



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



GENELLEŞTİRİLMİŞ TANAKA-WEBSTER
KONNEKSİYONUNA SAHİP NEREDEYSE
KENMOTSU MANİFOLDLAR

Şeyma Ülkü SEVİNÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ekim-2022
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Şeyma Ülkü SEVİNÇ

Tarih: 10.10.2022

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ TANAKA-WEBSTER KONNEKSİYONUNA SAHİP NEREDEYSE KENMOTSU MANİFOLDLAR

Şeyma Ülkü SEVİNÇ

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nesip AKTAN

2022, 38 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Nesip AKTAN

Doç. Dr. Fatma ATEŞ

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIRIM

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel kavramlardan söz edilmiştir. Üçüncü bölümde, neredeyse Kenmotsu manifoldlar ile ilgili temel özellikler verilmiştir. Dördüncü bölümde, genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonu tanıtıldıktan sonra sözü edilen bu konneksiyona sahip neredeyse Kenmotsu manifoldlar ve bazı eğrilik koşulları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Conccircular eğrilik tensörü, Einstein manifoldu, g-Tanaka-Webster konneksiyon, Kenmotsu manifoldu, Ricci tensör

ABSTRACT

MS THESIS

NEARLY KENMOTSU MANIFOLDS ADMITTING GENERALIZED TANAKA-WEBSTER

Şeyma Ülkü SEVİNÇ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Title Prof. Dr. NESİP AKTAN

2022, 38 Pages

Jury

Prof. Dr. Nesip AKTAN

Doç. Dr. Fatma ATEŞ

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIRIM

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction and a general literature information is given. In the second part, necessary basic concepts are mentioned. In the third chapter, the basic properties of almost Kenmotsu manifolds are given. In the fourth chapter, after the generalized Tanaka-Webster connection is introduced, almost Kenmotsu manifolds with this connection and some curvature conditions are examined.

Keywords: Conircular curvature tensor, Einstein manifoldu, g-Tanaka Webster connection, Kenmotsu manifold, Ricci tensor.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim ve bu seminer çalışmasının hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Nesip AKTAN'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili eşime ve aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Şeyma Ülkü SEVİNÇ
KONYA-2022

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1. Riemann Manifoldlar.....	4
2.2. Hemen Hemen Değme Manifoldlar.....	8
3. NEREDEYSE KENMOTSU MANİFOLDLAR.....	18
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ TANAKA WEBSTER KONNEKSİYONUNA SAHİP NEREDEYSE KENMOTSU MANİFOLDLARI ÜZERİNDE BAZI EĞRİLİK KOŞULLARI	20
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	34
6. KAYNAKLAR.....	36

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

M	Manifold
g	Metrik tensör
$\chi(M)$	Vektör alanlarının uzayı
$\bar{\nabla}$	Tanaka-Webster konneksiyon
∇	Levi-Civita konneksiyon
$\bar{T}$	Torsiyon tensörü
R	Riemann eğrilik tensörü
$\bar{R}$	$\bar{\nabla}$ konneksiyonuna göre Riemann eğrilik tensörü
S	Ricci tensörü
$\bar{S}$	$\bar{\nabla}$ konneksiyonuna göre Ricci tensörü
r	Skaler eğrilik
$\bar{r}$	$\bar{\nabla}$ konneksiyonuna göre skaler eğrilik
Z	Concircular eğrilik tensörü
$\bar{Z}$	$\bar{\nabla}$ konneksiyonuna göre concircular eğrilik tensörü

1. GİRİŞ

Değme geometri iki yüzyıl önce, Huygens, Hamilton ve Jakobi'nin geometrik optikler üzerinde çalışmalarıyla doğmuştur. Sophus Lie, Elie Carton, Darboux gibi önemli matematikçilerin bu alanda çalışmaları olmuştur. Değme geometrinin köklerine 1872'de rastlamak mümkündür. Lie'nin değme transformasyonu diferensiyel denklem sistemleri çalışmalarında geometrik bir araç olarak kullanmıştır. Değme geometride optik, termodinamik, mekanik uygulamalarına rastlanmaktadır [23].

1940'larda, Ehresmann ve Hopf neredeyse değme manifoldları ortaya koymuştur; bunlar her bir tanjant uzaydaki düzgün lineer kompleks yapılar ile donanımlı çift boyutlu manifoldlardır [14].

Değme Riemann manifoldlar farklı bilim alanlarında da uygulamaları olan geniş bir kitle tarafından çalışılan bir konudur. Konu hakkındaki en önemli kaynak, Blair' in "Riemannian Geometry of contact and symplectic manifolds" adlı kitabıdır. Konu, simplektik geometri ve karmaşık geometri ile de yakından ilgilidir. Değme formun sıfır olduğu yatay alt demet üzerinde, değme formun diferansiyeli simplektik form verir. Değme Riemann yapıdaki tensör, yine yatay alt demet üzerinde hemen hemen karmaşık yapı verir. Değme manifold tanımlandıktan sonra, genel yaklaşım hemen hemen değme yapıları çalışmaktır [3].

Neredeyse değme manifoldlar, simplektik manifoldlar ve birçok matematik ve fizik uygulaması ile yakından ilişkilidir [4]. Diğer taraftan, tek boyutlularda, neredeyse değme manifoldlar Boothby ve Wang tarafından 1950'lerde ortaya konmuştur [6].

1969 yılında S. Tanno [38], otomorfizm grupları maksimum boyuta sahip olan, bağlantılı, neredeyse değme metrik manifoldları üç sınıfa ayırmıştır. Bu durumda c sabit φ –kesitsel eğriliği olmak üzere;

- Eğer $c > 0$ ise; Riemann manifoldunun sabit φ –kesitsel eğriliğine sahip bir homojen Sasakian manifoldu olduğunu,
- $c = 0$ ise ; Riemann manifoldunun sabit φ –kesitsel eğriliğe sahip Kaehler manifoldu ile bir çemberin yada bir doğrunun çarpım manifoldu olduğunu,

- $c < 0$ ise ; Riemann manifoldunun reel eksen ile kompleks düzlemin katlı çarpımından oluştuğunu göstermiştir.

Kenmotsu [20], çalışmalarında Tanno'nun bu ayrımlarını tüm yönleriyle inceleyerek, günümüzde Kenmotsu manifold olarak adlandırılan , hemen hemen değme metrik manifoldlarının yeni bir sınıfını tanımlamıştır.

$(2n + 1)$ boyutlu $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme metrik manifoldu,

$$(\nabla_X \varphi)Y + (\nabla_Y \varphi)X = -\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y$$

koşulunu sağlıyorsa bu manifolda neredeyse Kenmotsu manifold denir [20]. Buradaki ∇ , Levi-Civita konneksiyonudur. Açıkça görülür ki her Kenmotsu manifold bir neredeyse Kenmotsu manifolddur, ancak tersi doğru değildir. Eğer neredeyse Kenmotsu manifold bir Kenmotsu manifold değil ise buna strict neredeyse Kenmotsu manifoldu denir [26].

Kenmotsu manifoldlar ve neredeyse Kenmotsu manifoldlar üzerinde günümüze kadar birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları ([12], [18], [24], [26], [30], [32]) dır.

Tanaka-Webster konneksiyonu ilk kez Tanno[38] tarafından ortaya atılmıştır. Tanaka-Webster konneksiyonu, 1970'lerin sonunda Tanaka[37] tarafından ve Tanaka'dan bağımsız olarak da Webster[41] tarafından tanımlanmış olan ve iyi bilinen konneksiyonun bir genelleştirilmişidir. Bu konneksiyon, CR -yapısının integrallenebilmesi koşuluyla Tanaka–Webster konneksiyonu ile çakışmaktadır. Tanaka-Webster konneksiyonu, dejenere olmayan, pseudo-Harmitian CR -manifoldunda kanonik(doğal) afin konneksiyon olarak tanımlanır.

Cho [9, 10] Tanno'nun g -Tanaka–Webster konneksiyonunu sıfırdan farklı k reel sayısı için, Kaehler manifoldunun, (φ, ξ, η, g) hemen hemen değme yapısına sahip reel hiperyüzeylerinde inceledi. Yapılan çeşitli çalışmalarda, g -Tanaka-Webster konneksiyonu kullanılarak, kompleks uzay formlarında reel hiperyüzeylerin bazı karakterizasyonları incelenmiştir[36]. Son zamanlarda Bilal[29] ve arkadaşları, Kenmotsu manifoldlarında g -Tanaka–Webster konneksiyonunu ele aldılar.

