

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

İKİ DEĞİŞKENLİ JAIN OPERATÖRÜ

Münise AKÇAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2022

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

İKİ DEĞİŞKENLİ JAIN OPERATÖRÜ

Müntise AKÇAY

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA

Bu tez çalışmasında, Jain operatörlerinin iki değişkenli duruma genişlemesi dikkate alınmıştır. İki değişkenli Jain operatörlerinin dizisi için; polinom ağırlıklı uzayda, ağırlıklı düzgün yaklaşım, Voronovskaja tipten bir teorem elde edilmiştir. Ayrıca, iki değişkenli fonksiyonlar için Lipschitz tipten bir sınıf tanımlanarak; bu sınıftan olan fonksiyonlara yaklaşımdaki hata için bir üst sınır elde edilmiştir. Benzer sonuç, klâsik Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar için de verilmiştir.

Diğer taraftan, iki değişkenli Jain operatörlerinin bazı şekil koruma özellikleri çalışılmıştır. Buna göre; her bir operatörün, iki değişkenli süreklilik modülünün özelliklerini koruduğu ve operatörün modifiye formunun; Lipschitz sürekli fonksiyonun derecesi ve katsayısını koruduğu gösterilmiştir.

Son olarak, iki değişkenli Jain operatörlerinin dizisinin, konveks fonksiyon altında artmayan, olduğu gösterilmiştir.

Eylül 2022, 50 sayfa

Anahtar Kelimeler: İki değişkenli Jain operatörü, Lipschitz sınıfı, Lipschitz-tipten sınıf, ağırlıklı düzgün yaklaşım, süreklilik modülü, monotonluk, Voronovskaja tipten teorem.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

BIVARIATE JAIN OPERATOR

MüntiŖe AKÇAY

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. G len BAŞCANBAZ TUNCA

In this thesis, bivariate extension of Jain operators are considered. For the sequence of bivariate Jain operators; weighted uniform approximation in a polynomial weighted space, a Voronovskaja type theorem are obtained. Moreover, by introducing a Lipschitz type class for functions of two variables, an upper estimate for the error of approximation of such functions is obtained. A similar result is also given for the functions belonging to the classical Lipschitz class.

On the other hand, some shape properties of the bivariate Jain operators are studied. In this direction; it is proved that each operator preserves properties of modulus of continuity and also proved that the modified form of the operator preserves Lipschitz' constant and order of a Lipschitz continuous functions. Finally, it is obtained that the sequence of bivariate Jain operators is non-increasing under the convex function.

September 2022, 50 pages

Key Words: Bivariate Jain operators, Lipschitz class, Lipschitz type class, weighted uniform convergence, modulus of continuity, monotonicity, Voronovskaja type theorem.

TEŞEKKÜR

Bilim, özellikle Matematik bende her zaman merak uyandırmıştır. Bilimsel uğraşlar geçmişte olduğu gibi gelecekte de beni mutlu etmeye devam edecektir. Nerede olursam olayım, bilime ve ülkeme elimden gelen her türlü katkıyı sağlamaya çalışacağım. Benim için mutluluk ve memnuniyet kaynağı olan bu tez çalışması ile lisansüstü eğitimimin her aşamasında varlığıyla, bilgisiyle, ilgisi ve sevgisiyle bana destek olan değerli danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)'ya yürekten teşekkür ederim. Kendisinden öğrendiğim bilgiler her alanda bana yol gösterici olacaktır. Tez çalışmalarına katkılarından dolayı değerli jüri üyeleri: Prof. Dr. Ayşegül ERENÇİN, Prof. Dr. Rabia AKTAŞ, Doç. Dr. Canay AYKOL KOCAKUŞAKLI ve Doç. Dr. Didem AYDIN ARI'ya teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, eğitim hayatımda ve sosyal hayatımda desteğini esirgemeyen değerli iş arkadaşlarım ile yakın arkadaşlarıma teşekkür ederim. Son olarak, beni her zaman daha iyiye ve daha ileriye yönlendiren, her koşulda arkamda duran sevgili aileme sonsuz teşekkür ederim.

Müntise AKÇAY
Ankara, Eylül 2022

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. GÖSTERİMLER VE TEMEL BİLGİLER	10
2.1 Gösterimler	10
2.2 Temel Bilgiler	11
3. İKİ DEĞİŞKENLİ JAIN OPERATÖRÜ	14
4. İKİ DEĞİŞKENLİ JAIN OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ	20
4.1 Voronovskaja Tipten Bir Teorem.....	20
4.2 Ağırlıklı Düzgün Yaklaşım	22
4.3 Lipschitz ve Lipschitz Tipten Sınıflardaki Fonksiyonlara Yaklaşım	25
5. ŞEKİL ÖZELLİKLERİ	29
5.1 Süreklilik Modülünün Korunması	29
5.2 Lipschitz Sınıfının Korunması	32
6. İKİ DEĞİŞKENLİ JAIN OPERATÖRLERİNİN DİZİSİNİN MONOTONLUĞU	35
7. TARTIŞMA VE SONUÇ	42
KAYNAKLAR.....	45
ÖZGEÇMİŞ	50

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	reel sayılar kümesi
D	$\{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t < \infty, 0 \leq s < \infty\}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1} : D \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{1}(t, s) = 1$
π_i	$\pi_i : D \rightarrow \mathbb{R}, i$ 'yinci koordinat fonksiyonu
$C(D)$	$\{f \mid f : D \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ sürekli}\}$
$C_B(D)$	$\{f \in C(D) : f \text{ sınırlı}\}$
$\ \cdot\ $	sup-norm
$\ \cdot\ _1$	$\mathbb{R}^2$ uzayındaki l_1 -norm
$B_\rho(D)$	$\{f : D \rightarrow \mathbb{R} : f(t, s) \leq M_f \rho(t, s)\}$
$C_\rho(D)$	$\{f \in B_\rho(D) : f, D \text{ üzerinde sürekli}\}$
$C_\rho^k(D)$	$\left\{f \in C_\rho(D) : \lim_{\sqrt{t^2+s^2} \rightarrow \infty} \frac{f(t,s)}{\rho(t,s)} = k_f < \infty, k_f \text{ sabit}\right\}$
ρ	D üzerinde tanımlı ağırlık fonksiyonu
$\ \cdot\ _\rho$	B_ρ uzayının normu
B_m	$m \in \mathbb{N}$, m 'yinci Bernstein polinomu
S_m	m 'yinci Szász-Mirakjan operatörü
$P_{m,1}^\beta$	m 'yinci Jain operatörü
P_m^β	iki değişkenli m 'yinci Jain operatörü
$\mathcal{D}_{m,1}^\beta$	m 'yinci modifiye Jain operatörü
$\mathcal{D}_m^\beta$	m 'yinci iki değişkenli modifiye Jain operatörü
$\omega(f; \cdot)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\Omega(f, \cdot, *)$	ağırlıklı süreklilik modülü
$Lip_{\mathcal{M}}(\gamma, *)$	derecesi γ ve sabiti $\mathcal{M}$ olan Lipschitz sürekli fonksiyonların sınıfı
$Lip_{\mathcal{M}}^1(\mu, *)$	derecesi μ ve sabiti $\mathcal{M}$ olan Lipschitz tipten fonksiyonların sınıfı

1. GİRİŞ

Yaklaşım teori; fonksiyonlara, daha basit fonksiyonlar kullanılarak yaklaşılabilmek düşüncesi ile ilgilenir. Bu teoride, dikkate alınan fonksiyon kümesinin, yaklaşılmak istenen fonksiyonların uzayında yoğunluğu araştırılır. Yaklaşım teorisinin ilk sonuçları Fourier serilerinde görülebilir. Bu teoride; Fourier serisinin, dikkate alınan fonksiyona yakınsayıp yakınsamadığı, yakınsıyor ise bunun nasıl olduğu bilinmek istenir. Yaklaşım teorisinin iki temel teoremi, Weierstrass (1885) tarafından ispat edilmiştir. $C[a, b]$, kapalı $[a, b]$ ($-\infty < a, b < \infty$) aralığı üzerinde sürekli, reel değerli fonksiyonların uzayını ve Π_m , derecesi en fazla m olan cebirsel polinomların uzayını göstermek üzere, Weierstrass yaklaşım teoremlerinin cebirsel formu; *cebirsel polinomların $C[a, b]$ uzayında yoğun, yani $\overline{\Pi_m} = C[a, b]$, olduğunu söyler.* Weierstrass teoremlerinin alternatif ispatları, birçok yazar tarafından yapılmıştır. Cebirsel formun en etkili ispatı, Bernstein (1912) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada Bernstein, $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ için

$$B_m(f; t) = \sum_{k=0}^m f\left(\frac{k}{m}\right) \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, 1]$$

şeklindeki operatörleri, binom dağılımına dayalı olarak, inşa etmiş ve aşağıdaki teoremi, olasılık yöntemleri ile ispat etmiştir:

Teorem 1.1 $f \in C[0, 1]$ ise $[0, 1]$ üzerinde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} B_m(f) = f$$

düzgün yaklaşımı gerçekleşir (Bernstein 1912).

Her bir Bernstein operatörü, derecesi m 'yi geçmeyen bir polinomdur. Bir V lineer uzayı üzerinde tanımlı olan L operatörü; her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve her $f, g \in V$ için $L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$ şartını sağlarsa *lineerdir* ve her $f \in V$, $f \geq 0$ için $L(f) \geq 0$ şartını sağlarsa *pozitifdir*, denir. Yoğunluğun gösterilmesi için, Korovkin teoremi veya Bohman-Korovkin teoremi olarak adlandırılan güçlü bir yöntem; Bohman (1952) ve Korovkin (1953) tarafından ispatlanmıştır. Bu yöntem gere; pozitif lineer L_m operatörlerinin bir dizisinin $f \in C[a, b]$ fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde düzgün

yakınsak olması için gerek ve yeter koşul; $e_v(t) := t^v$, $v = 0, 1, 2$, $t \in [a, b]$, kuvvet fonksiyonları için $L_m(e_v)$ dizisinin e_v fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde düzgün yakınsak olmasıdır. Bernstein polinomlarının pozitif lineer olduğu açıktır. Dolayısıyla, Weierstrass teoremi, Korovkin teoreminden elde edilmektedir. Bir V lineer uzayı üzerinde tanımlı olan L operatörü ve $v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $e_v \in V$ olmak üzere, $L(e_v)$ değerlerine, L operatörün *momentleri*, denir.

Bernstein polinomları, dikkate alınan bir f fonksiyonunun bazı özelliklerini korur (Lorentz 1953). Öncelikle, bu doğrultudaki elde edilmiş olan sonuçlar için gerekli olan tanımlar, aşağıda verilmektedir:

$I \subseteq [0, \infty)$ bir aralık olsun.

Tanım 1.1 Bir I aralığında tanımlı olan bir f fonksiyonu; her $t_1, t_2 \in I$ ve her $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$f(\lambda t_1 + (1 - \lambda) t_2) \leq \lambda f(t_1) + (1 - \lambda) f(t_2)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise I üzerinde konvektir, denir (Phillips 2003).

Tanım 1.2 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun. Eğer her $t_1, t_2 \in I$ için bir M pozitif sayısı,

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq M |t_1 - t_2|^\mu, \quad 0 < \mu \leq 1,$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bulunuyorsa, f ; I üzerinde, derecesi μ ve sabiti M olan Lipschitz sürekli bir fonksiyondur, denir. I üzerinde, derecesi μ ve sabiti M olan Lipschitz sürekli fonksiyonların sınıfı $Lip_M(\mu, I)$ ile gösterilir (DeVore ve Lorentz 1993).

Tanım 1.3 ω , 0 noktasını içeren I aralığı üzerinde tanımlı, sürekli, reel değerli, negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer her $t, s \in I$ için

$$i) \lim_{t \rightarrow 0^+} \omega(t) = \omega(0) = 0,$$

$$ii) \omega(t) \text{ } t\text{'ye göre azalmayan, yani; } t \geq s \text{ için } \omega(t) \geq \omega(s),$$

$$iii) \omega(t) \text{ alt toplamsal, yani; } \omega(t + s) \leq \omega(t) + \omega(s)$$

koşulları sağlanıyor ise ω fonksiyonuna süreklilik modülü, denir (Li 2000).

Bernstein polinomları aşağıdaki teoremlerde belirtilen özelliklere sahiptirler:

Teorem 1.2 f fonksiyonu $[0, 1]$ üzerinde konveks ise

$$B_m(f; t) \geq B_{m+1}(f; t) \geq f(t), \quad 0 < t < 1,$$

eşitsizlikleri gerçekleşir (Schoenberg 1959) ve (Arama 1960).

Teorem 1.3 $f \in Lip_M(\mu, [0, 1])$ ise her bir $m \geq 1$ için $B_m(f) \in Lip_M(\mu, [0, 1])$ gerçekleşir (Brown vd. 1987).

Teorem 1.4 ω fonksiyonu, $[0, 1]$ üzerinde bir süreklilik modülü ise her bir $m \geq 1$ için $B_m(\omega)$ de $[0, 1]$ üzerinde bir süreklilik modülüdür (Li 2000).

Bernstein polinomlarının dizisi ile yaklaşımın derecesinin ölçülmesi için güçlü bir teknik, Voronovskaja tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir:

Teorem 1.5 f fonksiyonu $[0, 1]$ üzerinde sınırlı ve bir $t \in [0, 1]$ noktasının bir komşuluğunda diferensiyellenebilir ve $f''(t)$ ikinci basamaktan türevi var ise

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m[B_m(f; t) - f(t)] = \frac{t(1-t)}{2} f''(t)$$

gerçeklenir (Voronovskaja 1932).

Bernstein operatörlerinin inşasında olduğu gibi; bazı pozitif lineer operatörler, Olasılık Teori'deki dağılımlara dayanılarak inşa edilmişlerdir. Örneğin, Mirakjan (1941), Favard (1944) ve Szász (1950), birbirlerinden bağımsız olarak, Poisson dağılımına dayalı olan

$$S_m(f; t) := e^{-mt} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{m}\right) \frac{(mt)^k}{k!}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, \infty) \quad (1.1)$$

operatörlerini; (1.1) formülündeki seri, mutlak yakınsak olacak şekildeki tüm $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için tanımlamışlardır. (1.1) ile verilen S_m operatörleri, Favard-Szász-Mirakjan veya çoğunlukla Szász-Mirakjan operatörleri olarak adlandırılmaktadır. Bu operatörlerin pozitif ve lineer olduğu, açıktır. Szász-Mirakjan operatörlerinin yaklaşım özellikleri birçok yazar tarafından çalışılmıştır. Burada, sadece Altomare ve Campiti'nin kitabına (1994) atıf yapılacaktır.

Sınırsız aralıkta pozitif lineer operatör dizileri için, ağırlıklı uzaylarda Korovkin-tipten bir teorem, Gadzhiev (1974) tarafından elde edilmiştir.

Cheney ve Sharma (1964); Szász-Mirakjan operatörlerinin, konveks fonksiyon altında artmayan olduğunu göstermişlerdir:

Teorem 1.6 f fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde konveks ise $S_m(f; t)$ m 'ye göre artmayandır (Cheney ve Sharma 1964).

Khan ve Peters (1989), olasılık yöntemler ile, Szász-Mirakjan operatörlerinin Lipschitz sınıfını koruduğunu göstermişlerdir:

Teorem 1.7 $f \in Lip_M(\mu, [0, \infty))$ ise her bir $m \geq 1$ için $S_m(f) \in Lip_M(\mu, [0, \infty))$ (Khan ve Peters 1989).

Bir olasılık dağılımı; istatistiksel deneyin her bir sonucuna olasılık atayan bir fonksiyon olarak tanımlanır. Olasılık dağılımı ayrık veya sürekli olabilir, burada ayrık rastgele değişkende toplam olasılık farklı kütle noktalarına tahsis edilirken, sürekli rastgele değişkende olasılık çeşitli sınıf aralıklarında dağıtılır. Binom dağılımı, tekrarlanan sayıda deneme olasılığının çalışıldığı bir dağılımdır. Diğer taraftan, Poisson dağılımı, belirli bir zaman diliminde rastgele meydana gelen bağımsız olayların sayısını verir. Binom dağılımında, sadece iki olası sonuç vardır; başarı veya başarısızlık. Aksine, Poisson dağılımı durumunda; sınırsız sayıda olası sonuç vardır.

