)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2) - \mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)\right)$$

$$s2 := \left(\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + x + 2)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2) - \mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + 2)\right) - \left(\mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + x + 2)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2) - \mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + 2)\right)$$

$$s3 := \left(\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + x + 3)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + 3) - \mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + 3)\right) - \left(\mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + x + 3)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + 3) - \mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + 3)\right)$$

> $dc1 := diff(c1, x); dc2 := diff(c2, x); dc3 := diff(c3, x); ds1 := diff(s1, x); ds2 := diff(s2, x); ds3 := diff(s3, x);$

$$dc1 := -\frac{\mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\ \mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2 + x)}{\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\ \mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2) - \mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\ \mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)} + \left(\mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2)\ \mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2 + x)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\ \mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2) - \mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\ \mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)\right)$$

$$dc2 := -\left(\mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\ \mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + x + 2)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + 2)\ \mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2) - \mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\ \mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + 2)\right) + \left(\mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2)\ \mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + x + 2)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + 2)\ \mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2) - \mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\ \mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + 2)\right)$$

$$dc3 := -\left(\mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + 3)\ \mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + x + 3)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + 3)\ \mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + 3) - \mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + 3)\ \mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + 3)\right) + \left(\mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + 3)\ \mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + x + 3)\right) \Big/ \left(\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + 3)\ \mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + 3) - \mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + 3)\ \mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + 3)\right)$$

$$ds1 := \frac{\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2 + x)}{\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2) - \mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)} - \left(\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2 + x)\right) / \left(\mathrm{AiryBi}(-\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -\lambda^2) - \mathrm{AiryBi}(1, -\lambda^2)\,\mathrm{AiryAi}(-\lambda^2)\right)$$

$$ds2 := \left(\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + x + 2)\right) / \left(\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2) - \mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + 2)\right) - \left(\mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + x + 2)\right) / \left(\mathrm{AiryBi}(-2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(1, -2\lambda^2 + 2) - \mathrm{AiryBi}(1, -2\lambda^2 + 2)\,\mathrm{AiryAi}(-2\lambda^2 + 2)\right)$$

$$ds3 := \left(\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + x + 3)\right) / \left(\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + 3) - \mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + 3)\right) - \left(\mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + x + 3)\right) / \left(\mathrm{AiryBi}(-3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(1, -3\lambda^2 + 3) - \mathrm{AiryBi}(1, -3\lambda^2 + 3)\,\mathrm{AiryAi}(-3\lambda^2 + 3)\right)$$

> $D1 := (dc1 + H1 \cdot c1) \cdot (ds2 + H2 \cdot s2) \cdot (ds3 + H3 \cdot s3) + (ds1 + H1 \cdot s1) \cdot (dc2 + H2 \cdot c2) \cdot (ds3 + H3 \cdot s3) + (ds1 + H1 \cdot s1) \cdot (ds2 + H2 \cdot s2) \cdot (dc3 + H3 \cdot c3);$

> $x := 1; \lambda := 1.774480006654843472276929633463872352431; eq1 := D1; \lambda := 2.242978480860250353700122785663740531691; eq2 := D1; \lambda := 3.437573278822737954772489789188782587312; eq3 := D1;$

