

**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**



**BİR EĞRİNİN PARALEL EĞRİSİNİN OLUŞTURDUĞU
REGLE YÜZEYLER**

Yüksek Lisans Tezi

Elif KURT

Danışman
Doç. Dr. Fatma GÜLER

SAMSUN
2022

TEZ KABUL VE ONAYI

Elif KURT tarafından, Doç. Dr. Fatma GÜLER danışmanlığında hazırlanan “BİR EĞRİNİN PARALEL EĞRİSİNİN OLUŞTURDUĞU REGLE YÜZEYLER” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 21.9.2022 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı	İmza	Sonuç
Başkan	Prof. Dr. Emin KASAP Ondokuz Mayıs Üniversitesi Geometri Ana Bilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret
Üye	Doç. Dr. Tevfik ŞAHİN Amasya Üniversitesi Geometri Ana Bilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret
Üye	Doç. Dr. Fatma GÜLER Ondokuz Mayıs Üniversitesi Geometri Ana Bilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY
... / ... / ...
Prof. Dr. Ali BOLAT
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım Yüksek Lisans tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

Etik Kurul Gerekli mi ?

Evet ☐ (Gerekli ise ekler kısmına ekleyiniz)

Hayır ☒

İmza
23 /06/ 2022
Elif KURT

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı :BİR EĞRİNİN PARALEL EĞRİSİNİN OLUŞTURDUĞU
REGLE YÜZEYLER

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 21.06.2022 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 25

Tek kaynak oranı : % 4 çıkmıştır.

İmza
23 /06 / 2022
Doç. Dr. Fatma GÜLER

ÖZET

BİR EĞRİNİN PARALEL EĞRİSİNİN OLUŞTURDUĞU REGLE YÜZEYLER

Elif KURT

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Yüksek Lisans, Haziran/2022

Danışman: Doç. Dr. Fatma GÜLER

Hareket eden bir katı cisimde gömülü yönlendirilmiş çizgilerin yörüngelerine yörünge regle yüzeyler denir ve bu yüzeylerin geometrisi uzay kinematiğindeki tasarım problemlerinin incelenmesinde oldukça kullanışlıdır. Bu tez çalışmasında sayısal kontrollü işlemede önemli bir yeri olan paralel eğrilerin Frenet vektörleri tarafından oluşan yörünge regle yüzeyleri araştırıldı. Bu tez paralel eğrinin yörünge regle yüzeylerinin açılabilir ve minimal olma koşullarının esas eğri ile bağlantılarını kurmayı amaçlamaktadır. Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Tezin birinci bölümünde eğriler ve regle yüzeyler ile ilgili literatür özeti verilmiştir.

İkinci bölümünde çalışmamızda kullandığımız temel tanımlara ve teoremlere ayrıntılı olarak yer verilmiştir.

Üçüncü bölümünde bir esas eğrinin Frenet elemanları ve bu eğriye paralel olan eğrinin Frenet elemanları arasındaki ilişki ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Dördüncü bölüm, tezin orjinal kısmını oluşturmaktadır. Verilen bir eğriye paralel eğrinin Frenet vektörlerinin ürettiği yörünge regle yüzeyler oluşturulmuştur. Bu yüzeylerin I. ve II. temel form elemanları yardımıyla ortalama eğrilikleri ve Gauss eğrilikleri hesaplanarak bazı sonuçlar elde edilmiştir. Paralel eğrinin bu yüzeyler üzerinde özel eğri olması koşulları araştırılmıştır. Beşinci bölümde, elde edilen tüm yüzeylere örnekler verilmiştir.

Altıncı bölüm sonuç ve önerilere ayrılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Eğri, Paralel eğri, Frenet çatısı, Regle yüzey, Gauss ve ortalama eğrilik.

ABSTRACT

THE RULED SURFACES OBTAINED FROM PARALLEL CURVE OF A CURVE

Elif KURT

Ondokuz Mayıs University
Institute of Graduate Studies
Department of Mathematics

Master, June/2022

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Fatma GÜLER

Trajectories of directed lines embedded in a moving rigid body are called orbital ruled surfaces, and the geometry of these surfaces is very useful in studying design problems in space kinematics. In this thesis, orbital ruled surfaces of parallel curves, which have an important place in numerical control processing, formed by Frenet vectors were investigated. This thesis aims to establish the connections between the openable and minimal conditions of the orbit ruled surfaces of the parallel curve with the main curve. This thesis consists of six chapters.

In the first part of the thesis, a summary of the literature on curves and ruled surfaces is given.

In the second part, the basic definitions and theorems that we used in our study are given in detail.

In the third part, the relationship between the Frenet elements of a principal curve and the Frenet elements of the curve parallel to this curve is examined in detail.

The fourth chapter constitutes the original part of the thesis. The orbital ruled surfaces produced by the Frenet vectors of the curve parallel to a given curve are formed. I and II of these surfaces. Some results were obtained by calculating the mean curvatures and Gaussian curvatures with the help of basic form elements. The conditions for the parallel curve to be a special curve on these surfaces were investigated. In the fifth chapter, examples of all surfaces obtained are given.

The chapter six is devoted to conclusions and recommendations.

Keywords: Curves, Parallel curve, Frenet frame, Ruled surface, Gaussian and mean curvature.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu çalışmamı hazırlarken yanımda olan ve bilgileriyle bana ilham veren danışmanım Doç. Dr. Fatma GÜLER' e ve her daim bana inanıp benim yanımda olan aileme teşekkür ediyorum.

Elif KURT



İÇİNDEKİLER

TEZ KABUL VE ONAYI	i
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI	ii
TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORUBEYANI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
1.1. Literatür Özeti	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	3
2.1. Afin Uzay	3
2.2. Öklid Uzayları.....	4
2.3. $\mathbb{E}^3$ de Eğriler ve Yüzeyler	5
2.4. Regle Yüzey	12
3. BİR EĞRİNİN PARALEL EĞRİSİ VE BU EĞRİLERİN FRENET VEKTÖRLERİ	14
4. BİR EĞRİNİN PARALEL EĞRİSİNİN OLUŞTURDUĞU.....	16
REGLE YÜZEYLER	16
4.1. Paralel Eğrinin Teğet Vektörünün Ürettiği Regle Yüzey	16
4.2. Paralel Eğrinin Normal Vektörünün Ürettiği Regle Yüzey	18
4.3. Paralel Eğrinin Binormal Vektörünün Ürettiği Regle Yüzey	20
5. ÖRNEKLER.....	24
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	30
KAYNAKLAR	31
ÖZ GEÇMİŞ.....	33

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Cismi
$\mathbb{E}^3$	: Üç Boyutlu Öklid Uzayı
α	: Uzay Eğrisi
T	: Birim Teğet Vektör
N	: Birim Normal Vektör
B	: Birim Binormal Vektör
κ	: Eğrilik
τ	: Burulma (Torsiyon)
ψ	: Regle yüzey
H	: Ortalama Eğriliği
K	: Gauss Eğriliği

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 5. 1. Denklem (4.1) Deki Regle Yüzey	32
Şekil 5. 2. Denklem (4.13) Deki Regle Yüzey.....	32
Şekil 5. 3. Denklem (4.23) Deki Regle Yüzey.....	33
Şekil 5. 4. Denklem (4.1) Deki Regle Yüzey.....	34
Şekil 5. 5. Denklem (4.13) Deki Regle Yüzey.....	35
Şekil 5. 6. Denklem (4.23) Deki Regle Yüzey.....	36



1. GİRİŞ

1.1. Literatür Özeti

Eğriler, diferansiyel geometrinin yapı taşlarıdır. Özel eğrilerin incelenmesi, eğriler teorisinde önemli bir yere sahiptir. Paralel veya ofset eğri, noktaları belirli bir eğriden sabit bir uzaklıkta olan bir eğri olarak tanımlanır. Bu eğriler paralel taşıma değildir. Çoğu zaman, ilk eğriden daha karmaşık bir matematiksel yapıya sahiptir. Paralel eğrileri, örneğin çift eksenli bir makinenin yuvarlak bir kesme aletiyle yapılan kesimin şeklini tanımladığı sayısal kontrollü işlemede önemlidir. Birçok çalışmaya konu olan ofset eğrilerinden bazıları, involute evolute eğrileri, Bertrand eğrileri, Mannheim eğrileridir. Aldossary, M. T., & Gazwani(2020), 3 boyutlu Öklid uzayında paralel eğrilerin ve yüzeylerin hareketini araştırdı. Ayrıca paralel eğri üzerinde tanımlanan Frenet çatısını ve paralel eğrilerin özelliklerini verdi. Wang, ve Liu, (2007-2008) Mannheim eğri çiftlerini ve özelliklerini inceledi.

Eğri üzerindeki tanımlı Frenet çatısı, eğrinin geometrisini tanımlamaya yardımcı olan eğriye eklenmiş bir koordinat çerçevesidir. Bu çatının Serret Frenet formülleri eğrinin eğriliği, burulması ve yay uzunluğuna göre türevlerini içeren formüller olup eğrilerin geometrisini tanımlamak için önemlidir.

Bir noktanın hareketiyle bir eğrinin oluşturulabilmesine benzer şekilde, uzayda bir çizginin hareketi ile bir regle yüzey oluşturulabilir. Böylece bir parametrelili doğrular kümesi bir regle yüzey oluşturur, (J. Hoschek 1973). Bu nedenle, hareketli bir uzayda veya hareket eden bir katı cisimde gömülü yönlendirilmiş çizgilerin yörüngelerine genellikle yörünge regle yüzeyler denir,(Küçük, A. 2004).Yörünge regle yüzeylerin geometrisi, uzaysal mekanizmalardaki veya uzay kinematikteki tasarım problemlerinin incelenmesinde yaygın olarak uygulanır (Farouki, R.T.,(1986), Ravani, B., Ku, T.S., 1991, Yang, A.T., Kirson, Y., Both, B.,(1975)). Regle yüzeylerle ilgili önemli bir gerçek, bunların düz çizgilerle oluşturulabilmesidir. Bu özelliklerinden dolayı inşaat mühendisliğinde tercih edilen yüzeylerdir. Ayrıca geometrik tasarım, imalat sistemleri ve yüzey analizinde de oldukça kullanışlıdır. Regle yüzeylerin mimari alanda da birçok kullanımı vardır.