Jain;

$$w_\beta(k, \alpha) := \frac{\alpha(\alpha + k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(\alpha+k\beta)}, \quad 0 < \alpha < \infty, \quad |\beta| < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

şeklindeki Poisson tipten dağılım fonksiyonlarını (bkz. Consul ve Jain 1972) kullanarak,

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_\beta(k, \alpha) = 1 \quad (1.3)$$

olduğunu göstermiştir. Buradan, $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere,

$$P_{m,1}^\beta(f; t) := P_m^{[\beta]}(f; t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} w_\beta(k, mt) f\left(\frac{k}{m}\right), & t > 0, \quad m \in \mathbb{N}, \\ f(0), & t = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

şeklindeki operatörleri, (1.4) formülündeki seri yakınsak olacak şekildeki $f \in C[0, \infty), [0, \infty)$ üzerinde sürekli ve reel değerli fonksiyonların uzayı, için tanımlamıştır. $P_{m,1}^\beta$, $m \in \mathbb{N}$,

operatörleri pozitif ve lineerdir. Buradaki β parametresi m doğal sayısına bağlı olabilir ve $\beta = 0$ iken $P_{m,1}^\beta$ Jain operatörleri, Szász-Mirakjan operatörlerine (Szász 1950), (Mirakjan 1941) indirgenmektedir; $P_{m,1}^0 = S_m$. (1.4) ile verilen Jain operatörlerinin ilk üç momenti

$$\begin{aligned} P_{m,1}^\beta(e_0; t) &= 1, \\ P_{m,1}^\beta(e_1; t) &= \frac{t}{1-\beta}, \\ P_{m,1}^\beta(e_2; t) &= \frac{t^2}{(1-\beta)^2} + \frac{t}{m(1-\beta)^3} \end{aligned} \quad (1.5)$$

şeklindedir. Bu çalışmada Jain; β yerine,

$$0 \leq \beta_m < 1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = 0 \quad (1.6)$$

koşulunu sağlayan β_m dizisi alarak, $f \in C[0, \infty)$ için $\{P_{m,1}^{\beta_m}(f)\}_{m \in \mathbb{N}}$ dizisinin, $[0, \infty)$ aralığındaki kompakt alt aralıklarda f fonksiyonuna düzgün yaklaşımını ve yaklaşımın derecesini incelemiştir (Jain 1972).

Umar ve Razi (1985); w_β , (1.2) ile verilen fonksiyon olmak üzere, Jain operatörlerinin Kantorovich tipten bir integral genelleştirmesini

$$K_m^{[\beta]}(f; t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_\beta(k, mt) \left(m \int_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+1}{m}} f(t) dt \right)$$

şeklinde tanımlayarak, $f \in C[0, b]$, $0 < b < \infty$, fonksiyonları için ele aldıkları $\{K_m^{[\beta]}(f)\}_{m \in \mathbb{N}}$ dizisinin; $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = 0$ koşulu altında, $[a, b]$, $0 \leq a < b < \infty$, üzerinde f fonksiyonuna düzgün yaklaşımını ve yaklaşımın derecesini incelemişlerdir.

Tarabie (2012); Jain operatörlerinin aşağıdaki integral formunda bir genelleştirmesini tanımlamıştır.

$$\begin{aligned} J_m^{[\beta]}(f; t) \\ = e^{-mt} f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} w_\beta(k, mt) \frac{1}{B(m+1, k)} \int_0^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{m+k+1}} f(t) dt, \quad t \geq 0, \quad m \geq 2. \end{aligned}$$

Yazar, Jain-beta olarak adlandırdığı $J_m^{[\beta]}$ operatörlerini $\|f\|_{2,\lambda} := \sup \frac{|f(t)|}{1+t^{2+\lambda}}$ normu ile donatılan

$$C_2 := \left\{ f \in C[0, \infty) : \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{1+t^{2+\lambda}} < \infty, \quad \lambda \geq 0 \right\}$$

ağırlıklı uzayındaki f fonksiyonları için dikkate alarak, A -istatistiksel yaklaşımı incelemiştir.

Jain operatörlerinin diğer integral tipten genelleştirilmeleri için, (Gupta vd. 2013), (Agratini 2014) ve (Gupta ile Rassias 2015) çalışmalarına bakılabilir. (1.4) ile verilen Jain operatörleri için Voronovskaja tipten bir teorem, Farcaş (2012) tarafından aşağıdaki şekilde elde etmiştir:

Teorem 1.8 $C^2[0, \infty); [0, \infty)$ üzerinde ikinci basamaktan sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonların uzayını gösterebilir. $f \in C^2[0, \infty)$ ve $\beta_m; 0 \leq \beta_m < 1, \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = 0$ koşulunu sağlayan bir dizi ise her bir $t > 0$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m \left(P_{m,1}^{\beta_m}(f; t) - f(t) \right) = \frac{t}{2} f''(t)$$

sağlanır (Farcaş 2012).

Daha sonra, Abel ve Agratini (2016);

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{m} \beta_m = \gamma$$

limitinin sonlu olması koşuluyla, Jain operatörleri için Voronovskaja tipinde bir sonucu aşağıdaki şekilde geliştirmişlerdir:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m P_{m,1}^{\beta_m}(f; t) - f(t) = \gamma f'(t) + \frac{t}{2} f''(t), \quad t > 0.$$

Burada; f fonksiyonları, t noktasında ikinci basamaktan diferensiyellenebilir, $(0, \infty)$ üzerinde lokal sınırlı ve $t \rightarrow \infty$ iken $f(t) = O(t^2)$ büyüme koşulunu sağlayacak şekilde alınmıştır.

Jain operatörlerinin iki değişkenli duruma genişletilmesi, ilk kez Farcaş (2013) tarafından, çift dizi olarak aşağıdaki formda tanımlanarak çalışılmıştır:

$$J_{m,n}^{[\beta],\alpha,\gamma}(f; t) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} w_{\beta}(k_1, mt) w_{\beta}(k_2, ns) f\left(\frac{k_1 + \alpha_1}{m + \gamma_1}, \frac{k_2 + \alpha_2}{n + \gamma_2}\right), (t, s) \in D.$$

Burada; $D \subset \mathbb{R}^2$ uygun, kompakt bir küme, $f \in C(D)$ olup, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in D$ şeklindedir ve $J_{m,n}^{[\beta],\alpha,\gamma}$ operatörlerinin $\beta = 0$ ve $\alpha = \gamma = 0$ durumu iki değişkenli Szász-Mirakjan operatörlerini (bkz. Olgun 2012) verir. Farcaş (2013); iki değişkenli Jain operatörleri ile A -istatistiksel yaklaşımı ve iki değişkenli süreklilik modülü ile yaklaşımın derecesini incelemiştir.

Agratini (2013); Jain operatörlerinin dizisi için; lokal yaklaşım ve yaklaşımın derecesini düzgünlük modülleri ile incelemiştir ve istatistiksel yakınsaklığı elde etmiştir. Olgun vd. (2015); Jain operatörünün yeni bir genelleştirmesini elde ederek, ağırlıklı düzgün yaklaşım ve Voronovskaja tipten bir teorem ispat etmişlerdir. Gupta ve Greubell (2015); Jain operatörlerinin Durrmeyer genelleştirilmesinde, yakınsaklık için β üzerine bir koşul koymanın gerekmediğine işaret ederek, momentler için indirgeme formülü elde etmişlerdir. Abel ve Agratini (2016); $C[0, \infty)$ uzayından olan ve sonsuzda polinom oranı ile büyümeye sahip olan fonksiyonları dikkate alarak, Jain operatörlerinin dizisi için bir tam asimptotik açılım elde etmişlerdir. Deniz (2016); Jain operatörlerinin Kantorovich formunu dikkate alarak, Voronovskaja ve Grüss-Voronovskaja tipten nicel tahminler elde etmiştir. Dhamija ve Deo (2016), Garg vd. (2018), ters Pólya-Eggenberger dağılımı ile genelleştirilen Jain-Durrmeyer operatörlerini çalışmışlardır.

Doğru vd. (2016); (1.2) formülünde, mt yerine $mt(1 - \beta)$ alarak, Jain operatörlerini aşağıdaki şekilde düzenlemişlerdir:

$$\mathcal{D}_{m,1}^\beta(f; t) := \sum_{k=0}^{\infty} w_\beta(k, mu(t)) f\left(\frac{k}{m}\right), \quad m \in \mathbb{N}, \quad t \geq 0, \quad (1.7)$$

buradaki, w_β , (1.2) ile verilen fonksiyon ve

$$u(t) := (1 - \beta)t, \quad 0 \leq \beta < 1,$$

olup, f , $[0, \infty)$ üzerinde herhangi bir reel değerli, sürekli ve sınırlı fonksiyondur. Yani, $P_{m,1}^\beta$, $m \in \mathbb{N}$, tek değişkenli Jain operatörleri ve $u(t) := t(1 - \beta)$ olmak üzere, $\mathcal{D}_m^\beta$ operatörleri $\mathcal{D}_{m,1}^\beta(f) = P_{m,1}^\beta(f) \circ u$ şeklinde yazılabilirler. Bu durumda, $\mathcal{D}_{m,1}^\beta$ modifiye Jain operatörleri için

$$\mathcal{D}_{m,1}^\beta(e_v; t) = e_v(t), \quad v = 0, 1. \quad (1.8)$$

sağlanır. Böylece, her bir $\mathcal{D}_{m,1}^\beta$ operatörü, sadece sabit fonksiyonları değil, aynı zamanda lineer fonksiyonları da korumaktadır. Diğer taraftan, yazarlar; $\mathcal{D}_{m,1}^\beta$ operatörleri için verilen hata tahminlerinin, Jain operatörlerinden daha iyi olduğunu elde etmişlerdir.

Özarslan (2016); (1.2) formülünde, $\beta := \beta_m = m^{-1}$, $m \in \mathbb{N}$ olarak Jain operatörlerini, $0 \leq \alpha \leq \gamma$ ile $\alpha, \gamma \in [0, \infty)$ için aşağıdaki şekilde düzenlemiştir:

$$P_m^{[m^{-1}], \alpha, \gamma}(f; t) := \sum_{k=0}^{\infty} w_{m^{-1}}(k, mt) f\left(\frac{k + \alpha}{m + \gamma}\right), \quad t \in [0, \infty),$$

burada w_β ; (1.2) ile verilen fonksiyondur. Yazar; ağırlıklı yaklaşım özelliklerini, süreklilik modülü ile yaklaşımın hatası için bir tahmin ve Voronovskaja tipten bir teorem vermiştir. Ayrıca, $P_m^{[m^{-1}], \alpha, \gamma}$ operatörlerinin, lineer fonksiyonları koruyan bir düzenlenmiş şeklinin yaklaşımını incelemiştir.

Agratini (2018); Jain operatörleri hakkında 2018 tarihine kadar yapılan çalışmaların incelendiği bir derleme makale yayımlamıştır.

Başcanbaz-Tunca vd. (2018); Lupaş operatörlerinin (bkz. Lupaş 1995) Jain formunda bir genelleştirmesini aşağıdaki şekilde inşa etmişlerdir:

$$L_m^\beta(f; t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{mt(mt+1+k\beta)}{2^k k!} 2^{-(mt+k\beta)} f\left(\frac{k}{m}\right), \quad t \in (0, \infty),$$

ve $L_m^\beta(f; 0) = f(0)$. Burada, $0 \leq \beta < 1$ olup, f fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde reel değerli sınırlıdır. β parametresi m doğal sayısına bağlı olabilir. L_m^β operatörleri, Lupaş-Jain olarak adlandırılmıştır. Bu çalışmada yazarlar, Lupaş-Jain operatörlerinin dizisinin, konveks fonksiyon altında azalmayan olduğunu ve süreklilik modülünü koruduğunu, göstermişlerdir.

Çetin ve Başcanbaz-Tunca (2020); (1.2) formülünde, mt yerine $(m+p)t$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, olarak, Jain operatörünün Schurer tipten bir genelleştirmesini sabit bir p sayısı için aşağıdaki şekilde dikkate almışlardır:

$$S_{m,p}^\beta(f; t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_\beta(k, (m+p)t) f\left(\frac{k}{m}\right), \quad t \in (0, \infty),$$

ve $S_{m,p}^\beta(f; 0) = f(0)$. Burada, $\beta \in [0, 1)$ olup, $f \in C_B[0, \infty) = \{f \in C[0, \infty) : f, [0, \infty) \text{ üzerinde sınırlı}\}$ şeklindedir. $p = 0$ için $S_{m,p}^\beta$ operatörleri Jain operatörlerini vermektedir; $S_{m,0}^\beta = J_m^\beta$ ayrıca, $\beta = 0$ için $S_{m,p}^\beta$ operatörleri Szász-Schurer operatörlerini vermektedir (bkz. Schurer 1965). Yazarlar, bu operatör dizisinin; konveks ve azalan fonksiyonlar için artmayan olduğunu, lokal ve ağırlıklı düzgün yaklaşım özelliklerini elde etmişlerdir. Ayrıca, süreklilik modülü fonksiyonunun her bir operatör tarafından korunduğunu göstermişlerdir.

Agratini ve Doğru (2021); $\mathcal{D}_m^\beta, m \in \mathbb{N}$, modifiye Jain operatörlerinin Kantorovich tipten bir genelleştirmesini

$$\mathcal{D}_m^\beta(f; t) = \frac{1}{\lambda_m} \sum_{k=0}^{\infty} w_\beta(k, u_m(t)) \left(m \int_{k\lambda_m}^{(k+1)\lambda_m} f(t) dt, \right), t \geq 0 \quad (1.9)$$

formunda tanımlanmışlardır. Buradaki, $(\lambda_m)_{m \geq 1}; \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = 0$ koşulunu sağlayan, kesin olarak monoton azalan pozitif sayılar dizisi olup, f fonksiyonları operatörlerin tanımındaki serinin mutlak yakınsaklığını sağlayacak şekilde, $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı, integrallenebilir fonksiyonlar uzayındandır. Bu yeni operatörlerin yaklaşım özelliklerinin incelenmesinde, β parametresi için (1.6) koşuluna gerek kalmamaktadır.

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, giriş için ayrılmıştır.

İkinci bölümde, tezde kullanılacak olan temel bilgiler ve gösterimlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, iki değişkenli Jain operatörlerinin inşası yapılmıştır.

Dördüncü bölümde, Voronovskaja tipten bir teorem verilmiş ve iki değişkenli Jain operatörlerinin dizisinin, polinom ağırlıklı uzayda, ağırlıklı düzgün yaklaşımı incelenmiştir. Lipschitz tipten bir sınıf tanımlanarak, bu sınıftan olan fonksiyonlara yaklaşımın hatası için bir üst sınır verilmiştir. Benzer olarak; Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlara yaklaşımın oranı için bir üst sınır elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, bazı şekil özelliklerine yer verilmiştir. İki değişkenli Jain operatörünün, iki değişkenli süreklilik modülünü koruduğu ve iki değişkenli Jain operatörünün, modifiye formunun Lipschitz sınıfını koruduğu gösterilmiştir.

Altıncı bölümde, iki değişkenli Jain operatörlerinin dizisinin, konveks fonksiyon altında artmayan olduğu, gösterilmiştir.

Yedinci bölüm tartışma ve sonuç olarak hazırlanmış ve genel düşünceler ifade edilmiştir.

2. GÖSTERİMLER VE TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, çalışmada kullanılacak olan gösterimler, temel kavramlar ve teoremler verilecektir.

2.1 Gösterimler

$S \subset \mathbb{R}^2$ olmak üzere, S üzerinde tanımlı, sınırlı ve reel değerli $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının lineer alt uzayı $B(S)$ ile gösterilsin. Bu uzay,

$$\|f\|_{B(S)} := \sup_{t \in S} |f(t)|, \quad f \in B(S),$$

normu ile bir Banach uzayıdır. Çalışmada, fonksiyon uzayları için aşağıdaki standart gösterimler kullanılacaktır:

$$C(S) := \{f : S \rightarrow \mathbb{R} \mid f, S \text{ üzerinde sürekli}\},$$

$$C_B(S) := \{f \in C(S) \mid f, S \text{ üzerinde sınırlı}\},$$

$C_B(S)$ alt uzayı $B(S)$ 'de kapalı olduğundan, $\|\cdot\|$ sup-normu ile, bir Banach uzayıdır (Altomare 2010). Çalışma boyunca; D , $\mathbb{R}^2$ düzleminin

$$D := \{(t, s) : 0 \leq t, s < \infty\}$$

şeklindeki alt kümesini ve $\mathbf{1}$ sembolü;

$$\mathbf{1} : D \rightarrow \mathbb{R}, \text{ her } (t, s) \in D \text{ için } \mathbf{1}(t, s) = 1$$

şeklindeki sabit fonksiyonu gösterecektir.

π_i , $i = 1, 2$, sembolleri;

$$\pi_i : D \rightarrow \mathbb{R}, \text{ her } (t, s) \in D \text{ için } \pi_1(t, s) = t \text{ ve } \pi_2(t, s) = s$$

olarak tanımlanan i 'yinci koordinat fonksiyonlarını ve e_k , $k = 0, 1, \dots$, fonksiyonları

$$e_k(t) := t^k, \quad t \in [0, \infty),$$

şeklindeki kuvvet fonksiyonlarını gösterecektir.