$$x := 1$$

$$\lambda := 1.77448000665484347227692963346387235\text{2}$$

eq1 := (−0.12049913375470978110762483539151083347777

− 1.631532336382980000605863967502945630815

(0.47685982025603398473631908555699113013712

− 0.313840362641080141243991425062444894162 5

(0.26507945662866847619836462277465556950663

− 0.72007968341085463784510082236765274536 48

+ (0.61336341138286541194886308086722677268574

+ 0.005993732924184497911089814561434564597 (4

−0.42521557784965867765184866130851569859212

− 1.817201097760263043750518579948927656 39

(0.26507945662866847619836462277465556950663

− 0.72007968341085463784510082236765274536 48

+ (0.61336341138286541194886308086722677268574

+ 0.005993732924184497911089814561434564597 74

(0.47685982025603398473631908555699113013712

− 0.313840362641080141243991425062444894162 (5

−0.80651555843249397059690714797042006189314

− 1.58158062246706597725066573042207518707 1

λ := 2.2429784808602503537001227856637405310

eq2 := (−0.58101904950152354137703022293085017550277

− 1.811551287228937514744865129808099860 446

(0.13876360340153148827602288796876283428942

− 0.889506552791778773318856408718118772117 (9

−0.07647261188581027086701885214977302623355

− 0.946655938536476702265714009293298410565 9

+ (0.39850295112219542954795613179176121815572

− 0.478627105546093272952154165399217698174 (6

−0.95979507086483298447756034226096699562136

− 1.05399392595239574712613747159101431379 (8

−0.07647261188581027086701885214977302623355

− 0.946655938536476702265714009293298410565 9

+ (0.39850295112219542954795613179176121815572

− 0.478627105546093272952154165399217698174 6

(0.13876360340153148827602288796876283428942

− 0.889506552791778773318856408718118772117 (9

−0.98500095483712162845958876848949653338036

+ 0.883231198382433372564682264896184991596 1

$$\lambda := 3.4375732788227379547724897891887825873$$

$$
\begin{aligned}
eq3 := (&-0.99573398564118628086834414248724605772H5\\
&+ 0.73942713076632380170237490996634160737)(7\\
&-0.21610910364079389891488700036649555473H2\\
&- 0.11627701003126344398589731488327608851)0(0\\
&-0.10433586262338206503477409194047440348H3\\
&+ 0.80048002369158020409438806161398597359)83 + (\\
&-0.06563764426528350252422518987294591673602\\
&- 0.95554210135549434503107022970281328155)05(5\\
&-0.11388311408083738908939648475513234989H8\\
&+ 4.56601779091070776870542477410251705427)7(1\\
&-0.10433586262338206503477409194047440348H3\\
&+ 0.80048002369158020409438806161398597359)83 + (\\
&-0.06563764426528350252422518987294591673602\\
&- 0.95554210135549434503107022970281328155)05(5\\
&-0.21610910364079389891488700036649555473H2\\
&- 0.11627701003126344398589731488327608851)00\\
&(0.81475220981153015198457221602298826906H3\\
&+ 3.33353386881716462667247264771072183152)6
\end{aligned}
$$

> *solve*({*eq1*, *eq2*, *eq3*}, {*H1*, *H2*, *H3*});

{*H1* = 2.999999999999999999999999999999999999975, *H2*
= 2.000000000000000000000000000000000000021, *H3*
= 0.9999999999999999999999999999999999999873}, {*H1*
= 3.31445223655122605108983557316069527131, *H2*
= 0.2964219577896780052410100237482423745388, *H3*
= 4.685578613558465784771375323669006933903}, {*H1*
= 0.8032427485713106680316467160787124614936
+ 6.563104022627654141868652476001379483461 I, *H2*
= 0.8640302134120764437905789526140725214612
− 1.475989664770834091334498976140123761802 I, *H3*
= 0.3350600170047258642793667613690038187333
+ 1.309987980923815606559628950650029253651 I}, {*H1* =
−0.8178462817702319831619912968061832640405
+ 0.4929587352604047608271848543873154171339 I, *H2* =
−0.4262396792856519709085654328895149595091
+ 4.921034129916582347545324541973410980607 I, *H3* =
−0.1230298546874047415411573635126191546480
− 4.252228994911013935158083230026357441065 I}, {*H1* =
−0.8178462817702319831619912968061832640405
− 0.4929587352604047608271848543873154171339 I, *H2* =
−0.4262396792856519709085654328895149595091
− 4.921034129916582347545324541973410980607 I, *H3* =
−0.1230298546874047415411573635126191546480
+ 4.252228994911013935158083230026357441065 I}, {*H1*
= 0.8032427485713106680316467160787124614936
− 6.563104022627654141868652476001379483461 I, *H2*
= 0.8640302134120764437905789526140725214612
+ 1.475989664770834091334498976140123761802 I, *H3*
= 0.3350600170047258642793667613690038187333
− 1.309987980923815606559628950650029253651 I}

> $x := 1;\ \lambda := 1.774480006654843472276929633463872352431;eq1$
$:= D1;\ \lambda := 2.24297848086025035370012278566374053169;eq2$
$:= D1;\ \lambda := 4.98870879700615399404699992310186667578;eq4$
$:= D1;$

$$x := 1$$

$$\lambda := 1.774480006654843472276929633463872352$$

$$eq1 := (-0.120499133754709781107624835391510833477\,E1$$
$$- 1.631532336382980000605863967502945630815)$$
$$(0.47685982025603398473631908555699113013\,H2$$
$$- 0.313840362641080141243991425062444894 1625)$$
$$(0.26507945662866847619836462277465556950\,G3$$
$$- 0.720079683410854637845100822367652745 3648)$$
$$+ (0.613363411382865411948863080867226772685\,E4$$
$$+ 0.005993732924184497911089814561434564597 4)($$
$$-0.42521557784965867765184866130851569859\,B2$$
$$- 1.81720109776026304375051857994892765639)$$
$$(0.26507945662866847619836462277465556950\,G3$$
$$- 0.720079683410854637845100822367652745 3648)$$
$$+ (0.613363411382865411948863080867226772685\,E4$$
$$+ 0.005993732924184497911089814561434564597 4)$$
$$(0.47685982025603398473631908555699113013\,H2$$
$$- 0.313840362641080141243991425062444894 1625)($$
$$-0.80651555843249397059690714797042006189\,B3$$
$$- 1.58158062246706597725066573042207518707 1)$$