Regle yüzeylerin bir alt kümesi açılabilir yüzeylerdir ve düzleme izometrik olarak tanımlanabilirler. Bu yüzeylerin doğrultman boyunca yüzey normaleri sabittir ve yüzeyin tüm noktalarında Gauss eğrilikleri sıfırdır. Açılabilir regle yüzeylerin en belirgin örnekleri koniler ve silindirlerdir. Bu yüzeyler daha çok geometrik tasarım,

yüzey analizi ve üretim sistemlerinde, mühendislikten teknolojiye kadar birçok alanda geniş uygulamalara sahiptir. Örneğin, bir uçak tasarımcısı bu yüzeyleri uçak kanatlarını tasarlamak için kullanır. Tekstil tasarımında, giysi üretmek için düzlemsel bir kumaş parçası ile başlanır ve kumaş esnetilmezse kalitesi artar. Denizcilik endüstrisinde, düzlemsel çelik levhaları bir geminin gövdesinin biçimine uyarlamak zorundadır. Sonuç açılabilir bir yüzey ise, bu bir katlama makinesi ile yapılabilir, bu da ısı uygulamasından kaçınır ve maliyetleri düşürür. Ayrıca, 3 boyutlu yeniden yapılandırma ve bir kitabın sayfalarını modellemek için kullanılırlar ve mimari yapılarda da bulunabilirler (Perriollat, M., Bartoli, A.,(2013) , Pottmann, H., Asperl, A., Hofer, M., Kilian, A., (2007)).

Literatürde yörünge regle yüzeyler ve açılabilir yörünge yüzeyler üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Gürsoy. ve Küçük, kapalı yörünge regle yüzeylerin geometrik değişmezleri hakkında bazı yeni sonuçlar verdi(Gursoy, O., Küçük, A.,(1999). Açılabilir Bertrand yörünge regle yüzeyinin ofsetleri incelendi. (Küçük, A., (2003)). Ayrıca açılabilir bir yörünge regle yüzey içinde birden fazla açılabilir Bertrand ofseti varsa, esas regle yüzeyin striksiyon eğrisinin bir helis olduğunu gösterdi.Walrave (1995), eğriler ve yüzeyler üzerine yaptığı çalışmasında özellikle yüzeylerin minimal olması konusunda önemli sonuçlara ulaşılmıştır. Dillen ve Kuhnel (1999), eğriler, yüzeyler ve manifoldlar üzerine kitap çıkarmış, özellikle regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğriliği üzerine çalışmalar yapmıştır. Sodsiri(2003), çalışmasında 3-boyutlu Öklid uzayında regle yüzeyin Gauss eğriliği, ikinci Gauss eğriliği ve ortalama eğriliğinin lineer kombinasyonlarının bir doğru boyunca sabit olduğunu ispatlamıştır.Ergüt (1980), E^3 Öklid uzayında Frenet hareketi adı altında regle yüzeyler için boğaz noktası, çizgisi, dağılma parametresi gibi kavramları incelemiştir. M. Çimdiker ve C. Ekici (2017) regle yüzeylerin açılabilirliği ile ilgili çalışmalara yer vermişlerdir. Ali ve diğerleri (2013), bu çalışmalarında 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre bazı özel eğriler tarafından üretilen regle yüzeyleri incelemiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde bu çalışmada kullanılan tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Öncelikle afin uzay, Öklid uzayı, E^n de eğri, frenet çatı tanımı ve formülleri ve son olarak regle yüzey tanımı ve eğrilikler tanımları verilmiştir.

2.1.Afin Uzay

Tanım 2.1.1. A boş olmayan bir cümle ve V de F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\psi: A \times A \rightarrow V$$

dönüşümü $P, Q \in A$ noktaları için

$$(P, Q) \rightarrow \overrightarrow{PQ} \in V$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlarsa A cümlesine V ile birleşmiş bir afin uzay denir:

- i. $\forall P, Q, R \in A$ için $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$,
- ii. $\forall P \in A$ için $\forall \alpha \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

$\overrightarrow{PQ}$ vektöründe ; P noktasına başlangıç noktası, Q noktasına da uç noktası denir. Diğer taraftan A nın boyutu $boyA = boyV$ olarak tanımlanır (Hacısalıhoğlu,1983).

Tanım 2.1.2. Bir V vektör uzayı ile birleşen afin uzay A olsun. $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ noktaları için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ kümesi V nin bir tabanı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n + 1)$ lisine A afin uzayının bir afin çatısı denir. Bu durumda P_0 ve P_i noktalarına sırasıyla çatının başlangıç ve bitiş noktaları denir, (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.3. Bir F cismi üzerinde tanımlanan iki vektör uzayı V_1, V_2 ile birleştirilmiş afin uzaylar ise sırası ile A_1, A_2 olmak üzere,

$$f: A_1 \rightarrow A_2$$

bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $P \in A_1$ noktası için

$$X_P: V_1 \rightarrow V_2$$

dönüşümü $\alpha \in V_1$ vektörü için $\alpha = \overrightarrow{PQ}$ olacak şekilde ikinci afin aksiyomuna göre tek nokta olan $Q \in A_1$ olduğuna göre

$$X_P(\alpha) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

dir. Eğer X_P lineer ise f dönüşümüne afin dönüşüm denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

2.2. Öklid Uzayları

Tanım 2.2.1. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı V olsun ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olsun. V de iç çarpım işlemi olarak

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

verilsin. Eğer Öklid iç çarpımı tanımlı ise bu işlem kullanılarak A uzayında uzaklık, açı, norm gibi metrik kavramlar tanımlanır. Böylece A afin uzayı n -boyutlu Öklid uzayı olarak adlandırılır ve $\mathbb{E}^n$ şeklinde gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2.2. V -boyutlu bir reel çarpım uzayı olmak üzere V ile birleşen $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında sıralı bir nokta $(n + 1)$ lisi $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ olmak üzere

$$\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \overrightarrow{P_0 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}\}$$

vektör sistemi V nin bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ çatısına Öklid çatısı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2.3. $\mathbb{E}^n$ uzayındaki $\{\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n\}$ çatısı standart Öklid çatısı olarak adlandırılır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2.4. $\mathbb{E}^n$ uzayındaki bir Y noktasının standart Öklid çatısı cinsinden ifadesi

$$\overrightarrow{\mathbb{E}_0 Y} = \sum_{i=1}^n y_i \overrightarrow{\mathbb{E}_0 \mathbb{E}_i}$$

dir. Bu durumda

$$y_i: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n,$$

fonksiyonlarına y noktasının Öklid koordinat fonksiyonları ve $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ sıralı ve reel değerli fonksiyonlar n -lisine de $\mathbb{E}^n$ in Öklid koordinat sistemi denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2.5. $a, b \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

vektörel çarpımı

$$a \times b = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3$$

şeklindedir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2.6. $p \in \mathbb{E}^n$ olsun.

$$\|p\|_{\mathbb{E}} = \sqrt{\langle p, p \rangle}$$

şeklinde tanımlı fonsiyona p nin normu denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2.7. V iç çarpım ve $x, y \in V$ olsun. Eğer $\langle x, y \rangle = 0$ ise x ve y ye ortogonal(dik) vektörler denir.

İki vektör arasındaki açı,

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

ifadesinde $\cos \theta = 0$ ise x, y ortogonal vektörlerdir (Hacısalıhoğlu, 1983).

2.3. $\mathbb{E}^3$ de Eğriler ve Yüzeyler

Tanım 2.3.1. $I, \mathbb{R}$ nin irtibatlı açık alt cümlesi ve $\mathbb{E}^3$ 3-boyutlu Öklid uzayı olmak üzere

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3 \quad (2.1)$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

dönüşümü diferansiyellenebilir ise $\alpha(I)$ cümlesine $\mathbb{E}^3$ de (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanmış bir eğri ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi adı verilir (O'neill, 1966).

Tanım 2.3.2. $\mathbb{E}^3$ te bir eğri $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ olsun. Öklid koordinat fonksiyonları $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)$ olmak üzere (I, α) koordinat komşuluğuna göre hız vektörü

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \frac{d\alpha_3}{dt} \right)$$

şeklinde tanımlanır (O’neill, 1966).

Tanım 2.3.3. $\mathbb{E}^3$ ’te bir eğri $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ olsun. Eğer $\forall s \in I$ için

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise (I, α) koordinat komşuluğuna göre α eğrisi birim hızlı eğri olarak adlandırılır. Ayrıca, eğrinin $s \in I$ parametresi yay-parametresi olarak adlandırılır. $t_1, t_2 \in I$ olsun, eğrinin $\alpha(t_1)$ ve $\alpha(t_2)$ noktaları arasındaki uzaklık veya M eğrisinin yay uzunluğu

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| dt ; t \in I$$

şeklinde tanımlanır (O’neill, 1966).

Tanım 2.3.4. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Eğer $\forall s \in I$ için,

$$\|\alpha'(s)\| \neq 0$$

ise eğriye regüler eğri adı verilir (O’neill, 1966).

Tanım 2.3.5. $\mathbb{E}^3$ ’de bir M eğrisinin (I, α) ve (J, β) iki tane koordinat komşuluğu olmak üzere

$$\begin{aligned} h &= \alpha \circ \beta : J \rightarrow I \\ s &\rightarrow h(s) = t \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı diferansiyellenebilir h fonksiyonuna parametre değişim fonksiyonu denir (O’neill, 1966).

Tanım 2.3.6. $\mathbb{E}^3$ uzayında bir regüler eğri $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ olsun. $t \in I$ noktasındaki Frenet çatısı vektörleri $\{T(t), N(t), B(t)\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \\ N(t) &= B(t) \times T(t) \\ B(t) &= \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} \end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada T vektör alanına birim teğet vektör alanı, N ye eğrinin birim normal vektör alanı ve B vektörüne de birim binormal vektör alanı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Özel halde M eğrisi, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş ise $s \in I$ yay parametresi olmak üzere ,

$$\begin{aligned} T(s) &= \alpha'(s) \\ N(s) &= \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \\ B(s) &= T(s) \times N(s) \end{aligned} \tag{2.3}$$

olduğu görülür. $\{T, N, B\}$ ortonormal vektörlerden oluşan bir çatıdır.

