



**T.C.**  
**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**GRAFLARDA BAZI TOPOLOJİK  
İNDEKSLER İÇİN SINIRLAR**

**Yaşar NACAROĞLU**

**DOKTORA TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Mayıs-2017**  
**KONYA**  
**Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Yaşar NACAROĞLU tarafından hazırlanan "Graflarda Bazı Topolojik İndeksler İçin Sınırlar" adlı tez çalışması 05/05/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

#### Başkan

Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

#### Danışman

Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

#### Üye

Doç. Dr. Ahmet ERDOĞAN

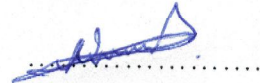
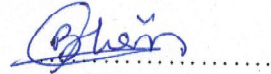
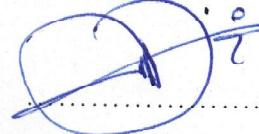
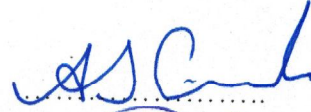
#### Üye

Doç. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

#### Üye

Yrd. Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

### İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa YILMAZ  
FBE Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Yaşar NACAROĞLU

Tarih:

# ÖZET

## DOKTORA TEZİ

### GRAFLARDA BAZI TOPOLOJİK İNDEKSLER İÇİN SINIRLAR

Yaşar NACAROĞLU

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

2017, 93 Sayfa

#### Jüri

Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN  
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK  
Doç. Dr. Ahmet ERDOĞAN  
Doç. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE  
Yrd. Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Graf teori, uygulamalı matematiğin oldukça kullanışlı bir alanıdır. Günlük hayatta karşılaşılan bir çok probleme çözüm olması nedeniyle, son yıllarda graf teori ve uygulamalarına olan ilgi hızlı bir şekilde artmıştır.

Graf teorisinin önemli uygulamalarından olan topolojik indeksler, organik bileşiklerin yapısal özelliklerini açıklamak ve tahmin etmek için kullanılan sayılardır. Günümüzde bir çok topolojik indeks tanımlanmıştır.

Tez toplam 6 ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde graf teori ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde tezde kullanılan kaynaklar ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde üçüncü atom bağ bağlantılık indeksi, dördüncü geometrik aritmetik indeksi ve eksantrik bağlantılılık indeksleri ile ilgili sınır değerleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde graf işlemleri tanıtılmıştır.

Beşinci bölümde graf işlemlerinin birinci çarpımsal Zagreb indeksi, çarpımsal toplam Zagreb indeksi ve çarpımsal Zagreb eş-indeksleri için sınır değerleri elde edilmiştir.

Son bölümde ise tezde elde edilen sonuçlar ve öneriler tartışılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Graflar, Graf parametreleri, Graf İşlemleri, Topolojik indeksler.

## ABSTRACT

### Ph.D THESIS

## BOUNDS FOR SOME TOPOLOGICAL INDICES OF GRAPHS

Yaşar NACAROĞLU

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
SELÇUK UNIVERSITY  
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY  
IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

2017, 93 Pages

#### Jury

Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN  
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK  
Assoc. Prof. Dr. Ahmet ERDOĞAN  
Assoc. Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE  
Asst. Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Graph theory is a very useful area of applied mathematics. In recent years, because of the solution to many problems that are encountered in daily life, the interest in graph theory and applications has increased rapidly.

Topological indices which are important applications of graph theory are the numerical values used to explain and predict the structural properties of organic compounds. Nowadays, many topological indices are defined.

The thesis contains six main sections.

In the first section, basic concepts related to graph theory are given.

In the second section, we present information about the references in the thesis.

In the third section, boundary values related to the third ABC index, the fourth geometric-arithmetic index and the eccentric connectivity index are obtained.

In the fourth section, graph operations are introduced.

In the fifth section, boundary values for the first multiplicative Zagreb index, the multiplicative sum Zagreb index and the multiplicative Zagreb co-indices of the graph operations are obtained.

The final section discusses the results obtained in the thesis with some suggestions.

**Keywords:** Graphs, Graph Parameters, Graph Operations, Topological Indices.

## ÖNSÖZ

Graflar Bazı Topolojik İndeksler için Sınırlar isimli bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi, Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN danışmanlığında hazırlanmış ve Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Doktora tezi olarak sunulmuştur.

Bu tezin başlangıcından bitimine kadar her aşamasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN'e şükranlarımı sunarım. Ayrıca yardımlarını esirgemeyen, bilgi ve birikimiyle yol gösteren kıymetli hocam Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK'e teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak beni her daim destekleyen eşim Filiz NACAROĞLU'na, çocuklarım Ceyda ve Tarık NACAROĞLU'na ve aileme sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

Yaşar NACAROĞLU  
KONYA-2017

# İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET</b> .....	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>v</b>
<b>ÖNSÖZ</b> .....	<b>vi</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>vii</b>
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR</b> .....	<b>ix</b>
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b> .....	<b>xi</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
1.1. Temel Kavramlar .....	2
1.2. Graf Çeşitleri .....	6
<b>2. KAYNAK ARAŞTIRMASI</b> .....	<b>10</b>
<b>3. TOPOLOJİK İNDEKSLER</b> .....	<b>13</b>
3.1. Üçüncü Atom Bağ Bağlantılılık İndeksi.....	13
3.2. Dördüncü Geometrik Aritmetik İndeksi .....	22
3.3. Tek devirli Grafların Eksantrik Bağlantılılık İndeksi .....	32
<b>4. GRAF İŞLEMLERİ</b> .....	<b>39</b>
4.1 Birleşim İşlemi .....	39
4.2 Toplama İşlemi .....	39
4.3 Köklü Çarpım .....	40
4.4 Corona Çarpım .....	40
4.5 Tensor Çarpım .....	41
4.6 Kartezyen Çarpım .....	41
4.7 Kuvvetli Çarpım .....	42
4.8 Hiyerarşik Çarpım.....	42
4.9 Bileşim Çarpımı.....	43
4.10 Ayrışım İşlemi .....	43
4.11 Simetrik Fark İşlemi .....	44
<b>5. GRAF İŞLEMLERİNİN ÇARPIMSAL ZAGREB İNDEKSLERİ</b> .....	<b>45</b>
5.1 Birinci Çarpımsal Zagreb İndeksi İçin Sınırlar .....	45
5.2 Çarpımsal Toplam Zagreb İndeksi İçin Sınırlar .....	51
5.3 Çarpımsal Zagreb Eş-İndeksleri İçin Sınırlar .....	61
<b>6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER</b> .....	<b>76</b>
6.1 Sonuçlar .....	76

6.2 Öneriler .....	76
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>77</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>81</b>



## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

$V(G)$	: Köşe kümesi
$E(G)$	: Kenar kümesi
$G = (V, E)$	: $G$ grafi
$d_G(u)$	: $u$ köşesinin derecesi
$d(u, v)$	: $u$ ve $v$ köşeleri arasındaki uzaklık
$e(v)$	: $v$ köşesinin eksantrik değeri
$r(G)$	: $G$ grafinin yarıçapı
$D(G)$	: $G$ grafinin çapı
$G_1 \cong G_2$	: İzomorf iki graf
$K_n$	: $n$ köşeli tam graf
$\overline{G}$	: $G$ grafinin tamamlayıcısı
$C_n$	: $n$ köşeli devir graf
$K_{m,n}$	: Tam iki parçalı graf
$S_n$	: Yıldız graf
$P_n$	: Yol graf
$U(n, m)$	: $n$ köşeli $m$ eşleşmeli tek devirli graflar kümesi
$PV$	: Pendant köşeler kümesi
$N(u)$	: $u$ köşesine komşu olan köşelerin kümesi
$\lceil n \rceil$	: $n$ in üst tam değeri
$\lfloor n \rfloor$	: $n$ in alt tam değeri
$G_1 \cup G_2$	: $G_1$ ve $G_2$ graflarının birleşim işlemi
$G_1 + G_2$	: $G_1$ ve $G_2$ graflarının toplama işlemi
$H(G)$	: $H$ ile $G$ nin köklü çarpımı
$G_1 \circ G_2$	: $G_1$ ve $G_2$ graflarının corona çarpımı
$G_1 \otimes G_2$	: $G_1$ ve $G_2$ graflarının tensor çarpımı
$G_1 \times G_2$	: $G_1$ ve $G_2$ graflarının kartezyen çarpımı
$G_1 \boxtimes G_2$	: $G_1$ ve $G_2$ graflarının kuvvetli çarpımı
$G \square H(U)$	: $G$ ve $H$ graflarının hiyerarşik çarpımı
$G_1[G_2]$	: $G_1$ ve $G_2$ graflarının bileşim işlemi
$G_1 * G_2$	: $G_1$ ve $G_2$ graflarının ayrışım işlemi
$G_1 \oplus G_2$	: $G_1$ ve $G_2$ graflarının simetrik farkı
$\xi^c(G)$	: Eksantrik bağlantılılık indeksi
$\xi^{ce}(G)$	: Bağlantılılık eksantrik indeksi
$M_1(G)$	: $G$ grafinin birinci Zagreb indeksi
$M_2(G)$	: $G$ grafinin ikinci Zagreb indeksi
$M_1^*(G)$	: Birinci Zagreb eksantrik indeksi

$M_2^*(G)$	: İkinci Zagreb eksantrik indeksi
$ABC_3(G)$	: Üçüncü Atom bağ bağlantılılık indeksi
$GA_4(G)$	: Dördüncü Geometrik-Aritmetik indeksi
$\Pi_1(G)$	: Birinci çarpımsal Zagreb indeksi
$\Pi_2(G)$	: İkinci çarpımsal Zagreb indeksi
$\Pi_1^*(G)$	: Çarpımsal toplam Zagreb indeksi
$\overline{\Pi}_1(G)$	: Birinci çarpımsal Zagreb eş-indeksi
$\overline{\Pi}_2(G)$	: İkinci çarpımsal Zagreb eş-indeksi



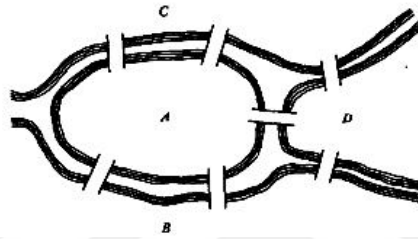
## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. 1 Königsberg köprüsü.....	1
Şekil 1. 2 Königsber köprü probleminin graf ile gösterimi .....	1
Şekil 1. 3 $G$ grafi.....	2
Şekil 1. 4 Yönlendirilmiş ve yönlendirilmemiş graf.....	3
Şekil 1. 5 Yönlendirilmiş çoklu graf ve yönlendirilmemiş çoklu graf.....	3
Şekil 1. 6 Yönlendirilmemiş Pseudo graf ve yönlendirilmiş Pseudou graf.....	3
Şekil 1. 7 $G_1$ ve $G_2$ grafları.....	4
Şekil 1. 8 $G$ grafinin eksantrik değerleri.....	5
Şekil 1. 9 Bir $G$ grafi .....	5
Şekil 1. 10 İzomorf graflar.....	6
Şekil 1. 11 $G-v_3$ alt grafi .....	6
Şekil 1. 12 Mükemmel eşleşmeli bir graf.....	6
Şekil 1. 13 Boş(Null) graf.....	7
Şekil 1. 14 $n=1,2,3,4,5,6$ için $K_n$ tam grafları .....	7
Şekil 1. 15 Bir graf ve onun tamamlayıcısı .....	7
Şekil 1. 16 $C_3, C_4, C_5$ ve $C_6$ devirleri.....	8
Şekil 1. 17 İki parçalı graf, tam iki parçalı graf ve yıldız graf.....	8
Şekil 1. 18 Öz merkezli graflar ve öz merkezli olmayan graf .....	8
Şekil 1. 19 Dört köşeli köklü ağaçlar .....	9
Şekil 3. 1 $C_{a,b}(I)$ ve $N_n^3$ grafları.....	33
Şekil 3. 2 $H_1^m, H_2^m, H_3^m, H_4^m$ ve $H_5^m$ grafları. ....	34
Şekil 3. 3 $A_1^m, A_2^m, A_3^m, A_4^m$ ve $A_5^m$ grafları. ....	36
Şekil 3. 4 $U_1^m, U_2^m$ ve $U_3^m$ grafları. ....	37
Şekil 3. 5 $C_5^*$ grafi. ....	38
Şekil 4. 1 İki grafın birleşimi .....	39
Şekil 4. 2 İki grafın toplamı .....	39
Şekil 4. 3 $G$ ile $H$ graflarının köklü çarpımı .....	40
Şekil 4. 4 İki grafın corona çarpımı.....	40
Şekil 4. 5 İki grafın tensor çarpımı.....	41
Şekil 4. 6 İki grafın kartezyen çarpımı .....	41
Şekil 4. 7 İki grafın kuvvetli çarpımı .....	42
Şekil 4. 8 $\Gamma = K_3 \square K_3(U)$ grafi .....	42
Şekil 4. 9 İki grafın bileşim çarpımı.....	43
Şekil 4. 10 $G = P_2 * P_2$ grafi .....	44
Şekil 4. 11 İki grafın simetrik farkı.....	44

## 1. GİRİŞ

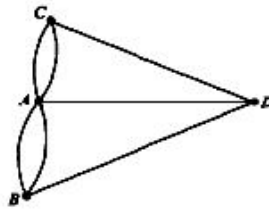
Uygulamalı matematiğin oldukça kullanışlı bir alanı olduğundan, graf teorisinin(çizgi kuramı) bağımsız bir şekilde defalarca keşfedilmesi tesadüf değildir. Graf teorisinin ilk kayıtları Euler' in eserlerinde görülür. Burada orijinal problem fiziksel dünyadan ortaya çıkar. Kirchoff' un elektrik devrelerindeki araştırmaları, graf teorisinin bir alanı olan ağaçlardaki temel kavramların gelişmesine yol açmıştır. Cayley, organik kimyasal izomerlerin numaralandırılmasından ortaya çıkan ağaçları düşünmüştür.

Graf teorisinin başlangıcı, Euler' in Königsberg köprü problemi çözümünü 1736 yılında yayınlamasına dayanır. Burada Şekil 1.1' de görüldüğü gibi Pregel nehri kıyısına ve iki adaya bağlı 7 köprü vardır.



Şekil 1. 1 Königsberg köprüsü

Bu problem, dört karadan herhangi birinden başlayıp her bir köprüden tam bir kez geçerek başlangıç noktasına geri dönebileceği problemdir. Kişi kolaylıkla bunu denediğinde başarısızlıkla karşılaştığını görebilir. Euler bu durumun gerçekleşmeyeceğini göstermiştir. Euler bu problemin çözülemez olduğunu ispatlarken, her bir kara parçasını bir köşe ve her bir köprüyü köşeleri birleştiren çizgi(kenar) olarak Şekil 1.2 deki gibi ifade etmiştir.



Şekil 1. 2 Königsber köprü probleminin graf ile gösterimi

Günlük hayatta karşılan birçok probleme çözüm olması nedeniyle son yıllarda graf teori ve uygulamalarına olan ilgi hızlı bir şekilde artmıştır. Karşılaşılan birçok durum, köşeler ve bu köşeleri birleştiren kenarlar ile ifade edilebilir. Örneğin; bir kimyasal molekül için atomları köşeler ve bu atomları bağlayan kimyasal bağları

kenarlar ile gösterebiliriz. Bir elektrik devresinde dirençleri köşeler ve bunları bağlayan kabloları kenarlar ile temsil edebiliriz. Bu ve buna benzer daha bir çok örnek verilebilir.

Yukarıda ifade edilen nedenlerden dolayı Graf teori matematik, fizik, kimya, bilgisayar, mühendislik, farmakoloji... gibi birçok alanda büyük bir öneme sahiptir. Bu çalışmada graf teorisinin temel kavramları verildikten sonra önemli uygulamalarından olan bazı topolojik indekslerin özellikleri üzerinde durulacaktır. Daha sonra bazı graf parametrelerine bağlı olarak topolojik indeksler için sınır değerleri elde edilecektir.

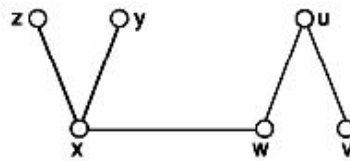
Aşağıdaki tüm temel kavramlar ve graf teorisinin temelleri ile ilgili bilgiler, Bondy ve Murty(Bondy ve Murty, 1976), Harary (Harary, 1969) ve Vasudev (Vasudev, 2006) in kitaplarından alınmıştır.

### 1.1. Temel Kavramlar

Bir  $G$  grafi, elemanları köşeler olan  $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$  kümesi ve elemanları kenarlar olan  $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$  kümesinden oluşur. Köşeler kümesi  $V(G)$  ve kenarlar kümesi  $E(G)$  olan bir graf,  $G = (V, E)$  ile gösterilir.

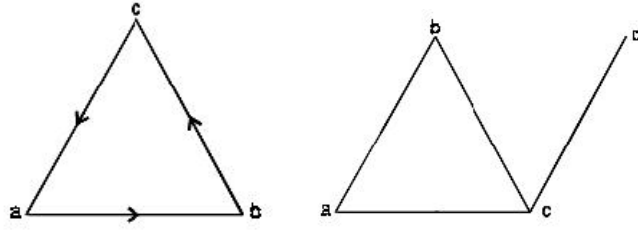
Eğer  $e = uv$  bir  $G$  grafinin bir kenarı ise,  $u$  ve  $v$  **köşeleri komşudur** denir. Bu durumda  $u$  ve  $v$  köşelerine  $e$  **kenarının uç köşeleri** denir.

Örneğin; Bir  $G$  grafi,  $V(G) = \{u, v, w, x, y, z\}$  ve  $E(G) = \{uv, uw, wx, xy, xz\}$  kümeleri ile tanımlansın. Bu kümelerden oluşan  $G$  grafi aşağıdaki şekilde gösterilebilir.



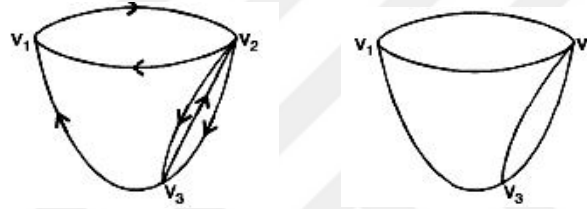
Şekil 1.3  $G$  grafi

$p$  köşeli ve  $q$  kenarlı bir graf, kısaca  $(p, q)$  **grafi** olarak isimlendirilir. Özel olarak  $(1,0)$  grafına **trivial graf** denir. Bir  $G$  grafinin her bir kenarı bir yöne sahipse bu grafa **yönlendirilmiş graf** denir. Aksi takdirde **yönlendirilmemiş graf** denir. Aşağıda yönlendirilmiş ve yönlendirilmemiş grafa örnek verilmiştir.



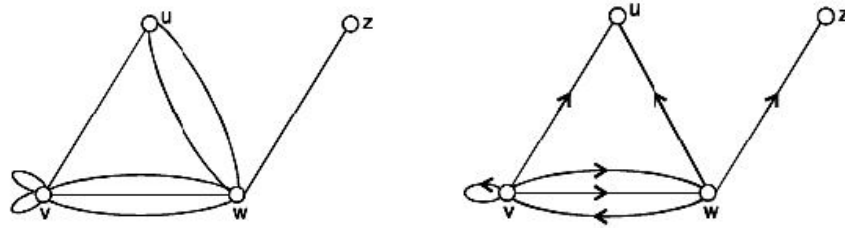
Şekil 1. 4 Yönlendirilmiş ve yönlendirilmemiş graf

Aynı uçlara sahip bir kenara bir **ilmek** denir. Eğer  $(v_i, v_j)$  bir  $G$  grafında bir ilmek ise  $v_i = v_j$  dir. Eğer grafta iki köşeyi birleştiren birden fazla kenar varsa bu kenarlara **paralel kenarlar** denir. Paralel kenarlara sahip ve ilmek içermeyen graflara **çoklu graflar** denir. Şekil 1.5 de çoklu graf örnekleri verilmiştir.



Şekil 1. 5 Yönlendirilmiş çoklu graf ve yönlendirilmemiş çoklu graf

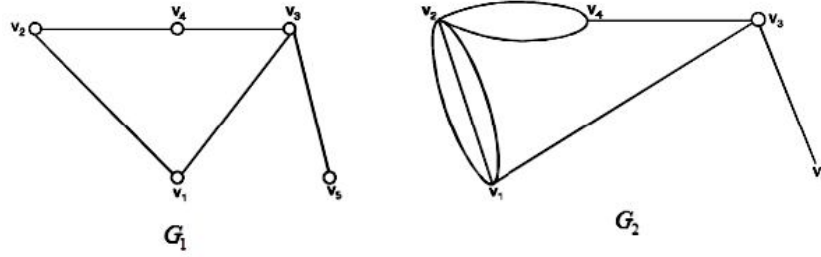
Paralel kenarlar ve ilmek içeren grafa, **Pseudo graf** denir. Şekil 1.6 da Pseudo grafa örnek verilmiştir.



Şekil 1. 6 Yönlendirilmemiş Pseudo graf ve yönlendirilmiş Pseudou graf

İlmek ve paralel kenar içermeyen grafa **basit graf** denir. Yani burada her bir kenar iki farklı köşeye bağlı ve aynı köşe çiftlerini bağlayan iki kenar yoktur. Şekil 1.4 de verilen graflar basit graflardır. Bir graf, sonlu sayıda köşe ve kenara sahipse **sonlu graf** olarak isimlendirilir. Aksi takdirde **sonsuz graf** denir.

Bir  $v_i$  köşesine bağlı kenarların sayısına  $v_i$  **köşesinin derecesi** denir ve  $d_G(v_i)$  ile gösterilir. Derece hesaplanırken ilmek 2 kez sayılır. Şekil 1.7 de  $G_1$  ve  $G_2$  grafları verilmiştir.



Şekil 1.7  $G_1$  ve  $G_2$  grafları

Burada  $G_1$  grafinin köşelerinin dereceleri;  $d_{G_1}(v_1)=2$ ,  $d_{G_1}(v_2)=2$ ,  $d_{G_1}(v_3)=3$ ,  $d_{G_1}(v_4)=2$  ve  $d_{G_1}(v_5)=1$  dir.  $G_2$  grafinin köşelerinin dereceleri ise;  $d_{G_2}(v_1)=4$ ,  $d_{G_2}(v_2)=5$ ,  $d_{G_2}(v_3)=3$ ,  $d_{G_2}(v_4)=3$  ve  $d_{G_2}(v_5)=1$  dir.

Derecesi sıfır olan köşeye **izole köşe** denir. Derecesi 1 olan köşeye **pendant veya uç köşe** denir. Şekil 1.7 deki  $v_5$  köşesi pendant köşedir.

**Teorem 1.1.1** (Vasudev, 2006)  $G=(V, E)$ ,  $e$  kenarlı yönlendirilmemiş bir graf olsun.

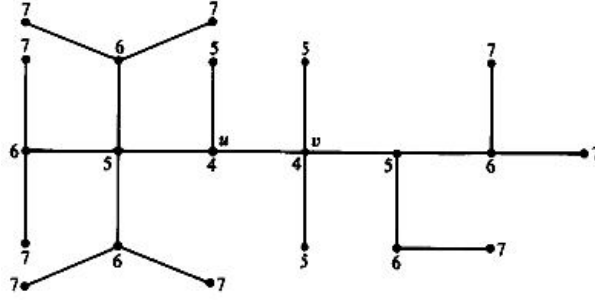
Bu durumda

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2e$$

dir. Yani bir yönlendirilmemiş grafin köşelerinin dereceleri toplamı çifttir.

**İspat:** Bir köşenin derecesi, köşeye bağlı kenarların sayısına eşittir. Her kenar, iki köşeye bağlı olduğundan köşelerin dereceleri hesaplanırken iki kez sayılır. Bu yüzden dereceler toplamı kenar sayısının iki katına eşittir.

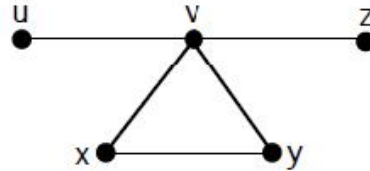
Bir  $G$  grafinde, herhangi iki  $u$  ve  $v$  köşeleri arasındaki en kısa yolun uzunluğuna bu iki köşe arasındaki **uzaklık** denir ve  $d(u, v)$  ile gösterilir. Bir  $G$  bağlantılı grafindeki bir  $v$  köşesinin eksantrik değeri,  $G$  deki tüm  $u$  köşeleri için maksimum  $d(u, v)$  değeridir ve  $e(v)$  ile gösterilir.  $G$  deki tüm köşelerin eksantriklerinin minimum değerine, grafin **radiusu (yarıçapı)** denir ve  $r(G)$  ile gösterilir. Köşelerin maksimum eksantrik değerine ise grafin **diameter(çap)** denir ve  $D(G)$  ile gösterilir. Eğer  $e(v) = r(G)$  ise  $v$  köşesine bir **merkez köşe** denir. Graftaki tüm merkez köşelerin kümesine **grafın merkezi** denir.



Şekil 1.8  $G$  grafinin eksantrik değerleri

Şekil 1.8' de her bir köşenin eksantrik değeri verilmiştir. Burada çap 7, yarıçap 4 ve  $u$  ile  $v$  merkez köşelerdir.

Bir  $G$  grafinde köşeler ve köşelerin değişen bir  $W = v_0, e_1, v_2, e_2, \dots, e_n, v_n$  dizisine bir **yürüme** denir. Burada  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $v_{j-1}$  ve  $v_j$  köşeleri  $e_j$  kenarının uç köşeleridir.  $v_0$  başlangıç köşesi,  $v_n$  bitiş köşesidir. Bir yürümenin uzunluğu kenarların sayısına eşittir. Başlangıç köşesi bitiş köşesiyle aynı olan yürümeye **kapalı yürüme** denir. Birden fazla aynı kenardan geçilmeyen yürümeye **iz** denir. Hiçbir köşesi tekrar etmeyen bir yürümeye **yol** denir. En az 1 uzunluğundaki kapalı yola bir **devir** denir. Eğer bir grafin her köşe çifti bir yol ile birleşiyorsa grafa **bağlantılı graf** denir.

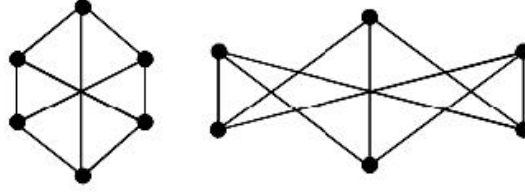


Şekil 1.9 Bir  $G$  grafi

Şekil 1.9 da  $\langle u, v, x, v, z \rangle$  köşe dizisi bir yürümedir, fakat bir iz değildir.  $\langle u, v, x, y, v, z \rangle$  köşe dizisi bir izdir, fakat bir yol değildir.

$G_1 = (V_1, E_1)$  ve  $G_2 = (V_2, E_2)$  iki graf olsun. Eğer  $f: V_1 \rightarrow V_2$  fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa,  $f$  fonksiyonuna bir **graf izomorfizması** denir.  $G_1$  ve  $G_2$  graflarına ise izomorf graflar denir ve  $G_1 \cong G_2$  şeklinde gösterilir.

- i)  $f$ , 1-1 ve örten
- ii) her  $a, b \in V_1$  için  $\{a, b\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} \in E_2$

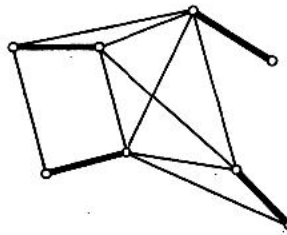


Şekil 1. 10 İzomorf graflar

$G$  nin bir **alt grafi**, tüm köşeleri ve kenarları  $G$  de olan graftır. Bir  $G$  grafında bir  $v_i$  köşesinin kaldırılması ile elde edilen  $G - v_i$  **grafı**,  $G$  nin  $v_i$  haricindeki tüm köşelerine ve uç köşesi  $v_i$  olmayan tüm kenarlarına sahip olan bir alt grafidir.

Şekil 1. 11  $G - v_3$  alt grafi

$M$ ,  $E$  kenar kümesinin herhangi bir alt kümesi olsun.  $M$  nin herhangi iki elemanı  $G$  de komşu değilse  $M$  ye  $G$  de bir **eşleşme(matching)** denir. Eğer  $G$  nin her köşesi  $M$  nin elemanlarının uç köşelerinden biri ise  $M$  ye **mükemmel eşleşme** denir.



Şekil 1. 12 Mükemmel eşleşmeli bir graf

## 1.2. Graf Çeşitleri

**Tanım 1.2.1** Sadece izole köşeler içeren bir grafa **boş graf** denir. Boş grafın kenarlar kümesi boş kümedir. (Vasudev, 2006)

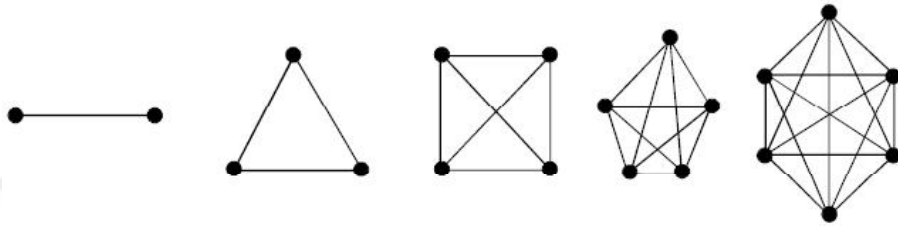
Şekil 1.13 de 4 köşeli bir boş graf verilmiştir.



Şekil 1. 13 Boş(Null) graf

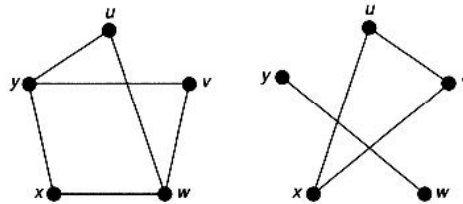
**Tanım 1.2.2** Eğer  $G$  deki her köşe diğer tüm köşelerle komşuysa,  $G$  basit grafına **tam graf** denir.  $n$  köşeli bir tam graf genel olarak  $K_n$  ile gösterilir. (Vasudev, 2006)

Şekil 1.14 de  $n=1,2,3,4,5,6$  için  $K_n$  tam grafları gösterilmiştir.