$$\lambda := 2.2429784808602503537001227856637405310$$

$$
\begin{aligned}
eq2 := (& -0.58101904950152354137703022293085017550 27 \\
& - 1.811551287228937514744865129808099860) 46 \\
& (0.138763603401531488276022887968762834289 4 \\
& - 0.889506552791778773318856408718118772 1) 7 (9 \\
& -0.076472611885810270867018852149773026233 5 \\
& - 0.946655938536476702265714009293298410 5) 59 \\
& + (0.39850295112219542954795613179176121815 2 \\
& - 0.478627105546093272952154165399217698 1) 4 (6 \\
& -0.959795070864832984477560342260966995621 6 \\
& - 1.053993925952395747126137471591014313 7) 9 (8 \\
& -0.076472611885810270867018852149773026233 5 \\
& - 0.946655938536476702265714009293298410 5) 59 \\
& + (0.39850295112219542954795613179176121815 2 \\
& - 0.478627105546093272952154165399217698 1) 46 \\
& (0.138763603401531488276022887968762834289 4 \\
& - 0.889506552791778773318856408718118772 1) 7 (9 \\
& -0.98500095483712162845958876848949653338 06 \\
& + 0.883231198382433372564682264896184991 5) 961
\end{aligned}
$$

$$\lambda := 4.9887087970061539940469999231018666757$$

$$
\begin{aligned}
eq4 := (&0.2282930248539245891315376281615867135771 H8 \\
&+ 4.81255951653381578396558619515500192655) \\
&(0.0812136745967097698432759099361835906827 H3 \\
&+ 0.825642929273992348860891344423173881643 8) \\
&(0.0990449712521152711671156378198234402441 03 \\
&- 0.5472018862214483237207371390866462580408) + (\\
&-0.197370024716786642138985851139119413231 01 \\
&+ 0.2196519552132604820610554441910638578516) \\
&(0.833558306143781896968769969120253739192 H2 \\
&- 3.83898992310110028752516166098864353127) \\
&(0.0990449712521152711671156378198234402441 03 \\
&- 0.5472018862214483237207371390866462580408) + (\\
&-0.197370024716786642138985851139119413231 01 \\
&+ 0.2196519552132604820610554441910638578516) \\
&(0.0812136745967097698432759099361835906827 H3 \\
&+ 0.825642929273992348860891344423173881643 8) (\\
&-0.551758678509559201965692630865429106250 H4 \\
&- 7.04807726788660061903994346739841207913 5)
\end{aligned}
$$

```
> solve({eq1, eq2, eq4}, {H1, H2, H3});

{H1 = 3.00000000000000000000000000000000000003, H2
   = 1.99999999999999999999999999999999999999, H3
   = 0.99999999999999999999999999999999999977}, {H1
   = 1.580475869641227576451589349829360608222
   + 2.475159159397178975268583262317061335956 I, H2 =
  -0.222026990969796388929228570481689485695 0
   + 0.6749766049330236391474471811542624673117 I, H3
   = 1.003370691152127505287823944429472556959
   - 3.690143461993883722381400308287732461948 I}, {H1 =
  -0.0595080478781803221578989429334174538315 8
   + 0.67472924899795267026177091537073107752174 I, H2 =
  -6.188928406053997045990714450187925211889
   - 0.0905116864887074132345514324243009953751 22 I, H3
   = 0.932377352280594379600187161700445232509 0
   - 2.179932670285255804709886609866907589629 I}, {H1 =
  -0.4634331429295766456168434845147353022298, H2
   = 54.2383641617943395096539047102682700997 0, H3
   = 11.36069074557300337915528462517716755764}, {H1 =
  -0.0595080478781803221578989429334174538315 8
   - 0.67472924899795267026177091537073107752174 I, H2 =
  -6.188928406053997045990714450187925211889
   + 0.0905116864887074132345514324243009953751 22 I, H3
   = 0.932377352280594379600187161700445232509 0
   + 2.179932670285255804709886609866907589629 I}, {H1
   = 1.580475869641227576451589349829360608222
   - 2.475159159397178975268583262317061335956 I, H2 =
  -0.222026990969796388929228570481689485695 0
   - 0.6749766049330236391474471811542624673117 I, H3
   = 1.003370691152127505287823944429472556959
   + 3.690143461993883722381400308287732461948 I}
```