Ayrıca, D kümesinin herhangi iki $(t, s), (\tau, \sigma)$ elemanı için

$$(t, s) \leq (\tau, \sigma) \text{ gösterimi; } t \leq \tau \text{ ve } s \leq \sigma \text{ anlamında}$$

olup, bir $(t, s) \in D$ elemanı, gerekli durumlarda $\mathbf{u} := (t, s)$ olarak yazılacak ve $\alpha > 0$ olmak üzere,

$$\mathbf{u}^\alpha \text{ gösterimi; } \mathbf{u}^\alpha = (t^\alpha, s^\alpha) \text{ anlamında}$$

kullanılacaktır.

2.2 Temel Bilgiler

Tanım 2.1 (Pozitif Lineer Operatör) X ve Y , reel değerli fonksiyonların lineer uzayı olsunlar.

$$\mathcal{L} : X \rightarrow Y$$

şeklindeki $\mathcal{L}$ operatörüne; eğer

$$\text{her } f, g \in X \text{ ve her } \eta, \xi \in \mathbb{R} \text{ için } \mathcal{L}(\eta f + \xi g) = \eta \mathcal{L}(f) + \xi \mathcal{L}(g)$$

ise lineerdir, eğer

$$\text{her } f \geq 0, f \in X, \text{ için } \mathcal{L}(f) \geq 0$$

ise pozitifdir, denir (Paltanea 2004).

Teorem 2.1 $\mathcal{L} : X \rightarrow Y$ pozitif lineer bir operatör ve $f, g \in X$ ise aşağıdakiler gerçekleşir:

$$(i) \ f \leq g \text{ ise } \mathcal{L}(f) \leq \mathcal{L}(g)$$

$$(ii) \ |f| \in X \text{ iken } |\mathcal{L}(f)| \leq \mathcal{L}(|f|)$$

(Paltanea 2004).

Tanım 2.2 (Sınırlı Lineer Operatör) X ve Y reel fonksiyonların lineer normlu uzayları ve $\mathcal{L} : X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer her $f \in X$ için

$$\|\mathcal{L}(f)\|_Y \leq c \|f\|_X$$

olacak şekilde bir $c \geq 0$ sayısı varsa $\mathcal{L}$ operatörüne *sınırlıdır, denir*. $\mathcal{L}$ operatörünün normu

$$\|\mathcal{L}\| = \sup_{\substack{f \in X \\ \|f\|_X \leq 1}} \|\mathcal{L}(f)\|_Y$$

şeklinde tanımlanır (Butzer ve Nessel 1971).

Teorem 2.2 (Süreklilik ve Sınırlılık) X ve Y reel fonksiyonların lineer normlu uzayları ve $\mathcal{L} : X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun Bu durumda,

- (i) $\mathcal{L}$ operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter koşul; sınırlı olmasıdır.
- (ii) $\mathcal{L}$ operatörü bir tek noktada sürekli ise her noktada sürekli dir (Butzer ve Nessel 1971).

Tanım 2.3 (Lipschitz Sınıfı) $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\mathbf{u} = (t, s), \mathbf{v} = (\tau, \sigma) \in A$ için

$$|f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})| \leq \mathcal{M} \{|t - \tau|^\gamma + |s - \sigma|^\gamma\} = \mathcal{M} \|(\mathbf{u} - \mathbf{v})^\gamma\|_1$$

olacak şekilde bir $\mathcal{M} > 0$ sabiti var ise f fonksiyonuna, A üzerinde, derecesi γ , $\gamma \in (0, 1]$, olan Lipschitz sürekli fonksiyon, denir. Derecesi γ ve sabiti $\mathcal{M}$ olan Lipschitz sürekli fonksiyonların sınıfı $Lip_{\mathcal{M}}(\gamma, A)$ ile gösterilir (Cao vd. 2005).

Tanım 2.4 (Süreklilik Modülü) ω , D üzerinde sürekli, reel değerli, negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer $(t, s), (\tau, \sigma) \in D$ için

- (i) $\omega(0, 0) = 0$,
- (ii) ω azalmayan; $(t, s) \geq (\tau, \sigma)$ iken $\omega(t, s) \geq \omega(\tau, \sigma)$,
- (iii) ω alt-toplamsal; $\omega(t + \tau, s + \sigma) \leq \omega(t, s) + \omega(\tau, \sigma)$

koşulları sağlanıyor ise ω fonksiyonuna süreklilik modülü, denir (Cao vd. 2005).

Tanım 2.5 (Konveks Fonksiyon) f fonksiyonu D kümesi üzerinde sürekli, reel değerli bir fonksiyon olsun. Herhangi $(t_1, s_1), \dots, (t_r, s_r) \in D$ elemanları ve $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ olacak şekildeki negatif olmayan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ sayıları için

$$f\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i (t_i, s_i)\right) \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i f(t_i, s_i)$$

sağlanıyor ise f fonksiyonuna D üzerinde konvekstir, denir (Cao vd. 2005).

Tanım 2.6 (Abel tip ve Abel-Jensen Formülleri) $u, v, \beta \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(u + v + m\beta)^m = \sum_{q=0}^m \binom{m}{q} (u + q\beta)^q v [v + (m - q)\beta]^{m-q-1} \quad (2.1)$$

ve

$$(u + v)(u + v + m\beta)^{m-1} = \sum_{q=0}^m \binom{m}{q} u (u + q\beta)^{q-1} v [v + (m - q)\beta]^{m-q-1} \quad (2.2)$$

özdeşliklerine, Abel tip ve Abel-Jensen formülleri, denir (Stancu, Stoica 2009).

Tanım 2.7 (Hölder Eşitsizliği) a_k ve b_k reel veya kompleks sayılar olsun. $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$\sum |a_k b_k| \leq \left(\sum |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum |b_k|^q \right)^{1/q}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Buradaki toplamalar, sonlu veya sonsuz olabilir. Ancak, sonsuz toplam durumunda, eşitsizliğin sağ tarafındaki toplamaların yakınsak olması beklenmektedir (Hardy vd. 1934).

Aşağıda, Korovkin teoreminin 2-boyutlu duruma genişletilmesi olan Volkov'un teoremi verilmektedir.

Teorem 2.3 (Volkov Teoremi) $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt bir küme olmak üzere, $C(K)$ uzayı üzerinde tanımlı, iki değişkenli pozitif lineer operatörlerin bir $\{T_m\}_{m \geq 1}$ dizisi için, eğer K üzerinde

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_m(\mathbf{1}) - \mathbf{1}\|_{C(K)} &= 0, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_m(\pi_1) - \pi_1\|_{C(K)} &= 0, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_m(\pi_2) - \pi_2\|_{C(K)} &= 0, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_m(\pi_1^2 + \pi_2^2) - (\pi_1^2 + \pi_2^2)\|_{C(K)} &= 0 \end{aligned}$$

düzgün yaklaşımları gerçekleşir ise herhangi bir $f \in C(K)$ için K üzerinde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|T_m(f) - f\|_{C(K)} = 0$$

düzgün yaklaşımı gerçekleşir (Volkov 1957).

3. İKİ DEĞİŞKENLİ JAIN OPERATÖRÜ

Bu kesimde, (1.4) ile verilen Jain operatörlerinin iki değişkenli genişlemesi tanımlanarak, koordinat fonksiyonlarının bu operatörler altında görüntüleri verilecektir.

w_β , $0 \leq \beta < 1$, (1.2) ile verilen fonksiyon olmak üzere, $f \in C_B(D)$ için, $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, m 'yinci iki değişkenli Jain operatörü

$$P_m^\beta(f; t, s) \tag{3.1}$$

$$= \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} w_\beta(k, mt) w_\beta(l, ms) f\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right), & (t, s) \in D \setminus \{(0, 0)\}, \\ f(0, 0), & (t, s) = (0, 0), \end{cases}$$

olarak tanımlanabilir. (1.3) formülünden

$$\begin{aligned} P_m^\beta(\mathbf{1}; t, s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} w_\beta(k, mt) w_\beta(l, ms) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

elde edilir. P_m^β operatörlerinin (1.2) formülünden pozitifliği ve toplam operatörleri olduğundan lineerliği açıktır. İki değişkenli Jain operatörleri $\beta = 0$ durumunda iki değişkenli Szász-Mirakjan operatörlerine (bkz. Olgun 2012) indirgenir; $P_m^0 =: S_m$.

(3.1) ile verilen P_m^β , $m \in \mathbb{N}$, iki değişkenli Jain operatörleri için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Lemma 3.1 P_m^β , $m \in \mathbb{N}$, operatörleri için aşağıdaki eşitlikler gerçekleşir:

$$\begin{aligned}
P_m^\beta(\pi_1; t, s) &= t(1 - \beta)^{-1}, \\
P_m^\beta(\pi_2; t, s) &= s(1 - \beta)^{-1}, \\
P_m^\beta(\pi_1^2; t, s) &= t^2(1 - \beta)^{-2} + \frac{t}{m}(1 - \beta)^{-3}, \\
P_m^\beta(\pi_2^2; t, s) &= s^2(1 - \beta)^{-2} + \frac{s}{m}(1 - \beta)^{-3}, \\
P_m^\beta(\pi_1^3; t, s) &= t^3(1 - \beta)^{-3} + \frac{3t^2}{m}(1 - \beta)^{-4} + t\frac{(2\beta + 1)}{m^2}(1 - \beta)^{-5}, \\
P_m^\beta(\pi_2^3; t, s) &= s^3(1 - \beta)^{-3} + \frac{3s^2}{m}(1 - \beta)^{-4} + s\frac{(2\beta + 1)}{m^2}(1 - \beta)^{-5}, \\
P_m^\beta(\pi_1^4; t, s) &= t^4(1 - \beta)^{-4} + t^3\frac{6}{m}(1 - \beta)^{-5} + t^2\frac{(8\beta + 7)}{m^2}(1 - \beta)^{-6} \\
&\quad + t\frac{(6\beta^2 + 8\beta + 1)}{m^3}(1 - \beta)^{-7}, \\
P_m^\beta(\pi_2^4; t, s) &= s^4(1 - \beta)^{-4} + s^3\frac{6}{m}(1 - \beta)^{-5} + s^2\frac{(8\beta + 7)}{m^2}(1 - \beta)^{-6} \\
&\quad + s\frac{(6\beta^2 + 8\beta + 1)}{m^3}(1 - \beta)^{-7}
\end{aligned}$$

(Akçay ve Başcanbaz-Tunca 2022a).

İspat. P_m^β , $m \in \mathbb{N}$, iki değişkenli Jain operatörlerinin (3.1) ile verilen tanımından; $P_{m,1}^\beta$, (1.4) ile verilen, tek değişkenli Jain operatörü olmak üzere

$$P_m^\beta(\pi_1^v; t, s) = P_{m,1}^\beta(e_v; t) \text{ ve } P_m^\beta(\pi_2^v; t, s) = P_{m,1}^\beta(e_v; s), \quad v = 1, 2, \dots$$

eşitlikleri sağlar. Böylece, π_i , $i = 1, 2$, koordinat fonksiyonlarının π_i^v , $v = 1, 2, \dots$, kuvvetlerinin iki değişkenli Jain operatörleri altındaki görüntüleri; tek değişkenli $P_{m,1}^\beta$ operatörlerinin e_v , $v = 1, 2, \dots$, kuvvet fonksiyonlarındaki değerleri (momentleri) (bkz. Gupta ve Greubel 2015, Olgun vd. 2015 veya Deniz 2016) kullanılarak elde edilebilir. ■

Lemma 3.2 P_m^β , $m \in \mathbb{N}$, operatörleri için aşağıdaki eşitlikler gerçekleşir:

$$\begin{aligned}
P_m^\beta(\pi_1 - \mathbf{1}t; t, s) &= t\beta(1 - \beta)^{-1}, \\
P_m^\beta(\pi_2 - \mathbf{1}s; t, s) &= s\beta(1 - \beta)^{-1}, \\
P_m^\beta((\pi_1 - \mathbf{1}t)^2; t, s) &= t^2\beta^2(1 - \beta)^{-2} + \frac{t}{m}(1 - \beta)^{-3}, \\
P_m^\beta((\pi_2 - \mathbf{1}s)^2; t, s) &= s^2\beta^2(1 - \beta)^{-2} + \frac{s}{m}(1 - \beta)^{-3}, \\
P_m^\beta((\pi_1 - \mathbf{1}t)(\pi_2 - \mathbf{1}s); t, s) &= ts\beta^2(1 - \beta)^{-2}, \\
P_m^\beta((\pi_1 - \mathbf{1}t)^4; t, s) &= t^4\beta^4(1 - \beta)^{-4} + t^3\frac{6\beta^2}{m}(1 - \beta)^{-5} \\
&\quad + t^2\frac{(8\beta^2 + 4\beta + 3)}{m^2}(1 - \beta)^{-6} \\
&\quad + t\frac{(6\beta^2 + 8\beta + 1)}{m^3}(1 - \beta)^{-7}, \\
P_m^\beta((\pi_2 - \mathbf{1}s)^4; t, s) &= s^4\beta^4(1 - \beta)^{-4} + s^3\frac{6\beta^2}{m}(1 - \beta)^{-5} \\
&\quad + s^2\frac{(8\beta^2 + 4\beta + 3)}{m^2}(1 - \beta)^{-6} \\
&\quad + s\frac{(6\beta^2 + 8\beta + 1)}{m^3}(1 - \beta)^{-7}, \\
P_m^\beta((\pi_1 - \mathbf{1}t)^2(\pi_2 - \mathbf{1}s)^2; t, s) &= t^2s^2\beta^4(1 - \beta)^{-4} + (t^2s + s^2t)\frac{\beta^2}{m}(1 - \beta)^{-5} \\
&\quad + \frac{ts}{m^2}(1 - \beta)^{-6}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
P_m^\beta\left([\pi_1 - \mathbf{1}t)^2 + (\pi_2 - \mathbf{1}s)^2\right]^2; t, s) &= (t^2 + s^2)^2\beta^4(1 - \beta)^{-4} \\
&\quad + \frac{2[3(t^3 + s^3) + t^2s + s^2t]\beta^2}{m}(1 - \beta)^{-5} \\
&\quad + \frac{[(8\beta^2 + 4\beta + 3)(t^2 + s^2) + 2ts]}{m^2}(1 - \beta)^{-6} \\
&\quad + (t + s)\frac{(6\beta^2 + 8\beta + 1)}{m^3}(1 - \beta)^{-7}
\end{aligned}$$

(Akçay ve Başcanbaz-Tunca 2022a).