Şekil 1. 14  $n=1,2,3,4,5,6$  için  $K_n$  tam grafları

Bir  $G$  grafının **tamamlayıcısı** olan  $\bar{G}$  grafının köşe kümesi  $V(G)$  dir.  $\bar{G}$  de herhangi iki köşenin komşu olması ancak ve ancak onlar  $G$  de komşu değilse sağlanır. Şekil 1.15 de bir graf ve onun tamamlayıcısı verilmiştir.

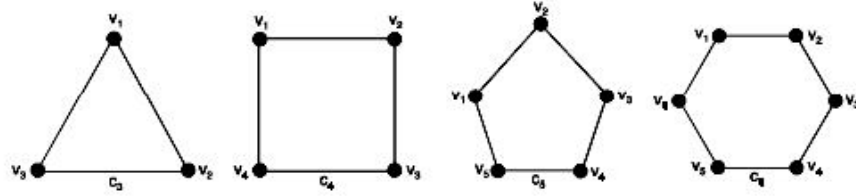


Şekil 1. 15 Bir graf ve onun tamamlayıcısı

**Tanım 1.2.3** Bir grafın tüm köşelerinin dereceleri birbirine eşit ise grafa **regüler graf** denir. Eğer her bir köşenin derecesi  $r$  ise grafa  $r$  dereceli regüler graf denir. Özel olarak boş graf sıfır dereceli ve  $K_n$  tam grafi  $n-1$  dereceli regüler graftır. (Vasudev, 2006)

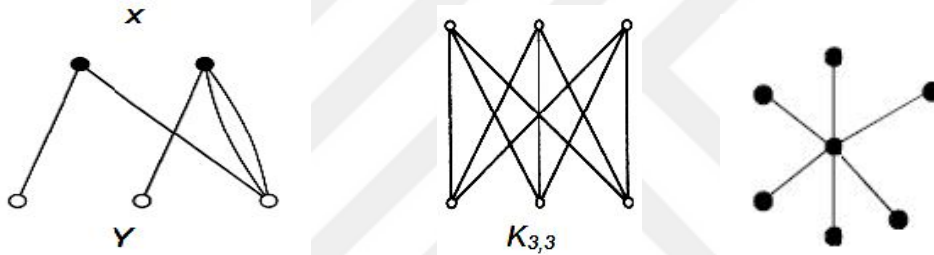
**Tanım 1.2.4**  $v_1, v_2, \dots, v_n$  köşelerine ve  $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}$  kenarlarına sahip olan  $n$  ( $n \geq 3$ ) köşeli grafa bir **devir** denir ve  $C_n$  ile gösterilir. (Vasudev, 2006)

Şekil 1.16 da  $C_3, C_4, C_5$  ve  $C_6$  devirleri verilmiştir.



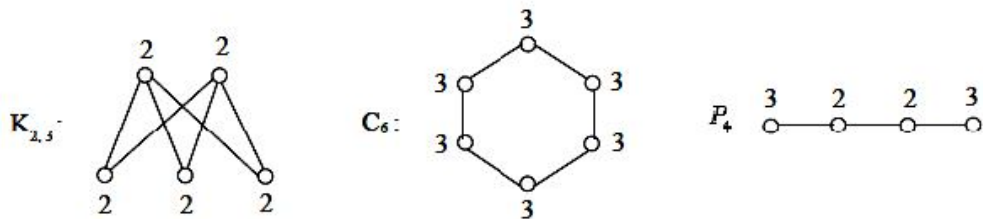
Şekil 1.16  $C_3, C_4, C_5$  ve  $C_6$  devirleri

**Tanım 1.2.5** Köşe kümesi ayrık iki  $X$  ve  $Y$  alt kümelerine ayrılmış olan grafa **iki parçalı graf** denir. Burada her bir kenarın bir uç köşesi  $X$  de ve diğer uç köşesi  $Y$  dedir. Eğer  $X$  in her bir köşesi  $Y$  nin her bir köşesi ile birleşmiş ise grafa tam iki parçalı graf denir.  $|X|=m$  ve  $|Y|=n$  olan **tam iki parçalı graf**  $K_{m,n}$  ile gösterilir.  $K_{1,n}$  formundaki tam iki parçalı grafa **yıldız graf** denir ve  $S_n$  ile gösterilir. (Bondy ve Murty, 1976)



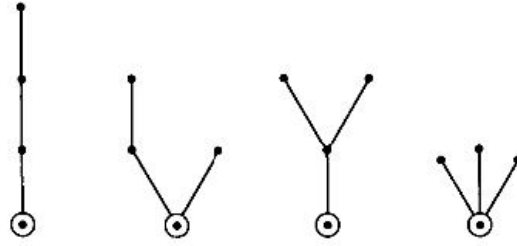
Şekil 1.17 İki parçalı graf, tam iki parçalı graf ve yıldız graf

**Tanım 1.2.6** Bir grafın tüm köşeleri aynı eksantrik değerine sahipse **öz merkezli graf** denir.(Gross ve arkadaşları, 2014) Şekil 1.18 de  $K_{2,3}$  ve  $C_6$  grafları öz merkezli graflardır.  $P_4$  grafi ise öz merkezli graf değildir.



Şekil 1.18 Öz merkezli graflar ve öz merkezli olmayan graf

**Tanım 1.2.6** Devir içermeyen bağlantılı bir grafa **ağaç** denir. Bir **köklü ağaç**(rooted tree) diğerlerinden ayrı, onun kökü olan bir köşeye sahiptir.



Şekil 1. 19 Dört köşeli köklü ağaçlar

**Teorem 1.1.2** Her ağaç, ya bir köşe ya da iki komşu köşe içeren bir merkeze sahiptir.  
(Harary, 1976)

**Tanım 1.2.7** Tek devir içeren bağlantılı graflara **tek devirli(unicyclic) graflar** denir.  
Tek devirli grafların köşe ve kenar sayıları aynıdır. (Harary,1976)

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde çalışmamıza yön veren kaynaklar hakkında bilgiler verilmiştir.

**Arezoomand ve Taeri (2013)**, “*Zagreb indices of the generalized Hierarchical product of graphs*” isimli çalışmalarında, grafların kartezyen ve genelleştirilmiş hiyerarşik çarpımlarının 1. ve 2. Zagreb indekslerini hesaplamışlardır. Aynı zamanda bazı kimyasal grafların Zagreb indekslerini hesaplamışlardır.

**Ashrafi ve ark. (2011)**, “*The eccentric connectivity index of nanotube and nanotorus*” adlı eserlerinde kimyasal bileşiklerden nanotube ve nanotorusun eksantrik bağlantılılık indeksi için kesin formüller vermişlerdir.

**Ashrafi ve ark. (2010)**, “*The Zagreb coindices of graph operations*” isimli çalışmalarında bazı graf işlemlerinin Zagreb eşindeksleri için sınır değerleri elde etmişlerdir.

**Ashrafi ve ark. (2011)**, “*Extremal graphs with respect to the Zagreb coindices*” isimli eserlerinde maksimal ve minimal Zagreb eş indekse sahip grafları karakterize etmişlerdir.

**Azari (2014)**, “*Sharp lower bounds on the Narumi-Katayama index of graph operations*” isimli çalışmasında bazı graf işlemlerinin Narumi-Katayama indeksleri için alt sınır değerleri elde etmiştir. Daha sonra, bu sonuçları kullanarak bazı özel grafların Narumi-Katayama indekslerini hesaplamıştır.

**Azari ve Iranmanesh (2015)**, “*Some inequalities for the multiplicative sum Zagreb index of graph operations*” isimli eserlerinde bazı graf işlemlerinin çarpımsal toplam Zagreb indeksleri için alt sınır değerleri elde etmişlerdir.

**Azari ve Iranmanesh (2013)**, “*Chemical Graphs constructed from Rooted product and their Zagreb indices*” isimli çalışmalarında grafların Rooted çarpımlarının Zagreb indeksleri hesaplanmıştır. Ayrıca üç özel grafin rooted çarpımlarının Zagreb indeksleri belirlenmiştir.

**Das (2010)**, “*On geometric–arithmetic index of graphs*”, isimli eserinde geometrik aritmetik indeks ile ilgili alt ve üst sınır değerleri elde etmiştir. Ayrıca Nordhaus-Gaddum tip sonuçlar elde etmiştir.

**Das (2010)**, “*Atom bond connectivity index of graphs*” adlı çalışmasında grafların ve ağaçların atom bağ bağlantılılık indeksi ile ilgili güçlü sınır değerleri elde etmiştir.

**Das ve ark.(2013)**, “*The multiplicative Zagreb indices of graph operations*” adlı çalışmalarında birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri ile ilgili üst sınır değerleri elde etmişlerdir.

**Das ve ark. (2015)**, “*Zagreb indices of graphs*”, çalışmalarında birinci ve ikinci Zagreb indeksleri ile ilgili alt ve üst sınır değerleri bulmuşlardır. Ayrıca birinci ve ikinci Zagreb eş-indekslerle ilgili sınır değerleri elde etmişlerdir.

**Eliasi ve Vukicevic (2013)**, “*Comparing the Multiplicative Zagreb indices*” isimli eserlerinde, çarpımsal Zagreb indekslerini karşılaştırmışlar ve eşitsizlikler elde etmişlerdir.

**Estrada ve ark. (1998)**, “*An atom bond connectivity index: Modelling the enthalpy of formation of alkanes*” isimli çalışmalarında atom bağ bağlantılılık indeksini keşfetmişler ve kimyasal yapı olan alkenlerin oluşum sıcaklıklarını tanımlamada kullanmışlardır.

**Farahani (2013)**, “*Eccentricity Version of Atom-Bond Connectivity Index of Benzenoid Family ABC5(Hk)*” çalışmasında atom bağ bağlantılılık indeksinin eksantrik versiyonunu tanımlamış ve benzenoid ailesinin bu indeksini incelemiştir.

**Farahani (2013)**, “*Computing a New Connectivity Index for a Famous Molecular Graph of Benzenoid Family*” adlı eserinde benzenoid ailesinin dördüncü geometrik aritmetik indeksi hesaplanmıştır.

**Furtula ve ark. (2009)**, “*Atom bond connectivity index of trees*” eserlerinde ağaçların ABC indekslerinin matematiksel özellikleri incelenmiştir.

**Gutman (2011)**, “*Multiplicative Zagreb indices of trees*” isimli çalışmasında ağaçların birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri için ekstremal grafları karakterize etmiştir.

**Jamil ve ark. (2016)**, “*Fourth Geometric Arithmetic Index of Polycyclic Aromatic Hydrocarbons (PAHk)*”, isimli eserinde aromatik hidrokarbonların dördüncü geometrik aritmetik indeksleri incelenmiştir.

**Khalifeh ve ark. (2008)**, “*The hyper-wiener index of graph operations*” adlı çalışmalarında graf işlemlerinin hyper-wiener indeksi incelenmiştir.

**Khalifeh ve ark. (2009)**, “*The first and second Zagreb indices on of some graph operations*” adlı eserlerinde bazı graf işlemlerinin birinci ve ikinci Zagreb indeksleri incelenmişlerdir.

**Li ve Zhou (2013)**, “*Atom bond connectivity index of unicyclic graphs with perfect matchings*” isimli çalışmasında mükemmel eşleşmeli tek devirli grafların atom bağ bağlantılılık indeksi incelenmiştir.

**Liu ve ark. (2006)**, “*On the randic index of unicyclic conjugated molecules*” isimli çalışmalarında eşleşme sayısı verilen tek devirli grafların randic indeksleri incelenmiş ve sınır değerleri elde edilmiştir.

**Liu ve Zhang (2012)**, “*Sharp upper bounds on multiplicative Zagreb indices*” isimli eserlerinde çeşitli indekslere bağlı olarak çarpımsal birinci ve ikinci Zagreb indeksleri için sınır değerleri elde etmişlerdir.

**Morgan ve ark. (2011)**, “*On the eccentric connectivity index of a graph*”, adlı çalışmalarında eksantrik bağlantılılık indeksi için alt ve üst sınırlar bulmuşlardır.

**Nezhad ve ark. (2014)**, “*Comparing the second Multiplicative Zagreb coindex with some graph invariants*” isimli çalışmalarında bazı indekslerle ikinci çarpımsal Zagreb eş-indeksini karşılaştırmışlar ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksi için sınır değerleri bulmuşlardır.

**Nezhad ve ark.(2015)**, “*Upper on the second Multiplicative Zagreb coindex*”, isimli çalışmalarında ikinci çarpımsal Zagreb eş-indeksi için üst sınırlar elde etmişlerdir.

**Xu ve Das (2012)**, “*Trees, unicyclic and bicyclic graphs extremal with respect to multiplicative sum Zagreb index*” adlı çalışmalarında ağaçlar, unicyclic ve bicyclic grafların çarpımsal toplam Zagreb indeksleri için sınır değerleri bulmuşlar ve bu indeks için ekstremal grafları karakterize etmişlerdir

**Xu ve Hua (2012)**, “*A unified approach to extremal multiplicative Zagreb indices for trees, unicyclic and bicyclic graphs*” adlı çalışmalarında ağaçlar, tek devirli ve iki devirli grafların çarpımsal toplam Zagreb indeksleri için ekstremal graflar karakterize etmişlerdir

**Yeh ve Gutman (1994)**, “*On the sum of all distances in composite graphs*” isimli çalışmalarında bazı graf işlemlerinin wiener indeksini incelemişlerdir.

**Yuan ve ark. (2010)**, “*On geometric arithmetic index*” adlı çalışmalarında moleküler grafların geometrik aritmetik indeksi için alt ve üst sınır değerleri vermişlerdir.

**Zhou ve Gutman (2005)**, “*Further properties of Zagreb indices*” isimli çalışmalarında birinci ve ikinci Zagreb indeksleri için üst sınırlar vermişlerdir.

### 3. TOPOLOJİK İNDEKSLER

Moleküler tanımlayıcılar QSPR/QSAR çalışmalarında geniş bir uygulamaya sahiptir. (Todeschini and Consonni, 2000) Kimyasal graf teoride bunlara topolojik indeksler denir.

Bir topolojik indeks, bir kimyasal grafda değişmeyen matematiksel sabittir. Bu nedenle, grafın sunuşundan veya etiketlenmesinden bağımsızdır. Moleküler grafların topolojik indeksleri, moleküler yapının kimyasal ve fiziksel özellikleri arasında korelasyonlar kurmak için yaygın bir şekilde kullanılır.

Bugüne kadar bir çok topolojik indeks tanımlanmıştır. Randic indeks, Wiener index, Balaban indeks, geometrik aritmetik indeks bunlardan bazılarıdır. Bu çalışma içerisinde, topolojik indekslerden üçüncü atom bağ bağlantılılık indeks, dördüncü geometrik aritmetik indeks, eksantrik bağlantılılık indeksi ve çarpımsal Zagreb indeksleri ile ilgili sınır değerleri incelenmiş ve orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

#### 3.1. Üçüncü Atom Bağ Bağlantılılık İndeksi

Bu bölümde Üçüncü Atom Bağ Bağlantılılık indeksi için sınır değerleri verilecektir.

**Tanım 3.1.1** Üçüncü atom bağ bağlantılılık indeksi,

$$ABC_3(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\frac{e(u)+e(v)-2}{e(u)e(v)}}$$

şeklinde tanımlanmıştır. (Lee, 2016)

Yol grafi, yıldız grafi, devir, tam graf ve tam iki parçalı grafın üçüncü bağlantılılık indeksleri aşağıdaki gibidir.

$$ABC_3(K_n) = 0, \quad ABC_3(K_{m,n}) = \frac{mn}{\sqrt{2}}, \quad ABC_3(S_n) = \frac{n-1}{\sqrt{2}}, \quad ABC_3(C_n) = n \frac{\sqrt{2 \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right)}}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor},$$

$$.ABC_3(P_n) = \begin{cases} 2 \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-2} \sqrt{\frac{2k-1}{k(k+1)}} & , n \text{ tek ise} \\ 2 \sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-2} \sqrt{\frac{2k-1}{k(k+1)}} + \frac{2\sqrt{n-2}}{n} & , n \text{ çift ise} \end{cases}$$

Öncelikle temel sonuçlarımızda kullanılan aşağıdaki lemmalar verilecektir. Lemma 3.1.2 de aritmetik harmonik ortalama eşitsizliği verilmiştir.

**Lemma 3.1.2**  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pozitif tamsayıları verilisin. Bu durumda

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  durumunda sağlanır.

**Lemma 3.1.3**  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  ve  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  iki reel sayı dizisi olsun. Bu durumda

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  ve  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  dizileri orantılı ise sağlanır. (Hardy ve ark., 1934)

**Lemma 3.1.4**  $x, y \geq 1$  için  $f(x, y) = \sqrt{\frac{x+y-2}{xy}} = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 2}$  fonksiyonunu gözönüne

alalım. Eğer  $y \geq 2$  sabit bir sayı ise,  $f(x, y)$  fonksiyonu  $x$  değişkenine göre azalan bir fonksiyondur. (Xing ve ark., 2010)

**Teorem 3.1.5**  $G$ ,  $n$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir basit bağlantılı graf olsun.  $r \geq 2$ ,  $G$  nin yarıçapını gösterebilirsin. O zaman

$$ABC_3(G) \leq \frac{m\sqrt{2(r-1)}}{r}.$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak  $G$  öz merkezli graf olursa sağlanır. (Lee, 2016)

Bu teorem yardımıyla aşağıdaki sonuca ulaşılır.

**Sonuç 3.1.6**  $n \geq 4$  köşeli bir  $G$  basit bağlantılı grafi verilsin. Aynı zamanda  $G$  nin tamamlayıcısı  $\bar{G}$  de bağlantılı graf olsun. Bu durumda

$$ABC_3(G) + ABC_3(\bar{G}) \leq \frac{n(n-1)}{2\sqrt{2}}.$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart hem  $G$  hem de  $\bar{G}$  graflarının yarıçapı 2 olan birer öz merkezli graf olmasıdır.

**İspat:**  $G$  ve  $\bar{G}$  graflarının kenar sayılarını sırasıyla  $m$  ve  $\bar{m}$  ile gösterelim. Hem  $G$  hem de  $\bar{G}$  bağlantılı graflar olduğundan herbirinin yarıçapı en az 2 dir (Zhou ve Du, 2010). Aynı zamanda  $m + \bar{m} = \frac{n(n-1)}{2}$  olduğu bilinmektedir. Teorem 3.1.5 kullanılarak aşağıdaki bağıntı yazılabilir:

$$\begin{aligned} ABC_3(G) + ABC_3(\bar{G}) &\leq \frac{m\sqrt{2(r-1)}}{r} + \frac{\bar{m}\sqrt{2(\bar{r}-1)}}{\bar{r}} \\ &\leq \frac{m}{\sqrt{2}} + \frac{\bar{m}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{n(n-1)}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Eşitlik durumu için yukarıdaki eşitsizlikler eşit olmalıdır. Bu durumda ;

$$\frac{m\sqrt{2(r-1)}}{r} + \frac{\bar{m}\sqrt{2(\bar{r}-1)}}{\bar{r}} = \frac{m}{\sqrt{2}} + \frac{\bar{m}}{\sqrt{2}}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağlanması için  $r = \bar{r} = 2$  olmalıdır. Teorem 3.1.5 in eşitlik koşulu ile birleştirilirse eşitlik koşulunun sağlandığı görülür.

**Teorem 3.1.7.**  $G$ ,  $n$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir basit bağlantılı graf olsun.  $n_0$ ,  $G$  de eksantrik değeri 1 olan köşelerin sayısını gösterecektir. Bu durumda;

$$ABC_3(G) = \left( m - \binom{n_0}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

dir.

**İspat:** Bir  $G$  grafının eksantrik değeri 1 olan bir köşesi varsa diğer köşelerin eksantrik değerleri 1 veya 2 dir. Bu durumda eksantrik değeri 1 olan köşelerin sayısı  $n_0$  ise eksantrik değeri 2 olan köşelerin sayısı  $n - n_0$  olacaktır. Bu bilgileri kullanarak üçüncü atom bağ bağlantılılık indeksi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
ABC_3(G) &= \sum_{e(u)=e(v)=1}^p \sqrt{\frac{e(u)+e(v)-2}{e(u)e(v)}} + \sum_{\substack{e(u)=1 \\ e(v)=2}}^q \sqrt{\frac{e(u)+e(v)-2}{e(u)e(v)}} + \sum_{\substack{e(u)=2 \\ e(v)=2}}^r \sqrt{\frac{e(u)+e(v)-2}{e(u)e(v)}} \\
&= 0 + (q+r) \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \left( m - \binom{n_0}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Bu da ispatı tamamlar.

**Tanım 3.1.8** Bir grafın birinci ve ikinci Zagreb indeksleri,

$$M_1(G) = \sum_{u \in V(G)} d_G^2(u) \text{ ve } M_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} d_G(u)d_G(v)$$

şeklinde tanımlanır. (Gutman ve Trinajstić, 1972 ve Gutman ve ark., 1975)

**Teorem 3.1.9**  $G$ ,  $n$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir basit bağlantılı graf olsun.  $M_1(G)$  ve  $r$  sırasıyla  $G$  grafının birinci Zagreb indeksini ve yarıçapını gösterebilir. Bu durumda

$$ABC_3(G) \leq \frac{\sqrt{2nm^2 - mM_1(G) - 2m^2}}{\sqrt{2}}$$

dir. (Lee, 2016)

**Teorem 3.1.10**  $G$ ,  $n$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir basit bağlantılı graf olsun.  $M_1(G)$  ve  $r$  sırasıyla  $G$  grafının birinci Zagreb indeksini ve yarıçapını gösterebilir. Bu durumda;

$$ABC_3(G) \leq \frac{\sqrt{m^2(2n-2) - mM_1(G)}}{r}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G = K_n$  veya  $G = C_n$  dir.

**İspat:** Zhou ve Du (Zhou ve Du, 2010)  $u \in V(G)$  için  $e(u) \leq n - d_G(u)$  eşitsizliğini bulmuştur. Eşitlik durumu ancak ve ancak  $k = 0, 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  için  $G = K_n - k e$  veya

$G = P_4$  olduğunda sağlanır. Bu bağıntı yardımıyla her  $uv \in E(G)$  için  $e(u) + e(v) \leq 2n - d_G(u) - d_G(v)$  yazılabilir. Ayrıca her  $u, v \in V(G)$  için  $e(u)e(v) \geq r^2$  olduğu bilinmektedir. Buradan Lemma 3.1.3 kullanılarak aşağıdaki bağıntılara ulaşılır:

$$\begin{aligned} \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\frac{e(u) + e(v) - 2}{e(u)e(v)}} &\leq \sqrt{\sum_{uv \in E(G)} [e(u) + e(v) - 2]} \sqrt{\sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{e(u)e(v)}} \\ &\leq \sqrt{\sum_{uv \in E(G)} [2n - 2 - d_G(u) - d_G(v)]} \sqrt{\sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{r^2}} \\ &= \sqrt{m(2n - 2) - M_1(G)} \frac{\sqrt{m}}{r} \\ &= \frac{\sqrt{m^2(2n - 2) - mM_1(G)}}{r}. \end{aligned}$$

Eşitlik durumunda yukarıdaki tüm eşitsizliklerin eşit olması gerekir.

$\sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{e(u)e(v)} = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{r^2}$  eşitliğinin sağlanması için her  $uv \in E(G)$  için  $e(u) = e(v) = r$

olması gerekir. Aynı zamanda  $\sum_{uv \in E(G)} [e(u) + e(v) - 2] = \sum_{uv \in E(G)} [2n - 2 - d_G(u) - d_G(v)]$

eşitliğinin sağlanması için her  $uv \in E(G)$  için  $e(u) = n - d_G(u)$  ve  $e(v) = n - d_G(v)$

olmalıdır. Bu ise  $k = 0, 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  için  $G = K_n - ke$  veya  $G = P_4$  anlamına gelir. Bu

eşitlik durumlarını bir arada düşündüğümüzde, eşitlik durumu  $G \cong K_n$  veya  $G \cong C_n$  için sağlanır. Karşıt olarak  $G = K_n$  veya  $G = C_n$  alındığında eşitlik durumu açıktır.

**Not 3.1.11** Basit hesaplamalarla  $r > 1$  için Teorem 3.1.10 da elde edilen sınırın Teorem 3.1.9 daki sınırdan daha iyi olduğu görülür.

**Teorem 3.1.12**  $T$ ,  $n$  köşeli bir ağaç olsun. Bu takdirde

$$ABC_3(G) \leq \frac{n-1}{\sqrt{2}}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $T = S_n$  veya  $T$ ,  $K_2$ ' nin uç köşelerine  $n-2$  pendant kenar bağlanarak oluşan bir grafa izomorf olmasıdır.

**İspat:** Eğer burada eksantrik değeri 1'e eşit olan bir  $u \in V(T)$  köşesi varsa,  $T$  bir ağaç olduğundan bu şartı sağlayan tek ağaç, yıldız graftır.  $ABC_3(S_n) = \frac{n-1}{\sqrt{2}}$  olduğundan,

böylece teoremin sağlandığı görülür. Eğer tüm  $uv \in E(T)$  için  $e_u, e_v \neq 1$  ise Lemma

3.1.4 ile kolaylıkla  $\sqrt{\frac{e(u)+e(v)-2}{e(u)e(v)}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  elde edilir. Buradan

$$ABC_3(T) = \sum_{uv \in E(T)} \sqrt{\frac{e(u)+e(v)-2}{e(u)e(v)}} \leq \sum_{uv \in E(T)} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{n-1}{\sqrt{2}}$$

olup bu ise ispatı tamamlar.

Eşitlik durumunda tüm  $uv \in E(T)$  için  $\frac{e(u)+e(v)-2}{e(u)e(v)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  elde edilir. Bu durumda  $T$ ,  $K_2$  nin uç köşelerine  $n-2$  pendant kenar bağlanarak oluşan bir grafa izomorf olacaktır. Karşıt olarak  $T = S_n$  veya  $T$ ,  $K_2$ ' nin uç köşelerine  $n-2$  pendant kenar bağlanarak oluşan bir grafa izomorf ise  $ABC_3(T) = \frac{n-1}{\sqrt{2}}$  olur. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 3.1.13**  $T$ ,  $n \geq 3$  köşeli bir ağaç olsun.  $T$  nin yarıçapı  $r > 1$  olsun. Bu durumda;

a) Eğer  $T$  merkezli ağaç ise,

$$ABC_3(T) > n \sqrt{\frac{2n-5}{(n-1)(n-2)}} - \sqrt{\frac{2r-3}{r(r-1)}}$$

dir.

b) Eğer  $T$  iki merkezli ağaç ise,

$$ABC_3(T) \geq n \sqrt{\frac{2n-5}{(n-1)(n-2)}} + \frac{\sqrt{2(r-1)}}{r} - 2 \sqrt{\frac{2r-3}{r(r-1)}}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G = P_4$  olmasıdır.

**İspat:**

a)  $T$  en az 3 köşeli bir merkezli ağaç olduğundan, her  $uv \in E(T)$  için  $e(v) = e(u) - 1$  yazılabilir. Buradan aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
ABC_3(T) &= \sum_{uv \in E(T)} \sqrt{\frac{e(u)+e(v)-2}{e(u)e(v)}} \\
&= \sum_{u \in V(T)} \sqrt{\frac{2e(u)-3}{e(u)(e(u)-1)}} - \sqrt{\frac{2r-3}{r(r-1)}}.
\end{aligned}$$

Herhangi bir  $u \in V(T)$  için  $e(u) \leq n - d_G(u) \leq n - 1$  olduğu bilinmektedir.  $x > 2$  için

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{x(x-1)}} \text{ fonksiyonu azalan bir fonksiyondur. Bu yüzden } f(e(u)) \geq f(n-1)$$

dir. Bu bilgi yukarıdaki eşitlikte kullanırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
ABC_3(T) &\geq \sum_{u \in V(T)} \sqrt{\frac{2n-5}{(n-1)(n-2)}} - \sqrt{\frac{2r-3}{r(r-1)}} \\
&= n \sqrt{\frac{2n-5}{(n-1)(n-2)}} - \sqrt{\frac{2r-3}{r(r-1)}}.
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanır. Eşitlik durumunun sağlandığını varsayalım. Bu durumda her  $u \in V(T)$  için  $e(u) = n - 1$  olmalıdır. Eşitlik durumunun sağlanması için  $k = 0, 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  için  $G = K_n - ke$  veya  $G = P_4$  olacağından ve  $T$  nin hipotez gereği merkezli ağaç olmasından bu koşulu sağlayan bir ağaç yoktur. Bu bir çelişkidir.

b)  $T$  en az 3 köşeli bir iki merkezli ağaç olduğundan (a) dakine benzer şekilde aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{aligned}
ABC_3(T) &= \sum_{uv \in E(T)} \sqrt{\frac{e(u)+e(v)-2}{e(u)e(v)}} \\
&= \sum_{u \in V(T)} \sqrt{\frac{2e(u)-3}{e(u)(e(u)-1)}} + \frac{\sqrt{2(r-1)}}{r} - 2 \sqrt{\frac{2r-3}{r(r-1)}}.
\end{aligned}$$

Buradan (a) dakine benzer metotla aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
ABC_3(G) &\geq \sum_{u \in V(T)} \sqrt{\frac{2n-5}{(n-1)(n-2)}} + \frac{\sqrt{2(r-1)}}{r} - 2 \sqrt{\frac{2r-3}{r(r-1)}} \\
&= n \sqrt{\frac{2n-5}{(n-1)(n-2)}} + \frac{\sqrt{2(r-1)}}{r} - 2 \sqrt{\frac{2r-3}{r(r-1)}}.
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanır. Varsayalım eşitlik durumu sağlansın. Bu durumda her  $u \in V(T)$  için  $e(u) = n - 1$  olmalıdır. Eşitlik durumunun sağlanması için

$k = 0, 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  için  $G = K_n - ke$  veya  $G = P_4$  olması gerekir.  $T$  iki merkezli ağaç olduğundan dolayı bu şartları sağlayan tek graf  $P_4$  dır. Tersine  $G = P_4$  alınırsa eşitliğin sağlandığı basit hesaplamalarla görülür.