Ayrıca α eğrisinin eğrilik fonksiyonu

$$\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow \kappa(s) = \|T'(s)\| = \|\alpha''(s)\|$$

şeklinde tanımlanır. $\kappa(s)$ değerine eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir,

Tanım 2.3.7. $\mathbb{E}^3$ uzayında birim hızlı

$$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

eğrisinin Frenet çatısı vektörleri T, N, B olarak verilsin.

$$\tau: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$$

α eğrisinin fonksiyonuna burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir ve aşağıdaki gibi elde edilir (O'Neill, 1966).

$$\tau = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \times \alpha''' \rangle}{\|\alpha''\|^2}$$

Bir eğrinin karakterizasyonunda κ eğriliği ve τ burulması önemli rol oynar.

Örnek olarak;

- i) $\kappa = 0$ olduğunda eğri bir doğrudur.
- ii) $\kappa \neq 0$ ve $\tau = 0$ ise eğri düzlem eğrisidir.
- iii) $\kappa = \text{sabit} > 0$ ve $\tau = 0$ ise $\frac{1}{\kappa}$ yarıçaplı bir çemberdir.

O halde bir eğrinin eğriliği ve burulması yardımıyla eğrinin uzunluğu ve biçimi incelenebilir (O'Neill, 1966).

Teorem 2.3.8. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin düzlemsel bir eğri olması için gerek ve yeter şart $\tau = 0$ olmasıdır (Hacısalıhoğlu, 1983).

İspat: “ $\Rightarrow$ ” Kabul edelim ki α birim hızlı düzlemsel bir eğri olsun. Bu durumda $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktalarının tümü bir E düzlemi içinde bulunur. Düzlemin normali q , düzlem üzerinde herhangi bir nokta p olsun. Bu durumda

$$\langle \alpha(s) - p, q \rangle = 0$$

olur. Bu ifadenin türevi alınır

$$\langle \alpha'(s), q \rangle + \langle \alpha(s) - p, q' \rangle = 0,$$

$$\langle \alpha'(s), q \rangle = 0$$

olur ve tekrar türev alınır

$$\langle \alpha''(s), q \rangle = 0$$

bulunur. Buradan q vektörünün T ve N ye dik olduğu görülür. Bu durumda q vektörü B ye paralel olur. Dolayısıyla

$$B(s) = \pm \frac{q}{\|q\|}$$

şeklinde alınabilir. Bu ifadenin türevi alınır

$$B' = 0$$

bulunur ve

$$B' = -\tau(s)N(s)$$

eşitliğinden

$$\tau(s) = 0$$

elde edilir.

“ $\Leftarrow$ ” Kabul edelim ki $\tau(s) = 0$ olsun. $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ idi. Buradan

$$B'(s) = 0,$$

$$B(s) = c = sbt.$$

olur. Şimdi

$$F = I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow F(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), B(s) \rangle$$

fonksiyonu tanımlansın. $s = 0$ ise $F(0) = 0$ dır. F nin s ye göre türevi alınır

$$F'(s) = \langle \alpha'(s), B(s) \rangle + \langle \alpha(s) - \alpha(0), B'(s) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle T(s), B(s) \rangle + \langle T(s), -K(s)N(s) \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$F(s) = sbt.$$

Buna göre

$$\langle \alpha(s) - \alpha(0), B(s) \rangle = 0$$

eşitliği, α eğrisinin $\alpha(0)$ noktasından geçen ve B vektörüne dik olan düzlem içinde olduğunu gösterir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.3.9. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin doğru olması için gerek ve yeter şart $\kappa = 0$ olmasıdır (Hacısalıhoğlu, 1983).

İspat: $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin eğriliği

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$$

dir. Bu durumda

$$\kappa(s) = 0 \Leftrightarrow \|\alpha''(s)\| = 0,$$

$$\Leftrightarrow \alpha''(s) = 0,$$

$$\Leftrightarrow \alpha'(s) = b,$$

$$\Leftrightarrow \alpha(s) = bs + c, \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

Tanım 2.3.10. $\mathbb{E}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet elemanları T, N, B ise Frenet formülleri ;

$$T' = \kappa N$$

$$N' = -\kappa T + \tau B \tag{2.4}$$

$$B' = -\tau N$$

dir (O'Neill, 1966).

Bu teoremle elde edilen formüllere birim hızlı eğrinin Frenet formülleri

denir. Frenet formülleri matris olarak da

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.3.11. $M, \mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey ve $\alpha : I \rightarrow M$ regüler bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ hız vektörü, $\alpha(t)$ noktasında M yüzeyinin bir asimptotik vektörü ise α eğrisine, M yüzeyi içinde bir asimptotik eğri denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.4.8. $D, \mathbb{E}^2$ de bir açık alt küme olsun. $X : D \rightarrow \mathbb{E}^3$

$$X(s, v) = (x_1(s, v), x_2(s, v), x_3(s, v))$$

biçiminde tanımlanan diferansiyellenebilir dönüşümüne $\mathbb{E}^3$ de bir yama, lokal yüzey veya iki parametrelili yüzey denir (Gray, 1998).

Tanım 2.3.12. $\varphi : D \rightarrow \mathbb{E}^3$ iki parametrelili bir yüzey olsun. Bu takdirde φ yüzeyinin birinci temel form katsayıları

$$E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle, F = \langle \varphi_s, \varphi_v \rangle, G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \quad (2.6)$$

ve ikinci temel form katsayıları

$$L = \langle \varphi_{ss}, U \rangle, M = \langle \varphi_{sv}, U \rangle, N = \langle \varphi_{vv}, U \rangle \quad (2.7)$$

denklemleri ile verilir. Burada U , yüzeyin birim normal vektör alanı olmak üzere

$$U = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|}$$

şeklindedir. φ_s ve φ_v , ise yüzeyin s ve v parametrelerine göre kısmi türevleri olup

$$\varphi_s = \frac{\partial(s,v)}{\partial s} \quad \text{ve} \quad \varphi_v = \frac{\partial(s,v)}{\partial v}$$

eşitlikleri ile verilir. Yüzeyin I. ve II. temel formları ise sırası ile,

$$I = E ds^2 + 2F ds dv + G dv^2$$

$$II = L ds^2 + 2M ds dv + N dv^2 \quad (2.8)$$

denklemlerine sahiptir (Do Carmo, 1976).

Tanım 2.3.13. $\varphi : D \rightarrow \mathbb{E}^3$ bir koordinat parçası olsun. O halde, φ nin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} \quad (2.9)$$

şeklindedir. Burada E, F, G ve L, N, M ; φ yüzeyinin sırasıyla I. temel form ve II. temel form katsayılarıdır (Do Carmo, 1976).

Tanım 2.3.14. $\mathbb{E}^3$ de bir yüzey M ve M nin birim normal vektör alanı U olsun. D kovaryant türev operatörü olmak üzere $\forall X \in \mathcal{X}(M)$ için

$$S(X) = D_X U$$

olarak tanımlanan S dönüşümüne M üzerindeki şekil operatörü denir. $p \in M$ olmak üzere $S_p: T_p M, S_p(X_p) = D_{X_p} U$ dönüşümünün lineer olduğu açıktır (Do Carmo, 1976).

Tanım 2.3.15. $\mathbb{E}^3$ de bir M yüzeyinin birinci temel form katsayıları E, F, G ve ikinci temel form katsayıları L, M, N olmak üzere yüzeyin şekil operatörünün matrisi S

$$S = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} GL - FM & EM - FL \\ GM - FN & EN - FM \end{vmatrix}$$

şeklindedir (Gray, 1998).

Tanım 2.3.16. $\mathbb{E}^n$ de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere,

$$K: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow K(P) = \det S(P)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona, M nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(P)$ değerine de M nin P noktasındaki Gauss eğriliği denir (Do Carmo, 1976).

Tanım 2.3.17. $\mathbb{E}^n$ de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere,

$$H: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow H(P) = \text{iz} S(P)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona, M nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(P)$ değerine de M nin P noktasındaki ortalama eğriliği denir (Do Carmo, 1976).

Tanım 2.3.18. M yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu her nokta için sıfır ise bu tür yüzeylere minimal yüzey denir (Do Carmo, 1976).

Tanım 2.3.19. M yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu her nokta için sıfır ise bu tür yüzeye açılabilir (flat) yüzey denir (Do Carmo, 1976).

2.4. Regle Yüzey

Tanım 2.4.1. Bir $M \subset \mathbb{E}^3$ verilsin. $\forall p \in M$ noktasında, $\mathbb{E}^3$ ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye bir regle yüzey ve $p \in M$ noktasından geçen ve M de kalan bir doğruya da regle yüzeyin doğrultmanı(ana doğrusu) denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Regle yüzeyin parametrik denklemini elde etmek için doğrultmanları kesen ve yüzey üzerinde bulunan diferansiyellenebilir bir

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$$

$$s \rightarrow \vec{\alpha}(s)$$

eğrisi seçilir ve regle yüzeyin dayanak eğrisi olarak adlandırılır. Böylece regle yüzey için bir parametrizasyon

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$$

$$(s, v) \rightarrow \varphi(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{X}(s)$$

şeklinde yazılabilir.(Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.4.2. Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin yüzey normaline dik olan ve yüzeyin bir ana doğrusunu kapsayan düzleme, teğet düzlem denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin

$$\varphi(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{X}(s)$$

denkleminde s ve v ye göre kısmi türevleri alındığında

$$\vec{\varphi}_s = \vec{T} + v\vec{X}'(s)$$

$$\vec{\varphi}_v = \vec{X}(s)$$

elde edilir. Buradan

$$\varphi_s \times \varphi_v = \vec{T} \times \vec{X} + v\vec{X}' \times \vec{X}$$

olur. Ayrıca yüzeyin normali

$$N = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} = \frac{1}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} (\vec{T} \times \vec{X} + v\vec{X}' \times \vec{X})$$

olduğunda ve μ sabit olmak üzere teğet düzlemin bir noktadaki vektörel denklemi

$$\langle \mu \vec{X}, N \rangle = 0,$$

$$\frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} = \frac{1}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} (\vec{T} \times \vec{X} + v\vec{X}' \times \vec{X}) = 0$$

dır. Buradan

$$\det[\mu\vec{X}, T + v\vec{X}', \vec{X}] = 0$$

elde edilir.

