

**STANDART OLMAYAN BÜYÜME KOŞULUNU İÇEREN
STEKLOV SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN
İNCELENMESİ**

VAHUP MURAD

HAZİRAN 2022

DİYARBAKIR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**STANDART OLMAYAN BÜYÜME KOŞULUNU İÇEREN
STEKLOV SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN
İNCELENMESİ**

VAHUP MURAD

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV
YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
YÜKSEK LİSANS TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

HAZİRAN 2022

DİYARBAKIR

STANDART OLMAYAN BÜYÜME KOŞULUNU İÇEREN STEKLOV SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ

Vahup MURAD tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı**'nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

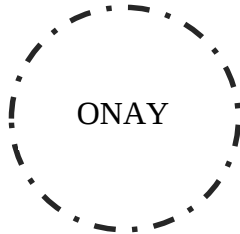
Doç. Dr. Zehra YÜCEDAĞ
Danışman, **Matematik Bölümü**
Dicle Üniversitesi

Sınav Jürisi:

Doç. Dr. Hasan DALMAN (*)
Matematik Bölümü,
Batman Üniversitesi

Doç. Dr. Zehra YÜCEDAĞ (**)
Matematik Bölümü,
Dicle Üniversitesi

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü
Dicle Üniversitesi



Savunma Tarihi: 21 / 06/2022

(*) Sınav Jürisi kısmının birinci satırına Jüri Başkanının bilgilerini yazınız.

(**) Sınav Jürisi kısmının ikinci satırına Tez Danışmanının bilgilerini yazınız.

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılıyıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımınla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyad: Vahup MURAD

İmza:

TEŞEKKÜR

Öncelikle tezimin bütünüyle yardım ve katkılarıyla yönlendiren, desteğini sabrını ve zamanını hiç esirgemeyen danışmanım **Doç. Dr. Zehra YÜCEDAĞ**'a sonsuz teşekkür ederim.

Bugüne ulaşmamda gereken her desteği sunan **Doç. Dr. Ali İhsan MUT**'a teşekkürü borç bilirim.

En önemlisi, kendimi bazı zamanlar başarabilmemi inanmasam da bana inandıkları için sevgili **Annem**'e ve **Babam**'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	viii
ÖZET.....	x
ABSTRACT	xi
1. GİRİŞ	1
1.1 Değişken Üslü Uzayların Tarihi	1
1.2 Önceki Çalışmalar	3
1.3 Temel Problem	9
2. ÖN BİLGİLER.....	11
2.1 Temel Tanımlar	11
2.2 Süreklilik Kavramı Ve Sürekli Fonksiyonlar Uzayı	14
2.3 Operatör Kavramı.....	17
2.4. Lineer Olmayan Operatörlerde Türev Kavramı	18
2.5 Ölçüm Kavramı	19
2.6 $L^p(\Omega)$ Uzayı	21
2.7 $W^{m,p}(\Omega)$ Uzayı	23
2.8 $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ Uzayı	25
2.9 $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ Uzayı	27
3. VARYASYONEL YAKLAŞIMDA KULLANILAN BAZI TEOREMLER VE UYGULAMALARI	29
3.1 Standart Ve Standard Olmayan Büyüme Koşullu Denklemlerin Çözümlerinde Kullanılan Teoremler	29
3.2 Teoremlerin Kullanıldığı Bazı Çalışmalar	36
4. $p(x)$ -LAPLACE OPERATÖRÜNÜ İÇEREN STEKLOV SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN ÇÖZÜM.....	39

4.1 Temel Problem	39
4.2 Tanım ve Teoremler	41
4.3 Sonuçlar	47
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	52
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	58



SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simge	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^N$	N boyutlu Euclid uzayı
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
F	$\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ kümelerinden herhangi birisi
$\ \cdot\ $	$\ \cdot\ : V \rightarrow \mathbb{R}_+$, norm
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, iç çarpım
$u_n \rightarrow u$	Kuvvetli yakınsaklık
$u_n \rightharpoonup u$	Zayıf yakınsaklık
$\partial\Omega$	Ω 'nın sınırı
C	Süreklili fonksiyonlar uzayı
C^p	p . mertebeye kadar türevli ve sürekli fonksiyonlar uzayı
C^∞	Kendisi ve sonsuz mertebeden türevleri sürekli olan fonksiyonlar uzayı
$C_0^\infty(\Omega)$	Sonlu bir bölge dışında kendisi ve bütün mertebeden türevleri sıfır olan fonksiyonlar uzayı
$L(U, V)$	$L: U \rightarrow V$ tanımlanan lineer dönüşümlerin kümesi
I	Birim dönüşüm
$\bar{A}$	A nın kapanışı
V^*	V in dual uzayı
V^{**}	V nin ikinci dual uzayı
$(V, \mathcal{U}, \mathcal{M})$	Ölçüm uzayı
$\mathcal{M}(A)$	A nın ölçümü
L^p	p . kuvveti Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı

$L^1_{loc}(\Omega)$	Ω nın kompakt alt kümesinde 1.dereceden integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L^p(\cdot)$	Değişken Üslü Lebesgue uzayı
$L^\infty(\Omega)$	Ω bölgesindeki hhh yerde sınırlı fonksiyonlar uzayı
$L^p_b(\Omega)$	Ağırlık Lebesgue uzayı
$\rho_p(\cdot)$	Modüler fonksiyon
$W^{m,p}$	Sobolev uzayı
$W^{m,p}(\cdot)$	Değişken Üslü Sobolev uzayı
$W^{m,p}_0(\Omega)$	$W^{m,p}$ uzayındaki $(m - 1)$. mertebeye kadar türevleri sıfır olan fonksiyonlar uzayı.
∇u	$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n})$
Δu	$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n}$

ÖZET

STANDART OLMAYAN BÜYÜME KOŞULUNU İÇEREN STEKLOV SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ

Vahup, Murad

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Danışman: Doç. Dr. Zehra Yücedağ

Temmuz 2022, 69 sayfa

Bu tezde, varyasyonel yaklaşım kullanılarak standart olmayan büyüme koşulunu içeren Steklov sınır değerli bir problemin sıfırdan farklı bir tane zayıf çözümünün varlığı değişken üslü Sobolev uzayında incelenmiştir.

Birinci bölümde, öncelikle problemimizin çözümünün araştırıldığı uzay olan değişken üslü Lebesgue uzayı ve değişken üslü Sobolev uzaylarının tarihi gelişimi hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra da son yıllarda varyasyonel yaklaşım kullanılarak bu uzaylarda farklı sınır koşuluna sahip bazı çalışmalar incelenmiştir. Sonra da üzerinde çalışacağımız standart olmayan büyüme koşulunu içeren Steklov sınır değer problemi verilmiştir.

İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teorem hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra, üzerinde çalıştığımız değişken üslü Lebesgue uzayları ile ilgili temel tanım, teoremler ve notasyonlar hakkında bilgi verilmiştir. Ayrıca, değişken üslü Sobolev uzayı tanımlandıktan sonra bu uzay ile ilgili gerekli olan tanım, teoremler ve notasyonlar hakkında bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde, varyasyonel yaklaşım hakkında bilgi verildikten sonra standart ve standart olmayan büyüme koşulunu içeren sınır değer problemlerinin çözümlerinin varlığını göstermek için varyasyonel yaklaşım da kullanılan bazı teoremler verilmiştir. Çalışmamızın bu kısmında teoremleri kullanmak için gerekli olan bazı tanımlara yer verilmiştir. En son kısmında da bu teoremler ile birlikte bazı özel tanımlar kullanılarak varyasyonel yaklaşım altında yapılan bazı çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde, tez çalışmasının orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu kısımda, standart olmayan büyüme koşulunu içeren Steklov sınır değerli problemin varyasyonel yaklaşım altında Mountain-Pass teoremi ile birlikte Ambrosetti-Rabinowitz koşulu bir arada kullanılarak problemin sıfırdan farklı bir tane zayıf çözümünün varlığı gösterilmiştir. Bu çözüm araştırılırken, probleme karşılık gelen enerji fonksiyoneli bir araç olarak kullanılmıştır. Zayıf çözüm değişken üslü uzayda araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Değişken Üslü Lebesgue - Sobolev uzayları, Varyasyonel yaklaşım, Mountain-Pass teoremi, Ambrosetti-Rabinowitz koşulu, Zayıf çözüm

ABSTRACT

INVESTIGATION OF SOLUTIONS OF THE STEKLOV BOUNDARY VALUE PROBLEM INVOLVING NONSTANDARD GROWTH CONDITION

Vahup, Murad

Master of Science in Department of Mathematic

Supervisor: Doç. Dr. Zehra Yücedağ

June 2022, 69 pages

In this thesis, the existence of a weak nontrivial solution of a Steklov boundary value problem with non-standard growth condition is investigated in variable exponent Sobolev space using a variational approach.

In the first chapter, information is given about the historical development of the variable exponent Lebesgue space and the variable exponent Sobolev spaces, which are the spaces in which the solution of our problem is investigated. Then, in recent years, some studies with different boundary conditions in these spaces have been examined by using the variational approach. After that, the Steklov boundary value problem, which includes the non-standard growth condition that we will work on, is given.

In the second chapter, information about the basic definition and theorem that will be used in other chapters is given. Then, information about the basic definitions, theorems and notations about the variable exponent Lebesgue spaces we have studied is given. In addition, after defining the variable exponent Sobolev space, information about the necessary definitions, theorems and notations about this space is given.

In the third chapter, after giving information about the variational approach, some theorems used in the variational approach are given to show the existence of solutions to boundary value problems involving standard and non-standard growth conditions. In this part of our study, some definitions necessary to use theorems are given. In the last part, information about some studies carried out under the variational approach is given by using some special definitions together with these theorems.

The fourth chapter constitutes the original part of the thesis. In this section, the existence of a non-zero weak solution of the Steklov boundary value problem involving non-standard growth condition is shown by using the Mountain-Pass theorem together with the Ambrosetti-Rabinowitz condition under the variational approach. While investigating this solution, the energy functional corresponding to the problem was used as a tool. The weak solution is investigated in variable exponent space.

Keywords: Lebesgue-Sobolev spaces with Variable Exponent, Variational approach, Mountain-Pass theorem, Ambrosetti-Rabinowitz condition, Weak solution

1. GİRİŞ

1.1 Değişken Üslü Uzayların Tarihi

Son yıllarda standart olmayan büyüme koşullu varyasyonel problemler, diferansiyel denklemler ve kısmi diferansiyel ile ilgili çalışmalar da çok yoğun olarak çalışılmaktadır. Bu alanlarda yoğun olarak çalışılmalar yapılmasının altında yatan nedenlerden biri uygulama alanları olarak da gösterilmektedir. Bu uygulama alanların başında; Bilgisayar Bilimi, Yapay ve Biyolojik ağ sistemleri, Mekanik mühendisliği, Kontrol Sistemleri ve Ekonomi gibi alanlardaki lineer olmayan diferansiyel denklemlerin matematiksel modelleri olarak sayabiliriz.

Değişken üslü Lebesgue uzayları ile ilgili temel bilgi, ilk kez W. Orlicz tarafında 1931 yazılan çalışmasında tanımlandı (Orlicz,1931). Bu çalışmada, aşağıdaki soru dikkate alınmıştır: $(p_i > 1)$ için (p_i) ve (x_i) reel sayı dizileri için $\sum_i x_i^{p_i}$ toplamı yakınsak olarak alındığı zaman, $\sum_i x_i y_i$ toplamının yakınsak olması için (y_i) üzerindeki bırakılması gereken gerekli ve yeterli koşulların $\exists \lambda > 0$ ve $p_i' = \frac{p_i}{(p_i-1)}$ için $\sum_i (\lambda y_i)^{p_i'}$ yakınsak olmasıdır. Bu durumun bir sonucu ise $\ell^{p(\cdot)}$ uzayındaki Hölder eşitsizliğini verir. Aynı zamanda Orlicz, reel ekseninde üzerinde değişken üslü fonksiyonlar uzayını yani değişken üslü Lebesgue uzayını $(L^{p(\cdot)})$ inceledi ve aynı ekseninde Hölder eşitsizliğinin ispatını yaptı. Daha sonraki çalışmalarında da görüldüğü gibi Orlicz, değişken üslü uzaylardaki çalışmalarını bırakarak kendi adını taşıyan fonksiyon uzayları teorisi alanındaki çalışmalara yoğunluk göstermeye başladı (Musielak ve Orlicz, 1959).

Orlicz uzaylar teorisi; $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ölçülebilir fonksiyonlar, en az bir $\lambda > 0$ için φ bazı özel koşulları sağlayan bir fonksiyon ve

$$\varrho(\lambda u) = \int_{\Omega} \varphi(\lambda |u(x)|) dx < \infty$$

şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu uzay olup ve bu uzay L^{φ} ile gösterilir. Ayrıca, Nakano (1950; 1951) tarafından ilk defa sistematik olarak; φ fonksiyonu bazı özel koşulları sağlarsa modüler fonksiyon uzayları olarak adlandırılıp ve değişken üslü Lebesgue uzayların daha genel uzayları olarak ele alınmıştır. Sonra ki yıllarda da, modular uzaylar bir çok kişi tarafından ayrıntılı olarak çalışılmıştır. Musielak

(1983) tarafından da, Modüler fonksiyon uzaylarına dair ayrıntılı çalışmalar yapılmıştır.

Reel aralık üzerinde, değişken üslü Lebesgue uzayları bağımsız olarak Rus araştırmacılar tarafından ve özellikle I. Sharapovdinov tarafından incelenmiştir. Bu araştırmacılar, Tesnov (1961) tarafından ortaya konulmuş olan bir çalışmadan yararlanmışlar. Daha sonra, bu çalışma Portnov tarafından özetlenip tekrar düzenlenmiştir (Portnov, 1966; Portnov, 1967). Aşağıdaki soru: $p(\cdot): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ölçülebilir fonksiyonlar, u sabit bir fonksiyon ve $v, L^{p(\cdot)}([a, b])$ sonlu boyutlu bir alt uzayında değişmek üzere,

$$\int_a^b |u(x) - v(x)|^{p(x)} dx$$

integralinin minimize problemi, Tesnov tarafından ortaya konulmuştur ve Sharapovdinov tarafından çözülmüştür (Sharapudinov, 1979; Sharapudinov, 1983; Sharapudinov, 1989). Ayrıca, Sharapudinov (1979) çalışmasında, Lebesgue uzayında Luxemburg normunu

$$|u|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \lambda > 0: \int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}$$

tanımlamıştır ve eğer $p(\cdot)$ fonksiyonu $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ koşulunu sağlarsa Lebesgue uzayının yanısırmalı uzay olduğunu göstermiştir.

Zhikov (1987), standart olmayan büyüme koşullu $\int_{\Omega} (1 + |\nabla u|^2)^{p(\cdot)}$ varyasyonel integrallerini göz önüne alarak değişken üslü uzayların çalışmasına yeni bir boyut kazandırmıştır. Bu alandaki başka bir eski çalışmada Kovacik tarafından yapılmıştır fakat bu çalışma sonraki çalışmaların gelişimine çok az katkıda bulunmuştur (Kovacik, 1995). Ancak, değişken üslü uzaylarla ilgili önemli bir adım 90'lı yılların başlarında Kovacik ve Rakosnik (1991) 'nın birlikte yaptığı bir çalışmada görülmüştür. Bu çalışma, R^n de Lebesgue ve Sobolev uzayların temel özelliklerinin çoğu inşa etmiştir. Sonraki on yılda bu uzayları anlamak için çeşitli ve ciddi çaba harcanmıştır.

2000 yılların başında ise değişken üslü uzayların çalışmalarında sistematik bir şekilde çeşitli gelişmeler olmuştur: ilk olarak standart olmayan büyüme koşullu ve coercive

koşuluna sahip varyasyonel integraller ile değişken üslü uzaylar arasındaki ilişki çalışılmıştır (Zhikov,1995; Acerbi ve Mingione, 2001). Daha sonra da standart olmayan varyasyonel problemlerin, Electrorheological Akışkanlar olarak adlandırılan modellenme ile ilgili olduğu ortaya çıkarılmıştır (Rajagopal ve Růžička, 1996; Rajagopal ve Růžička,2001; Růžička, 2000). Ayrıca, fizik ve mühendislik alanlarında son on yılda, bu akışkanların akışkan mekaniğinin özelliklerinin incelenmesi açısından önemli bir konu olmuştur (Diening, 2002; Růžička, 2000; Winema ve Rajagopal, 1995). Daha sonraki dönemler ise diğer uygulamaları olan thermorheological fluids, Lineer olmayan esneklik Teorisi ve Görüntü İyileştirme problemleri üzerinde yoğun olarak çalışılmıştır (Antontsev ve Rodrigues, 2006; Antontsev ve Shmarev, 2005; Zhikov, 1987).

1.2 Önceki Çalışmalar

Son yıllarda, değişken üslü fonksiyon uzayları konusundaki çalışmalar görülebilir oranda önemi artmıştır. Örneğin; "değişken üslü" başlıklı araştırmaların sayısı 2000 yılından önce 15 çalışma ile sınırlıyken, bu sayı 2000 ile 2004 yılları arasında 31'e çıkarılmış, 2005 ile 2010 yılları arasında bu çalışmaların sayısı 242'e ulaşmıştır ve 2010 yılından sonra bu sayı ciddi anlamda artış göstermeye başlamıştır.

Kováčik ve Rákosník (1991) tarafından, değişken üslü fonksiyon uzaylarının ana özellikleri hakkında temel bir çalışma olmuştur. Bu çalışmadan, on yıl sonra da konunun aynı özellikleri X.L. Fan ve D. Zhao (2001) tarafından farklı yöntemler kullanarak elde edilmiştir. Daha sonra da, bu konuyla ilgili daha kapsamlı hem araştırma makaleleri hem de kitaplar yazılmaya devam edilmiştir (Willem, 1996; Diening, Hästö ve Nekvinda, 2004; Samko, 2005; Diening, Harjulehto, Hästö ve Růžička, 2011).

Bu alanda, farklı sınır koşullarında yapılan bazı çalışmalar aşağıda verilmiştir.

Yücedağ (2015) çalışmasında, $\Omega, \mathbb{R}^N (N \geq 3)$ 'de düzgün sınırlı bir bölge, her $x \in \bar{\Omega}$ için $p \in C(\bar{\Omega})$, $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Caratheodery koşulunu sağlayan bir fonksiyon ve $div(a(x, \nabla u))$ ise $p(x)$ -Laplace operatörü olmak üzere;

$$\begin{cases} -div(a(x, \nabla u)) = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki Dirichlet sınır değer problemini için Mountain-Pass teoremini ve Fountain teoremini kullanarak denklemin çözümlerinin varlığı ve katlılığı gösterilmiştir.

Avci (2013), aşağıdaki $p(x)$ -Laplace operatörü içeren Dirichlet problemlerini incelemiştir;

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Yukarıdaki denklemler de $\Omega, \mathbb{R}^N$ de düzgün sınırlı bir bölge, $1 < p(x) < \infty$ olmak üzere $p(x), \bar{\Omega}'$ da sürekli fonksiyon ve $f: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Caratheodory koşulunu sağlayan bir fonksiyondur. Bu problemde, Ambrosetti ve Palais-Smale koşullarını kullanmadan, Fountain teoremini kullanarak çözümlerin varlığı ve katlılığı elde edilmiştir.