**Tanım 3.1.14** Bir grafın Zagreb eksantrik indeksleri,

$$M_1^*(G) = \sum_{uv \in E(G)} e(u) + e(v), \quad M_1^{**}(G) = \sum_{u \in V(G)} (e(u))^2 \quad \text{ve} \quad M_2^*(G) = \sum_{uv \in E(G)} e(u)e(v)$$

ile tanımlanır. (Ghorbani ve Hosseinzadeh, 2012 ve Vukicevic ve Graovac, 2010)

**Teorem 3.1.15**  $G$ ,  $n$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir basit bağlantılı graf olsun.  $r > 1$  ve  $M_2^*(G)$ , sırasıyla  $G$  grafının yarıçapını ve ikinci Zagreb eksantrik indeksini gösterebilir.

Bu durumda

$$ABC_3(G) \geq m^{3/2} \sqrt{\frac{2(r-1)}{M_2^*(G)}}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G$  nin öz merkezli graf olmasıdır.

**İspat:** Lemma 3.1.2 kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\frac{e(u) + e(v) - 2}{e(u)e(v)}} \geq \frac{m^2}{\sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\frac{e(u)e(v)}{e(u) + e(v) - 2}}}$$

Ayrıca Lemma 3.1.3 yardımıyla,

$$\begin{aligned} \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\frac{e(u)e(v)}{e(u) + e(v) - 2}} &\leq \sqrt{\sum_{uv \in E(G)} e(u)e(v)} \sqrt{\sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{e(u) + e(v) - 2}} \\ &\leq \sqrt{M_2^*(G)} \sqrt{\frac{m}{2r-2}} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu iki eşitsizlik kullanılarak teoremin doğruluğu görülür. Eşitlik durumunda yukarıdaki eşitsizliklerin herbiri eşitlik olarak sağlanacaktır. Bu durumda her  $uv \in E(G)$  için  $e(u) + e(v) - 2 = 2r - 2$  sağlanır. Bu ise her  $uv \in E(G)$  için  $e(u) = e(v) = r$  olduğunda gerçekleşir. Bu ise  $G$  nin öz merkezli graf olduğu anlamına gelir.

**Lemma 3.1.16**  $0 < m_1 \leq a_i \leq M_1$  ve  $0 < m_2 \leq b_i \leq M_2$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) olacak şekilde iki pozitif  $a$  ve  $b$  dizisi verilsin. Bu durumda,

$$\left( \sum_{uv \in E(G)} a_k^2 \right) \left( \sum_{uv \in E(G)} b_k^2 \right) - \left( \sum_{uv \in E(G)} a_k b_k \right)^2 \leq \frac{n^2}{4} (M_1 M_2 - m_1 m_2)^2$$

eşitsizliği sağlanır. (Ozeki, 1968)

Lemma 3.1.16 kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir.

**Teorem 3.1.17**  $G$ ,  $n$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir basit bağlantılı graf olsun.  $r$  ve  $D$  sırasıyla  $G$  nin yarıçapını ve çapını göstere. Aynı zamanda  $M_1^*(G)$  ve  $M_2^*(G)$   $G$  nin Zagreb eksantrik indekslerini göstere. O zaman,

$$ABC_3(G) \geq \frac{m}{2rD} \sqrt{\frac{4r^2 D^2 (M_1^*(G) - 2m) - 2M_2^*(G) (D\sqrt{D-1} - r\sqrt{r-1})^2}{M_2^*(G)}}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G$  nin öz merkezli graf olmasıdır.

**İspat:** Her  $u \in V(G)$  için  $r \leq e(u) \leq D$  olduğundan, her  $uv \in E(G)$  için

$$\sqrt{2r-2} \leq \sqrt{e(u)+e(v)-2} \leq \sqrt{2D-2} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{D} \leq \sqrt{\frac{1}{e(u)e(v)}} \leq \frac{1}{r} \quad \text{'dir. Buradan Lemma}$$

3.1.17 yardımıyla aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\left( \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\frac{e(u)+e(v)-2}{e(u)e(v)}} \right)^2 \geq \sum_{uv \in E(G)} (e(u)+e(v)-2) \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{e(u)e(v)} - \frac{m^2}{4} \left( \frac{\sqrt{2D-2}}{r} - \frac{\sqrt{2r-2}}{D} \right)^2.$$

Aritmetik-Harmonik ortalama eşitsizliğinden  $\sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{e(u)e(v)} \geq \frac{m^2}{\sum_{uv \in E(G)} e(u)e(v)}$  olduğu

bilinmektedir. Bu yüzden,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\frac{e(u)+e(v)-2}{e(u)e(v)}} \right)^2 &\geq \sum_{uv \in E(G)} (e(u)+e(v)-2) \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{e(u)e(v)} - \frac{m^2}{4} \left( \frac{\sqrt{2D-2}}{r} - \frac{\sqrt{2r-2}}{D} \right)^2 \\ &\geq \sum_{uv \in E(G)} (e(u)+e(v)-2) \frac{m^2}{\sum_{uv \in E(G)} e(u)e(v)} - \frac{m^2}{4} \left( \frac{\sqrt{2D-2}}{r} - \frac{\sqrt{2r-2}}{D} \right)^2 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Yukarıdaki eşitsizlikleri ve Zagreb eksantrik indekslerin tanımlarını kullanarak aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\begin{aligned} \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\frac{e(u)+e(v)-2}{e(u)e(v)}} &\geq \sqrt{(M_1^*(G)-2m) \frac{m^2}{M_2^*(G)} - \frac{m^2}{4} \left( \frac{\sqrt{2D-2}}{r} - \frac{\sqrt{2r-2}}{D} \right)^2} \\ &= \frac{m}{2rD} \sqrt{\frac{4r^2D^2(M_1^*(G)-2m) - 2M_2^*(G)(D\sqrt{D-1} - r\sqrt{r-1})^2}{M_2^*(G)}}. \end{aligned}$$

Eşitlik durumunda yukarıdaki tüm eşitsizlikler eşitlik olarak sağlanacaktır. Bu ise  $G$  nin öz merkezli graf olması ile sağlanır.

### 3.2. Dördüncü Geometrik Aritmetik İndeksi

Bu bölümde Dördüncü Geometrik-Aritmetik indeksi için sınır değerleri verilecektir.

**Tanım 3.2.1** Bir  $G$  grafının dördüncü geometrik aritmetik indeksi

$$GA_4(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{2\sqrt{e(u)e(v)}}{e(u)+e(v)}$$

ile tanımlanır. Burada  $e(u)$ ,  $u$  köşesinin eksantrik değeridir. (Ghorbani ve Khaki, 2010)

**Teorem 3.2.2**  $G$ ,  $m$  kenarlı bir graf olsun. O zaman,

$$GA_4(G) \geq \frac{2m\sqrt{2}}{3}$$

dür. Eşitlik ancak ve ancak  $G \cong S_n$  ise sağlanır. Burada  $S_n$ ,  $n+1$  köşeli yıldız graftır. (Mogharrab ve Moghaddam, 2012)

**Teorem 3.2.3**  $G$ ,  $n$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir basit bağlantılı graf olsun.  $r$  ve  $D$  sırasıyla  $G$  nin yarıçapını ve çapını göstereyin. Bu durumda

$$GA_4(G) \geq \frac{2m\sqrt{Dr}}{D+r}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G$  öz merkezli graf veya  $G \cong S_n$  olmasıdır.

**İspat:** Her  $u, v \in V(G)$  için  $\frac{r}{D} \leq \frac{e(u)}{e(v)} \leq \frac{D}{r}$  olduğu bilinmektedir. Bu bilgi yardımıyla

basit elemanter işlemlerle aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır.

$$\begin{aligned} \left( \frac{e(u)+e(v)}{\sqrt{e(u)e(v)}} \right)^2 &= \left( \sqrt{\frac{e(u)}{e(v)}} + \sqrt{\frac{e(v)}{e(u)}} \right)^2 \\ &= \left( \sqrt{\frac{e(u)}{e(v)}} - \sqrt{\frac{e(v)}{e(u)}} \right)^2 + 4 \\ &\leq \left( \sqrt{\frac{D}{r}} - \sqrt{\frac{r}{D}} \right)^2 + 4 \\ &= \left( \sqrt{\frac{D}{r}} + \sqrt{\frac{r}{D}} \right)^2. \end{aligned}$$

Buradan  $\frac{e(u)+e(v)}{2\sqrt{e(u)e(v)}} \leq \frac{D+r}{2\sqrt{Dr}}$  elde edilir. Eşitsizliğin her iki yanının çarpmaya göre

tersi alınırsa  $\frac{2\sqrt{e(u)e(v)}}{e(u)+e(v)} \geq \frac{2\sqrt{Dr}}{D+r}$  sonucuna ulaşılır. Şimdi bu son eşitsizliğin her iki

yanının tüm  $uv \in E(G)$  için toplamı alınırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\begin{aligned} GA_4(G) &= \sum_{uv \in E(G)} \frac{2\sqrt{e(u)e(v)}}{e(u)+e(v)} \geq \sum_{uv \in E(G)} \frac{2\sqrt{Dr}}{D+r} \\ &= \frac{2m\sqrt{Dr}}{D+r}. \end{aligned}$$

Varsayalım eşitlik koşulu sağlansın. Bu durumda tüm eşitsizlikler eşitlik olmalıdır. Bu

da kolayca görüleceği üzere tüm  $uv \in E(G)$  için  $\frac{e(u)}{e(v)} = \frac{D}{r}$  olması ile mümkündür. Yani

$G$  öz merkezli graf veya  $G$  yıldız graf ise sağlanır. Tersine  $G$  öz merkezli graf veya

yıldız graf ise  $GA_4(G) = \frac{2m\sqrt{Dr}}{D+r}$  eşitliği açıktır. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 3.2.4** Herhangi bir  $G$  grafi için,

$$r(G) \leq D(G) \leq 2r(G)$$

eşitsizliği sağlanır. (Ostrant, 1973)

**Not 3.2.5** Teorem 3.2.4 den  $G$  grafi için  $r \leq D \leq 2r$  olduğundan,  $1 \leq \frac{D}{r} \leq 2$  elde edilir.

Şimdi  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$  fonksiyonunu gözönüne alalım.  $f(x)$  fonksiyonu  $x > 1$  için

artan fonksiyon olduğundan  $f\left(\frac{D}{r}\right) < f(2)$  dir. Yani  $\frac{D+r}{\sqrt{rD}} < \frac{3}{\sqrt{2}}$  dir. Buradan

$\frac{\sqrt{rD}}{D+r} > \frac{\sqrt{2}}{3}$  elde edilir. Buradan Teorem 3.2.3 deki sınırın Teorem 3.2.2 deki sınırdan

daha iyi olduğu açıktır.

**Lemma 3.2.6**  $1 \leq j \leq k$  için  $0 < n_1 \leq a_j \leq N_1$  ve  $0 < n_2 \leq b_j \leq N_2$  olarak verilsin. Bu durumda,

$$\left(\sum_{j=1}^k a_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^k b_j^2\right)^{1/2} \leq \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{N_1 N_2}{n_1 n_2}} + \sqrt{\frac{n_1 n_2}{N_1 N_2}} \right) \left(\sum_{j=1}^k a_j b_j\right)$$

dir. (Hardy ve ark., 1934)

**Teorem 3.2.7**  $G$ ,  $m$  kenarlı basit bağlantılı graf olsun. Bu durumda

$$GA_4(G) \geq \frac{2\sqrt{2m\sqrt{Dr}}(D+r)M_2^*(G)}{D(\sqrt{D} + \sqrt{r})^2}.$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G$  nin öz merkezli graf olmasıdır.

**İspat:** Teorem 3.2.3 den her  $uv \in E(G)$  için  $\frac{2\sqrt{Dr}}{D+r} \leq \frac{\sqrt{e(u)e(v)}}{\frac{1}{2}(e(u)+e(v))} \leq 1$  dir.

Lemma 3.2.6 ve yukarıdaki eşitsizliği kullanarak aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz.

$$\begin{aligned} GA_4(G) &= \sum_{uv \in E(G)} \frac{\sqrt{e(u)e(v)}}{\frac{1}{2}(e(u)+e(v))} \\ &\geq \frac{\left(\sum_{uv \in E(G)} \frac{4e(u)e(v)}{(e(u)+e(v))^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{uv \in E(G)} 1\right)^{1/2}}{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{D+r}{2\sqrt{Dr}}} + \sqrt{\frac{2\sqrt{Dr}}{D+r}} \right)}. \end{aligned}$$

Bu son eşitsizlikte her  $uv \in E(G)$  için  $e(u) + e(v) \leq 2D$  eşitsizliği ve ikinci Zagreb eksantrik indeksin tanımı kullanılarak istenen elde edilir. Eşitlik durumunda, yukarıdaki eşitsizlikler eşitlik olarak sağlanır. Yani her  $uv \in E(G)$  için  $e_u + e_v = 2D$  dir. Bu ise  $G$  nin öz merkezli graf olması anlamına gelir.

**Teorem 3.2.8**  $G$ ,  $m$  kenarlı basit bağlantılı graf olsun. Bu durumda;

$$GA_4(G) \leq \frac{M_2^*(G)}{r^2}.$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G$  nin öz merkezli graf olmasıdır.

**İspat:** Dördüncü geometrik- aritmetik indeksin tanımından;

$$\begin{aligned} GA_4(G) &= \sum_{uv \in E(G)} \frac{2\sqrt{e(u)e(v)}}{e(u) + e(v)} = \sum_{uv \in E(G)} \frac{\sqrt{e(u)e(v)}}{\frac{1}{2}(e(u) + e(v))} \\ &= \sum_{uv \in E(G)} \frac{e(u)e(v)}{\frac{1}{2}(e(u) + e(v))\sqrt{e(u)e(v)}} \\ &\leq \sum_{uv \in E(G)} \frac{e(u)e(v)}{r^2} \\ &= \frac{M_2^*(G)}{r^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da istenendir. Varsayalım eşitlik sağlansın. Bu durumda her  $uv \in E(G)$  için  $e(u) + e(v) = 2r$  ve  $e(u)e(v) = r^2$  sağlanır. Yani  $G$  öz merkezli grafdır.

**Teorem 3.2.9**  $G$ ,  $m$  kenarlı basit bağlantılı graf olsun.  $r_1$ ,  $G$  grafının yarıçapa eşit olmayan en küçük eksantrik değerini göstere.  $p$ ,  $G$  grafının uç köşelerinden en az birinin eksantrik değeri yarıçapa eşit olan kenarlarının sayısını göstere. Bu taktirde  $k = m - p$  olmak üzere

$$GA_4(G) \geq \frac{2p\sqrt{Dr}}{D+r} + \sqrt{k^2 - \frac{k}{4r_1^2} \left( \sum_{i=1}^n d_G(i)e^2(i) - 2M_2^*(G) - p(r_1 - r)^2 \right) - \frac{k^2}{4} \left( 1 - \frac{2\sqrt{Dr}}{D+r} \right)^2}$$

dir.

**İspat:** Öncelikle  $r_1 \leq e(i), e(j) \leq D$  için  $\frac{2\sqrt{Dr_1}}{D+r_1} \leq \frac{2\sqrt{e(i)e(j)}}{e(i) + e(j)} \leq 1$  dir. Aynı zamanda,

kolaylıkla aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\frac{2\sqrt{e(i)e(j)}}{e(i)+e(j)} = \sqrt{1 - \left(\frac{e(i)-e(j)}{e(i)+e(j)}\right)^2}.$$

Ozeki eşitsizliğinden,

$$\left[ \sum_{e_i, e_j \neq r} \frac{2\sqrt{e(i)e(j)}}{e(i)+e(j)} \right]^2 \geq k \sum_{e_i, e_j \neq r} \left[ 1 - \left(\frac{e(i)-e(j)}{e(i)+e(j)}\right)^2 \right] - \frac{k^2}{4} \left[ 1 - \frac{2\sqrt{Dr_1}}{D+r_1} \right]^2 \quad (1)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \sum_{e(i), e(j) \neq r} \left[ 1 - \left(\frac{e(i)-e(j)}{e(i)+e(j)}\right)^2 \right] &\geq k - \frac{1}{4r_1^2} \sum_{e_i, e_j \neq r} (e(i)-e(j))^2 \\ &= k - \frac{1}{4r_1^2} \left[ \sum_{i=1}^n d_G(i)e^2(i) - 2M_2^*(G) - p(r_1-r)^2 \right] \end{aligned} \quad (2)$$

sonucuna ulaşılır. Daha sonra (1) ve (2) eşitsizlikleri kullanılarak aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$\sum_{e(i), e(j) \neq r} \frac{2\sqrt{e(i)e(j)}}{e(i)+e(j)} \geq \sqrt{k^2 - \frac{k}{4r_1^2} \left[ \sum_{i=1}^n d_G(i)e^2(i) - 2M_2^*(G) - p(r_1-r)^2 \right] - \frac{k^2}{4} \left[ 1 - \frac{2\sqrt{Dr_1}}{D+r_1} \right]^2}.$$

Bu son eşitsizlikten aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\begin{aligned} GA_4(G) &= \sum_{\substack{ij \in E(G) \\ e(j)=r}} \frac{2\sqrt{e(i)r}}{e(i)+r} + \sum_{\substack{ij \in E(G) \\ e(i), e(j) \neq r}} \frac{2\sqrt{e(i)e(j)}}{e(i)+e(j)} \\ &\geq \frac{2p\sqrt{Dr}}{D+r} + \sqrt{k^2 - \frac{k}{4r_1^2} \left[ \sum_{i=1}^n d_G(i)e^2(i) - 2M_2^*(G) - p(r_1-r)^2 \right] - \frac{k^2}{4} \left[ 1 - \frac{2\sqrt{Dr_1}}{D+r_1} \right]^2}. \end{aligned}$$

**Teorem 3.2.10**  $G$ ,  $m$  kenarlı basit bağlantılı graf olsun.  $r_1$ ,  $G$  nin uç köşelerinden en az birinin eksantrik değeri,  $G$  grafının yarıçapa eşit olmayan en küçük eksantrik değerini gösterebilir.  $p$ ,  $G$  grafının uç köşelerinden en az birinin eksantrik değeri, yarıçapa eşit olan kenarlarının sayısını gösterebilir. Bu takdirde  $k = m - p$  olmak üzere

$$GA_4(G) \leq \frac{2p\sqrt{Dr}}{D+r} + \sqrt{k^2 - \frac{k}{4D^2} \left( \sum_{i=1}^n d_G(i)e^2(i) - 2M_2^*(G) - p(D-r)^2 \right)}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G$  nin öz merkezli graf olmasıdır.

**İspat:**  $f(x) = \frac{2\sqrt{xr}}{x+r}$  fonksiyonunu göz önüne alalım.  $\frac{df(x)}{dx} = \frac{r-xr}{(x+r)^2}$  olduğundan

$f(x)$  fonksiyonu  $x > 1$  için azalan fonksiyondur. Buradan  $\forall ij \in E(G)$  için

$\frac{2\sqrt{e(i)r}}{e(i)+r} \leq \frac{2\sqrt{r_1r}}{r_1+r}$  elde edilir. Daha sonra Teorem 3.1.3 kullanılarak,

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{\substack{ij \in E(G) \\ e_i, e_j \neq r}} \sqrt{1 - \left( \frac{e(i) - e(j)}{e(i) + e(j)} \right)^2} \right]^2 &\leq k \sum_{e_i, e_j \neq r} \left[ 1 - \left( \frac{e(i) - e(j)}{e(i) + e(j)} \right)^2 \right] \\ &\leq k \sum_{e_i, e_j \neq r} \left[ 1 - \left( \frac{e(i) - e(j)}{2D} \right)^2 \right] \\ &\leq k \left[ k - \frac{1}{4D^2} \left( \sum_{i=1}^n d_G(i) e^2(i) - 2M_2^*(G) - p(D-r)^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

elde edilir. Dördüncü geometrik aritmetik indeksi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$GA_4(G) = \sum_{\substack{ij \in E(G) \\ e(j) \neq r}} \frac{2\sqrt{e(i)r}}{e(i)+r} + \sum_{e_i, e_j \neq r} \frac{2\sqrt{e(i)e(j)}}{e(i)+e(j)}.$$

Yukarıdaki bilgiler ve (3) eşitsizliği kullanılarak istenilen sonuca ulaşılır.

$k = 0$  için Teorem 3.2.9 ve Teorem 3.2.10 dikkate alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 3.2.11**  $G$ ,  $m$  kenarlı ve tüm kenarlarının uç köşelerinden en az birinin eksantrik değeri yarıçapa eşit olacak şekilde basit bağlantılı graf olsun. Bu durumda;

$$GA_4(G) = \frac{2p\sqrt{Dr}}{D+r}$$

dir.

**Teorem 3.2.12**  $G$ ,  $m$  kenarlı basit bağlantılı graf olsun. Buradan

$$\frac{2rM_1^*(G)}{(D+r)^2} \leq GA_4(G) \leq \sqrt{\frac{M_1^*(G)m}{2r}}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G$  nin öz merkezli graf olmasıdır.

**İspat:** Teorem 3.2.3 den,  $\forall uv \in E(G)$  için  $\frac{2\sqrt{Dr}}{D+r} \leq \frac{2\sqrt{e(u)e(v)}}{e(u)+e(v)} \leq 1$  yazılır. Bu

eşitsizlik yardımıyla  $1 \leq \frac{(e(u)+e(v))^2}{4e(u)e(v)} \leq \frac{(D+r)^2}{4Dr}$  elde edilir. Böylece

$$\frac{e(u)+e(v)}{2\sqrt{e(u)e(v)}} = \frac{(e(u)+e(v))^2}{4e(u)e(v)} \frac{2\sqrt{e(u)e(v)}}{e(u)+e(v)} \leq \frac{(D+r)^2}{4Dr} \frac{2\sqrt{e(u)e(v)}}{e(u)+e(v)}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik kullanılarak

$$\frac{M_1^*(G)}{2D} = \sum_{uv \in E(G)} \frac{e(u)+e(v)}{2D} \leq \sum_{uv \in E(G)} \frac{e(u)+e(v)}{2\sqrt{e(u)e(v)}} \leq \sum_{uv \in E(G)} \left[ \frac{(D+r)^2}{4Dr} \frac{2\sqrt{e(u)e(v)}}{e(u)+e(v)} \right]$$

yazılır. Buradan

$$GA_4(G) \geq \frac{2rM_1^*(G)}{(D+r)^2}$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi teoremin ikinci kısmını ispatlayalım.

$\forall uv \in E(G)$  için  $\frac{1}{e(u)+e(v)} \leq \frac{1}{2r}$  olduğu kolaylıkla görülür. Bu eşitsizlik ve Teorem

3.1.3 eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} GA_4(G) &= \sum_{uv \in E(G)} \frac{2\sqrt{e(u)e(v)}}{e(u)+e(v)} \\ &\leq \sum_{uv \in E(G)} \frac{\sqrt{e(u)+e(v)}}{\sqrt{e(u)+e(v)}} \\ &\leq \left( \sum_{uv \in E(G)} e(u)+e(v) \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{e(u)+e(v)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{\frac{M_1^*(G)m}{2r}}. \end{aligned}$$

**Teorem 3.2.13**  $G$ ,  $m$  kenarlı basit bağlantılı graf olsun. Bu durumda

$$\frac{\sqrt{(D+r)^2 M_2^*(G) + 4D^3 rm(m-1)}}{D(D+r)} \leq GA_4(G) \leq \frac{\sqrt{M_2^*(G) + m(m-1)r^2}}{r}.$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G$  grafının, sol taraf için öz merkezli graf sağ taraf için ise  $G \cong K_n$  olmasıdır.

**İspat:** Teorem 3.2.3 den,  $\forall uv \in E(G)$  için  $\frac{2\sqrt{e(u)e(v)}}{e(u)+e(v)} \geq \frac{2\sqrt{Dr}}{D+r}$  olduğu bilinmektedir.

Bu eşitsizlik ve Dördüncü geometrik aritmetik indeksin tanımından

$$\begin{aligned} GA_4^2(G) &= \left[ \sum_{uv \in E(G)} \frac{2\sqrt{e(u)e(v)}}{e(u)+e(v)} \right]^2 \\ &= \sum_{uv \in E(G)} \frac{4e(u)e(v)}{(e(u)+e(v))^2} + 2 \sum_{uv \neq xy \in E(G)} \left( \frac{2\sqrt{e(u)e(v)}}{e(u)+e(v)} \right) \left( \frac{2\sqrt{e(x)e(y)}}{e(x)+e(y)} \right) \\ &\geq \frac{1}{D^2} \sum_{uv \in E(G)} e(u)e(v) + \sum_{uv \neq xy \in E(G)} \frac{8Dr}{(D+r)^2} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$GA_4(G) \geq \frac{\sqrt{(D+r)^2 M_2^*(G) + 4D^3 r m(m-1)}}{D(D+r)}$$

sonucu bulunur.

Şimdi teoremin ikinci kısmını ispatlayalım. Yukarıda uygulanan yöntem yardımıyla

$$GA_4^2(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{4e(u)e(v)}{(e(u)+e(v))^2} + 2 \sum_{uv \neq xy \in E(G)} \left( \frac{2\sqrt{e(u)e(v)}}{e(u)+e(v)} \right) \left( \frac{2\sqrt{e(x)e(y)}}{e(x)+e(y)} \right)$$

yazılır.  $\forall uv \in E(G)$  için  $\frac{2\sqrt{e(u)e(v)}}{e(u)+e(v)} \leq 1$  olduğundan

$$\begin{aligned} GA_4^2(G) &\leq \frac{1}{r^2} \sum_{uv \in E(G)} e(u)e(v) + 2 \sum_{uv \neq xy \in E(G)} 1 \\ &= \frac{M_2^*(G) + m(m-1)r^2}{r^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da istenen sonuçtur.

**Tanım 3.2.14** Bir grafın bağlantılı eksantrik indeksi,

$$\xi^{ce}(G) = \sum_{u \in V(G)} \frac{d_G(u)}{e(u)}$$

ile tanımlanır. Burada  $d_G(u)$  ve  $e(u)$  sırasıyla; bir  $u$  köşesinin derecesi ve eksantrik değeridir. (Gupta ve ark., 2000)

Sıradaki teoremden Dördüncü geometrik aritmetik indeksin, Zagreb eksantrik ve bağlantılı eksantrik indekslerine bağlı sınır değeri verilmiştir.

**Teorem 3.2.15**  $G$   $m$  kenarlı basit bağlantılı graf olsun. Bu durumda

$$GA_4(G) \leq \frac{\sqrt{M_1^*(G)\xi^{ce}(G)}}{2}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G$  nin öz merkezli graf olmasıdır.

**İspat:** Genel olarak bilindiği üzere  $\forall uv \in E(G)$  için  $(e(u)+e(v))^2 \geq 4e(u)e(v)$  dir.

Buradan  $\frac{4}{e(u)+e(v)} \leq \frac{1}{e(u)} + \frac{1}{e(v)}$  elde edilir. Bu bilgi kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik

elde edilir.

$$\begin{aligned} \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{e(u)+e(v)} &\leq \frac{1}{4} \sum_{uv \in E(G)} \left( \frac{1}{e(u)} + \frac{1}{e(v)} \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{uv \in E(G)} \frac{d_G(u)}{e(u)} \\ &= \frac{\xi^{ce}(G)}{4}. \end{aligned} \quad (4)$$

Dördüncü geometrik aritmetik indeksin tanımı, Cauchy Schwarz eşitsizliği ve (4) kullanılarak

$$\begin{aligned} GA_4(G) &\leq \sum_{uv \in E(G)} \frac{\sqrt{e(u)+e(v)}}{\sqrt{e(u)+e(v)}} \\ &\leq \left( \sum_{uv \in E(G)} e(u)+e(v) \right)^{1/2} \left( \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{e(u)+e(v)} \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\sqrt{M_1^*(G)\xi^{ce}(G)}}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Teoremdeki eşitsizliğin eşitlik olduğunu kabul edelim. Bu durumda yukarıdaki eşitsizliklerin tümü eşitlik olarak sağlanır. Yani  $\forall uv \in E(G)$  için  $(e(u)+e(v))^2 = 4e(u)e(v)$  olur. Bu ise  $\forall uv \in E(G)$  için  $e(u)=e(v)$  anlamına gelir. Buradan  $G$  nin öz merkezli graf olduğu sonucuna ulaşılır. Karşıt olarak  $G$  öz merkezli graf olduğunda teoremin eşitlik olarak sağlandığı görülür.

**Teorem 3.2.16**  $G$   $m$  kenarlı basit bağlantılı graf olsun. Bu taktirde

$$GA_4(G) \leq \sqrt{\frac{M_2^*(G)\xi^{ce}(G)}{2r}}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G$  nin öz merkezli graf olmasıdır.

**İspat:** Dördüncü geometrik aritmetik indeksin tanımı ve Cauchy Schwarz eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} GA_4(G) &= \sum_{uv \in E(G)} \left( \frac{2\sqrt{e(u)e(v)}}{\sqrt{e(u)+e(v)}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{e(u)+e(v)}} \right) \\ &\leq \left( \sum_{uv \in E(G)} \frac{4e(u)e(v)}{e(u)+e(v)} \right)^{1/2} \left( \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{e(u)+e(v)} \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \sum_{uv \in E(G)} \frac{4e(u)e(v)}{2r} \right)^{1/2} \left( \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{e(u)+e(v)} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

elde edilir. İkinci Zagreb eksantrik indeksin tanımı ve (4) eşitsizliği kullanılarak sonuca ulaşılır.

Şimdi teoremin eşitlik durumunu düşünelim. Bu durumda  $\forall uv \in E(G)$  için  $\frac{4e(u)e(v)}{e(u)+e(v)} = \frac{4e(u)e(v)}{2r}$  olmalıdır. Bu ise  $e(u) = e(v) = r$  eşitliği ile mümkündür. Yani  $G$  öz merkezli graftır. Karşıt olarak  $G$  grafi öz merkezli graf ise teoremin eşitlik olarak sağlandığı görülür. İspat tamamlanır.

**Teorem 3.2.17**  $G$   $m$  kenarlı basit bağlantılı graf olsun. Bu taktirde

$$\frac{2Dr^2 \sqrt{mM_{2^-}^*(G)}}{D^2 + r^2} \leq GA_4(G) \leq D \sqrt{mM_{2^-}^*(G)}$$

dir. Burada  $M_{2^-}^*(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{e(u)e(v)}$  dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G$  nin öz merkezli graf olmasıdır.