Tanım 2.4.3. Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı kalıyorsa bu regle yüzeye açılabilir regle yüzey denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.4.4. Bir $\psi(s, v)$ regle yüzeyinin komşu iki doğrultmanının ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına boğaz (striksiyon) noktası adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1983).



3. BİR EĞRİNİN PARALEL EĞRİSİ VE BU EĞRİLERİN FRENET VEKTÖRLERİ

Bu bölümde bir esas eğrinin Frenet elemanları ve bu eğriye paralel olan eğrinin Frenet elemanları arasındaki ilişki ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Tanım 3.1.1. Bir birim hızlı $\alpha(s)$ eğrisinin paralel eğrisi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\bar{\alpha} = \alpha(s) + rB(s) \quad (3.1)$$

Burada $r \neq 0$ gerçek bir sabit, $s = s(\bar{s})$; $\alpha(s)$ nin yay uzunluğu ve $\bar{s}$, $\bar{\alpha}$ paralel eğrisinin yay uzunluğudur. $B, \alpha(s)$ eğrisinin binormal vektörüdür (Aldossary, M.T. ve Gazwani, 2020).

Önerme 3.1.2. $\bar{\alpha}(\bar{s})$ birim hızlı eğrisi $\alpha(s)$ eğrisi ile paralel eğri olsun. Daha sonra orijinal $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet-Serret vektörleri $\{T, N, B\}$ ve $\bar{\alpha}(\bar{s})$ eğrisinin Frenet-Serret vektörleri $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir (Aldossary, M.T. ve Gazwani, 2020).

$$\begin{aligned} \bar{T}(\bar{s}) &= WT - r\tau WN \\ \bar{N}(\bar{s}) &= \left(\frac{WW' + r\kappa\tau W^2}{\Omega}\right)T + \left(\frac{W^2\kappa - W(r\tau W)'}{\Omega}\right)N - \frac{r\tau^2 W^2}{\Omega}B \\ \bar{B}(\bar{s}) &= \left(\frac{r\tau^2 W^3}{\Omega}\right)T + \left(\frac{r\tau^2 W^3}{\Omega}\right)N + \left(\frac{W^3\kappa - (r\tau W)'W^2 + r\tau W^2 W' + r^2\kappa\tau^2 W^3}{\Omega}\right)B \end{aligned} \quad (3.2)$$

burada

$$\frac{ds}{d\bar{s}} = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2\tau^2}} = W, \quad \Omega = \sqrt{(WW' + r\kappa\tau W^2)^2 + (W^2\kappa - (r\tau W)'W)^2 + (r\tau^2 W^2)^2} \quad (3.3)$$

şekindedir.

İspat: (3.1) deki denklemin $\bar{s}$ yay uzunluğunu elde edelim,

$$\bar{T} = \frac{d\bar{\alpha}}{d\bar{s}} = \left(\frac{d\alpha}{ds} + r\frac{dB}{ds}\right)\frac{ds}{d\bar{s}} \quad (3.4)$$

(2.4) ve (2.8) eşitlikleri kullanılırsa

$$\bar{T} = (T - r\tau N)\frac{ds}{d\bar{s}} \quad (3.5)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının normu alınırsa

$$\|\bar{T}\| = \|T - r\tau N\| \frac{ds}{d\bar{s}}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{ds}{d\bar{s}} = \frac{1}{\sqrt{1+r^2\tau^2}} = W,$$

elde edilir. Bu (3.5) eşitliği

$$\bar{T} = W(T - r\tau N) \quad (3.6)$$

yazılabilir. Paralel eğrinin birim normal vektör alanı

$$\bar{N} = \frac{d\bar{T}/d\bar{s}}{\|d\bar{T}/d\bar{s}\|}$$

olmak üzere (3.6) eşitliğinden türev alınırsa

$$\frac{d\bar{T}}{d\bar{s}} = \frac{d\bar{T}}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}} = (WW' + r\kappa\tau W^2)T + (W^2\kappa - (r\tau W)'W)N - r\tau^2 W^2 B,$$

bulunur. Bu ifadenin normu alınırsa

$$\left\| \frac{d\bar{T}}{d\bar{s}} \right\| = \sqrt{(WW' + r\kappa\tau W^2)^2 + (W^2\kappa - (r\tau W)'W)^2 + r\tau^2 W^2},$$

elde edilir. Böylece paralel eğrinin birim normal vektör alanı

$$\bar{N} = \left(\frac{WW' + r\kappa\tau W^2}{\Omega} \right) T + \left(\frac{W^2\kappa - (r\tau W)'W}{\Omega} \right) N - \frac{r\tau^2 W^2}{\Omega} B \quad (3.7)$$

şeklindedir.

Paralel eğrinin binormal vektör alanı

$$\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N}$$

olmak üzere (3.6) ve (3.7) denklemleri kullanılırsa,

$$\bar{B} = \left(\frac{r^2\tau^2 W^3}{\Omega} \right) T + \left(\frac{r\tau^2 W^3}{\Omega} \right) N + \left(\frac{W^3\kappa - (r\tau W)'W^2 + r\tau W^2 W' + r^2\kappa\tau^2 W^3}{\Omega} \right) B$$

şeklinde elde edilir.

4. BİR EĞRİNİN PARALEL EĞRİSİNİN OLUŞTURDUĞU REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde birim hızlı $\alpha(s)$ eğrisine paralel olan $\bar{\alpha}$ eğrisinin teğetinin, normalinin ve binormalinin ürettiği regle yüzeyler oluşturulup bu regle yüzeylerin açılabilir ve minimal olma şartları incelenecektir.

4.1.Paralel Eğrinin Teğet Vektörünün Ürettiği Regle Yüzey

Bu bölümde verilen bir α eğrisine paralel olan $\bar{\alpha}$ eğrisinin $\bar{T}$ teğet vektör alanının ürettiği regle yüzey oluşturulup bu regle yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanarak, yüzeyin açılabilir ve minimal olma şartları verilmiştir.

α birim hızlı eğri, $\bar{\alpha}$ birim hızlı eğrinin paralel eğrisi, α eğrisinin teğet vektörü T ve $\bar{\alpha}$ eğrisinin teğet vektörü $\bar{T}$ olsun. (3.2) ve (2.10) denklemleri kullanılarak $\alpha(s)$ birim hızlı eğrisine paralel olan $\bar{\alpha}(\bar{s})$ eğrisinin teğetinin ürettiği regle yüzey şu şekilde ifade edilir.

$$\bar{\psi}_{\bar{T}}(\bar{s}, v) = \bar{\alpha}(\bar{s}) + v\bar{T}(\bar{s})$$

$$\bar{\psi}_{\bar{T}}(\bar{s}, v) = \alpha(s) + rB(s) + vWT - rv\tau WN \quad (4.1)$$

$\bar{\psi}(\bar{s}, v)$ regle yüzeyinin her iki tarafının s ' ye göre birinci türevini alırsak;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{s}} \cdot \frac{d\bar{s}}{ds} &= (1+vW' + rvW\kappa)T + (-r\tau + vW\kappa + rvW\tau' - rvW'\tau)N \\ &+ (-rvW\tau^2)B \end{aligned} \quad (4.2)$$

Buradan (3.3) ve (4.2) denklemleri kullanılarak; gerekli işlemler yapıldığında $\bar{\psi}_{\bar{s}}$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{\bar{s}} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{s}} &= (W + vWW' + rvW^2\tau\kappa)T + (-rW\tau + vW^2\kappa + rvW^2\tau' - rvWW'\tau)N + \\ &- rvW^2\tau^2)B. \end{aligned} \quad (4.3)$$

şeklinde ifade edilir.Elde edilen (4.2) denkleminin her iki tarafının s 'ye göre türevini alırsak

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{s}^2} \left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 + \frac{d\bar{\psi}}{d\bar{s}} \frac{d^2 \bar{s}}{ds^2} &= [r\tau\kappa - vW\kappa^2 + vW'' + rv\tau\kappa'W \\ &+ 2rvW'\tau\kappa + 2rvW\tau'\kappa v]T + [\kappa - r\tau' + vW'\kappa \\ &+ rvW\tau\kappa^2 + rvW\tau^3 - rvW\tau'' - rvW''\tau \\ &+ v\kappa W' + vW\kappa' - 2rv\tau'W']N \\ &+ [-r\tau^2 + v\tau\kappa W - 2rvW'\tau^2 - 3rv\tau\tau'W]B. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Buradan (3.3) eşitliği kullanılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\psi_{\bar{s}\bar{s}} = \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{s}^2} = & (rW^2 \tau \kappa - vW^3 \kappa^2 + vW^2 W'' + 2rvW^3 \tau' \kappa + rvW^3 \tau \kappa' \\
& + 3rv\tau \kappa W^2 W' + WW' + vW(W')^2)T \\
& + (W^2 \kappa - rW^2 \tau' + 3vW^2 W' \kappa + vW^3 \kappa' + rvW^3 \tau \kappa^2 \\
& + rvW^3 \tau^3 - 3rvW^2 W' \tau' - rvW^3 \tau'' - rWW' \tau \\
& - rv\tau W^2 W'' - r v \tau W(W')^2)N \\
& + (-rW^2 \tau^2 + vW^3 \kappa \tau \\
& - 3rvW^3 \tau \tau' - 3rvW^2 W' \tau^2)B.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir. Daha sonra (4.1) denkleminin her iki tarafının v 'ye göre birinci türevi alınır,

$$\bar{\psi}_v = TW - rW\tau N \tag{4.6}$$

ve

$$\bar{\psi}_{vv} = 0 \tag{4.7}$$

elde edilir. (4.3) denleminin her iki tarafının v 'ye göre türevini alırsak;