Fan ve Zhang (2003), aşağıdaki çalışmalarında $p(x)$ -Laplace operatörünü içeren Dirichlet sınır değer probleminin çözümlerinin varlığı için gerek ve yeter koşulları sunmuştur.

$$\begin{cases} -div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

denklemden $\Omega, \mathbb{R}^n$ de düzgün sınırlı bir bölge, $1 < p(x), p, \bar{\Omega}'$ da sürekli bir fonksiyon olarak alınmıştır.

Fan (2005) de; $p(x)$ -Laplace operatörünü içeren aşağıdaki Dirichlet sınır değer problemleri için Kritik nokta teoremi kullanılarak çözümlerinin varlığını ve katlılığını çalışmıştır;

$$\begin{cases} -div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = \lambda a_1(x)g_1(x, u) + \mu a_2(x)g_2(x, u) & \Omega' da, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Yukarıdaki denklemden; $N \geq 2$ olmak üzere $\Omega, \mathbb{R}^N$ de sınırlı bir bölge ve $p \in C(\bar{\Omega})$ için $1 < p^- := \inf_{\Omega} p(x) \leq p^+ := \sup_{\Omega} p(x) < \infty$ olarak alınır. Ayrıca, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve $x \in \Omega$ olmak üzere $i = 1, 2$ için $a_i > 0$ ve $a_i \in L^{r_i(x)}(\Omega)$. Her bir $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ ve c_i pozitif sabitleri için de $g_i: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Caratheodory koşulu sağlayan fonksiyonel

$$|g_i(x, t)| \leq c_1 + c_2 |t|^{q_i(x)-1}$$

ve

$$q_i(x) < \frac{r_i(x) - 1}{r_i(x)} p^*(x), \quad \forall x \in \Omega$$

koşullarına sağlasın. Yukarıdaki eşitsizlikte $p^*(x)$ ifadesi

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N - p(x)}, & p(x) < N \\ \infty & , p(x) \geq N \end{cases}$$

olarak alınmıştır. Araştırmacı,

$$(A_1): q_1^+ < p^- \text{ ve } (A_2) : q_2^- > p^+$$

koşulları altında yukarıdaki problemi ele almıştır.

Shi ve Ding (2009) çalışmalarında ise aşağıdaki $p(x)$ -Laplace operatörünü içeren Neumann sınır değer problemini incelemişlerdir;

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) + |u|^{p(x)-2} u = \lambda f(x, u), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Problemde; $N \geq 3$ olmak üzere Ω, R^N de düzgün sınırlı bir bölge, $\lambda > 0$ reel bir sayı $p, \bar{\Omega}'$ da sürekli bir fonksiyon, $\inf_{y \in \bar{\Omega}} p(y) > N$ ve $f: \Omega \times R \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon. $\nu, \partial\Omega$ 'da dış birim normal vektör olsun. Ayrıca $f(x, u)$ fonksiyonu da aşağıdaki koşulları sağlamaktadır;

$(f_1) : \alpha \in C(\bar{\Omega})$ fonksiyonu $\alpha(x) > 1$ ve $1 < \alpha^+ = \max_{x \in \bar{\Omega}} \alpha(x) < \alpha^- = \min_{x \in \bar{\Omega}} \alpha(x)$ olarak alınırsa, bu durumda her $(x, t) \in \Omega \times R$ için $f: \Omega \times R \rightarrow R$ Carathodory fonksiyon

$$|f(x, t)| \leq C_1 + C_2 |t|^{\alpha(x)-1},$$

$(f_2) : |t| \in (0, 1)$ için $f(x, t) < 0$ ve $t_0 > 1$ olmak üzere $|t| \in (t_0, \infty)$ için de $f(x, t) \geq M > 0$.

Yukarıdaki çalışmada yazarlar, Ricceri teoremini kullanarak problemin en az üç tane çözümünün varlığın göstermişlerdir.

Yücedağ, vd. (2012) çalışmalarında ise, aşağıdaki $p(x)$ -Laplace operatörünü içeren Kirchhoff tipinden Neumann sınır değerli eliptik problemini incelemişler;

$$\begin{cases} -M_1 \left(\int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = f(u, v) + h_1(x), & x \in \Omega, \\ -M_2 \left(\int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla v|^{p(x)} dx \right) \operatorname{div}(|\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v) = f(u, v) + h_2(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial \Omega. \end{cases}$$

Problemde araştırmacılar; $N \geq 2$ olmak üzere Ω, R^N de düzgün sınırlı bir bölge ve $1 < p(x) < N$ olmak üzere $p(x)$, $\bar{\Omega}'$ da sürekli fonksiyon olarak, varyasyonel yöntem ve Ekeland varyasyonel prensibini kullanarak denklemin çözümlerinin varlığını ve bir tane zayıf çözümün varlığını çalışmışlardır.

Mihailiescu (2007) ise; aşağıdaki çalışmada $p(x)$ -büyüme koşullu eliptik Neumann sınır değerli denklemi ele almıştır.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) + |u|^{p(x)-2} u = \lambda f(x, u), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial \Omega. \end{cases}$$

Problemde; Ω, R^N de düzgün sınırlı bir bölge, $N \geq 3$, $\lambda > 0$ reel bir sayı, $p, \bar{\Omega}'$ da sürekli bir fonksiyon, $\inf_{y \in \bar{\Omega}} p(y) > N$ ve $\nu, \partial \Omega'$ da dış birim normal vektör olarak alınmıştır. Ayrıca, $f: \Omega \times R \rightarrow R$ tanımlı sürekli fonksiyonu da aşağıdaki koşullu sağlayacak şekilde seçilmiştir;

$q(x) \in C_+(\bar{\Omega})$ fonksiyonu, her $x \in \bar{\Omega}$ için $2 < q(x) < \inf_{y \in \bar{\Omega}} p(y)$ olmak üzere

$$f(x, t) = |t|^{q(x)-1} t - t.$$

Bu durumda, çalışmada yazar Ricceri teoremini kullanarak problemin en az üç tane çözümünün varlığını incelemiştir.

Deng (2008) aşağıdaki çalışmada; $p(x)$ -Laplace içeren Steklov sınır değer problemini incelemiştir.

$$\begin{cases} \Delta_{p(x)} u = |u|^{p(x)-2} u & \Omega' \text{ da} \\ |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \gamma} = \lambda |u|^{p(x)-2} u & \partial \Omega' \text{ da} \end{cases}$$

Yukarıdaki problemde; $N \geq 2$ olmak üzere Ω, R^N de sınırlı bir bölge, $\lambda > 0$ reel bir sayı, $p(x) > 1$ için $p \in C(\bar{\Omega})$ ve $\gamma, \partial \Omega$ da dış birim normal vektör olarak

alınmıştır. Bu çalışmada; problemin sınırsız çokluktaki öz değerlerinin varlığı incelenmiştir.

Allaoui, vd. (2012) çalışmalarında, lineer olmayan Steklov sınır değer problemini incelemişler;

$$\begin{cases} \Delta_{p(x)} u = |u|^{p(x)-2} u, & x \in \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda f(x, u), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Bu denklemde; $\Omega, \mathbb{R}^N$ de sınırlı bir bölge, $N \geq 2, \nu, \partial\Omega$ 'da dış birim normal türev, $\lambda > 0$ reel bir sayı, p fonksiyonu $\bar{\Omega}$ da sürekli bir fonksiyonu, $\inf_{x \in \bar{\Omega}} p(x) > N$ ve $f: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bazı özel koşulları sağlayan Carathéodory fonksiyonudur. Bu çalışmada yazarlar; Ricceri teoremi, Fuontain teoremi ve Mountain-Pass teoremini kullanarak problemin çözümlerinin varlığı ve katlılığını göstermişlerdir.

Ayoujil (2014) çalışmasında, aşağıdaki $p(x)$ -Laplace operatörünü içeren Steklov sınır değer problemini çalışmıştır;

$$\begin{cases} \Delta_{p(x)} u = |u|^{p(x)-2} u, & x \in \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = f(x, u), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Problemde; $\Omega, \mathbb{R}^N$ de düzgün sınırlı bir bölge, $p \in C_+(\bar{\Omega})$ ve $f: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı bir Caratheodory fonksiyonudur. Bu çalışmada; yukarıdaki denklemde Ambrosetti koşulunu kullanmadan, Kritik nokta teoremini ve Cerami koşulunu kullanarak peblemin çözümlerinin varlığı ve katlılığı gösterilmiştir.

Zerouali, vd. (2015)'de yaptıkları çalışmaların da, Ricceri teoremini kullanarak aşağıdaki Steklov sınır değerli eliptik denkleminin en az üç çözümünün varlığını göstermişlerdir;

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a(x, \nabla u)] + |u|^{p(x)-2} u = \lambda f(x, u), & x \in \Omega, \\ a(x, \nabla u) \cdot \nu = \mu g(x, u), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Bu problemde; $\mu, \lambda \in \mathbb{R}^+, \Omega \in \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ düzgün sınırlı bir bölge, $\nu, \partial\Omega$ 'da dış birim normal vektor, $p: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a: \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ olsun. Ayrıca, $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bazı özel koşulları sağlayan iki Carathéodory fonksiyonudur.

Ben Ali, vd. (2017) çalışmalarında, aşağıdaki $p(x)$ -Laplace içeren Steklov sınır değer problemini incelemişler;

$$\begin{cases} \Delta_{p(x)} u = a(x)|u|^{p(x)-2}u, & x \in \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda V(x)|u|^{p(x)-2}u, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Problemde; $\Omega, R^N (N \geq 2)$ de sınırlı bir bölge, λ pozitif bir parametre, $\text{ess inf}_{\Omega} a(x) > 0$ olmak üzere $a \in L^{\infty}(\Omega)$, p ve q fonksiyonları $\bar{\Omega}'$ sürekli birer fonksiyon, her $x \in \partial\Omega$ ve $\frac{N-1}{p(x)-1} < s(x)$ için $V \in L^{s(x)}(\partial\Omega)$ ve $\nu, \partial\Omega$ da dış birim normal vektör olarak alınmaktadır. Bu çalışmada min-max metodu ve ekeland varyasyonel prensibi kullanarak problemin sıfırdan farklı zayıf çözümünün varlığı elde edilmiştir.

Karim, vd. (2018) çalışmalarda; $N \geq 2$ olmak üzere Ω, R^N de sınırlı bir bölge, $\nu, \partial\Omega$ 'da dış birim normal vektör, $f: \partial\Omega \times R \rightarrow R$ ve $a: \bar{\Omega} \times R^N \rightarrow R^N$ belirli koşulları sağlasın aşağıdaki $p(x)$ -Laplace içeren Steklov sınır değerli eliptik denklemi ele almışlar;

$$\begin{cases} -\text{div}(a(x, \nabla u)) = 0, & x \in \Omega, \\ (a(x, \nabla u)) \cdot \nu = f(x, u) & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

$F \in C^1(\bar{\Omega} \times R, R)$, $G \in C^1(\partial\Omega \times R, R)$. Bu çalışmada yazarlar, Mountain-Pass teoremi ve Ricceri teoremini kullanılarak problemin çözümlerinin varlığı ve katlılığı elde edilmiştir.

Ben Ali (2018) çalışmasında ise, aşağıdaki lineer olmayan Steklov sınır değer problemini çalışmıştır;

$$\begin{cases} \Delta_{p(x)} u = a(x)|u|^{p(x)-2}u, & x \in \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda f(x, u), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Bu denklemde; $N \geq 2$ olmak üzere Ω, R^N de sınırlı bir bölge, λ pozitif bir parametre, $\text{ess inf}_{\Omega} a > 0$ olmak üzere $a(x) \in L^{\infty}(\Omega)$, $p(x)$ fonksiyonu $\bar{\Omega}$ da sürekli bir fonksiyon, $f: \partial\Omega \times R \rightarrow R$ bazı özel koşulları sağlayan sürekli bir fonksiyon ve $\nu, \partial\Omega$ da dış birim normal vektör olarak alınmıştır. Bu çalışmada; min-max metodu ve Ekeland varyasyonel prensibi kullanılarak problemin sıfırdan farklı zayıf çözümlerinin varlığı incelenmiştir.

Hsini, vd. (2020) çalışmasında, aşağıdaki lineer olmayan ağırlıklı Steklov sınır değer problemini incelemiştir,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\xi(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + a(x)|u|^{p(x)-2}u = \lambda \frac{\partial F}{\partial u}(x, u), & x \in \Omega, \\ \xi(x)|\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial n} = \beta \frac{\partial G}{\partial u}(x, u), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Bu denklemde; $N \geq 2$ olmak üzere Ω, R^N de sınırlı bir bölge, β, λ pozitif birer parametre, $\operatorname{ess\,inf}_{\Omega} a > 0$ olmak üzere $a(x) \in L^{\infty}(\Omega)$, $p(x)$ fonksiyonu $\bar{\Omega}$ da sürekli bir fonksiyon ve $n, \partial\Omega$ 'da dış birim normal vektör. Ayrıca, $\xi(x)$ 'de $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $0 < \xi_1 \leq \xi(x) \leq \xi_2$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon ve $F \in C^1(\bar{\Omega} \times R, R)$, $G \in C^1(\partial\Omega \times R, R)$ olarak tanımlanmıştır. Bu çalışmada, yukarıdaki denklemin varyasyonel prensibi ve Ekeland prensibi kullanılarak denklemin sıfırdan farklı bir çözümün varlığı gösterilmiştir.

Ourraoui (2021) çalışmasında, aşağıdaki lineer olmayan steklov sınır değerli probleminin çözümlerin varlığı ve tekliğinin yanısıra pozitif bir çözümünün varlığını da göstermiştir,

$$\begin{cases} \Delta_{p(x)} u = |u|^{p(x)-2}u, & x \in \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial v} = f(x, u), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Bu denklemde; $N \geq 2$ olmak üzere Ω, R^N de sınırlı bir bölge, $p \in C(\bar{\Omega})$, $f: \partial\Omega \times R \rightarrow R$ bazı özel koşulları sağlayan sürekli bir fonksiyon ve v, Ω da dış birim normal vektör olarak alınmıştır.

1.3 Temel Problem

Yukarıdaki çalışmalar incelendikten sonra tezimizde aşağıdaki (1.3.1) problem çalışılmıştır.

Bu çalışmada; $N \geq 2$ olmak üzere $\Omega, \mathbb{R}^N$ de düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge, λ pozitif bir parametre, her $x \in \bar{\Omega}$ için $p \in C(\bar{\Omega})$, $g: \partial\Omega \times R \rightarrow R$ Carathéodory koşulu ile birlikte bazı özel koşulları sağlayan bir fonksiyon, $A(x, \varepsilon): \bar{\Omega} \times R^N \rightarrow R^N$

operatörün ε 'a göre türevi $a(x, \varepsilon): \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ sürekli olan bir operatör ve $v, \partial\Omega$ 'da dış birim normal vektör olmak üzere;

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a(x, \nabla u)) = 0, & x \in \Omega, \\ a(x, \nabla u) \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda g(x, u), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.3.1)$$

şeklindeki standart olmayan büyüme koşullunu içeren Steklov sınır değerli problem ele alınmıştır. Bu problem de; Varyasyonel yaklaşım altında, Mountain-Pass teoremi ile birlikte Ambrosetti- Rabinowitz koşulu kullanılarak sıfırdan farklı bir tane zayıf çözümünün varlığı Değişken Üslü Sobolev uzayında $E = W_0^{1,p(x)}$ incelenmiştir.

$\operatorname{div}(a(x, \nabla u))$ de $\Delta_{p(x)} u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u)$ şeklinde tanımlanan $p(x)$ -Laplace operatöründen daha genel bir operatör.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1 V boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. Her $x, y \in V$ ve $a \in F$ için $V \times V$ den V ye tanımlı

$$+ : (u, v) \rightarrow u + v$$

işlemi ve $F \times V$ den V ye tanımlı

$$\cdot : (a, u) \rightarrow a \cdot u$$

işlemi aşağıdaki aksiyonları sağlıyorsa, o zaman V kümesine F üzerinde bir *vektör uzay* veya (*lineer uzay*) denir.

Her $a, b \in F$ ve her $u, v, k \in V$ için

- (i) $v + u = u + v$,
- (ii) $(u + v) + k = u + (v + k)$,
- (iii) $u = u + 0$ olacak şekilde bir tek $0 \in V$ vardır,
- (iv) $(-u) + u = 0$ olacak şekilde tek $-u \in V$ vardır,
- (v) $1u = u$,
- (vi) $(ab)u = a(bu)$,
- (vii) $a(u + v) = au + av$,
- (viii) $(a + b)u = au + bu$.

Tanım 2.1.2 F reel veya kompleks sayılar cismi ve V uzayı F cismi üzerinde bir vektör uzay olsun. Her $v, k \in V$ ve $\forall \beta \in F$ için

- (i) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$,
- (ii) $\|\beta v\| = |\beta| \|v\|$,
- (iii) $\|v + k\| \leq \|v\| + \|k\|$,

koşullarını sağlayan

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$v \rightarrow \|v\|$$

dönüşümüne V vektör uzay üzerinde bir *norm* denir.

Tanım 2.1.3 V bir normlu uzay ve $(v_n) \subset V$ bir dizi olsun. Eğer, (v_n) dizisi aşağıdaki koşulu sağlarsa, o zaman $n = 1, 2, \dots$ iken (v_n) dizisine V normlu uzayında bir *Cauchy dizisi* denir ve aşağıdaki şekilde yazılır

" $\forall \varepsilon > 0, \forall c \in \mathbb{N}$ ve $\forall n > n_\varepsilon$ için $\|v_{n+c} - v_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı vardır"

Tanım 2.1.4 Eğer $(V, \|\cdot\|_V)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisini yakınsadığı değer bu uzayda oluyorsa V tam normlu uzay veya Banach uzayı denir.

Teorem 2.1.5 V bir normlu uzay olsun. aşağıdaki önermeler doğru olur

- (i) V uzayındaki yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.
- (ii) V uzayındaki her cauchy dizisi sınırlıdır.
- (iii) (v_n) , V uzayında bir cauchy dizisi olsun. Bu durumda $v \in V$ noktasına yakınsak bir (v_{n_j}) alt dizisine sahipse (v_n) dizisi v 'ya yakınsak olur.
- (iv) V uzayında (v_n) ve (v_m) iki cauchy dizisi olsunlar o zaman $(v_n + v_m)$ dizisi bir cauchy dizisi olur

(Soykan, 2016).

Tanım 2.1.6 $(V, \|\cdot\|_V)$ normlu uzayında tanımlı bütün lineer ve sürekli fonksiyonlardan oluşan uzaya V vektör uzayının dual uzayı denir ve V^* ile gösterilir. Bu uzayda bir $v \in V^*$ elemanının normu

$$\|v\|_{V^*} = \sup_{x \in V, x \neq 0} \frac{|v(x)|}{\|x\|_V}$$

şeklinde tanımlanır. V^* uzayı da $\|\cdot\|_{V^*}$ normu ile bir Banach uzayı olur.