**İspat:**  $\forall uv \in E(G)$  için  $r \leq \frac{2e(u)e(v)}{e(u)+e(v)} \leq D$  ve  $\frac{1}{D} \leq \frac{1}{\sqrt{e(u)e(v)}} \leq \frac{1}{r}$  olduğu

bilinmektedir. Lemma 3.2.6 dan

$$\begin{aligned} GA_4(G) &\geq \frac{\left( \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{e(u)e(v)} \right)^{1/2} \left( \sum_{uv \in E(G)} \left( \frac{2e(u)e(v)}{e(u)+e(v)} \right)^2 \right)^{1/2}}{\frac{1}{2} \left( \frac{D}{r} + \frac{r}{D} \right)} \\ &\geq \frac{2Dr}{D^2 + r^2} \sqrt{M_{2^-}^*(G)} \left( \sum_{uv \in E(G)} r^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2Dr^2 \sqrt{mM_{2^-}^*(G)}}{D^2 + r^2}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafı ise Lemma 3.1.3 kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} GA_4(G) &\leq \left( \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{e(u)e(v)} \right)^{1/2} \left( \sum_{uv \in E(G)} \left( \frac{2e(u)e(v)}{e(u) + e(v)} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{M_{2^-}^*(G)} \left( \sum_{uv \in E(G)} D^2 \right)^{1/2} \\ &= D \sqrt{mM_{2^-}^*(G)}. \end{aligned}$$

### 3.3. Tek devirli Grafların Eksantrik Bağlantılılık İndeksi

Bu bölümde mükemmel eşleşmeli tek devirli grafların eksantrik bağlantılılık indeksi için sınır değerleri elde edilecektir.

**Tanım 3.3.1** Bir  $G$  grafinin eksantrik bağlantılılık indeksi,

$$\xi^c(G) = \sum_{u \in V(G)} d_G(u)e(u)$$

ile tanımlanır. (Sharma ve ark., 1997)

Bu bölüm süresince,  $U(n, m)$   $n$  köşe ve  $m$  eşleşme sayısına sahip olan tek devirli grafların kümesini gösterecektir. Öncelikle bazı lemmalar verelim.

**Lemma 3.3.2**  $G \in U(2m, m)$  ve  $m \geq 3$  olsun.  $T, G'$  nin  $r$  köklü bir dalı olmak üzere, eğer  $u \in V(T)$ ,  $d_G(u, r) \geq 2$  olacak şekilde  $r$  kökünden en uzaktaki pendant köşe ise  $u$  derecesi 2 olan bir  $v$  köşesine komşudur. (Chang ve Tian, 2003)

**Lemma 3.3.3**  $G \in U(2m, m)$  olsun. Eğer pendant köşeler kümesi  $PV \neq \emptyset$  ise herhangi bir  $u \in V(G)$  köşesi için  $|N(u) \cap PV| \leq 1$  dir. (Pan ve ark., 2005)

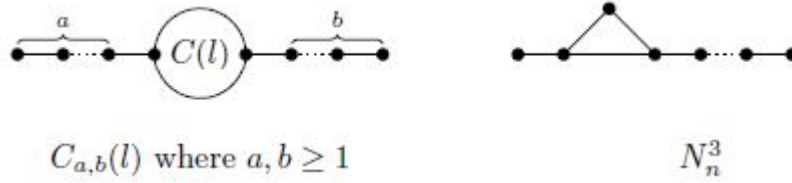
**Lemma 3.3.4**  $G \in U(n, m)$  ve  $G \not\cong C'_n$  ( $n > 2m$ ) olsun. O zaman  $v \notin M$  için bir  $M$   $m$ -eşleşme ve bir  $v$  pendant köşe vardır. (Yu ve Tian, 2004)

**Teorem 3.3.5**  $G$  trivial olmayan bağlantılı grafın bir köşesi  $w$  olsun.  $p$  ve  $q$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $G(p, q)$ , sırasıyla  $p$  ve  $q$  uzunluğundaki  $P = wv_1v_2\dots v_p$  ve  $Q = wu_1u_2\dots u_q$  pendant yollarının  $w$  köşesine bağlanmasıyla  $G$  grafından elde edilen grafi gösterebilir. Eğer  $p \geq q \geq 1$  ise,

$$\xi^c(G(p, q)) = \xi^c(G(p+1, q-1))$$

dir. (Ilic ve Gutman, 2011)

$P_n^3$ ,  $P_{n-2}$  yolunun bir pendant köşesi ile  $C_3$  ün bir köşesi birleştirilerek elde edilen tek devirli grafi gösterebilir.  $C_{a,b}(l)$ ,  $C(l)$  devirinin bir köşesine  $P_a$  yolu ve diğer bir köşesine  $P_b$  yolu bağlanarak elde edilen grafi gösterebilir.  $C_{a,b}(l)$  ve  $N_n^3$  grafları aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.



Şekil 3.1  $C_{a,b}(l)$  ve  $N_n^3$  grafları

**Lemma 3.3.6**  $G \in U_n$ ,  $n \geq 5$  köşeli bir graf olsun. Eğer  $G \in C_{a,b}(l)$  ve  $G \not\cong N_n^3$  ise,

$$\xi^c(P_n^3) > \xi^c(N_n^3) > \xi^c(G)$$

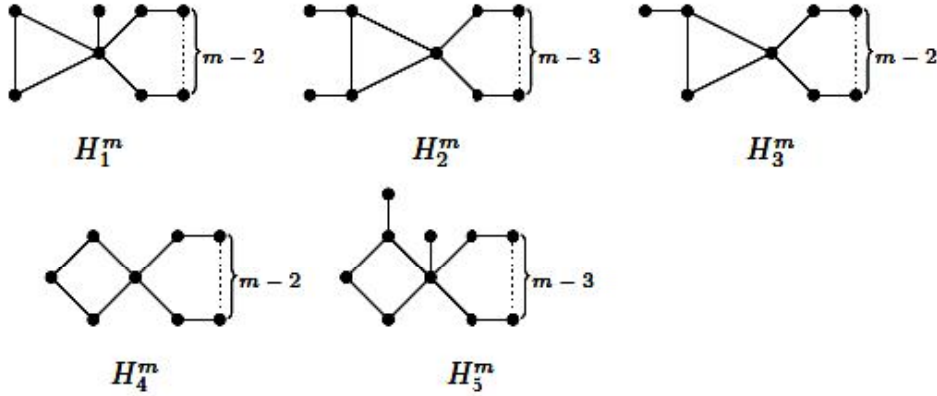
dir. (Zhang ve Hua, 2010)

**Teorem 3.3.7**  $G \in U_n$ ,  $n \geq 5$  köşeli bir graf olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\xi^c(G) \leq \xi^c(P_n^3) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3n^2 - 4n - 6), & n \text{ çift sayı} \\ \frac{1}{2}(3n^2 - 4n - 6), & n \text{ tek sayı} \end{cases}$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G \cong P_n^3$  dir. (Zhang ve Hua, 2010)

Aşağıdaki Şekil 3.2 de  $2m$  köşeli ve  $m$  eşleşme sayısına sahip bazı özel tek devirli graflar verilmiştir.



Şekil 3.2  $H_1^m, H_2^m, H_3^m, H_4^m$  ve  $H_5^m$  grafları.

Yukarıdaki materyaller kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Teorem 3.3.8**  $G \in U(2m, m) \setminus \{H_1^m, H_2^m, H_3^m\}$  ve  $m \geq 5$  olsun. Bu durumda

$$\xi^c(G) \geq 12m$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G \cong H_4^m$  veya  $G \cong H_5^m$  olmasıdır.

**İspat:** İspat  $m$  üzerinden tümevarım yöntemi ile yapılacaktır. Basit hesaplamalarla  $m=5$  şartını sağlayan tek devirli grafların bu eşitsizliği sağladığı kolaylıkla görülebilir. Bu nedenle  $m > 5$  alınabilir.  $U(2m-2, m-1)$  deki graflar için bu eşitsizliğin sağlandığını kabul edelim. Böylece karşımıza 2 durum çıkar:

**Durum 1.**  $G$ , derecesi 2 olan bir  $v$  köşesine komşu olan bir  $u$  pendant köşesine sahip olsun.

$w, v$  köşesinin  $u$  köşesinden farklı bir komşu köşesi olsun. Bu durumda  $uv \in M$  olur.  $G' = G - u - v$  alalım. O zaman  $G' \in U(2m-2, m-1)$  olur. Eğer  $e(u) = e$  ise  $m > 5$  olduğundan  $e(v) = e-1$  ve  $e(w) = e-2$  olur. Aynı zamanda  $m > 5$  olduğundan  $e \geq 4$  olur.  $t \in V(G) - \{u, v, w\}$  için  $e(t) = e(t')$  veya  $e(t) = e(t') + 1$  veya  $e(t) = e(t') + 2$  dir. Bu sonuç kullanılarak

$$\begin{aligned} \xi^c(G) - \xi^c(G') &= e(u)d_G(u) + e(v)d_G(v) + e(w)d_G(w) - e(w')d_{G'}(w') \\ &\quad + \sum_{t \in V(G) - \{u, v, w\}} d_G(t)[e(t) - e(t')] \\ &= e \cdot 1 + 2(e-1) + d_G(w)(e-2) - (d_G(w)-1)(e-2) \\ &\quad + \sum_{t \in V(G) - \{u, v, w\}} d_G(t)[e(t) - e(t')] \\ &= 4e - 4 + \sum_{t \in V(G) - \{u, v, w\}} d_G(t)[e(t) - e(t')] \end{aligned} \quad (5)$$

elde edilir. Böylece (5) eşitliğinden

$$\xi^c(G) \geq \xi^c(G') + 4e - 4$$

bulunur. Buradan tümevarım hipotezi ve  $e \geq 4$  ile

$$\xi^c(G) \geq 12(m-1) + 4 \cdot 4 - 4 = 12m$$

elde edilir. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

**Durum 2.**  $G$ ,  $C_k$  deviri üzerindeki bazı köşelere pendant kenarlar bağlanarak elde edilen graf olsun.

Eğer  $G \cong C_{2m}$  ise  $m \geq 5$  için  $\xi^c(G) = 4m^2 \geq 12m$  dir.  $G \not\cong C_{2m}$  olsun.  $p$  ve  $q$ , sırasıyla  $G$  de pendant köşelerin ve derecesi 2 olan köşelerin sayısını gösterebilir. Buradan derecesi 3 olan köşelerin sayısının  $p$  olduğu kolayca görülür. Bilindiği gibi  $2p + q = 2m$  ve  $p \leq m$  dir. Üç ayrık köşe kümesi  $V_1(G) = \{u \in V(G) : d_G(u) = 1\}$ ,  $V_2(G) = \{v \in V(G) : d_G(v) = 2\}$  ve  $V_3(G) = \{t \in V(G) : d_G(t) = 3\}$  olsun. Eğer  $u$  bir pendant köşe ise  $e(u) \geq \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor + 1$  dir. Eğer  $v$  köşesi, derecesi 2 olan bir köşe ise  $e(v) \geq \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$  dir ve  $t$  derecesi 3 olan bir köşe ise  $e(t) \geq \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$  dir. Bu bilgiler kullanıldığında

$$\begin{aligned} \xi^c(G) &= \sum_{u \in V_1(G)} 1 \cdot e(u) + \sum_{v \in V_2(G)} 2 \cdot e(v) + \sum_{t \in V_3(G)} 3 \cdot e(t) \\ &\geq \sum_{u \in V_1(G)} 1 \cdot \left( \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor + 1 \right) + \sum_{v \in V_2(G)} 2 \cdot \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor + \sum_{t \in V_3(G)} 3 \cdot \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor \\ &= p \left( \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor + 1 \right) + 2(2m - 2p) \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor + 3p \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor \\ &= 4m \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor + p \geq 4m \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor + 1 \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer  $m$  bir tek sayı ise  $m \geq 5$  olduğundan

$$\xi^c(G) \geq 4m \left( \frac{m+1}{2} \right) + 1 = 2m^2 + 2m + 1 \geq 12m$$

sağlanır. Eğer  $m$  bir çift sayı ise  $m \geq 5$  olduğundan

$$\xi^c(G) \geq 4m \left( \frac{m}{2} \right) + 1 = 2m^2 + 1 \geq 12m$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

Bu teoremin ispatında izlenen metot kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Sonuç 3.3.9**  $G \in U(2m, m) \setminus \{H_1^m\}$  ve  $m \geq 5$  olsun. Bu durumda

$$\xi^c(G) \geq 12m - 1$$

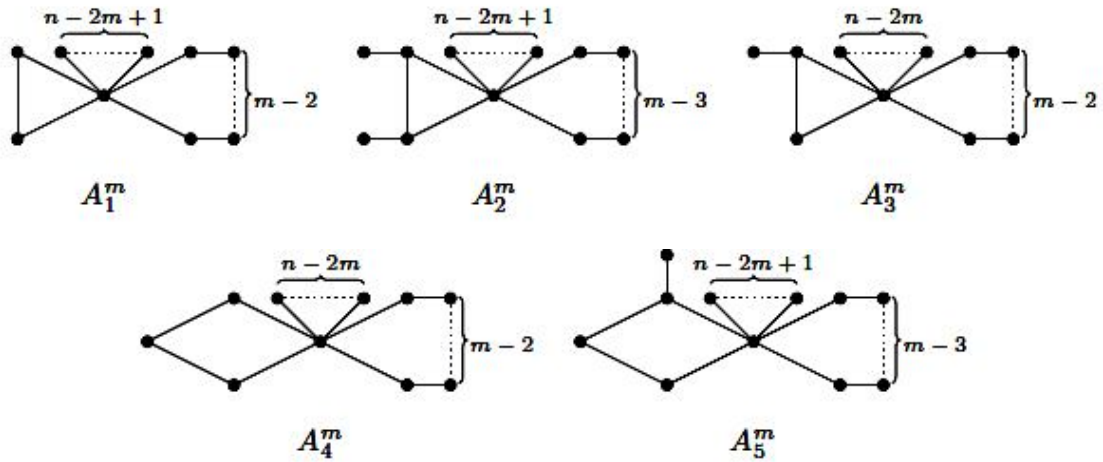
dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G \cong H_2^m$  veya  $G \cong H_3^m$  olmasıdır.

**Sonuç 3.3.10**  $G \in U(2m, m)$  ve  $m \geq 5$  olsun. Bu durumda

$$\xi^c(G) \geq 12m - 3$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G \cong H_1^m$  olmasıdır.

Aşağıdaki Şekil 3.3 de  $n$  köşe ve  $m$  eşleşme sayısına sahip bazı özel tek devirli graflar verilmiştir.



Şekil 3.3  $A_1^m$ ,  $A_2^m$ ,  $A_3^m$ ,  $A_4^m$  ve  $A_5^m$  grafları.

**Theorem 3.3.11**  $G \in U(n, m) \setminus \{A_1^m, A_2^m, A_3^m\}$  ( $n \geq 2m$ ,  $m \geq 5$ ) olsun. Bu durumda

$$\xi^c(G) \geq 5n + 2m$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G \cong A_4^m$  veya  $G \cong A_5^m$  olmasıdır.

**İspat:** İspatı  $m$  üzerinden tümevarım yöntemi kullanarak yapalım.

Eğer  $n = 2m$  ise Teorem 3.3.8 uygulanarak teoremin doğruluğu kolayca görülür. Bu nedenle  $n > 2m$  alalım.

Eğer  $G \cong C_n$  ise  $G$  bir  $m$ -eşleşme olduğundan  $n = 2m + 1$  dir. Bu nedenle  $m \geq 5$  olduğundan

$$\xi^c(G) = \sum_{u \in V(G)} 2 \left\lfloor \frac{2m+1}{2} \right\rfloor = 4m^2 + 2m \geq 5n + 2m$$

sağlanır.

$G \not\cong C_n$  olduğunu kabul edelim. Lemma 3.3.4 den  $G$  grafi bir  $M$   $m$ -eşleşme ve  $M'$  de olmayan bir  $v$  pendant köşeye sahiptir.  $G' = G - v$  grafini gözönüne alınsın. Bu durumda  $G' \in U(n-1, m)$  dir.  $G$  grafinde,  $v$  pendant köşesinin tek komşu köşesi  $u$  köşesi ve  $e(v) = e$  olsun.  $m \geq 4$  olduğundan  $e \geq 3$  olduğu gözlenir. Bu bilgiler gözönüne alınarak;

$$\begin{aligned}\xi^c(G) - \xi^c(G') &= 1e + d_G(u)(e(u) - 1) - (d_G(u) - 1)(e(u) - 1) + \sum_{t \in V(G) - \{u, v\}} d_G(t)[e(t) - e(t')] \\ &= 2e - 1 + \sum_{t \in V(G) - \{u, v\}} d_G(t)[e(t) - e(t')]\end{aligned}\quad (6)$$

elde edilir. Aynı zamanda  $0 \leq e(t) - e(t') \leq 2$  olup (6) eşitliğinden

$$\xi^c(G) \geq \xi^c(G') + 2e - 1$$

bulunur. Tümevarım hipotezi ve  $e \geq 3$  eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\xi^c(G) &\geq 5(n - 1) + 2m + 2e - 1 \\ &= 5n + 2m + 2e - 6 \\ &\geq 5n + 2m\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. Benzer metot kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Sonuç 3.3.12.**  $G \in U(n, m) \setminus \{A_1^m\}$  ( $n \geq 2m$ ,  $m \geq 5$ ) olsun. Bu taktirde

$$\xi^c(G) \geq 5n + 2m - 1$$

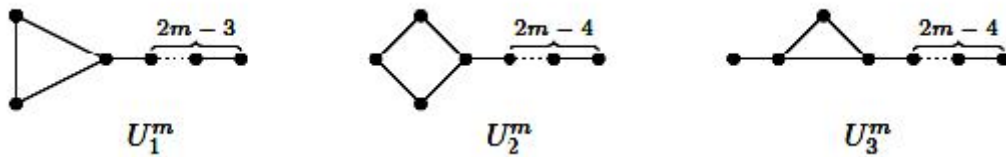
dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G \cong A_2^m$  veya  $G \cong A_3^m$  olmasıdır.

**Sonuç 3.3.13.**  $G \in U(n, m) \setminus \{A_1^m\}$  ( $n \geq 2m$ ,  $m \geq 5$ ) olsun. Bu durumda

$$\xi^c(G) \geq 5n + 2m - 3$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G \cong A_1^m$  olmasıdır.

Aşağıdaki Şekil 3.4 de  $2m$  köşe ve  $m$  eşleşme sayısına sahip bazı özel tek devirli graflar verilmiştir.



Şekil 3.4  $U_1^m$ ,  $U_2^m$  ve  $U_3^m$  grafları.

**Theorem 3.3.14.**  $G \in U(2m, m) \setminus \{U_1^m, U_2^m\}$  ve  $m \geq 4$  olsun. Bu taktirde

$$\xi^c(G) \leq 6m^2 - 4m - 7.$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G \cong U_3^m$  olmasıdır.

**İspat:** Eğer  $G \cong C_{2m}$  ise  $m \geq 4$  olduğundan  $\xi^c(G) = 4m^2 \leq 6m^2 - 4m - 7$  sağlanır.  $G \not\cong C_{2m}$  olsun.  $G'$  grafi Teorem 3.3.5 kullanılarak  $G$  den elde edilen graf olsun. Bu

durumda  $G' \in C_{a,b}(l)$  olduğu görülür. O zaman  $\xi^c(G) \leq \xi^c(G')$  olur. Son olarak Lemma 3.3.6 uygulanarak;

$$\xi^c(G) \leq \xi^c(G') \leq \xi^c(U_1^m) = 6m^2 - 4m - 7$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Benzer metot kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Sonuç 3.3.15.**  $G \in U(2m, m) \setminus \{U_1^m\}$  ve  $m \geq 4$  olsun. Bu durumda

$$\xi^c(G) \leq 6m^2 - 4m - 6$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G \cong U_2^m$  olmasıdır.

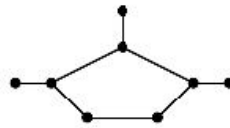
**Sonuç 3.3.16.**  $G \in U(2m, m)$  ve  $m \geq 4$  olsun. Bu durumda

$$\xi^c(G) \leq 6m^2 - 4m - 3$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G \cong U_1^m$  olmasıdır.

**Not 3.3.17.** Eğer  $G \in U(2m+1, m)$  ise Teorem 3.3.7 den  $\xi^c(G) \leq 6m^2 + 2m - 3$  dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G \cong P_n^3$  olmasıdır.

**Not 3.3.18** Teorem 3.3.14 ve Sonuç 3.3.16, altı köşeli bağlantılı grafların tablosu(Cvetkovic ve Petric, 1984) kullanılarak  $U(6, 3)$  de sağlanır. Fakat Sonuç 3.3.15 eşitlik durumunda sağlanmaz. Çünkü  $U(6, 3)$  de  $\xi^c(U_2^3) = \xi^c(C_6)$  dır. Sekiz köşeli tek devirli grafların tablosundan(Cvetkovic and Rowlinson, 1987)  $U(8, 4)$  de Teorem 3.3.8 ve Sonuç 3.3.10 sağlanır. Fakat Sonuç 3.3.9 sağlanmaz. Çünkü  $\xi^c(H_2^4) = \xi^c(H_3^4) = \xi^c(C_5^*)$  Burada  $C_5^*$ , şekil gösterilen graftır.



$C_5^*$

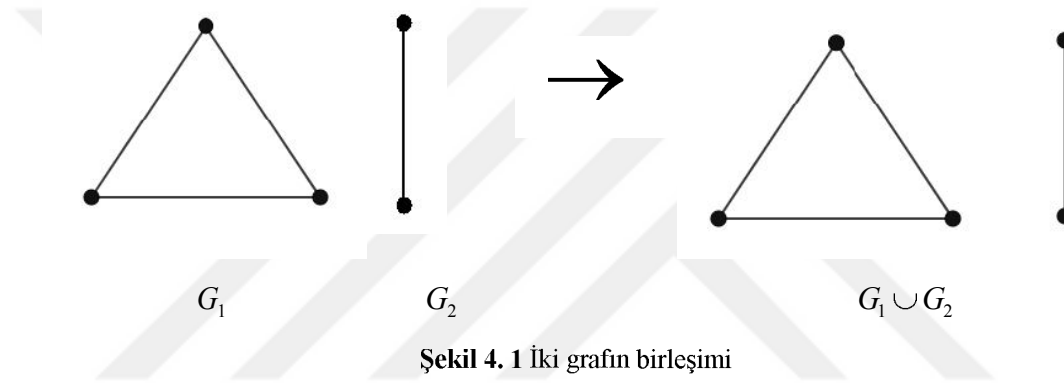
Şekil 3. 5  $C_5^*$  grafi.

## 4. GRAF İŞLEMLERİ

Bu bölümde bazı graf işlemleri tanıtılmış ve örnekler verilmiştir. Bu kavramlar Imrich ve Klavzar(Imrich ve Klavzar, 2000) da mevcuttur.

### 4.1 Birleşim İşlemi

$G_1$  ve  $G_2$  ayrık köşeli iki graf olsun.  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının birleşimi,  $V(G_1) \cup V(G_2)$  köşe kümesine ve  $E(G_1) \cup E(G_2)$  kenar kümesine sahip olan graftır. Bu graf  $G = G_1 \cup G_2$  ile gösterilir.

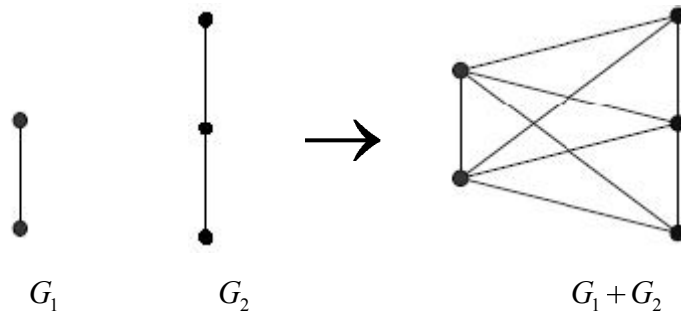


### 4.2 Toplama İşlemi

$G_1$  ve  $G_2$  ayrık köşeli iki graf olsun.  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının toplamı  $G_1 + G_2$  ile gösterilir. Burada  $G_1$  in her bir köşesi,  $G_2$  nin her köşesi ile komşudur.  $u \in V(G_1 + G_2)$  köşesinin derecesi aşağıdaki gibi tanımlanır:

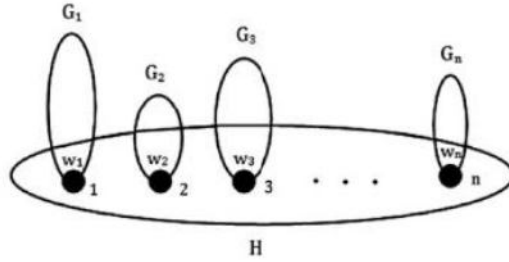
$$d_{G_1+G_2}(u) = \begin{cases} d_{G_1}(u) + n_2 & , u \in V(G_1) \\ d_{G_2}(u) + n_1 & , u \in V(G_2) \end{cases}$$

$G_1 + G_2$  nin kenar sayısı  $m(G_1 + G_2) = m(G_1) + m(G_2) + n_1 n_2$  dir.



### 4.3 Köklü Çarpım

$H$ ,  $V(H) = \{1, 2, \dots, k\}$  köşe kümesine sahip bir graf ve  $G, G_1, G_2, \dots, G_k$  köklü grafların bir dizisi olsun.  $H$  grafının  $i$ . köşesiyle  $G_i$  nin kök köşesi bağlanarak elde edilen grafa  $G$  ile  $H$  nin köklü çarpımı denir ve  $H(G) = H(G_1, G_2, \dots, G_k)$  ile gösterilir. (Godsil ve McKay, 1978)



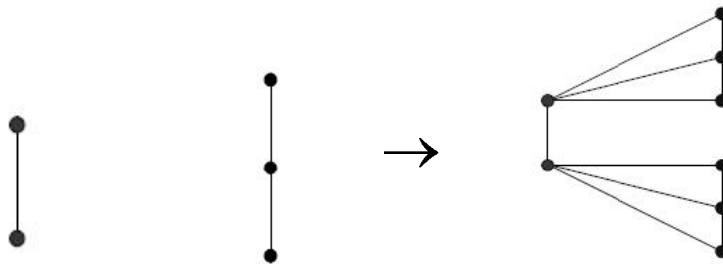
Şekil 4. 3 G ile H graflarının köklü çarpımı

### 4.4 Corona Çarpım

$1 \leq i \leq n_1$  için,  $G_2$  grafının  $i$ . kopyasındaki her köşe ile  $G_1$  grafının  $i$ . köşesi birleştirilerek  $G_2$  nin  $n_1$  kopyası ve  $G_1$  in 1 kopyasından elde edilen grafa  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının corona çarpımı denir.  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının corona çarpımı  $G_1 \circ G_2$  ile gösterilir.  $G_1 \circ G_2$  grafindaki herhangi bir  $u$  köşesinin derecesi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$d_{G_1 \circ G_2}(u) = \begin{cases} d_{G_1}(u) + n_2 & , u \in V(G_1) \\ d_{G_2}(u) + 1 & , u \in V(G_2) \end{cases}$$

Burada  $|V(G_1 \circ G_2)| = n_1(1 + n_2)$  ve  $|E(G_1 \circ G_2)| = m_1 + n_1 m_2 + n_1 n_2$  dir.



Şekil 4. 4 İki grafın corona çarpımı

#### 4.5 Tensor Çarpım

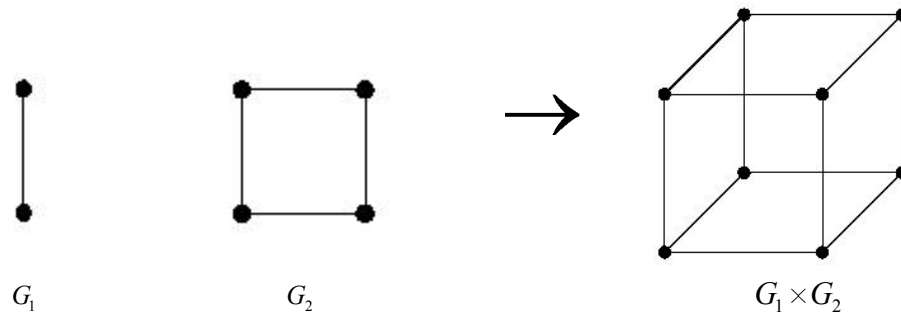
$G_1$  ve  $G_2$  graflarının tensor çarpımı  $G = G_1 \otimes G_2$  ile gösterilir.  $G$  grafi  $V(G_1 \otimes G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$  köşe kümesine sahiptir. Burada  $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in V(G)$  köşelerinin birbirine komşu köşeler olması ancak ve ancak  $G_1$  de  $u_1, v_1$ 'e komşu ve  $G_2$  de  $u_2, v_2$ 'e komşu olması anlamına gelir.  $G$  grafindaki her bir  $(u_1, u_2) \in V(G)$  köşesinin derecesi;  $d_{G_1 \otimes G_2}(u_1, u_2) = d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2)$  dir. Ayrıca  $|V(G_1 \otimes G_2)| = n_1n_2$  ve  $|E(G_1 \otimes G_2)| = 2m_1m_2$  dir.