Riemann manifoldu üzerinde R Riemann eğrilik tensörü,

$$R(X, Y) \cdot R = 0 \quad (1.1)$$

koşulunu sağlıyorsa yarı simetrik Riemann manifoldu olarak adlandırılır. Lokal simetrik manifoldlar ($\nabla R = 0$) yarı simetrik manifoldların bir alt sınıfıdır. Yarı simetrik Riemann manifoldları ilk olarak Cartan[8], Lichnerowicz[25], Couty[11] ve Sinjukov[33] tarafından incelenmiştir. Bir Riemann manifoldu,

$$R(X, Y) \cdot S = 0 \quad (1.2)$$

koşulunu sağlıyorsa Ricci yarı simetri olarak adlandırılır. Burada S , $(0, 2)$ tipinde Ricci tensörüdür. Ricci simetrik manifoldlar ($\Delta S = 0$), Ricci yarı simetrik manifoldların bir alt sınıfıdır. Her yarı simetrik manifold Ricci yarı simetriktir. Fakat bunun tersi doğru değildir. Ancak bazı ek koşullar altında (1.1) ve (1.2) denktir. Yarı simetrik manifoldlar Szabó tarafından lokal olarak sınıflandırılmıştır [35]. Riemann yarı simetrik manifoldlar üzerinde Szabó [35], Boeckx ve Kowalski [22] tarafından temel bir çalışma yapılmıştır.

Bu tez çalışmasında yukarıda sözü edilen çalışmalar dikkate alınarak genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip neredeyse Kenmotsu manifoldlar ele alınmıştır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel kavramlardan söz edilmiştir. Üçüncü bölümde, neredeyse Kenmotsu manifoldlar ile ilgili özellikler verilmiştir. Dördüncü bölümde, genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonu tanıtıldıktan sonra sözü edilen bu konneksiyona sahip neredeyse Kenmotsu manifoldlar incelenmiştir. Ayrıca bu manifold üzerinde tanımlı Riemann eğrilik tensörü, Ricci tensörü, skalar eğrilik, concircular eğrilik tensörü, projektif eğrilik tensörü, conharmonic eğrilik tensörü gibi geometrik yapılara yer verilip bu eğrilik tensörlerine sahip neredeyse Kenmotsu manifoldların geometrisi incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, diğer bölümlerde çalışmamız için gerekli olan manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

2.1. Riemann Manifoldlar

Tanım 2.1.1. M^n n – boyutlu bir C^∞ manifold olsun. M^n üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M^n)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(M^n, \mathfrak{R})$ olmak üzere,

$$g : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \rightarrow C^\infty(M^n, \mathfrak{R})$$

simetrik, 2 – lineer ve pozitif tanımlı bir g dönüşümüne M^n üzerinde bir Riemann metrik tensörü ve (M^n, g) ikilisiyle verilen manifoldda bir Riemann manifoldu denir[17]. M^n manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için M^n üzerinde bu noktalar birleştiren bir eğri bulunabiliyorsa, M^n e bağlantılı manifold adı verilir[28].

Tanım 2.1.2. M^n bir C^∞ manifold olsun. M^n üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M^n)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M^n) \times \chi(M^n) &\xrightarrow{2\text{-lineer}} \chi(M^n) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü, $\forall f, g \in C^\infty(M^n, \mathfrak{R}), \forall X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

- i. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$
- ii. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$
- iii. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya M^n üzerinde bir afin konneksiyon denir [28].

Tanım 2.1.3. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde bir afin konneksiyon olsun. O zaman, ∇ dönüşümü; $\forall X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

- (1) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Konneksiyonun sıfır torsiyon özeliği),
- (2) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Konneksiyonun metrikle bağdaşma özeliği),
- şartlarını sağlıyorsa ∇ ya M^n üzerinde sıfır torsiyonlu bir Riemann konneksiyonu veya M^n nin Levi-Civita konneksiyonu denir [28].

Tanım 2.1.4. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun. O zaman,

$$R : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \times \chi(M^n) \rightarrow \chi(M^n)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

ile tanımlanan $(1, 3)$ -tipli tensör alanı R ye M^n nin Riemann eğrilik tensörü denir.

Ayrıca, $\forall X, Y, Z, V, W \in \chi(M^n)$ olmak üzere, R Riemann eğrilik tensörü

- i. $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z,$
- ii. $g(R(X, Y)V, W) = -g(R(X, Y)W, V),$
- iii. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0,$
- iv. $g(R(X, Y)V, W) = g(R(V, W)X, Y)$

özelliklerini sağlar [28].

Önerme 2.1.1. (M^n, g) bir Riemann manifoldu, ∇ da M^n üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu ve E , $(1, 1)$ -tipli bir tensör alanı olsun. O zaman,

$$(\nabla_X E)Y = \nabla_X EY - E(\nabla_X Y)$$

dır [28].

Önerme 2.1.2. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. F simetrik bir tensör alan olmak üzere, her X, Y, Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_x F)Y, Z) = g(Y, (\nabla_x F)Z)$$

eşitliği geçerlidir [28].

Önerme 2.1.3. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. G ters simetrik bir tensör alanı olmak üzere, her X, Y, Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_x G)Y, Z) = -g(Y, (\nabla_x G)Z)$$

dır [28].

Tanım 2.1.5. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. $T_p M$ tanjant uzayının iki boyutlu alt uzayı Π ve $V, W \in \Pi$ vektörleri üzerine kurulan paralelkenarın alanı

$$g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2 \neq 0$$

olsun. O zaman,

$$K(V, W) = \frac{g(R(V, W)W, V)}{g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2}$$

eşitliğine Π nin kesit eğriliği denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir [28].

Tanım 2.1.6. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$S : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \rightarrow \Re$$

$$(X, Y) \rightarrow S(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X)Y, e_i)$$

şeklinde tanımlı $(0, 2)$ -tipindeki S tensör alanına M^n üzerinde Ricci eğrilik tensörü denir. Ayrıca, $(0, 2)$ -tipli Q Ricci operatörü

$$S(X, Y) = g(QX, Y)$$

eşitliği ile tanımlıdır [40].

Tanım 2.1.7. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$r = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i)$$

değerine M^n nin skaler eğriliği denir [40].

Tanım 2.1.8. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y \in \chi(M^n)$ için;

$$S(X, Y) = \lambda g(X, Y)$$

olacak biçimde M^n üzerinde bir λ fonksiyonu var ise yani M^n nin Ricci tensörü S , metrik tensör g nin bir katı ise M^n e Einstein manifoldu adı verilir [40].

Tanım 2.1.9. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve M^n üzerinde bir pozitif fonksiyon ρ olsun. Bu durumda, $g^* = \rho^2 g$ eşitliği M^n üzerinde metrik değişimini tanımlar. Burada her bir noktadaki iki vektör arasındaki açı değişmezdir. Bu nedenle, bu şekilde tanımlanan metrik değişimine metriğin bir konformal değişimi denir. Eğer ρ fonksiyonu sabit ise konformal dönüşüm homotetik olarak adlandırılır. Eğer ρ fonksiyonu özdeş olarak 1'e eşit ise bu dönüşüm bir izometri olarak adlandırılır. Ayrıca, eğer bir g Riemann metriği lokal düzlemsel olan bir g^* Riemann metriği ile konformal ilişkili ise o zaman, M^n Riemann manifolduna konformal düzlemsel denir [40].

Teorem 2.1.1. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n nin konformal düzlemsel olması için gerek ve yeter koşul $n \geq 3$ için $c = 0$ olmasıdır [40].

Teorem 2.1.2. (M^n, g) bir sabit k eğrilğine sahip olan bir Riemann manifoldu olsun.

Bu durumda, M^n üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanlar için,

$$R(X, Y)Z = k[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y]$$

dır [40].

Tanım 2.1.10. k sabit eğrilikli, tam ve bağlantılı manifoldlara uzay form denir. n -boyutlu bir M^n uzay formu $M^n(k)$ ile gösterilir [40].

Sonuç 2.1.1. (M^n, g) bir sabit k eğrilikli bir uzay form olsun. Bu durumda, $n \geq 2$ için,

$$M^n(k) = \begin{cases} k = 0 & \text{ise } M^n(k) = E^n \text{ Öklid uzayı,} \\ k = \frac{1}{r^2} & \text{ise } M^n(k) = S^n(r) \text{ küresi,} \\ k = -\frac{1}{r^2} & \text{ise } M^n(k) = H^n(r) \text{ Hiperbolik uzay,} \end{cases}$$

dır [28].