Tanım 2.1.7. Eğer bir $(V, \|\cdot\|_V)$ normlu uzayında $A \subset V$ olacak şekilde yoğun sayılabilir bir alt kümesi varsa V uzayına ayrılabilir uzay denir.

Teorem 2.1.8. V bir Banach uzayı ve V nin duali olan V^* uzayı ayrılabilir olsun. O zaman V uzayı ayrılabilirdir (Brezis, 1992).

Sonuç 2.1.9. V bir Banach uzayı olsun. V yanışmalı ve ayrılabilir ise, V^* yanışmalı ve ayrılabilirdir.

Tanım 2.1.10. V^* normlu uzayının duali olan $V^{**} = (V^*)^*$ vektör uzayına V uzayının ikinci duali uzayı olarak adlandırılır ve V^{**} şeklinde gösterilir. V^{**} ikinci dual uzayı da bir Banach uzayı olur.

Tanım 2.1.11. Aşağıdaki koşulu sağlayan bir Banach uzayına düzgün konveks uzay denir.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ve $v, u \in V$ olmak üzere

$$\|v\| < 1, \|u\| < 1, \|v - u\| > \varepsilon$$

ise

$$\left\| \frac{v+u}{2} \right\| < 1 - \delta$$

olur.

Teorem 2.1.12. Düzgün konveks her Banach uzayı yansımalıdır (Brezis, 1992).

Tanım 2.1.13. $(V, \|\cdot\|_V)$ normlu vektör uzay ve $(v_n), V$ normlu vektör uzayının bir dizisi olsun. Eğer,

$$\|v_n - v\| \rightarrow 0$$

olacak şekilde $v \in V$ varsa $(v_n), v$ ‘ya *kuvvetli yakınsar* denir ve $v_n \rightarrow v_0$ (güçlü yakınsar) şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.14. $(v_n), V$ normlu vektör uzayının bir dizisi olsun. Eğer her $g \in V^*$ için

$$g(v_n) \rightarrow g(v_0)$$

yada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(v_n) = g(v_0)$$

sağlıyor ise (v_n) dizisi $v_0 \in V$ elemanına *zayıf yakınsar* denir ve $v_n \rightharpoonup v_0$ (zayıf yakınsar) şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.15. $(v_n), V$ normlu vektör uzayının bir dizisi ve $v_0 \in V$ olsun. Bu durumda

- (i) (v_n) dizisi v_0 zayıf yakınsıyorsa v_0 elemanı tektir;
- (ii) (v_n) dizisi v_0 zayıf yakınsıyorsa (v_n) dizisi V uzayında sınırlıdır.
- (iii) (v_n) dizisi v_0 zayıf yakınsıyorsa (v_n) dizisinin her alt dizisi v_0 ‘a zayıf yakınsar;
- (iv) (v_n) dizisi v_0 güçlü yakınsıyorsa, (v_n) dizisi v_0 zayıf yakınsıyorsa olur ($v_n \rightharpoonup v_0$)
- (v) Sonlu boyutlu uzayda güçlü yakınsaklık ve zayıf yakınsaklık kavramları çakışır (Yücedağ, 2010).

Teorem 2.1.16. $(v_n), (V, \|\cdot\|_V)$ yansımalı bir Banach uzayının sınırlı bir dizisi olsun. O zaman $(v_n), V$ uzayında zayıf yakınsak bir alt diziye sahip olur (Yücedağ, 2010).

Tanım 2.1.17. $A, (V, \|\cdot\|_V)$ normlu uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer A kümesinin kapanışı V ye eşit olursa diğer bir deyişle $\bar{A} = V$ ise, A ’ya V ’de *yoğundur* denir.

Tanım 2.1.18. Eğer bir V normlu lineer vektör uzayında $T_V(V) = V^{**}$ olursa (yani T_V örten ise) V uzayına *yansımalı uzay (reflexive)* denir.

Teorem 2.1.19. $(V, \|\cdot\|_V)$ yansımali bir Banach uzay olsun. O zaman $(V, \|\cdot\|_V)$ uzayının her alt uzayı da yansımali olur (Soykan, 2016).

Teorem 2.1.20. Bir $(V, \|\cdot\|_V)$ normlu uzayının yansımali olması için gerekli ve yeterli şart V^* uzayının yansımali olmasıdır (Yücedağ, 2010).

Tanım 2.1.21. Bir $(V, \|\cdot\|_V)$ normlu lineer uzayın üzerindeki $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlarsa bu dönüşüme *iç çarpım* denir.

- (i) Her $v \in V$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ ve $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$;
- (ii) Her $v, k \in V$ için $\langle v, k \rangle = \langle k, v \rangle$;
- (iii) Her $c \in \mathbb{R}$ ve her $v, k \in V$ için $\langle cv, k \rangle = c\langle v, k \rangle$;
- (iv) Her $v, k, u \in V$ için $\langle v + k, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle k, u \rangle$.

İç çarpım tanımlanan lineer uzaya *iç çarpım uzayı* denir.

Tanım 2.1.22. $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bir iç çarpım uzay olsun. $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uzayının indirgediği normdan indirgenen metriğe göre tam ise bu uzaya bir *Hilbert uzayı* adı verilir.

Tanım 2.1.23. V ve U birer normlu vektör uzay olsunlar. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa V uzayı U uzayına gömülür denir ve $V \hookrightarrow U$ şeklinde gösterilir.

- (i) $V \subset U$
- (ii) $v \in V$ olmak üzere her $I(v) = v$ birim operatörü olmak üzere v ten bağımsız bir c_1 sabiti için

$$\|I(v)\|_U \leq c_1 \|v\|_V.$$

Eğer $I(x)$ birim operatörü kompakt ise V uzayı U uzayına *kompat gömülür* denir ve $V \hookrightarrow U$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.24. Herhangi bir V normlu lineer uzayında, aşağıdaki T_V dönüşümünü tanımlayalım. Eğer, $v \in V$ olmak üzere $T_V : V \rightarrow V^{**}$ için

$$T_V(v) = G(v),$$

oluyorsa T_V 'ye *kanonik gömme* denir.

2. 2 Süreklilik Kavramı Ve Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

Tanım 2.2.1. V ve U iki normlu lineer uzay olsunlar ve $v_0 \in V$ için de $g : V \rightarrow U$ opreatör olarak tanımlansın. Eğer aşağıdaki koşul sağlanıyorsa g, v_0 noktasında *süreklidir* denir

“ $v_n \rightarrow v_0$ iken $g(v_n) \rightarrow g(v_0)$ oluyorsa, dolayısıyla

$$\lim_{\|v_n - v_0\|_V \rightarrow 0} \|g(v_n) - g(v_0)\|_U = 0 .”$$

Tanım 2.2.2. V bir lineer uzay, F bir cisim olsun. $g: V \rightarrow F$ şeklinde tanımlanan fonksiyona *fonksiyonel* denir.

Eğer, g fonksiyoneli her $v, k \in V$ ve her $a, b \in F$ için

$$g(av + bk) = ag(v) + bg(k)$$

Şartının sağlarsa o zaman g fonksiyoneline *lineer fonksiyonel* denir.

Tanım 2.2.3. $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach uzay ve $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonel olarak verilsin. Eğer, her $v \in V$ elemanı için

$$g(v) \leq n$$

olacak şekilde pozitif bir $n \in \mathbb{R}$ sayısı varsa g fonksiyoneline *sınırlıdır veya iyi tanımlıdır* denir.

Tanım 2.2.4. $V \subset \mathbb{R}^N$ açık bir küme ve $g: V \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tanımlı bir fonksiyonel olmak üzere

(i) Hemen hemen her yerde $v \in V$ için $\xi \rightarrow g(v, \xi)$ sürekli,

(ii) Her $\xi \in \mathbb{R}^N$ için $v \rightarrow g(v, \xi)$ ölçülebilir,

oluyorsa f fonksiyonu Carathéodory koşulunu sağlar denir.

Tanım 2.2.5. $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonel ve $v_0 \in V$ elemanı için $v_n \rightarrow v_0$ olacak şekilde $(v_n) \in V$ dizisi verilsin. Eğer, aşağıdaki eşitsizlik sağlanıyorsa, g fonksiyoneline $v_0 \in V$ noktasında *alttan yarı-süreklidir* denir.

$$g(v_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} g(v_n)$$

Eğer, yukarıdaki eşitsizliği $v_n \rightarrow v_0$ dizisi için sağlanıyorsa, g fonksiyoneline $v_0 \in V$ noktasında *alttan zayıf yarı-süreklidir* denir.

Tanım 2.2.6. $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonel ve $v_0 \in V$ elemanı için $v_n \rightarrow v_0$ olacak şekilde $(v_n) \in V$ dizisi verilsin. Eğer, aşağıdaki eşitsizlik sağlanıyorsa, g fonksiyoneline $v_0 \in V$ noktasında *üstten yarı-süreklidir* denir.

$$g(v_0) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} g(v_n)$$

Eğer, yukarıdaki eşitsizliği $v_n \rightarrow v_0$ dizisi için sağlanıyorsa, g fonksiyoneline $v_0 \in V$ noktasında *üstten zayıf yarı-süreklidir* denir.

O halde, bir fonksiyonel alttan yarı-süreklili ve üstten yarı-süreklili ise bu fonksiyonel aynı zamanda sürekli olur.

Tanım 2.2.7. Ω kümesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar kümesine *sürekli fonksiyonlar uzayı* denir ve $C(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.8. Aşağıdaki notasyonları kullanabiliriz.

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ şeklinde yazılan a ya *çoklu indis* denir ve

$$|a| = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

olarak yazılabilir. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\partial_j v = \frac{\partial v}{\partial x_j}$ olur ve

$$D^a v = \frac{\partial^{|a|} v}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_n^{a_n}} = D^{\alpha_1} v D^{\alpha_2} v D^{\alpha_3} v \dots D^{\alpha_n} v$$

olarak tanımlanır. Ayrıca,

$$\nabla v = (\partial_1 v, \dots, \partial_n v), \quad |\nabla v| = \left(\sum_{j=1}^n |\partial_j v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

olarak yazılır.

Tanım 2.2.9. Ω kümesi üzerinde tanımlı m . mertebeye kadar bütün $D^a v$ türevleri sürekli olan fonksiyonlar $C^m(\Omega)$ ile gösterilir. Bu uzayda tanımlanan norm

$$\|v\|_{C^m(\Omega)} = \sum_{|a| \leq m} \sup |D^a v(x)|$$

olarak tanımlanır. Eğer $m = 0$ olarak alınırsa, Ω kümesi üzerinde tanımlı bütün sürekli fonksiyonların uzayı olur ve $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ ile gösterilir. Ayrıca, $m = \infty$ alındığı zaman da; bütün mertebeden türevli ve sürekli fonksiyonlar uzayı olur ve $C^\infty(\Omega)$ ile gösterilir. Yani

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$$

Tanım 2.2.10. $\mathbb{R}^N$ de tanımlı ve sonlu bir bölge dışında kendisi ve bütün mertebeden türevleri sıfır olan fonksiyonlar sınıfına *kompakt destekli fonksiyonlar* denir. Yani

$$\text{supp } v = \overline{\{x: v(x) \neq 0\}}.$$

$\text{supp } v \subset \subset \Omega$ olduğunda v fonksiyonu Ω da kompakt desteğe sahiptir denir ve $C_0^\infty(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.11. $(V, \|\cdot\|_V)$ bir Banach uzay ve $g \in C^1(V, \mathbb{R})$ tanımlı bir fonksiyonel olmak üzere, eğer $v \in V$ için

$$\|v\|_V \rightarrow \infty \text{ olduğunda } g(v) \rightarrow \infty$$

ifadesi sağlanıyorsa g fonksiyoneli V üzerinde *Coercive fonksiyonel* denir.

Tanım 2.2.12. Bir $(V, \|\cdot\|_V)$ normlu uzay ve $A \subset V$ alt kümesi verilirsin. Eğer V içindeki her dizinin A 'de bir limit noktası varsa A kümesine V 'de bir *dizisel kompakt küme* denir.

Tanım 2.2.13. $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach uzayı ve tanım kümesi $A \subset V$ olan $g: A \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyoneli verilsin. g fonksiyonelinin A üzerinde *düzgün sürekli* olabilmesi için gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall v, k \in A$ için

$$\|v - k\|_V < \delta \Rightarrow |g(v) - g(k)| < \varepsilon$$

olmasıdır.

2.3 Operatör Kavramı

Tanım 2.3.1. V ve U aynı bir F cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A \subset V$ olsun. A kümesinin her elemanına U kümesinin bir elemanı karşılık getiren bir kurala A 'dan U 'ya bir *dönüşüm* veya *operatör* denir.

Tanım 2.3.2. V ve U aynı bir F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. Eğer, $L: U \rightarrow V$ tanımlı operatör aşağıdaki koşulu sağlıyorsa L operatörüne *lineer operatör* denir.

“Her $v, u \in U$ ve her $a, b \in F$ için

$$L(av + bu) = aL(v) + bL(u).$$

Tanım 2.3.3. V ve U normlu vektör uzaylar ve $v \in V$ noktası verilsin. Eğer, $L: U \rightarrow V$ operatör aşağıdaki şartı sağlarsa L operatörü v noktasında *süreklidir* denir

$v_n \rightarrow v$ iken $L(v_n) \rightarrow L(v)$ oluyorsa

$$\lim_{\|v_n - v\|_U \rightarrow 0} \|L(v_n) - L(v)\|_V = 0$$

olur.

Tanım 2.3.4. V ve U normlu vektör uzaylar $L: V \rightarrow U$ bir lineer operatör olsun. Eğer her $v \in V$ noktası için aşağıdaki koşulu sağlayan bir c pozitif sayısı bulunabiliyorsa L operatörüne *sınırlıdır* denir ve aşağıdaki şekilde yazılır,

$$\|Lv\|_U \leq c\|v\|_V.$$

Teorem 2.3.5. V ve U normlu vektör uzaylar $L: V \rightarrow U$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar biri diğerlerine denktir

- (i) L sınırlıdır.
- (ii) L süreklidir.
- (iii) L , bir $v \in V$ noktasında süreklidir.

(iv) Eğer $B = \{v: \|v\|_V \leq 1\}$ kümesi V de kapalı birim yuvar ise $L(B)$, V 'de sınırlı bir kümedir (Bayraktar,2006).

Tanım 2.3.6. V ve U normlu vektör uzaylar $L: V \rightarrow U$ bir sınırlı lineer operatör olsun. Bu durumda aşağıdaki sayıya L operatörün *normu* denir ve $\|L\|$ ile gösterilir.

$$\sup\{\|L(x)\|_U : x \in D(L), \|x\|_V \leq 1\}$$

2. 4. Lineer Olmayan Operatörlerde Türev Kavramı

Tanım 2.4.1. V ve U birer Banach uzay, $L: V \rightarrow U$ sınırlı lineer operatör, $D \subset V$ olmak üzere $T: D \rightarrow U$ bir operatör ve $v_1 \in V$ noktası verilsin. Eğer her $h \in V$ için

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(v_1+th)-T(v_1)}{t} = Lh \quad (2.4.1)$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir $L: V \rightarrow U$ sınırlı lineer operatörü T operatörüne v_1 noktasında ve h yönündeki *Gateaux diferansiyellenebilir* denir. Ayrıca, L operatörüne T operatörünün *Gateaux türevi* denir ve $T'(v_1) = L$ ile gösterilir. Eğer (2.4.1) ifadesi, her $v_1 \in V$ için sağlanıyorsa T operatörü *Gateaux diferansiyellenebilir* denir.

Teorem 2.4.2. (Ortalama Değer Teoremi) V bir Banach uzay ve $v, h \in V$ olmak üzere, eğer $T: V \rightarrow U$ fonksiyoneli Gateaux diferansiyellenebilir ise

$$T(v+h) - T(v) = T'(v+th)h$$

olacak şekilde $0 < t < 1$ sayısı vardır (Avcı, 2011).

Tanım 2.4.3. V ve U birer Banach uzay olsunlar ve $D \subset U$ için $T: D \rightarrow U$ lineer olmayan operatörü verilsin. Eğer, her $v \in D$ elemanı için

$$T(v) = T(v_1) + L(v - v_1) + F(v - v_1) \quad (2.4.2)$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir $L: V \rightarrow U$ sınırlı lineer operatörü ve

$$\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{\|F(v - v_1)\|}{\|v - v_1\|} = 0$$

şeklinde $F: D \rightarrow U$ operatörü varsa, T operatörüne $v_1 \in D$ noktasında *Frechet diferansiyellenebilir* (T - diferansiyellenebilir) denir. Ayrıca, (2.4.1) ifadesindeki L operatörüne $T(x)$ operatörünün x_1 noktasındaki *Frechet türevi* denir. Bu durum $T'(v_1) = L$ veya $DT(v_1) = L$ ifadelerinden biri ile gösterilir.

Eğer yukarıdaki tanımda $v - v_1 = h$ alınırsa aşağıdaki tanımda yazılabilir.

Tanım 2.4.4. V ve U birer Banach uzay olsunlar. Eğer $T: D \subset U \rightarrow V$ lineer olmayan operatörü verilsin. Eğer,

$$\lim_{\|h\|_U \rightarrow 0} \frac{\|T(v_1+h)-T(v_1)-Lh\|_V}{\|h\|_U} = 0 \quad (2.4.3)$$

olacak şekilde $L: V \rightarrow U$ sınırlı lineer operatörü varsa T operatörüne $v_1 \in D$ noktasında için *Frechet diferansiyellenebilir* denir. Ayrıca, L operatörüne $T(v)$ operatörünün v_1 noktasındaki *Frechet türevi* denir. Eğer (2.4.3) ifadesi, her $v \in D$ için sağlanıyorsa T operatörü *Frechet diferansiyellenebilir* denir.

Tanım 2.4.5. $v \in D$ noktasında T – türevlenebilen bir $T(v): U \rightarrow V$ operatörü için $dT(v_1, h) = T'(v_1)h$

eşitliğine $T(v)$ operatörüne v_1 noktasında h artımına uygun *Frechet diferansiyeli* denir ve $(T - \text{diferansiyeli})$ şeklinde gösterilir.

Eğer $F(v)$ operatörü v_1 noktasında F – türevlenebilirse, $F(v)$, v_1 noktasında süreklidir.

Teorem 2.4.6. V ve U birer Banach uzay olsunlar ve $T: U \rightarrow V$ lineer olmayan operatörü verilsin. Eğer, T operatörü $v_1 \in U$ noktasında için *Frechet diferansiyellenebilir*se T operatörü $v_1 \in U$ noktasında süreklidir.

Teorem 2.4.6, Gateaux diferansiyellenebilir fonksiyonlar için genelde geçerli değildir (Siddiqi 2004).

Teorem 2.4.7. Bir operatörün bir noktada Frechet türevi varsa o noktada Gateaux türevi de vardır ve bu iki türev birbirine eşittir (Siddiqi 2004).

2. 5 Ölçüm Kavramı

Tanım 2.5.1. Bir V kümesinin alt kümelerinin bir $\mathcal{U}$ sınıfı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\mathcal{U}$ 'ya bir σ -cebir (veya σ -cisim) denir.

$$V \in \mathcal{U}$$

$$S \in \mathcal{U} \Rightarrow V/S \in \mathcal{U}$$

$$n = 1, 2, \dots \text{ olmak üzere } S_n \in \mathcal{U} \text{ ise } \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathcal{U}.$$

Ayrıca, bir $\mathcal{U}$ ailesine V üzerinde *ölçülebilir* denir.