Şekil 4. 5 İki grafin tensor çarpımı

#### 4.6 Kartezyen Çarpım

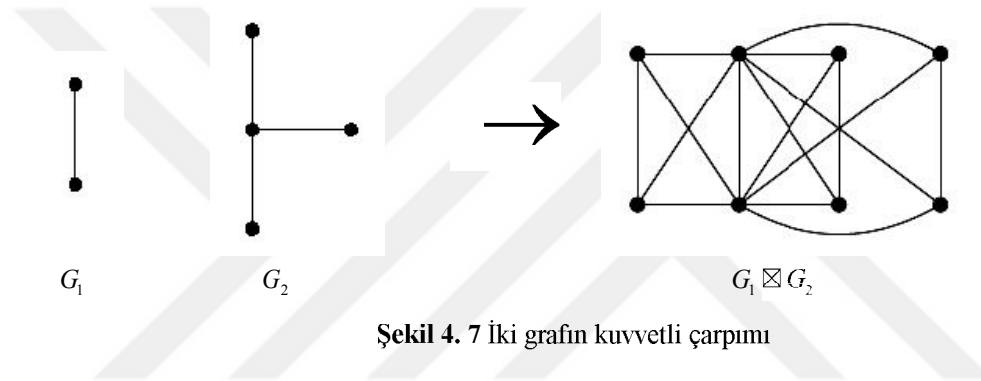
$G_1$  ve  $G_2$  graflarının kartezyen çarpımı  $G = G_1 \times G_2$  ile gösterilir.  $G$  grafi  $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$  köşe kümesine sahiptir. Burada  $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in V(G)$  köşelerinin birbirine komşu köşeler olması ya  $u_1 = v_1$  ve  $G_2$  de  $u_2, v_2$ 'e komşu ya da  $u_2 = v_2$  ve  $G_1$  de  $u_1, v_1$ 'e komşu olması anlamına gelir.  $G$  grafindaki her bir  $(u_1, u_2) \in V(G)$  köşesinin derecesi;  $d_{G_1 \times G_2}(u_1, u_2) = d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2)$  dir. Ayrıca  $|V(G_1 \times G_2)| = n_1n_2$  ve  $|E(G_1 \times G_2)| = n_1m_2 + m_1n_2$  dir.



Şekil 4. 6 İki grafin kartezyen çarpımı

#### 4.7 Kuvvetli Çarpım

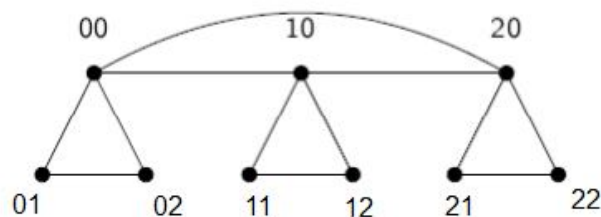
$G_1$  ve  $G_2$  graflarının kuvvetli çarpımı  $G = G_1 \boxtimes G_2$  ile gösterilir.  $G$  grafi  $V(G_1 \boxtimes G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$  köşe kümesine sahiptir. Burada  $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in V(G)$  köşelerinin birbirine komşu köşeler olması ya  $u_1 = v_1$  ve  $G_2$  de  $u_2, v_2$ 'e komşu ya  $u_2 = v_2$  ve  $G_1$  de  $u_1, v_1$ 'e komşu ya da  $G_1$  de  $u_1, v_1$ 'e komşu ve  $G_2$  de  $u_2, v_2$ 'e komşu olması anlamına gelir.  $G$  grafindaki her bir  $(u_1, u_2) \in V(G)$  köşesinin derecesi;  $d_{G_1 \boxtimes G_2}(u_1, u_2) = d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2)$  dir. Ayrıca  $|V(G_1 \boxtimes G_2)| = n_1 n_2$  ve  $|E(G_1 \boxtimes G_2)| = n_1 m_2 + m_1 n_2 + 2m_1 m_2$  dir.



Şekil 4. 7 İki grafin kuvvetli çarpımı

#### 4.8 Hiyerarşik Çarpım

$G = (V(G), E(G))$  ve  $H = (V(H), E(H))$  iki graf ve  $U$  boştan farklı  $V(H)$  in bir alt kümesi olsun.  $U$  ya karşılık gelen  $G$  ve  $H$  graflarının hiyerarşik çarpımı  $\Gamma = G \square H(U)$  ile gösterilir.  $\Gamma$  grafi  $V(\Gamma) = V(G) \times V(H)$  köşe kümesine sahiptir.  $(a, x)(b, y) \in E(\Gamma)$  ancak ve ancak  $a = b$  ve  $xy \in E(H)$  veya  $ab \in E(G)$  ve  $x = y \in U$  dur. Şekil 4.8 de  $V(K_3) = \{0, 1, 2\}$  ve  $U = \{0\}$  için  $\Gamma = K_3 \square K_3(U)$  grafi verilmiştir.



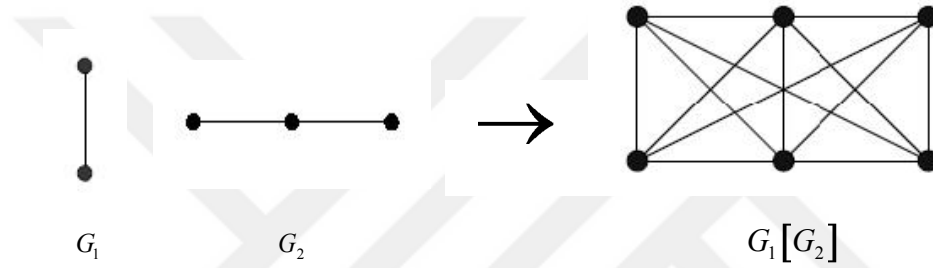
Şekil 4. 8  $\Gamma = K_3 \square K_3(U)$  grafi

#### 4.9 Bileşim Çarpımı

$G_1$  ve  $G_2$  graflarının bileşim çarpımı;  $G = G_1[G_2]$  ile gösterilir ve  $V(G_1) \times V(G_2)$  köşe kümesine sahiptir.  $G_1[G_2]$  grafında herhangi iki  $(u_1, u_2)$  ve  $(v_1, v_2)$  köşelerinin komşu olması ancak ve ancak ya  $G_1$  de  $u_1, v_1$ 'e komşu ya da  $G_1$  de  $u_1 = v_1$  ve  $G_2$  de  $u_2, v_2$ 'e komşu olması ile sağlanır.  $G$  grafindaki her bir  $(u_1, u_2) \in V(G)$  köşesinin derecesi;  $d_{G_1[G_2]}(u_1, u_2) = n_2 d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2)$  dir.

Ayrıca  $|V(G_1[G_2])| = n_1 n_2$  ve  $|E(G_1[G_2])| = n_1 m_2 + m_1 n_2^2$  dir.

-+



Şekil 4. 9 İki grafın bileşim çarpımı

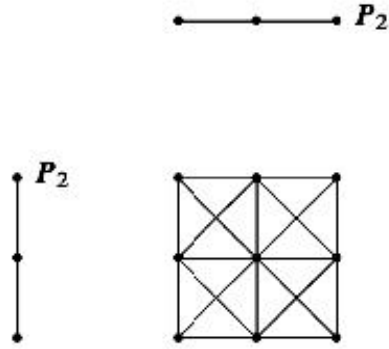
#### 4.10 Ayrışım İşlemi

$G_1$  ve  $G_2$  graflarının ayrışım işlemi;  $G = G_1 * G_2$  ile gösterilir ve  $V(G_1) \times V(G_2)$  köşe kümesine sahiptir.  $G_1 * G_2$  grafında herhangi iki  $(u_1, u_2)$  ve  $(v_1, v_2)$  köşelerinin komşu köşeler olması ancak ve ancak  $u_1 v_1 \in E(G_1)$  veya  $u_2 v_2 \in E(G_2)$  olması ile sağlanır.  $G$  grafindaki her bir  $(u_1, u_2) \in V(G)$  köşesinin derecesi aşağıdaki gibidir:

$$d_{G_1 * G_2}(u_1, u_2) = n_2 d_{G_1}(u_1) + n_1 d_{G_2}(u_2) - d_{G_1}(u_1) d_{G_2}(u_2).$$

Aynı zamanda  $|V(G_1 * G_2)| = n_1 n_2$  ve  $|E(G_1 * G_2)| = n_1^2 m_2 + n_2^2 m_1 - 2m_1 m_2$  dir.

Şekil 4.10 da  $G = P_2 * P_2$  grafi verilmiştir.

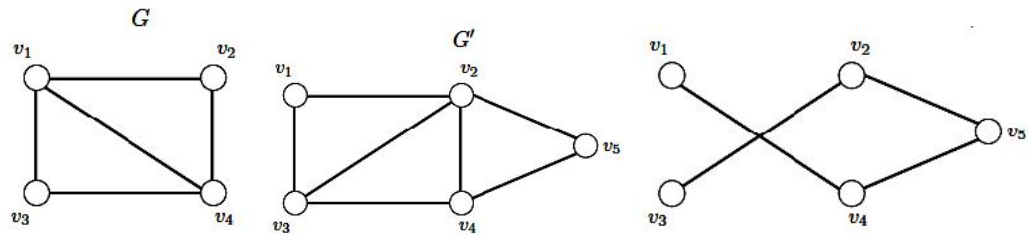
Şekil 4. 10  $G = P_2 * P_2$  grafi

#### 4.11 Simetrik Fark İşlemi

$G_1$  ve  $G_2$  graflarının simetrik farkı ;  $G = G_1 \oplus G_2$  ile gösterilir ve  $V(G_1) \times V(G_2)$  köşe kümesine sahiptir.  $G_1 \oplus G_2$  grafında herhangi iki  $(u_1, u_2)$  ve  $(v_1, v_2)$  köşelerinin komşu köşeler olması ancak ve ancak  $u_1 v_1 \in E(G_1)$  veya  $u_2 v_2 \in E(G_2)$  (her ikisi birden değil) olması ile sağlanır.  $G_1 \oplus G_2$  grafında, her bir  $(u_1, u_2) \in V(G)$  köşesinin derecesi aşağıdaki gibidir:

$$d_{G_1 \oplus G_2}(u_1, u_2) = n_2 d_{G_1}(u_1) + n_1 d_{G_2}(u_2) - 2d_{G_1}(u_1) d_{G_2}(u_2).$$

Aynı zamanda  $|V(G_1 \oplus G_2)| = n_1 n_2$  ve  $|E(G_1 \oplus G_2)| = n_1^2 m_2 + n_2^2 m_1 - 4m_1 m_2$  dir.



Şekil 4. 11 İki grafın simetrik farkı

## 5. GRAF İŞLEMLERİNİN ÇARPIMSAL ZAGREB İNDEKSLERİ

Bu bölümde graf işlemlerinin birinci çarpımsal Zagreb indeksi, çarpımsal toplam Zagreb indeksi ve çarpımsal Zagreb eş-indeksleri için bazı sınır değerleri verilecektir.

### 5.1 Birinci Çarpımsal Zagreb İndeksi İçin Sınırlar

Bu bölümde graf işlemlerinden join, corona çarpım, Kartezyen çarpım, bileşim çarpım, kuvvetli çarpım, ayrışım ve simetrik fark işlemlerinin birinci çarpımsal Zagreb indeksleri için sınır değerleri verilmiştir.

**Tanım 5.1.1** Bir  $G$  grafının birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri,

$$\Pi_1(G) = \prod_{u \in V(G)} d_G^2(u) \text{ ve } \Pi_2(G) = \prod_{uv \in E(G)} d_G(u)d_G(v)$$

ile tanımlanır. (Todeschini ve Consonni, 2010)

Öncelikle temel sonuçlarımızın ispatında kullanılacak olan aşağıdaki lemmayı verelim.

**Lemma 5.1.2**  $a_1, a_2, \dots, a_r$  pozitif reel sayı dizisi için

$$A^{1/2} \geq B^{1/r}$$

dir. Burada  $A = \frac{2}{r(r-1)}(a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_1a_r + a_2a_3 + \dots + a_{r-1}a_r)$ ,  $B = a_1a_2 \dots a_r$

dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak  $a_1 = a_2 = \dots = a_r$  olursa sağlanır. (Biler ve Witkowski, 1990)

**Teorem 5.1.3**  $G_1$  ve  $G_2$  ayrık köşeli iki graf olsun. Eğer  $G = G_1 + G_2$  ise

$$\Pi_1(G) \leq \left[ \frac{4m_1^2 + n_2(n_1 - 1)[4m_1 + n_1n_2] - M_1(G_1)}{n_1(n_1 - 1)} \right]^{n_1} \left[ \frac{4m_2^2 + n_1(n_2 - 1)[4m_2 + n_1n_2] - M_1(G_2)}{n_2(n_2 - 1)} \right]^{n_2}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G_1$  ve  $G_2$  nin regüler graflar olmasıdır.

**İspat:** Birinci çarpımsal Zagreb indeksin tanımı kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{aligned}\Pi_1(G) &= \prod_{u \in V(G)} d_G^2(u) = \left[ \prod_{u \in V(G)} d_G(u) \right]^2 \\ &= \left[ \prod_{u_1 \in V(G_1)} d_{G_1}(u_1) + n_2 \right]^2 \left[ \prod_{u_2 \in V(G_2)} d_{G_2}(u_2) + n_1 \right]^2\end{aligned}$$

dir. Yukarıdaki eşitliğe Lemma 5.1.2 uygulanırsa;

$$\begin{aligned}\Pi_1(G) &\leq \left( \frac{\left[ \sum_{u_1 \in V(G_1)} (d_{G_1}(u_1) + n_2) \right]^2 - \sum_{u_1 \in V(G_1)} (d_{G_1}(u_1) + n_2)^2}{n_1(n_1 - 1)} \right)^{n_1} \\ &\quad \times \left( \frac{\left[ \sum_{u_2 \in V(G_2)} (d_{G_2}(u_2) + n_1) \right]^2 - \sum_{u_2 \in V(G_2)} (d_{G_2}(u_2) + n_1)^2}{n_2(n_2 - 1)} \right)^{n_2} \\ &= \left[ \frac{4m_1^2 + n_2(n_1 - 1)[4m_1 + n_1n_2] - M_1(G_1)}{n_1(n_1 - 1)} \right]^{n_1} \\ &\quad \times \left[ \frac{4m_2^2 + n_1(n_2 - 1)[4m_2 + n_1n_2] - M_1(G_2)}{n_2(n_2 - 1)} \right]^{n_2}\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi teoremden eşitsizliğin eşit olduğunu kabul edelim. Böylece yukarıdaki tüm eşitsizlikler eşit olmalıdır. Yani  $\forall u_i, u_j \in V(G_1)$  için  $d_{G_1}(u_i) + n_2 = d_{G_1}(u_j) + n_2$  ve  $\forall u_k, u_l \in V(G_2)$  için  $d_{G_2}(u_k) + n_1 = d_{G_2}(u_l) + n_1$  eşitliklerinin sağlanması gerekir. Bu ise  $G_1$  ve  $G_2$  regüler graflar olması anlamına gelir.

**Teorem 5.1.4**  $G_1$  ve  $G_2$  ayrık köşeli iki graf olsun. Eğer  $G = G_1 \circ G_2$  ise

$$\Pi_1(G) \leq \left[ \frac{(2m_1 + n_1n_2)^2 - (M_1(G_1) + 4m_1n_2 + n_1n_2^2)}{n_1(n_1 - 1)} \right]^{n_1} \left[ \frac{(2m_2 + n_2)^2 - (M_1(G_2) + 2m_2 + 1)}{n_2(n_2 - 1)} \right]^{n_2}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G_1$  ve  $G_2$  nin regüler graflar olmasıdır.

**İspat:** Birinci çarpımsal Zagreb indeksin tanımı kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{aligned}\Pi_1(G) &= \prod_{u \in V(G)} d_G^2(u) = \left[ \prod_{u \in V(G)} d_G(u) \right]^2 \\ &= \left[ \prod_{u_1 \in V(G_1)} (d_{G_1}(u_1) + n_2) \times \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2 \in V(G_2)} (d_{G_2}(u_2) + 1) \right]^2.\end{aligned}$$

Bu son eşitlikte Lemma 5.1.2 uygulanırsa aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\begin{aligned}
\Pi_1(G) &\leq \left( \frac{\left[ \sum_{u_1 \in V(G_1)} (d_{G_1}(u_1) + n_2) \right]^2 - \sum_{u_1 \in V(G_1)} (d_{G_1}(u_1) + n_2)^2}{n_1(n_1 - 1)} \right)^{n_1} \\
&\quad \times \prod_{u_1 \in V(G_1)} \left( \frac{\left[ \sum_{u_2 \in V(G_2)} (d_{G_2}(u_2) + 1) \right]^2 - \sum_{u_2 \in V(G_2)} (d_{G_2}(u_2) + 1)^2}{n_2(n_2 - 1)} \right)^{n_2} \\
&= \left[ \frac{(2m_1 + n_1 n_2)^2 - (M_1(G_1) + 4m_1 n_2 + n_1 n_2^2)}{n_1(n_1 - 1)} \right]^{n_1} \\
&\quad \times \left[ \frac{(2m_2 + n_2)^2 - (M_1(G_2) + 2m_2 + 1)}{n_2(n_2 - 1)} \right]^{n_1 n_2}.
\end{aligned}$$

Teoremdede eşitsizliklerin eşit olduğunu kabul edelim. O zaman yukarıdaki tüm eşitsizlikler eşitlik olmalıdır. Yani  $\forall u_i, u_j \in V(G_1)$  için  $d_{G_1}(u_i) + n_2 = d_{G_1}(u_j) + n_2$  ve  $\forall v_k, v_l \in V(G_2)$  için  $d_{G_2}(v_k) + 1 = d_{G_2}(v_l) + 1$  eşitliklerinin sağlanması gerekir. Bu ise  $G_1$  ve  $G_2$  regüler graflar olması ile mümkündür. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 5.1.5**  $G_1$  ve  $G_2$  ayrık köşeli iki graf olsun. Eğer  $G = G_1 \times G_2$  ise

$$\Pi_1(G) \leq \left[ \frac{4m_1^2 n_2^2 + 4m_2^2 n_1^2 + 8m_1 m_2 (n_1 n_2 - 1) - n_2 M_1(G_1) - n_1 M_1(G_2)}{n_1 n_2 (n_1 n_2 - 1)} \right]^{n_1 n_2}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G_1$  ve  $G_2$  nin regüler graflar olmasıdır.

**İspat:** Birinci çarpımsal Zagreb indeksin tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\Pi_1(G) &= \prod_{(u_1, u_2) \in V(G)} (d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2))^2 \\
&= \left[ \prod_{(u_1, u_2) \in V(G)} (d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2)) \right]^2.
\end{aligned}$$

Bu son eşitlikte Lemma 5.1.2 uygulanırsa aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\begin{aligned}
\Pi_1(G) &\leq \left( \frac{\left[ \sum_{(u_1, u_2) \in V(G)} (d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2)) \right]^2 - \sum_{(u_1, u_2) \in V(G)} (d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2))^2}{n_1 n_2 (n_1 n_2 - 1)} \right)^{n_1} \\
&= \left[ \frac{4m_1^2 n_2^2 + 4m_2^2 n_1^2 + 8m_1 m_2 (n_1 n_2 - 1) - n_2 M_1(G_1) - n_1 M_1(G_2)}{n_1 n_2 (n_1 n_2 - 1)} \right]^{n_1 n_2}.
\end{aligned}$$

Teoremin eşitlik koşulunun sağlandığını düşünelim. O zaman yukarıdaki tüm eşitsizlikler, eşitlik olarak sağlanmalıdır. Yani  $\forall (u_i, v_k), (u_j, v_l) \in V(G)$  için  $d_{G_1}(u_i) + d_{G_2}(v_k) = d_{G_1}(u_j) + d_{G_2}(v_l)$  olmalıdır. Bu ise  $G_1$  ve  $G_2$  regüler graflar olması ile mümkündür. İspat tamamlanır.

**Teorem 5.1.6**  $G_1$  ve  $G_2$  ayrık köşeli iki graf olsun. Eğer  $G = G_1[G_2]$  ise

$$\Pi_1(G) \leq \left[ \frac{(2m_1n_2^2 + 2m_2n_1)^2 - (n_2^3M_1(G_1) + 8m_1m_2n_2 + n_1M_1(G_2))}{n_1n_2(n_1n_2 - 1)} \right]^{n_1n_2}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G_1$  ve  $G_2$  nin regüler graflar olmasıdır.

**İspat:** Birinci çarpımsal Zagreb indeksin tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \Pi_1(G) &= \prod_{u \in V(G)} d_G^2(u) = \left[ \prod_{u \in V(G)} d_G(u) \right]^2 \\ &= \left[ \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2 \in V(G_2)} (d_{G_1}(u_1)n_2 + d_{G_2}(u_2)) \right]^2. \end{aligned}$$

Bu son eşitlikte Lemma 5.1.2 uygulanırsa aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\begin{aligned} \Pi_1(G) &\leq \left( \frac{\left[ \sum_{u_1 \in V(G_1)} \sum_{u_2 \in V(G_2)} (n_2d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2)) \right]^2 - \sum_{u_1 \in V(G_1)} \sum_{u_2 \in V(G_2)} (n_2d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2))^2}{n_1n_2(n_1n_2 - 1)} \right)^{n_1n_2} \\ &= \left[ \frac{(2m_1n_2^2 + 2m_2n_1)^2 - (n_2^3M_1(G_1) + 8m_1m_2n_2 + n_1M_1(G_2))}{n_1n_2(n_1n_2 - 1)} \right]^{n_1n_2}. \end{aligned}$$

Şimdi teoremin eşitlik koşulunun sağlandığını düşünelim. O zaman yukarıdaki tüm eşitsizlikler, eşitlik olarak sağlanmalıdır. Yani  $\forall u_i, u_j \in V(G_1)$  ve  $\forall v_k, v_l \in V(G_2)$  için  $d_{G_1}(u_i)n_2 + d_{G_2}(v_k) = d_{G_1}(u_j)n_2 + d_{G_2}(v_l)$  sağlanır. Bu ise  $G_1$  ve  $G_2$  regüler graflar olması anlamına gelir. İspat tamamlanır.

**Teorem 5.1.7**  $G_1$  ve  $G_2$  ayrık köşeli iki graf olsun. Eğer  $G = G_1 \boxtimes G_2$  ise

$$\begin{aligned} \Pi_1(G) &\leq \frac{1}{(n_1n_2(n_1n_2 - 1))^{n_1n_2}} \left[ (2m_1 + 2m_2n_1 + 4m_1m_2)^2 - (n_2M_1(G_1) \right. \\ &\quad \left. + n_1M_1(G_2) + M_1(G_1)M_1(G_2) + 4m_2M_1(G_1) + 8m_1m_2) \right]^{n_1n_2} \end{aligned}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G_1$  ve  $G_2$  nin regüler graflar olmasıdır.

**İspat:** Birinci çarpımsal Zagreb indeksin tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\begin{aligned}\Pi_1(G) &= \prod_{u \in V(G)} d_G^2(u) = \left[ \prod_{u \in V(G)} d_G(u) \right]^2 \\ &= \left[ \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2 \in V(G_2)} \left( d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2) \right) \right]^2.\end{aligned}$$

Bu son eşitlikte Lemma 5.1.2 uygulanırsa aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\begin{aligned}\Pi_1(G) &\leq \frac{1}{(n_1 n_2 (n_1 n_2 - 1))^{n_1 n_2}} \left[ \left( \sum_{\substack{u_1 \in V(G_1) \\ u_2 \in V(G_2)}} d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{u_1 \in V(G_1) \\ u_2 \in V(G_2)}} \left( d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2) \right)^2 \right]^{n_1 n_2}.\end{aligned}$$

Şimdi teoremin eşitlik koşulunun sağlandığını düşünelim. O zaman yukarıdaki tüm eşitsizlikler, eşitlik olarak sağlanmalıdır. Yani  $\forall u_i, u_j \in V(G_1)$  ve  $\forall v_k, v_l \in V(G_2)$  için

$$d_{G_1}(u_i) + d_{G_2}(v_k) + d_{G_1}(u_i)d_{G_2}(v_k) = d_{G_1}(u_j) + d_{G_2}(v_l) + d_{G_1}(u_j)d_{G_2}(v_l)$$

eşitliği sağlanır. Bu ise  $G_1$  ve  $G_2$  regüler graflar olması anlamına gelir. İspat tamamlanır.

**Teorem 5.1.8**  $G_1$  ve  $G_2$  ayrık köşeli iki graf olsun. Eğer  $G = G_1 * G_2$  ise

$$\begin{aligned}\Pi_1(G) &\leq \frac{1}{(n_1 n_2 (n_1 n_2 - 1))^{n_1 n_2}} \left[ \left( 2m_1 n_2^2 + 2m_2 n_1^2 - 4m_1 m_2 \right)^2 - n_2^3 M_1(G_1) - n_1^3 M_1(G_2) \right. \\ &\quad \left. - M_1(G_1)M_1(G_2) - 8n_1 n_2 m_1 m_2 + 4n_1 m_1 M_1(G_2) + 4n_2 m_2 M_1(G_1) \right]^{n_1 n_2}\end{aligned}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G_1$  ve  $G_2$  nin regüler graflar olmasıdır.

**İspat:** Birinci çarpımsal Zagreb indeksin tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\begin{aligned}\Pi_1(G) &= \prod_{u \in V(G)} d_G^2(u) = \left[ \prod_{u \in V(G)} d_G(u) \right]^2 \\ &= \left[ \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2 \in V(G_2)} \left( n_2 d_{G_1}(u_1) + n_1 d_{G_2}(u_2) - d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2) \right) \right]^2.\end{aligned}$$

Bu son eşitlikte Lemma 5.1.2 uygulanırsa aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\begin{aligned}
\Pi_1(G) &\leq \frac{1}{(n_1 n_2 (n_1 n_2 - 1))^{n_1 n_2}} \left[ \left( \sum_{\substack{u_1 \in V(G_1) \\ u_2 \in V(G_2)}} (n_2 d_{G_1}(u_1) + n_1 d_{G_2}(u_2) - d_{G_1}(u_1) d_{G_2}(u_2)) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\substack{u_1 \in V(G_1) \\ u_2 \in V(G_2)}} (n_2 d_{G_1}(u_1) + n_1 d_{G_2}(u_2) - d_{G_1}(u_1) d_{G_2}(u_2))^2 \right]^{n_1 n_2} \\
&= \frac{1}{(n_1 n_2 (n_1 n_2 - 1))^{n_1 n_2}} \left[ (2m_1 n_2^2 + 2m_2 n_1^2 - 4m_1 m_2)^2 - n_2^3 M_1(G_1) - n_1^3 M_1(G_2) \right. \\
&\quad \left. - M_1(G_1) M_1(G_2) - 8n_1 n_2 m_1 m_2 + 4n_1 m_1 M_1(G_2) + 4n_2 m_2 M_1(G_1) \right]^{n_1 n_2}.
\end{aligned}$$

Şimdi teoremin eşitlik koşulunun sağlandığını düşünelim. O zaman yukarıdaki tüm eşitsizlikler, eşitlik olarak sağlanmalıdır. Yani  $\forall u_i, u_j \in V(G_1)$  ve  $\forall v_k, v_l \in V(G_2)$  için

$$n_2 d_{G_1}(u_i) + n_1 d_{G_2}(v_k) - d_{G_1}(u_i) d_{G_2}(v_k) = n_2 d_{G_1}(u_j) + n_1 d_{G_2}(v_l) - d_{G_1}(u_j) d_{G_2}(v_l)$$

eşitliği sağlanır. Bu ise  $G_1$  ve  $G_2$  regüler graflar anlamına gelir. İspat tamamlanır.

**Teorem 5.1.9**  $G_1$  ve  $G_2$  ayrık köşeli iki graf olsun. Eğer  $G = G_1 \oplus G_2$  ise

$$\begin{aligned}
\Pi_1(G) &\leq \frac{1}{(n_1 n_2 (n_1 n_2 - 1))^{n_1 n_2}} \left[ (2m_1 n_2^2 + 2m_2 n_1^2 - 8m_1 m_2)^2 - n_2^3 M_1(G_1) - n_1^3 M_1(G_2) \right. \\
&\quad \left. - 4M_1(G_1) M_1(G_2) - 8n_1 n_2 m_1 m_2 + 8n_1 m_1 M_1(G_2) + 8n_2 m_2 M_1(G_1) \right]^{n_1 n_2}.
\end{aligned}$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G_1$  ve  $G_2$  nin regüler graflar olmasıdır.

**İspat:** Birinci çarpımsal Zagreb indeksin tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\Pi_1(G) &= \prod_{u \in V(G)} d_G^2(u) = \left[ \prod_{u \in V(G)} d_G(u) \right]^2 \\
&= \left[ \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2 \in V(G_2)} (n_2 d_{G_1}(u_1) + n_1 d_{G_2}(u_2) - 2d_{G_1}(u_1) d_{G_2}(u_2)) \right]^2.
\end{aligned}$$

Bu son eşitlikte Lemma 5.1.2 uygulanırsa aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\begin{aligned}
\Pi_1(G) &\leq \frac{1}{(n_1 n_2 (n_1 n_2 - 1))^{n_1 n_2}} \left[ \left( \sum_{\substack{u_1 \in V(G_1) \\ u_2 \in V(G_2)}} (n_2 d_{G_1}(u_1) + n_1 d_{G_2}(u_2) - 2d_{G_1}(u_1) d_{G_2}(u_2)) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\substack{u_1 \in V(G_1) \\ u_2 \in V(G_2)}} (n_2 d_{G_1}(u_1) + n_1 d_{G_2}(u_2) - 2d_{G_1}(u_1) d_{G_2}(u_2))^2 \right]^{n_1 n_2} \\
&= \frac{1}{(n_1 n_2 (n_1 n_2 - 1))^{n_1 n_2}} \left[ (2m_1 n_2^2 + 2m_2 n_1^2 - 8m_1 m_2)^2 - n_2^3 M_1(G_1) - n_1^3 M_1(G_2) \right. \\
&\quad \left. - 4M_1(G_1) M_1(G_2) - 8n_1 n_2 m_1 m_2 + 8n_1 m_1 M_1(G_2) + 8n_2 m_2 M_1(G_1) \right]^{n_1 n_2}.
\end{aligned}$$

Şimdi teoremin eşitlik koşulunun sağlandığını düşünelim. O zaman yukarıdaki tüm eşitsizlikler, eşitlik olarak sağlanmalıdır. Yani  $\forall u_i, u_j \in V(G_1)$  ve  $\forall v_k, v_l \in V(G_2)$  için

$$n_2 d_{G_1}(u_i) + n_1 d_{G_2}(v_k) - 2d_{G_1}(u_i)d_{G_2}(v_k) = n_2 d_{G_1}(u_j) + n_1 d_{G_2}(v_l) - 2d_{G_1}(u_j)d_{G_2}(v_l)$$

eşitliği sağlanır. Bu ise  $G_1$  ve  $G_2$  regüler graflar anlamına gelir. İspat tamamlanır.

## 5.2 Çarpımsal Toplam Zagreb İndeksi İçin Sınırlar

Bu bölümde graf işlemlerinden join, corona çarpım, Kartezyen çarpım, bileşim çarpım, kuvvetli çarpım, ayrışım ve simetrik fark işlemlerinin çarpımsal toplam Zagreb indeksi için sınır değerleri verilmiştir.