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_{\bar{s}v} = & (WW' + rW^2 \tau \kappa)T \\
& + (W^2 \kappa - rW^2 \tau' - rWW' \tau)N \\
& + (-rW^2 \tau^2)B.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.1) ve (2.6) denklemleri kullanılarak $\bar{\psi}(\bar{s}, v)$ regle yüzeyinin I. Temel form elemanları şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
E = \langle \bar{\psi}_{\bar{s}}, \bar{\psi}_{\bar{s}} \rangle = & (W + vWW' + rv\tau \kappa W^2)^2 \\
& + (-r\tau W + v\kappa W^2 - rv\tau' W^2 - rv\tau WW')^2 + (rv\tau^2 W^2)^2 \\
F = & W^2 + vW^2 W' + r\tau^2 W^2 + r^2 v \tau \tau' W^3 + r^2 v \tau^2 W^2 W', \\
G = & W^2 \tau^2 + r^2 v^2 \tau^2
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Daha sonra (4.1) ve (2.7) eşitlikleri kullanılarak $\bar{\psi}(\bar{s}, v)$ regle yüzeyinin II. Temel form elemanları şu şekilde hesaplanır:

$$M = 0, \quad N = 0,$$

$$L = v^2 \begin{bmatrix} -2r^3 \kappa \tau^3 \tau' W^6 - r^3 \kappa' \tau^4 W^6 - 3r^3 \kappa \tau^4 W^5 W' \\ -r\kappa' \tau^2 W^6 - r^2 \tau^5 W^6 + r^2 \tau^2 W^6 \tau' - \tau \kappa^2 W^6 \\ + 2r\kappa \tau \tau' W^6 + 3r^2 \tau^2 \tau' W^5 W' + 3r^2 \tau (\tau')^2 W^6 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

$$+v \left[\begin{array}{c} -r^3 W^5 \tau^4 \kappa + 2r^2 W^5 \tau^2 \tau' + 3r^2 W^5 W' \\ -r^2 W^4 W' \tau^3 - r^2 \tau^3 W^6 \kappa^2 \\ + 3r^3 \tau' \tau^3 \kappa W^6 + 3r^3 \tau^4 \kappa W' W^5 \end{array} \right] + [r^3 \kappa \tau^4 W^5].$$

Eğri üzerindeki teğet vektör tarafından oluşturulan regle yüzey açılabilir olduğundan $\bar{\psi}$ yüzeyinin Gauss eğriliği sıfırdır.

Sonuç 4.1.1. Paralel eğri boyunca $\bar{\psi}$ regle yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H(s, 0) = r^3 \kappa \tau^4 W^7, \quad (4.11)$$

dir.

Sonuç 4.1.2. Paralel eğri boyunca regle yüzeyin minimal olması için gerek ve yeter koşul verilen $\alpha(s)$ eğrisinin düzlemsel olmasıdır.

4.2. Paralel Eğrinin Normal Vektörünün Ürettiği Regle Yüzey

Bu bölümde α eğrisine paralel olan $\bar{\alpha}$ eğrisinin $\bar{N}$ normal vektör alanının ürettiği regle yüzey oluşturularak bu yüzeyin Gauss, ortalama eğrilikleri hesaplanıp açılabilir ve minimal olma şartları verilmiştir.

$\bar{\alpha}$, birim hızlı α eğrinin paralel eğrisi, N, α eğrisinin normali ve $\bar{N}$ ise $\bar{\alpha}$ eğrisinin normali olmak üzere, (2.10) ve (3.2) eşitlikleri kullanılarak $\bar{\alpha}$ paralel eğrinin normalinin ürettiği regle yüzey şu şekilde ifade edilir,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{\bar{N}}(\bar{s}, v) &= \bar{\alpha}(\bar{s}) + v \bar{N}(\bar{s}) \\ &= \alpha(s) + rB(s) + v(f_1 T + f_2 N + f_3 B) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Burada

$$f_1 = \frac{WW' + r\kappa\tau W^2}{\Omega}, \quad f_2 = \frac{W^2\kappa - W(r\tau W)'}{\Omega}, \quad f_3 = -\frac{r\tau^2 W^2}{\Omega} \quad (4.13)$$

(4.13) denkleminin her iki tarafının s' 'ye göre türevini alırsak;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{s}} \cdot \frac{d\bar{s}}{ds} &= (1 + v f_1' - v f_2 \kappa) T \\ &+ (-r\tau + v f_1 \kappa + v f_2' + v f_3 \tau) N + (v f_2 \tau + v f_3') B \end{aligned} \quad (4.14)$$

Burada (3.3) eşitliği kullanılarak ;

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{\bar{s}} &= (W + v f_1' W - v f_2 \kappa W) T \\ &+ (-r\tau W + v f_1 \kappa W + v f_2' W + v f_3 \tau W) N \\ &+ (v f_2 \tau W + v f_3' W) B. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Elde edilen (4.15) denkleminin her iki tarafının s'ye göre türevi alınırsa ;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{s}^2} \left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 + \frac{d\psi}{d\bar{s}} \frac{d^2 \bar{s}}{ds^2} = & (r\tau\kappa + vf_1'' - vf_1\kappa^2 - 2vf_2'\kappa - vf_2\kappa' + vf_3\tau\kappa)T + \\ & \left(\begin{aligned} & \kappa - r\tau' + 2vf_1'\kappa + vf_1\kappa' + vf_2'' - vf_2\kappa^2 \\ & -vf_2\tau^2 - 2vf_3'\tau - vf_3\tau' \end{aligned} \right) N \quad (4.16) \\ & + (-r\tau^2 + vf_1\tau\kappa + 2vf_2'\tau + vf_2\tau' + vf_3'' - vf_3\tau^2)B \end{aligned}$$

Buradan (3.3) eşitliği kullanılıp gerekli işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned} \psi_{\bar{s}\bar{s}} = & \left(\begin{aligned} & rW^2\tau\kappa + vW^2f_1'' - vW^2f_1\kappa^2 - 2v\kappa W^2f_2' - vW^2f_2\kappa' \\ & + vW^2f_3\tau\kappa + WW' + vf_1'WW' - vWW'\tau\kappa \end{aligned} \right) T \\ & + \left(\begin{aligned} & W^2\kappa - rW^2\tau' + 2vW^2f_1'\kappa + vW^2f_1\kappa' + vW^2f_2'' - vW^2f_2\kappa^2 \\ & -vW^2f_2\tau^2 - 2vW^2f_3'\tau - rWW'\tau - vf_3\tau'W^2 + vf_1\kappa WW' \\ & + vf_2'\kappa WW' - vf_3WW'\tau \end{aligned} \right) N \\ & + \left(\begin{aligned} & -rW^2\tau^2 + vW^2f_1\tau\kappa + 2vW^2f_2'\tau + vW^2f_2\tau' \\ & + vW^2f_3'' - vW^2f_3\tau^2 + v\tau f_2WW' + vf_3'WW' \end{aligned} \right) B. \quad (4.17) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.12) denkleminin her iki tarafının v'ye göre birinci türevi alınırsa

$$\bar{\psi}_v = f_1T + f_2N + f_3B \quad (4.18)$$

elde edilir. (4.18) denkleminin her iki tarafının v 'ye göre türevini alırsak ;

$$\bar{\psi}_{vv} = 0 \quad (4.19)$$

elde edilir.Daha sonra (4.15) denkleminin v'ye göre türevini alırsak;

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{\bar{s}v} = & (Wf_1' - Wf_2\kappa)T \\ & + (Wf_1\kappa + Wf_2' - Wf_3\tau)N \quad (4.20) \\ & + (Wf_2\tau + Wf_3')B . \end{aligned}$$

elde edilir. (4.12) ve (2.6) denklemleri kullanılarak $\bar{\psi}(\bar{s},v)$ regle yüzeyinin I. Temel Form Elemanları şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} \bar{E} = & (W + vWf_1' - vWf_2\kappa)^2 \\ & + (-rW\tau + vWf_1\kappa + vWf_2' + vWf_3\tau)^2 \\ & + (vWf_2\tau + vWf_3')^2 \\ \bar{F} = & Wf_1 + vWf_1f_1' + vWf_2f_2' + vWf_3f_3' , \\ \bar{G} = & f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 , \quad (4.21) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.13) ve (2.7) eşitlikleri kullanılarak $\bar{\psi}(\bar{s},v)$ regle yüzeyinin II. Temel form elemanları şu şekilde hesaplanır,

$$\bar{M}(s,0) = (Wf_1' - Wf_2\kappa)(-rWf_3\tau)$$

$$\begin{aligned}
& -Wf_3(WKf_1 + Wf_2' - Wf_3\tau) + (Wf_2\tau + Wf_3')(Wf_2 + rf_1W\tau) \\
\bar{N}(s, 0) &= 0, \\
\bar{L}(s, 0) &= -r^2W^3f_3\tau^2\kappa - W^3f_3\kappa + rW^3f_3\tau' - rW^3f_2\tau^2 - r^2W^3f_1\tau^3 \\
& \quad - 2r\tau W^2f_3W'
\end{aligned} \tag{4.22}$$

elde edilir.

Önerme 4.2.1. $\bar{\psi}_{\bar{N}}$ regle yüzeyi açılabilir ve minimal olması için

$$f_3 = -\frac{r\tau^2W^2}{\Omega} = 0 \text{ veya } \tau = 0,$$

olmalıdır.

Sonuç 4.2.2. Eşitlik (4.12) de tanımlı regle yüzey üzerinde paralel eğrinin asimptotik eğri olması için $\kappa = r\tau'$ veya $\alpha(s)$ esas eğrisi düzlemsel olmalıdır.

$\bar{\alpha}_{\bar{S}\bar{S}} = (rW^2\tau\kappa + WW')T + (\kappa W^2 - rW^2\tau' - rWW'\tau)N + (-rW^2\tau^2)B$, yazılabilir. Denklem (4.1.13) deki regle yüzeyin eğri boyunca yüzey normali

$$\bar{N}(s, 0) = (-rWf_3\tau, -Wf_3, Wf_2 + rf_1\tau),$$

şeklindedir.

$$\langle \bar{\alpha}_{\bar{S}\bar{S}}, \bar{N} \rangle = k_n = -W^3r\tau^2 [(rf_3\kappa + f_2 + rf_1\tau) - W^3f_3(r\tau' - \kappa)]$$

dır. Burada

$$f_3 = -\frac{r\tau^2W^2}{\Omega}$$

olması kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\alpha}_{\bar{S}\bar{S}}, \bar{N} \rangle &= -W^3 \left[r\kappa\tau^2(rf_3 + r\tau f_1 + f_2) - \frac{r\tau^2W^2}{\Omega}(r\tau' - \kappa) \right] \\
&= -W^3r\tau^2 \left[(r\kappa f_3 + r\tau f_1 + f_2) - \frac{W^2}{\Omega}(r\tau' - \kappa) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\tau = 0 \text{ veya } (r\kappa f_3 + r\tau f_1 + f_2) - \frac{W^2}{\Omega}(r\tau' - \kappa) = 0$$

$$(r\kappa f_3 + r\tau f_1 + f_2) - \frac{W^2}{\Omega}(r\tau' - \kappa) = 0$$

$$(r\kappa f_3 + r\tau f_1 + f_2) = \frac{W^2}{\Omega}(r\tau' - \kappa)$$

Burada

$$f_1 = \frac{WW' + r\kappa\tau W^2}{\Omega}, \quad f_2 = \frac{W^2\kappa - W(r\tau W)'}{\Omega}, \quad f_3 = -\frac{r\tau^2W^2}{\Omega}$$

Eşitlikleri yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\kappa = r\tau'$$

elde edilir.

4.3. Paralel Eğrinin Binormal Vektörünün Ürettiği Regle Yüzey

Bu bölümde bir α eğrisine paralel olan $\bar{\alpha}$ eğrisinin $\bar{B}$ binormal vektör alanının ürettiği regle yüzey oluşturulup bu regle yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanarak açılabilir ve minimal olma şartları verilmiştir.

α birim hızlı eğri, $\bar{\alpha}$ ise α eğrinin paralel eğrisi, B vektör alanı α eğrisinin binormali ve $\bar{B}$ ise $\bar{\alpha}$ eğrisinin normali olmak üzere;

(2.10) ve (3.2) denklemleri kullanılarak α birim hızlı eğrisine paralel olan $\bar{\alpha}$ eğrisinin binormalinin ürettiği regle yüzey şu şekilde ifade edilir

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(\bar{s}, v) &= \bar{\alpha}(\bar{s}) + v\bar{B}(\bar{s}) \\ &= \alpha(s) + rB(s) + v(g_1T + g_2N + g_3B)\end{aligned}\quad (4.23)$$

Burada

$$\begin{aligned}\bar{B} &= \left(\frac{r^2\tau^3W^3}{\Omega}\right)T + \left(\frac{r\tau^2W^3}{\Omega}\right)N \\ &\quad + \left(\frac{W^3K - (r\tau W)'W^2 + r\tau W^2W' + r^2K\tau^2W^3}{\Omega}\right)B\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$g_1 = \left(\frac{r^2\tau^3W^3}{\Omega}\right), \quad g_2 = \left(\frac{r\tau^2W^3}{\Omega}\right), \quad g_3 = \frac{W^3K - (r\tau W)'W^2 + r\tau W^2W' + r^2K\tau^2W^3}{\Omega} \text{ dir.}$$

(4.23) denkleminin her iki tarafının s 'ye göre türevini alırsak,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{s}} \cdot \frac{d\bar{s}}{ds} &= (1 + vg_1' - vg_2\kappa)T \\ &\quad + (-r\tau + vg_1\kappa + vg_2' + vg_3\tau)N \\ &\quad + (vg_2\tau + vg_3')B\end{aligned}\quad (4.24)$$

Burada (3.3) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_{\bar{s}} &= (W + vWg_1' - vWg_2\kappa)T \\ &\quad + (-rW\tau + vWg_1\kappa + vWg_2' - vWg_3\tau)N \\ &\quad + (vWg_2\tau + vWg_3')B\end{aligned}\quad (4.25)$$

elde edilir. (4.24) denkleminin her iki tarafının s 'ye göre türevi alınır

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{s}^2} \left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 + \frac{d\psi}{d\bar{s}} \frac{d^2\bar{s}}{ds^2} = (r\tau\kappa + vg_1'' - vg_1\kappa^2 - 2vg_2'\kappa - vg_2\kappa + vg_3\tau\kappa)T$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\kappa - r\tau' + 2vg_1'\kappa + vg_1\kappa' + vg_2'' \right) N \\
& + \left(-r\tau^2 + vg_1\tau\kappa + 2vg_2'\tau + vg_2\tau' + vg_3'' - vg_3\tau^2 \right) B
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Buradan (3.3) eşitliği kullanılıp gerekli işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
\psi_{\bar{s}\bar{s}} = & \left(\begin{array}{c} r\tau W^2\kappa + vW^2g_1'' - vg_1W^2\kappa^2 - 2vg_2'W^2\kappa \\ -vg_2W^2\kappa' + vg_3W^2\tau\kappa + WW' + \end{array} \right) T \\
& + \left(\begin{array}{c} W^2\kappa - rW^2\tau' + 2vg_1'W^2\kappa + vg_1W^2\kappa' + vg_2''W^2 \\ -vW^2g_2\kappa^2 - vW^2g_2\tau^2 - 2vg_3'W^2\tau - rWW'\tau \\ -vg_3\tau'W^2 + vg_1\kappa WW' + vg_2'\kappa WW' - vg_3\tau WW' \end{array} \right) N \\
& + \left(\begin{array}{c} -rW^2\tau^2 + vW^2g_1\tau\kappa + 2vg_2'W^2\tau + vg_2W^2\tau' + \\ vW^2g_3'' - vg_3W^2\tau^2 + v\tau g_2WW' + \\ vg_3'WW' \end{array} \right) B.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

elde edilir. (4.23) denkleminin her iki tarafının v'ye göre birinci türevi alınır ;

$$\bar{\psi}_v = g_1T + g_2N + g_3B \tag{4.28}$$

elde edilir. (4.28) denkleminin her iki tarafının v 'ye göre türevini alırsak ;

$$\bar{\psi}_{vv} = 0 \tag{4.29}$$

elde edilir. (4.25) denkleminin v'ye göre türevini alırsak;

$$\begin{aligned}
& \bar{\psi}_{\bar{s}v} = (Wg_1' - Wg_2\kappa)T \\
& + (Wg_1\kappa + Wg_2' - Wg_3\tau)N + (Wg_2\tau + Wg_3')B,
\end{aligned} \tag{4.30}$$

elde edilir. (4.23) ve (2.6) denklemleri kullanılarak $\bar{\psi}(\bar{s},v)$ regle yüzeyinin I. temel form elemanları şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
\bar{E} &= (W + vWg_1' - vWg_2\kappa)^2 + (-rW\tau + vWg_1\kappa + vWg_2' - vWg_3\tau)^2 \\
&+ (vWg_2\tau + vWg_3')^2, \\
\bar{F} &= g_1W + vg_1g_1'W + vg_2g_2'W \\
&+ g_3g_3'W, \\
\bar{G} &= g_1^2 + g_2^2 + g_3^2.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

elde edilir. (4.23) ve (2.7) eşitlikleri kullanılarak $\bar{\psi}(\bar{s},v)$ regle yüzeyinin II. temel form elemanları şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
\bar{M}(s,0) &= (Wg_1' - Wg_2\kappa)(-rWg_3\tau) \\
&- Wg_3(W\kappa g_1 + Wg_2' - Wg_3\tau)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(Wg_2\tau + Wg_3')(Wg_2 + rg_1\tau W), \\
& \bar{N}(s, 0) = 0 \quad , \tag{4.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{L}(s, 0) = -r^2g_3\tau^2\kappa W^3 - g_3\kappa W^3 \\
& +rW^3g_3\tau' - rg_2\tau^2W^3 - r^2g_1\tau^3W^3 - 2r\tau g_3W'W^2
\end{aligned}$$

Sonuç 4.3.1. $\bar{\psi}_{\bar{B}}$ regle yüzeyi paralel $\bar{\alpha}(\bar{s})$ eğrisi boyunca açılabilir ancak ve ancak

$$r\tau'W^2 - \kappa = 0.$$

5. ÖRNEKLER

Örnek 1. Bir birim hızlı $\alpha(s) = (\frac{\sqrt{3}}{2} \sin s, \frac{s}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s)$ uzay eğrisi alalım. Bu eğrinin Frenet çatısı

$$T(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos s, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin s \right),$$

$$N(s) = (-\sin s, 0, -\cos s),$$

$$B(s) = \left(-\frac{1}{2} \cos s, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \sin s \right),$$

şeklinde olup eğrilikler $\kappa = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tau = \frac{1}{2}$ dir. $r = 4$ alınırsa $\alpha(s)$ nin paralel eğrilerinden biri

$$\bar{\alpha} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin s - 2 \cos s, \frac{s}{2} + 2\sqrt{3}, 2 \sin s + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s \right),$$

yazılabilir. (Önerme 2.4.7), ve (4.14), (4.27) denklemleri kullanılarak paralel eğrinin Frenet elemanları aşağıdaki gibidir.

$$\bar{T}(\bar{s}) = \left(\frac{4\sqrt{17}}{17} \sin s + \frac{\sqrt{51}}{34} \cos s, \frac{\sqrt{17}}{34}, \frac{4\sqrt{17}}{17} \cos s - \frac{\sqrt{51}}{34} \sin s \right),$$

$$\bar{N}(\bar{s}) = \left(\frac{4\sqrt{19}}{19} \cos s - \frac{\sqrt{57}}{19} \sin s, 0, -\frac{4\sqrt{19}}{19} \sin s - \frac{\sqrt{57}}{19} \cos s \right)$$

$$\bar{B}(\bar{s}) = \left(-\frac{2\sqrt{323}}{323} \sin s - \frac{\sqrt{969}}{646} \cos s, \frac{\sqrt{323}}{34}, \frac{\sqrt{969}}{646} \sin s - \frac{2\sqrt{323}}{323} \cos s \right),$$

Burada $W = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\Omega = \frac{\sqrt{19}}{34}$, ve

$$f_1 = 2 \frac{\sqrt{57}}{19}, \quad f_2 = \frac{\sqrt{57}}{19}, \quad f_3 = \frac{2\sqrt{19}}{19}$$

$$g_1 = \frac{4\sqrt{323}}{323}, \quad g_2 = \frac{2\sqrt{323}}{323}, \quad g_3 = \frac{5\sqrt{969}}{323},$$

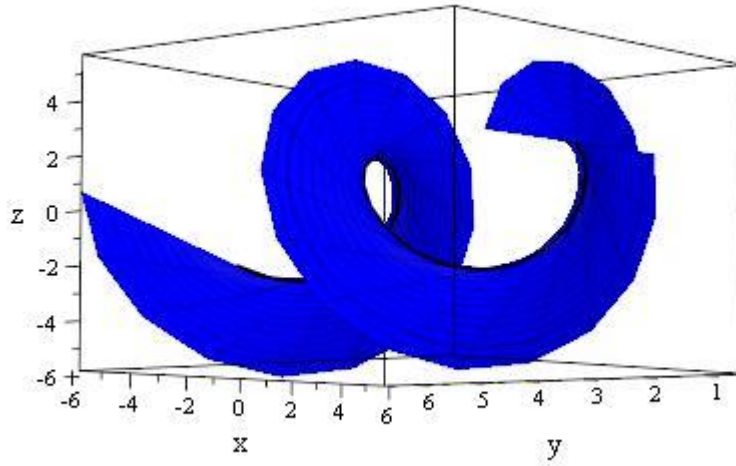
şeklindedir.