Tanım 2.5.2. V bir küme ve $\mathcal{U}, V$ 'in alt kümelerinin bir σ -cebiri olsun. Bir $\mathcal{M}: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \infty$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlasın.

$$(i) \quad \mathcal{M}(\emptyset) = 0,$$

(ii) ξ sayılabilir toplamsaldır, yani eğer $S_j \in \mathcal{U}, j = 1, 2, \dots$, sayılabilir her ailesi için ikişer ikişer ayrık kümelerse, o zaman

$$\mathcal{M}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{M}(S_j),$$

Bu durumda $\mathcal{M}$ fonksiyonuna bir *ölçüm* denir ve $(V, \mathcal{U}, \mathcal{M})$ üçlüsüne bir *ölçüm uzayı* denir.

Teorem 2.5.3. R^N nin alt kümelerinin $\mathcal{U}$ ailesi R^N üzerinde bir σ -cebiri ve $\mathcal{U}$ üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\mathcal{M}$ ölçümü vardır

- (i) R^N 'de her açık küme $\mathcal{U}$ ya aittir,
- (ii) Eğer $X \subset Y, Y \in \mathcal{U}$ ve $\mathcal{M}(Y) = 0$ ise, o zaman $X \in \mathcal{U}$ ve $\mathcal{M}(X) = 0$ olur,
- (iii) $X = \{x \in \mathbb{R}^N : a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, 2, \dots, n\}$ ise o zaman $X \in \mathcal{U}$ ve

$$\mathcal{M}(X) = \prod_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j),$$

- (iv) $\mathcal{M}$ ötelemeye göre değişmeyendir. Yani; eğer $x \in R^N$ ve $X \in \mathcal{U}$ ise $x + X = \{x + y : y \in X\} \in \mathcal{U}$ ve $\mathcal{M}(x + X) = \mathcal{M}(X)$

(Adams, 1975).

Tanım 2.5.4. Yukarıdaki özellikleri sağlayan $\mathcal{U}$ ailesinin elemanlarına R^N 'nin Lebesgue ölçülebilir alt kümeleri adı verilir ve $\mathcal{M}$ fonksiyonuna R^N 'nin Lebesgue ölçümü ve herhangi bir $A \in \mathcal{U}$ için $\mathcal{M}(A)$ ifadesine A nın *ölçümü* denir.

Tanım 2.5.5. Eğer $X \subset Y \subset \mathbb{R}^N$ ve $\mathcal{M}(Y) = 0$ ise bu durumda $X - Y$ kümesinin her noktasında sağlanan bir özellik X kümesinde *hemen hemen her yerde* sağlanan özellik adını alır.

Tanım 2.5.6. g fonksiyonu ölçülebilir bir küme üzerinde tanımlasın ve değerleri $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ kümesinden alsın. Eğer her $c \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki küme ölçülebilir ise, g fonksiyonuna *ölçülebilir fonksiyon* denir.

$$\{x : g(x) > c\}$$

Teorem 2.5.7. (Lebesgue Teoremi) $g_n: \Omega \rightarrow R^+$ ($n = 1, 2, \dots$) negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olmak üzere

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{\infty} g_n(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} g_n(x) dx$$

olur (Brezis, 2010).

Teorem 2.5.8. (Monoton Yakınsaklık Teoremi-Levi Teoremi) $n = 1, 2, \dots$ için (g_n) , $(V, \mathcal{U}, \mathcal{M})$ ölçüm uzayında reel değerli, integrallenebilir ve azalmayan fonksiyonların bir dizisi olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n(x) dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx$$

olur (Pişkin, 2017).

Teorem 2.5.9. (Fatou lemması): Ω, R^N ölçülebilir bir alt kümesi ve $\{g_n\}$ negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda integral olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n(x) dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx$$

eşitsizliği yazılabilir (Brezis, 2010).

Teorem 2.5.10. (Lebesgue Baskınlık Yakınsama Teoremi): Ω, R^N ölçülebilir bir alt kümesi ve $n = 1, 2, \dots$ için $\{g_n\}$ reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Ayrıca, her $x \in \Omega$ ve her bir n için $|g_n(x)| \leq f(x)$ olacak şekilde bir $f: \Omega \rightarrow R^+$ fonksiyonu vardır. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n(x) dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx$$

olur (Pişkin, 2017).

2. 6 $L^p(\Omega)$ Uzayı

Tanım 2.6.1. Ω, R^N de bir bölge olsun. $1 \leq p < \infty$ ve v, Ω bölgesinde ölçülebilir fonksiyon olmak üzere $|v(x)|^p$ Lebesgue anlamında integrallenebilirse, yani

$$\int_{\Omega} |v(x)|^p dx < \infty$$

oluyorsa, bu durumda $v(x)$ fonksiyonları *p. kuvvetten integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı* olarak adını alır ve bu $v(x)$ fonksiyonların old $L^p(\Omega)$ veya L^p ile gösterilir.

Diğer bir ifade ile; Ω, R^N de bir bölge olsun. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$L^p(\Omega) = \left\{ v: v: \Omega \rightarrow R \text{ ölçülebilir fonksiyon ve } \int_{\Omega} |v(x)|^p < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya Lebesgue uzayı adı verilir. Bu uzaydaki norm

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \|v\|_p = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.6.1)$$

olarak yazılır. $L^p(\Omega)$ uzayı, $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere (2.6.1) ifadesinde tanımlanan norm altında bir Banach uzayıdır (Brezis, 2010).

Teorem 2.6.2. $L^p(\Omega)$ lineer bir uzayıdır (Brezis, 2010).

Tanım 2.6.3. $\Omega, \mathbb{R}^N$ bir bölge ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere Ω bölgesinin her bir kompakt alt kümesinde p . kuvvetten integrallenebilen Ω bölgesindeki bütün ölçülebilir fonksiyonların uzayına $L^p_{loc}(\Omega)$ uzayı adı verilir.

Tanım 2.6.4. Ω bölgesinde ölçülebilir bir v fonksiyonu için hemen hemen her yerde

$$|v(x)| \leq n$$

olacak şekilde bir n sabiti varsa $v(x)$ fonksiyonuna *hemen hemen her yerde sınırlıdır* denir. Böyle m ların en büyük alt sınırına $|v(x)|$ nin Ω bölgesindeki esas (essential) supremumu denir ve

$$\text{ess sup}_{x \in \Omega} |v(x)|$$

ile gösterilir.

Tanım 2.6.5. Ω bölgesi üzerinde tanımlanan hemen hemen sınırlı $v(x)$ fonksiyonların oluşturduğu uzaya $L^\infty(\Omega)$ denir, yani,

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} |v(x)| \leq m \text{ olacak şekilde bir } m \text{ sabiti vardır} \\ v: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : v \text{ ölçülebilir} \end{array} \right\}$$

Bu uzayda tanımlanan norm

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |v(x)|$$

$$= \inf\{n : |v| \leq n\}$$

olur.

Tanım 2.6.6. $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şeklinde yazılan eşitlikteki q sayısına p 'nin eşleneği denir.

Teorem 2.6.7. (Riesz-Fischer): $1 \leq p \leq \infty$ ise $L^p(\Omega)$ uzayı Banach uzayıdır (Brezis, 2010).

Teorem 2.6.8. $1 \leq p < \infty$ ve $u, v \geq 0$ ise

$$(u + v)^p \leq 2^{p-1}(u^p + v^p)$$

olur (Pişkin, 2017).

Teorem 2.6.9. (Young Eşitsizliği) $u, v \geq 0$ ve $p > 0$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

(Çekiş, 2005).

Teorem 2.6.10. (Hölder Eşitsizliği) $1 < p < \infty$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer

$v \in L^q(\Omega)$ ve $u \in L^p(\Omega)$ ise bu durumda $uv \in L^1(\Omega)$ ve

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

olur (Brezis, 1992).

Teorem 2.6.11. $(v_n), L^p$ de bir dizi ve $\|v_n - v\| \rightarrow 0$ olacak şekilde $v \in L^p$ olsun. Bu durumda

$$(i) \quad v_{n_k}(x) \rightarrow v(x)$$

$$(ii) \quad |v_{n_k}(x)| \leq h(x)$$

O zaman bir (v_{n_k}) dizisi ve $h \in L^p$ fonksiyonu vardır (Brezis, 1992).

Teorem 2.6.12. (Minkowski Eşitsizliği): $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $u, v \in L^p(\Omega)$ ise

$(u + v) \in L^p(\Omega)$ ve

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

olur (Çekiş, 2005).

Sonuç 2.6.13 $u, v \in L^\infty(\Omega)$ ise $u + v \in L^\infty(\Omega)$ ve

$$\|u + v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$$

olur (Pişkin, 2017).

Teorem 2.6.14. $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $L^p(\Omega)$ uzayı ayrılabilir, yanışmalıdır ve duali $L^q(\Omega)$ dır .

Teorem 2.6.15. $1 \leq p \leq q \leq \infty$, Ω sınırlı bir bölge ve $|\Omega| = \int_\Omega dx < \infty$ olsun. Eğer

$v \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $v \in L^p(\Omega)$ ve

$$\|v\|_p \leq |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|v\|_q$$

olur. Yani

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir. Eğer Ω bölgesinin ölçümü sonlu ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ ise

$$L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$$

Eğer bölge sonlu değilse gömülme geçerli değil (Adams, 1975).

2.7 $W^{m,p}(\Omega)$ Uzayı

Tanım 2.7.1. a bir çoklu indis ve $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ şeklinde olsun. O zaman aşağıdaki eşitlik sağlanıyorsa $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ ye u nun Ω daki *zayıf türevi* denir ve $v = D^a u$ şeklinde yazılır

$$\int_{\Omega} v(x) \vartheta(x) dx = (-1)^{|a|} \int_{\Omega} u(x) D^a \vartheta(x) dx, \quad \forall \vartheta \in C_0^\infty(\Omega).$$

Tanım 2.7.2. Ω, R^N bir bölge, $1 \leq p \leq \infty$ ve m negatif olmayan herhangi bir tamsayı olsun. Bu durumda

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) : D^a v \in L^p(\Omega), 0 \leq |a| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *Sobolev uzayı* denir.

$1 \leq p < \infty$ için bu zayda tanımlanan norm,

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|v\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |a| \leq m} \|D^a v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|v\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \|v\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |a| \leq m} \|D^a v\|_{L^\infty(\Omega)}$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıdaki normlar altında, $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı Banach uzaydır. Ayrıca, $m = 0$ ise $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ olur.

Tanım 2.7.3. Eğer her açık $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ kümesi için $v \in W^{m,p}(\Omega_1)$ oluyorsa v fonksiyonuna $W^{m,p}_{loc}$ uzayının elemanı denir.

Tanım 2.7.4. Ω sınırlı bir bölge olsun. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayında bulunan ve $(m-1)$. mertebeye kadar bütün türevleri Ω nin $\partial\Omega$ sınırında sıfır olan fonksiyonların kümesi $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayı adını alır. Buradan $W_0^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$ olur.

Diğer bir ifade ile; $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $W^{m,p}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ Sobolev uzaydır.

Teorem 2.7.5. Ω, R^N açık bir bölge olsun. Eğer $mp < N$, $1 \leq p < \infty$ ve $v \in W_0^{m,p}(\Omega)$ ise,

$$|v|_{p^*} \leq C \|v\|_{m,p}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C(N, m, p)$ sabiti vardır. Burada,

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np}{N-p}, & N > p \\ \infty, & N \leq p \end{cases}$$

olur (Çekiş, 2005).

Tanım 2.7.6. $p = 2$ iken

$$W^{2,p}(\Omega) = H^m(\Omega), \quad W_0^{2,p}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$$

ve $H^m(\Omega)$ uzayındaki norm

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |a| \leq m} |D^a v|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Olarak tanımlanır. $H^m(\Omega)$ uzayı

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |a| \leq m} \langle D^a u, D^a v \rangle$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayı oluşturur.

Teorem 2.7.7. Eğer $1 \leq p < \infty$ oluyorsa $W^{m,p}(\Omega)$ ve $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayları ayrılabilir. Aynı zaman, $1 < p < \infty$ ise $W^{m,p}(\Omega)$ ve $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayları yanışmalı ve düzgün konveks olur (Diening ve ark, 2011).

Tanım 2.7.8. Hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^N$ için $b(x) > 0$ olacak şekilde local integrallenebilir $b(x)$ fonksiyonuna *ağırlık fonksiyonu* denir.

Tanım 2.7.9. $1 < p < \infty$ ve $b(x)$ ağırlık fonksiyonu, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ açık bir bölge olmak üzere aşağıdaki şartını sağlayan ölçülebilir $v(x)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa *ağırlıklı Lebsgue uzayı* denir ve $L_b^p(\Omega)$ ile gösterilir

$$\int_{\Omega} b(x) |v(x)|^p dx < \infty.$$

Bu uzayda norm aşağıdaki şekilde yazılır;

$$\|v\|_{p,b} = \left(\int_{\Omega} b(x) |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Tanım 2.7.10. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ bir bölge, $1 \leq p \leq \infty$ ve m negatif olmayan herhangi bir tamsayı olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanan uzaya *ağırlıklı Sobolev uzayı* denir. Yani,

$$W_b^{m,p}(\Omega) = \{v \in L_b^p(\Omega) : D^a v \in L_b^p(\Omega), 0 \leq |a| \leq m\}.$$

Sobolev uzayında norm ($1 \leq p < \infty$)

$$\|v\|_{W_b^{m,p}} = \|u\|_{m,p,b} = \left(\sum_{0 \leq |a| \leq m} \|D^a v\|_{L_b^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

olarak tanımlanır.

2.8 $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ Uzayı

Ω, R^N de $|\Omega| > 0$ şeklinde bir bölge olmak üzere

$$C_+(\bar{\Omega}) = \{p: p(x) \in C(\bar{\Omega}), \inf p(x) > 1, \text{ her } x \in \bar{\Omega}\}$$

olarak tanımlanır ve $p(x) \in C_+(\bar{\Omega})$ olduğunda

$$1 < p^- = \inf_{x \in \bar{\Omega}} p(x) \leq p^+ = \sup_{x \in \bar{\Omega}} p(x) < \infty$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.8.1. Ω, R^N de $|\Omega| > 0$ şeklinde bir bölge olsun. Bu durumda aşağıdaki koşulu sağlayan ölçülebilir $v(x)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa *değişken üslü Lebesgue uzayı* denir ve $L^{p(x)}(\Omega)$ veya $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ile gösterilir.

$$\rho_{p(x)}(v) = \int_{\Omega} |v(x)|^{p(x)} dx < \infty$$

Burada $\rho_{p(\cdot)}(u)$ *modular fonksiyonel* olarak adlandırılır. Diğer bir ifade ile ; Ω, R^N de bir bölge olsun. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ v: v: \Omega \rightarrow R \text{ ölçülebilir fonksiyon ve } \int_{\Omega} |v(x)|^{p(x)} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *değişken üslü Lebesgue uzayı* adı verilir. Benzer şekilde, $p(x) \in C_+(\partial\Omega)$ olduğunda

$$L^{p(x)}(\partial\Omega) = \left\{ v: v: \partial\Omega \rightarrow R \text{ ölçülebilir fonksiyon ve } \int_{\partial\Omega} |v(x)|^{p(x)} < \infty \right\}$$

Tanım 2.8.2. $p^+ < \infty$ olmak üzere *değişken üslü Lebesgue uzayında norm* aşağıdaki şekilde yazılır,

$$|v|_{p(x)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{v}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}$$

ve bu norm *Luxemburg normu* adını alır. $(L^{p(x)}(\Omega), |u|_{p(x)})$ uzayı bu norm altında bir Banach uzayı olur.

Teorem 2.8.3. Eğer $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ ve $1 \leq p(x) < \infty$ ise bu durumda

(i) $|v|_{p(x)} < 1 (= 1; > 1)$ gerekli ve yeterli koşul $\rho_{p(x)}(v) < 1 (= 1; > 1)$

(ii) $|v|_{p(x)} > 1$ ise $|v|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho_{p(x)}(v) \leq |v|_{p(x)}^{p^+}$

(iii) $|v|_{p(x)} < 1$ ise $|v|_{p(x)}^{p^-} \geq \rho_{p(x)}(v) \geq |v|_{p(x)}^{p^+}$

(Fan ve Zhao, 2001).

Teorem 2.8.4. $u, u_n \in L^{p(x)}(\Omega)$ ($n=1,2,\dots$) ve $p^+ < \infty$ olmak üzere

(i) $\min \left(|v|_{p(x)}^{p^-}, |v|_{p(x)}^{p^+} \right) \leq \rho_{p(x)}(v) \leq \max \left(|v|_{p(x)}^{p^-}, |v|_{p(x)}^{p^+} \right),$

(ii) $|v_n|_{p(x)} \rightarrow 0 \ (\rightarrow \infty)$ gerekli ve yeterli koşul $\rho_{p(x)}(v_n) \rightarrow 0 \ (\rightarrow \infty)$

(iii) $|v_n - v|_{p(x)} \rightarrow 0 \ (\rightarrow \infty)$ gerekli ve yeterli koşul $\rho_{p(x)}(v_n - v) \rightarrow 0 \ (\rightarrow \infty).$

yazılır (Fan ve Zhang, 2003).

Önerme 2.8.5. $\varphi_{p(x)}(v) = \int_{\partial\Omega} |v|^{p(x)} d\sigma$ ve her bir $v \in L^{p(x)}(\partial\Omega)$ ise o zaman,

(i) $|v|_{L^{p(x)}(\partial\Omega)} \geq 1$ ise $|v|_{L^{p(x)}(\partial\Omega)}^{p^-} \leq \varphi_{p(x)}(v) \leq |v|_{L^{p(x)}(\partial\Omega)}^{p^+},$

(ii) $|v|_{L^{p(x)}(\partial\Omega)} < 1$ ise $|v|_{L^{p(x)}(\partial\Omega)}^{p^+} \leq \varphi_{p(x)}(v) \leq |v|_{L^{p(x)}(\partial\Omega)}^{p^-}$

yazılır (Wei ve Chen, 2012; Yücedag, 2019).

Teorem 2.8.6. Ω üzerinde tanımlı bütün sınırlı ve ölçülebilir fonksiyonlar uzayı $(L^{p(x)}(\Omega), |u|_{p(x)})$ uzayında yogundur (Diening, Harjulehto, Hästö ve Růžička, 2011;

Fan ve Zhao, 2001; Kováčik ve Rákosník, 1991).

Teorem 2.8.7. $p(x)$ ve $q(x)$ ölçülebilir fonksiyonlar ve her bir $x \in \Omega$ için $p(x) \in L^\infty(\Omega)$. Ayrıca, hemen hemen her $x \in \Omega$ için $1 \leq p(x)q(x) \leq \infty$ ve $u \in L^{q(x)}(\Omega)$ ise bu durumda

(i) $|v|_{p(x)q(x)} \geq 1$ ise $|v|_{p(x)q(x)}^{p^-} \leq ||v|^{p(x)}|_{q(x)} \leq |v|_{p(x)q(x)}^{p^+}$

(ii) $|v|_{p(x)q(x)} \leq 1$ ise $|v|_{p(x)q(x)}^{p^+} \geq ||v|^{p(x)}|_{q(x)} \geq |v|_{p(x)q(x)}^{p^-}$

(Fan ve Zhao, 2001).