**Tanım 5.2.1** Bir  $G$  grafının çarpımsal toplam Zagreb indeksi,

$$\Pi_1^*(G) = \prod_{uv \in E(G)} [d_G(u) + d_G(v)]$$

ile tanımlanır. (Eliasi ve ark., 2012)

Öncelikle temel sonuçlarımızın ispatında kullanılacak olan aşağıdaki lemmayı verelim.

**Lemma 5.2.2**  $a_1, a_2, \dots, a_n$  negatif olmayan reel sayılar olsun.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} .$$

Eşitlik ancak ve ancak  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  olursa sağlanır. (Steele, 2004)

**Teorem 5.2.3**  $G_1, G_2, \dots, G_k$  ayrık köşeli graflar olsun.  $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$  grafının çarpımsal toplam Zagreb indeksi için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\Pi_1^*(G) = \prod_{i=1}^k \Pi_1^*(G_i).$$

**İspat:** Çarpımsal toplam Zagreb indeksin tanımından;

$$\begin{aligned}
\Pi_1^*(G) &= \prod_{uv \in E(G)} [d_G(u) + d_G(v)] \\
&= \prod_{uv \in E(G_1)} [d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v)] \prod_{uv \in E(G_2)} [d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v)] \dots \prod_{uv \in E(G_k)} [d_{G_k}(u) + d_{G_k}(v)] \\
&= \Pi_1^*(G_1) \Pi_1^*(G_2) \dots \Pi_1^*(G_k) \\
&= \prod_{i=1}^k \Pi_1^*(G_i)
\end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 5.2.4**  $G_1$  ve  $G_2$  ayrık köşeli graflar olsun.  $G_1 + G_2$  grafinin çarpımsal toplam Zagreb indeksi için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\Pi_1^*(G) \leq \left[ \frac{M_1(G_1) + 2m_1n_2}{m_1} \right]^{m_1} \left[ \frac{M_1(G_2) + 2m_2n_1}{m_2} \right]^{m_2} \left[ \frac{2m_1n_2 + 2m_2n_1 + n_1n_2(n_1 + n_2)}{n_1n_2} \right]^{n_1n_2}.$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G_1$  ve  $G_2$  nin regüler graflar olmasıdır.

**İspat:**  $G = G_1 + G_2$  olsun. Çarpımsal toplam Zagreb indeksinin tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\Pi_1^*(G) &= \prod_{uv \in E(G)} [d_G(u) + d_G(v)] \\
&= \prod_{uv \in E(G_1)} [d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v) + 2n_2] \prod_{uv \in E(G_2)} [d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) + 2n_1] \\
&\quad \times \prod_{\substack{u \in V(G_1) \\ v \in V(G_2)}} [d_{G_1}(u) + d_{G_2}(v) + n_1 + n_2].
\end{aligned}$$

Son eşitlikte Lemma 5.2.2 uygulanarak aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\begin{aligned}
\Pi_1^*(G) &\leq \left[ \frac{\sum_{uv \in E(G_1)} (d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v) + 2n_2)}{m_1} \right]^{m_1} \left[ \frac{\sum_{uv \in E(G_2)} (d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) + 2n_1)}{m_2} \right]^{m_2} \\
&\quad \times \left[ \frac{\sum_{\substack{u \in V(G_1) \\ v \in V(G_2)}} (d_{G_1}(u) + d_{G_2}(v) + n_1 + n_2)}{n_1n_2} \right]^{n_1n_2} \\
&= \left[ \frac{M_1(G_1) + 2m_1n_2}{m_1} \right]^{m_1} \left[ \frac{M_1(G_2) + 2m_2n_1}{m_2} \right]^{m_2} \\
&\quad \times \left[ \frac{2m_1n_2 + 2m_2n_1 + n_1n_2(n_1 + n_2)}{n_1n_2} \right]^{n_1n_2}.
\end{aligned}$$

Şimdi eşitlik durumun gerçekleştiğini varsayalım. Bu durumda yukarıdaki eşitsizliklerin tamamı eşitlik olacaktır. O zaman Lemma 5.2.2 in eşitlik şartından  $\forall uv, xy \in E(G_1)$  için,

$$d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v) + 2n_2 = d_{G_1}(x) + d_{G_1}(y) + 2n_2$$

ve  $\forall uv, xy \in E(G_2)$  için,

$$d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) + 2n_1 = d_{G_2}(x) + d_{G_2}(y) + 2n_1.$$

Bu iki durum incelendiğinde eşitliğin ancak ve ancak  $G_1$  ve  $G_2$  regüler graflar olmasıyla sağlanacağı görülür. İspat tamamlanır.

$G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$  grafini düşünelim. Grafların toplam işleminin tanımı gereği ve  $\bar{n}_i = n - n_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) ve  $d_G(u) = \{d_{G_i}(u) + \bar{n}_i, u \in V(G_i)\}$  kullanılarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

**Sonuç 5.2.5**  $G_1, G_2, \dots, G_k$  ayrık köşeli graflar olsun. Eğer  $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$  ise,

$$\Pi_1^*(G) \leq \prod_{i=1}^k \left[ \frac{M_1(G_i) + 2m_i \bar{n}_i}{m_i} \right]^{m_i} \prod_{1 \leq i < j \leq k} \left[ \frac{2m_i n_j + 2m_j n_i + n_i n_j (\bar{n}_i + \bar{n}_j)}{n_i n_j} \right]^{n_i n_j}.$$

Örneğin;  $C_p$  ve  $C_q$  iki devir olsun. Bu durumda;

$$\Pi_1^*(C_p + C_q) = 2^{p+q} (p+2)^q (q+2)^p (p+q+4)^{pq}.$$

**Teorem 5.2.6**  $G$  ve  $H$  graflarının köklü çarpımı  $H(G)$  grafi olsun.  $H(G)$  grafinin çarpımsal toplam Zagreb indeksi için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\Pi_1^*[H(G)] \leq \left[ \frac{M_1(H) + \sum_{i \in V(H)} d_H(i) d(w_i)}{m_H} \right]^{m_H} \times \sum_{i=1}^k \left[ \frac{\left[ \frac{M_1(G_i) - d^2(w_i) - d_H(i) d(w_i) - \sum_{u \sim w_i} d_{G_i}(u)}{m_{G_i} - d(w_i)} \right]^{m_{G_i} - d(w_i)}}{\left[ \frac{d^2(w_i) + d_H(i) d(w_i) + \sum_{x \sim w_i} d_{G_i}(x)}{d(w_i)} \right]^{d(w_i)}} \right]$$

**İspat:** Çarpımsal toplam Zagreb indeksinin tanımını kullanarak;

$$\begin{aligned} \Pi_1^*[H(G)] &= \prod_{ij \in E(H)} [d_H(i) + d_H(j) + d(w_i) + d(w_j)] \\ &\quad \times \prod_{i=1}^k \left[ \prod_{\substack{ij \in E(G_i) \\ i, j \neq w_i}} [d_{G_i}(i) + d_{G_i}(j)] \prod_{w_i, j \in E(G_i)} [d_{G_i}(w_i) + d_{G_i}(j) + d_H(i)] \right] \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikte Lemma 5.2.2 uygulayarak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\begin{aligned} \Pi_1^*[H(G)] &\leq \left[ \frac{\sum_{ij \in E(H)} [d_H(i) + d_H(j) + d(w_i) + d(w_j)]}{m_H} \right]^{m_H} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^k \left[ \frac{\sum_{\substack{ij \in E(G_i) \\ i, j \neq w_i}} [d_{G_i}(i) + d_{G_i}(j)]}{m_{G_i} - d(w_i)} \right]^{m_{G_i} - d(w_i)} \\ &\quad \times \left[ \frac{\sum_{w_i, j \in E(G_i)} [d_{G_i}(w_i) + d_{G_i}(j) + d_H(i)]}{d(w_i)} \right]^{d(w_i)} \\ &= \left[ \frac{M_1(H) + \sum_{i \in V(H)} d_H(i)d(w_i)}{m_H} \right]^{m_H} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^k \left[ \frac{M_1(G_i) - d^2(w_i) - d_H(i)d(w_i) - \sum_{u \sim w_i} d_{G_i}(u)}{m_{G_i} - d(w_i)} \right]^{m_{G_i} - d(w_i)} \\ &\quad \times \left[ \frac{d^2(w_i) + d_H(i)d(w_i) + \sum_{x \sim w_i} d_{G_i}(x)}{d(w_i)} \right]^{d(w_i)} \end{aligned}$$

**Teorem 5.2.7**  $G_1$  ve  $G_2$  ayrık köşeli graflar olsun. Eğer  $G = G_1 \circ G_2$  ise,

$$\Pi_1^*(G) \leq \left[ \frac{M_1(G_1) + 2m_1n_2}{m_1} \right]^{m_1} \left[ \frac{M_1(G_2) + 2m_2}{m_2} \right]^{n_1m_2} \left[ \frac{2m_1n_2 + 2m_2n_1 + n_1n_2(n_2 + 1)}{n_1n_2} \right]^{n_1n_2}.$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G_1$  ve  $G_2$  nin regüler graflar olmasıdır.

**İspat:**  $G = G_1 \circ G_2$  olsun. Çarpımsal toplam Zagreb indeksinin tanımından;

$$\begin{aligned} \Pi_1^*(G) &= \prod_{uv \in E(G_1)} [d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v) + 2n_2] \left[ \prod_{uv \in E(G_2)} [d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) + 2] \right]^{n_1} \\ &\quad \times \prod_{\substack{u \in V(G_1) \\ v \in V(G_2)}} [d_{G_1}(u) + d_{G_2}(v) + n_2 + 1] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte Lemma 5.2.2 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\Pi_1^*(G) &\leq \left[ \frac{\sum_{uv \in E(G_1)} (d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v) + 2n_2)}{m_1} \right]^{m_1} \left[ \frac{\sum_{uv \in E(G_2)} (d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) + 2)}{m_2} \right]^{n_1 m_2} \\
&\quad \times \left[ \frac{\sum_{\substack{u \in V(G_1) \\ v \in V(G_2)}} (d_{G_1}(u) + d_{G_2}(v) + n_2 + 1)}{n_1 n_2} \right]^{n_1 n_2} \\
&= \left[ \frac{M_1(G_1) + 2m_1 n_2}{m_1} \right]^{m_1} \left[ \frac{M_1(G_2) + 2m_2}{m_2} \right]^{n_1 m_2} \\
&\quad \times \left[ \frac{2m_1 n_2 + 2m_2 n_1 + n_1 n_2 (n_2 + 1)}{n_1 n_2} \right]^{n_1 n_2}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Varsayalım ki teoremin eşitlik koşulu sağlansın. Bu durumda yukarıdaki eşitsizliklerin tamamı eşitlik olmalıdır. Yani  $\forall uv, xy \in E(G_1)$  için,

$$d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v) + 2n_2 = d_{G_1}(x) + d_{G_1}(y) + 2n_2$$

ve  $\forall uv, xy \in E(G_2)$  için,

$$d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) + 2 = d_{G_2}(x) + d_{G_2}(y) + 2$$

ve  $\forall u, x \in V(G_1), \forall v, y \in V(G_2)$  için,

$$d_{G_1}(u) + d_{G_2}(v) + n_2 + 1 = d_{G_1}(x) + d_{G_2}(y) + n_2 + 1$$

eşitliklerinin sağlanması gerekir. Buradan eşitliğin ancak ve ancak  $G_1$  ve  $G_2$  regüler graflar olmasıyla gerçekleşeceği görülür.

**Teorem 5.2.8**  $G_1$  ve  $G_2$  ayrık köşeli graflar olsun. Eğer  $G = G_1 \otimes G_2$  ise,

$$\Pi_1^*(G) \leq \left[ \frac{M_1(G_1)M_1(G_2)}{2m_1 m_2} \right]^{2m_1 m_2}.$$

Eşitlik için gerek ve yeter şart  $G_1$  ve  $G_2$  nin regüler graflar olması veya  $G_1$  in yıldız graf ve  $G_2$  nin regüler graf olmasıdır.

**İspat:**  $G = G_1 \circ G_2$  olsun. Çarpımsal toplam Zagreb indeksinin tanımından;

$$\begin{aligned}
\Pi_1^*(G) &= \prod_{(u_1, u_2)(v_1, v_2) \in E(G)} [d_G((u_1, u_2)) + d_G((v_1, v_2))] \\
&= \prod_{(u_1, u_2)(v_1, v_2) \in E(G)} [d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(v_1)d_{G_2}(v_2)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte Lemma 5.2.2 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\Pi_1^*(G) &\leq \left[ \frac{\sum_{(u_1, u_2)(v_1, v_2) \in E(G)} [d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(v_1)d_{G_2}(v_2)]}{2m_1m_2} \right]^{2m_1m_2} \\
&= \left[ \frac{\sum_{(u_1, u_2) \in E(G_1)} \sum_{(v_1, v_2) \in E(G_2)} [d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(v_1)d_{G_2}(v_2)]}{2m_1m_2} \right]^{2m_1m_2} \\
&= \left[ \frac{\sum_{(u_1, u_2) \in E(G_1)} M_1(G_2) [d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1)]}{2m_1m_2} \right]^{2m_1m_2} \\
&= \left[ \frac{M_1(G_1)M_1(G_2)}{2m_1m_2} \right]^{2m_1m_2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise istenendir. Şimdi eşitlik koşulunun sağlandığını düşünelim. Bu durumda tüm eşitsizlikler eşitliğe dönüşür. Böylece her  $u_1v_1, a_1b_1 \in E(G_1)$  ve her  $u_2v_2, a_2b_2 \in E(G_2)$  için,

$$d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(v_1)d_{G_2}(v_2) = d_{G_1}(a_1)d_{G_2}(a_2) + d_{G_1}(b_1)d_{G_2}(b_2)$$

eşitliğin sağlanacağı Lemma 5.2.2 den açıktır. Buradan eşitliğin sağlanması için ya  $G_1$  ve  $G_2$  regüler graflar ya da  $G_1$  yıldız graf ve  $G_2$  regüler graf olması gerektiği sonucuna ulaşılır. Karşıt olarak  $G_1$  ve  $G_2$  regüler graflar ya da  $G_1$  yıldız graf ve  $G_2$  regüler graf olması durumunda eşitliğin sağlanacağı kolaylıkla görülür.

Örneğin;  $C_p, C_q$  devirlerini ve  $K_2$  tam grafini göz önüne alalım. Bu durumda;

$$\Pi_1^*(C_p \otimes C_q) = 2^{8pq} \text{ ve } \Pi_1^*(K_2 \otimes C_p) = 2^{4p}.$$

**Teorem 5.2.9**  $G_1$  ve  $G_2$  ayrık köşeli graflar olsun. Eğer  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının kartezyen çarpımı  $G = G_1 \times G_2$  grafi ise,

$$\Pi_1^*(G) \leq \frac{[4m_1m_2 + n_1M_1(G_2)]^{n_1m_2} [4m_1m_2 + n_2M_1(G_1)]^{n_2m_1}}{n_1^{m_2} n_2^{m_1} m_2^{n_1m_2} m_1^{n_2m_1}}.$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G_1$  ve  $G_2$  nin regüler graflar olmasıdır.

**İspat:**  $G = G_1 \times G_2$  olsun. Çarpımsal toplam Zagreb indeksinin tanımından;

$$\begin{aligned}
\Pi_1^*(G) &= \prod_{(u_1, u_2)(v_1, v_2) \in E(G)} [d_G((u_1, u_2)) + d_G((v_1, v_2))] \\
&= \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2, v_2 \in E(G_2)} [2d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2)] \\
&\quad \times \prod_{u_2 \in V(G_2)} \prod_{u_1, v_1 \in E(G_1)} [2d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1)].
\end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Bu eşitlikte Lemma 5.2.2 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\Pi_1^*(G) &\leq \prod_{u_1 \in V(G_1)} \left[ \frac{\sum_{u_2, v_2 \in E(G_2)} [2d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2)]}{m_2} \right]^{m_2} \\
&\quad \times \prod_{u_2 \in V(G_2)} \left[ \frac{\sum_{u_1, v_1 \in E(G_1)} [2d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1)]}{m_1} \right]^{m_1} \\
&= \frac{1}{m_2^{n_1 m_2} m_1^{n_2 m_1}} \prod_{u_1 \in V(G_1)} [2m_2 d_{G_1}(u_1) + M_1(G_2)]^{m_2} \\
&\quad \times \prod_{u_2 \in V(G_2)} [2m_1 d_{G_2}(u_2) + M_1(G_1)]^{m_1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar elde edilen son eşitsizlikte Lemma 5.2.2 uygulandığında,

$$\begin{aligned}
\Pi_1^*(G) &\leq \frac{1}{m_2^{n_1 m_2} m_1^{n_2 m_1}} \left[ \frac{\sum_{u_1 \in V(G_1)} [2m_2 d_{G_1}(u_1) + M_1(G_2)]}{n_1} \right]^{n_1 m_2} \\
&\quad \times \left[ \frac{\sum_{u_2 \in V(G_2)} [2m_1 d_{G_2}(u_2) + M_1(G_1)]}{n_2} \right]^{n_2 m_1} \\
&= \frac{[4m_1 m_2 + n_1 M_1(G_2)]^{n_1 m_2} [4m_1 m_2 + n_2 M_1(G_1)]^{n_2 m_1}}{n_1^{m_2} n_2^{m_1} m_2^{n_1 m_2} m_1^{n_2 m_1}}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Eşitlik koşulunun sağlandığını varsayalım. Bu durumda yukarıdaki eşitsizliklerin tamamı eşitlik olur. Buradan her  $u_2, v_2, a_2, b_2 \in E(G_2)$  için,

$$2d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2) = 2d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(a_2) + d_{G_2}(b_2)$$

ve her  $u_1, v_1, a_1, b_1 \in E(G_1)$  için,

$$2d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1) = 2d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(a_1) + d_{G_1}(b_1)$$

ve her  $u_1, v_1 \in V(G_1)$  için,

$$2m_2 d_{G_1}(u_1) + M_1(G_2) = 2m_2 d_{G_1}(v_1) + M_1(G_2)$$



$$\begin{aligned} \Pi_1^*(G) &\leq \prod_{u_1 \in V(G_1)} \left[ \frac{2m_2 d_{G_1}(u_1) + M_1(G_2) d_{G_1}(u_1) + M_1(G_2)}{m_2} \right]^{m_2} \\ &\quad \times \prod_{u_2 \in V(G_2)} \left[ \frac{2m_1 d_{G_2}(u_2) + M_1(G_1) d_{G_2}(u_2) + M_1(G_1)}{m_1} \right]^{m_1} \\ &\quad \times \prod_{u_1 v_1 \in E(G_1)} \left[ \frac{2m_2 (d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(v_1)) + 2M_1(G_2) d_{G_1}(u_1) + M_1(G_2) (d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(v_1))}{2m_2} \right]^{2m_2}. \end{aligned}$$

Bu son bağıntıda Lemma 5.2.2 uygulanırsa istenen sonuca ulaşılır. Eşitlik durumu önceki teoremin ispatındaki gibi yapılır.

**Lemma 5.2.11**  $H_N = G_N \square \dots \square G_2(U_2) \square G_1(U_1)$  genelleştirilmiş hiyerarşik çarpımdaki bir  $x = (x_N, x_{N-1}, \dots, x_2, x_1)$  köşesinin derecesi,

$$\delta(x) = \delta(x_1) + \chi_{U_1}(x_1) \delta(x_2) + \dots + [\chi_{U_1}(x_1) \dots \chi_{U_{N-1}}(x_{N-1})] \delta(x_N).$$

Burada  $\delta$  ve  $\chi_{U_i}$  sırasıyla, derece ve  $U_i$  kümesine ait ise 1,  $U_i$  kümesi dışındaysa 0 olan  $U_i$  kümesinin karakteristik fonksiyonunu gösterir. (Arezoomand ve Taeri, 2013)

**Teorem 5.2.12**  $\Gamma = G \square H(U)$  olsun. O zaman

$$\Pi_1^*(\Gamma) \leq \frac{\left[ n_1 M_1(G_2) + 2m_1 \sum_{x \in U} d(x) \right]^{n_1 m_2} \left[ |U| M_1(G_2) + 2m_1 \sum_{x \in U} d(x) \right]^{m_1 |U|}}{(n_1 m_2)^{n_1 m_2} (m_1 |U|)^{m_1 |U|}}.$$

**İspat:**  $U$  ya karşılık gelen  $G$  ve  $H$  graflarının hiyerarşik tanımından aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \Pi_1^*(\Gamma) &= \prod_{u_1 \in V(G)} \prod_{u_2 v_2 \in E(H)} (d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2) + d_{G_1}(u_1) [\chi_U(u_2) + \chi_U(v_2)]) \\ &\quad \times \prod_{u_2 \in U} \prod_{u_1 v_1 \in E(G)} (2d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1)). \end{aligned}$$

Lemma 5.2.2 yardımıyla biz aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\begin{aligned} \Pi_1^*(\Gamma) &\leq \prod_{u_1 \in V(G)} \left[ \frac{M_1(G_2) + d_{G_1}(u_1) \sum_{x \in U} d(x)}{m_2} \right]^{m_2} \prod_{u_2 \in U} \left[ \frac{2m_1 d_{G_2}(u_2) + M_1(G_1)}{m_1} \right]^{m_1} \\ &\leq \frac{\left[ n_1 M_1(G_2) + 2m_1 \sum_{x \in U} d(x) \right]^{n_1 m_2} \left[ |U| M_1(G_2) + 2m_1 \sum_{x \in U} d(x) \right]^{m_1 |U|}}{(n_1 m_2)^{n_1 m_2} (m_1 |U|)^{m_1 |U|}}. \end{aligned}$$

**Teorem 5.2.13**  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının lexicografik çarpımı  $G = G_1[G_2]$  grafi olsun. Bu durumdan  $G$  nin çarpımsal toplam Zagreb indeksi için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\Pi_1^*(G) \leq \frac{[4m_1m_2n_2 + n_1M_1(G_2)]^{n_1m_2} [4m_1m_2n_2 + n_2^3M_1(G_1)]^{m_2^2m_1}}{(n_1m_2)^{n_1m_2} (m_1n_2^2)^{m_1n_2^2}}.$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G_1$  ve  $G_2$  nin regüler graflar olmasıdır.

**İspat:** Çarpımsal toplam Zagreb indeksin tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \Pi_1^*(G) &= \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2v_2 \in E(G_2)} [2n_2d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2)] \\ &\quad \times \prod_{u_1v_1 \in E(G_1)} \prod_{\{u_2, v_2\} \subset V(G_2)} [n_2(d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1)) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2)] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte Lemma 5.2.2 uygulayalım. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \Pi_1^*(G) &= \prod_{u_1 \in V(G_1)} \left[ \frac{\sum_{u_2v_2 \in E(G_2)} (2n_2d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2))}{m_2} \right]^{m_2} \\ &\quad \times \prod_{u_1v_1 \in E(G_1)} \left[ \frac{\sum_{\{u_2, v_2\} \subset V(G_2)} (n_2(d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1)) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2))}{n_2^2} \right]^{m_2^2} \\ &= \frac{1}{m_2^{n_1m_2} n_2^{2n_2^2m_1}} \prod_{u_1 \in V(G_1)} [2n_2m_2d_{G_1}(u_1) + M_1(G_2)]^{m_2} \\ &\quad \times \prod_{u_1v_1 \in E(G_1)} [n_2^3(d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1)) + 4m_2n_2]^{n_2^2} \\ &\leq \frac{1}{m_2^{n_1m_2} n_2^{2n_2^2m_1}} \left[ \frac{\sum_{u_1 \in V(G_1)} [2n_2m_2d_{G_1}(u_1) + M_1(G_2)]^{n_1m_2}}{n_1} \right]^{n_1m_2} \\ &\quad \times \left[ \frac{\sum_{u_1 \in V(G_1)} [n_2^3(d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1)) + 4m_2n_2]^{n_2^2m_1}}{m_1} \right]^{n_2^2m_1} \\ &= \frac{[4m_1m_2n_2 + n_1M_1(G_2)]^{n_1m_2} [4m_1m_2n_2 + n_2^3M_1(G_1)]^{m_2^2m_1}}{(n_1m_2)^{n_1m_2} (m_1n_2^2)^{m_1n_2^2}}. \end{aligned}$$

Şimdi eşitlik durumunun sağlandığını kabul edelim. Bu durumda yukarıdaki eşitsizliklerin tamamı eşitlik olur. Buradan her  $u_1, a_1 \in V(G_1)$ ,  $u_2v_2, a_2b_2 \in E(G_2)$  için,

$$2n_2d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2) = 2n_2d_{G_1}(a_1) + d_{G_2}(a_2) + d_{G_2}(b_2)$$

ve her  $u_1v_1, a_1b_1 \in E(G_1)$ ,  $\{u_2, v_2\}, \{a_2, b_2\} \subset V(G_2)$  için,

$$n_2(d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1)) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2) = n_2(d_{G_1}(a_1) + d_{G_1}(b_1)) + d_{G_2}(a_2) + d_{G_2}(b_2)$$

sağlanmalıdır. Yani  $G_1$  ve  $G_2$  regüler graflardır.

Örneğin;  $C_p$  ve  $C_q$  devirlerini düşünelim. Bu durumda,

$$\Pi_1^*(C_p [C_q]) = (4p + 4)^{pq(q+1)}.$$

### 5.3 Çarpımsal Zagreb Eş-İndeksleri İçin Sınırlar

Bu bölümde birleşim, toplama işlemi, tensor çarpım, kartezyen çarpım, kuvvetli çarpım, lexicografik çarpım gibi graf işlemlerinin çarpımsal Zagreb eş-İndeksleri için bazı sınır değerleri verilecektir.

**Tanım 5.3.1** Bir  $G$  grafının birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb eş-İndeksleri

$$\bar{\Pi}_1(G) = \prod_{uv \in E(G)} [d_G(u) + d_G(v)] \text{ ve } \bar{\Pi}_2(G) = \prod_{uv \in E(G)} [d_G(u)d_G(v)]$$

ile tanımlanır. (Xu ve arkadaşları, 2013)

**Lemma 5.3.2**  $G$   $n$ . mertebeden bir bağlantılı graf olsun. Bu durumda;

$$\Pi_2(G)\bar{\Pi}_2(G) = (\Pi_1(G))^{\frac{n-1}{2}}$$

dir. (Xu ve arkadaşları, 2013)

**Teorem 5.3.3**  $G_1$  ve  $G_2$  ayrık köşeli iki graf olsun.  $G = G_1 \cup G_2$  grafının birinci çarpımsal Zagreb eş-İndeksi için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\bar{\Pi}_1(G) \geq 2^{n_1 n_2} \prod_{i=1}^2 \left[ \bar{\Pi}_1(G_i) \sqrt{\Pi_1^{n_i}(G_i)} \right].$$

Burada  $\bar{n}_i = |V(G_i)| - n_i$ . Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G_1$  ve  $G_2$  nin  $r$ -regüler graflar olmasıdır.

**İspat:** Birinci çarpımsal Zagreb eş-İndeksin tanımından,

$$\begin{aligned}
\overline{\Pi}_1(G) &= \prod_{uv \in E(G)} [d_G(u) + d_G(v)] \\
&= \prod_{u_1 v_1 \in E(G_1)} [d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1)] \prod_{u_2 v_2 \in E(G_2)} [d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2)] \\
&\quad \times \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2 \in V(G_2)} [d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2)],
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 5.2.2 yardımıyla aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\begin{aligned}
\overline{\Pi}_1(G) &\geq \overline{\Pi}_1(G_1) \overline{\Pi}_1(G_2) \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2 \in V(G_2)} [2\sqrt{d_{G_1}(u_1) d_{G_2}(u_2)}] \\
&= 2^{n_1 n_2} \prod_{i=1}^2 \left[ \overline{\Pi}_1(G_i) \sqrt[4]{\prod_{u_1 \in V(G_i)} d_{G_i}(u_1)} \right].
\end{aligned}$$

Şimdi teoremin eşitlik koşulunun sağlandığını varsayalım. Bu durumda yukarıdaki eşitsizliklerin tamamı eşitlik haline dönüşür. Bu nedenle  $\forall u_1 \in V(G_1)$  ve  $\forall u_2 \in V(G_2)$  için,

$$d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) = 2\sqrt{d_{G_1}(u_1) d_{G_2}(u_2)}$$

olur. Buradan Lemma 5.2.2 in eşitlik koşulu gereği  $\forall u_1 \in V(G_1)$  ve  $\forall u_2 \in V(G_2)$  için  $d_{G_1}(u_1) = d_{G_2}(u_2)$  elde edilir. Bu ise  $G_1$  ve  $G_2$   $r$ -regüler graflar olmasıyla mümkündür. İspat tamamlanır. Karşıt olarak  $G_1$  ve  $G_2$   $r$ -regüler graflar olsun. O zaman

$$\overline{\Pi}_1(G) = \prod_{uv \in E(G)} (2r) = (2r)^m = (2r)^{\overline{m_1} + \overline{m_2} + n_1 n_2}$$

ve

$$\begin{aligned}
2^{n_1 n_2} \overline{\Pi}_1(G_1) \overline{\Pi}_1(G_2) \sqrt[4]{\prod_{u_1 \in V(G_1)} d_{G_1}(u_1) \prod_{u_2 \in V(G_2)} d_{G_2}(u_2)} &= 2^{n_1 n_2} (2r)^{\overline{m_1}} (2r)^{\overline{m_2}} \sqrt[4]{r^{2n_1 n_2} r^{2n_1 n_2}} \\
&= (2r)^{\overline{m_1} + \overline{m_2} + n_1 n_2}.
\end{aligned}$$

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

**Teorem 5.3.4**  $G_1$  ve  $G_2$  ayrık köşeli iki graf olsun.  $G = G_1 \cup G_2$  grafının ikinci çarpımsal Zagreb eş- indeksi için aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$\overline{\Pi}_2(G) = \prod_{i=1}^2 \left[ \overline{\Pi}_2(G_i) \sqrt[4]{\prod_{u_1 \in V(G_i)} d_{G_i}(u_1)} \right].$$

Burada  $\overline{n}_i = |V(G)| - n_i$ .

**İspat:** İkinci çarpımsal Zagreb eş- indeksin tanımı kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
\bar{\Pi}_2(G) &= \prod_{uv \in E(G)} [d_G(u)d_G(v)] \\
&= \prod_{u_1v_1 \in E(G_1)} [d_{G_1}(u_1)d_{G_1}(v_1)] \prod_{u_2v_2 \in E(G_2)} [d_{G_2}(u_2)d_{G_2}(v_2)] \\
&\quad \times \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2 \in V(G_2)} [d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2)] \\
&= \prod_{i=1}^2 [\bar{\Pi}_2(G_i) \sqrt{\bar{\Pi}_1^{m_i}(G_i)}].
\end{aligned}$$

**Teorem 5.3.5**  $G_1$  ve  $G_2$  ayrık köşeli iki graf olsun.  $G = G_1 + G_2$  grafının birinci çarpımsal Zagreb eş- indeksi için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\bar{\Pi}_1(G) > (2\sqrt{2})^{\bar{m}_1 + \bar{m}_2} \sqrt{n_1^{\bar{m}_2} n_2^{\bar{m}_1}} \sqrt{\bar{\Pi}_1(G_1) \bar{\Pi}_1(G_2)}.$$

**İspat:**  $G = G_1 + G_2$  grafi verilsin. Birinci çarpımsal Zagreb eş- indeksin tanımından,

$$\begin{aligned}
\bar{\Pi}_1(G) &= \prod_{uv \in E(G)} [d_G(u) + d_G(v)] \\
&= \prod_{u_1v_1 \in E(G_1)} [d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1) + 2n_2] \prod_{u_2v_2 \in E(G_2)} [d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2) + 2n_1]
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu eşitlikte Lemma 5.2.2 kullanılırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\begin{aligned}
\bar{\Pi}_1(G) &> \prod_{u_1v_1 \in E(G_1)} [2\sqrt{2n_2(d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1))}] \prod_{u_2v_2 \in E(G_2)} [2\sqrt{2n_1(d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2))}] \\
&= (2\sqrt{2})^{\bar{m}_1 + \bar{m}_2} \sqrt{n_1^{\bar{m}_2} n_2^{\bar{m}_1}} \sqrt{\bar{\Pi}_1(G_1) \bar{\Pi}_1(G_2)}.
\end{aligned}$$

Varsayalım teoremin eşitlik durumu sağlansın. Bu durumda yukarıdaki eşitsizliklerin tamamı eşitlik haline dönüşür. Buradan  $\forall u_1v_1 \in E(G_1)$  ve  $\forall u_2v_2 \in E(G_2)$  için,

$$d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(v_1) + 2n_2 = 2\sqrt{2n_2(d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1))}$$

ve

$$d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2) + 2n_1 = 2\sqrt{2n_1(d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2))}$$

olmalıdır. Lemma 5.2.2 in eşitlik koşulu gereği  $\forall u_1v_1 \in E(G_1)$  ve  $\forall u_2v_2 \in E(G_2)$  için  $d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(v_1) = 2n_2$  ve  $d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2) = 2n_1$  elde edilir. Bu ise mümkün değildir. Kabul ile çelişiriz. Yani, eşitlik durumu sağlanmaz.

**Teorem 5.3.6**  $G_1$  ve  $G_2$  ayrık köşeli iki graf olsun.  $G = G_1 + G_2$  grafının ikinci çarpımsal Zagreb eş- indeksi için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\bar{\Pi}_2(G) > 4^{\bar{m}_1 + \bar{m}_2} n_2^{\bar{m}_1} n_1^{\bar{m}_2} \sqrt{\bar{\Pi}_2(G_1) \bar{\Pi}_2(G_2)}.$$

**İspat:**  $G = G_1 + G_2$  grafını göz önüne alalım. İkinci çarpımsal Zagreb eş-indeksin tanımı gereği aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz.

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}_1(G) &= \prod_{uv \in E(G)} [d_G(u)d_G(v)] \\ &= \prod_{u_1v_1 \in E(G_1)} (d_{G_1}(u_1) + n_2)(d_{G_1}(v_1) + n_2) \prod_{u_2v_2 \in E(G_2)} (d_{G_2}(u_2) + n_1)(d_{G_2}(v_2) + n_1).\end{aligned}$$

Burada Lemma 5.2.2 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}_2(G) &> \prod_{u_1v_1 \in E(G_1)} (2\sqrt{d_{G_1}(u_1)n_2})(2\sqrt{d_{G_1}(v_1)n_2}) \prod_{u_2v_2 \in E(G_2)} (2\sqrt{d_{G_2}(u_2)n_1})(2\sqrt{d_{G_2}(v_2)n_1}) \\ &= 4^{\bar{m}_1 + \bar{m}_2} n_2^{\bar{m}_1} n_1^{\bar{m}_2} \sqrt{\bar{\Pi}_2(G_1)\bar{\Pi}_2(G_2)}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise istenendir. Şimdi teoremin eşitlik durumunun sağlandığını kabul edelim. Bu durumda yukarıdaki eşitsizliklerin eşitlik olması gerekir. Bu ise  $\forall u_1v_1 \in E(G_1)$  ve  $\forall u_2v_2 \in E(G_2)$  için,

$$(d_{G_1}(u_1) + n_2)(d_{G_1}(v_1) + n_2) = (2\sqrt{d_{G_1}(u_1)n_2})(2\sqrt{d_{G_1}(v_1)n_2})$$

ve

$$(d_{G_2}(u_2) + n_1)(d_{G_2}(v_2) + n_1) = (2\sqrt{d_{G_2}(u_2)n_1})(2\sqrt{d_{G_2}(v_2)n_1})$$

anlamına gelir. Buradan Lemma 5.2.2 in eşitlik koşulu gereği  $\forall u_1v_1 \in E(G_1)$  ve  $\forall u_2v_2 \in E(G_2)$  için  $d_{G_1}(u_1) = d_{G_1}(v_1) = n_2$  ve  $d_{G_2}(u_2) = d_{G_2}(v_2) = n_1$  elde edilir. Bu ise mümkün değildir. Kabul ile çelişiriz. Yani, eşitlik durumu sağlanmaz.

**Teorem 5.3.7**  $G_1$  ve  $G_2$  ayrık köşeli iki graf olsun. Eğer  $G = G_1 \circ G_2$  ise

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}_1(G) &> 3^{n_1n_2(n_1-1)} (2\sqrt{2})^{\bar{m}_1 + \bar{m}_2} \sqrt{n_2^{\bar{m}_1}} \sqrt[3]{(n_2 + 1)^{n_1n_2(n_1-1)}} \sqrt{\bar{\Pi}_1(G_1)\bar{\Pi}_1(G_2)} \\ &\quad \times \sqrt[6]{[\bar{\Pi}_1(G_1)]^{n_2(n_1-1)} [\bar{\Pi}_1(G_2)]^{n_1(n_1-1)}}.\end{aligned}$$

**İspat:**  $G = G_1 \circ G_2$  olsun. Birinci çarpımsal Zagreb eş-indeksin tanımı gereği aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz.

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}_1(G) &= \prod_{uv \in E(G)} [d_G(u) + d_G(v)] \\ &= \prod_{u_1v_1 \in E(G_1)} (d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1) + 2n_2) \left[ \prod_{u_2v_2 \in E(G_2)} [d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2) + 2] \right]^{n_1} \\ &\quad \times \left[ \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2 \in V(G_2)} [d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) + n_2 + 1] \right]^{n_1-1}.\end{aligned}$$

Bu eşitlikte Lemma 5.2.2 kullanılırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_1(G) &> \prod_{u_1 v_1 \notin E(G_1)} \left( 2\sqrt{2n_2(d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1))} \right) \left[ \prod_{u_2 v_2 \notin E(G_2)} 2\sqrt{2(d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2))} \right]^{n_1} \\ &\quad \times \left[ \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2 \in V(G_2)} 3\sqrt[3]{d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2)(n_2 + 1)} \right]^{n_1 - 1} \\ &= 3^{n_1 n_2 (n_1 - 1)} (2\sqrt{2})^{\overline{m_1} + n_1 \overline{m_2}} \sqrt{n_2^{\overline{m_1}}} \sqrt[3]{(n_2 + 1)^{n_1 n_2 (n_1 - 1)}} \sqrt{\overline{\Pi}_1(G_1) \overline{\Pi}_1^{n_1}(G_2)} \\ &\quad \times \sqrt[4]{\left[ \overline{\Pi}_1(G_1) \right]^{n_2 (n_1 - 1)} \left[ \overline{\Pi}_1(G_2) \right]^{n_1 (n_1 - 1)}}. \end{aligned}$$

Bu ise istenendir. Şimdi teoremin eşitlik durumunun sağlandığını kabul edelim. Bu durumda  $\forall u_1 \in V(G_1)$  ve  $\forall u_2 \in V(G_2)$  için,

$$d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) + n_2 + 1 = 3\sqrt[3]{d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2)(n_2 + 1)}$$

olmalıdır. Böylece Lemma 5.2.2 in eşitlik koşuluna göre,  $\forall u_1 \in V(G_1)$  ve  $\forall u_2 \in V(G_2)$  için  $d_{G_1}(u_1) = d_{G_2}(u_2) = n_2 + 1$  elde edilir. Bu ise mümkün değildir. Kabul ile çelişiriz. Yani eşitlik durumu sağlanmaz.

**Teorem 5.3.8**  $G_1$  ve  $G_2$  iki graf olsun. Eğer  $G = G_1 \circ G_2$  ise

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_2(G) &\geq 4^{\overline{m_1} + n_1 \overline{m_2} + n_1 n_2 (n_1 - 1)} \sqrt{n_2^{2\overline{m_1} + n_1 n_2 (n_1 - 1)}} \sqrt{\overline{\Pi}_2(G_1) \overline{\Pi}_2^{n_1}(G_2)} \\ &\quad \times \sqrt[4]{\left[ \overline{\Pi}_1(G_1) \right]^{n_2 (n_1 - 1)} \left[ \overline{\Pi}_1(G_2) \right]^{n_1 (n_1 - 1)}}. \end{aligned}$$

Eşitlik için gerek ve yeter şart  $G_1$  in  $n_2$ -regüler ve  $G_2 \cong \frac{n_2}{2} K_2$  olmasıdır.

**İspat:**  $G = G_1 \circ G_2$  olsun. İkinci çarpımsal Zagreb eş-indeksin tanımı gereği aşağıdaki bağlantıyı yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_2(G) &= \prod_{uv \in E(G)} [d_G(u)d_G(v)] \\ &= \prod_{u_1 v_1 \notin E(G_1)} (d_{G_1}(u_1) + n_2)(d_{G_1}(v_1) + n_2) \left[ \prod_{u_2 v_2 \in E(G_2)} (d_{G_2}(u_2) + 1)(d_{G_2}(v_2) + 1) \right]^{n_1} \\ &\quad \times \left[ \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2 \in V(G_2)} (d_{G_1}(u_1) + n_2)(d_{G_2}(u_2) + 1) \right]^{n_1 - 1}. \end{aligned}$$

Buradan Lemma 5.2.2 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\bar{\Pi}_2(G) &\geq \prod_{u_1 v_1 \in E(G_1)} (2\sqrt{d_{G_1}(u_1)n_2})(2\sqrt{d_{G_1}(v_1)n_2}) \left[ \prod_{u_2 v_2 \in E(G_2)} (2\sqrt{d_{G_2}(u_2)})(2\sqrt{d_{G_2}(v_2)}) \right]^{n_1} \\
&\quad \times \left[ \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2 \in V(G_2)} (2\sqrt{d_{G_1}(u_1)n_2})(2\sqrt{d_{G_2}(u_2)}) \right]^{n_1-1} \\
&= 4^{\bar{m}_1+n_1\bar{m}_2+n_1n_2(n_1-1)} \sqrt{n_2^{2\bar{m}_1+n_1n_2(n_1-1)}} \sqrt{\bar{\Pi}_2(G_1)\bar{\Pi}_2^{n_1}(G_2)} \\
&\quad \times \sqrt[4]{[\Pi_1(G_1)]^{n_2(n_1-1)} [\Pi_1(G_2)]^{n_1(n_1-1)}}
\end{aligned}$$

istenen sonuç elde edilir. Teoremin eşitlik koşulunun gerçekleştiğini varsayalım. Bu durumda yukarıdaki eşitsizlikler, eşitlik durumuna dönüşür. Bu ise  $\forall u_1 \in V(G_1)$  ve  $\forall u_2 \in V(G_2)$  için,

$$d_{G_1}(u_1) + n_2 = 2\sqrt{d_{G_1}(u_1)n_2}$$

ve

$$d_{G_2}(u_2) + 1 = 2\sqrt{d_{G_2}(u_2)}$$

anlamına gelir. Böylece Lemma 5.2.2 in eşitlik koşuluna göre,  $\forall u_1 \in V(G_1)$  ve  $\forall u_2 \in V(G_2)$  için  $d_{G_1}(u_1) = n_2$  ve  $d_{G_2}(u_2) = 1$  elde edilir. Bu ise  $G_1$ ,  $n_2$ -regüler ve  $G_2 \cong \frac{n_2}{2}K_2$  olması ile mümkündür. Karşıt olarak  $G_1$ ,  $n_2$ -regüler ve  $G_2 \cong \frac{n_2}{2}K_2$  alalım. O zaman,

$$\begin{aligned}
\bar{\Pi}_2(G) &= \prod_{u_1 v_1 \in E(G_1)} (d_{G_1}(u_1) + n_2)(d_{G_1}(v_1) + n_2) \left[ \prod_{u_2 v_2 \in E(G_2)} (d_{G_2}(u_2) + 1)(d_{G_2}(v_2) + 1) \right]^{n_1} \\
&\quad \times \left[ \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2 \in V(G_2)} (d_{G_1}(u_1) + n_2)(d_{G_2}(u_2) + 1) \right]^{n_1-1} \\
&= (4n_2^2)^{\bar{m}_1} 4^{n_1\bar{m}_2} (4n_2)^{n_1n_2(n_1-1)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&4^{\bar{m}_1+n_1\bar{m}_2+n_1n_2(n_1-1)} \sqrt{n_2^{2\bar{m}_1+n_1n_2(n_1-1)}} \sqrt{\bar{\Pi}_2(G_1)\bar{\Pi}_2^{n_1}(G_2)} \\
&\quad \times \sqrt[4]{[\Pi_1(G_1)]^{n_2(n_1-1)} [\Pi_1(G_2)]^{n_1(n_1-1)}} \\
&= 4^{\bar{m}_1+n_1\bar{m}_2+n_1n_2(n_1-1)} \sqrt{n_2^{2\bar{m}_1+n_1n_2(n_1-1)}} \sqrt{n_2^{2\bar{m}_1}} \sqrt[4]{n_2^{2n_1n_2(n_1-1)}} \\
&= (4n_2^2)^{\bar{m}_1} 4^{n_1\bar{m}_2} (4n_2)^{n_1n_2(n_1-1)}.
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanır.

**Tanım 5.3.9** Bir  $G$  grafının total çarpımsal toplam Zagreb indeksi,

$$\bar{\Pi}(G) = \prod_{u,v \in V(G)} [d_G(u) + d_G(v)]$$

ile tanımlanır. (Xu ve arkadaşları, 2013)

**Teorem 5.3.10**  $G_1$  ve  $G_2$  ayrık köşeli iki graf olsun. Eğer  $G = G_1 \otimes G_2$  ise

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_1(G) &\geq 2^{m_1 \bar{m}_2 + m_2 \bar{m}_1 + \bar{m}_1 \bar{m}_2} \sqrt{\prod_1^{\binom{n_2}{2}}(G_1) \prod_1^{\binom{n_1}{2}}(G_2) \prod_2^{\bar{m}_2}(G_1) \prod_2^{\bar{m}_1}(G_2)} \\ &\quad \times \left( \bar{\Pi}(G_1) \right)^{n_2} \left( \bar{\Pi}(G_2) \right)^{n_1} \sqrt{\left( \bar{\Pi}_2(G_1) \right)^{\binom{n_2}{2}} \left( \bar{\Pi}_2(G_2) \right)^{\binom{n_1}{2}}}. \end{aligned}$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G_1$  ve  $G_2$  in regüler graflar olmasıdır.

**İspat:** Birinci çarpımsal Zagreb eş-indeksin tanımından aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_1(G) &= \prod_{uv \in E(G)} [d_G(u) + d_G(v)] \\ &= \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{\{u_2, v_2\} \subset V(G_2)} (d_{G_1}(u_1) d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(u_1) d_{G_2}(v_2)) \\ &\quad \times \prod_{u_2 \in V(G_2)} \prod_{\{u_1, v_1\} \subset V(G_1)} (d_{G_1}(u_1) d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(v_1) d_{G_2}(u_2)) \\ &\quad \times \prod_{u_1 v_1 \in E(G_1)} \prod_{u_2 v_2 \notin E(G_2)} (d_{G_1}(u_1) d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(v_1) d_{G_2}(v_2)) \\ &\quad \times \prod_{u_2 v_2 \in E(G_2)} \prod_{u_1 v_1 \notin E(G_1)} (d_{G_1}(u_1) d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(v_1) d_{G_2}(v_2)) \\ &\quad \times \prod_{u_1 v_1 \notin E(G_1)} \prod_{u_2 v_2 \notin E(G_2)} (d_{G_1}(u_1) d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(v_1) d_{G_2}(v_2)). \end{aligned}$$

Buradan Lemma 5.2.2 kullanılarak,

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_1(G) &\geq \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{\{u_2, v_2\} \subset V(G_2)} d_{G_1}(u_1) (d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2)) \\ &\quad \times \prod_{u_2 \in V(G_2)} \prod_{\{u_1, v_1\} \subset V(G_1)} d_{G_2}(u_2) (d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1)) \\ &\quad \times \prod_{u_1 v_1 \in E(G_1)} \prod_{u_2 v_2 \notin E(G_2)} 2\sqrt{d_{G_1}(u_1) d_{G_2}(u_2) d_{G_1}(v_1) d_{G_2}(v_2)} \\ &\quad \times \prod_{u_2 v_2 \in E(G_2)} \prod_{u_1 v_1 \notin E(G_1)} 2\sqrt{d_{G_1}(u_1) d_{G_2}(u_2) d_{G_1}(v_1) d_{G_2}(v_2)} \\ &\quad \times \prod_{u_1 v_1 \notin E(G_1)} \prod_{u_2 v_2 \notin E(G_2)} 2\sqrt{d_{G_1}(u_1) d_{G_2}(u_2) d_{G_1}(v_1) d_{G_2}(v_2)} \\ &= 2^{m_1 \bar{m}_2 + m_2 \bar{m}_1 + \bar{m}_1 \bar{m}_2} \sqrt{\prod_1^{\binom{n_2}{2}}(G_1) \prod_1^{\binom{n_1}{2}}(G_2) \prod_2^{\bar{m}_2}(G_1) \prod_2^{\bar{m}_1}(G_2)} \\ &\quad \times \left( \bar{\Pi}(G_1) \right)^{n_2} \left( \bar{\Pi}(G_2) \right)^{n_1} \sqrt{\left( \bar{\Pi}_2(G_1) \right)^{\binom{n_2}{2}} \left( \bar{\Pi}_2(G_2) \right)^{\binom{n_1}{2}}} \end{aligned}$$

istenen sonuç elde edilir. Şimdi teoremin eşitlik koşulunun gerçekleştiğini varsayalım. Bu durumda yukarıdaki eşitsizlikler, eşitlik durumuna dönüşür. Buradan  $\forall u_1, v_1 \notin E(G_1)$  ve  $\forall u_2, v_2 \notin E(G_2)$  için,

$$d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(v_1)d_{G_2}(v_2) = 2\sqrt{d_{G_1}(u_1)n_2}2\sqrt{d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2)d_{G_1}(v_1)d_{G_2}(v_2)}$$

bulunur. Bu ise eşitlik durumunun ancak ve ancak  $G_1$  ve  $G_2$  regüler graf olduklarında sağlaacağı sonucuna götürür. Karşıt olarak  $G_1$  ve  $G_2$  regüler graf olarak düşünüldüğünde eşitliğin sağlandığı basit hesaplamalarla görülür.

**Teorem 5.3.11**  $G_1$  ve  $G_2$  ayrık köşeli iki graf olsun. Eğer  $G = G_1 \otimes G_2$  ise

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_2(G) &= \Pi_2^{\overline{m}_2}(G_1)\Pi_2^{\overline{m}_1}(G_2)(\Pi_1(G_1))^{\frac{n_2(n_1+n_2-2)}{2}}(\overline{\Pi}_2(G_1))^{m_2+\overline{m}_2} \\ &\quad \times (\Pi_1(G_2))^{\frac{n_2(n_1+n_2-2)}{2}}(\overline{\Pi}_2(G_2))^{m_1+\overline{m}_1}. \end{aligned}$$

**İspat:** İkinci çarpımsal Zagreb eş-indeksin tanımı yardımıyla,

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_2(G) &= \prod_{uv \in E(G)} [d_G(u)d_G(v)] \\ &= \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{\{u_2, v_2\} \subset V(G_2)} (d_{G_1}^2(u_1)d_{G_2}(u_2)d_{G_2}(v_2)) \\ &\quad \times \prod_{u_2 \in V(G_1)} \prod_{\{u_2, v_2\} \subset V(G_2)} (d_{G_2}^2(u_2)d_{G_1}(u_1)d_{G_1}(v_1)) \\ &\quad \times \prod_{u_1 v_1 \in E(G_1)} \prod_{u_2 v_2 \notin E(G_2)} (d_{G_1}(u_1)d_{G_1}(v_1)d_{G_2}(u_2)d_{G_2}(v_2)) \\ &\quad \times \prod_{u_2 v_2 \in E(G_2)} \prod_{u_1 v_1 \notin E(G_1)} (d_{G_1}(u_1)d_{G_1}(v_1)d_{G_2}(u_2)d_{G_2}(v_2)) \\ &\quad \times \prod_{u_1 v_1 \notin E(G_1)} \prod_{u_2 v_2 \in E(G_2)} (d_{G_1}(u_1)d_{G_1}(v_1)d_{G_2}(u_2)d_{G_2}(v_2)) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte Lemma 5.3.2 kullanılarak istenen sonuca ulaşılır.

**Teorem 5.3.12**  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının kartezyen çarpımı  $G = G_1 \times G_2$  grafi olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_1(G) &\geq (2\sqrt{2})^{n_1 \overline{m}_2 + n_2 \overline{m}_1 + 4 \binom{n_1}{2} \binom{n_2}{2}} \sqrt[4]{\Pi_1^{\overline{m}_2}(G_1)\Pi_1^{\overline{m}_1}(G_2)} \\ &\quad \times \sqrt{(\overline{\Pi}_1(G_1))^{n_2}(\overline{\Pi}_1(G_2))^{n_1}(\overline{\Pi}(G_1))^{\binom{n_2}{2}}(\overline{\Pi}(G_2))^{\binom{n_1}{2}})}. \end{aligned}$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G_1$  ve  $G_2$  in  $r$ -regüler graflar olmasıdır.

**İspat:** Birinci çarpımsal Zagreb eş-indeksin tanımından,

$$\begin{aligned}
\bar{\Pi}_1(G) &= \prod_{uv \in E(G)} [d_G(u) + d_G(v)] \\
&= \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2, v_2 \in E(G_2)} (2d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2)) \\
&\quad \times \prod_{u_2 \in V(G_2)} \prod_{u_1, v_1 \in E(G_1)} (d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1) + 2d_{G_2}(u_2)) \\
&\quad \times \prod_{\{u_1, v_1\} \subset V(G_1)} \prod_{\{u_2, v_2\} \subset V(G_2)} (d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2))^2
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu eşitlikte Lemma 5.2.2 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\bar{\Pi}_1(G) &\geq \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2, v_2 \in E(G_2)} 2\sqrt{2d_{G_1}(u_1)(d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2))} \\
&\quad \times \prod_{u_2 \in V(G_2)} \prod_{u_1, v_1 \in E(G_1)} 2\sqrt{2d_{G_2}(u_2)(d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1))} \\
&\quad \times \prod_{\{u_1, v_1\} \subset V(G_1)} \prod_{\{u_2, v_2\} \subset V(G_2)} \left(2\sqrt{(d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1))(d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2))}\right)^2 \\
&= (2\sqrt{2})^{n_1 \bar{m}_2 + n_2 \bar{m}_1 + 4/3 \binom{n_1}{2} \binom{n_2}{2}} \sqrt[4]{\bar{\Pi}_1^{\bar{m}_2}(G_1) \bar{\Pi}_1^{\bar{m}_1}(G_2)} \\
&\quad \times \sqrt{(\bar{\Pi}_1(G_1))^{n_2} (\bar{\Pi}_1(G_2))^{n_1} \binom{n_2}{2} \binom{n_1}{2}}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi teremin eşitlik koşulunun sağlandığını kabul edelim. Bu durumda her  $\{u_1, v_1\} \subset V(G_1)$  ve her  $\{u_2, v_2\} \subset V(G_2)$  için,

$$d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2) = 2\sqrt{(d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1))(d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2))}$$

olur. Yani eşitlik durumunda  $G_1$  ve  $G_2$  r-regüler graflar olur. Karşıt olarak  $G_1$  ve  $G_2$  r-regüler graflar olsun. O zaman

$$\bar{\Pi}_1(G_1 \times G_2) = (4r)^{n_1 \bar{m}_2 + n_2 \bar{m}_1 + 2 \binom{n_1}{2} \binom{n_2}{2}}$$

ve

$$\begin{aligned}
&(2\sqrt{2})^{n_1 \bar{m}_2 + n_2 \bar{m}_1 + 4/3 \binom{n_1}{2} \binom{n_2}{2}} \sqrt[4]{\bar{\Pi}_1^{\bar{m}_2}(G_1) \bar{\Pi}_1^{\bar{m}_1}(G_2)} \sqrt{(\bar{\Pi}_1(G_1))^{n_2} (\bar{\Pi}_1(G_2))^{n_1}} \\
&\quad \times \binom{n_2}{2} \binom{n_1}{2} \\
&= (2\sqrt{2})^{n_1 \bar{m}_2 + n_2 \bar{m}_1 + 4/3 \binom{n_1}{2} \binom{n_2}{2}} \sqrt[4]{r^{2n_1 \bar{m}_2} r^{2n_2 \bar{m}_1}} \sqrt{(2r)^{n_2 \bar{m}_1} (2r)^{n_1 \bar{m}_2}} \\
&\quad \times (2r)^{\binom{n_1}{2} \binom{n_2}{2}} (2r)^{\binom{n_1}{2} \binom{n_2}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dahası eşitlik sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 5.3.13**  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının kartezyen çarpımı  $G = G_1 \times G_2$  grafi olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_2(G) &\geq 4^{n_1 \bar{m}_2 + n_2 \bar{m}_1 + 2 \binom{n_1}{2} \binom{n_2}{2}} \sqrt{(\bar{\Pi}_2(G_1))^{n_2} (\bar{\Pi}_2(G_2))^{n_1}} \\ &\quad \times \sqrt{(\Pi_1(G_1))^{\bar{m}_2 + (n_1 - 1) \binom{n_2}{2}} (\Pi_1(G_2))^{\bar{m}_1 + (n_2 - 1) \binom{n_1}{2}}}. \end{aligned}$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G_1$  ve  $G_2$  in  $r$ -regüler graflar olmasıdır.

**İspat:** İkinci çarpımsal Zagreb eş-indeksini tanımlanarak aşağıdaki bağıntı yazılır.

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_2(G) &= \prod_{uv \in E(G)} [d_G(u)d_G(v)] \\ &= \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2, v_2 \in E(G_2)} (d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2))(d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(v_2)) \\ &\quad \times \prod_{u_2 \in V(G_2)} \prod_{u_1, v_1 \in E(G_1)} (d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2))(d_{G_1}(v_1) + d_{G_2}(u_2)) \\ &\quad \times \prod_{\{u_1, v_1\} \subset V(G_1)} \prod_{\{u_2, v_2\} \subset V(G_2)} [(d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2))(d_{G_1}(v_1) + d_{G_2}(v_2))]^2. \end{aligned}$$

Bu eşitlikte Lemma 5.2.2 ve Lemma 5.3.2 kullanılarak;

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_2(G) &\geq \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2, v_2 \in E(G_2)} (2\sqrt{d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2)})(2\sqrt{d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(v_2)}) \\ &\quad \times \prod_{u_2 \in V(G_2)} \prod_{u_1, v_1 \in E(G_1)} (2\sqrt{d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2)})(2\sqrt{d_{G_1}(v_1)d_{G_2}(u_2)}) \\ &\quad \times \prod_{\{u_1, v_1\} \subset V(G_1)} \prod_{\{u_2, v_2\} \subset V(G_2)} [(2\sqrt{d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2)})(2\sqrt{d_{G_1}(v_1) + d_{G_2}(v_2)})]^2 \\ &= 4^{n_1 \bar{m}_2 + n_2 \bar{m}_1 + 2 \binom{n_1}{2} \binom{n_2}{2}} \sqrt{(\bar{\Pi}_2(G_1))^{n_2} (\bar{\Pi}_2(G_2))^{n_1}} \\ &\quad \times \sqrt{(\Pi_1(G_1))^{\bar{m}_2 + (n_1 - 1) \binom{n_2}{2}} (\Pi_1(G_2))^{\bar{m}_1 + (n_2 - 1) \binom{n_1}{2}}}. \end{aligned}$$

istenilen sonuç elde edilir. Şimdi teoremin eşitlik durumunu inceleyelim. Bu durumda yukarıdaki eşitsizlikler eşitlik olarak sağlanır. O zaman her  $\{u_1, v_1\} \subset V(G_1)$  ve her  $\{u_2, v_2\} \subset V(G_2)$  için,

$$(d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(u_2))(d_{G_1}(v_1) + d_{G_2}(v_2)) = (2\sqrt{d_{G_1}(u_1)d_{G_1}(u_2)})(2\sqrt{d_{G_1}(v_1)d_{G_2}(v_2)})$$

dir. Buradan Lemma 5.2.2 gereği  $G_1$  ve  $G_2$   $r$ -regüler graf olur. Karşit olarak  $G_1$  ve  $G_2$   $r$ -regüler graflar olsun. Bu durumda eşitliğin sağlandığı, elementer işlemler yardımıyla görülür.