İspat. P_m^β , $m \in \mathbb{N}$ operatörlerinin lineerliği ve Lemma 3.1 kullanılarak;

$$\begin{aligned}
P_m^\beta(\pi_1 - \mathbf{1}t; t, s) &= \frac{t}{1 - \beta} - t \\
&= \frac{\beta t}{1 - \beta}
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$P_m^\beta(\pi_2 - \mathbf{1}s; t, s) = \frac{\beta s}{1 - \beta}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} P_m^\beta((\pi_1 - \mathbf{1}t)^2; t, s) &= \frac{t^2}{(1 - \beta)^2} + \frac{t}{m(1 - \beta)^3} - \frac{2t^2}{1 - \beta} + t^2 \\ &= \frac{\beta^2 t^2}{(1 - \beta)^2} + \frac{t}{m(1 - \beta)^3} \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$P_m^\beta((\pi_2 - \mathbf{1}s)^2; t, s) = \frac{\beta^2 s^2}{(1 - \beta)^2} + \frac{s}{m(1 - \beta)^3}$$

elde edilir. Diğer taraftan, π_1 ve π_2 fonksiyonlarının çarpımı olan $\pi_1\pi_2$ fonksiyonunun bir $(\tau, \sigma) \in D$ noktasındaki değeri

$$\pi_1\pi_2(\tau, \sigma) = \pi_1(\tau, \sigma)\pi_2(\tau, \sigma) = \tau\sigma$$

olacağından, P_m^β operatörlerinin (3.1) ile verilen tanımından, her $(t, s) \in D \setminus \{(0, 0)\}$ için

$$\begin{aligned} P_m^\beta(\pi_1\pi_2; t, s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} w_\beta(k, mt)w_\beta(l, ms)\pi_1\pi_2\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} w_\beta(k, mt)w_\beta(l, ms)\pi_1\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right)\pi_2\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} w_\beta(k, mt)w_\beta(l, ms)\frac{k}{m}\frac{l}{m} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} w_\beta(k, mt)\frac{k}{m} \sum_{l=0}^{\infty} w_\beta(l, ms)\frac{l}{m} \\ &= P_{m,1}^\beta(e_1; t)P_{m,1}^\beta(e_1; s) \end{aligned}$$

eşitliği dikkate alınarak, $P_{m,1}^\beta$, (1.4) formülü ile verilen tek değişkenli Jain operatörü olmak üzere, (1.5) ve Lemma 3.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned} &P_m^\beta((\pi_1 - \mathbf{1}t)(\pi_2 - \mathbf{1}s); t, s) \\ &= P_m^\beta(\pi_1\pi_2 - s\pi_1 - t\pi_2 + ts\mathbf{1}; t, s) \\ &= P_{m,1}^\beta(e_1; t)P_{m,1}^\beta(e_1; s) - sP_{m,1}^\beta(e_1; t) - tP_{m,1}^\beta(e_1; s) + ts \\ &= \frac{ts}{(1 - \beta)^2} - \frac{2ts}{1 - \beta} + ts \\ &= \frac{\beta^2 ts}{(1 - \beta)^2} \end{aligned}$$

olduğu kolayca elde edilir. Ayrıca, P_m^β operatörlerinin lineerliği ve Lemma 3.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}
& P_m^\beta ((\pi_1 - \mathbf{1}t)^4; t, s) \\
&= P_m^\beta (\pi_1^4 - 4t\pi_1^3 + 6t^2\pi_1^2 - 4t^3\pi_1 + t^4\mathbf{1}; t, s) \\
&= \frac{t^4}{(1-\beta)^4} + \frac{6t^3}{m(1-\beta)^5} + \frac{(8\beta+7)t^2}{m^2(1-\beta)^6} + \frac{(6\beta^2+8\beta+1)t}{m^3(1-\beta)^7} \\
&\quad - 4t \left[\frac{t^3}{(1-\beta)^3} + \frac{3t^2}{m(1-\beta)^4} + \frac{(2\beta+1)t}{m^2(1-\beta)^5} \right] \\
&\quad + 6t^2 \left[\frac{t^2}{(1-\beta)^2} + \frac{t}{m(1-\beta)^3} \right] - 4t^3 \frac{t}{1-\beta} + t^4 \\
&= \frac{\beta^4 t^4}{(1-\beta)^4} + \frac{6\beta^2 t^3}{m(1-\beta)^5} + \frac{(8\beta^2+4\beta+3)t^2}{m^2(1-\beta)^6} + \frac{(6\beta^2+8\beta+1)t}{m^3(1-\beta)^7}
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& P_m^\beta ((\pi_2 - \mathbf{1}s)^4; t, s) \\
&= \frac{\beta^4 s^4}{(1-\beta)^4} + \frac{6\beta^2 s^3}{m(1-\beta)^5} + \frac{(8\beta^2+4\beta+3)s^2}{m^2(1-\beta)^6} + \frac{(6\beta^2+8\beta+1)s}{m^3(1-\beta)^7}
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak, operatörlerin tanımı ve (1.5) formüllerinden

$$\begin{aligned}
& P_m^\beta ((\pi_1 - \mathbf{1}t)^2 (\pi_2 - \mathbf{1}s)^2; t, s) \\
&= P_{m,1}^\beta ((e_1 - te_0)^2; t) P_{m,1}^\beta ((e_1 - se_0)^2; s) \\
&= \frac{\beta^4 t^2 s^2}{(1-\beta)^4} + \frac{\beta^2 (t^2 s + s^2 t)}{m(1-\beta)^5} + \frac{ts}{m^2(1-\beta)^6}
\end{aligned}$$

sağlanır ve bu ifade dikkate alınarak,

$$\begin{aligned}
& P_m^\beta \left([(\pi_1 - \mathbf{1}t)^2 + (\pi_2 - \mathbf{1}s)^2]^2; t, s \right) \\
= & P_m^\beta ((\pi_1 - \mathbf{1}t)^4; t, s) \\
& + 2 [P_m^\beta ((\pi_1 - \mathbf{1}t)^2 (\pi_2 - \mathbf{1}s)^2; t, s)] \\
& + P_m^\beta ((\pi_2 - \mathbf{1}s)^4; t, s) \\
= & \frac{\beta^4 t^4}{(1 - \beta)^4} + \frac{6\beta^2 t^3}{m(1 - \beta)^5} \\
& + \frac{(8\beta^2 + 4\beta + 3) t^2}{m^2(1 - \beta)^6} + \frac{(6\beta^2 + 8\beta + 1) t}{m^3(1 - \beta)^7} \\
& + 2 \left[\frac{\beta^4 t^2 s^2}{(1 - \beta)^4} + \frac{\beta^2 (t^2 s + s^2 t)}{m(1 - \beta)^5} + \frac{ts}{m^2(1 - \beta)^6} \right] \\
& + \frac{\beta^4 s^4}{(1 - \beta)^4} + \frac{6\beta^2 s^3}{m(1 - \beta)^5} \\
& + \frac{(8\beta^2 + 4\beta + 3) s^2}{m^2(1 - \beta)^6} + \frac{(6\beta^2 + 8\beta + 1) s}{m^3(1 - \beta)^7} \\
= & \frac{\beta^4 (t^2 + s^2)^2}{(1 - \beta)^4} + \frac{2\beta^2 [3(t^3 + s^3) + t^2 s + s^2 t]}{m(1 - \beta)^5} \\
& + \frac{[(8\beta^2 + 4\beta + 3)(t^2 + s^2) + 2ts]}{m^2(1 - \beta)^6} \\
& + \frac{(6\beta^2 + 8\beta + 1)(t + s)}{m^3(1 - \beta)^7}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanır. ■

4. İKİ DEĞİŞKENLİ JAIN OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

4.1 Voronovskaja Tipten Bir Teorem

Bu kesimde, (3.1) ile verilen $P_m^{\beta_m}$, $m \in \mathbb{N}$, iki değişkenli Jain operatörlerinin dizisi için, önce; D kümesinin herhangi bir kompakt alt kümesinde düzgün yaklaşım, ardından Voronovskaja tipten bir teorem verilecektir.

Teorem 4.1 β_m ; $0 \leq \beta_m < 1$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = 0$ koşulunu sağlayan bir dizi olsun. K , D kümesinin kompakt bir altkümesi olmak üzere, her $f \in C_B(D)$ için, K üzerinde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m^{\beta_m}(f) - f\|_{C(K)} = 0$$

düzgün yaklaşımı gerçekleşir.

İspat. (3.2)'den $\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m^{\beta_m}(\mathbf{1}) - \mathbf{1}\|_{C(K)} = 0$ gerçekleştiği açıktır. Lemma 3.1'den

$$\begin{aligned} \|P_m^{\beta_m}(\pi_1) - \pi_1\|_{C(K)} &= \max_{(t,s) \in K} \left| \frac{t}{1 - \beta_m} - t \right| \\ &= \max_{(t,s) \in K} \left| \frac{\beta_m t}{1 - \beta_m} \right| \end{aligned}$$

olup, K kompakt olduğundan,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m^{\beta_m}(\pi_1) - \pi_1\|_{C(K)} = 0$$

ve benzer şekilde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m^{\beta_m}(\pi_2) - \pi_2\|_{C(K)} = 0$$

bulunur. Son olarak

$$\begin{aligned} &\|P_m^{\beta_m}(\pi_1^2 + \pi_2^2) - (\pi_1^2 + \pi_2^2)\|_{C(K)} \\ &= \max_{(t,s) \in K} \left| \frac{t^2 + s^2}{(1 - \beta_m)^2} + \frac{t + s}{m(1 - \beta_m)^3} - (t^2 + s^2) \right| \\ &= \max_{(t,s) \in K} \left| \frac{(2\beta_m - \beta_m^2)(t^2 + s^2)}{(1 - \beta_m)^2} + \frac{t + s}{m(1 - \beta_m)^3} \right| \end{aligned}$$

olup, K kompakt olduğundan,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m^{\beta_m}(\pi_1^2 + \pi_2^2) - (\pi_1^2 + \pi_2^2)\|_{C(K)} = 0$$

bulunur. İspat, Teorem 2.3'den elde edilir. ■

Teorem 4.2 β_m ; $0 \leq \beta_m < 1$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} m\beta_m = 0$ koşulunu sağlayan bir dizi olsun. K, D kümesinin kompakt bir altkümesi olmak üzere, eğer $f \in C_B(D)$ fonksiyonunun $(t, s) \in K$ noktasında ilk iki basamaktan kısmi türevleri var ve bu kısmi türevler K üzerinde sürekli ise

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m (P_m^{\beta_m}(f; t, s) - f(t, s)) = \frac{1}{2} [tf_{tt}(t, s) + sf_{ss}(t, s)], \quad (t, s) \in K$$

gerçeklenir (Akçay ve Başcanbaz-Tunca 2022a).

İspat. Sabitlenen $(t, s) \in K$ noktasında, f fonksiyonun Taylor formülünden, her $(\tau, \sigma) \in D$ için

$$\begin{aligned} & f(\tau, \sigma) \\ &= f(t, s) + f_t(t, s)(\tau - t) + f_s(t, s)(\sigma - s) \\ &+ \frac{1}{2} \{ f_{tt}(t, s)(\tau - t)^2 + 2f_{ts}(t, s)(\tau - t)(\sigma - s) + f_{ss}(t, s)(\sigma - s)^2 \} \\ &+ \lambda(\tau - t, \sigma - s) [(\tau - t)^2 + (\sigma - s)^2], \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada; λ, D üzerinde sınırlı bir fonksiyon olup, $\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \lambda(u, v) = 0$ sağlanır (bkz. Bardaro ve Mantellini 2017). $\lambda, \lambda(0, 0) = 0$ olacak şekilde tanımlanarak, $(u, v) = (0, 0)$ noktasında sürekli yapılabilir. Buradan, her bir $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı;

$$(\tau, \sigma) \in D \text{ ve } \sqrt{(\tau - t)^2 + (\sigma - s)^2} < \delta \text{ iken } |\lambda(\tau - t, \sigma - s)| < \varepsilon$$

olacak şekilde, vardır. Diğer taraftan, λ, D üzerinde sınırlı olduğundan, her $(u, v) \in D$ için $|\lambda(u, v)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ vardır. Böylece,

$$\sqrt{(\tau - t)^2 + (\sigma - s)^2} \geq \delta \text{ iken } |\lambda(\tau - t, \sigma - s)| \leq \frac{M}{\delta^2} [(\tau - t)^2 + (\sigma - s)^2]$$

yazılabilir. Yukarıdaki iki durum birlikte ele alınırsa, verilen (t, s) ve her $(\tau, \sigma) \in D$ için

$$\begin{aligned} & |\lambda(\tau - t, \sigma - s)| [(\tau - t)^2 + (\sigma - s)^2] \\ &\leq \varepsilon [(\tau - t)^2 + (\sigma - s)^2] + \frac{M}{\delta^2} [(\tau - t)^2 + (\sigma - s)^2]^2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

yazılabilir. Şimdi, yukarıda verilen Taylor formülünün her iki tarafına $P_m^{\beta_m}$ operatörleri uygulanarak, Lemma 3.2'den

$$\begin{aligned}
& P_m^{\beta_m}(f; t, s) - f(t, s) \\
&= f_t(t, s) \frac{\beta_m t}{1 - \beta_m} + f_s(t, s) \frac{\beta_m s}{1 - \beta_m} \\
&+ \frac{f_{tt}(t, s)}{2} \left[\frac{\beta_m^2 t^2}{(1 - \beta_m)^2} + \frac{t}{m(1 - \beta_m)^3} \right] + f_{ts}(t, s) \frac{\beta_m^2 ts}{(1 - \beta_m)^2} \\
&+ \frac{f_{ss}(t, s)}{2} \left[\frac{\beta_m^2 s^2}{(1 - \beta_m)^2} + \frac{s}{m(1 - \beta_m)^3} \right] \\
&+ P_m^{\beta_m}(\lambda(\pi_1 - \mathbf{1}t, \pi_2 - \mathbf{1}s) [(\pi_1 - \mathbf{1}t)^2 + (\pi_2 - \mathbf{1}s)^2]; t, s)
\end{aligned}$$

bulunur. $\lim_{m \rightarrow \infty} m\beta_m = 0$ hipotezinden,

$$\begin{aligned}
& \lim_{m \rightarrow \infty} m [P_m^{\beta_m}(f; t, s) - f(t, s)] \\
&= \frac{t}{2} f_{tt}(t, s) + \frac{s}{2} f_{ss}(t, s) \\
&+ \lim_{m \rightarrow \infty} m P_m^{\beta_m}(\lambda(\pi_1 - \mathbf{1}t, \pi_2 - \mathbf{1}s) [(\pi_1 - \mathbf{1}t)^2 + (\pi_2 - \mathbf{1}s)^2]; t, s)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada, $P_m^{\beta_m}$ operatörleri için Teorem 2.1'deki (i) şıkkı ve (4.1) dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
0 &\leq |P_m^{\beta_m}(\lambda(\pi_1 - \mathbf{1}t, \pi_2 - \mathbf{1}s) [(\pi_1 - \mathbf{1}t)^2 + (\pi_2 - \mathbf{1}s)^2]; t, s)| \\
&\leq \varepsilon P_m^{\beta_m}([(\pi_1 - \mathbf{1}t)^2 + (\pi_2 - \mathbf{1}s)^2]; t, s) \\
&+ \frac{M}{\delta^2} P_m^{\beta_m}([(\pi_1 - \mathbf{1}t)^2 + (\pi_2 - \mathbf{1}s)^2]^2; t, s)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, Lemma 3.2 ve β_m üzerindeki hipotezden, $(t, s) \in K$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m P_m^{\beta_m}(\lambda(\pi_1 - \mathbf{1}t, \pi_2 - \mathbf{1}s) [(\pi_1 - \mathbf{1}t)^2 + (\pi_2 - \mathbf{1}s)^2]; t, s) = 0$$

sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanır. ■

Yukarıdaki teoremden $\beta = 0$ durumu, iki değişkenli Szász-Mirakjan operatörlerine karşılık gelen sonucu verir (bkz. Rempulska ve Skorupka 1998).

4.2 Ağırlıklı Düzgün Yaklaşım

Bu bölümde, iki değişkenli Jain operatörlerinin dizisi ile ağırlıklı düzgün yaklaşımı elde etmek için, Gadzhiev'in (1980) tanım ve teoremleri kullanılacaktır.

$\rho : D \rightarrow (0, \infty)$ şeklindeki sürekli fonksiyona *ağırlık fonksiyonu*, denir. Yani, ρ , D üzerinde bir ağırlık fonksiyonu ise her $\rho \in C(D)$ ve $(t, s) \in D$ için $\rho(t, s) > 0$ sağlanır.

ρ bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki fonksiyon uzayları kullanılacaktır:

$$B_\rho(D) := \{f : D \rightarrow \mathbb{R} : |f(t, s)| \leq M_f \rho(t, s)\},$$

buradaki M_f , yalnızca f fonksiyonuna bağlı bir sabittir.

$$\begin{aligned} C_\rho(D) &: = \{f \in B_\rho(D) : f, D \text{ üzerinde sürekli}\}, \\ C_\rho^k(D) &: = \left\{f \in C_\rho(D) : \lim_{\sqrt{t^2+s^2} \rightarrow \infty} \frac{f(t, s)}{\rho(t, s)} = k_f < \infty, k_f \text{ sabit}\right\} \end{aligned}$$

$C_\rho(D)$,

$$\|f\|_\rho = \sup_{(t,s) \in D} \frac{|f(t, s)|}{\rho(t, s)}.$$

normu ile bir lineer normlu uzaydır. Gadzhiev, sınırsız $D \subset \mathbb{R}^2$ kümesinde tanımlı pozitif lineer operatörlerin dizileri için aşağıdaki sonuçları elde etmiştir:

Lemma 4.1 İki değişkenli pozitif lineer $K_m, m \in \mathbb{N}$ operatörlerinin $C_\rho(D)$ uzayından $B_\rho(D)$ uzayına dönüşüm yapması için gerek ve yeter koşul

$$\|K_m(\rho)\|_\rho \leq k$$

olacak şekilde bir pozitif k sabitinin var olmasıdır (Gadzhiev1980).

Teorem 4.3 $C_\rho(D)$ uzayından $B_\rho(D)$ uzayına dönüşüm yapan iki değişkenli pozitif lineer operatörlerin bir $K_m, m \in \mathbb{N}$ dizisi, eğer

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \|K_m(\mathbf{1}) - \mathbf{1}\|_\rho &= 0, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \|K_m(\pi_1) - \pi_1\|_\rho &= 0, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \|K_m(\pi_2) - \pi_2\|_\rho &= 0, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \|K_m(\pi_1^2 + \pi_2^2) - (\pi_1^2 + \pi_2^2)\|_\rho &= 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

koşullarını sağlıyor ise herhangi bir $f \in C_\rho^k(D)$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|K_m(f) - f\|_\rho = 0$$

gerçeklenir. Ayrıca

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|K_m(f^*) - f^*\|_\rho \geq 1$$

olacak şekilde bir $f^* \in C_\rho(D) \setminus C_\rho^k(D)$ fonksiyonu vardır (Gadzhiev1980).