Teorem 2.8.8. (Hölder Eşitsizliği) $L^{p'(x)}(\Omega)$ uzayının dual uzayı $L^{p(x)}(\Omega)$ ve $1/p(x) + 1/p'(x) = 1$ olarak tanımlansın Bu durumda, herbir $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ ve $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$ için

$$\left| \int_{\Omega} uv dx \right| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p^+} \right) |u|_{p(x)} |v|_{p'(x)} \quad (2.8.1)$$

eşitsizliği yazılır.

2.9 $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ Uzayı

Tanım 2.9.1. m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $\Omega \subset R^N$ bir bölge olsun. $|a| \leq m$ özellikli her a – çoklu indisi için Ω bölgesinde tanımlı $D^a v \in L^{p(x)}(\Omega)$ şeklindeki tüm u fonksiyonlarının sınıfına *değişken üslü Sobolev uzayı* denir ve

$$W^{m,p(x)}(\Omega) = \{v \in L^{p(x)}(\Omega) : D^a v \in L^{p(x)}(\Omega), |a| \leq m\}$$

olarak yazılır. Bu uzayda norm aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\|v\|_{W^{m,p(x)}(\Omega)} = \|v\|_{m,p(x)} = \sum_{|a| \leq m} \|D^a v\|_{p(x)}$$

Ayrıca, $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $W^{m,p(x)}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı $W_0^{m,p(x)}(\Omega)$ Sobolev uzayıdır.

Tanım 2.9.2. Ω, R^N sınırlı bir bölge olsun. Her $x \in \bar{\Omega}$ için $p(x), q(x) \in C_+(\bar{\Omega})$ ve $1 \leq p(x) < q(x)$ ise, o zaman $W^{m,q(x)}(\Omega) \rightarrow W^{m,p(x)}(\Omega)$ sürekli gömmesi vardır.

Tanım 2.9.3. $W^{m,p(x)}(\Omega)$ uzayında $m = 1$ olarak alınırsa, aşağıdaki uzayı elde ederiz

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{v \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla v| \in L^{p(x)}(\Omega)\}.$$

Bu uzaydaki normu

$$\|v\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = \|v\|_{1,p(x)} = |v|_{p(x)} + |\nabla v|_{p(x)}$$

olarak yazılır. Ayrıca, $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $W^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ Sobolev uzayıdır. $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ Sobolev uzayının normu ise

$$\|v\|_{p(x)} = |\nabla v|_{p(x)} \text{ olarak tanımlanır.}$$

Teorem 2.9.4. $W^{m,p(x)}(\Omega), W^{m,p(x)}(\Omega), W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ ve $W^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayları Banach uzaylardır (Edmunds ve Rákosník, 2000; Kováčik ve Rákosník, 1991).

Teorem 2.9.5. $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ ise $W^{m,p(x)}(\Omega), W^{1,p(x)}(\Omega)$ ve $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayları ayrılabilir, yanışmalı ve düzgün konveks Banach uzaylardır (Fan ve Zhao, 2001; Willem, 1996).

Teorem 2.9.6. Eğer her $x \in \bar{\Omega}$ için $q(x) \in C_+(\bar{\Omega})$ ve $1 \leq q(x) < p^*(x)$ ise, o zaman $W^{1,p(x)}(\Omega) \rightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ kompakt ve sürekli gömmesi vardır (Edmunds ve Rákosník, 2000; Fan ve Zhao, 2001).

Teorem 2.9.7. Her $x \in \partial\Omega$ için $q(x) \in C_+(\partial\Omega)$ ve $1 \leq q(x) < p^\circ(x)$ olsun, o zaman $W^{1,p(x)}(\Omega) \rightarrow L^{q(x)}(\partial\Omega)$ kompakt ve sürekli gömmesi vardır ve

$$p^\circ(x) = \begin{cases} \frac{(N-1)p(x)}{N-p(x)}, & N > p(x) \\ \infty, & N \leq p(x) \end{cases}$$

(Deng, 2008; Edmunds ve Rákosník, 2000; Fan ve Zhao, 2001).

Teorem 2.9.8. (Poincaré Eşitsizliği) Ω, R^N düzgün sınırlı bir bölge ve her $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir $C > 0$ eşitsizliği vardır

$$\|v\| \leq C \|\nabla v\|_{p(x)}$$

(Diening, Harjulehto, Hästö ve Růžička, 2011).

3. VARYASYONEL YAKLAŞIMDA KULLANILAN BAZI TEOREMLER VE UYGULAMALARI

Bu bölümde, standart ve standart olmayan büyüme koşulunu içeren sınır değer problemlerinin çözümlerinin varlığını göstermek için kullanılan bazı teoremler hakkında bilgi verilmiştir. Genellikle bu teoremler yardımıyla; zayıf çözümün varlığı, sıfırdan farklı en az bir tane zayıf çözümünün varlığı, sıfırdan farklı en az bir çözümünün varlığı, sonsuz çözümünün varlığını ve çözümlerinin varlığı ve katlılığı gösterilmektedir. Varyasyonel analizin çalışma alanlarından biri de bir fonksiyoneli maksimize ya da minimize eden fonksiyonu belirlemektir.

3.1 Standart Ve Standard Olmayan Büyüme Koşullu Denklemlerin Çözümlerinde Kullanılan Teoremler

Tanım 3.1.1 V ve U iki Banach uzay ve $L: V \rightarrow U$ tanımlı bir operatör ve $u \in V$ olmak üzere

$$Lu = 0$$

şeklinde bir fonksiyonel denklem olarak ifade ediliyorsa bu probleme *varyasyonel problem* denir.

Tanım 3.1.2. V ve U iki Banach uzay ve $L: V \rightarrow U$ tanımlı bir operatör. Eğer,

$$L(.) = \varphi'(.)$$

olacak şekilde $\varphi \in C^1(V, \mathbb{R})$ fonksiyoneli varsa bu fonksiyonele probleme karşılık gelen *enerji fonksiyoneli* veya *Euler-Lagrange fonksiyoneli* adı verilir ve L operatörüne de varyasyonel denir.

Tanım 3.1.3. V ve U iki Banach uzay, $L: V \rightarrow U$ tanımlı bir operatör ve $\varphi \in C^1(V, \mathbb{R})$ bir fonksiyonel olsun. Eğer, her bir $v \in V$ için

$$\langle \varphi'(v), u \rangle = 0$$

eşitliğini sağlayacak her bir $u \in V$ elemanına φ fonksiyonelinin *kritik noktası* adı verilir.

Tanım 3.1.4. V bir Banach uzay ve $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonel olsun. Eğer, her bir $(v_n) \subset V$ dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(v_n) = \inf_{v \in V} \varphi(v)$$

oluyorsa, bu durumda (v_n) dizisine φ fonksiyonelinin *minimize dizisi* adı verilir.

Tanım 3.1.5. V bir Banach uzay, $N \geq 2$ olmak üzere $\Omega \subset V$ sınırlı bir bölge, her $(x, k) \in \Omega \times \mathbb{R}$ için $g: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $G(x, s) = \int_0^s g(x, k) dk$ tanımlı fonksiyon olmak üzere

$$-div(|\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v) = g(x, v) \quad (3.1.1)$$

diferansiyel denklemini inceleyelim. Bu durumda her $v \in V$ için (3.1.1) denkleminin karşılık gelen $\varphi \in C^1(V, \mathbb{R})$ fonksiyoneline

$$\varphi(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} G(x, u) dx \quad (3.1.2)$$

$\varphi \in C^1(V, \mathbb{R})$ fonksiyoneline, (3.1.1) denkleminin karşılık gelen enerji fonksiyoneli veya Euler-Lagrange fonksiyoneli denir. Bu $\varphi \in C^1(V, \mathbb{R})$ enerji fonksiyonelinin türevi; $u \in V$ olmak üzere

$$\langle \varphi'(u), v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} g(x, u) v dx$$

olarak tanımlanır.

Ayrıca, her bir $u \in C_0^\infty$ için de

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} g(x, u) v dx = 0$$

eşitliği sağlanırsa, bu durumda her $v \in V$ elemanına (3.1.1) denkleminin zayıf çözümü denir. Bir denklemin zayıf çözümleri aynı zamanda denklemin kritik noktalarıdır.

Aşağıdaki tanım 1.1.6 'da tanımlanan, Ambrosetti-Rabinovitz koşulu sınırlı bir dizi bulmak için g fonksiyonuna bırakılan önemli koşullardan biridir.

Tanım 3.1.6. V bir Banach uzay ve $N \geq 2$ olmak üzere $g: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve her $(x, k) \in \Omega \times \mathbb{R}$ için $G(x, s) = \int_0^s g(x, k) dk$ tanımlı bir fonksiyon olarak kabul edelim. Eğer her $x \in \Omega$ için ve en az bir tane K pozitif sabiti ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|k| \geq K$ için

$$0 < \theta G(x, k) \leq k g(x, k) \quad (3.1.3)$$

olacak şekilde en az bir tane $\theta > p^+$ sayısı varsa, bu durumda g fonksiyonu Ambrosetti - Rabinovitz koşulunu (AR) sağlar denir. Yukarıdaki (3.1.3) eşitsizliğindeki, $\theta > p^+$ eşitsizliğindeki p^+ esnek olan kısımdır (Ambrosetti ve Rabinowitz 1973).

Tanım 3.1.7. (3.1.2) denklemindeki

$$\phi(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx$$

kısmı ve bu kısmın türevi

$$\langle \phi'(u), v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx$$

için aşağıdaki koşulları sağlar

- (i) $\phi(u)$ convex fonksiyoneldir,
- (ii) $\phi': V \rightarrow V^*$ fonksiyoneli sınırlı, sürekli ve kesin monotondur,
- (iii) $\phi': V \rightarrow V^*$ fonksiyoneli (S_+) tipindedir: eğer $(v_n) \subset V$ dizisi için V uzayında $v_n \rightarrow v$ (zayıf yakınsak) iken

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle \phi'(v_n) - \phi'(v), v_n - v \rangle \leq 0$$

oluyorsa, V uzayında

$v_n \rightarrow v$ (güçlü yakınsak)

olur,

- (iv) $\phi': V \rightarrow V^*$ fonksiyoneli aynı zamanda bir homeomorfizmdir.

Teorem 3.1.8. V bir Banach uzayı ve $\phi \in C^1(V, \mathbb{R})$ bir fonksiyonel olarak kabul edelim. Eğer ϕ fonksiyoneli,

- (i) ϕ, V üzerinde coercive
- (ii) ϕ, V üzerinde alttan zayıf yarı sürekli

oluyorsa, bu durumda

$$\phi(v) = \inf_{v \in V} \phi(v)$$

olacak şekilde bir $v \in V$ minimize fonksiyonu vardır (Willem, 1996).

ϕ fonksiyoneli coercive ve alttan zayıf yarı sürekli koşulunu sağlaması durumunda bir minimum noktaya sahip olur. Eğer, ϕ fonksiyoneli alttan zayıf yarı sürekli ve coercive koşulunu sağlamadığı zaman yukarıdaki teorem geçerli olmaz.

Tanım 3.1.9. (Palais-Smale Dizisi)

V bir Banach uzayı ve $\phi \in C^1(V, \mathbb{R})$ bir fonksiyonel olarak kabul edelim. Eğer, herhangi bir $(v_n) \subset V$ dizisi için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, bu durumda (v_n) dizisine ϕ enerji fonksiyoneline bir *Palais-Smale dizisi* denir

- (i) $c_1 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|\phi(v_n)| \leq c_1$,
- (ii) $\phi': V \rightarrow V^*$ tanımlı fonksiyonel için $n \rightarrow \infty$ iken V^* uzayında $\phi'(v_n) \rightarrow 0$.

Yukarıdaki tanımın bir sonucu olarak, (v_n) Palais-Smale dizisi φ fonksiyonelinin minimize eden bir dizidir. Ayrıca, $\varphi \in C^1(V, R)$ fonksiyoneli alttan sınırlı olmadığı durumda, φ fonksiyonelinin Palais-Smale dizisi ile ilgili kesin bir şey söylenemez (Willem, 1996).

Teorem 3.1.10 (Palais-Smale Koşulu)

V bir Banach uzay ve $\varphi \in C^1(V, R)$ bir fonksiyonel olsun. Eğer, φ enerji fonksiyonelinin her Palais-Smale dizisi güçlü yakınsak bir alt diziye sahip ise bu durumda φ enerji fonksiyoneli *Palais-Smale koşuluna sahiptir* (PS) denir (Fan ve Zhang, 2003; Willem, 1996).

Tanım 3.1.11. V bir Banach uzay ve $\varphi \in C^1(V, R)$ bir fonksiyonel olsun. Eğer,

- (i) $c_1 \in R$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(v_n) = c_1$,
- (ii) $\varphi': V \rightarrow V^*$ tanımlı fonksiyonel için $n \rightarrow \infty$ iken V^* uzayında $\varphi'(v_n) \rightarrow 0$ koşullarını sağlayan bir $(v_n) \subset V$ dizisi var ve bu (v_n) dizisi güçlü yakınsak bir alt diziye sahip oluyorsa, bu durumda φ fonksiyoneline c_1 reel sayısı için c_1 seviyesinde $(PS)_{c_1}$ koşulunu sağlar denir.

φ fonksiyoneli Palais-Smale koşulunu sağladığını göstermek için aşağıdaki adımlar sırasıyla izlenir:

Öncelikle, $(v_n) \subset V$ dizisinin V uzayında sınırlı olduğu gösterilecektir. Bu durumda, (v_n) dizisinin V uzayında $v_n \rightharpoonup v$ (zayıf yakınsak) olduğu gösterilmiş olur. Çünkü V yansılmalı Banach uzay olduğu zaman V uzayındaki her sınırlı dizi zayıf yakınsak bir alt diziye sahip olur. Sonra da, Kompakt gömme teoremlerinden yararlanarak, (v_n) dizisinin V uzayında $v_n \rightarrow v$ (güçlü yakınsak) olduğu gösterilecektir.

Teorem 3.1.12. V bir Banach uzay ve $\varphi \in C^1(V, R)$ bir fonksiyonel olarak kabul edelim. Eğer,

- (i) φ fonksiyoneli V uzayında alttan sınırlı,
- (ii) φ fonksiyoneli (PS) koşulunu sağlıyor,

oluyorsa, bu durumda

$$\varphi(v) = \inf_{v \in V} \varphi(v)$$

olacak şekilde bir $v \in V$ minimize fonksiyonu vardır (Willem, 1996).

Sonuç olarak; φ fonksiyoneli V uzayında Palais-Smale koşulunu sağlar ve alttan sınırlıdır. Oluyorsa bu durumda (v_n) Palais-Smale dizisi V uzayında φ enerji fonksiyoneli minimize eder. Bu durumda, (v_n) dizinin güçlü yakınsadığı v değerine φ fonksiyonelin bir kritik noktası olup denkleminde çözümü olur.

Teorem 3.1.13. V bir Banach uzay ve $\varphi \in C^1(V, \mathbb{R})$ bir fonksiyonel olarak kabul edelim. Eğer, φ fonksiyoneli

- (i) V uzayında alttan sınırlı,
 - (ii) V uzayında alttan zayıf yarı sürekli,
 - (iii) V uzayında coercive,
- koşullarını sağlıyorsa, bu durumda

$$\varphi(v) = \inf_{v \in V} \varphi(v)$$

olacak şekilde bir $v \in V$ minimize fonksiyonu vardır (Willem, 1996; Winslow, 1949).

Teorem 3.1.14. V bir Banach uzay ve $\varphi \in C^1(V, \mathbb{R})$ bir fonksiyonel olarak kabul edelim. Eğer, φ fonksiyoneli

- (i) V uzayında coercive,
- (ii) V uzayında alttan zayıf yarı sürekli,

koşulları sağlanıyorsa, bu durumda φ fonksiyoneli V üzerinde alttan sınırlı ve

$$\varphi(v) = \inf_{v \in V} \varphi(v)$$

olacak şekilde bir $v \in V$ minimize fonksiyonu vardır (Willem, 1996; Winslow, 1949).

Tanım 3.1.15. (Cerami koşulu)

V bir Banach uzay ve $\varphi \in C^1(V, \mathbb{R})$ bir fonksiyonel olsun. Eğer φ fonksiyoneli, herhangi bir $v_n \subset V$ dizisi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, bu durumda (v_n) dizisine φ enerji fonksiyonelinin *Cerami dizisi* denir

- (i) $|\varphi(v_n)| \leq c$
- (ii) $\varphi': V \rightarrow V^*$ tanımlı fonksiyonel için $n \rightarrow \infty$ olduğunda $(1 + \|v_n\|_V) |\varphi'(v_n)| \rightarrow \infty$.

Eğer, (v_n) Cerami dizisi yakınsak bir alt diziye sahip ise bu durumda φ enerji fonksiyoneli *Cerami koşuluna sahiptir (C)* denir (Schechter, 2007). Palais-Smale koşulunun sağlanmadığı durumda Cerami koşulu kullanılır.

Teorem 3.1.16. (Ekeland Varyasyonel Prensipleri)

V bir Banach uzay ve $\varphi : V \rightarrow (-\infty, \infty]$ tanımlı bir fonksiyoneli olarak kabul edelim. Eğer

- (i) φ fonksiyoneli V üzerinde alttan sınırlı,
 - (ii) φ fonksiyoneli V üzerinde alttan zayıf yarı sürekli,
- koşullarını sağlarsa o zaman her $\varepsilon > 0$ için

$$\varphi(v_\varepsilon) < \inf_{v \in V} \varphi(v) + \varepsilon$$

$$\varphi(v_\varepsilon) < \varphi(v) + \varepsilon \|v_\varepsilon - v\|_V, \quad v_\varepsilon \neq v$$

olacak şekilde bir $(v_\varepsilon) \in V$ dizisi vardır.

Ekeland's Varyasyonel yaklaşımı kullanarak, φ fonksiyoneli için Palais-Smale dizisini bulmak için kullanılır (Mihăilescu, 2006; Willem, 1996).

Teorem 3.1.17. (Mountain Pass Geometrisi)

V bir Banach uzay olsun. Ayrıca, kabul edelim ki aşağıdaki koşulları sağlansın,

- (i) $\varphi \in C^1(V, \mathbb{R})$ fonksiyoneli (PS) koşulunu sağlasın,
- (ii) $\varphi(0) = 0$,
- (iii) Her $v \in V$ fonksiyonu için $\|v\|_V = \tau$ olduğunda $\varphi(u) \geq r > 0$

olacak şekilde r ve τ pozitif sayılar vardır,

- (iv) $t \rightarrow \infty$ iken $\varphi(t\omega) < -\infty$ veya $\varphi(v) < 0$ olacak şekilde $\|v\|_V > \tau$

koşulunu sağlayan bir $v = t\omega \in V$ fonksiyonu vardır.

Bu durumda φ fonksiyonelinin, V uzayında sıfırdan farklı en az bir kritik noktası vardır (Adams, 1975; Chammem, vb., 2020; Willem, 1996).