**Teorem 5.3.14**  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının kuvvetli çarpımı  $G = G_1 \boxtimes G_2$  grafi ile gösterilsin. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_1(G) &> (3\sqrt[3]{2})^{n_1 \bar{m}_2 + n_2 \bar{m}_1} 4^{\bar{m}_1 \bar{m}_2} \sqrt[4]{(\bar{\Pi}_2(G_1))^{\bar{m}_2} (\bar{\Pi}_2(G_2))^{\bar{m}_1}} \\ &\quad \times \sqrt[12]{(\bar{\Pi}_1(G_1))^{8n_2 + 3\bar{m}_2} (\bar{\Pi}_1(G_2))^{8n_1 + 3\bar{m}_1} (\Pi_1(G_1))^{4\bar{m}_2} (\Pi_1(G_2))^{4\bar{m}_1}}. \end{aligned}$$

**İspat:** Birinci çarpımsal Zagreb eş-ineksinin tanımından,

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_1(G) &= \prod_{uv \in E(G)} [d_G(u) + d_G(v)] \\ &= \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2 v_2 \in E(G_2)} [2d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2) + d_{G_1}(u_1)(d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2))] \\ &\quad \times \prod_{u_2 \in V(G_2)} \prod_{u_1 v_1 \in E(G_1)} [2d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1) + d_{G_2}(u_2)(d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1))] \\ &\quad \times \prod_{\{u_1, v_1\} \subset V(G_1)} \prod_{\{u_2, v_2\} \subset V(G_2)} \left[ \begin{aligned} &d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2) \\ &+ d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(v_1)d_{G_2}(v_2) \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte Lemma 5.2.2 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_1(G) &> \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2 v_2 \in E(G_2)} \left[ 3\sqrt[3]{2d_{G_1}^2(u_1)(d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2))^2} \right] \\ &\quad \times \prod_{u_2 \in V(G_2)} \prod_{u_1 v_1 \in E(G_1)} \left[ 3\sqrt[3]{2d_{G_2}^2(u_2)(d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1))^2} \right] \\ &\quad \times \prod_{\{u_1, v_1\} \subset V(G_1)} \prod_{\{u_2, v_2\} \subset V(G_2)} \left[ 4\sqrt[4]{d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2)d_{G_1}(v_1)d_{G_2}(v_2)} \right. \\ &\quad \quad \left. \times \sqrt[4]{(d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1))(d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2))} \right] \\ &= (3\sqrt[3]{2})^{n_1 \bar{m}_2 + n_2 \bar{m}_1} 4^{\bar{m}_1 \bar{m}_2} \sqrt[4]{(\bar{\Pi}_2(G_1))^{\bar{m}_2} (\bar{\Pi}_2(G_2))^{\bar{m}_1}} \\ &\quad \times \sqrt[12]{(\bar{\Pi}_1(G_1))^{8n_2 + 3\bar{m}_2} (\bar{\Pi}_1(G_2))^{8n_1 + 3\bar{m}_1} (\Pi_1(G_1))^{4\bar{m}_2} (\Pi_1(G_2))^{4\bar{m}_1}} \end{aligned}$$

elde edilir. Varsayalım teoremin eşitlik durumu sağlansın. Bu durumda,  $\forall u_1 \in V(G_1)$  ve  $\forall u_2 v_2 \in E(G_2)$  için,

$$2d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2) + d_{G_1}(u_1)(d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2)) = 3\sqrt[3]{2d_{G_1}^2(u_1)(d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2))^2}$$

ve aynı zamanda  $\forall u_1 v_1 \in E(G_1)$  ve  $\forall u_2 v_2 \in E(G_2)$  için,

$$\begin{aligned} &d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2) + d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(v_1)d_{G_2}(v_2) = \\ &\quad 4\sqrt[4]{d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2)d_{G_1}(v_1)d_{G_2}(v_2)(d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1))(d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2))} \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Lemma 5.2.2 in eşitlik koşulu gereği,  $\forall u_1 \in V(G_1)$  ve  $\forall u_2 v_2 \in E(G_2)$  için,

$$2d_{G_1}(u_1) = d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2) = d_{G_1}(u_1)(d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2))$$

ve  $\forall u_1, v_1 \notin E(G_1), \forall u_2, v_2 \notin E(G_2)$  için,

$$d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1) = d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2) = d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2) = d_{G_1}(v_1)d_{G_2}(v_2)$$

olur. Bu mümkün değildir. Çelişki elde edilir. Yani eşitlik durumu sağlanmaz.

**Teorem 5.3.15**  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının kuvvetli çarpımı  $G = G_1 \boxtimes G_2$  grafi ile gösterilsin. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_2(G) &\geq 9^{n_1 \overline{m}_2 + n_2 \overline{m}_1 + \overline{m}_1 \overline{m}_2} \sqrt[3]{(\Pi_1(G_1))^{2\overline{m}_2} (\Pi_1(G_2))^{2\overline{m}_1}} \\ &\quad \times \sqrt[3]{(\overline{\Pi}_2(G_1))^{2n_2 + 2\overline{m}_2} (\overline{\Pi}_2(G_2))^{2n_1 + 2\overline{m}_1}} \end{aligned}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının,  $K_2$  tam grafına izomorf olmasıdır.

**İspat:** İkinci çarpımsal Zagreb eş-ineksinin tanımından,

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_2(G) &= \prod_{uv \in E(G)} [d_G(u)d_G(v)] \\ &= \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2, v_2 \in E(G_2)} \left[ \left( d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left( d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(v_2) + d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(v_2) \right) \right] \\ &\quad \times \prod_{u_2 \in V(G_2)} \prod_{u_1, v_1 \in E(G_1)} \left[ \left( d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left( d_{G_1}(v_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(v_1)d_{G_2}(u_2) \right) \right] \\ &\quad \times \prod_{\{u_1, v_1\} \subset V(G_1)} \prod_{\{u_2, v_2\} \subset V(G_2)} \left[ \left( d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left( d_{G_1}(v_1) + d_{G_2}(v_2) + d_{G_1}(v_1)d_{G_2}(v_2) \right) \right] \end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitlikte Lemma 5.2.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_2(G) &\geq \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2, v_2 \in E(G_2)} \left[ 9 \sqrt[3]{d_{G_1}^4(u_1) d_{G_2}^2(u_2) d_{G_2}^2(v_2)} \right] \\ &\quad \times \prod_{u_2 \in V(G_2)} \prod_{u_1, v_1 \in E(G_1)} \left[ 9 \sqrt[3]{d_{G_2}^4(u_2) d_{G_1}^2(u_1) d_{G_1}^2(v_1)} \right] \\ &\quad \times \prod_{\{u_1, v_1\} \subset V(G_1)} \prod_{\{u_2, v_2\} \subset V(G_2)} \left[ 9 \sqrt[3]{d_{G_1}^2(u_1) d_{G_1}^2(v_1) d_{G_2}^2(u_2) d_{G_2}^2(v_2)} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_2(G) &\geq 9^{n_1 \overline{m}_2 + n_2 \overline{m}_1 + \overline{m}_1 \overline{m}_2} \sqrt[3]{(\Pi_1(G_1))^{2\overline{m}_2} (\Pi_1(G_2))^{2\overline{m}_1}} \\ &\quad \times \sqrt[3]{(\overline{\Pi}_2(G_1))^{2n_2 + 2\overline{m}_2} (\overline{\Pi}_2(G_2))^{2n_1 + 2\overline{m}_1}} \end{aligned}$$

istenen sonuç bulunur. Şimdi teoremin eşitlik koşulunun sağlandığını varsayalım. O zaman yukarıdaki tüm eşitsizlikler, eşitlik olacaktır. Bu yüzden  $\forall u_1 \in V(G_1)$  ve  $\forall u_2 \in V(G_2)$  için,

$$d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(u_1)d_{G_2}(u_2) = 3\sqrt[3]{d_{G_1}^2(u_1)d_{G_2}^2(u_2)}$$

olacaktır.

O halde Lemma 5.2.2 den hem  $G_1$  grafi hem de  $G_2$  grafi  $K_2$  tam grafına izomorf graflardır. Karşıt olarak hem  $G_1$  grafi hem de  $G_2$  grafi  $K_2$  tam grafına izomorf olsun. Buradan kolayca eşitliğin sağlandığı görülür.

**Teorem 5.3.16**  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının lexicografik çarpımı  $G = G_1[G_2]$  grafi ile gösterilsin. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_1(G) &> (2\sqrt{2n_2})^{n_1\bar{m}_2+n_2\bar{m}_1} (2\sqrt{n_2})^{2\bar{m}_1\binom{n_2}{2}} \sqrt[4]{(\bar{\Pi}_1(G_1))^{\bar{m}_2} (\bar{\Pi}_1(G_2))^{\bar{m}_1} (\bar{\Pi}_2(G_1))^{\bar{m}_2} (\bar{\Pi}_2(G_2))^{\bar{m}_1}} \\ &\quad \times \sqrt{(\bar{\Pi}_1(G_1))^{n_2+2\binom{n_2}{2}} (\bar{\Pi}_1(G_2))^{n_1} (\bar{\Pi}(G_2))^{2\bar{m}_1}}. \end{aligned}$$

**İspat:** Birinci çarpımsal Zagreb eş-indeksin tanımından,

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_1(G) &= \prod_{uv \in E(G)} [d_G(u) + d_G(v)] \\ &= \prod_{u_2 \in V(G_2)} \prod_{u_1 v_1 \in E(G_1)} [n_2(d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1)) + 2d_{G_2}(u_2)] \\ &\quad \times \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2 v_2 \in E(G_2)} [2n_2d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2)] \\ &\quad \times \prod_{\{u_2, v_2\} \subset V(G_2)} \prod_{u_1 v_1 \in E(G_1)} [n_2(d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1)) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2)]^2 \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte Lemma 5.2.2 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_1(G) &> \prod_{u_2 \in V(G_2)} \prod_{u_1 v_1 \in E(G_1)} \left[ 2\sqrt{n_2(d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1))} 2d_{G_2}(u_2) \right] \\ &\quad \times \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2 v_2 \in E(G_2)} \left[ 2\sqrt{2n_2d_{G_1}(u_1)(d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2))} \right] \\ &\quad \times \prod_{\{u_2, v_2\} \subset V(G_2)} \prod_{u_1 v_1 \in E(G_1)} \left[ 2\sqrt{n_2(d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1))(d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2))} \right]^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_1(G) &> (2\sqrt{2n_2})^{n_1\bar{m}_2+n_2\bar{m}_1} (2\sqrt{n_2})^{2\bar{m}_1\binom{n_2}{2}} \sqrt[4]{(\bar{\Pi}_1(G_1))^{\bar{m}_2} (\bar{\Pi}_1(G_2))^{\bar{m}_1} (\bar{\Pi}_2(G_1))^{\bar{m}_2} (\bar{\Pi}_2(G_2))^{\bar{m}_1}} \\ &\quad \times \sqrt{(\bar{\Pi}_1(G_1))^{n_2+2\binom{n_2}{2}} (\bar{\Pi}_1(G_2))^{n_1} (\bar{\Pi}(G_2))^{2\bar{m}_1}} \end{aligned}$$

istenen sonuç elde edilir. Şimdi varsayalım, teoremin eşitlik durumu sağlansın. Bu durumda,  $\forall u_1 v_1 \notin E(G_1)$  ve  $\forall u_2 \in V(G_2)$  için,

$$n_2 (d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1)) + 2d_{G_2}(u_2) = 2\sqrt{n_2 (d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1)) 2d_{G_2}(u_2)}$$

ve  $\forall u_2 v_2 \notin E(G_2)$  ve  $\forall u_1 \in V(G_1)$  için,

$$2n_2 d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2) = 2\sqrt{2n_2 d_{G_1}(u_1) (d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2))}$$

ve  $\forall u_1 v_1 \notin E(G_1)$  ve  $\forall u_2 v_2 \notin E(G_2)$  için,

$$n_2 (d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1)) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2) = 2\sqrt{n_2 (d_{G_1}(u_1) + d_{G_1}(v_1)) (d_{G_2}(u_2) + d_{G_2}(v_2))}$$

eşitlikleri sağlanacaktır. Oysa lemma 5.2.2 in eşitlik koşulu düşünüldüğünde,  $G_1$  ve  $G_2$  grafları için yukarıdaki eşitliklerin sağlanması mümkün değildir. Çelişki elde ederiz. Yani eşitlik durumu gerçekleşmez. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 5.3.17**  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının lexicografik çarpımı  $G = G_1 [G_2]$  grafi ile gösterilsin. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_1(G) &> (4n_2)^{n_1 \bar{m}_2 + n_2 \bar{m}_1 + 2\bar{m}_1 \binom{n_2}{2}} \sqrt{(\bar{\Pi}_1(G_1))^{m_2} (\bar{\Pi}_1(G_2))^{n_2 m_1}} \\ &\quad \times \sqrt{(\bar{\Pi}_2(G_1))^{n_2 + 2\binom{n_2}{2}} (\bar{\Pi}_2(G_2))^{n_1}}. \end{aligned}$$

**İspat:** İkinci çarpımsal Zagreb eş-indeksin tanımından,

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_2(G) &= \prod_{uv \notin E(G)} [d_G(u) d_G(v)] \\ &= \prod_{u_2 \in V(G_2)} \prod_{u_1 v_1 \notin E(G_1)} [(n_2 d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2)) (n_2 d_{G_1}(v_1) + d_{G_2}(u_2))] \\ &\quad \times \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2 v_2 \notin E(G_2)} [(n_2 d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2)) (n_2 d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(v_2))] \\ &\quad \times \prod_{\{u_2, v_2\} \subset V(G_2)} \prod_{u_1 v_1 \notin E(G_1)} [(n_2 d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2)) (n_2 d_{G_1}(v_1) + d_{G_2}(v_2))]^2 \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte Lemma 5.2.2 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\bar{\Pi}_2(G) &> \prod_{u_2 \in V(G_2)} \prod_{u_1 v_1 \notin E(G_1)} \left[ 4\sqrt{n_2^2 d_{G_2}^2(u_2) d_{G_1}(u_1) d_{G_1}(v_1)} \right] \\
&\quad \times \prod_{u_1 \in V(G_1)} \prod_{u_2 v_2 \notin E(G_2)} \left[ 4\sqrt{n_2^2 d_{G_1}^2(u_1) d_{G_2}(u_2) d_{G_2}(v_2)} \right] \\
&\quad \times \prod_{\{u_2, v_2\} \subset V(G_2)} \prod_{u_1 v_1 \notin E(G_1)} \left[ 4\sqrt{n_2^2 d_{G_1}(u_1) d_{G_1}(v_1) d_{G_2}(u_2) d_{G_2}(v_2)} \right]^2 \\
&= (4n_2)^{n_1 \bar{m}_2 + n_2 \bar{m}_1 + 2\bar{m}_1 \binom{n_2}{2}} \sqrt{(\Pi_1(G_1))^{\bar{m}_2} (\Pi_1(G_2))^{n_2 \bar{m}_1}} \\
&\quad \times \sqrt{(\bar{\Pi}_2(G_1))^{n_2 + 2\binom{n_2}{2}} (\bar{\Pi}_2(G_2))^{n_1}}
\end{aligned}$$

istenen sonuç elde edilir. Şimdi teoremin eşitlik durumunun sağlandığını varsayalım. Bu durumda,  $\forall u_1 v_1 \notin E(G_1)$  ve  $\forall u_2 \in V(G_2)$  için,

$$(n_2 d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2))(n_2 d_{G_1}(v_1) + d_{G_2}(u_2)) = 4\sqrt{n_2^2 d_{G_2}^2(u_2) d_{G_1}(u_1) d_{G_1}(v_1)}$$

eşitliği sağlanır. Oysa lemma 5.2.2 in eşitlik koşulu gereği,  $\forall u_1 v_1 \notin E(G_1)$  ve  $\forall u_2 \in V(G_2)$  için,  $n_2 d_{G_1}(u_1) = d_{G_2}(u_2)$  ve  $n_2 d_{G_1}(v_1) = d_{G_2}(u_2)$  dir. Bu ise  $G_1$  ve  $G_2$  grafları için mümkün değildir. Kabulümüz ile çelişiriz. Bu da ispatı tamamlar.

## 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

### 6.1 Sonuçlar

Bu tezde öncelikle graf teori ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. Sonra, topolojik indekslerden üçüncü atom bağ bağlantılık indeksi, dördüncü geometrik aritmetik indeksi ile ilgili genel graflar için sınır değerleri bulunmuştur. Daha sonra tek devirli grafların eksantrik bağlantılık indeksi eşleşme sayısına bağlı olarak ifade edilmiştir. Burada elde edilen tüm sınırlar orijinaldir.

Son bölümde ise graf işlemleri tanıtılarak, çarpımsal Zagreb indeksleri ile ilgili sınır değerleri elde edilmiştir. Burada karmaşık graf yapılarının topolojik indeksleri bileşenleri türünden ifade edilerek hesaplanma yoluna gidilmiştir.

Das ve ark.(2013), graf işlemlerinin çarpımsal Zagreb indeksleri için üst sınırlar elde etmişlerdir. Bu çalışma içerisinde birinci çarpımsal Zagreb indeksi için yeni üst sınırlar bulunmuştur. Burada elde edilen tüm sınırların Das ve ark.(2013) elde ettikleri sınırlardan daha iyi olduğu görülebilir.

Aynı zamanda graf işlemlerinin çarpımsal toplam Zagreb indeksi için üst sınırlar elde edilmiştir. Son olarak graf işlemlerinin çarpımsal Zagreb eş indeksleri için alt sınırlar elde edilmiştir.

### 6.2 Öneriler

Topolojik indeksler, graf teorisinin önemli uygulamalarındandır. Kimya, fizik, biyoloji, mühendislik, tıp, farmakoloji, bilgisayar gibi bir çok alanda uygulamaları vardır. Bu tezde bazı topolojik indeksler ele alınmış ve sınır değerleri elde edilmiştir.

Araştırmacı benzer metotlar uygulayarak, diğer topolojik indeksler için de sınır değerleri elde edebilir. Ayrıca bu tezde yer alan topolojik indeksleri özel graf durumlarında(ağaçlar, tek devirli graflar,..) inceleyebilir.

**KAYNAKLAR**

- Arezoomand, M., Taeri, B., 2013, Zagreb indices of the generalized Hierarchical product of graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 69, 131–140.
- Ashrafi, A. R., Saheli, M., Ghorbani, M., 2011, The eccentric connectivity index of nanotube and nanotorus, *J. Comput. Appl. Math.*, 235, 4561-4566.
- Ashrafi, A. R., Doslic, T. and Hamzeh, A., 2010, The Zagreb coindices of graph operations, *Discrete Appl. Math.* 158 1571-1578.
- Ashrafi, A. R., Doslic, T. and Hamzeh, A., 2011, Extremal graphs with respect to the Zagrebcoindices, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem* 65 85-92.
- Azari, M., 2014, Sharp lower bounds on the Narumi-Katayama index of graph operations, *Appl. Math. and Comput.* 239 409-421.
- Azari, M. and Iranmanesh, A., 2015, Some inequalities for the multiplicative sum Zagreb index of graph operations, *J. of Math. Ineq.* 9 (3) 727-738.
- Azari, M. and Iranmanesh, A., 2013, Chemical Graphs constructed from Rooted product and their Zagreb indices, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 70, 901–909.
- Biler, P., Witkowski, A., 1990, Problems in Mathematical Analysis, *Marcel Dekker*, Newyork, 535-538.
- Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., 1976, Graph Theory with Applications, Macmillian Press, New York
- Chang, A. and Tian, F., 2003, On the spectral radius of unicyclic graphs with perfect matching, *Linear Algebra Appl.*, 370, 237-250.
- Cvetkovic, D. and Petric, M., 1984, A table of connected graphs on six vertices, *Discrete Math.*, 50 37-49.
- Cvetkovic, D. and Rowlinson, P., 1987, Spectra of unicyclic graphs, *Graphs Comb.*, 3 7-23.
- Das, K. C., 2010, On geometric–arithmetic index of graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 64, 619–630.
- Das, K. C., 2010, Atom bond connectivity index of graphs, *Discr. Appl. Math.*, 158, 1181-1188.
- Das, K. C., Yurttas, A., Togan, M., Cevik, A. S. and Cangul, I. N., 2013, The multiplicative Zagreb indices of graph operations, *J. Inequal. Appl.* 2013:90
- Das, K. C., Xu, K. and Nam, J., 2015, Zagreb indices of graphs, *Front Math. China*

10(3) 567-582.

- Eliasi, M., Iranmanesh, A. and Gutman, I., 2012, Multiplicative versions of first Zagreb index, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 68 217-230.
- Eliasi, M. and Vukicevic, D., 2013, Comparing the Multiplicative Zagreb indices, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 69 765-773.
- Estrada, E., Torres, L., Rodriguez, L., Gutman, I., 1998, An atom bond connectivity index: Modelling the enthalpy of formation of alkanes, *Indian J. Chem.*, 37A 849-855.
- Farahani, M. R., 2013, Eccentricity Version of Atom-Bond Connectivity Index of Benzenoid Family ABC5(Hk), *World Applied Sciences Journal*, 21,1260-1265.
- Farahani, M. R., 2013, Computing a New Connectivity Index for a Famous Molecular Graph of Benzenoid Family. *Journal of Chemica Acta*, 2(1), 26-31.
- Furtula, B., Graovac, A., Vukicevic, D., 2009, Atom bond connectivity index of trees, *Discr. Appl. Math.*, 157, 2828-2835.
- Ghorbani, M. and Hosseinzadeh, M. A., 2012, A new version of Zagreb Indices, *Filomat*, 26:1 93-100.
- Ghorbani, M., Khaki, A., 2010, A note on the fourth version of geometric-arithmetic index. *Optel. Adv. Mater.*, 4, 2212-2215.
- Godsil, C. D. And McKay, B. D., 1978, A new graph product and its spectrum, *Bull. Austral. Math. Soc.*, Vol. 18, 21-28.
- Gross, J.L., Yellen, J., 2004, Handbook of Graph Theory, *Chapman Hall*, CRC Press.
- Gupta, S., Singh, M., Madan, A. K., 2000, Connective eccentricity index: a novel topological descriptor for predicting biological activity, *J. Mol. Graph. Model.*, 18 18–25.
- Gutman, I. and Trinajstic, N., 1972, Graph theory and molecular orbitals. III. Total  $\pi$  – electron energy of alternant hydrocarbons, *Chem. Phys. Lett.* 17 535-538.
- Gutman, I., Ruscic, B., Trinajstic, N. and Wilcox, C. F., 1975, Graph theory and molecular orbitals, XII. Acyclic polyenes, *J. Chem. Phys.* 62 3399-3405.
- Gutman, I., 2011, Multiplicative Zagreb indices of trees, *Bull. Int. Math. Virt. Inst.*, 239, 13-19.
- Harary, F., 1969, Graph Theory, *Addison-Wesley*, Reading, Mass.
- Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Polya, G., 1934, Inequalities, *Cambridge University Press*, London, 1934.

- Ilic, A. and Gutman, I., 2011, Eccentric connectivity index of chemical trees, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 65, 731-744.
- Imrich, W., Klavzar, S., 2000, Product graphs: Structure and Recognition, *Wiley*, New York .
- Jamil, M. K., Farahani, M. R., Kanna, M. R. R., 2016, Fourth Geometric Arithmetic Index of Polycyclic Aromatic Hydrocarbons (PAHk), *The Pharmaceutical and Chemical Journal*, 3(1):94-99
- Khalifeh, M. H., Azari, H.Y., Ashrafi, A. R., 2008, The hyper-wiener index of graph operations, *Comput. Math. Appl.*, 56, 1402-1407.
- Khalifeh, M. H., Azari, H. Y., Ashrafi, A. R., 2009, The first and second Zagreb indices on of some graph operations, *Discrete Appl. Math.*, 157, 804-811.
- Lee, D. W., 2016, Some lower and upper bounds on the third ABC index, *AKCE Int. J. Graphs Comb.*, 13, 11-15.
- Li, J. and Zhou, B., 2013, Atom bond connectivity index of unicyclic graphs with perfect matchings, *Ars Combin.*, 109, 321-326.
- Liu, H. Q., Pan, X. F., Xu, J.-M., 2006, On the randic index of unicyclic conjugated molecules, *J. Math. Chem.*, 40, 135-143.
- Liu, J., Zhang, Q., 2012, Sharp upper bounds on multiplicative Zagreb indices, *MATCH Commun. Math. Chem.*, 68, 231-240.
- Morgan, M. J., Mukwenbi, S., Swart, H. C., 2011, On the eccentric connectivity index of a graph, *Discrete Math.*, 311, 1229-1234.
- Mogharrab, M. and Moghaddam, B. K., 2012, Some topological indices of graphs and some inequalities, *Iran. J. Math. Chem*, Vol. 3, No. 1, 73-80.
- Nezhad, F. F., Iranmanesh, A., Tehranian, A., Azari, M., 2014, Comparing the second Multiplicative Zagreb coindex with some graph invariants, *Trans. on Combin.* Vol:3 (4) 31-41.
- Nezhad, F. F., Iranmanesh, A., Tehranian, A., Azari, M, 2015, Upper on the second Multiplicative Zagreb coindex, *Utilitas Math.*, 96 79-88.
- N.Ozeki, N., 1968, On the estimation of the inequalities by the maximum, *J. College Arts Ci. Chiba Univ.*, 5 199-203.
- Pan, X. F., Liu, H. Q. and Xu, J. M., 2005, Sharp lower bounds for the general Randic index of trees with a given size of matching, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 54, 465-480.
- Steele, J. M., 2004, An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities, The Cauchy-Schwarz Master Class, *Cambridge University press*, Newyork

- Todeschini, R. and Consonni, V., 2000, Handbook of Molecular Descriptors, *Wiley – VCH*, Weinheim
- Todeschini, R. and Consonni, V., 2010, New local vertex invariants and molecular descriptors based on functions of the vertex degrees, *MATCH Commun. Math. Chem.*, 64, 359-372.
- Trinajstić, N., 1992, Chemical Graph Theory, *CRC Press*, Boca Raton, FL.
- Vasudev, C., 2006, Graph Theory with Application, *New Age International (P) Ltd., Publishers*, New Delhi.
- Vukicević, D. and Graovac, A., 2010, Note on the Comparison of the First and Second Normalized Zagreb Eccentricity Indices, *Acta Chim. Slov.*, 57, 524-528.
- Xing, R., Zhou, B., Du, Z., 2010, Further results on atom-bond connectivity index of trees, *Discrete Appl. Math.*, 158 1536-1545.
- Xu, K., Das, K. C., Tang, K., 2013, On the Multiplicative Zagreb Coindex of Graphs, *Opuscula Math.* 33, 191-204.
- Xu, K. and Das, K. C., 2012, Trees, unicyclic and bicyclic graphs extremal with respect to multiplicative sum Zagreb index, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 68, (1) 257-272.
- Xu, K. and Hua, H., 2012, A unified approach to extremal multiplicative Zagreb indices for trees, unicyclic and bicyclic graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 68, 241-256.
- Yeh, Y. N. and Gutman, I., 1994, On the sum of all distances in composite graphs, *Discrete Math.*, 135, (1-3), 359-365.
- Yu, A. M. and Tian, F., 2004, On the spectral radius of unicyclic graphs, *MATCH Commun. Math. Chem.*, 51, 97-109.
- Yuan, Y., Zhou, B., Trinajstić, N., 2010, On geometric arithmetic index, *Journal of Mathematical Chemistry*, 47 No. 2, 833-841.
- Zhang, L. and Hua, H., 2010, The eccentric connectivity index of unicyclic graphs, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, Vol 5, 46 2257-2262.
- Zhou, B. and Du, Z., 2010, On eccentric connectivity index, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 63 181-198.
- Zhou, B. and Gutman, I., 2005, Further properties of Zagreb indices, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 54, 233-239.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Yaşar Nacaroğlu  
**Uyruğu** : T.C.  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : K.Maraş-1978  
**Telefon** : 5054797159  
**Faks** : -  
**e-mail** : yasarnacar@hotmail.com

### EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Fatih Lisesi, Merkez, K.Maraş	1995
Üniversite	: Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir	2000
Yüksek Lisans	: K.S.Ü, K.Maraş	2007
Doktora	: Selçuk üniversitesi, Konya	2017

### İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2000-	M.E.B.	Matematik Öğret.

**UZMANLIK ALANI: Cebir ve Sayılar Teorisi**

**YABANCI DİLLER: İngilizce**

### YAYINLAR

**Nacaroğlu, Y. and Maden, A. D., 2017, The Multiplicative Zagreb Coindices of Graph Operations , *Utilitas Mathematica*, Volume:102 19-38 (Doktora tezinden yapılmıştır.)**

**Nacaroğlu, Y. and Maden, A. D., 2017, The upper bounds for multiplicative sum Zagreb index of some graph operations, *J. of Math. Ineq.*, (Doktora tezinden yapılmıştır.)**

**Nacaroğlu, Y. and Maden, A. D., 2017, On the Eccentric connectivity index of unicyclic graphs, *Iran. J. Math. Chem.*, (Doktora tezinden yapılmıştır.)**

### Özeti Basılan ve Sözlü Sunulan Uluslararası Bildiriler

**Nacaroğlu, Y. and Maden, A. D., 2011, *On the Harary Estrada index of a graph*, The 24th International Conference of Jangjeon Mathematical Society, (ICJMS 2011), Konya, TURKEY, July 20-23 2011.**

**Nacaroglu, Y.** and Maden, A. D., 2015, *On Eccentric connectivity index of unicyclic graphs*, 2 th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics(ICRAPAM 2015), İstanbul/TURKEY, June 3-6, 2015.

**Nacaroglu, Y.** and Maden, A. D., 2015, *Bounds on eccentricity version of atom bond connectivity index of graphs*, International Conference for Mathematics and Applications (ICMA15), Cairo/Egypt, December 27-29, 2015.

**Nacaroglu, Y.** and Maden, A. D., 2016, *Some Inequalities for the Multiplicative Zagreb Indices of Graph Operations*, 3<sup>rd</sup> International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics(ICRAPAM 2016), Bodrum/TURKEY, 19-23 May 2016.

**Nacaroglu, Y.** and Maden, A. D., 2016, *The Multiplicative Zagreb Coindices of Graph Operations*, 3<sup>rd</sup> International Conference on Advanced Technology & Sciences Recent Advances in Pure and Applied Mathematics(ICAT'16), Konya, Turkey, September 01-03, 2016.