(4.1) denklemiyle belirli regle yüzey için bir parametrizasyon,

$$\bar{\psi}(\bar{s}, v) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin s - 2 \cos s + v \left(\frac{4\sqrt{17}}{17} \sin s + \frac{\sqrt{51}}{34} \cos s \right), \right.$$

$$\left. \frac{s}{2} + 2\sqrt{3} + v \left(\frac{\sqrt{17}}{34} \right), 2 \sin s + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s + v \left(\frac{4\sqrt{17}}{17} \cos s - \frac{\sqrt{51}}{34} \sin s \right) \right),$$

olup $-5 \leq s \leq 5$ ve $-5 \leq v \leq 5$ dir, şekil 1.

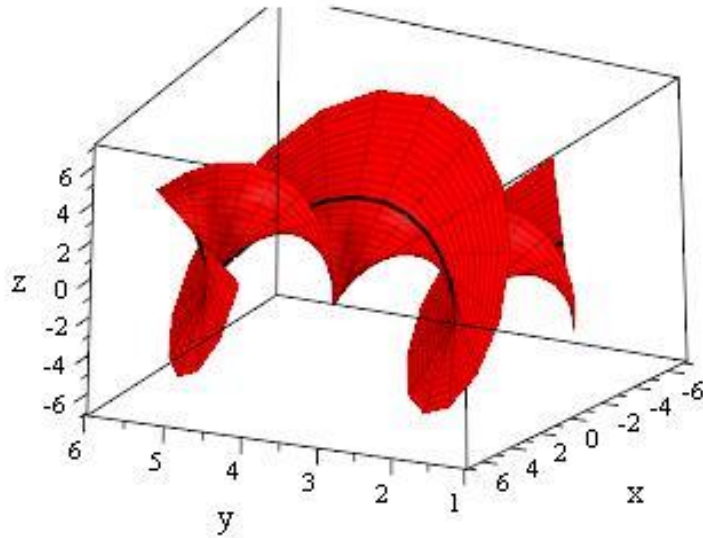


Şekil 5. 1. Denklem (4.1) deki regle yüzey

(4.13) denklemiyle belirli regle yüzey için bir parametrizasyon,

$$\bar{\psi}(\bar{s}, v) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin s - 2 \cos s + v \left(\frac{4\sqrt{19}}{19} \cos s - \frac{\sqrt{57}}{19} \sin s \right), \right. \\ \left. \frac{s}{2} + 2\sqrt{3}, 2 \sin s + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s + v \left(-\frac{4\sqrt{19}}{19} \sin s - \frac{\sqrt{57}}{19} \cos s \right) \right),$$

olup $-5 \leq s \leq 5$ ve $-5 \leq v \leq 5$ dir, şekil 2.

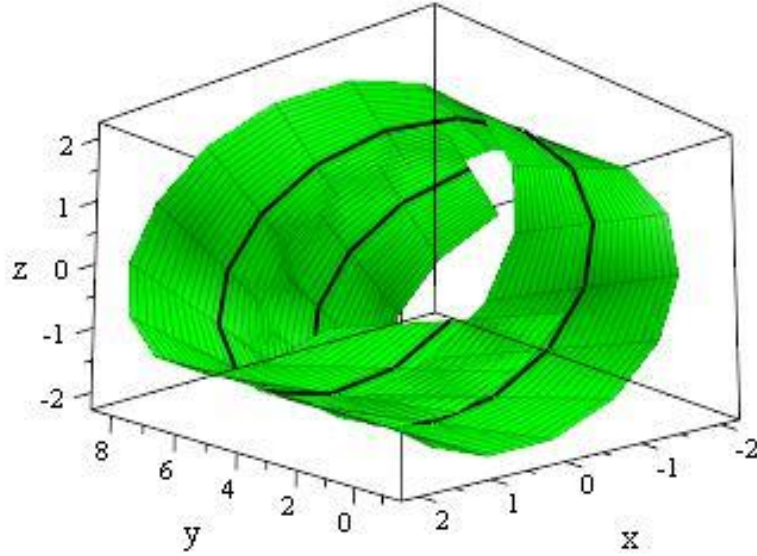


Şekil 5. 2. Denklem (4.13) deki regle yüzey

(4.23) denklemiyle belirli regle yüzey için bir parametrizasyon,

$$\bar{\psi}(\bar{s}, v) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin s - 2 \cos s + v \left(-\frac{2\sqrt{323}}{323} \sin s - \frac{\sqrt{969}}{646} \cos s \right), \right. \\ \left. \frac{s}{2} + 2\sqrt{3} + v \frac{\sqrt{323}}{34}, 2 \sin s + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s + v \left(\frac{\sqrt{323}}{34}, \frac{\sqrt{969}}{646} \sin s - \frac{2\sqrt{323}}{323} \cos s \right) \right),$$

olup $-5 \leq s \leq 5$ ve $-5 \leq v \leq 5$ dir, şekil 3.



Şekil 5. 3. Denklem (4.23) deki regle yüzey

Örnek 2. Bir birim hızlı $\alpha(s) = \left(\frac{3}{5} \sin s, \frac{3}{5} \cos s, \frac{4}{5} s \right)$ eğrisi alalım:

$\alpha(s)$ eğrisinin Frenet elemanları

$$T = \left(\frac{3}{5} \cos s, -\frac{3}{5} \sin s, \frac{4}{5} \right)$$

$$N = (-\sin s, -\cos s, 0)$$

$$B = \left(\frac{4}{5} \cos s, -\frac{4}{5} \sin s, \frac{3}{5} \right)$$

şeklinde olup eğrilikleri $K = \frac{3}{5}$, $\tau = -\frac{4}{5}$ dir. $r = 5$ alınırsa $\alpha(s)$ nin paralel eğrilerinden biri

$$\bar{\alpha} = \left(\frac{3}{5} \sin s + 4 \cos s, \frac{3}{5} \cos s - 4 \sin s, \frac{4}{5} s + \frac{3}{5} \right)$$

olup paralel eğrinin Frenet elemanları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \left(\frac{3\sqrt{17}}{85} \cos s - \frac{4\sqrt{17}}{17} \sin s, -\frac{4\sqrt{17}}{17} \cos s - \frac{3\sqrt{17}}{85} \sin s, \frac{4\sqrt{17}}{85} \right) \\ \bar{N} &= \left(-\frac{20\sqrt{409}}{409} \cos s - \frac{3\sqrt{409}}{409} \sin s, \frac{20\sqrt{409}}{409} \sin s - \frac{3\sqrt{409}}{409} \cos s, -\frac{96\sqrt{409}}{2045} \right) \\ \bar{B} &= \left(\frac{192\sqrt{17}}{425} \cos s + \frac{12\sqrt{17}\sqrt{409}}{2045} \cos s \right. \\ &\quad \left. - \frac{16\sqrt{17}\sqrt{409}}{6953} \sin s, -\frac{192\sqrt{17}}{425} \sin s \right. \\ &\quad \left. - \frac{16\sqrt{17}\sqrt{409}}{6953} \cos s - \frac{12\sqrt{17}\sqrt{409}}{2045} \sin s, \frac{9\sqrt{17}\sqrt{409}}{2045} + \frac{256\sqrt{17}}{425} \right)\end{aligned}$$

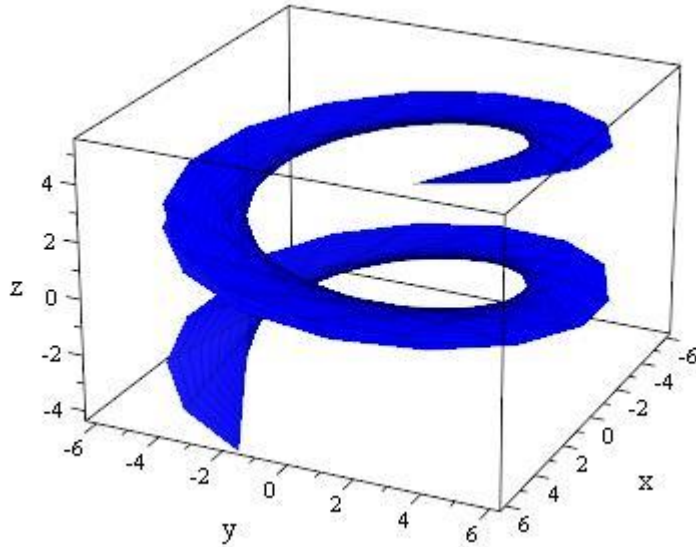
burada $W = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\Omega = \frac{\sqrt{409}}{85}$.

(4.1) denklemiyle belirli regle yüzey için bir parametrisasyon,

$$\bar{\psi}(\bar{s}, v) = \left(\frac{3}{5} \sin s + 4 \cos s + v \left(\frac{3\sqrt{17}}{85} \cos s - \frac{4\sqrt{17}}{17} \sin s \right), \right.$$

$$\left. \frac{3}{5} \cos s - 4 \sin s + v \left(-\frac{4\sqrt{17}}{17} \cos s - \frac{3\sqrt{17}}{85} \sin s \right), \frac{4}{5} s + \frac{3}{5} + v \frac{4\sqrt{17}}{85} \right)$$

olup $-5 \leq s \leq 5$ ve $-5 \leq v \leq 5$ dir, şekil 4.

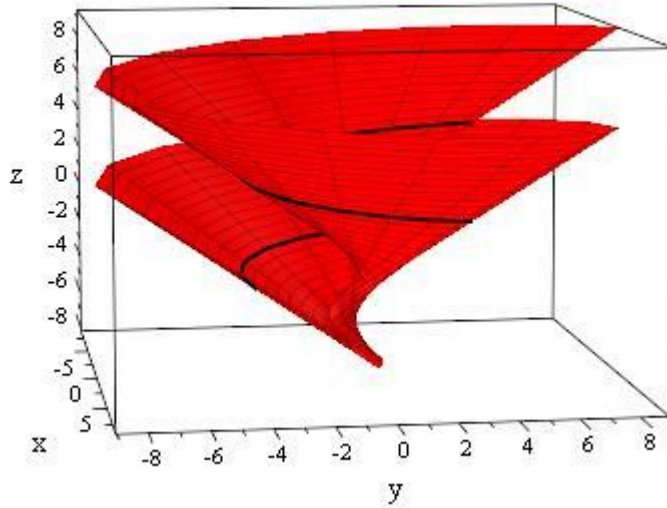


Şekil 5. 4. Denklem (4.1) deki regle yüzey

(4.13) denklemiyle belirli regle yüzey için bir parametrisasyon,

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(\bar{s}, v) = & \left(\frac{3}{5} \sin s + 4 \cos s + v \left(\frac{192\sqrt{17}}{425} \cos s + \frac{12\sqrt{17}\sqrt{409}}{2045} \cos s \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{16\sqrt{17}\sqrt{409}}{6953} \sin s \right), \right. \\ & \left. \frac{3}{5} \cos s - 4 \sin s + v \left(-\frac{192\sqrt{17}}{425} \sin s - \frac{16\sqrt{17}\sqrt{409}}{6953} \cos s - \frac{12\sqrt{17}\sqrt{409}}{2045} \sin s \right), \right. \\ & \left. \frac{4}{5} s + \frac{3}{5} - v \left(-\frac{96\sqrt{409}}{2045} \right) \right)\end{aligned}$$

olup $-5 \leq s \leq 5$ ve $-5 \leq v \leq 5$ dir, şekil 5.

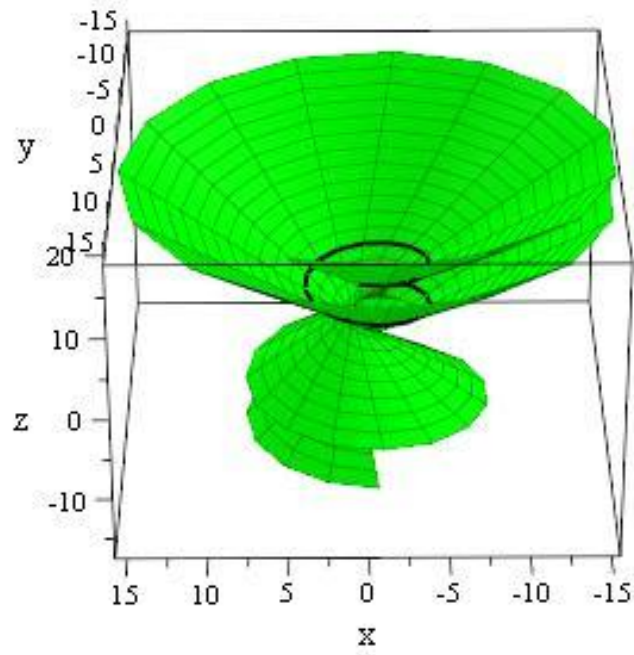


Şekil 5. 5. Denklem (4.13) deki regle yüzey

(4.23) denklemiyle belirli regle yüzey için bir parametrisasyon,

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(\bar{s}, v) = & \left(\frac{3}{5} \sin s + 4 \cos s + v \left(\frac{192\sqrt{17}}{425} \cos s + \frac{12\sqrt{17}\sqrt{409}}{2045} \cos s \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{16\sqrt{17}\sqrt{409}}{6953} \sin s \right), \right. \\ & \left. \frac{3}{5} \cos s - 4 \sin s + v \left(-\frac{192\sqrt{17}}{425} \sin s - \frac{16\sqrt{17}\sqrt{409}}{6953} \cos s - \frac{12\sqrt{17}\sqrt{409}}{2045} \sin s \right), \right. \\ & \left. \frac{4}{5} s + \frac{3}{5} - v \left(\frac{9\sqrt{17}\sqrt{409}}{2045} + \frac{256\sqrt{17}}{425} \right) \right)\end{aligned}$$

olup $-5 \leq s \leq 5$ ve $-5 \leq v \leq 5$ dir, şekil 6.



Şekil 5. 6. Denklem (4.23) deki regle yüzey

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, verilen bir eğrinin binormal vektörü ile oluşturulan paralel eğriler kullanıldı. Paralel eğrinin Frenet çatı vektörlerinin eğri üzerinde hareketiyle oluşan regle yüzeyler incelendi. Bu regle yüzeylerin açılabilir ve minimal olma şartları araştırıldı.

Paralel eğrilerin kullanım alanları literatürde yer almaktadır. Paralel eğri esas eğriden belli uzaklıkta bulunan, esas eğriden tamamen farklı olan eğrilerdir. Paralel eğriler kullanılarak paralel yörüngeler arasındaki ilişkiler incelenebilir. Ayrıca yörünge regle yüzeyler Minkowski uzayında araştırılabilir. Paralel eğri ve esas eğri üzerinde alternatif çatılar kullanılarak, bu çatılar arasındaki ilişkilere bakılabilir.



KAYNAKLAR

- Kuçük, A., (2003), On the developable of Bertrand trajectory ruled surface offsets, Intern. Math. Journal, 4(1) 57–64.
- Hoschek J, 1973. Integral invarianten von regel flachhen, Archiv der Mathematik., XXIV ,218-224.
- Kuçük, A. (2004). On the developable time-like trajectory ruled surfaces in a Lorentz 3-space $R^{1,3}$. *Applied mathematics and computation*, 157(2), 483-489.
- Aldossary, M. T., & Gazwani, M. A.2020. Motion of Parallel Curves and Surfaces in Euclidean 3-Space R^3 . *Geometry-math-journal.ro*.
- Wang, F., Liu, H., 2007. Mannheim partner curves in 3-Euclidean space. *Mathematics in Practice and Theory*, vol. 37, no. 1, pp. 141-143.
- Liu, H., Wang, F., 2008. Mannheim partner curves in 3-space, *Journal of Geometry*, vol. 88, no. 1-2, pp. 120-126.
- Farouki, R.T., (1986), The approximation of non-degenerate offset surfaces, Computer Aided Geometric Design, 315–43.
- Ravani, B., Ku, T.S.,(1991), Bertrand offsets of ruled and developable surfaces, Comp. Aided Geom. Design, 23(2) 145–152.
- Pottmann, H., Asperl, A., Hofer, M., Kilian, A., (2007)Architectural Geometry, Bentley Institute Press, Exton,
- Gursoy, O., Küçük, A., (1999), On the invariants of trajectory surfaces, Mech and Mach Theory, 34(4) 587–597.
- Yang, A.T., Kirson, Y., Both, B.,(1975,) On a kinematics theory for ruled surface, Proceedings of Fourth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Newcastle Upon Tyne, England, 737-742.
- Perriollat, M., Bartoli, A.,(2013) A computational model of bounded developable surfaces with application to image-based three-dimensional reconstruction, Computer Animation & Virtual Worlds, 24(5) 459–476. doi:10.1002/cav.1478.
- Walrave J. 1995, Curves and surfaces in Minkowski space, PhD. Thesis, K. U. Leuven Faculteit Der Wetenschappen.
- Dillen, F., & Kühnel, W. (1999). Ruled Weingarten surfaces in Minkowski 3-space. *manuscripta mathematica*, 98(3), 307-320.
- Sodsiri, W. (2003). Ruled linear Weingarten surfaces in Minkowski 3-space. *Soochow journal of mathematics*, 29(4), 435-443.
- Ergüt M., (1980) Regle yüzeyler (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi) Elazığ Fırat üniversitesi Elazığ, Türkiye, 68.
- Cimdiker, M., & Ekici, C. (2017). On the Spacelike Parallel Ruled Surfaces with Darboux Frame. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 2, 60.
- Ali, A. T., Aziz, H. S. A., & Sorour, A. H. (2013). Ruled surfaces generated by some special curves in Euclidean 3-Space. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 21(3), 285-294.
- Hacısalıhoğlu,H.H.,1983. Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları.
- O'Neill, B., 1966. Elementary Differential Geometry, Academic Press Inc., New York,

Do Carmo, M. P. (1976). Differential Geometry of Curves and Surfaces (Englewood Cliff, NJ.

Gray, A. (1998). Modern Differential Geometry. *Cre pres*, 977.



ÖZ GEÇMİŞ

Elif KURT Samsun Bafra Kızılırmak Anadolu Öğretmen Lisesi'ni bitirdikten sonra Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği bölümünden 2019 yılında mezun oldu. 2019 yılında Ondokuzmayıs Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans programına başladı.

İletişim Bilgileri

ORCID ID : 0000-0002-3914-6619

Yayınlar:

1. Kurt, E ve Güler, F (2021). The Ruled Surfaces with the Parallel Base Curve. *1st International Conference on Applied Engineering and Natural Sciences, ICAENS*, Konya.
2. Kurt, E ve Güler, F (2022). The Parallel Trajectory Ruled Surfaces. *Journal of Science and Arts*, vol 22, 439-448