Yukarıdaki teoremden, φ fonksiyonelinin en az bir kritik noktaya sahip olduğu ve bu kritik nokta denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olduğu sonucuna varılır.

Teorem 3.1.18. (Genelleştirilmiş Mountain Pass Teoremi)

V bir Banach uzay olsun. Kabul edelim ki pozitif τ sayısı ve $v \in V$ için

- (i) $\varphi \in C^1(V, \mathbb{R})$ fonksiyoneli (PS) koşulunu sağlasın,
- (ii) $\varphi(0) = 0$
- (iii) $\|v\|_V > \tau$ olduğunda $\varphi(u) \leq \varphi(0)$,
- (iv) $\alpha = \inf\{\varphi(v) : v \in V, \|v\| = \tau\} > 0$

koşulları sağlansın. Ayrıca $G \neq \emptyset$ olacak şekilde

$$G = \{\psi \in C([0,1], V) : \psi(0) = 0, \psi(1) = v\}$$

ve

$$\beta = \inf\{\max \varphi(\psi[0,1]) : \psi \in G\}$$

kümeleri tanımlansın. Bu durumda $\alpha \leq \beta < +\infty$ olmak üzere; β , φ fonksiyonelinin bir kritik noktasıdır (Adams, 1975; Willem, 1996;)Bu teoremin ile problemin en az bir çözümünün varlığını göstermek için kullanılmaktadır.

Teorem 3.1.19. (Z_2 -Symmetric Mountain-Pass Teoremi)

V sonsuz boyutlu bir Banach uzayı olsun. Farzedelim ki aşağıdaki koşullar sağlansın,

- (i) $\varphi \in C^1(V, \mathbb{R})$ fonksiyoneli (PS) koşulunu sağlayan çift bir fonksiyonel,
- (ii) $\varphi(0) = 0$,
- (iii) Her $v \in V$ fonksiyonu için aşağıdaki koşulları sağlayan τ ve r pozitif sayıları vardır
 $\|v\|_V = \tau$ iken $\varphi(v) \geq r > 0$,

- (iv) V uzayının her sonlu boyutlu $V_1 (V_1 \subset V)$ alt uzay için
 $\{v \in V_1 : \varphi(v) \geq 0\}$
kümesi V uzayında sınırlıdır.

Bu durumda φ fonksiyoneli, V uzayında sınırsız olan bir kiritik değerler dizisine sahiptir (Mashiyev vd., 2012; Toan ve Ngô, 2009; Willem, 1996). Bu teoremden, problemin sonsuz çözümünün varlığını göstermek için kullanılmaktadır.

Tanım 3.1.20. V yansılmalı ve ayrılabilir bir Banach uzay olsun. Ayrıca, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ olmak üzere her $k, n \in \mathbb{N}^*$ için

$$g_k(e_n) = \delta_{k,n} = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

Ve

$X = \overline{\text{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}^*\}}$ ve $X^* = \overline{\text{span}\{g_k : k \in \mathbb{N}^*\}}$
olacak şekilde $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}^*} \subseteq V$ ve $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}^*} \subseteq V^*$ vardır.

Bu durumda $m \in \mathbb{N}^*$ için

$$X_m = \text{span}\{e_m\}, \quad Y_i = \bigoplus_{j=1}^m X_j, \quad Z_i = \overline{\bigoplus_{j=1}^m X_j}$$

olmak üzere X uzayını, $V = Y_m \oplus Z_m$ şeklinde iki uzayın toplamı olarak yazılabilir.

Teorem 3.1.21. (Fountain Teorem)

V bir Banach uzay, $\varphi \in C^1(V, \mathbb{R})$ tanımlı bir çift fonksiyonel ve Tanım 3.1.20. de tanımladığımız gibi X_m, Y_m ve Z_m birer uzay olsunlar. Eğer her bir $m \in \mathbb{N}^*$ için

- (i) $m \rightarrow \infty$ olduğunda
 $\inf_{v \in Z_m, \|v\|=\gamma_k} \varphi(v) \rightarrow +\infty$,

$$(ii) \quad \max_{u \in Y_m, \|v\|=\rho_m} \varphi(v) \leq 0,$$

(iii) Herbir c pozitif sabiti için φ fonksiyoneli $(PS)_c$

koşullarını sağlayacak şekilde $\rho_m > \gamma_m > 0$ sayıları varsa, φ fonksiyoneli V uzayında sınırsız olan bir kritik değerler dizisine sahiptir (Willem, 1996; Yücedağ, 2015).

Fountain ile aşağıda tanımladığımız Dual Fountain teoremleri problemin çözümlerinin varlığı ve katlılığı göstermek için kullanılmaktadır.

Tanım 3.1.22. V bir Banach uzay, $\varphi \in C^1(V, R)$ tanımlı bir çift fonksiyonel, $c \in R$ ve Tanım 3.1.20. de tanımladığımız gibi X_m, Y_m ve Z_m birer uzay olsunlar. Eğer herhangi bir $(v_{n_j}) \subset V$ dizisi için

$$(i) \quad u_{n_j} \in Y_{u_{n_j}} \text{ olarak alındığı zaman } |\varphi(v_{n_j})| < c,$$

$$(ii) \quad u_{n_j} \rightarrow \infty \text{ olduğunda } (\varphi|_{Y_{v_{n_j}}})'(v_{n_j}) \rightarrow 0$$

oluyorsa, bu durumda (v_{n_j}) dizisine φ enerji fonksiyonelinin bir $(PS)_c^*$ dizisi denir (Willem, 1996).

Eğer $(PS)_c^*$ dizisi (güçlü) yakınsak bir alt diziye sahip oluyorsa, o zaman φ enerji fonksiyoneli $(PS)_c^*$ koşulunu sağlar denir. Bu durumda, $(PS)_c^*$ dizisi φ enerji fonksiyonelinin bir kritik olur.

Teorem 3.1.23. (Dual Fountain Teorem)

V bir Banach uzay, $\varphi \in C^1(V, R)$ tanımlı bir çift fonksiyonel ve tanım 3.1.20. de tanımladığımız gibi X_m, Y_m ve Z_m birer uzay olsunlar. Eğer her bir $m > m_0$ olarak seçildiği zaman $m_0 > 0$ olacak şekilde m_0 var ve

$$(i) \quad a_m = \inf_{v \in Z_m, \|v\|=\gamma_k} \varphi(v) \geq 0,$$

$$(ii) \quad b_m = \max_{u \in Y_m, \|v\|=\rho_m} \varphi(v) < 0,$$

$$(iii) \quad d_m = \inf_{v \in Z_m, \|v\|=\rho_m} \varphi(v) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty,$$

$$(iv) \quad \text{Herbir } c \in [d_{m_0}, 0) \text{ için } \varphi \text{ fonksiyoneli } ((PS)_c^*),$$

koşullarını sağlayacak şekilde $\rho_m > \gamma_m > 0$ sayıları varsa, o halde φ fonksiyoneli V uzayında 0'a yakınsayan bir negatif kritik noktalar dizisine sahip olur (Fan, 2005; Willem, 1996).

3.2 Teoremlerin Kullanıldığı Bazı Çalışmalar

Bu kısımda yukarıda tanımladığımız teorem ve tanımların kullanıldığı bazı çalışmalar verilmiştir.

Chammem, vd. (2020), aşağıdaki $p(x)$ -Laplace içeren Neumann sınır değerli Steklov problemini ele almışlar,

$$\begin{cases} (-\Delta)_{p(x)}u + a(x)|u|^{p(x)-2}u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} + b(x)|u|^{q(x)-2}u = g(x, u), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Problemde; $N \geq 2$ olmak üzere Ω, R^N de sınırlı bir bölge, , her $x \in \bar{\Omega}$ için $p(x) \in C(\bar{\Omega})$ ve $q(x) \in C(\partial\Omega)$, $x \in \bar{\Omega}$ ve $y \in \partial\Omega$ olmak üzere $p(x), q(x) > 1$ ve $p(x) \neq q(y)$, $f: \Omega \times R \rightarrow R$ ve $g: \partial\Omega \times R \rightarrow R$ Caratheodery oşulunu sağlayan fonksiyonlar, $a(x)$ ve $b(x)$ ise $a_1(x) \leq a(x) \leq a_2(x)$ ve $b_1(x) \leq b(x) \leq b_2(x)$ koşulunu sağlayan sürekli fonksiyonla, $(-\Delta)_{p(x)}u = -div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$ ise $p(x)$ -Laplace operatörü ve $\nu, \partial\Omega$ da dış birim normal vektör olarak alınmaktadır. Bu çalışmada Mountain Pass Geometrisi kullanarak problemin sıfırdan farklı zayıf çözümünün varlığı ve Mountain Pass Geometrisi ile birlikte Ekeland Prensibi kullanılarak sıfırdan farklı en az iki tane çözümün varlığı gösterilmiştir.

Chammem ve Sahbani (2021), aşağıdaki $p(x)$ -Laplace içeren Neumann sınır değerli Steklov problemini ele almışlar,

$$\begin{cases} (-\Delta)_{p_1(x)}u + (-\Delta)_{p_2(x)}u + a(x)|u|^{p_1(x)-2}u + b(x)|u|^{p_2(x)-2}u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ |\nabla u|^{p_1(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} + |\nabla u|^{p_2(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = g(x, u), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Problemde; $N \geq 2$ olmak üzere Ω, R^N de sınırlı bir bölge, , her $x \in \bar{\Omega}$ için $p_i(x) \in C(\bar{\Omega})$ ve $i = 1, 2$ olmak üzere $p_i(x) > 1$, $f: \Omega \times R \rightarrow R$ ve $g: \partial\Omega \times R \rightarrow R$ Caratheodery oşulunu sağlayan fonksiyonlar, $a(x)$ ve $b(x)$ ise $a_1(x) \leq a(x) \leq a_2(x)$ ve $b_1(x) \leq b(x) \leq b_2(x)$ koşulunu sağlayan sürekli fonksiyonla, $(-\Delta)_{p(x)}u = -div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$ ise $p(x)$ -Laplace operatörü ve $\nu, \partial\Omega$ da dış birim normal vektör olarak alınmaktadır. Bu çalışmada Genelleştirilmiş Mountain Pass Teoremi kullanarak problemin en az bir çözümünün varlığı ve $\mathbb{Z}_2$ -Symmetric Mountain-Pass teoremini kullanarak problemin sonsuz çözümünün varlığını gösterilmiştir.

Mashiyev, vd. (2012) çalışmasın da, $N \geq 2$ olmak üzere Ω, R^N düzgün sınırlı bir bölge, her $x \in \bar{\Omega}$ için $p, s, r \in C(\bar{\Omega})$ ve $1 < r(x) < p(x) < s(x) < p(x)^*$ ve $m(x), n(x) \in C(\bar{\Omega})$ birer ağırlık fonksiyonları ve $div(a(x, \nabla u))$ ise $p(x)$ -Laplace operatörü olmak üzere;

$$\begin{cases} -div(a(x, \nabla u)) = m(x)|u|^{r(x)-2}u + n(x)|u|^{s(x)-2}u, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki Dirichlet sınır değer problemini için Ekeland Varyasyonel Prensibi ile birlikte Montain-Pass teoremini ve Z_2 -Symmetric Mountain-Pass teoremini kullanarak denklemin çözümlerinin varlığı ve katlılığı gösterilmiştir.

Yücedağ (2015) çalışmasın da, $\Omega, \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) 'de düzgün sınırlı bir bölge, her $x \in \bar{\Omega}$ için $p \in C(\bar{\Omega})$, $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Caratheodery koşulunu sağlayan bir fonksiyon ve $div(a(x, \nabla u))$ ise $p(x)$ -Laplace operatörü olmak üzere;

$$\begin{cases} -div(a(x, \nabla u)) = f(x, u) & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki Dirichlet sınır değer problemini için Montain-Pass teoremini ve Fountain teoremini kullanarak denklemin çözümlerinin varlığı ve katlılığı gösterilmiştir.

Allaoui, vd. (2012) çalışmalarında, lineer olmayan Steklov sınır değer problemini incelemişler;

$$\begin{cases} \Delta_{p(x)} u = |u|^{p(x)-2}u, & x \in \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda f(x, u), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Bu denklemde; Ω, R^N de sınırlı bir bölge, $N \geq 2, \nu, \partial\Omega$ 'da dış birim normal türev, $\lambda > 0$ reel bir sayı, p fonksiyonu $\bar{\Omega}$ da sürekli bir fonksiyonu, $\inf_{x \in \bar{\Omega}} p(x) > N$ ve $f: \partial\Omega \times R \rightarrow R$ bazı özel koşulları sağlayan Carathéodory fonksiyonudur. Bu çalışmada yazarlar; Ricceri teoremi, Fuontain teoremi ve Mountain-Pass teoremini kullanarak problemin çözümlerinin varlığı ve katlılığını göstermişlerdir.

4. $p(x)$ -LAPLACE OPERATÖRÜNÜ İÇEREN STEKLOV SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN ÇÖZÜM

4.1 Temel Problem

Bu bölümde çalışmamızın temelini oluşturan kısımdır. Burada, (4.1.1) şeklinde tanımlanan ve $p(x)$ -Laplace operatörünü içeren Steklov sınır değer problemi çalışılmıştır. Çalışmamızda, Varyasyonel yaklaşım kullanılmıştır. Bu yaklaşım ile Mountain-Pass teoremiyle birlikte Ambrosetti- Rabinowitz koşulu kullanılarak, (4.1.1) probleminin sıfırdan farklı bir tane zayıf çözümünün varlığı Değişken Üslü Sobolev uzayında ($E = W_0^{1,p(x)}$) çalışılmıştır.

Çalışmada, Mountain-Pass teoreminin ana koşullarının yanı sıra ön koşulları da gösterilmiştir. Bu ön koşullardan biri de fonksiyonelin Palais-Smale koşuluna sahip olduğu gösterilir. Bu koşulu göstermek için de, g fonksiyonuna bırakılan Ambrosetti-Rabinowitz koşulundan yararlanılır. Çünkü, bu koşul dizinin sınırlılığını göstermek için kullanılan önemli bir koşuldur. Bu yüzden, özellikle g fonksiyonuna bırakılan Ambrosetti- Rabinowitz koşulu çoğu çalışmada belirtilir. Ayrıca, bu koşul kullanılmadığı çalışmalarda da bu koşulun kullanılmadığı özellikle vurgulanır.

Bu çalışmamız da; $N \geq 2$ olmak üzere Ω, R^N de düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge, λ pozitif bir parametre, her $x \in \bar{\Omega}$ için $p \in C(\bar{\Omega})$, $\nu, \partial\Omega$ 'da dış birim normal vektör, $g : \partial\Omega \times R^N \rightarrow R^N$ bazı özel koşulları sağlayan Carathéodory fonksiyonu ve $A(x, \varsigma) : \bar{\Omega} \times R^N \rightarrow R^N$ operatörün ς 'a göre türevi $a(x, \varsigma) : \bar{\Omega} \times R^N \rightarrow R^N$ sürekli olan bir operatör olup ve bazı özel koşulları sağlasın ve $\text{div}(a(x, \nabla v))$ 'de $\Delta_{p(x)} v := \text{div} \left(|\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v \right)$ şeklinde tanımlanan $p(x)$ -Laplace operatöründen daha genel bir operatör olmak üzere;

$$\begin{cases} \text{div}(a(x, \nabla v)) = 0, & x \in \Omega, \\ a(x, \nabla v) \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda g(x, v), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

problem ele alınmıştır.

Çalışmamız da; g fonksiyonu, A ve a operatörleri aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde alınmıştır:

(A₁) Her $x \in \bar{\Omega}$ ve her $\varsigma \in R^N$ için

$$|a(x, \varsigma)| \leq c(1 + |\varsigma|^{p(x)-1}),$$

(A₂) Her $x \in \bar{\Omega}$ için $A(x, 0) = 0$,

(A₃) Her $x \in \bar{\Omega}$ ve her $\varsigma, \eta \in R^N$ için

$$(a(x, \varsigma) - a(x, \eta))(\varsigma - \eta) \geq 0.$$

Bu eşitsizliğin, eşitlik durumunda $\varsigma = \eta$ olur,

(A₄) Her $x \in \bar{\Omega}$ ve her $\varsigma \in R^N$ için

$$|\varsigma|^{p(x)-1} \leq a(x, \varsigma), \varsigma \leq p(x).A(x, \varsigma),$$

(A₅) A operatörü $p(x)$ -düzgün convex:

Her $x \in \bar{\Omega}$ ve her bir $\varsigma, \eta \in R^N$ için

$$A\left(x, \frac{\varsigma + \eta}{2}\right) \leq \frac{1}{2}A(x, \varsigma) + \frac{1}{2}A(x, \eta) - k_1 \|\varsigma - \eta\|^{p(x)},$$

olacak şekilde $k_1 > 0$ sabiti vardır,

(g₁) $g : \partial\Omega \times R^N \rightarrow R^N$ Carathéodory koşulunu sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

$q(x) \in C(\partial\Omega)$ için $p^+ < q^- \leq q(x) < p^\partial(x)$ ve

$$g(x, s) \leq c_0 + c_1 |s|^{q(x)-1},$$

koşulunu da sağlasın. Burada ki; $c_0, c_1 > 0$ birer sabitlerdir,

(g₂) Her $x \in \partial\Omega$ ve $p^+ < q^-$ için $s \rightarrow 0$ iken

$$g(x, s) = o(|s|^{p^+-1}),$$

(AR) Ambrosetti-Rabinowitz's koşulu:

Her $x \in \partial\Omega$ için

$$0 < \theta G(x, s) \leq g(x, s)s, \quad |s| \geq |s^*|,$$

olacak şekilde $s^* > 0$ ve $p^+ < \theta$ vardır. Burada $G(x, t) = \int_0^t g(x, s)ds$ olarak tanımlanmaktadır.

4.2 Tanım ve Teoremler

Tanım 4.2.1. Eğer, her $u \in E$ için

$$\int_{\Omega} a(x, \nabla v) \nabla u dx - \lambda \int_{\partial\Omega} g(x, v) v u d\sigma = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa, o zaman $v \in E$ fonksiyonu (4.1.1) probleminin zayıf çözümü olur.

(4.1.1) problemine karşılık gelen enerji fonksiyoneli $I : E \rightarrow R$

$$I(v) = \int_{\Omega} A(x, \nabla v) dx - \lambda \int_{\partial\Omega} G(x, v) d\sigma = \Psi(v) - \lambda \Phi(v)$$

Yukarıdaki eşitlikte;

$$\Psi(v) = \int_{\Omega} A(x, \nabla v) dx \quad \text{ve} \quad \Phi(v) = \int_{\partial\Omega} G(x, v) d\sigma$$

olarak alalım.

Lemma 4.2.2. $g : \partial\Omega \times R^N \rightarrow R^N$ fonksiyonu (g_1) koşulunu sağlayan Carathéodory fonksiyonudur. Her bir $v \in E$ için $\Phi(v) = \int_{\partial\Omega} G(x, v) d\sigma$ olarak tanımlayalım. Bu durumda, her $u \in E$ için de $\Phi \in C^1(E, R)$ ve

$$\langle \Phi'(v), u \rangle = \int_{\partial\Omega} g(x, v) u d\sigma$$

Üstelik; $\Phi'(u) : E \rightarrow E^*$ operatörü kompaktır (Karim, Zeroali ve Chakrone, 2018).