Burada, iki değişkenli Jain operatörlerinin dizisi için ağırlıklı düzgün yaklaşım, $\rho(t, s) = 1 + t^2 + s^2$ ağırlık fonksiyonu dikkate alınarak incelenecektir.

Lemma 4.2 β_m ; $0 \leq \beta_m < 1$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = 0$ koşulunu sağlayan bir dizi olmak üzere $P_m^{\beta_m}$, $m \in \mathbb{N}$ operatörleri $C_\rho(D)$ uzayından $B_\rho(D)$ uzayına dönüşüm yapar (Akçay ve Başcanbaz-Tunca 2022b).

İspat. Lemma 4.1'e göre, ispat için, $\|P_m^{\beta_m}(\rho)\|_\rho \leq k$ olacak şekilde bir $k > 0$ sabitinin var olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 3.1 dikkate alınarak

$$\begin{aligned} & \|P_m^{\beta_m}(\rho)\|_\rho \\ &= \sup_{(t,s) \in D} \frac{1}{\rho(t,s)} |P_m^{\beta_m}(\rho; t, s)| \\ &= \sup_{(t,s) \in D} \frac{1}{1+t^2+s^2} \left\{ 1 + \frac{t^2+s^2}{(1-\beta_m)^2} + \frac{t+s}{m(1-\beta_m)^3} \right\} \\ &\leq \sup_{(t,s) \in D} \left\{ \frac{1}{1+t^2+s^2} + \frac{t^2+s^2}{(1+t^2+s^2)(1-\beta_m)^2} + \left(\frac{t}{1+t^2} + \frac{s}{1+s^2} \right) \frac{1}{m(1-\beta_m)^3} \right\} \\ &\leq 1 + \frac{1}{(1-\beta_m)^2} + \frac{1}{m(1-\beta_m)^3}. \end{aligned}$$

elde edilir. β_m dizisi yakınsak olduğundan, $\|P_m^{\beta_m}(\rho)\|_\rho \leq k$ olacak şekilde bir k pozitif sabiti bulunabilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.4 β_m ; $0 \leq \beta_m < 1$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = 0$ koşulunu sağlayan bir dizi olsun. Herhangi bir $f \in C_\rho^k(D)$ için D üzerinde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m^{\beta_m}(f) - f\|_\rho = 0$$

ağırlıklı düzgün yaklaşımı gerçekleşir (Akçay ve Başcanbaz-Tunca 2022b).

İspat. Teorem 4.3'e göre, ispat için, $P_m^{\beta_m}$ operatörlerin (4.2) ile verilen koşulları sağladığını göstermek yeterlidir. (3.2)'den $\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m^{\beta_m}(\mathbf{1}) - \mathbf{1}\|_\rho = 0$ olduğu açık-

tır. Ayrıca, Lemma 3.1'den,

$$\begin{aligned}\|P_m^{\beta_m}(\pi_1) - \pi_1\|_\rho &= \sup_{(t,s) \in D} \left| \frac{t\beta_m}{(1+t^2+s^2)(1-\beta_m)} \right| \\ &\leq \sup_{(t,s) \in D} \frac{t\beta_m}{(1+t^2)(1-\beta_m)} \\ &\leq \frac{\beta_m}{2(1-\beta_m)}\end{aligned}$$

olup, $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = 0$ olduğu dikkate alınarak,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m^{\beta_m}(\pi_1) - \pi_1\|_\rho = 0$$

bulunur ve benzer şekilde,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m^{\beta_m}(\pi_2) - \pi_2\|_\rho = 0$$

elde edilir. Son olarak, Lemma 3.1'den,

$$\begin{aligned}&\|P_m^{\beta_m}(\pi_1^2 + \pi_2^2) - (\pi_1^2 + \pi_2^2)\|_\rho \\ &= \sup_{(t,s) \in D} \left| \frac{\frac{t^2+s^2}{(1-\beta_m)^2} + \frac{t+s}{m(1-\beta_m)^3} - (t^2+s^2)}{1+t^2+s^2} \right| \\ &\leq \sup_{(t,s) \in D} \left| \frac{2\beta_m - \beta_m^2}{(1-\beta_m)^2} \frac{t^2+s^2}{1+t^2+s^2} + \frac{1}{m(1-\beta_m)^3} \left(\frac{t}{1+t^2} + \frac{s}{1+s^2} \right) \right| \\ &\leq \left| \frac{2\beta_m - \beta_m^2}{(1-\beta_m)^2} + \frac{1}{m(1-\beta_m)^3} \right|\end{aligned}$$

olacağından,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m^{\beta_m}(\pi_1^2 + \pi_2^2) - (\pi_1^2 + \pi_2^2)\|_\rho = 0$$

sonucuna ulaşılır. Böylece, ispat tamamlanır. ■

4.3 Lipschitz ve Lipschitz Tipten Sınıflardaki Fonksiyonlara Yaklaşım

Szász (1950); ρ , $0 < \rho \leq 1$ koşulunu sağlayan bir sabit ve $\mathcal{M} > 0$ bir sabit olmak üzere,

$$|f(t) - f(s)| < \mathcal{M} \frac{|s-t|^\rho}{(t+s)^{\rho/2}}, \quad 0 < t < s < \infty, \quad (4.3)$$

Lipschitz tipten koşulu sağlayan f fonksiyonları için Szász-Mirakjan operatörleri ile yaklaşımın hatası için bir üst sınır vermiştir. (1.9) ile verilen $\mathcal{D}_m^\beta, m \in \mathbb{N}$, modifiye

Jain operatörlerinin Kantorovich tipten genelleştirmesi için benzer sonuç, Agratini ve Doğru (2021) tarafından elde edilmiştir.

Bu kısımda, (4.3) ile verilen Lipschitz tipten koşulun, iki değişkenli fonksiyonlar için, yeni bir tanımı yapılarak bu koşulu sağlayan fonksiyonlara iki değişkenli Jain operatörlerinin dizisi ile yaklaşımdaki hata için bir üst sınır verilecektir. Aslında, iki değişkenli fonksiyonlar için Lipschitz tipten bir koşul, Euclid normu kullanılarak, Özarslan ve Aktuğlu (2013) tarafından verilmiştir. Ancak, bu tanım, bu çalışmada kullanılacak olan iki değişkenli Lipschitz sürekli fonksiyon tanımı ile uyumlu olmadığı için, yeni bir tanıma gereksinim duyulmuştur.

Ayrıca, her bir $\mathcal{D}_m^\beta$ modifiye Jain operatörünün iki değişkenli genişlemesinin, Lipschitz sürekli fonksiyonun sabitini ve derecesini koruduğu gösterilecektir. Bâzi tek ve çok değişkenli pozitif lineer operatörler için bu doğrultuda elde edilen sonuçları içeren birkaç önemli çalışmaya örnek olarak; (Lindvall 1982), (Brown vd. 1987) ve (Cao vd. 2005) verilebilir.

Çalışmada; herhangi bir $\mathbf{u} = (t, s) \in \mathbb{R}^2$ için, $\mathbb{R}^2$ uzayındaki l_1 -normu (veya 1-norm) $\|\mathbf{u}\|_1 := |t| + |s|$ olmak üzere, aşağıdaki tanım kullanılacaktır:

Tanım 4.1 $f \in A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Eğer, her $\mathbf{u} = (t, s), \mathbf{v} = (\tau, \sigma) \in A \setminus \{(0, 0)\}$ için

$$|f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})| \leq \mathcal{M} \frac{|t - \tau|^\mu + |s - \sigma|^\mu}{(|\tau| + |\sigma| + |t| + |s|)^{\mu/2}} = \mathcal{M} \frac{\|(\mathbf{u} - \mathbf{v})^\mu\|_1}{(\|\mathbf{u}\|_1 + \|\mathbf{v}\|_1)^{\mu/2}} \quad (4.4)$$

olacak şekilde bir $\mathcal{M} > 0$ sabiti var ise, f fonksiyonu, A üzerinde, derecesi μ , $\mu \in (0, 1]$, olan Lipschitz tipten koşulu sağlar, denilecektir (Akçay ve Başcanbaz-Tunca 2022b).

Çalışmada, (4.4) Lipschitz tipten koşulu sağlayan fonksiyonların sınıfı $Lip_{\mathcal{M}}^1(\mu, A)$ ile gösterilecektir. β üzerindeki uygun koşullar ile $f \in Lip_{\mathcal{M}}^1(\mu, D)$ fonksiyonlarına, iki değişkenli Jain operatörleri ile yaklaşımın oranı için üst sınır, aşağıdaki teoremden verilmektedir.

Teorem 4.5 $f \in Lip_{\mathcal{M}}^1(\mu, D)$ ise her $(t, s) \in D \setminus \{(0, 0)\}$ için

$$\begin{aligned} & |P_m^\beta(f; t, s) - f(t, s)| \\ & \leq \frac{\mathcal{M}}{(t+s)^{\mu/2}} \left[(P_m^\beta((\pi_1 - \mathbf{1}t)^2; t, s))^{\mu/2} + (P_m^\beta((\pi_2 - \mathbf{1}s)^2; t, s))^{\mu/2} \right] \quad (4.5) \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Akçay ve Başcanbaz-Tunca 2022b).

İspat. $f \in Lip_{\mathcal{M}}^1(\mu, D)$ ve $(t, s) \in D \setminus \{(0, 0)\}$ olsun. $0 < \mu \leq 1$ için; (3.1) ve (3.2) kullanılarak, P_m^β operatörünün pozitif ve lineerliğinden

$$\begin{aligned} & |P_m^\beta(f; t, s) - f(t, s)| \\ & \leq P_m^\beta(|f(\tau, \sigma) - f(t, s)|; t, s) \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} w_\beta(k, mt) w_\beta(l, ms) \left| f\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right) - f(t, s) \right| \\ & \leq \mathcal{M} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} w_\beta(k, mt) w_\beta(l, ms) \left[\frac{|\frac{k}{m} - t|^\mu + |\frac{l}{m} - s|^\mu}{(\frac{k}{m} + \frac{l}{m} + t + s)^{\mu/2}} \right] \\ & \leq \frac{\mathcal{M}}{(t+s)^{\mu/2}} \left[P_{m,1}^\beta(|e_1 - e_0 t|^\mu; t) + P_{m,1}^\beta(|e_1 - e_0 s|^\mu; s) \right], \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $P_{m,1}^\beta$, $m \in \mathbb{N}$, (1.4) ile verilen tek değişkenli Jain operatörleridir. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafında, $p = \frac{2}{\mu}$ ve $q = \frac{2}{2-\mu}$ eşlenik çifti için Hölder eşitsizliği uygulanarak, $(t, s) \in D \setminus \{(0, 0)\}$ için

$$\begin{aligned} & |P_m^\beta(f; t, s) - f(t, s)| \\ & \leq \frac{\mathcal{M}}{(t+s)^{\mu/2}} \left[\left(P_{m,1}^\beta((e_1 - e_0 t)^2; t) \right)^{\mu/2} + \left(P_{m,1}^\beta((e_1 - e_0 s)^2; s) \right)^{\mu/2} \right] \\ & = \frac{\mathcal{M}}{(t+s)^{\mu/2}} \left[\left(\frac{\beta^2 t^2}{(1-\beta)^2} + \frac{t}{m(1-\beta)^3} \right)^{\mu/2} + \left(\frac{\beta^2 s^2}{(1-\beta)^2} + \frac{s}{m(1-\beta)^3} \right)^{\mu/2} \right] \end{aligned}$$

bulunur, Lemma 3.2' den (4.5) elde edilir. Böylece, ispat tamamlanır. ■

Benzer şekilde, Tanım (2.3) ile verilen $Lip_{\mathcal{M}}(\gamma, D)$ sınıfından olan fonksiyonlara yaklaşım oranı için bir üst sınır, aşağıda verilmektedir.

Teorem 4.6 $f \in Lip_{\mathcal{M}}(\gamma, D)$ ise her $(t, s) \in D$ için

$$|P_m^\beta(f; t, s) - f(t, s)| \leq \mathcal{M} \left[(P_m^\beta((\pi_1 - \mathbf{1}t)^2; t, s))^{\frac{\gamma}{2}} + (P_m^\beta((\pi_2 - \mathbf{1}s)^2; t, s))^{\frac{\gamma}{2}} \right] \quad (4.6)$$

eşitsizliği gerçekleşir (Akçay ve Başcanbaz-Tunca 2022b).

İspat. $P_m^{\beta_m}$ operatörlerinin tanımından $(t, s) = (0, 0)$ için eşitlik sağlanır. $P_m^{\beta_m}$ operatörlerinin pozitif ve lineerliği ile (3.2) kullanılarak, $f \in Lip_{\mathcal{M}}(\gamma, D)$ olduğu ve (1.3) dikkate alınarak, her $(t, s) \in D$ için

$$\begin{aligned}
& |P_m^{\beta}(f; t, s) - f(t, s)| \\
& \leq P_m^{\beta}(|f(\tau, \sigma) - f(t, s)|; t, s) \\
& = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} w_{\beta}(k, mt) w_{\beta}(l, ms) \left| f\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right) - f(t, s) \right| \\
& \leq \mathcal{M} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} w_{\beta}(k, mt) w_{\beta}(l, ms) \left\{ \left| \frac{k}{m} - t \right|^{\gamma} + \left| \frac{l}{m} - s \right|^{\gamma} \right\} \\
& = \mathcal{M} \sum_{k=0}^{\infty} w_{\beta}(k, mt) \left| \frac{k}{m} - t \right|^{\gamma} + \mathcal{M} \sum_{l=0}^{\infty} w_{\beta}(l, ms) \left| \frac{l}{m} - s \right|^{\gamma} \quad (4.7)
\end{aligned}$$

elde edilir. $p = \frac{2}{\gamma}$ ve $q = \frac{2}{2-\gamma}$ eşlenik çifti için yukarıdaki her bir toplama Hölder eşitsizliği uygulanarak,

$$\begin{aligned}
& |P_m^{\beta}(f; t, s) - f(t, s)| \\
& \leq \mathcal{M} \left\{ \left(\sum_{k=0}^{\infty} w_{\beta}(k, mt) \left(\frac{k}{m} - t \right)^2 \right)^{\frac{\gamma}{2}} + \left(\sum_{l=0}^{\infty} w_{\beta}(l, ms) \left(\frac{l}{m} - s \right)^2 \right)^{\frac{\gamma}{2}} \right\} \\
& = \mathcal{M} \left\{ \left(P_{m,1}^{\beta} (e_1 - e_0 t)^2 \right)^{\frac{\gamma}{2}} + \left(P_{m,1}^{\beta} (e_1 - e_0 s)^2 \right)^{\frac{\gamma}{2}} \right\} \\
& = \mathcal{M} \left\{ \left(\frac{\beta^2 t^2}{(1-\beta)^2} + \frac{t}{m(1-\beta)^3} \right)^{\frac{\gamma}{2}} + \left(\frac{\beta^2 s^2}{(1-\beta)^2} + \frac{s}{m(1-\beta)^3} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \right\}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Burada, $P_{m,1}^{\beta}$ tek değişkenli Jain operatörüdür. Böylece, Lemma 3.2 dikkate alınarak, (4.6) elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Uyarı 4.1 β_m ; $0 \leq \beta_m < 1$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = 0$ koşulunu sağlayan bir dizi olsun. $f \in Lip_{\mathcal{M}}^1(\mu, D)$ veya $f \in Lip_{\mathcal{M}}(\gamma, D)$ için, sırasıyla, $D \setminus \{(0, 0)\}$ veya D kümeleri üzerinde aşağıdaki yaklaşım gerçekleşir:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_m^{\beta_m}(f; t, s) = f(t, s).$$

5. ŞEKİL ÖZELLİKLERİ

5.1 Süreklilik Modülünün Korunması

Li (2000); Bernstein polinomlarının, süreklilik modülü fonksiyonunun özelliklerini koruduğunu göstermiştir. Tensör çarpım olmayan çok değişkenli Baskakov operatörleri için benzer sonuç, (Cao vd. 2005) tarafından elde edilmiştir. İki değişkenli Cheney-Sharma operatörleri için benzer sonuç, (Başcanbaz-Tunca vd. 2018) tarafından elde edilmiştir.

Bu kısımda, (3.1) ile verilen P_m^β , $m \in \mathbb{N}$, iki değişkenli Jain operatörlerinin, süreklilik modülünün özelliklerini koruduğu gösterilecektir.