Tanım 2.1.11. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y \in \chi(M^n)$ için M^n nin concircular eğrilik tensörü,

$$Z(X, Y)W = R(X, Y)W - \frac{r}{n(n-1)}[g(Y, W)X - g(X, W)Y]$$

ile tanımlanır[40].

2.2. Hemen Hemen Değme Manifoldlar

Tanım 2.2.1. M^{2n+1} , $(2n+1)$ -boyutlu bir manifold, ϕ, ξ, η da M^{2n+1} üzerinde, sırasıyla, $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı, bir vektör alan ve 1-form olsunlar. Eğer ϕ, ξ, η

için, $\forall X \in \chi(M^{2n+1})$

için,

$$\eta(\xi) = 1$$

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi \quad (2.2.1)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa o zaman, (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme yapı ve bu yapı ile birlikte M^{2n+1} ye bir hemen hemen değme manifold denir [40].

Tanım 2.2.2. M^{2n+1} , $(2n + 1)$ -boyutlu bir manifold, (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı ile verilsin. M^{2n+1} , üzerinde bir g Riemann metriği,

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

ve

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (2.2.2)$$

şartlarını sağlıyorsa g metriğine M^{2n+1} üzerinde hemen hemen değme metrik, ϕ, ξ, η, g yapısına hemen hemen değme metrik yapı ve (ϕ, ξ, η, g) yapısı ile M^{2n+1} ye de hemen hemen değme metrik manifold denir [40].

Tanım 2.2.3. M^{2n+1} , $(2n + 1)$ -boyutlu manifold üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olmak üzere,

$$\phi(X, Y) = g(X, \phi Y)$$

şeklinde tanımlı ϕ dönüşümüne, hemen hemen değme metrik yapısının temel 2-formu denir [40].

Tanım 2.2.4. (M^{2n+1}, g) Riemann manifold ve $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, M^{2n+1} nin lokal

koordinatları olsun. $w = \sqrt{|g|} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ ve $g(x) > 0$ ise w ye M^{2n+1} üzerindeki bir hacim form denir. Burada dx_i , M^{2n+1} üzerindeki kotanjant uzayda 1-formlar ve $|g|$, M^{2n+1} üzerinde metrik tensörün determinantıdır [34].

Tanım 2.2.5. (M^{2n+1}, g) Riemann manifoldu olsun. M^{2n+1} üzerinde bir hacim form mevcut ise M^{2n+1} ye yönlendirilebilirdir denir [15].

Tanım 2.2.6. M^{2n+1} diferansiyellenebilir bir manifold olsun. Eğer w , 1-form ise, $\forall X, Y \in \chi(M^{2n+1})$ için,

$$2dw(X, Y) = X(w(Y)) - Y(w(X)) - w[X, Y]$$

dır. Eğer w , 2-form ise,

$$3dw(X, Y, Z) = X(w(Y, Z)) + Y(w(Z, X)) + Z(w(X, Y))$$

$$-w([X, Y], Z) - w([Y, Z], X) - w([Z, X], Y)$$

dır [40].

Önerme 2.2.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu hemen hemen değme metrik manifold ve ∇ , Riemann konneksiyonu olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M^{2n+1})$ için,

$$(i) (\nabla_X \phi)(Y, Z) = g(Y, (\nabla_X \phi)Z)$$

$$(ii) (\nabla_X \phi)(Y, Z) + (\nabla_X \phi)(\phi Y, \phi Z) = \eta(Z)(\nabla_X \eta)\phi Y - \eta(Y)(\nabla_X \eta)\phi Z$$

$$(iii) (\nabla_X \eta)Y = g(Y, \nabla_X \xi) = (\nabla_X \phi)(\xi, \phi Y)$$

$$(iv) 2d\eta(X, Y) = (\nabla_X \eta)Y - (\nabla_Y \eta)X$$

$$(v) 3d\phi(X, Y, Z) = \bigoplus_{X, Y, Z} (\nabla_X \phi)(Y, Z)$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $\bigoplus_{X,Y,Z}$, X, Y, Z vektör alanları üzerinden alınan devirli toplamı göstermektedir.

Ayrıca $\{X_i, \phi X_i, \xi\}$, $i = 1, 2, \dots, 2n + 1$ olmak üzere, M^{2n+1} nin açık bir alt cümlesi üzerinde tanımlanan bir lokal ortonormal baz olsun. O zaman δ operatörü,

$$\delta\eta = - \sum_{i=1}^{2n+1} \{(\nabla_{X_i}\eta)X_i + (\nabla_{\phi X_i}\eta)\phi X_i\}$$

şeklinde elde edilir [17].

Tanım 2.2.7. M^{2n+1} bir reel diferansiyellenebilir manifold olsun. Eğer M^{2n+1} nin her p noktası için $J^2 = -I$ olacak şekilde $T_p M$ tanjant uzayının bir J endomorfizması mevcut ise, o zaman M^{2n+1} üzerindeki J tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı adı verilir. Bir J hemen hemen kompleks yapısı ile verilen manifolda bir hemen hemen kompleks manifold denir [40].

M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) ile verilsin. O zaman, $M^{2n+1} \times R$ üzerinde herhangi bir vektör alanı,

$$\left(X, f \frac{d}{dt}\right)$$

şeklinde tanımlanır. Burada X , M^{2n+1} manifolduna teğet bir vektör alanı; t , R nin bir koordinatı ve f , $M^{2n+1} \times R$ üzerinde bir C^∞ fonksiyondur.

M^{2n+1} üzerinde (ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme metrik yapı olsun. Böylece $M^{2n+1} \times R$ üzerindeki bir hemen hemen kompleks yapı,

$$J\left(X, f \frac{d}{dt}\right) = \left(\phi X - f \cdot \xi, \eta(X) \frac{d}{dt}\right)$$

biçiminde tanımlanır. Kolayca $J^2 = -I$ elde edilir [40].

Tanım 2.2.8. M^{2n+1} bir diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere, M^{2n+1} üzerinde $(1,1)$ -tipli bir tensör alanı F olsun. $\forall X, Y \in \chi(M^{2n+1})$ için,

$$N_F(X, Y) = F^2[X, Y] + [FX, FY] - F[FX, Y] - F[X, FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alana F tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü denir [13].

J , M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olsun. Tanım 2.2.8. yardımıyla M^{2n+1} üzerinde J tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü,

$$\begin{aligned} N_J(X, Y) &= J^2[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] \\ &= -[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] \end{aligned}$$

şeklindedir [40].

Tanım 2.2.9. (M^{2n+1}, J) hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman, $N_J = 0$ ise J dönüşümüne integrallenebilirdir denir [40].

Tanım 2.2.10. Eğer $M^{2n+1} \times R$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına normaldir denir [40].

Önerme 2.2.2. $(2n + 1)$ -boyutlu bir M^{2n+1} Riemann manifoldu üzerinde (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul,

$$N_\phi + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada N_ϕ , ϕ tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörüdür [40].

Tanım 2.2.11. $2n$ -boyutlu bir (M^{2n}, J) hemen hemen kompleks manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M^{2n})$ için,

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

şeklinde verilen g Riemann metriğine Hermit metriği denir. Hermit metriği ile verilen bir hemen hemen kompleks manifolda bir hemen hemen Hermit manifoldu denir. Hermit metriği ile verilen kompleks manifolda ise Hermit manifoldu denir [4].

Tanım 2.2.12. $2n$ -boyutlu bir (M^{2n}, J, g) bir hemen hemen Hermit manifoldu olsun.

$\forall X, Y \in \chi(M^{2n})$ için,

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY)$$

eşitliği ile tanımlanan Ω 2-formuna, hemen hemen Hermit yapısının temel 2-formu denir. Eğer $d\Omega = 0$ ise (J, g) yapısına hemen hemen Kaehler yapı denir. Bu yapı ile elde edilen manifolda ise hemen hemen Kaehler manifoldu denir. Bir Kaehler yapı ile verilen kompleks manifolda Kaehler manifoldu denir. Bir Hermit manifoldunun bir Kaehler manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla J = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır [4].

Tanım 2.2.13. $(2n + 1)$ -boyutlu bir $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. O zaman, verilen bu yapı,

$$d\phi = 0 \text{ } (\phi, \text{kapalıdır}), d\eta = 0 \text{ } (\eta, \text{kapalıdır})$$

şartlarını sağlıyorsa M^{2n+1} manifolduna hemen hemen kosimplektik manifold denir. Eğer bir hemen hemen kosimplektik manifoldu normal ise bu manifolda kosimplektik manifold denir [19], [27].

Teorem 2.2.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, hemen hemen değme metrik manifold olsun. M^{2n+1} manifoldunun bir kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla\phi$ ve $\nabla\eta$ kovaryant türevlerinin sıfıra eşit olmasıdır [27].

Önerme 2.2.3. Bir hemen hemen kosimplektik manifold üzerinde,

$$(\nabla_{\phi X}\phi)(\phi Y) + (\nabla_X\phi)(Y) - \eta(Y)\nabla_{\phi X}\xi = 0$$

eşitliği geçerlidir [27].

Örnek 2.2.2. E^4 Kaehler manifoldunun 3-boyutlu bir reel hiperküresi S^3 olsun. E^4 de S^3 bir birim normal C olmak üzere E^4 ün hemen hemen kompleks tensör alanı J ,

$$J: E^4 \rightarrow E^4$$

$$JC = -\xi$$

biçiminde tanımlansın. O zaman ξ , S^3 üzerinde bir birim vektör alanı olur. Yani $\xi \in \chi(S^3)$ dir. S^3 e teğet her bir X vektör alanı için $\eta(X) = g(X, \xi)$ olmak üzere η 1-formu iyi tanımlıdır. Üstelik $\eta(\xi) = 1$ dir. Diğer yandan,

$$JX = \phi X + \eta(X)C$$

eşitliği ile ϕ lineer dönüşümünü tanımlayalım. Buna göre $\forall p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in S^3$ için,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yapısı yardımı ile,

$$J(C(p)) = J(p_1, p_2, p_3, p_4) = (-p_3, -p_4, p_1, p_2) = -\xi$$

elde edilir. Burada,

$$\xi = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

dir. Şimdi $g(X, \xi)\xi$ için,

$$g(X, \xi)\xi = \left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$g(X, \xi)\xi = (x_1p_3 + x_2p_4 - x_3p_1 - x_4p_2) \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece,

$$\lambda = (x_1p_3 + x_2p_4 - x_3p_1 - x_4p_2)$$

olmak üzere,

$$g(X, \xi) = \lambda\xi$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$\phi(\phi X) = J(\phi X) - \eta(\phi X)C$$

$$= J(JX - \eta(X)C) - \eta(JX - \eta(X)C)C$$

$$= J\left(\begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_4 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}\right) - g(JX - \eta(X)C, \xi)C$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 + \lambda p_3 \\ -x_2 + \lambda p_4 \\ -x_3 - \lambda p_1 \\ -x_4 - \lambda p_2 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} -x_3 - \lambda p_1 \\ -x_4 - \lambda p_2 \\ -x_1 - \lambda p_3 \\ -x_2 - \lambda p_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} -\lambda p_3 - [(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2]p_1 \\ -\lambda p_4 - [(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2]p_2 \\ -\lambda p_1 - [(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2]p_3 \\ -\lambda p_2 - [(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2]p_4 \end{bmatrix}$$

dir. O zaman,

$$\phi(\phi X) = - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi$$

elde edilir. Bununla birlikte,

$$\phi\xi = J\xi - \eta(\xi)C$$

olduğundan,

$$\phi\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = 0$$

bulunur. Böylece;

$$\begin{aligned} \eta(\phi X) &= g(\phi X, \xi) \\ &= g(JX - \eta(X)C, \xi) \end{aligned}$$

$$= 0$$

olduğu da açıkça görülür.

Sonuç olarak (ϕ, ξ, η, g) , yapısı S^3 üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı oluşturur [4].



3. NEREDEYSE KENMOTSU MANİFOLDLAR

Bu bölümde neredeyse Kenmotsu manifoldların temel özelliklerine yer verilecektir.

Tanım 3.1. $(2n + 1)$ -boyutlu hemen hemen değme metrik manifold $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ olsun. Eğer,

$$(\nabla_X \phi)(Y) = g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X \quad (3.1)$$

ise, $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ manifolduna Kenmotsu manifold denir [34].

Tanım 3.2. M hemen hemen değme metrik manifoldu tüm X, Y vektör alanları için

$$(\nabla_X \phi)Y + (\nabla_Y \phi)X = -\eta(Y)\phi X - \eta(X)\phi Y \quad (3.2)$$

eşitliğini sağlarsa neredeyse Kenmotsu manifold olarak adlandırılır[20]. Burada ∇ Riemann metriği üzerindeki Levi-Civita konneksiyonudur.

Teorem 3.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ neredeyse Kenmotsu manifold olsun. R Riemann eğrilik tensörü, S Ricci tensörü ve Q Ricci operatörü olmak üzere M^{2n+1} üzerinde aşağıdaki özellikler sağlanır [1,20,21].

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi \quad (3.3)$$

$$(\nabla_X \eta)Y = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (3.4)$$

$$R(X, Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X \quad (3.5)$$

$$S(X, \xi) = -2n\eta(X) \quad (3.6)$$

$$R(\xi, X)Y = -g(X, Y)\xi + \eta(Y)X \quad (3.7)$$

$$S(\phi X, \phi Y) = S(X, Y) + 2n\eta(X)\eta(Y) \quad (3.8)$$

$$\eta(R(X, Y)Z) = g(X, Z)\eta(Y) - g(Y, Z)\eta(X) \quad (3.9)$$

$$\nabla_{\xi}\xi = 0 \quad (3.10)$$

Tanım 3.3. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, neredeyse Kenmotsu manifold olsun. Herhangi X, Y, Z vektör alanları için g Riemann metriği olmak üzere, projektif eğrilik tensörü P ve conharmonic eğrilik tensörü N sırasıyla,

$$P(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{2n} [S(Y, Z)X - S(X, Z)Y] \quad (3.11)$$

$$N(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{2n-1} [S(Y, Z)X - S(X, Z)Y + g(Y, Z)r(X) - g(X, Z)r(Y)] \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlanır.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ TANAKA WEBSTER KONNEKSİYONUNA SAHİP NEREDEYSE KENMOTSU MANİFOLDLARI ÜZERİNDE BAZI EĞRİLİK KOŞULLARI

Bu bölümde, genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip Ricci yarı simetrik neredeyse Kenmotsu manifoldlar karakterize edilerek $Q.R = 0$ ve $\bar{Q}.\bar{R} = 0$ eğrilik koşulları incelenmiştir.

Elde edilmiş olan sonuçlar tezin orjinal kısmını teşkil etmektedir.

Tanım 4.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold olsun. Değme metrik manifoldlar için genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonu $\bar{\nabla}$, $\forall X, Y \in \chi(M^{2n+1})$ için

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (\nabla_X \eta)(Y)\xi - \eta(Y)\nabla_X \xi - \eta(Y)\phi Y \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada ∇ , Levi-Civita konneksiyonudur[38].

Önerme 4.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M^{2n+1})$ için M üzerinde genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonu,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(X, Y)\xi - \eta(Y)X - \eta(X)\phi Y \quad (4.2)$$

şeklindedir.

İspat: (4.1) ifadesinde (3.5) ve (3.6) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y - \eta(Y)\nabla_X \xi + (\nabla_X \eta)(Y)\xi - \eta(X)\phi Y \\ &= \nabla_X Y - \eta(Y)[X - \eta(X)\xi] + [\nabla_X \eta(Y) + \eta(\nabla_X Y)]\xi - \eta(X)\phi Y \\ &= \nabla_X Y - \eta(Y)X + \eta(X)\eta(Y)\xi + \eta(\nabla_X Y)\xi + g(X, Y)\xi - \eta(X)\eta(Y)\xi \\ &\quad - \eta(\nabla_X Y) - \eta(X)\phi Y \\ &= \nabla_X Y + g(X, Y)\xi - \eta(Y)X - \eta(X)\phi Y \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 4.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. $\bar{\nabla}$ genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonu olmak üzere $\forall X \in \chi(M^{2n+1})$ için,

$$\bar{\nabla}_X \xi = 0 \quad (4.3)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.2) eşitliğinde $Y = \xi$ alınır ve (3.1) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \xi &= \nabla_X Y + g(X, Y)\xi - \eta(Y)X - \eta(X)\phi Y \\ &= \nabla_X \xi + g(X, \xi)\xi - \eta(\xi)X - \eta(X)\underbrace{\phi \xi}_0 \\ &= \nabla_X \xi + \eta(X)\xi - \underbrace{\eta(\xi)}_1 X \\ &= \nabla_X \xi + \eta(X)\xi - X \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifade de (3.3) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \xi &= \nabla_X \xi + \eta(X)\xi - X \\ &= X - \eta(X)\xi + \eta(X)\xi - X \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Önerme 4.3. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. $\bar{\nabla}$ genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonu olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M^{2n+1})$ için,

$$(\bar{\nabla}_X \eta)Y = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$(\bar{\nabla}_X \eta)Y = \bar{\nabla}_X \eta(Y) - \eta(\bar{\nabla}_X Y) \quad (4.4)$$

olduğu bilinmektedir. Bu ifade de (4.2) kullanılarak,

$$(\bar{\nabla}_X \eta)Y = \nabla_X \eta(Y) - g(X, Y) + \eta(Y)\eta(X) \quad (4.5)$$

elde edilir. (4.5)'de (3.4) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X \eta)Y &= \nabla_X \eta(Y) - g(X, Y) + \eta(Y)\eta(X) \\ &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) - g(X, Y) + \eta(Y)\eta(X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Önerme 4.4. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. $\bar{\nabla}$ genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonu ve g Riemann metriği olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M^{2n+1})$ için,

$$(\bar{\nabla}_X g)(Y, Z) = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$(\bar{\nabla}_X g)(Y, Z) = \bar{\nabla}_X g(Y, Z) - g(\bar{\nabla}_X Y, Z) - g(Y, \bar{\nabla}_X Z) \quad (4.6)$$

olup, (4.6)'da (4.2) kullanılarak,

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X g)(Y, Z) &= \bar{\nabla}_X g(Y, Z) - g(\nabla_X Y + g(X, Y)\xi - \eta(Y)X - \eta(X)\phi Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z \\ &\quad + g(X, Z)\xi - \eta(Z)X - \eta(X)\phi Z) \\ &= g(\bar{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \bar{\nabla}_X Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(X, Y)\eta(Z) + \eta(Y)g(X, Z) \\ &\quad - \eta(X)g(\phi Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) - g(X, Z)\eta(Y) + g(X, Y)\eta(Z) \\ &\quad + \eta(X)g(Y, \phi Z) \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$(\bar{\nabla}_X g)(Y, Z) = 0 \quad (4.7)$$

sonucuna ulaşılır.

Önerme 4.2-4.4 dikkate alındığında aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.1. Neredeyse Kenmotsu manifoldunda ξ, η, g genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna göre paraleldir.

Sonuç 4.2. Neredeyse Kenmotsu manifoldunda genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonu bir metrik konneksiyondur.

Sonuç 4.3. Neredeyse Kenmotsu manifoldunda ξ vektör alanının integral eğrileri genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna göre jeodeziktir.

Teorem 4.1. Neredeyse Kenmotsu manifoldu üzerinde tanımlı genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonu $\bar{\nabla}$,

$$\bar{T}(X, Y) = \eta(X)Y - \eta(Y)X - \eta(X)\varphi Y + \eta(Y)\varphi X$$

torsiyonuna sahip bir afin konneksiyondur ve tektir.

İspat: $\bar{\nabla}$ 'nın torsiyon tensörü $\bar{T}$,

$$\bar{T}(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X - [X, Y]$$

ile verilir. Bu ifade de (4.2) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \bar{T}(X, Y) &= \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X - [X, Y] \\ &= \nabla_X Y + g(X, Y)\xi - \eta(Y)X - \eta(X)\varphi Y - \nabla_Y X - g(X, Y)\xi + \eta(X)Y \\ &\quad + \eta(Y)\varphi X - \nabla_X Y + \nabla_Y X \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılarak,

$$\bar{T}(X, Y) = \eta(X)Y - \eta(Y)X - \eta(X)\varphi Y + \eta(Y)\varphi X \quad (4.8)$$

bulunur. Öte yandan, herhangi bir metrik konneksiyon aşağıdaki şekilde $\bar{T}$ torsiyonu yardımıyla

$$g(\bar{\nabla}_X Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + \frac{1}{2} [g(\bar{T}(X, Y), Z) - g(\bar{T}(X, Z), Y) - g(\bar{T}(Y, Z), X)]$$

şeklinde ifade edilebildiğinden, bu denklemde (4.8) kullanılarak,

$$\begin{aligned} g(\bar{\nabla}_X Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) \\ &\quad + \frac{1}{2} [g(\eta(X)Y - \eta(Y)X - \eta(X)\varphi Y + \eta(Y)\varphi X, Z) \\ &\quad - g(\eta(X)Z - \eta(Z)X - \eta(X)\varphi Z + \eta(Z)\varphi X, Y) \\ &\quad - g(\eta(Y)Z - \eta(Z)Y - \eta(Y)\varphi Z + \eta(Z)\varphi Y, X)] \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + \frac{1}{2} [2\eta(Z)g(X, Y) - 2\eta(Y)g(X, Z) - 2\eta(X)g(\varphi Y, Z)] \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + \eta(Z)g(X, Y) - \eta(Y)g(X, Z) - \eta(X)g(\varphi Y, Z) \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(X, Y)\xi - \eta(Y)X - \eta(X)\varphi Y$$

bulunur.

Önerme 4.5. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold olsun. g Riemann metriği olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M^{2n+1})$ için $\bar{R}$ Riemann eğrilik tensörü,

$$\bar{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(Z, X)Y$$

eşitliği ile verilir.

İspat: Riemann eğrilik tensörü tanımından

$$\bar{R}(X, Y)Z = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z \quad (4.9)$$

dır. (4.9) da (4.2) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z &= \bar{\nabla}_X [\nabla_Y Z - \eta(Z)Y + g(Y, Z)\xi - \eta(Y)\varphi Z] \\
&= \bar{\nabla}_X \nabla_Y Z - \bar{\nabla}_X [\eta(Z)Y] + \bar{\nabla}_X g(Y, Z)\xi - \bar{\nabla}_X [\eta(Y)\varphi Z] \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z - \eta(\nabla_Y Z)X + g(X, \nabla_Y Z)\xi - \eta(X)\varphi \nabla_Y Z - \nabla_X \eta(Z)Y + \eta(Z)\eta(Y)X \\
&\quad - g(X, Y)\eta(Z)\xi + \eta(X)\eta(Z)\varphi Y + \nabla_X g(Y, Z)\xi - g(Y, Z)\eta(\xi)X \\
&\quad + g(Y, Z)g(X, \xi)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\varphi \xi - \nabla_X \eta(Y)\varphi Z + \eta(Y)\eta(\varphi Z)X \\
&\quad - g(Y, \varphi Z)\eta(Y)\xi + \eta(X)\eta(Y)\varphi^2 Z \\
\\
&= \nabla_X \nabla_Y Z - \eta(\nabla_Y Z)X + g(X, \nabla_Y Z)\xi - \eta(X)\varphi \nabla_Y Z - \eta(\nabla_X Z)Y - g(X, Z)Y \\
&\quad + \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Z)\nabla_X Y + \eta(Z)\eta(Y)X - g(X, Y)\eta(Z)\xi \\
&\quad + \eta(X)\eta(Z)\varphi Y + g(\nabla_X Y, Z)\xi + g(Y, \nabla_X Z)\xi + g(Y, Z)X \\
&\quad - g(Y, Z)g(X, \xi)\xi - g(Y, Z)X + g(Y, Z)g(X, \xi)\xi - \eta(\nabla_X Y)\varphi Z \\
&\quad - g(X, Y)\varphi Z + \eta(X)\eta(Y)\varphi Z + g(X, \varphi Z)\eta(Y)\xi + \eta(Y)\eta(Z)\varphi X \\
&\quad - \eta(Y)\varphi \nabla_X Z - g(Y, \varphi Z)\eta(X)\xi - \eta(X)\eta(Y)Z + \eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\xi \\
\\
\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z &= \nabla_Y \nabla_X Z - \eta(\nabla_X Z)Y + g(Y, \nabla_X Z)\xi - \eta(Y)\varphi \nabla_X Z - \eta(\nabla_Y Z)X - g(Y, Z)X \\
&\quad + \eta(Y)\eta(Z)X - \eta(Z)\nabla_Y X + \eta(Z)\eta(X)Y - g(Y, X)\eta(Z)\xi \\
&\quad + \eta(Y)\eta(Z)\varphi X + g(\nabla_Y X, Z)\xi + g(X, \nabla_Y Z)\xi + g(X, Z)Y \\
&\quad - g(X, Z)g(Y, \xi)\xi - g(X, Z)Y + g(X, Z)g(Y, \xi)\xi - \eta(\nabla_Y X)\varphi Z \\
&\quad - g(Y, X)\varphi Z + \eta(Y)\eta(X)\varphi Z + g(Y, \varphi Z)\eta(X)\xi + \eta(X)\eta(Z)\varphi Y \\
&\quad - \eta(X)\varphi \nabla_Y Z - g(X, \varphi Z)\eta(Y)\xi - \eta(Y)\eta(X)Z + \eta(Y)\eta(X)\eta(Z)\xi \\
\\
\bar{\nabla}_{[X, Y]} Z &= \nabla_{[X, Y]} Z + g(\nabla_X Y, Z)\xi - g(\nabla_Y X, Z)\xi - \eta(Z)\nabla_X Y + \eta(Z)\nabla_Y X - \eta(\nabla_X Y)\varphi Z \\
&\quad + \eta(\nabla_Y X)\varphi Z
\end{aligned}$$

olup buradan , $\bar{R}$ Riemann eğrilik tensörü gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$\bar{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(Z, X)Y \quad (4.10)$$

şeklinde elde edilir.

Önerme 4.6. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold olsun. $\bar{R}$, Riemann eğrilik tensörü olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M^{2n+1})$ için,

$$\bar{R}(X, Y)\xi = 0, \bar{R}(X, \xi)Y = 0, \bar{R}(\xi, Y)Z = 0$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: (4.10) da $Z = \xi$ alınır ve (3.7) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)\xi &= R(X, Y)\xi + g(Y, \xi)X - g(\xi, X)Y \\ &= \eta(X)Y - \eta(Y)X + \eta(Y)X - \eta(X)Y \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer iki ifade de benzer şekilde gösterilebilir.

Önerme 4.7. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold olsun. Genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip neredeyse Kenmotsu manifoldunun $\bar{S}$ Ricci tensörü, $\forall Y, Z \in \chi(M^{2n+1})$ için,

$$\bar{S}(Y, Z) = S(Y, Z) + 2ng(Y, Z)$$

eşitliği ile verilir.

İspat: (4.10) ifadesinden $\forall W \in \chi(M^{2n+1})$ için

$$g(\bar{R}(X, Y)Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) + g(Y, Z)g(X, W) - g(Z, X)g(Y, W) \quad (4.11)$$

yazılabilir. $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{2n+1}\}$ M manifoldunun bir noktasındaki teğet uzayın lokal ortonormal bazı olsun. (4.11) ifadesinde, $X = W = e_i$ için ve $1 \leq i \leq 2n + 1$ olmak üzere i üzerinden toplam alınırsa

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2n+1} \bar{R}(e_i, Y, Z, e_i) &= \sum_{i=1}^{2n+1} g(\bar{R}(e_i, Y)Z, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{2n+1} R(e_i, Y, Z, e_i) + \sum_{i=1}^{2n+1} g(Y, Z)g(e_i, e_i) - \sum_{i=1}^{2n+1} g(Z, e_i)g(Y, e_i)\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
 \bar{S}(Y, Z) &= S(Y, Z) + (2n + 1)g(Y, Z) - g(Y, Z) \\
 &= S(Y, Z) + 2ng(Y, Z) + g(Y, Z) - g(Y, Z) \\
 &= S(Y, Z) + 2ng(Y, Z)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 4.8. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold ve M^{2n+1} üzerinde $\bar{S}$ Ricci tensörü tanımlı olsun. $\bar{r}$ ve r sırasıyla genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip neredeyse Kenmotsu manifoldunun ve Levi-Civita konneksiyonuna sahip neredeyse Kenmotsu manifoldunun skalar eğrilikleri olmak üzere,

$$\bar{r} = r + 2n(2n + 1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{2n+1}\}$ M^{2n+1} manifoldunun bir noktasındaki teğet uzayın lokal ortonormal bazı olsun. (4.12) ifadesinde $Y = Z = e_i$ için $1 \leq i \leq 2n + 1$ olmak üzere i üzerinden toplam alınırsa

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \bar{S}(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} S(e_i, e_i) + 2n \sum_{i=1}^{2n+1} \underbrace{g(e_i, e_i)}_1$$

$$\bar{r} = r + 2n(2n + 1) \tag{4.13}$$

elde edilir.

Önerme 4.9. Genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip neredeyse Kenmotsu manifold için,

- i. $\bar{R}(X, Y)Z = -\bar{R}(Y, X)Z$
- ii. $\bar{R}(X, Y)Z + \bar{R}(Y, Z)X + \bar{R}(Z, X)Y = 0$
- iii. $\bar{S}$ Ricci tensörü simetriktir.

İspat: (4.11) ve (4.12) den ispat açıktır.

Teorem 4.2. M^{2n+1} manifoldunun genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna göre Riemann eğrilik tensörünün sıfır olması için gerek ve yeter koşul $M^{2n+1}, H^{2n+1}(-1)$ hiperbolik uzayına göre lokal olarak izometrik olmasıdır.

İspat: (4.10) ifadesinden,

$$R(X, Y)Z = -[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y]$$

dır. Bu ise manifoldun sabit kesit eğriliğinin -1 olduğunu göstermektedir.

Tanım 4.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu Tanaka-Webster konneksiyona sahip neredeyse Kenmotsu manifold olsun.

$$(\bar{R}(X, Y). \bar{S})(U, V) = -\bar{S}(\bar{R}(X, Y)U, V) - \bar{S}(U, \bar{R}(X, Y)V) \quad (4.14)$$

koşulunu sağlayan M^{2n+1} manifolduna Ricci yarı simetriktir denir.

Teorem 4.3. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu Tanaka-Webster konneksiyona sahip neredeyse Kenmotsu manifold olsun. M^{2n+1} manifoldunun $\bar{\nabla}$ ve ∇ konneksiyonlarına göre Ricci yarı simetrilerinin denk olması için gerek ve yeter koşul M^{2n+1} manifoldunun Levi-Civita konneksiyonuna göre Einstein manifold olmasıdır.

İspat: (4.14) de (4.10) kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\bar{R}(X, Y). \bar{S})(U, V) &= -S(R(X, Y)U + g(Y, U)X - g(U, X)Y, V) \\ &\quad -S(U, R(X, Y) + g(Y, V)X - g(V, X)Y) \\ &= -S(R(X, Y)U, V) - g(Y, U)S(X, V) + g(X, U)S(Y, V) \\ &\quad -S(U, R(X, Y)V) - g(Y, V)S(U, X) + g(X, V)S(U, Y) \\ &= (R(X, Y).S)(U, V) + g(X, U)S(Y, V) + g(X, V)S(U, Y) \\ &\quad -g(Y, U)S(X, V) - g(Y, V)S(U, X) \\ &= (R(X, Y).S)(U, V) + g(X, U)S(Y, V) + g(X, V)S(U, Y) \end{aligned}$$

$$-g(Y, U)S(X, V) - g(Y, V)S(U, X) \quad (4.15)$$

elde edilir. Öncelikle $(\bar{R}(X, Y). \bar{S})(U, V) = (R(X, Y). S)(U, V)$ olduğunu varsayalım.

Yukarıdaki denklemden,

$$(\bar{R}(X, Y). \bar{S})(U, V) = (R(X, Y). S)(U, V) + g(X, U)S(Y, V) + g(X, V)S(U, Y)$$

$$g(X, U)S(Y, V) + g(X, V)S(U, Y) - g(Y, U)S(X, V) - g(Y, V)S(U, X) = 0$$

elde edilir.

Son bulduğumuz denklemde, $X = U = e_i$ ve $1 \leq i \leq 2n + 1$ için toplam alınırsa

$$\sum_{i=1}^{2n+1} g(e_i, e_i)S(Y, V) + \sum_{i=1}^{2n+1} g(e_i, V)S(e_i, Y) - \sum_{i=1}^{2n+1} g(Y, e_i)S(e_i, V) - g(Y, V) \underbrace{\sum_{i=1}^{2n+1} S(e_i, e_i)}_r$$

$$(2n + 1)S(Y, V) + g(Y, V) - g(Y, V) - rg(Y, V) = 0$$

$$S(Y, V) = \lambda g(Y, V)$$

elde edilir. Bu ise M^{2n+1} manifoldunun Levi-Civita konneksiyonuna göre Einstein manifold olduğunu gösterir. Tersine, M^{2n+1} manifoldunun Levi-Civita konneksiyonuna göre Einstein manifold ise $S(Y, V) = \lambda g(Y, V)$, (4.15) de kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (\bar{R}(X, Y). \bar{S})(U, V) &= (\bar{R}(X, Y). \bar{S})(U, V)(R(X, Y). S)(U, V) \\ &\quad + g(X, U)\lambda g(Y, V) + g(X, V)\lambda g(U, Y) \\ &= (R(X, Y). S)(U, V) + g(X, U)\lambda g(Y, V) \\ &\quad + g(X, V)\lambda g(U, Y) - g(Y, U)\lambda g(X, V) - g(Y, V)\lambda g(U, X) \end{aligned}$$

gerekli sadeleştirmeler yapıldığında,

$$(\bar{R}(X, Y). \bar{S})(U, V) = (R(X, Y). S)(U, V)$$

elde edilir. Dolayısı ile M^{2n+1} manifoldunun $\bar{\nabla}$ ve ∇ konneksiyonlarına göre Ricci yarı simetrikleridir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 4.3. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu bir neredeyse Kenmotsu manifold olsun. Genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip neredeyse Kenmotsu manifoldunun, Riemann eğrilik tensörü $\bar{R}$ ve Ricci operatörü $\bar{Q}$ olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M^{2n+1})$ için, $\bar{Q} \cdot \bar{R} = 0$ ifadesi

$$(\bar{Q} \cdot \bar{R})(X, Y)Z = \bar{Q}(\bar{R}(X, Y)Z) - \bar{R}(\bar{Q}X, Y)Z - \bar{R}(X, \bar{Q}Y)Z - \bar{R}(X, Y)\bar{Q}Z \quad (4.16)$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 4.4. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu Tanaka-Webster konneksiyona sahip neredeyse Kenmotsu manifold olsun. M^{2n+1} manifoldu üzerinde $\bar{Q} \cdot \bar{R} = 0$ ve $Q \cdot R = 0$ olması için gerek ve yeter koşul M^{2n+1} manifoldunun Levi-Civita konneksiyonuna göre Einstein manifold olmasıdır.

İspat: Genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip neredeyse Kenmotsu manifoldunun Ricci operatörü $\bar{Q}$ olmak üzere, $\forall X \in \chi(M^{2n+1})$ için, (4.12)'den,

$$\bar{Q}X = QX + 2nX \quad (4.17)$$

elde edilir. (4.16)'da, (4.10) ve (4.17) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (\bar{Q} \cdot \bar{R})(X, Y)Z &= Q(R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(Z, X)Y) - R(QX, Y)Z - g(Y, Z)QX \\ &\quad + g(Z, QX)Y - R(X, QY)Z - g(QY, Z)X + g(Z, X)QY - R(X, Y)QZ \\ &\quad - g(Y, QZ)X + g(QZ, X)Y \\ &= Q(R(X, Y)Z) + Q(g(Y, Z)X) - Q(g(Z, X)Y) - R(QX, Y)Z \\ &\quad - g(Y, Z)QX + g(Z, QX)Y - R(X, QY)Z - g(QY, Z)X + g(Z, X)QY \\ &\quad - R(X, Y)QZ - g(Y, QZ)X + g(QZ, X)Y \\ &= (Q \cdot R)(X, Y)Z + g(Y, Z)QX - g(Z, X)QY - g(Y, Z)QX + g(Z, QX)Y \\ &\quad - g(QY, Z)X + g(Z, X)QY - g(Y, QZ)X + g(QZ, X)Y \\ &= (Q \cdot R)(X, Y)Z + g(Z, QX + 2nX)Y - g(QY + 2nY, Z)X \\ &\quad - g(Y, QZ + 2nZ)X + g(QZ + 2nZ, X)Y \\ &= (Q \cdot R)(X, Y)Z + g(Z, QX)Y + 2ng(Z, X)Y - g(QY, Z)X \\ &\quad - 2ng(Y, Z)X - g(Y, QZ)X - 2ng(Y, Z)X + g(QZ, X)Y + 2ng(Z, X)Y \\ &= (Q \cdot R)(X, Y)Z + 2S(X, Z)Y - 2S(Y, Z)X - 2n[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \quad (4.18) \end{aligned}$$

elde edilir. Öncelikle $\bar{Q} \cdot \bar{R} = 0$ ve $Q \cdot R = 0$ ' ın bir neredeyse Kenmotsu manifoldunda eşdeğer olduğunu varsayalım. Bu durumda (4.18)' den,

$$\begin{aligned} 2S(X, Z)Y - 2S(Y, Z)X - 2n[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] &= 0 \\ S(X, Z)Y - S(Y, Z)X - n[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıdaki denklemin Y üzerinden izi alınırsa $S(X, Z) = ng(X, Z)$ elde edilir. Yani M^{2n+1} manifoldu bir Einstein manifoldtur. Tersine, M^{2n+1} bir Einstein manifold olsun. Bu durumda (4.18)'den $\bar{Q} \cdot \bar{R} = 0$ ve $Q \cdot R = 0$ olduğu açıktır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 4.4. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. M^{2n+1} üzerinde Z concircular eğrilik tensörü, r ve R sırasıyla Levi-Civita konneksiyonuna sahip skaler eğrilik ve Riemann eğrilik tensörü olmak üzere, genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip bir M^{2n+1} neredeyse Kenmotsu manifoldu $\forall X, Y, W \in \chi(M^{2n+1})$ için,

$$Z(X, Y)W = R(X, Y)W - \frac{r}{2n(2n+1)}[g(Y, W)X - g(X, W)Y]$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 4.5. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. M^{2n+1} üzerinde genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna göre concircular eğrilik tensörü $\bar{Z}$, $\bar{r}$ ve $\bar{R}$ sırasıyla genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip skaler eğrilik ve Riemann eğrilik tensörü olmak üzere $\forall X, Y, W \in \chi(M^{2n+1})$ için,

$$\bar{Z}(X, Y)W = \bar{R}(X, Y)W - \frac{\bar{r}}{2n(2n+1)}[g(Y, W)X - g(X, W)Y] \quad (4.19)$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 4.5. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. M^{2n+1} üzerinde genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna göre ve Levi-Civita konneksiyonuna göre concircular eğrilik tensörleri eşittir.

İspat: (4.19)' da (4.10) ve (4.13) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
 \bar{Z}(X, Y)W &= R(X, Y)W + g(Y, W)X - g(W, X)Y - \frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)}g(Y, W)X \\
 &\quad + \frac{r + 2n(2n + 1)}{2n(2n + 1)}g(X, W)Y \\
 &= R(X, Y)W + g(Y, W)X - g(W, X)Y - \frac{r}{2n(2n + 1)}g(Y, W)X \\
 &\quad - g(Y, W)X + \frac{r}{2n(2n + 1)}g(X, W)Y + g(X, W)Y \\
 &= R(X, Y)W - \frac{r}{2n(2n + 1)}[g(Y, W)X - g(X, W)Y] \\
 &= Z(X, Y)W
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.6. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu Tanaka-Webster konneksiyona sahip neredeyse Kenmotsu manifold olsun. M^{2n+1} üzerinde $\bar{Z}(X, Y) \cdot \bar{S} = 0$ koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul Levi-Civita konneksiyonuna göre manifoldun Einstein olmasıdır.

İspat: $\bar{Z}(X, Y) \cdot \bar{S} = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\forall X, Y, U, V \in \chi(M^{2n+1})$ için,

$$\bar{S}(\bar{Z}(X, Y)U, V) + \bar{S}(U, \bar{Z}(X, Y)V) = 0 \text{ dir.}$$

Yukarıdaki denklemde $X = \xi$ alınırsa,

$$\bar{S}(\bar{Z}(\xi, Y)U, V) + \bar{S}(U, \bar{Z}(\xi, Y)V) = 0 \quad (4.20)$$

elde edilir. (4.20) de, (4.10), (4.13), (4.19) ve (4.21) kullanılırsa,

$$-\eta(U)\bar{S}(Y, V) - \eta(V)\bar{S}(U, Y) = 0 \quad (4.21)$$

elde edilir. (4.21) 'de $U = \xi$ alınırsa, $\bar{S}(Y, V) = 0$ bulunur. Son olarak (4.12) ' den $S(Y, V) = -2ng(Y, V)$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.



5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Neredeyse Kenmotsu manifoldlar üzerine hazırlanan bu tez çalışmasında aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır. Bu yapılar neredeyse Sasakian ve neredeyse kosimplektik manifoldlarda da incelenebilir.

Teorem. Neredeyse Kenmotsu manifoldu üzerinde tanımlı genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonu $\bar{\nabla}$,

$$\bar{T}(X, Y) = \eta(X)Y - \eta(Y)X - \eta(X)\varphi Y + \eta(Y)\varphi X$$

torsiyonuna sahip bir afin konneksiyondur ve tektir.

Teorem. M^{2n+1} manifoldunun genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna göre sıfır olması için gerek ve yeter koşul $M^{2n+1}, H^{2n+1}(-1)$ hiperbolik uzayına göre lokal olarak izometrik olmasıdır.

Teorem. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu Tanaka-Webster konneksiyona sahip neredeyse Kenmotsu manifold olsun. M^{2n+1} manifoldunun $\bar{\nabla}$ ve ∇ konneksiyonlarına göre Ricci yarı simetrilerinin denk olması için gerek ve yeter koşul M^{2n+1} manifoldunun Levi-Civita konneksiyonuna göre Einstein manifold olmasıdır.

Teorem. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu Tanaka-Webster konneksiyona sahip neredeyse Kenmotsu manifold olsun. M^{2n+1} manifoldu üzerinde $\bar{Q}.\bar{R} = 0$ ve $Q.R = 0$ olması için gerek ve yeter koşul M^{2n+1} manifoldunun Levi-Civita konneksiyonuna göre Einstein manifold olmasıdır.

Teorem. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu neredeyse Kenmotsu manifold olsun. M^{2n+1} üzerinde genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna göre ve Levi-Civita konneksiyonuna göre Concircular eğrilik tensörleri eşittir.

Teorem. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu Tanaka-Webster konneksiyona sahip neredeyse Kenmotsu manifold olsun. M^{2n+1} üzerinde $\bar{Z}(X, Y).\bar{S} = 0$ koşulunu

sağlaması için gerek ve yeter koşul Levi-Civita konneksiyonuna göre manifoldun Einstein olmasıdır.



6. KAYNAKLAR

- [1] Başarı, A. and Murathan C., 2008, On generalised φ -reccurent Kenmotsu manifolds, *SDÜ Fen Dergisi* 3(1), 91–97.
- [2] Blair, D.E., 1976, Contact manifolds in Riemannian geometry, *Lect. Notes Math.* 509, SpringerVerlag.
- [3] Blair, D. E., 2010, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*. Second Edition. Birkhauser, Boston, USA, 360 p.
- [4] Blair, D.E., 2002, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, *Progress in Math.* 203, Birkhauser Boston.
- [5] Boeckx, E., Kowalski, O. and Vanhecke, L., 1996, *Riemannian Manifolds of Conullity Two*, Singapore World Sci. Publishing.
- [6] Boothby, W. M. and Wang, H. C., 1958, On contact manifolds, *Ann. of Math.* 68 721–734.
- [7] Boynueyri, G., 2022, Schouten Van Kampen konneksiyonuna sahip neredeyse Kenmotsu manifoldlar, Yüksek Lisans Tezi, *Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya, 87 sayfa.
- [8] Cartan, E., 1951, *Geometry of Riemannian Spaces*, Translated by J. Glazebrook, Math Sci Press, Massachusetts, 507 p.
- [9] Cho, J.T., 1999, CR-structures on real hypersurfaces of a complex space form, *Publ. Math.* 54, 473–487.
- [10] Cho, J.T., 2008 Pseudo-Einstein CR-structures on real hypersurfaces in a complex space form, *Hokkaido Math. J.* 37, 1–17.
- [11] Couty, R., 1959, Sur les transformations des variétés riemanniennes et kahleriennes, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 9, 147-248
- [12] De, A., 2010, On Kenmotsu Manifold, *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, Volume 2, 1-6.
- [13] Deszcz, R., 1992, On pseudosymmetric spaces, *Bull. Soc. Math. Belg. Ser. A*, 44, 1–34.
- [14] Ehresmann, C., 1950, Sur les varietes presque complexes, *Proc. Int. Congr. Math.* Vol2, 412-419.
- [15] Gallot, S., Hulin, D., Lafontaine, J., 2004, *Riemann Geometry*, 3rd ed., XVI, 322 p., Springer Universitext, ISBN: 9783540204930.
- [16] Ghosh, G., & Chand, D. U., 2017 Kenmotsu manifolds with generalized Tanaka-Webster connection. *Publications de l'Institut Mathematique*, 102(116), 221-230.

- [17] Gonzalez, J. C. and Chinea, D., 1989, Quasi-Sasakian homogeneous structures on the generalized Heisenberg group $H(p,1)$, *Proc. Amer. Math.*, 105 173-184.
- [18] Heidari, N., Kashani, N. H. P., Najhafi, B., 2017, Nearly Kaehler and Nearly Kenmotsu Manifolds, *Turk J. Math.*, 201.
- [19] Janssens, D. and Vanhecke, L., 1981, Almost contact structures and curvature tensors, *Kodai Math. J.*, 4:1 1-27.
- [20] Kenmotsu, K., 1972, A class of almost contact Riemannian manifolds, *Tohoku Math. J.* 24, 93–103.
- [21] Kirichenko, V.F., 2001, On the geometry of Kenmotsu manifolds, *Dokl. Akad. Nauk, Ross. Akad. Nauk* 380, 585–587.
- [22] Kowalski, O., 1996, An explicit classification of 3-dimensional Riemannian spaces satisfying $R(X, Y) \cdot R = 0$, *Czech. Math. J.* 46(121), 427–474.
- [23] Küpeli Erken, İ., 2010, Paralel kenmotsu manifoldlar, Yüksek lisans tezi, *Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Bursa.
- [24] Küpeli Erken İ., Dacko P., Murathan C., 2015, On the Existence of Proper Nearly Kenmotsu Manifolds, *Mediterranean Journal of Mathematics* *Mathematics*, Vol. 37.
- [25] Lichnerowicz, A., 1952, Courbure, nombres de Betti et espaces symmetriques, *Proc. Internat. Congress Math. (Cambridge, 1950)*, Amer. Math. Soc., Vol. II, 216- 223.
- [26] Najafi, B., Kashani, N. H., 2013, On Nearly Kenmotsu Manifolds, *Turkish Journal of Mathematics*, Vol. 37.
- [27] Olszak, Z., 1981, On almost cosymplectic manifolds, *Kodai Math*, 4(2) 239-250.
- [28] O'Neill B., 1983, *Semi Riemannian Geometry*, A. Press, London.
- [29] Perktas, S.Y., Acet, B.E. and Kiliç, E., 2013, Kenmotsu manifold with generalised Tanaka–Webster connection, *Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi* 3(2), 79–93.
- [30] Pitis, G., 2007, Geomtry of Kenmotsu manifolds, *Univ. Transilvania of Braşov, Romania*.
- [31] Schouten, J.A., 1954, Ricci calculus, An introduction to tensor analysis and its geometrical applications, Springer-Verlag, Berlin.
- [32] Singh, G. P., Srivastava, S. K., 2016, On Einstein Nearly Kenmotsu Manifolds, *International Journal of Mathematics Research*, Volume 8, Number 1, 19-24.
- [33] Sinjukov, N.S., 1962, Poctu simmetriceskie Rimanovi proctranstva, *Pervaja Vsesojuz. Geometr. Konferencia, Tezisi Dokladov*, Kiev, 84 p.

- [34] Spivak, M., 1965, *Calculus on Manifolds*, Reading, Massachusetts, W.A. Benjamin, Inc., ISBN: 0805902193.
- [35] Szabó, Z.I., 1982, structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X, Y) \cdot R = 0$, the local version, *J. Differ. Geom.* 17, 531–582.
- [36] Takagi, R., 1975, Real hypersurfaces in complex projective space with constant principal curvatures, *J. Math. Soc. Japan* 27, 45–53.
- [37] Tanaka, N., 1976, On non-degenerate real hypersurface, graded Lie algebra and Cartan connections, *Japan. J. Math., New Ser.* 2, 131–190.
- [38] Tanno, S., 1969, The automorphism groups of almost contact Riemannian manifold, *Tohoku Math. J.* 21, 21–38.
- [39] Verrheyen, P., Verstraelen, L., 1985, A new intrinsic characterization of hypercylinders in Euclidean spaces, *Kyungpook Math. J.* 25, 1–4.
- [40] Yano K., Kon M., 1984, *Structures on manifolds*, Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Corp. Singapore.
- [41] Webster, S.M., 1978, Pseudohermitian structures on a real hypersurface, *J. Differ. Geom.* 13, 25–41