Önerme 4.2.3. Herbir $v \in L^{p(x)}(\partial\Omega)$ için $\varphi_{p(x)}(v) : L^{p(x)}(\partial\Omega) \rightarrow R$ fonksiyoneli

$$\varphi_{p(x)}(v) = \int_{\partial\Omega} |v|^{p(x)} d\sigma \quad \text{olarak tanımlansın. Bu durumda}$$

$$(i) \quad |v|_{L^{p(x)}(\partial\Omega)} \geq 1 \text{ ise } |v|_{L^{p(x)}(\partial\Omega)}^{p^-} \leq \varphi_{p(x)}(v) \leq |v|_{L^{p(x)}(\partial\Omega)}^{p^+}$$

$$(ii) \quad |v|_{L^{p(x)}(\partial\Omega)} < 1 \text{ ise } |v|_{L^{p(x)}(\partial\Omega)}^{p^+} \leq \varphi_{p(x)}(v) \leq |v|_{L^{p(x)}(\partial\Omega)}^{p^-}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Wei ve Chen, 2012; Karim, Zeroali ve Chakrone, 2018; Yucedag, 2019).

Lemma 4.2.4.

(i) Her $x \in \overline{\Omega}$ ve $\xi \in R^N$ için $A(x, \xi)$ dönüşümü,

$$|A(x, \xi)| \leq c_2(|\xi| + |\xi|^{p(x)})$$

büyüme koşulunu sağlar.

(ii) $A(x, \xi)$, $p(x)$ - homojendir; yani, her $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in R^N$ ve $z \geq 1$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır;

$$A(x, z\xi) \leq z^{p(x)} A(x, \xi).$$

Ispat: (i) Her $x \in \overline{\Omega}$ ve her $\xi \in R^N$ için

$$A(x, \xi) = \int_0^1 \frac{d}{ds} A(x, \xi s) ds = \int_0^1 a(x, \xi s) \xi ds \quad (4.2.1)$$

Yukarıdaki (4.2.1) eşitliğinde, (A_1) koşulunu kullanırsak,

$$|A(x, \xi)| \leq \int_0^1 |a(x, \xi s)| |\xi| ds \leq c \int_0^1 (1 + |s|^{p(x)-1} |\xi|^{p(x)-1}) |\xi| ds$$

$$\leq c \int_0^1 (|\xi| + |s|^{p(x)-1} |\xi|^{p(x)}) ds$$

$$\leq c_2(|\xi| + |\xi|^{p(x)})$$

elde edilir.

(ii) Her $x \in \Omega$, $\varepsilon \in R^N$ ve $z \geq 1$ için $h(s) = A(x, s\xi)$ olarak seçelim. Bu durumda,

$$h'(s) = \frac{d}{ds} A(x, \xi s) = a(x, \xi s) \xi = \frac{1}{ts} a(x, \xi s) \xi \quad (4.2.2)$$

olur. (4.2.2) eşitliğinde, (A_3) koşulunu kullanılırsa,

$$h'(s) = \frac{1}{s} a(x, \xi s) \xi \leq \frac{p(x)}{s} A(x, \xi s) = \frac{p(x)}{s} h(s) \quad (4.2.3)$$

elde edilir. (4.2.3) eşitliğini düzenlediğimizde

$$\frac{h'(s)}{h(s)} \leq \frac{p(x)}{s}$$

olur. Bu son eşitsizliğin her iki tarafının da $(1, z)$ aralığında integrali alınır,

$$\int_1^z \frac{h'(s)}{h(s)} ds \leq \int_1^z \frac{p(x)}{s} ds$$

ve

$$\log h(z) - \log h(1) \leq p(x) \log z$$

olur. Buradan da

$$\frac{h(z)}{h(1)} \leq z^{p(x)}$$

yazabiliriz. Bu son eşitsizlikte, $h(s) = A(x, s\xi)$ fonksiyonunu kullanırsak

$$A(x, z\xi) \leq z^{p(x)} A(x, \xi)$$

sonucu elde edilir.

Lemma 4.2.5.

(i) $\Psi(v)$ fonksiyoneli E ' de iyi tanımlıdır.

(ii) $\Psi(v)$ fonksiyoneli $C^1(E, R)$ sınıfındadır. Yani, $\Psi(v) \in C^1(E, R)$

ve her $u, v \in E$ için

$$\langle \Psi'(v), u \rangle = \int_{\Omega} a(x, \nabla v) \nabla u \, dx,$$

olur

(iii) $\Psi(v)$ fonksiyoneli E ' de alttan zayıf yarı süreklidir (weakly lower semi-continuos)

(iv) $I(v)$ fonksiyoneli E ' de alttan zayıf yarı süreklidir (weakly lower semi-continuos)

(v) $I(v)$ fonksiyoneli E ' de iyi tanımlıdır.

(vi) Her $u, v \in E$ için

$$\Psi(v) - \Psi(u) \geq \langle \Psi'(u), v - u \rangle$$

(vii) Herbir $u, v \in E$ ve $k_0 > 0$ sabit sayısı için

$$\Psi\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\Psi(u) + \frac{1}{2}\Psi(v) - k_0\|u-v\|^{p^-}$$

(Fan, Zhang ve Zhao, 2005; Deng, 2008; Wei ve Chen, 2012; Karim, Zeroali ve Chakrone, 2018; Yucedag, 2019).

Ispat: (i) Lemma 4.2.4 (i) ve Teorem 2.8.3 kullanıldığında,

$$\begin{aligned}\Psi(v) &= \int_{\Omega} A(x, \nabla v) dx \leq c_2 \int_{\Omega} |\nabla v| dx + c_2 \int_{\Omega} |\nabla v|^{p(x)} dx \\ &\leq c_3 \|1\|_{p'(x)} \|\nabla v\|_{p(x)} + c_2 \|v\|^{p^+} \\ &\leq c_4 \|v\| + c_2 \|v\|^{p^+} < \infty\end{aligned}$$

olur. Böylece, $\Psi(u)$ fonksiyoneli E ' de iyi tanımlıdır.

(ii) $v, \xi \in \Psi, x \in \Omega$ ve $0 < |k| < 1$ olarak alınırsa, bu durumda bir $w \in [0,1]$ için Teorem 2.4.2 (ortalama değer teoremi) kullanılırsa

$$\begin{aligned}&\left| \frac{A(x, \nabla v(x) + k \nabla \xi(x)) - A(x, \nabla v(x))}{k} \right| \\ &= \left| \int_0^1 a(x, \nabla v(x) + wk \nabla \xi(x)) \cdot \nabla \xi(x) dw \right| \\ &\leq \int_0^1 c(1 + |\nabla v(x) + wk \nabla \xi(x)|^{p(x)-1}) |\nabla \xi(x)| dw \\ &\leq c(1 + (|\nabla v(x)| + |\nabla \xi(x)|)^{p(x)-1}) |\nabla \xi(x)| \\ &\leq c.1. |\nabla \xi(x)| + c_1 |\nabla \xi(x)| (|\nabla v(x)| + |\nabla \xi(x)|)^{p(x)-1} \\ &\leq c.1. |\nabla \xi(x)| + c_1 2^{p^+-1} |\nabla \xi(x)| (|\nabla v(x)|^{p(x)-1} + |\nabla \xi(x)|^{p(x)-1}) \\ &\leq c.1. |\nabla \xi(x)| + c_1 2^{p^+-1} |\nabla \xi(x)| |\nabla v(x)|^{p(x)-1} + c_1 2^{p^+-1} |\nabla \xi(x)|^{p(x)}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte, $1. |\nabla \xi(x)|, |\nabla \xi(x)| |\nabla v(x)|^{p(x)-1}$ ve $|\nabla \xi(x)|^{p(x)}. 1$ kısımlarına Ω üzerinde integrali alınıp ve Teorem 2.8.8 deki Hölder eşitsizliği uygulanırsa integrallenebilir olduğunu görebiliriz. Dolayısıyla, eşitliğin sağ tarafı Ω

da integrallenebilir. O halde, Teorem 2.5.10 (Lebesgue baskın yakınsama teoremi) uygulanırsa

$$\begin{aligned}\langle \Psi'(u), \xi \rangle &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{A(x, \nabla v(x) + r \nabla \xi(x)) - A(x, \nabla v(x))}{r} dx \\ &= \int_{\Omega} a(x, \nabla v(x)) \cdot \nabla \xi(x) dx\end{aligned}$$

Şimdi de $\Psi(v)$ fonksiyoneli E uzayında sürekliliğini gösterelim. E 'de $v_n \rightarrow v$ ve $\theta(x, v) = a(x, \nabla v)$ olsun. Fan ve Zhang (2003) çalışmasında, (A_1) ve Teorem 2.8.3. kullanarak $\left(L^{p'(x)}(\Psi)\right)^N$ uzayında $\gamma(x, v_n) \rightarrow \gamma(x, v)$ olduğunu göstermiştir. O halde, Önerme 2.8.8 kullanılırsa

$$|\langle \Psi'(v_n) - \Psi'(v), \xi \rangle| \leq |\gamma(x, v_n) - \gamma(x, v)|_{p'(x)} |\nabla \xi(x)|_{p(x)}$$

elde edilir. Bu son şitsizlikte, $n \rightarrow \infty$ alınırsa

$$\|\Psi'(v_n) - \Psi'(v)\| \leq |\gamma(x, v_n) - \gamma(x, v)|_{p'(x)} \rightarrow 0$$

olur.

(iii) Ψ nin alttan yarı süreklidir (Brezis, 1992). $v \in \Psi$ ve $\epsilon > 0$ alalım. (A_5)

koşulundan dolayı Ψ konveks olduğundan , $u \in E$ sonucuna varıyoruz. Bu durumda, aşağıdaki eşitlik yazılabilir,

$$\Psi(u) \geq \Psi(v) + \int_{\Omega} a(x, \nabla v(x)) \cdot (\nabla u - \nabla v) dx.$$

Ayrıca, (A_1) koşulu, Teorem 2.8.3, Teorem 2.8.7 ve Teorem 2.8.8 kullanılırsa, her $v \in E$ için

$$\begin{aligned}\Psi(u) &\geq \Psi(v) - \int_{\Omega} |a(x, \nabla v(x))| \cdot |\nabla u - \nabla v| dx \\ &\geq \Psi(v) - c \int_{\Omega} 1 \cdot |\nabla(u - v)| dx - c \int_{\Omega} |\nabla(u - v)| |\nabla v(x)|^{p(x)-1} dx \\ &\geq \Psi(v) - c_5 \|1\|_{p'(x)} \|\nabla(u - v)\|_{p(x)} - c_6 \|\nabla(u - v)\|_{p(x)} \|\nabla v(x)\|_{p'(x)}^{p(x)-1} \\ &\geq \Psi(v) - c_7 \|u - v\| - c_6 \|u - v\| \|u\|^{p^+-1} \\ &\geq \Psi(v) - c_7 \|u - v\| - c_8 \|u - v\|\end{aligned}$$

$$\geq \Psi(v) - \epsilon$$

elde edilir. Burada, $\|u - v\| < \delta = \frac{\epsilon}{c_7 + c_8}$ olarak seçildi. O halde, $\Psi(v)$ fonksiyoneli E uzayında alttan zayıf yarı sürekli olur. Dolayısıyla, $\Psi(v)$ fonksiyoneli E uzayında sürekli olur.

(iv) Lemma 4.2.2. ve Lemma 4.2.5 (iii) bir sonucu olarak $I(v)$ fonksiyoneli E ' de alttan zayıf yarı süreklidir.

(v) Lemma 4.2.2. ve Lemma 4.2.5 (i) den dolayı, $I(v)$ fonksiyoneli E ' de iyi tanımlıdır.

(vi) (A_5) koşulundan $\Psi(v)$ fonksiyoneli konveks olduğundan dolayı, aşağıdaki eşitliği sağlayan bir $r \in (0,1)$ vardır ve

$$\begin{aligned} \frac{\Psi(u + r(v - u)) - \Psi(u)}{r} &= \frac{\Psi((1 - r)u + rv) - \Psi(u)}{r} \\ &\leq \frac{(1 - r)\Psi(u) + r\Psi(v) - \Psi(u)}{r} = \Psi(v) - \Psi(u) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(u + r(v - u)) - \Psi(u)}{r} = \langle \Psi'(u), v - u \rangle.$$

olur. Yani;

$$\langle \Psi'(u), v - u \rangle \leq \Psi(v) - \Psi(u).$$

elde edilir.

(vii) (A_5) koşulu ve Teorem 2.8.3 birlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned} \Psi\left(\frac{v + u}{2}\right) &= \int_{\Omega} A\left(x, \frac{\nabla u - \nabla v}{2}\right) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} A(x, \nabla v) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} A(x, \nabla u) dx - k_0 \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^{p(x)} dx \\ &\leq \frac{1}{2} \Psi(v) + \frac{1}{2} \Psi(u) - k \|v - u\|^{p^-}. \end{aligned}$$

olur.

4.3 Sonuçlar

Lemma 4.2.2. Önerme 4.2.3 ve Lemma 4.2.4. bir sonucu olarak $I(v) \in C^1(E, R)$ olur. Ayrıca, $I(v)$ fonksiyonelinin kritik noktaları aynı zaman da (4.1.1) probleminin zayıf çözümü olur. Üstelik, $I(v)$ fonksiyonelinin türevi herhangi bir $u, v \in E$ için

$$\langle I'(v), u \rangle = \int_{\Omega} a(x, \nabla v) \nabla u \, dx - \lambda \int_{\partial\Omega} g(x, v) u \, d\sigma,$$

olur (Willem, 1996; Fan, 2005; Wei ve Chen, 2012; Ourraoui, 2021).

Teorem 4.3.1. Eğer, (AR) , (A_1) - (A_5) , (g_1) ve (g_2) koşulları sağlanırsa, herhangi bir $\lambda \in (0, \infty)$ için (4.1.1) probleminin, E uzayında sıfırdan farklı bir zayıf çözümü vardır.

Lemma 4.3.2 Farzedelimki (A_1) - (A_5) , (g_1) ve (g_2) koşulları sağlansın. Bu durumda, her bir $v \in X$ için $I(v) \geq \tau > 0$ olacak şekilde τ ve r pozitif sayıları vardır ve $\|v\| = r \in (0, 1)$ dır.

İspat: $\|v\| < 1$ olarak seçelim. O halde, (g_1) ve (g_2) koşullarını kullanarak her $(x, v) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ için

$$|G(x, v)| \leq \varepsilon |v|^{p^+} + c_{\varepsilon} |v|^{q(x)} \quad (4.3.1)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (4.3.1.) eşitsizliğini ve (A_4) koşulunu birlikte kullandığımız da

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_{\Omega} A(x, \nabla v) \, dx - \lambda \int_{\partial\Omega} G(x, v) \, d\sigma \\ &\geq \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla v|^{p(x)} \, dx - \lambda \int_{\partial\Omega} \left(\varepsilon |v|^{p^+} + c_{\varepsilon} |v|^{q(x)} \right) \, d\sigma \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

olur. Ayrıca, Teorem 2.9.6 ve Teorem 2.9.7 yardımıyla

$$E \rightarrow L^{p^+}(\Omega)$$

ve

$$E \rightarrow L^{q^+}(\partial\Omega) \rightarrow L^{q^-}(\partial\Omega).$$

gömmelerini yazabiliriz. Bu gömmelerden, her $v \in E$ ve $c_9, c_{10}, c_{11} > 0$ birer sabit olmak üzere

$$\int_{\Omega} |v|^{p^+} dx \leq c_9 \|v\|^{p^+}, \quad \int_{\partial\Omega} |v|^{q^+} d\sigma \leq c_{10} \|v\|^{q^+}$$

ve

$$\int_{\partial\Omega} |v|^{q^-} d\sigma \leq c_{11} \|v\|^{q^-} \quad (4.3.3)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Üstelik (4.3.1) ve (4.3.3) eşitsizliklerini (4.3.2) eşitsizliğinde kullanılırsa,

$$I(v) \geq \frac{c_{12}}{p^+} \|v\|^{p^+} - \lambda \left(c_9 \varepsilon \|v\|^{p^+} + c_{\varepsilon} c_{11} \|v\|^{q^-} \right)$$

Yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için $\lambda c_9 \varepsilon < \frac{c_{12}}{2p^+}$ olarak seçtiğimiz zaman

$$I(v) \geq \|v\|^{p^+} \left(\frac{c_{12}}{2p^+} - \lambda c_{11} c_{\varepsilon} \|v\|^{q^- - p^+} \right).$$

elde edilir. Ayrıca, $\psi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ olarak tanımlanan

$$\psi(t) = \frac{c_{12}}{2p^+} - \lambda c_{11} c_{\varepsilon} t^{q^- - p^+}$$

bir fonksiyon olsun. Yukarıdaki c_{12} pozitif bir sabittir. Bu durumda, $p^+ < q^-$ olduğu için ψ fonksiyonu sıfırın komşuluğunda pozitifdir. O halde, $I(v) \geq \tau > 0$ olacak şekilde τ ve r pozitif sayıları vardır.

Lemma 4.3.3 Farzedelimki (AR) , (A_1) - (A_5) , (g_1) ve (g_2) koşulları sağlansın. Bu durum da, $\|v_1\| > r$ için de $I(v_1) < 0$ olacak şekilde $v_1 \in X$ vardır.

İspat: $\vartheta \in E \setminus \{0\}$ ve $t > 1$ olsun. Bu durumda, (AR) koşulundan, her $(x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ ve $c_{13} > 0$ sabiti için $|G(x, t)| \geq c_{13} |t|^{\theta}$ yazabiliriz. Ayrıca, Lemma 4.2.4 (ii)'den $c_{14} > 0$ sabiti için

$$\begin{aligned}
I(t\vartheta) &= \int_{\Omega} A(x, \nabla t\vartheta) dx - \lambda \int_{\partial\Omega} G(x, t\vartheta) d\sigma \\
&\leq \frac{c_{14} t^{p^-}}{p^-} \int_{\Omega} A(x, \nabla \vartheta) dx - \lambda c_{13} t^{\theta} \int_{\partial\Omega} |\vartheta|^{\theta} d\sigma
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

elde edilir. Ayrıca, (4.3.4) eşitsizliğin de $\theta > p^-$ koşulunu kullanırsak $t \rightarrow \infty$ iken $I(t\vartheta) < 0$ olur. Yani, $v_1 = t\vartheta \in X$ olarak seçtiğimizde $\|v_1\| > r$ ve $I(v_1) < 0$

Lemma 4.3.4. Kabul edelimki (AR) , (A_1) - (A_5) , (g_1) ve (g_2) koşulları sağlansın. Bu durum da, I fonksiyoneli (PS) koşulunu sağlar.