Teorem 5.1 ω bir süreklilik modülü ise her bir $m \in \mathbb{N}$ için $P_m^\beta(\omega)$ de bir süreklilik modülüdür (Akçay ve Başcanbaz-Tunca 2022a).

İspat. $(t, s), (\tau, \sigma) \in D$ ve $(t, s) \leq (\tau, \sigma)$ olsun. Bu durumda, (3.1) tanımından

$$\begin{aligned} & P_m^\beta(\omega; \tau, \sigma) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{m\tau(m\tau + i\beta)^{i-1}}{i!} e^{-(m\tau+i\beta)} \frac{m\sigma(m\sigma + j\beta)^{j-1}}{j!} e^{-(m\sigma+j\beta)} \omega\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

yazılabilir. (2.2) formülünde; $u = mt$, $v = m(\tau - t)$, $m = i$ ve $q = k$ alınarak

$$m\tau(m\tau + i\beta)^{i-1} = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} mt(mt + k\beta)^{k-1} m(\tau - t)[m(\tau - t) + (i - k)\beta]^{i-k-1}$$

yazılabilir. Benzer şekilde, $u = ms$, $v = m(\sigma - s)$, $m = j$ ve $q = l$ alınarak

$$m\sigma(m\sigma + j\beta)^{j-1} = \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} ms(ms + l\beta)^{l-1} m(\sigma - s)[m(\sigma - s) + (j - l)\beta]^{j-l-1}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeler (5.1)'de kullanılarak $P_m^\beta(\omega; \tau, \sigma)$

$$\begin{aligned} & P_m^\beta(\omega; \tau, \sigma) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \binom{i}{k} \frac{1}{i!} mt(mt + k\beta)^{k-1} m(\tau - t)[m(\tau - t) + (i - k)\beta]^{i-k-1} e^{-(m\tau+i\beta)} \\ & \quad \times \binom{j}{l} \frac{1}{j!} ms(ms + l\beta)^{l-1} m(\sigma - s)[m(\sigma - s) + (j - l)\beta]^{j-l-1} e^{-(m\sigma+j\beta)} \omega\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Yukarıdaki toplamların sırası değiştirilerek ve elde edilen sonuçta;
 $i - k = p$ ve $j - l = r$ alınarak

(5.2)

$$\begin{aligned}
& P_m^\beta(\omega; \tau, \sigma) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=l}^{\infty} \frac{mt(mt+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{m(\tau-t)[m(\tau-t)+(i-k)\beta]^{i-k-1}}{(i-k)!} e^{-(m\tau+i\beta)} \\
&\quad \times \frac{ms(ms+l\beta)^{l-1}}{l!} \frac{m(\sigma-s)[m(\sigma-s)+(j-l)\beta]^{j-l-1}}{(j-l)!} e^{-(m\sigma+j\beta)} \omega\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{mt(mt+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{m(\tau-t)[m(\tau-t)+p\beta]^{p-1}}{p!} e^{-[m\tau+(k+p)\beta]} \\
&\quad \times \frac{ms(ms+l\beta)^{l-1}}{l!} \frac{m(\sigma-s)[m(\sigma-s)+r\beta]^{r-1}}{r!} e^{-[m\sigma+(l+r)\beta]} \omega\left(\frac{k+p}{m}, \frac{l+r}{m}\right)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Diğer taraftan, $P_m^\beta(\omega; t, s)$

$$\begin{aligned}
& P_m^\beta(\omega; t, s) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{mt(mt+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-[m(\tau+t-\tau)+k\beta]} \frac{ms(ms+l\beta)^{l-1}}{l!} e^{-[m(\sigma+s-\sigma)+l\beta]} \omega\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, (1.2) ve (1.3) formüllerinden,

$$e^{m(\tau-t)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{m(\tau-t)[m(\tau-t)+p\beta]^{p-1}}{p!} e^{-p\beta}$$

ve

$$e^{m(\sigma-s)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{m(\sigma-s)[m(\sigma-s)+r\beta]^{r-1}}{r!} e^{-r\beta}$$

olduğu açıktır. Yukarıdaki ifadeler son formülde yerine koyularak

$$\begin{aligned}
& P_m^\beta(\omega; t, s) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{mt(mt+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{m(\tau-t)[m(\tau-t)+p\beta]^{p-1}}{p!} e^{-[m\tau+(k+p)\beta]} \\
&\quad \times \frac{ms(ms+l\beta)^{l-1}}{l!} \frac{m(\sigma-s)[m(\sigma-s)+r\beta]^{r-1}}{r!} e^{-[m\sigma+(l+r)\beta]} \omega\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

elde edilir. (5.2) formülünden (5.3) çıkarılarak

$$\begin{aligned}
& P_m^\beta(\omega; \tau, \sigma) - P_m^\beta(\omega; t, s) \\
= & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{mt(mt+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{m(\tau-t)[m(\tau-t)+p\beta]^{p-1}}{p!} e^{-[m\tau+(k+p)\beta]} \\
& \times \frac{ms(ms+l\beta)^{l-1}}{l!} \frac{m(\sigma-s)[m(\sigma-s)+r\beta]^{r-1}}{r!} e^{-[m\sigma+(l+r)\beta]} \\
& \times \left\{ \omega \left(\frac{k+p}{m}, \frac{l+r}{m} \right) - \omega \left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

bulunur. (5.4) formülünde, ω süreklilik modülünün fonksiyonunun alt-toplamsallık özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& P_m^\beta(\omega; \tau, \sigma) - P_m^\beta(\omega; t, s) \\
\leq & e^{mt} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{m(\tau-t)[m(\tau-t)+p\beta]^{p-1}}{p!} e^{-(m\tau+p\beta)} \\
& \times e^{ms} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{m(\sigma-s)[m(\sigma-s)+r\beta]^{r-1}}{r!} e^{-(m\sigma+r\beta)} \omega \left(\frac{p}{m}, \frac{r}{m} \right) \\
= & \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} w_\beta(p, m(\tau-t)) w_\beta(r, m(\sigma-s)) \omega \left(\frac{p}{m}, \frac{r}{m} \right) \\
= & P_m^\beta(\omega; \tau-t, \sigma-s)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Burada, w_β , (1.2) ifadesinde verilen fonksiyondur. Bu sonuç, $P_m^\beta(\omega)$ operatörünün alt-toplamsal olduğunu gösterir. ω süreklilik modülü fonksiyonu azalmayan olduğundan, (5.4) formülünden, $(\tau, \sigma) \geq (t, s)$ iken

$$P_m^\beta(\omega; \tau, \sigma) \geq P_m^\beta(\omega; t, s)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, $P_m^\beta(\omega)$ azalmayandır. $P_m^\beta(\omega)$ operatörlerinin tanımından ve süreklilik modülünün (i) koşulundan

$$P_m^\beta(\omega; 0, 0) = \omega(0, 0) = 0$$

bulunur. Sonuç olarak, her bir $m \in \mathbb{N}$ için $P_m^\beta(\omega)$ bir süreklilik modülüdür. ■

Bu teoremden, $\beta = 0$ durumu, iki değişkenli Szász-Mirakjan operatörleri için Olgun (2012) çalışmasında elde edilen sonucu verir.

5.2 Lipschitz Sınıfının Korunması

Bu kesimde, iki değişkenli Jain operatörlerinin argümanlarıyla Lipschitz sınıfını korumak için, (1.7) formülü ile verilen $\mathcal{D}_m^\beta$ operatörlerinin aşağıdaki iki değişkenli duruma genişlemesi dikkate alınacaktır: $f \in C_B(D)$, $m \in \mathbb{N}$ ve w_β , $0 \leq \beta < 1$, (1.2) ile verilen fonksiyon ve $u(x) = (1 - \beta)x$, $x \geq 0$, olmak üzere,

$$\mathcal{D}_m^\beta(f; t, s) := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} w_\beta(k, mu(t)) w_\beta(l, mu(s)) f\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right), \quad (t, s) \in D \setminus \{(0, 0)\}, \quad (5.5)$$

ve $\mathcal{D}_m^\beta(f; 0, 0) := f(0, 0)$, olarak tanımlanan $\mathcal{D}_m^\beta$ operatörlerinin pozitif ve lineer olduğu açıktır.

Lemma 5.1 $\mathcal{D}_m^\beta$, $m \in \mathbb{N}$, operatörleri için

$$\mathcal{D}_m^\beta(\mathbf{1}; t, s) = 1 \text{ ve } \mathcal{D}_m^\beta(\pi_i; t, s) = \pi_i(t, s), \quad i = 1, 2.$$

gerçeklenir.

İspat. İspat, Lemma (3.1), (1.8) ve $\mathcal{D}_m^\beta$ operatörlerinin (5.5) ile verilen tanımından, açıktır. ■

Aşağıda, $\mathcal{D}_m^\beta$, $m \in \mathbb{N}$, operatörlerinin Lipschitz sürekli fonksiyonların sabitini ve derecesini koruduğu gösterilmektedir:

Teorem 5.2 $f \in Lip_{\mathcal{M}}(\gamma, D)$ ise her bir $m \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{D}_m^\beta(f) \in Lip_{\mathcal{M}}(\gamma, D)$ olur (Akçay ve Başcanbaz-Tunca 2022b).

İspat. $(t, s), (\tau, \sigma) \in D$ ve $(t, s) \leq (\tau, \sigma)$ olsun. Bu durumda, (5.5) ile verilen $\mathcal{D}_m^\beta$ operatörlerinin tanımından, $\mathcal{D}_m^\beta(f; \tau, \sigma) - \mathcal{D}_m^\beta(f; t, s)$ farkı; (5.4) formülünde; t, s ve τ, σ ; sırasıyla, $(1 - \beta)t$, $(1 - \beta)s$ ve $(1 - \beta)\tau$, $(1 - \beta)\sigma$ ile değiştirilerek,

aşağıdaki ifadeye ulaşılır:

$$\begin{aligned}
& \left| \mathcal{D}_m^\beta(f; \tau, \sigma) - \mathcal{D}_m^\beta(f; t, s) \right| \\
\leq & \mathcal{M} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{m(1-\beta)t[m(1-\beta)t+k\beta]^{k-1}}{k!} \\
& \times \frac{m(1-\beta)(\tau-t)[m(1-\beta)(\tau-t)+p\beta]^{p-1}}{p!} \\
& \times \frac{m(1-\beta)s[m(1-\beta)s+l\beta]^{l-1}}{l!} \\
& \times \frac{m(1-\beta)(\sigma-s)[m(1-\beta)(\sigma-s)+r\beta]^{r-1}}{r!} \\
& \times e^{-[m(1-\beta)\tau+(k+p)\beta]} e^{-[m(1-\beta)\sigma+(l+r)\beta]} \left| f\left(\frac{k+p}{m}, \frac{l+r}{m}\right) - f\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right) \right|.
\end{aligned}$$

$f \in Lip_{\mathcal{M}}(\gamma, D)$ olduğundan, yukarıdaki ifade

$$\begin{aligned}
& \left| \mathcal{D}_m^\beta(f; \tau, \sigma) - \mathcal{D}_m^\beta(f; t, s) \right| \\
\leq & \mathcal{M} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m(1-\beta)t[m(1-\beta)t+k\beta]^{k-1}}{k!} e^{-k\beta} \\
& \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{m(1-\beta)(\tau-t)[m(1-\beta)(\tau-t)+p\beta]^{p-1}}{p!} e^{-[m(1-\beta)\tau+p\beta]} \\
& \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{m(1-\beta)s[m(1-\beta)s+l\beta]^{l-1}}{l!} e^{-l\beta} \\
& \times \sum_{r=0}^{\infty} \frac{m(1-\beta)(\sigma-s)[m(1-\beta)(\sigma-s)+r\beta]^{r-1}}{r!} e^{-[m(1-\beta)\sigma+r\beta]} \\
& \times \left[\left(\frac{p}{m}\right)^\gamma + \left(\frac{r}{m}\right)^\gamma \right]
\end{aligned}$$

formuna indirgenir. (1.2) ve (1.3) formüllerinden aşağıdaki gösterimler yazılabilir:

$$\begin{aligned}
e^{m(1-\beta)t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m(1-\beta)t[m(1-\beta)t+k\beta]^{k-1}}{k!} e^{-k\beta}, \\
e^{m(1-\beta)s} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{m(1-\beta)s[m(1-\beta)s+l\beta]^{l-1}}{l!} e^{-l\beta}.
\end{aligned}$$

Bu gösterimler, bir önceki formülde kullanılarak, (1.3)'den

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{D}_m^\beta(f; \tau, \sigma) - \mathcal{D}_m^\beta(f; t, s)| \\
& \leq \mathcal{M} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} w_\beta(p, m(1-\beta)(\tau-t)) w_\beta(r, m(1-\beta)(\sigma-s)) \left[\left(\frac{p}{m}\right)^\gamma + \left(\frac{r}{m}\right)^\gamma \right] \\
& = \mathcal{M} \left[\sum_{p=0}^{\infty} w_\beta(p, m(1-\beta)(\tau-t)) \left(\frac{p}{m}\right)^\gamma + \sum_{r=0}^{\infty} w_\beta(r, m(1-\beta)(\sigma-s)) \left(\frac{r}{m}\right)^\gamma \right] \\
& = \mathcal{M} \left[\mathcal{D}_{m,1}^\beta(e_\gamma; \tau-t) + \mathcal{D}_{m,1}^\beta(e_\gamma; \sigma-s) \right] \tag{5.6}
\end{aligned}$$

sonuca ulaşılır. Şimdi, (5.6) ifadesinde her bir toplama, $q^{-1} + (q')^{-1} = 1$ koşulunu sağlayacak şekilde $q = \frac{1}{\gamma}$ ve $q' = \frac{1}{1-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$ eşlenik çiftleri alınarak, Hölder eşitsizliği uygulanıp (1.8) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{D}_m^\beta(f; \tau, \sigma) - \mathcal{D}_m^\beta(f; t, s)| \\
& \leq \mathcal{M} \left[\left(\mathcal{D}_{m,1}^\beta(e_1; \tau-t) \right)^\gamma + \left(\mathcal{D}_{m,1}^\beta(e_1; \sigma-s) \right)^\gamma \right] \\
& = \mathcal{M} [(\tau-t)^\gamma + (\sigma-s)^\gamma]
\end{aligned}$$

bulunur. Buradaki $\mathcal{D}_{m,1}^\beta$, (1.7) ile verilen tek değişkenli, modifiye Jain operatörleridir. Benzer şekilde, aynı sonuç $(t, s) \geq (\tau, \sigma)$ durumu için elde edilir. Eğer $t \geq \tau$, $s \leq \sigma$ ise

$$\begin{aligned}
|\mathcal{D}_m^\beta(f; \tau, \sigma) - \mathcal{D}_m^\beta(f; t, s)| & \leq |\mathcal{D}_m^\beta(f; t, s) - \mathcal{D}_m^\beta(f; \tau, s)| \\
& \quad + |\mathcal{D}_m^\beta(f; \tau, s) - \mathcal{D}_m^\beta(f; \tau, \sigma)| \\
& \leq \mathcal{M} [(\tau-t)^\gamma + (\sigma-s)^\gamma]
\end{aligned}$$

yazılabilir. Son olarak, $t \leq \tau$, $s \geq \sigma$ durumu için de benzer işlemler yapılarak, istenen sonuç elde edilir. $\gamma = 1$ durumu için sonuç açıktır. Böylece ispat tamamlanır.

■

Teoremden $\beta = 0$ durumu; iki değişkenli Szász-Mirakjan operatörleri için Olgun (2012) tarafından elde edilen benzer sonucu vermektedir.

6. İKİ DEĞİŞKENLİ JAIN OPERATÖRLERİNİN DİZİSİNİN MONOTONLUĞU

Bernstein polinomlarının dizisi, konveks fonksiyon altında artmayandır (bkz. Teorem 1.2). Cheney ve Sharma (1964); $[0, \infty)$ üzerinde konveks bir f fonksiyonu için, $P_{m,1}^0(f)$ Szász-Mirakjan operatörlerinin ve Meyer-König ve Zeller operatörlerinin dizilerinin artmayan olduğunu göstermiştir. İki değişkenli Baskakov operatörlerinin dizisinin konveks fonksiyon altında monotonluğu, Cao vd. (2005) tarafından, iki değişkenli Bernstein tipten operatörler için benzer sonuç, Başcanbaz-Tunca vd. (2018) tarafından ve Jain-Schurer operatörlerinin dizisinin, konveks ve azalmayan fonksiyon altında, artmayan olduğu Çetin ve Başcanbaz-Tunca (2020) tarafından gösterilmiştir. Bu kısımda $m \in \mathbb{N}$ için $P_m^\beta(f)$ iki değişkenli Jain operatörlerinin dizisinin konveks fonksiyon altında monotonluğu incelenecektir.

Teorem 6.1 $f \in C_B(D)$ fonksiyonu konveks ise $P_m^\beta(f)$, m 'ye göre artmayandır (Akçay ve Başcanbaz-Tunca 2022a).

İspat. P_m^β operatörünün (3.1) ile verilen tanımından, $(t, s) \in D \setminus \{(0, 0)\}$ için

$$\begin{aligned} & P_m^\beta(f; t, s) - P_{m+1}^\beta(f; t, s) \\ = & e^t e^s \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{mt(mt+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-[(m+1)t+k\beta]} \frac{ms(ms+l\beta)^{l-1}}{l!} e^{-[(m+1)s+l\beta]} f\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right) \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(m+1)t[(m+1)t+k\beta]^{k-1}}{k!} e^{-[(m+1)t+k\beta]} \\ & \times \frac{(m+1)s[(m+1)s+l\beta]^{l-1}}{l!} e^{-[(m+1)s+l\beta]} f\left(\frac{k}{m+1}, \frac{l}{m+1}\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. (1.2) ve (1.3) formüllerinden, e^t ve e^s aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$e^t = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t(t+r\beta)^{r-1}}{r!} e^{-r\beta}, \quad e^s = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{s(s+p\beta)^{p-1}}{p!} e^{-p\beta}.$$

Yukarıdaki ifadeler son formülde kullanılarak

$$\begin{aligned}
& P_m^\beta(f; t, s) - P_{m+1}^\beta(f; t, s) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t(t+r\beta)^{r-1}}{r!} e^{-r\beta} \frac{mt(mt+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-[(m+1)t+k\beta]} \\
&\quad \times \frac{s(s+p\beta)^{p-1}}{p!} e^{-p\beta} \frac{ms(ms+l\beta)^{l-1}}{l!} e^{-[(m+1)s+l\beta]} f\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(m+1)t[(m+1)t+k\beta]^{k-1}}{k!} e^{-[(m+1)t+k\beta]} \\
&\quad \times \frac{(m+1)s[(m+1)s+l\beta]^{l-1}}{l!} e^{-[(m+1)s+l\beta]} f\left(\frac{k}{m+1}, \frac{l}{m+1}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. k ile $k-r$ ve l ile $l-p$ değiştirilerek, son formül

$$\begin{aligned}
& P_m^\beta(f; t, s) - P_{m+1}^\beta(f; t, s) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=r}^{\infty} \sum_{l=p}^{\infty} \frac{t(t+r\beta)^{r-1}}{r!} e^{-r\beta} \frac{mt[mt+(k-r)\beta]^{k-r-1}}{(k-r)!} e^{-[(m+1)t+(k-r)\beta]} \\
&\quad \times \frac{s(s+p\beta)^{p-1}}{p!} e^{-p\beta} \frac{ms[ms+(l-p)\beta]^{l-p-1}}{(l-p)!} e^{-[(m+1)s+(l-p)\beta]} f\left(\frac{k-r}{m}, \frac{l-p}{m}\right) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(m+1)t[(m+1)t+k\beta]^{k-1}}{k!} e^{-[(m+1)t+k\beta]} \\
&\quad \times \frac{(m+1)s[(m+1)s+l\beta]^{l-1}}{l!} e^{-[(m+1)s+l\beta]} f\left(\frac{k}{m+1}, \frac{l}{m+1}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, toplamaların sırası değiştirilerek,

$$\begin{aligned}
& P_m^\beta(f; t, s) - P_{m+1}^\beta(f; t, s) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=0}^l \frac{t(t+r\beta)^{r-1}}{r!} \frac{mt[mt+(k-r)\beta]^{k-r-1}}{(k-r)!} e^{-[(m+1)t+k\beta]} \\
&\quad \times \frac{s(s+p\beta)^{p-1}}{p!} \frac{ms[ms+(l-p)\beta]^{l-p-1}}{(l-p)!} e^{-[(m+1)s+l\beta]} f\left(\frac{k-r}{m}, \frac{l-p}{m}\right) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(m+1)t[(m+1)t+k\beta]^{k-1}}{k!} e^{-[(m+1)t+k\beta]} \\
&\quad \times \frac{(m+1)s[(m+1)s+l\beta]^{l-1}}{l!} e^{-[(m+1)s+l\beta]} f\left(\frac{k}{m+1}, \frac{l}{m+1}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki formül, daha açık bir ifade ile

$$\begin{aligned}
& P_m^\beta(f; t, s) - P_{m+1}^\beta(f; t, s) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-[(m+1)t+k\beta]} e^{-[(m+1)s+l\beta]} \\
&\quad \times \left\{ \sum_{r=0}^k \sum_{p=0}^l \frac{mt (mt+r\beta)^{r-1} t [t+(k-r)\beta]^{k-r-1}}{r! (k-r)!} \right. \\
&\quad \times \frac{ms (ms+p\beta)^{p-1} s [s+(l-p)\beta]^{l-p-1}}{p! (l-p)!} f\left(\frac{r}{m}, \frac{p}{m}\right) \\
&\quad \left. - \frac{(m+1)t [(m+1)t+k\beta]^{k-1}}{k!} \frac{(m+1)s [(m+1)s+l\beta]^{l-1}}{l!} f\left(\frac{k}{m+1}, \frac{l}{m+1}\right) \right\} \\
&= e^{-(m+1)(t+s)} [f(0,0) - f(0,0)] \\
&\quad + e^{-(m+1)s} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-[(m+1)t+k\beta]} \\
&\quad \times \left\{ \sum_{r=0}^k \frac{mt (mt+r\beta)^{r-1} t [t+(k-r)\beta]^{k-r-1}}{r! (k-r)!} f\left(\frac{r}{m}, 0\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(m+1)t [(m+1)t+k\beta]^{k-1}}{k!} f\left(\frac{k}{m+1}, 0\right) \right\} \\
&\quad + e^{-(m+1)t} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-[(m+1)s+l\beta]} \\
&\quad \times \left\{ \sum_{p=0}^l \frac{ms (ms+p\beta)^{p-1} s [s+(l-p)\beta]^{l-p-1}}{p! (l-p)!} f\left(0, \frac{p}{m}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(m+1)s [(m+1)s+l\beta]^{l-1}}{l!} f\left(0, \frac{l}{m+1}\right) \right\} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-[(m+1)t+k\beta]} e^{-[(m+1)s+l\beta]} \\
&\quad \times \left\{ \sum_{r=0}^k \sum_{p=0}^l \frac{mt (mt+r\beta)^{r-1} t [t+(k-r)\beta]^{k-r-1}}{r! (k-r)!} \right. \\
&\quad \times \frac{ms (ms+p\beta)^{p-1} s [s+(l-p)\beta]^{l-p-1}}{p! (l-p)!} f\left(\frac{r}{m}, \frac{p}{m}\right) \\
&\quad \left. - \frac{(m+1)t [(m+1)t+k\beta]^{k-1}}{k!} \frac{(m+1)s [(m+1)s+l\beta]^{l-1}}{l!} f\left(\frac{k}{m+1}, \frac{l}{m+1}\right) \right\} \\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

olarak düzenlenebilir. Burada, w_β , (1.2) ile verilen formül olmak üzere, I_1 , I_2 ve I_3 aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
I_1 &: = e^{-(m+1)s} \sum_{k=1}^{\infty} w_\beta(k, (m+1)t) \\
&\quad \times \left\{ \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \frac{mt(mt+r\beta)^{r-1} t [t + (k-r)\beta]^{k-r-1}}{(m+1)t[(m+1)t+k\beta]^{k-1}} f\left(\frac{r}{m}, 0\right) - f\left(\frac{k}{m+1}, 0\right) \right\}, \\
I_2 &: = e^{-(m+1)t} \sum_{l=1}^{\infty} w_\beta(l, (m+1)s) \\
&\quad \times \left\{ \sum_{p=0}^l \binom{l}{p} \frac{ms(ms+p\beta)^{p-1} s [s + (l-p)\beta]^{l-p-1}}{(m+1)s[(m+1)s+l\beta]^{l-1}} f\left(0, \frac{p}{m}\right) - f\left(0, \frac{l}{m+1}\right) \right\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
I_3 &: = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} w_\beta(k, (m+1)t) w_\beta(l, (m+1)s) \\
&\quad \times \left\{ \sum_{r=0}^k \sum_{p=0}^l \binom{k}{r} \binom{l}{p} \frac{mt(mt+r\beta)^{r-1} t [t + (k-r)\beta]^{k-r-1}}{(m+1)t[(m+1)t+k\beta]^{k-1}} \right. \\
&\quad \times \left. \frac{ms(ms+p\beta)^{p-1} s [s + (l-p)\beta]^{l-p-1}}{(m+1)s[(m+1)s+l\beta]^{l-1}} f\left(\frac{r}{m}, \frac{p}{m}\right) - f\left(\frac{k}{m+1}, \frac{l}{m+1}\right) \right\}.
\end{aligned}$$

Şimdi, I_1 , I_2 ve I_3 ifadelerinin negatif olmadığı gösterilmelidir.

I_1 için,

$$\alpha_r := \binom{k}{r} \frac{mt(mt+r\beta)^{r-1} t [t + (k-r)\beta]^{k-r-1}}{(m+1)t[(m+1)t+k\beta]^{k-1}} \geq 0 \quad (6.1)$$

ve $r = 0, 1, \dots, k$ olmak üzere, f fonksiyonunun bağımsız değişkenleri olarak

$$\left(\frac{r}{m}, 0\right) \in D$$

noktaları alınsın. Aynı zamanda, (2.2) formülünde $u = mt$, $v = t$, $m = k$ ve $q = r$ alınırsa

$$(m+1)t[(m+1)t+k\beta]^{k-1} = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} mt(mt+r\beta)^{r-1} t [t + (k-r)\beta]^{k-r-1}$$

bulunur ve buradan,

$$\sum_{r=0}^k \alpha_r = 1$$

sağlanır. Diğer taraftan, vektörlerin toplama ve skaler ile çarpma özelliklerinden,

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^k \alpha_r \left(\frac{r}{m}, 0 \right) \\
&= \left(\sum_{r=1}^k \binom{k}{r} \frac{mt (mt + r\beta)^{r-1} t [t + (k-r)\beta]^{k-r-1}}{(m+1)t [(m+1)t + k\beta]^{k-1}} \frac{r}{m}, 0 \right) \\
&= \left(\sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} \frac{kmt (mt + \beta + r\beta)^r t [t + (k-r-1)\beta]^{k-r-2}}{m(m+1)t [(m+1)t + k\beta]^{k-1}}, 0 \right) \\
&= \left(\frac{k}{m+1} \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} \frac{(mt + \beta + r\beta)^r t [t + (k-r-1)\beta]^{k-r-2}}{[(m+1)t + k\beta]^{k-1}}, 0 \right) \\
&= \left(\frac{k}{m+1}, 0 \right)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada, $u = mt + \beta$, $v = t$, $q = r$ ve $m = k - 1$ alınarak, (2.1) formülü kullanılmıştır:

$$[(m+1)t + k\beta]^{k-1} = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} (mt + \beta + r\beta)^r t [t + (k-r-1)\beta]^{k-r-2}.$$

Böylece, f fonksiyonunun konveksliğinden

$$\sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \frac{mt (mt + r\beta)^{r-1} t [t + (k-r)\beta]^{k-r-1}}{(m+1)t [(m+1)t + k\beta]^{k-1}} f\left(\frac{r}{m}, 0\right) \geq f\left(\frac{k}{m+1}, 0\right)$$

elde edilir ve $I_1 \geq 0$ sonucuna ulaşılır.

$I_2 \geq 0$ için, benzer şekilde

$$\gamma_p = \binom{l}{p} \frac{ms (ms + p\beta)^{p-1} s [s + (l-p)\beta]^{l-p-1}}{(m+1)s [(m+1)s + l\beta]^{l-1}} \geq 0 \quad (6.2)$$

ve $p = 0, 1, \dots, l$ için

$$\left(0, \frac{p}{m}\right) \in D$$

alınır, (2.2) formülünde $u = ms$, $v = s$, $m = l$ ve $q = p$ alınarak

$$(m+1)s [(m+1)s + l\beta]^{l-1} = \sum_{p=0}^l \binom{l}{p} ms (ms + p\beta)^{p-1} s [s + (l-p)\beta]^{l-p-1}$$

ifadesi yazılabilir. Buradan,

$$\sum_{p=0}^l \gamma_p = 1$$

olur. Yukarıdaki işlemlere benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=0}^l \gamma_p \left(0, \frac{p}{m}\right) \\
&= \left(0, \sum_{p=0}^l \binom{l}{p} \frac{ms (ms + p\beta)^{p-1} s [s + (l-p)\beta]^{l-p-1} \frac{p}{m}}{(m+1)s [(m+1)s + l\beta]^{l-1}}\right) \\
&= \left(0, \sum_{p=0}^{l-1} \binom{l-1}{p} \frac{kms (ms + \beta + p\beta)^p s [s + (l-p-1)\beta]^{l-p-2}}{m(m+1)s [(m+1)s + l\beta]^{l-1}}\right) \\
&= \left(0, \frac{l}{m+1} \sum_{p=0}^{l-1} \binom{l-1}{p} \frac{(ms + \beta + p\beta)^p s [s + (l-p-1)\beta]^{l-p-2}}{[(m+1)s + l\beta]^{l-1}}\right) \\
&= \left(0, \frac{l}{m+1}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $u = ms + \beta$, $v = s$, $q = p$ ve $m = l - 1$, alınarak (2.1), formülü kullanılmıştır:

$$[(m+1)s + l\beta]^{l-1} = \sum_{p=0}^{l-1} \binom{l-1}{p} (ms + \beta + p\beta)^p s [s + (l-p-1)\beta]^{l-p-2}.$$

f fonksiyonunun konveksliğinden

$$\sum_{p=0}^l \binom{l}{p} \frac{ms (ms + p\beta)^{p-1} s [s + (l-p)\beta]^{l-p-1}}{(m+1)s [(m+1)s + l\beta]^{l-1}} f\left(0, \frac{p}{m}\right) \geq f\left(0, \frac{l}{m+1}\right)$$

elde edilir ve $I_2 \geq 0$ sonucuna ulaşılır.

Son olarak, I_3 için, α_r ve γ_p , sırası ile, (6.1) ve (6.2) formülleri ile verilen ifadeler olmak üzere,

$$\sum_{r=0}^k \left(\alpha_r \sum_{p=0}^l \gamma_p \right) = 1$$

olacak şekilde

$$\alpha_r \sum_{p=0}^l \gamma_p \geq 0, \quad r = 0, 1, \dots, k$$

negatif olmayan sabitler ve $\left(\frac{r}{m}, \frac{p}{m}\right) \in D$ noktaları için, f fonksiyonunun konveksliğinden,

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \frac{mt (mt + r\beta)^{r-1} t [t + (k-r)\beta]^{k-r-1}}{(m+1)t [(m+1)t + k\beta]^{k-1}} \\
& \times \sum_{p=0}^l \binom{l}{p} \frac{ms (ms + p\beta)^{p-1} s [s + (l-p)\beta]^{l-p-1}}{(m+1)s [(m+1)s + l\beta]^{l-1}} f\left(\frac{r}{m}, \frac{p}{m}\right) \\
& \geq f\left(\sum_{r=0}^k \sum_{p=0}^l \binom{k}{r} \binom{l}{p} \frac{mt (mt + r\beta)^{r-1} t [t + (k-r)\beta]^{k-r-1}}{(m+1)t [(m+1)t + k\beta]^{k-1}} \right. \\
& \quad \left. \times \frac{ms (ms + p\beta)^{p-1} s [s + (l-p)\beta]^{l-p-1}}{(m+1)s [(m+1)s + l\beta]^{l-1}} \left(\frac{r}{m}, \frac{p}{m}\right) \right) \\
& = f\left(\frac{k}{m+1}, \frac{l}{m+1}\right)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan, $I_3 \geq 0$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Consul ve Jain (1972); $0 < \alpha < \infty$ ve $|\beta| < 1$ olmak üzere,

$$\omega_{\beta}(k, \alpha) := \frac{\alpha(\alpha + k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(\alpha+k\beta)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

şeklinde, Genelleştirilmiş Poisson dağılımını inşâ etmiştir. Genelleştirilmiş Poisson dağılımının, istatistiksel hesaplamalar açısından avantajlı ve birçok farklı veri türüne çok iyi bir uyum sağladığını göstermişlerdir.

Jain (1972); $\omega_{\beta}(k, \alpha)$ formülünde; $0 \leq \beta < 1$, $\alpha = mt$, $t > 0$, alarak,

$$P_{m,1}^{\beta}(f; t) := P_m^{[\beta]}(f; t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{\beta}(k, mt) f\left(\frac{k}{n}\right), & t > 0, m \in \mathbb{N}, \\ f(0) & t = 0, \end{cases}$$

Jain operatörlerini, seriyi yakınsak yapacak şekildeki $f \in C[0, \infty)$ fonksiyonları için, tanımlamıştır.

Bu tezde, pozitif lineer Jain operatörlerinin iki değişkenli genişlemesi tanımlanarak, bâzı yaklaşım ve şekil koruma özellikleri incelenmiştir. Szász-Mirakjan operatörlerinin " $[0, \infty)$ aralığındaki konveks fonksiyonlar altında m 'ye göre artmayan" olma özelliği (Cheney ve Sharma 1964), iki değişkenli Jain operatörleri için de araştırılmıştır ve, benzer şekilde, iki değişkenli Jain operatörlerinin de konveks fonksiyon altında m 'ye göre artmayan olduğu ispatlanmıştır. Li (2000), " ω bir süreklilik modülü ise her bir m için $B_m(\omega)$ Bernstein operatörünün de bir süreklilik modülü" olduğunu göstermiştir. Benzer sonuç, çok değişkenli Baskakov operatörleri için Cao vd. (2005) tarafından elde edilmiştir. Bu çalışmada, " ω bir süreklilik modülü iken her bir m için $P_m^{\beta}(\omega)$ iki değişkenli Jain operatörünün de bir süreklilik modülü" olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca, iki değişkenli Jain operatörleri için, Voronovskaja tipten bir teorem verilmiştir. Bahsedilen sonuçlar, "On Bivariate Jain Operators" başlıklı makalede yayımlanmıştır (Akçay ve Başcanbaz-Tunca 2022a).

Szász (1950), Lipschitz tipten bir sınıf tanımlamıştır ve bu sınıftan olan fonksiyonlara Szász-Mirakjan operatörleri ile yaklaşımın oranı için bir üst sınır elde etmiştir. Bu çalışmada, Szász'ın, bu sonucu, iki değişkenli Jain operatörleri için genelleştirilmesi amaçlanarak, iki değişkenli fonksiyonlar için Lipschitz tipten bir sınıf tanımlanmış ve

bu sınıftan olan fonksiyonlara, iki değişkenli Jain operatörleri ile yaklaşımın hatası için bir üst eşitsizlik elde edilmiştir. Ayrıca, benzer bir sonuç, klâsik Lipschitz sınıfı için de elde edilmiştir. Doğru vd. (2016), tek değişkenli Jain operatörlerini, lineer fonksiyonları koruyacak şekilde düzenlemiş ve çalışmışlardır. Bu tez çalışmasında, modifiye Jain operatörlerinin iki değişkenli duruma genişletilmesinin, Lipschitz sınıfını koruduğu gösterilmiştir. Son olarak, iki değişkenli Jain operatörlerinin dizisinin ağırlıklı uzaylarda düzgün yaklaşımı, Gadzhiev'in (1980) teorisi kullanılarak çalışılmıştır. Bahsedilen sonuçlar, "Approximation Properties of Bivariate Jain Operators" başlıklı makalede yayımlanmıştır (Akçay ve Başcanbaz-Tunca 2022b).

Jain operatörlerinin dayandığı genelleştirilmiş Poisson dağılımı, yaşayan organizmalarla ilgili ölçümlerde, Poisson, binom ve negatif binom dağılımlarına göre daha iyi sonuçlar verir. Örneğin; bakterileri, kan hücrelerini, böcekleri, hayvanları, kuşları ve balıkları içeren çalışmalarda, ortak bir tehlikeye ya da bir düşmana saldırmak veya kendini savunmak için kümelenme biçimi gibi psikolojik tepkilerin davranışlar üzerindeki etkisi kolayca görselleştirebilir. Aynı etki, hayvanlar veya insanlar farklı hastalıkların virüsleri tarafından saldırıya uğradığında ve zamanla kan hücreleri bu hastalıklara karşı bir çeşit bağışıklık geliştirdiğinde de gözlenebilir. Devamlı ilaç veya antibiyotik kullanımı da insanların kan hücrelerinde benzer bir davranış yaratır ve bu ilaçlar etkisiz hale geliyor gibi görünür. Haight (1967) tarafından sunulan, Biyoloji, Ekoloji ve Tıp alanındaki sayısal çalışmalar, bu tür dağılımların tam olarak Poisson dağılımı olmadığını göstermiştir ve Poisson dağılımının çeşitli modifikasyonları veya genelleştirmeleri ile açıklanmıştır. Sadece iki parametreye sahip olan ve varyansta ortalamadan daha fazla değişiklik yapma kabiliyetine sahip olan genelleştirilmiş Poisson dağılımı, bu tür biyometrik çalışmalarda daha uygun bulunmuştur.

Daha genel bir bakış açısıyla düşünülürse, yaklaşım teoriyi incelemek için; bilgisayar hesaplamalarında, fonksiyonları temsil etme ihtiyacından, matematiğine ilgi duymaya kadar değişen birçok sebep vardır. Yaklaşım teorisinin bir kısmı son derece özel ve soyut kavramlar olmasına rağmen, yaklaşım algoritmaları çeşitli bilimlerde, endüstriyel ve ticari alanlar gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Nümerik analizde ve matematiksel yazılımlarda çalışmak, bu soyut ve somut iki uç nokta arasındaki ana bağlantılardan biri kabul edilebilir. Çünkü, çağımızda genel amaç, yaklaşım

hesaplamaları gibi fayda sağlayacak konularda, bilgisayar kullanıcılarına verimli programlar sağlamaktır.

Ayrıca, genelleştirilmiş Poisson dağılımının, konvolüsyon özelliğini sağlaması sebebiyle, genelleştirilmiş Poisson dağılımına dayanan Jain operatörleri ve çeşitli modifikasyonlarının, yaklaşım teorisinin birçok alanında olduğu gibi, matematik, mühendislik, tıp, istatistik olasılık, fizik, sinyal işleme ve görüntü işleme gibi birçok farklı alan ile bağlantılar kurarak farklı uygulamalarda kullanılabileceği öngörülmektedir.



KAYNAKLAR

- Abel, U., Agratini, O. 2016. Asymptotic behaviour of Jain operators. *Numer. Algorithms.*, 71, 553-565.
- Agratini, O. 2013. Approximation properties of a class of linear operators. *Math. Methods Appl. Sci.*, 36, 2353-2358.
- Agratini, O. 2014. On an approximation process of integral type. *Appl. Math. Comput.* 236, 195-201.
- Agratini, O. 2018. A stop over Jain operators and their generalizations. *An. Univ. Vest Timiș. Ser. Mat.-Inform.*, 56, no. 2, 28-42.
- Agratini, O., Doğru, O. 2021. Kantorovich-type operators associated with a variant of Jain operators. *Stud. Univ. Babeș-Bolyai Math.*, 66, no. 2, 279-288.
- Akçay, M., Başcanbaz-Tunca, G. 2022a. On bivariate Jain operators. *Math. Found. Comput.*, 5(3), 173-185.
- Akçay, M., Başcanbaz-Tunca, G. 2022b. Approximation properties of bivariate Jain operators. *An. Univ. Oradea Fasc. Mat.*, 29, no. 1, 135-143.
- Altomare, F. and Campiti, M. 1994. *Korovkin-Type Approximation Theory and Its Applications*. De Gruyter, Berlin-New York.
- Altomare, F. 2010. Korovkin-type Theorems and Approximation by Positive Linear Operators. *Surveys in Approximation Theory* vol. 5, pp. 92-64.
- Arama, O. 1957. Properties concerning the monotonicity of the sequence of polynomials of interpolation of S. N. Bernstein and their application to the study of approximation of functions. *Studii Cercetări Matematică Acad. R.P.R., Cluj* 8, 195-210 (in Rumanian), also, *Mathematics (Cluj)Z* (25) (1960), 25-40 (in Russian).
- Bardaro, C., Mantellini, I. 2017. On pointwise approximation properties of multivariate semi-discrete sampling type operators. *Results Math.*, 72, 1449-1472.
- Başcanbaz-Tunca, G., Bodur, M., Söylemez, D. 2018. On Lupaş-Jain operators. *Stud. Univ. Babeș-Bolyai Math.* 63, no. 4, 525-537.
- Başcanbaz-Tunca, G., Erençin, A. and İnce, H. G. 2018. Bivariate Cheney-Sharma operators on simplex. *Hacet. J. Math. Stat.* 47, no. 4, 793-804.
- Bernstein, S. N. 1912. Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Comm. Soc. Math. Kharkow* (2), 13, 1-2.
- Bhardwaj, N., Deo, N. 2016. Quantitative estimates for generalized two dimensional Baskakov operators. *Korean J. Math.*, 24, no. 3, 335-344.
- Bodur, M., Taşdelen, F., Başcanbaz Tunca, G. 2018. On multivariate Lupaş operators. *Hacet. J. Math. Stat.*, 47, no. 4, 783-792.

- Bohman, H. 1952. On approximation of continuous and analytic functions. *Ark. Math.*, 2, 43-46.
- Brown, B. M., Elliott, D., Paget, D. F. 1987. Lipschitz constants for the Bernstein polynomials of a Lipschitz continuous function. *J. Approx. Theory.*, vol. 49., no. 2, 196-199.
- Butzer, P. L., Nessel, R. J., 1971. *Fourier Analysis and Approximation*. Birkhäuser Verlag, Basel, and Academic Press, vol. 1, 553 p., New York.
- Cao, F., Ding, C., Xu, Z. 2005. On multivariate Baskakov operator. *J. Math. Anal. Appl.*, 307. no.1, 274-291.
- Cheney, E. W., Charma, A. 1964. Bernstein power series. *Can. J. Math.*, 16, 241-252.
- Consul, P.C., Jain, G.C. 1972. A generalization of the Poisson distribution. *Technometrics*, 15, 791-799.
- Consul, P.C., Jain, G.C. 1973. On some interesting properties of the generalized Poisson distribution. *Biom. Z.*, vol. 15, 7, 495-500.
- Çetin, N., Başcanbaz-Tunca, G. 2020. Approximation by Jain-Schurer operators. *Facta Univ. Ser. Math. Inform.*, 35, no. 5, 1343-1356.
- Deniz, E. 2016. Quantitative estimates for Jain-Kantorovich operators. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Sér. A1 Math. Stat.*, 65, no. 2, 121-132.
- DeVore, R.A., Lorentz, G.G. 1993. *Constructive Approximation*. Springer, Berlin.
- Dhamija, M., Deo, N. 2016. Jain-Durrmeyer operators associated with the inverse Pólya-Eggenberger distribution. *Appl. Math. Comput.*, 286, 15-22.
- Ditzian, Z. and Totik, V. 1987. *Moduli of Smoothness*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, New York, vol. 9, 55-74.
- Doğru, O., Mohapatra, R.N., Örkücü, M. 2016. Approximation properties of generalized Jain operators. *Filomat*, vol. 30., no. 9, 2359-2366.
- Farcaş, A. 2012. An asymptotic formula for Jain's operators. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, vol. 57, no. 4, 511-517.
- Farcaş, 2013. A. An approximation property of the generalized Jain's operators of two variables. *Math. Sci. Appl. E-Notes*, 1, no. 2, 158-164.
- Gadzhiev, A.D. 1974. The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogous to that of P. P Korovkin. *Sov. Math., Dokl.* 15(5), 1433-1436.
- Gadzhiev, A.D. 1980. Positive linear operators in weighted spaces of functions of several variables (Russian). *Izv. Akad. Nauk Azerb. SSR Ser. Fiz-Tekhn. Mat. Nauk.* vol. 1, 32-37.

- Garg, T., Agrawal, P.N., Kajla, A. 2018. Jain-Durrmeyer operators involving inverse Pólya-Eggenberger distribution. *Proceedings of the National Academy of Sciences, India, Section A*, 89, 547-557.
- Gupta, V., Agarwal, R. P., Verma, D. K. 2013. Approximation for a new sequence of summation-integral type operators. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 23, no. 1, 35-42.
- Gupta, V., Greubel, G.C. 2015. Moment estimations of new Szász-Mirakjan-Durrmeyer operators. *Appl. Math. Comput.* 271, 540-547.
- Gupta, V., Rassias, T.M. 2015. Direct estimates for certain Szász type operators. *Appl. Math. Comput.* 251, 469-474.
- Gupta, V. and Tachev, G. 2017. *Approximation with Positive Linear Operators and Linear Combinations*. Springer, vol. 50.
- Haight, F.A., 1967. *Handbook of the Poisson Distribution*. John Wiley & Sons, New York.
- Hardy, G.H., Littlewood, J. E., Pólya, G. 1934. *Inequalities*. 2nd ed. Cambridge University Press, London.
- Jain, G. C. 1972. Approximation of functions by a new class of linear operators. *J. Aust. Math. Soc.*, vol. 13, no. 3, 271-276.
- Khan, R.A. 2002. A bivariate extension of Bleimann-Butzer-Hahn operator. *Approx. Theory Appl. (N.S.)*, 18, no.1, 90-100.
- Khan, M. K., Peters, M. A. 1989. Lipschitz constants for some approximation operators of a Lipschitz continuous function. *J. Approx. Theory*, 59, no. 3, 307-315.
- Korovkin, P. P. 1953. Convergence of linear positive operators in the spaces of continuous functions (Russian). *Doklady Akad. Nauk. SSSR (N.S.)*, 90, 961-964.
- Li, Z. 2000. Bernstein polynomials and modulus of continuity. *J. Approx. Theory*, 102, no. 1, 171-174.
- Lindvall, T. 1982. Bernstein polynomials and the law of large numbers. *Math. Sci.* 7, no. 2, 127-139.
- Lorentz, G. G. 1953. *Bernstein Polynomials*. University of Toronto Press, Toronto.
- Lupaş, A. 1995. The approximation by some positive linear operators, In: *Proceedings of the International Dortmund Meeting on Approximation Theory (IDoMAT 95)*-edited by M.W. Muller, M. Felten, D.H. Mache, Mathematical Research, Vol.86, pp.201-229, Akademie Verlag, Berlin.
- Mhaskar, H.N. and Pai, D.V. 2000. *Fundamentals of approximation theory*. CRC Press, Boca Raton, FL, Narosa Publishing House, New Delhi.
- Mirakjan, G.M. 1941. Approximation of continuous functions with the aid of polynomials. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 31, 201-205.

- Olgun, A. 2012. Some properties of the multivariate Szász operators. C. R. Acad. Bulg. Sci., 65, no. 2, 139-146.
- Olgun, A., Taşdelen, F., Erençin, A. 2015. A generalization of Jain's operators. Appl. Math. Comput., 266, 6-11.
- Özarslan, M.A. and Aktuğlu H. 2013. Quantitative global estimates for generalized double Szász-Mirakjan operators. J. Appl. Math. 13, Article ID 613258.
- Özarslan, M. A. 2016. Approximation properties of Jain-Stancu operators. Filomat, 30, no. 4, 1081-1088.
- Paltanea, R. 2004. Approximation Theory Using Positive Linear Operators. Birkhäuser Basel.
- Phillips, G. M. 2003. Interpolation and Approximation by Polynomials. Springer, New York, USA.
- Rempulska, L., Skorupka, M. 1998. On Szász-Mirakyan operators of functions of two variables. Matematiche, 53, no. 1, 51-60.
- Schoenberg, I. J. 1959. On variation diminishing approximation methods. On numerical approximation, 249-274.
- Schurer, F. 1965. On Linear positive operators in approximation theory, Thesis Delft.
- Sikkema, P. C. 1970. On some linear positive operators. Indag. Math., 32, 327-337.
- Stancu, D. D., Stoica, E. I. 2009. On the use Abel-Jensen type combinatorial formulas for construction and investigation of some algebraic polynomial operators of approximation. Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 54, no. 4, 167-182.
- Szász, O. 1950. Generalization of S. Bernsteins polynomials to the infinite interval. J. Res. Natl. Bur. Stand. (U. S.), vol. 45, no. 3, 239-245.
- Tarabie, S. 2012. On Jain-Beta linear operators. Appl. Math. Inf. Sci., 6, no. 2, 213-216.
- Umar, S., Razi, Q. 1985. Approximation of function by a generalized Szász operators. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Sér. A1 Math. Stat., 34, 45-52.
- Volkov, V.I. 1957. On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.), 115(1), 17-19.
- Voronovskaja, E. V. 1932. Détermination de la forme asymptotique de l'approximation des fonctions par les polynômes de M. Bernstein (Russian). C.R. Acad. Sc. URSS. 79-85.
- Walczak, Z. 2000. On certain modified Szász-Mirakjan operators for functions of two variable. Demonstr. Math. XXXIII(1), 92-100.

Weierstrass, K. G. 1885. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. 633-639 and 789-805. (An expanded version of this paper with ten additional pages also appeared in *Mathematische Werke*, Vol. 3, 1-37, Mayer and Müller, Berlin, 1903), *Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin*.