İspat: Kabul edelimki, $\{v_n\} \subset E$ dizisi aşağıdaki koşulları sağlayan bir (PS) -dizisi olsun.

$$\begin{aligned}
c_{15} > 0 \text{ sabit olmak üzere } I(v_n) &\rightarrow c_{15} \\
\text{ve } n \rightarrow \infty \text{ iken } E^* \text{ uzayında } I'(v_n) &\rightarrow 0
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Burada, $\{v_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt diziye sahip olduğu kanıtlanacaktır. Bunun için, ilk olarak E uzayında $\{v_n\}$ dizisinin sınırlı olduğu gösterilecektir. Bunu göstermek için de çelişki yöntemi kulanılacaktır. Yani; $n \rightarrow \infty$ iken $\|v_n\| \rightarrow \infty$ olur.

O halde, (A_4) koşulunu kullanarak,

$$\int_{\Omega} |\nabla v_n|^{p(x)} \leq \int_{\Omega} a(x, \nabla v_n) \nabla v_n dx \leq p^+ \int_{\Omega} A(x, \nabla v_n) dx. \tag{4.3.6}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, (AR) , (4.3.5), (4.3.6), Teorem 2.8.4 ve yeterince büyük n için $\|v_n\| > 1$ kullanırsak;

$$\begin{aligned}
1 + c_{15} &\geq I(v_n) - \frac{1}{\theta} \langle I'(v_n), v_n \rangle \\
&= \int_{\Omega} A(x, \nabla v_n) dx - \lambda \int_{\partial\Omega} G(x, v_n) d\sigma \\
&\quad - \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} a(x, \nabla v_n) \nabla v_n dx + \frac{\lambda}{\theta} \int_{\partial\Omega} g(x, v_n) v_n d\sigma \\
&\geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta} \right) \|v_n\|^{p^-}
\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

elde edilir. Ayrıca, (4.3.7) eşitsizliğinin her iki tarafını $\|v_n\|^{p^-}$ böldüğümüzde, $\theta \leq p^+$ elde ederiz. Bu durum da, (AR) koşulundaki $\theta > p^+$ koşulunu ile çeliştiği için $\{v_n\}$

dizisi E uzayında sınırlı olur. Yani, E uzayı yansılmalı Banach uzay olduğundan dolayı E uzayında $v_n \rightarrow v$ (zayıf yakınsak) olacak şekilde bir $v \in E$ vardır. Şimdi de $\{v_n\}$ dizisinin X uzayında $v_n \rightarrow v$ (güçlü yakınsak) olacak şekilde bir $v \in E$ varlığı gösterilecektir.

O halde, (4.3.5) ifadesinden $n \rightarrow \infty$ iken $\langle I'(v_n), v_n - v \rangle \rightarrow 0$ dir. Yani;

$$\begin{aligned} & \langle I'(v_n), v_n - v \rangle \\ &= \int_{\Omega} a(x, \nabla v_n)(\nabla v_n - \nabla v) dx - \lambda \int_{\partial\Omega} g(x, v_n)(v_n - v) d\sigma \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Diğer taraftan, (g_1) koşulunu ve Teorem 2.8.8 kullanırsak

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\partial\Omega} g(x, v_n)(v_n - v) d\sigma \right| \leq \left| \int_{\partial\Omega} (c_0 + c_1 |v_n|^{q(x)-1})(v_n - v) d\sigma \right| \\ & \leq c_{16} \|v_n - v\|_{q(x)} + c_{17} \|v_n\|_{q'(x)}^{q(x)-1} \|v_n - v\|_{q(x)}. \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

elde ederiz. Burada c_{16} ve c_{17} birer pozitif sabittir. Ayrıca, $E \rightarrow L^{q(x)}(\partial\Omega)$ kompakt gömmeden

$$L^{q(x)}(\partial\Omega) \text{ uzayında } v_n \rightarrow v \text{ (güçlü yakınsak)} \quad (4.3.11)$$

yazılabilir. O halde (4.3.11) eşitsizliğinde, Teorem 2.8.4 and (4.3.11) kullanılırsa

$$\int_{\partial\Omega} g(x, v_n)(v_n - v) d\sigma \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty \quad (4.3.12)$$

elde edilir.

Yukarıdaki (4.3.12) ifadesini, (4.3.8) de kullanırsak

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \int_{\Omega} a(x, \nabla v_n)(\nabla v_n - \nabla v) dx \rightarrow 0$$

olur. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Psi'(v_n), v_n - v \rangle = 0.$$

O halde, Lemma 4.2.5 (vi) den

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Psi'(v_n), v_n - v \rangle \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\Psi(v) - \Psi(v_n)) = \Psi(v) - \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(v_n)$$

yada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(v_n) \leq \Psi(v)$$

ve Lemma 4.2.5 (iii) den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(v_n) = \Psi(v).$$

elde edilir. Aksine $\{v_n\}$ dizisi E uzayında $v_n \rightarrow v$ (güçlü yakınsak) olmasın. Bu durumda, $\xi > 0$ ve $\|v_{n_k} - v\| \geq \xi$ olacak şekilde $\{v_n\}$ dizisinin $\{v_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. O halde, Lemma 4.3.5 (vii) kullanarak da

$$\frac{1}{2} \Psi(v) + \frac{1}{2} \Psi(v_{n_k}) - \Psi\left(\frac{v + v_{n_k}}{2}\right) \geq k_0 \|v - v_{n_k}\|^{p^-} \geq k_0 \xi^{p^-} \quad (4.3.13)$$

olur. (4.3.13) eşitsizliğinde de, $k \rightarrow \infty$ alınırsa

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Psi\left(\frac{v + v_{n_k}}{2}\right) \leq \Psi(v) - k_0 \xi^{p^-} \quad (4.3.14)$$

olur.

Diğer taraftan da, Lemma 4.3.5 (iii),

$$\Psi(v) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Psi\left(\frac{v + v_{n_k}}{2}\right) \quad (4.3.15)$$

olur. Bu durumda, (4.3.14) ve (4.3.15) eşitsizlikleri birlikte kullanılırsa ve E

uzayında $\left(\frac{v + v_{n_k}}{2}\right)$ dizisi v elemanına zayıf yakınsak olduğu bilgisi ile çelişir.

O halde, $\{v_n\}$ dizisi E uzayında $v_n \rightarrow v$ (güçlü yakınsak) yakınsar ve E uzayı Banach uzay olduğundan dolayı $v \in E$ dir.

Teorem 4.3.1'in ıspatı: Lemma 4.3.2, Lemma 4.3.3, Lemma 4.3.4 ve (A_2) koşulundan da $I(0) = 0$ olduğu için I fonksiyoneli Mountain-Pass Teoreminin bütün koşullarını sağlamış olur. Bu durumda, I fonksiyonelinin sıfırdan farklı en az bir kritik noktası vardır. Bu kritik nokta aynı zamanda, (4.1.1) probleminin E uzayındaki sıfırdan farklı en az bir zayıf çözümü olur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışma da,

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a(x, \nabla v)) = 0, & x \in \Omega, \\ a(x, \nabla v) \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda g(x, v), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

şeklindeki standart olmayan büyüme koşullu ve Steklov sınır değer koşullarına sahip lineer olmayan eliptik denklemi ele alınmıştır. Yukarıdaki problem için, Mountain-Pass teoremiyle birlikte Ambrosetti- Rabinowitz koşulu kullanılarak, problemin sıfırdan farklı bir tane zayıf çözümünün varlığı Değişken Üslü Sobolev uzayında incelenmiştir.

Bu çalışma için; varyasyonel yaklaşımla Z_2 - Simetrik Mountain Pass teoremini kullanılarak, denklemin sonsuz çözümünün varlığı gösterilebilir. Ayrıca, varyasyonel yaklaşımla, Ambrosetti-Rabinovitz koşulu altında Fountain ve Dual Fountain teoremleri kullanılarak, denklemin çözümlerinin varlığı ve katlılığı Değişken Üslü Sobolev uzayında çalışılabilir.

KAYNAKLAR

- Adams R. A. (1975). *Sobolev Space*. Academic Press. New York.
- Ambrosetti, A. ve Rabinowitz, P. H. (1973). Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal Of Functional Analysis* 14, 349-381.
- Acerbi, E. ve Mingione, G. (2001). Regularity results for a class of functionals with non-standard growth. *Archive For Rational Mechanics And Analysis*, 156,121–140.
- Antontsev, S. N. ve Rodrigues, J. F. (2006). On stationary thermo-rheological viscous flows. *Annali dell'Universita' di Ferrara Sezione VII. Scienze Matematiche*, 52(1),19–36.
- Antontsev, S. N. ve Shmarev, S. I. (2005). A model porous medium equation with variable exponent of nonlinearity: existence, uniqueness and localization properties of solutions. *Nonlinear Analysis*, 60, 515-545.
- Avci, M. (2013). Existence and multiplicity of solutions for Dirichlet problems involving the $p(x)$ -Laplace operatör. *Electronic Journal Of Differential Equations*, 14, 1–9.
- Ayoujil, A. (2014). On the superlinear Steklov problem involving the $p(x)$ -Laplacian, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*. 38, 1-13.
- Ben Ali, K. (2018). Existence results for Steklov problem involving the $p(x)$ -Laplacian, *Complex Variables and Elliptic Equations*. 63 (12),1675-1686.
- Brezis, H. (1992). *Analyse Fonctionnelle. The'orie, Me'thodes et Applications*, Masson, Paris.
- Chammem, R. ve Sahbani A. (2021). Existence and multiplicity of solutions for some Steklov problem involving ($p_1(x)$, $p_2(x)$)-Laplacian operator. *Applicable Analysis*. 1-16, <https://doi.org/10.1080/00036811.2021.1961758>
- Chammem, R., vd., (2020). Existence and multiplicity of solutions for some Styklov problem involving $p(x)$ -Laplacian operatör. *Applicable Analysis*. doi.org/10.1080/00036811.2020.1807014.
- Çekiş, B. (2005). *Değişken Üstlü Lebesgue Ve Sobolev Uzaylarında Gömme Tipli Eşitsizlikler*. Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sayfa89. Diyarbakır.
- Edmunds, D. E. ve Rákosník, J. (2000). Sobolev embedding with variable exponent. *Studia Mathematica*, 143, 267-293.
- Deng, S. G. (2008). Eigenvalues of the $p(x)$ -Laplacian Steklov problem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 339 (2), 925-937.
- Diening, L. (2002). *Theoretical and Numerical Results for Electrorheological Fluids*. PhD thesis, University of Freiburg, Germany.

- Diening, L., vd., (2004). Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev Spaces. In *FSDONA04 Proceedings*, pages 38–58. Czech Academy Of Sciences, Milovy, Czech Republic.
- Diening, L., vd., (2011). Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 2017, Springer, Heidelberg, 2011.
- Ekşi, E. (2018). *Lineer Olmayan Operatörlü Denklemler İçin Newton Metodu*. Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sayfa 102. Sakarya.
- Fan, X. L., vd., (2005). “Eigenvalues of $p(x)$ -Laplacian Dirichlet problem”, *Journal Of Mathematical Analysis And Applications*, 302, 306–317.
- Fan, X. L. (2005). Solutions for $p(x)$ -Laplacian Dirichlet problems with singular coefficients, *Journal Of Mathematical Analysis And Applications*, 312, 464–477.
- Fan, X. L., and Zhang, Q. H. (2003). Existence of solutions for $p(x)$ -Laplacian Dirichlet problem, *Nonlinear Analysis*, 52, 1843–1852.
- Fan, X. L. ve Zhao, D. (2001). On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}(\Omega)$. *Journal Of Mathematical Analysis And Applications*, 263, 424–446.
- Karim, B., vd., (2018). Existence and multiplicity of a -harmonic solutions for a Steklov problem with variable exponents. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica*. 36(2), 125-136.
- Hsini, M., vd., (2020). Nonhomogeneous $p(x)$ -Laplacian Steklov problem with weights. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 65(4), 440-454.
- Kováčik, O. (1995). Parabolic equations in generalized Sobolev spaces $W^{k,p(x)}$. *Fasciculi Mathematici*, 25, 87–94.
- Kováčik, O. ve Rákosník, J. (1991). On spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}(\Omega)$. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 41(116), 592–618.
- Mihăilescu, M., (2007). Existence and multiplicity of solutions for a Neumann problem involving the $p(x)$ -Laplace operator. *Nonlinear Analysis*, 67, 1419–1425.
- Mihăilescu, M. (2006). Existence and multiplicity of solutions for an elliptic equation with $p(x)$ -growth conditions, *Glasgow Mathematical Journal*, 48, 411-418.
- Mashiyev, R. A., vd., (2012). “Existence and multiplicity of weak solutions for nonuniformly elliptic equations with nonstandard growth condition”. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 57(5), 579-595.
- Musielak, J. (1983). Orlicz spaces and modular spaces, volume 1034 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin.
- Musielak, J. ve Orlicz, W. (1959). On modular spaces. *Studia Mathematica*, 18:49–65.

- Bayraktar, M. (2006). *Fonksiyonel Analiz. Gazi Kitapevi*, Sayfa Sayısı:320, ISBN: 9786058387034, Ankara.
- Mustafa, N. (2016). *Çözümlü Problemlerle Fonksiyonel Analiz*. Seçkin Yayınları, No:47, Sayfa 479, Ankara.
- Nakano, H. (1950). *Modulared Semi-Ordered Linear Spaces*. Maruzen Co. Ltd., Tokyo.
- Nakano, H. (1951). *Topology of linear topological spaces*. Maruzen Co. Ltd., Tokyo.
- Ourraoui, A. (2021). Existence and uniqueness of solutions for Steklov problem with variable exponent, *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications*, 1 (5), 158-166.
- Orlicz, W. (1931). Über konjugierte Exponentenfolgen. *Studia Mathematica*, 3, 200–211.
- Pişkin, E. (2017). *Sobolev Uzayları*. Seçkin Yayınları, No:49, Sayfa148. Ankara.
- Portnov, V. R. (1966) . Certain properties of the Orlicz spaces generated by the functions $M(x, w)$. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 170, 1269–1272.
- Portnov, V. R. (1967) . On the theory of Orlicz spaces which are generated by variable N-functions. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 175, 296–299.
- Rajagopal, K. R. ve Růžička M. (1996). On the modeling of electrorheological materials. *Mechanics Research Communications*, 23, 401–407.
- Rajagopal, K. R. ve Růžička M. (2001). Mathematical modeling of electrorheological materials. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 13, 59–78.
- Růžička, M. (2000). Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory, volume 1748 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin.
- Samko, S. (2005). On a progress in the theory of Lebesgue spaces with variable exponent: maximal and singular operators. *Integral Transforms And Special Functions*, 16, 461–482.
- Schechter, M. (2007). The use of cerami sequences in critical point theory. *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*. Article ID 58948, 28 p.
- Sharapudinov, I. I. (1979). On the topology of the space $L^{p(t)}([0,1])$. *Mathematical Notes*, 26(3–4), 796–806, 351.
- Sharapudinov, I. I. (1983). Approximation of functions in the metric of the space $L^{p(t)}([a,b])$ and quadrature formulas, (Russian). In *Constructive function theory '81 (Varna, 1981)*, pages 189–193. Bulgarian academy of sciences publishing house, Sofia, 352.
- Sharapudinov, I. I. (1986). The basis property of the Haar system in the space $L^{p(t)}([0,1])$ and the principle of localization in the mean, (Russian).

- Matematicheskii Sbornik (N.S.)*, 130(172):275– 283, 286.
- Shi, X. ve Din, X. (2009). Existence and multiplicity of solutions for a general $p(x)$ -Laplacian Neumann problem. *Nonlinear Analysis*, 70, 3715–3720.
- Siddiqi, A. H. (2004). *Applied Functional Analysis*. Marcel Dekker Inc. New York.
- Soykan, Y. (2016). *Fonksiyonel Analiz. Nobel Yayınları*, No:1590, Sayfa545. Ankara.
- Tsenov, I. V. (1961). Generalization of the problem of best approximation of a function in the space l^s . *Uchenye Zapiski Dagestanskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 7, 25–37.
- Toan, H. Q. ve Ngô, Q. A. (2009). Multiplicity of weak solutions for a class of nonuniformly elliptic equations of p -Laplacian type. *Nonlinear Analysis*, 70 (4), 1536-1546.
- Wei, Z. ve Chen, Z. (2012). “Existence results for the $p(x)$ -Laplacian with nonlinear boundary condition”, *Applied Mathematics*, doi:10.5402/2012/727398.
- Willem, M. (1996). *Minimax Theorems*, Birkhauser, Basel.
- Wineman, A.S. ve Rajagopal, K. R. (1995). On constitutive equations for electrorheological materials. *Continuum Mechanics And Thermodynamics*,7,1–22.
- Winslow, W. M. (1949). Induced fibrin of suspensions, *Journal Of Applied Physics*, 20, 1137-1140.
- Yucedag, Z. (2019). “Existence results for steklov problem with nonlinear boundary condition”, *Middle East Journal of Science*, 5(2), 146 – 154.
- Yücedağ, Z. (2015). Solutions of nonlinear problems involving $p(x)$ -Laplacian operator, *Advances In Nonlinear Analysis*, 4, 285–293.
- Yucedag, Z. vd., (2012). “On an elliptic system of $p(x)$ -Kirchhoff-type under Neumann boundary condition,” *Mathematical Modelling And Analysis*, 17(2), 161–170.
- Yücedağ, Z. (2010). *Değişken Üstlü Lebesgue Sobolev Uzaylarında Nehari Manifold Yaklaşımı Ve Mountain Pass Teoremini Kullanarak $p(x)$ -Laplace Denklemlerin Çözümleri*. Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sayfa 93. Diyarbakır.
- Zerouali, A. vd., (2015). Existence and multiplicity results for elliptic problems with nonlinear boundary conditions and variable exponents. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica.*, 33(3), 121-131.
- Zhikov, V. V. (1987). Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory. *Mathematics Of The USSR-Izvestya.*, 29 (1), 33-66.

Zhikov, V. V. (1995). On Lavrentiev's phenomenon. *Russian Journal Of Mathematical Physics*, 3, 249–269.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad

Vahup Murad

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Lisans	Dicle Üniversitesi	2020
Lise	Ceylanpınar Çok Programlı Lisesi	2015

İş Deneyimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev
2022	Lokman Hekim Mesleki Ve Teknik Anadolu Lisesi	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce, Arapça

Yayınlar

1.

TEZ İNTİHAL FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	Vahup MURAD
ÖĞRENCİ NO	20804017
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2021-2022
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	Matematik
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	Standart Olmayan Büyüme Koşulunu İçeren Steklov Sınır Değer Probleminin Çözümlerinin İncelenmesi
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	71
BENZERLİK ORANI	%21
RAPORLAMA TARİHİ	24/06/2022
Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 71 sayfalık kısmına ilişkin, 21/06/2022 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından <i>Turnitin</i> adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 21 ‘tür. Uygulanan filtrelemeler: ☐ Kabul/Onay sayfaları hariç, ☐ Kaynakça hariç ☐ Alıntılar hariç/dâhil ☒ Diğer (herşey dahil) Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esaslarını inceledim ve bu Uygulama Esaslarında belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim. Gereğini saygılarımla arz ederim. Öğrencinin Adı ve Soyadı: Vahup MURAD Tarih: 24.06.2022 İmza:	
..... Tez Danışmanı Adı ve Soyadı: Doç. Dr. Zehra YÜCEDAĞ Tarih: 24. 06.2022 İmza:	 Anabilim Dalı Başkanı Adı ve Soyadı: Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY Tarih: 24.06.2022 İmza: