



**İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ
KESİRLERLE ÇARPMA VE BÖLME İŞLEMLERİNE İLİŞKİN
ÖZELLEŞTİRİLMİŞ ALAN BİLGİLERİNİN GELİŞİMİNİN
İNCELENMESİ**

Sezin Seçir

**DOKTORA TEZİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN, 2017

TELİF HAKKI VE TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU

Bu tezin tüm hakları saklıdır. Kaynak göstermek koşuluyla tezin teslim tarihinden itibaren 12 (on iki) ay sonra tezden fotokopi çekilebilir.

YAZARIN

Adı : Sezin

Soyadı : Seçir

Bölümü : İlköğretim Anabilim Dalı, Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı

İmza :

Teslim tarihi : 11/07 /2017

TEZİN

Türkçe Adı : İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Çarpma ve Bölme İşlemlerine İlişkin Özelleştirilmiş Alan Bilgilerinin Gelişiminin İncelenmesi

İngilizce Adı : Examining the Development of Pre-service Elementary Mathematics Teachers' Specialized Content Knowledge Regarding the Multiplication and Division of Fractions

ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI

Tez yazma sürecinde bilimsel ve etik ilkelere uyduğumu, yararlandığım tüm kaynakları kaynak gösterme ilkelerine uygun olarak kaynakçada belirttiğimi ve bu bölümler dışındaki tüm ifadelerin şahsıma ait olduğunu beyan ederim.

Yazar Adı Soyadı: Sezin Seçir

İmza:

JÜRİ ONAY SAYFASI

Sezin Seçir tarafından hazırlanan “İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Çarpma ve Bölme İşlemlerine İlişkin Özelleştirilmiş Alan Bilgilerinin Gelişiminin İncelenmesi” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Gazi Üniversitesi İlköğretim Anabilim Dalı Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı’nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Devrim ÇAKMAK



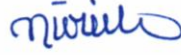
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Başkan: Prof. Dr. Ahmet IŞIK



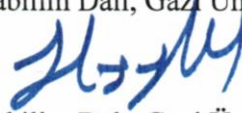
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Üye: Doç. Dr. Nejla YÜRÜK



Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Üye: Doç. Dr. Hüseyin AKKUŞ



Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Üye: Yrd. Doç. Dr. Hatice Kübra GÜLER



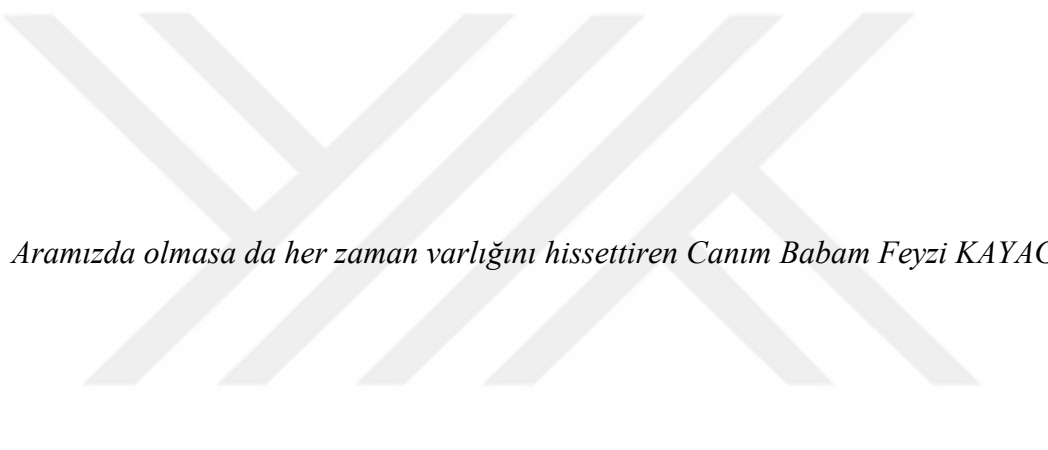
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 20/06/2017

Bu tezin İlköğretim Anabilim Dalı Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı’nda Doktora tezi olması için şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Ülkü ESER ÜNALDI

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü



Aramızda olmasa da her zaman varlığını hissettiren Canım Babam Feyzi KAYAGİL'e

TEŞEKKÜR

Öncelikle benim bu günlere gelmemde emeği geçen tüm öğretmenlerime ve hocalarıma, bu süreçte beni maddi, manevi hiç yalnız bırakmayan ve bütün zor anlarımı benimle paylaşan sevgili annem Hatice KAYAGİL'e, abim Sezgin KAYAGİL'e, canım eşim Mahmut SEÇİR'e ve tüm aileme, akrabalarım sonsuz şükranlarımı sunuyorum. Sonra tüm doktora öğrenimim boyunca ve tez dışında da her zaman desteğini esirgemeyen sevgili hocam Doç. Dr. Devrim ÇAKMAK'a çok teşekkür ediyorum.

Bu çalışmanın temellerini atmama ve sağlam bir kuramsal çerçeve oluşturmama yardımcı olan, Amerika'da bulunduğum kısa zamanda çok şey öğrendiğim değerli Prof. Dr. Andrew Izsák'a minnettarım. Bu süreçte Amerika'da bulunan bütün araştırma görevlisi arkadaşlarıma bana her türlü verdikleri destek ve yardımlardan dolayı teşekkür ediyorum.

Bu çalışma boyunca bana destek veren bütün arkadaşlarıma, özellikle Yrd. Doç. Dr. Gözdegül KARAMIK'a, Arş. Gör. Dr. Aydan KAPLAN'a, Arş. Gör. Dr. Sinem ÜNER'e, Arş. Gör. Dr. Nurcan TURAN OLUK'a, Arş. Gör. Dr. Hilal TORUL'a, değerli hocalarım Doç. Dr. Hüseyin AKKUŞ'a, Doç. Dr. Nejla YÜRÜK'e çok teşekkür ediyorum.

Yüksek lisans ve doktora öğrenimim için burs vererek destek sağlayan TÜBİTAK'a katkılarından dolayı çok teşekkür ediyorum. Yine doktora öğrenimim sırasında burs vererek Amerika'ya gitme olanağı veren YÖK'e de sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak bu süreçte ben de onlardan çok şey öğrendiğimi belirterek çalışmaya katılan, şimdilerde atanarak öğretmen olan arkadaşlara ayrı ayrı teşekkürü bir borç bilirim.

**İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ
KESİRLERLE ÇARPMA VE BÖLME İŞLEMLERİNE İLİŞKİN
ÖZELLEŞTİRİLMİŞ ALAN BİLGİLERİNİN GELİŞİMİNİN
İNCELENMESİ
(Doktora Tezi)**

**Sezin Seçir
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2017**

ÖZ

Çalışmanın amacı ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme (KÇB) işlemlerine ilişkin özelleştirilmiş alan bilgilerinin (ÖAB) gelişiminin incelenmesidir. Öğretmen adaylarıyla bu çalışmanın gerçekleştirilmesi öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kavramsal anlamalarının zayıf olduğunu gösteren birçok çalışmanın olması ve ilgili çalışmalarda ÖAB'nin öğrenci başarısının öngörücüsü olarak belirtilmesi ile açıklanabilir. Kavramsal anlamayı kazanan öğretmen adaylarının öğrencilerinin de bu anlamayı kazanmalarına yardımcı olabilecekleri düşünülmüştür. Bu anlamda öğretmen adaylarına kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kavramsal anlama kazandıracak şekilde bir öğretim hazırlanmıştır. Öğretim boyunca öğretmen adaylarına kesirlerle çarpma ve bölmenin anlamları verilmiştir, bunlara ilişkin model çizme, problem kurma, verilen model veya problem için matematiksel ifade yazma, verilen durum için gerekçelendirme ve açıklama yapma olanakları bulmuşlardır. Bu şekilde deneyim yaşayarak öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kavramsal anlamalarının dolayısıyla özelleştirilmiş alan bilgilerinin gelişmesi planlanmıştır. Çünkü kavramsal bilginin ilgili literatürde özelleştirilmiş alan bilgisinin gelişiminde önemli rol oynadığı görülmektedir. ÖAB, öğretim için matematiksel bilginin (ÖMB) konu alan bilgisi boyutu altında yer alan bir boyutudur. Bu kavramsal çatı Ball vd. (2008) tarafından ortaya koyulmuştur ve bu çalışmada bu çatı temel alınmıştır. ÖAB'nin 3 bileşeni olduğu öne sürülmüştür; temsiller, gerekçelendirme ve açıklama. Çalışmada bu 3 bileşen temel alınmıştır ve öğretmen adaylarının ÖAB'lerinin gelişimi bu 3 bileşen bağlamında incelenmiştir. Burada temsillerden görsel (model çizme), sözel (problem

kurma) ve sayısal (matematiksel ifade yazma) temsil ele alınmıştır ve temsiller arası geçiş yapmalarına olanak sağlanmıştır.

Çalışmaya 2014-2015 eğitim-öğretim yılı bahar döneminde Ankara’da bulunan bir devlet üniversitesinde İlköğretim Matematik Öğretmenliği programının 3. sınıfında öğrenim gören 6 öğretmen adayı (6 ÖA) katılmıştır. Öğretmen adayları KÇB’ye ilişkin kavramsal anlama kazandırmak üzere hazırlanan öğretimi gerçekleştirmek üzere öğretimden önce uygulanan KÇB’ye ilişkin hazırlanan testten (KÇB testi) aldıkları puanlar ve gönüllü olmaları dikkate alınarak belirlenmiştir. KÇB testi öğretimden önce ön-test ve öğretimden sonra son-test şeklinde iki kez uygulanan bir testtir. Bu test uygulandıktan sonra 6 ÖA ile teste ilişkin görüşmeler yapılmıştır. KÇB testinde öğretimden önce kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin model çizme, problem kurma ve verilen model veya problem için matematiksel ifade yazma, gerekçelendirme ve açıklama bilgilerinin başlangıç durumları ve öğretimden sonra bu bilgilerine ilişkin son durumlarının ortaya koyulması amaçlanmıştır. KÇB testinin puanlanması için bir rubrik hazırlanmıştır. Öğretmen adaylarıyla gerçekleştirilen öğretim 6 hafta sürmüştür. Altı hafta boyunca lisans derslerinden ayrı bir zamanda haftada 1 saat olmak üzere dersler gerçekleştirilmiştir. Bununla beraber her hafta derslere paralel olacak şekilde her bir öğretmen adayıyla birebir görüşmeler yapılmıştır. Bu derslerde verilen alıştırılarda, yapılan görüşmelerde ve ön-test ve son-test olarak uygulanan KÇB testinde yer alan görevlerde KÇB’ye ilişkin model çizme, problem kurma, verilen model veya problem için matematiksel ifade yazma, verilen durum için gerekçelendirme ve açıklama yapma deneyimlerini yaşayarak kavramsal anlamalarının, dolayısıyla ÖAB’lerinin gelişmesi planlanmıştır.

Çalışmada nitel araştırma yaklaşımlarından durum çalışması yöntemi kullanılmıştır. Çalışmada kullanılan veri toplama araçları dokümanlar (derslerdeki alıştırılarda, görüşmelerdeki görevlere ilişkin kağıtlar), kağıt-kalem testi (KÇB testi) ve görüşmelerdir. Bu çalışmadan elde edilen verilerin analizi sonucu başlangıçta KÇB’ye ilişkin kavramsal anlamalarının zayıf olduğu ve öğretimden sonra bu anlamalarının geliştiği görülmüştür. Elde edilen bulgularda literatürde rastlanan zorlukların neredeyse hepsi görülmüştür. Çalışmada en çok karşılaşılan zorluklar; bütünü çokluk olarak alma, bilinmeyenin olmaması, birim kargaşası, kesir sayısına doğal sayı anlamı yükleme ve parça-bütün ilişkisi kuramamadır. Bu zorlukları aşmalarına bölmeyi çarpmanın tersi olarak yazmanın, işlemdeki sayıları grup ve nesne kavramlarıyla ifade etmenin ve referans alınan bütünün belirlenmesinin yardımcı olduğu görülmüştür. Diğer taraftan öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamalarındaki gelişim en çok pay ile pay, payda ile payda çarpma ve ters çevir çarp algoritmasına ilişkin yaptıkları açıklamalarda görülmüştür. Öğretmen adayları bu algoritmaların öğretimden önce neden işe yaradıklarını açıklayamıyorlarken öğretimden sonra model çizerek, gerçek yaşamdan örnekler verip problem kurarak ve/veya matematiksel olarak açıklamışlardır. Sonuç olarak öğretmen adaylarının KÇB’ye ilişkin ÖAB’lerinin model çizme, problem kurma, matematiksel ifade yazma, gerekçelendirme ve açıklama yapma deneyimleri yoluyla geliştiği söylenebilir.

Anahtar Kelimeler : Özelleştirilmiş alan bilgisi, ilköğretim matematik öğretmen adayları, kesirlerle çarpma ve bölme, temsiller, gerekçelendirme, açıklama

Sayfa Adedi : 531

Danışman : Doç. Dr. Devrim ÇAKMAK

**EXAMINING THE DEVELOPMENT OF PRE-SERVICE
ELEMENTARY MATHEMATICS TEACHERS' SPECIALIZED
CONTENT KNOWLEDGE REGARDING THE MULTIPLICATION
AND DIVISION OF FRACTIONS
(Ph.D Thesis)**

**Sezin Seçir
GAZI UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF EDUCATIONAL SCIENCES
June 2017**

ABSTRACT

The purpose of the study is examining the development of pre-service elementary mathematics teachers' specialized content knowledge (SCK) regarding the multiplication and division of fractions (MDF). Doing this study with pre-service teachers can be explain by the fact that there are too many studies showing that lack of conceptual knowledge of pre-service teachers regarding the multiplication and division of fraction and SCK is mentioned as a predictor of student success in the related studies. In this manner these pre-service teachers who gain conceptual knowledge about MDF, they can also help their students to gain this conceptual knowledge. In this sense the instruction is prepared for bringing pre-service teachers to gain conceptual knowledge about fraction multiplication and division. In this instruction meaning of the multiplication and division of fractions were given to pre-service teachers and they could find opportunity to experience with drawing representations, posing problem, writing an mathematical expression, justifying and explaining. With this experience it is intended to see that development of these pre-service teachers' conceptual knowledge consequently so SCK of fraction multiplication and division. Because in the literature there is an important role of conceptual knowledge at development of SCK. SCK is one of dimensions of mathematical knowledge for teaching (MKT) and subject matter knowledge which is sub-dimension of MKT. Ball et. al. (2008) put forward this MKT framework. In this study it is based that this framework. There are 3 component of SCK; representation, justification and explanation. In this study it is examined that development of pre-service teachers' SCK in the context of these components. With representations it is based that visual (draw a representation), verbal

(pose a problem) and numerical (write a mathematical explanation) representations in this study and this study provide opportunity to pre-service teachers to make a transition between these representations.

Six pre-service teachers who study at third grade of mathematics education program at a public university in Ankara in the spring semester of 2014-2015 academic year. These pre-service teachers were selected with their scores of MDF test which was applied before the instruction and volunteering. MDF test was applied two times as a pre- and post-test. After applying this test it was implemented an interview about this test with 6 pre-service teachers. With this test it was planned to reveal knowledge of drawing a representation, posing a problem, writing a mathematical expression for given model or problem, justifying and explaining given situation about MDF before instruction and after instruction. A rubric was prepared for scoring this test. The instruction was applied for 6 weeks. In this instruction process, every week one hour class was carried out in a different schedule other than undergraduate classes. It was planned that pre-service teachers would have an experience of drawing a representation, posing a problem, writing a mathematical expression, justifying and explaining given situations about MDF with tasks which were given in these classes, MDF test and interviews. In so doing that it was expected to see development of pre-service teachers' conceptual knowledge, consequently SCK regarding multiplication and division of fractions.

Case study method from qualitative research approaches was used in the study. Data were collected by documents (exercises which were given in classes and interview notes), paper-pencil test (MDF test) and interviews. As a consequence of analyzing data, which were collected from this study, pre-service teachers have weak conceptual knowledge regarding MDF before instruction and after instruction this knowledge improved. Almost all the difficulties were encountered in the literature have been seen in the findings obtained. The most common difficulties in this study are the acquisition of the whole as a multiplicity, the non-existence of the unknown, the unit confusion, the imposing of a natural number in the fractional number and not establishing the part-whole relation. It has been seen that pre-service teachers overcome these difficulties with writing division as the opposite of a multiplication, expressing the numbers in the process with group and object concepts and determining the referent whole. On the other hand, the most development at pre-service teachers' understanding regarding MDF was seen in explaining what they are doing with multiply the denominator by the denominator and numerator by the numerator and the inverse and multiply algorithm. Pre-service teachers were not able to explain why doing these algorithms give result of operation before instruction but after instruction they were able to explain by drawing models, giving real-life examples, posing problems and giving mathematical explanations. As a result, it can be said that the pre-service teachers' SCK regarding MDF developed through their experience of modeling, problem posing, writing mathematical expressions, justifying and explaining.

Key Words : Specialized content knowledge, pre-service elementary mathematics teachers, multiplication and division of fractions, representations, justification, explanation

Page Number : 531

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Devrim ÇAKMAK

İÇİNDEKİLER

TELİF HAKKI VE TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU.....	i
ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI.....	ii
JÜRİ ONAY SAYFASI.....	iii
İTHAF.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ÖZ.....	vi
ABSTRACT	viii
İÇİNDEKİLER.....	x
TABLolar LİSTESİ	xv
ŞEKİLLER LİSTESİ	xxii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	xxviii
BÖLÜM 1	1
GİRİŞ	1
1.1. Problem Durumu	1
1.2. Araştırmanın Önemi.....	2
1.3. Araştırmanın Amacı	4
1.4. Sınırlılıklar.....	5
1.5. Varsayımlar	5
1.6. Tanımlar	5
BÖLÜM 2	7
KURAMSAL ÇERÇEVE	7

2.1. Öğretmen Bilgisi.....	7
2.2. Öğretim için Matematiksel Bilgi (ÖMB)	10
2.2.1. Özelleştirilmiş Alan Bilgisi (ÖAB).....	14
2.2.1.1. Temsiller (Respresentations).....	16
2.2.1.1.1. Problem Kurma	19
2.2.1.1.2. Model Çizme	22
2.2.1.2. Gerekçelendirme (Justification)	26
2.2.1.3. Açıklama (Explanation)	28
2.2.2. İşlemsel ve Kavramsal Bilgi	31
2.3. Kesir ve Anlamları.....	33
2.3.1. Kesirlerle Çarpmanın Anlamı	35
2.3.2. Kesirlerle Bölmenin Anlamı.....	41
2.3.3. Kesirlerle Çarpma ve Bölmede Karşılaşılan Zorluklar	49
2.3.4. Kesirlerle Çarpma ve Bölmeye İlişkin Çalışmalar	62
BÖLÜM 3	71
YÖNTEM.....	71
3.1. Araştırma Deseni	71
3.2. Çalışma Grubu	73
3.3. Araştırmacının Rolü	75
3.4. Veri Toplama Araçları	76
3.4.1. KÇB Testinin Geliştirilmesi ve Uygulanması.....	78
3.4.2. Rubrik Hazırlama Süreci	80
3.4.3. Görüşmeler	81
3.4.4. Dokümanlar	83
3.5. Pilot Çalışma.....	84
3.6. Veri Toplama Süreci.....	86
3.7. Verilerin Analizi.....	93
3.8. Geçerlik ve Güvenirlik	96
BÖLÜM 4	99
BULGULAR.....	99
4.1. Model Çizme Bilgisi	99

4.1.1. Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Model Çizme Bilgisi	99
4.1.1.1. Başlangıç Durumu	99
4.1.1.2. Öğretim Süreci.....	103
4.1.1.3. Son Durum	113
4.1.2. İki Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Model Çizme Bilgisi	117
4.1.2.1. Başlangıç Durumu	117
4.1.2.2. Öğretim Süreci.....	121
4.1.2.3. Son Durum	126
4.1.3. Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Model Çizme Bilgisi	131
4.1.3.1. Başlangıç Durumu	131
4.1.3.2. Öğretim Süreci.....	139
4.1.3.3. Son Durum	152
4.1.4. İki Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Model Çizme Bilgisi.....	161
4.1.4.1. Başlangıç Durumu	161
4.1.4.2. Öğretim Süreci.....	163
4.1.4.3. Son Durum	179
4.2. Problem Kurma Bilgisi.....	185
4.2.1. Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Problem Kurma Bilgisi	185
4.2.1.1. Başlangıç Durumu	185
4.2.1.2. Öğretim Süreci.....	188
4.2.1.3. Son Durum	194
4.2.2. İki Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Problem Kurma Bilgisi	198
4.2.2.1. Başlangıç Durumu	198
4.2.2.2. Öğretim Süreci.....	199
4.2.2.3. Son Durum	205
4.2.3. Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Problem Kurma Bilgisi	207
4.2.3.1. Başlangıç durumu	207
4.2.3.2. Öğretim Süreci.....	213
4.2.3.3. Son Durum	220
4.2.4. İki Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Problem Kurma Bilgisi	228

4.2.4.1. <i>Başlangıç Durumu</i>	228
4.2.4.2. <i>Öğretim Süreci</i>	232
4.2.4.2. <i>Son Durum</i>	242
4.3. Matematiksel İfade Yazma Bilgisi.....	249
4.3.1. Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Matematiksel İfade Yazma Bilgisi	249
4.3.1.1. <i>Başlangıç Durumu</i>	249
4.3.1.2. <i>Öğretim Süreci</i>	251
4.3.1.3. <i>Son Durum</i>	257
4.3.2. İki Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Matematiksel İfade Yazma Bilgisi	261
4.3.2.1. <i>Başlangıç Durumu</i>	261
4.3.2.2. <i>Öğretim Süreci</i>	263
4.3.2.3. <i>Son Durum</i>	266
4.3.3. Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Matematiksel İfade Yazma Bilgisi	269
4.3.3.1. <i>Başlangıç Durumu</i>	269
4.3.3.2. <i>Öğretim Süreci</i>	271
4.3.3.3. <i>Son Durum</i>	275
4.3.4. İki Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Matematiksel İfade Yazma Bilgisi ..	280
4.3.4.1. <i>Başlangıç Durumu</i>	280
4.3.4.2. <i>Öğretim Süreci</i>	282
4.3.4.3. <i>Son Durum</i>	289
4.4. Gerekçelendirme Bilgisi	294
4.4.1. Kesirlerle Çarpma İşlemine İlişkin Gerekçelendirme Bilgisi.....	294
4.4.1.1. <i>Başlangıç Durumu</i>	294
4.4.1.2. <i>Öğretim Süreci</i>	299
4.4.1.3. <i>Son Durum</i>	304
4.4.2. Kesirlerle Bölme İşlemine İlişkin Gerekçelendirme Bilgisi	312
4.4.2.1. <i>Başlangıç Durumu</i>	312
4.4.2.2. <i>Öğretim Süreci</i>	317
4.4.2.3. <i>Son Durum</i>	320
4.5. Açıklama Bilgisi	330
4.5.1. Kesirlerle Çarpma İşlemine İlişkin Açıklama Bilgisi	330

4.5.1.1. Başlangıç Durumu	330
4.5.1.2. Öğretim Süreci.....	347
4.5.1.3. Son Durum	353
4.5.2. Kesirlerle Bölme İşlemine İlişkin Açıklama Bilgisi.....	371
4.5.2.1. Başlangıç Durumu	371
4.5.2.2. Öğretim Süreci.....	386
4.5.2.3. Son Durum	394
BÖLÜM 5	423
TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER.....	423
5.1. Tartışma ve Sonuçlar.....	423
5.2. Öneriler	446
KAYNAKLAR.....	451
EKLER	471
EK 1. Esas Çalışmada Uygulanan KÇB Testi ve Testteki Görevlerin İçerdikleri Boyutlar	472
EK 2. KÇB Testini Puanlamada Kullanılan Analitik Rubrik, Rubriğin Boyutları ile Düzeyleri ve Açıklamaları.....	477
EK 3. Pilot Çalışmada Derslerde Kullanılan Alıştırmalar Örneği.....	483
EK 4. Pilot Çalışmada Gerçekleştirilen Görüşmelere Örnek.....	484
EK 5. Esas Çalışmada Derste Kullanılan Alıştırmalara Örnek	486
EK 6. Öğretim Sürecinde Gerçekleştirilen Bir Ders Örneği.....	487
EK 7. Esas Çalışmada Yapılan Görüşmelere Örnek.....	490
EK 8. Kodlama Tablosu.....	491

TABLolar LİSTESİ

Tablo 2.1. Kesirlerle Çarpma ve Bölme İşlemlerine İlişkin Kurulan Problemlerin Türleri	21
Tablo 2.2. Kesirlerle Çarpma ve Bölme İşlemlerine İlişkin Çizilen En Yaygın Model Türleri	25
Tablo 2.3. Gerekçelendirme Türleri	27
Tablo 2.4. Açıklama Türleri	30
Tablo 2.5. İşlemsel ve Kavramsal Bilginin Tanımları ve Örnekleri	32
Tablo 2.6. Kesirlerle Çarpma İşlemine İlişkin Önemli Noktalar	39
Tablo 2.7. Kesirlerle Bölme İşlemine İlişkin Önemli Noktalar	46
Tablo 2.8. Çarpma ve Bölme İşlemlerine İlişkin Sezgisel Kısıtlamalar	51
Tablo 2.9. Kesirlerle Çarpma ve Bölmeye İlişkin Literatürde Karşılaşılan Zorluklar	61
Tablo 3.1. Çalışma Takvimi	77
Tablo 3.2. KÇB Testini Değerlendirmek İçin Hazırlanan Analitik Rubriğin Boyutları ve Düzeyleri	81
Tablo 3.3. Veri Toplama Sürecine Ait Çalışma Takvimi	87
Tablo 4.1. Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin Çarpma İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar	100
Tablo 4.2. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Çarpma İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar	105
Tablo 4.3. Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin Çarpma İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar	114
Tablo 4.4. Öğretmen Adaylarının Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Çarpma İşlemine İlişkin Model Çizme Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo...	115
Tablo 4.5. Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde İki Kesrin Çarpma İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar	118
Tablo 4.6. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde İki Kesrin Çarpma İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar	122

Tablo 4.7. Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde İki Kesrin Çarpma İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar.....	127
Tablo 4.8. Öğretmen Adaylarının İki Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Model Çizme Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo	130
Tablo 4.9. Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar.	133
Tablo 4.10. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar.	140
Tablo 4.11. Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar.	153
Tablo 4.12. Öğretmen Adaylarının Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemine İlişkin Model Çizme Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo	157
Tablo 4.13. Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde İki Kesrin Bölme İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar.....	161
Tablo 4.14. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde İki Kesrin Bölme İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar.....	164
Tablo 4.15. Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde İki Kesrin Bölme İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar.....	180
Tablo 4.16. Öğretmen Adaylarının İki Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Model Çizme Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo	182
Tablo 4.17. Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde $6 \times \frac{2}{3}$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler	185
Tablo 4.18. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Çarpma İşlemi İçin Kurdukları Problemlere İlişkin Açıklamalar.....	188
Tablo 4.19. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen Küme Modelinin İfade Ettiği $3 \times \frac{2}{5}$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler	189
Tablo 4.20. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $\frac{2}{3} \times 6$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler.....	191
Tablo 4.21. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen Dairesel Alan Modelinin İfade Ettiği $\frac{2}{3} \times 2$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler.....	192
Tablo 4.22. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $5 \times \frac{1}{2}$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler.....	194

Tablo 4.23. Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde $6 \times \frac{2}{3}$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler	195
Tablo 4.24. Öğretmen Adaylarının Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Çarpma İşlemine İlişkin Problem Kurma Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo	197
Tablo 4.25. Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler	198
Tablo 4.26. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde İki Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Kurdukları Problemlere İlişkin Açıklamalar	200
Tablo 4.27. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $\frac{2}{5} \times \frac{5}{7}$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler.....	201
Tablo 4.28. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen Küme Modelinin İfade Ettiği $\frac{3}{5} \times \frac{5}{8}$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler.....	202
Tablo 4.29. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen Dikdörtgensel Alan Modelinin İfade Ettiği $\frac{2}{7} \times \frac{3}{5}$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler	203
Tablo 4.30. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $\frac{1}{2} \times \frac{5}{6}$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler.....	204
Tablo 4.31. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen Kesir Çubuğu Modelinin İfade Ettiği $\frac{4}{5} \times \frac{5}{9}$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler	204
Tablo 4.32. Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler	205
Tablo 4.33. Öğretmen Adaylarının İki Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Problem Kurma Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo	206
Tablo 4.34. Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemi İçin Kurdukları Problemlere İlişkin Açıklamalar	207
Tablo 4.35. Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Verilen Sözel İfadeye Karşılık Gelen $5 \div \frac{1}{2}$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler	208
Tablo 4.36. Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Verilen $\frac{1}{2} \div 2$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler.....	209
Tablo 4.37. Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Verilen Kesir Çubuğu Modelinin İfade Ettiği $\frac{2}{7} \div 3$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler	210

Tablo 4.38. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemine İlişkin Kurdukları Problemlere İlişkin Açıklamalar.....	214
Tablo 4.39. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $4 \div 1/3$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler.....	215
Tablo 4.40. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $5/7 \div 3$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler.....	217
Tablo 4.41. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $3/5 \div 4$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler.....	218
Tablo 4.42. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $3 \div 1/4$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler.....	219
Tablo 4.43. Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemi İçin Kurdukları Problemlere İlişkin Açıklamalar	221
Tablo 4.44. Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Verilen Sözel İfadeye Karşılık Gelen $5 \div 1/2$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler	221
Tablo 4.45. Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Verilen $1/2 \div 2$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler.....	222
Tablo 4.46. Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Verilen Kesir Çubuğu Modelinin İfade Ettiği $2/7 \div 3$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler	224
Tablo 4.47. Öğretmen Adaylarının Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemine İlişkin Problem Kurma Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo.....	226
Tablo 4.48. Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde İki Kesrin Bölme İşlemi İçin Kurdukları Problemlere İlişkin Açıklamalar	228
Tablo 4.49. Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Verilen Sayı Doğrusu Modelinin İfade Ettiği $2/3 \div 1/4$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler	229
Tablo 4.50. Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Verilen $1/7 \div 3/4$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler.....	230
Tablo 4.51. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde İki Kesrin Bölme İşlemi İçin Kurdukları Problemlere İlişkin Açıklamalar	233
Tablo 4.52. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $2/5 \div 3/7$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler.....	234
Tablo 4.53. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen Kesir Çubuğu Modelinin İfade Ettiği $3/5 \div 4/9$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler	235

Tablo 4.54. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $3/4 \div 5/7$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler.....	238
Tablo 4.55. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $1/3 \div 3/2$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler.....	239
Tablo 4.56. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $4/5 \div 3/2$ İşleminin Gruplama Anlamı İçin Kurdukları Problemler	241
Tablo 4.57. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $4/5 \div 3/2$ İşleminin Paylaştırma Anlamı İçin Kurdukları Problemler	241
Tablo 4.58. Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde İki Kesrin Bölme İşlemi İçin Kurdukları Problemlere İlişkin Açıklamalar	242
Tablo 4.59. Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Verilen Sayı Doğrusu Modelinin İfade Ettiği $2/3 \div 1/4$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler	243
Tablo 4.60. Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Verilen $1/7 \div 3/4$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler.....	244
Tablo 4.61. Öğretmen Adaylarının İki Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Problem Kurma Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo	247
Tablo 4.62. Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Çarpma İşlemine İlişkin Verilen Küme Modeli İçin Yazdıkları İşlemler.....	249
Tablo 4.63. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemine İlişkin Verilen Model ve Problemler İçin Yazdıkları İşlemler	252
Tablo 4.64. Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Çarpma İşlemine İlişkin Verilen Küme Modeli İçin Yazdıkları İşlemler.....	257
Tablo 4.65. Öğretmen Adaylarının Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Çarpma İşlemine İlişkin Verilen Model ve Problemlerin İfade Ettikleri İşlemleri Matematiksel Olarak Yazma Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo	260
Tablo 4.66. Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde İki Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Verilen Sözel İfade ve Problem İçin Yazdıkları İşlemler	261
Tablo 4.67. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde İki Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Verilen Model ve Problemler İçin Yazdıkları İşlemler	264
Tablo 4.68. Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde İki Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Verilen Sözel İfade ve Problem İçin Yazdıkları İşlemler	267

Tablo 4.69. Öğretmen Adaylarının İki Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Verilen Model ve Problemlerin İfade Ettikleri İşlemleri Matematiksel Olarak Yazma Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo.....	268
Tablo 4.70. Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemine İlişkin Verilen Model ve Problemler İçin Yazdıkları İşlemler	269
Tablo 4.71. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemine İlişkin Verilen Model ve Problemler İçin Yazdıkları İşlemler	272
Tablo 4.72. Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemine İlişkin Verilen Model ve Problemler İçin Yazdıkları İşlemler	277
Tablo 4.73. Öğretmen Adaylarının Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemine İlişkin Verilen Model ve Problemlerin İfade Ettikleri İşlemleri Matematiksel Olarak Yazma Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo	278
Tablo 4.74. Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde İki Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Verilen Model İçin Yazdıkları İşlemler	280
Tablo 4.75. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde İki Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Verilen Model ve Problemler İçin Yazdıkları İşlemler	284
Tablo 4.76. Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde İki Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Verilen Model İçin Yazdıkları İşlemler	290
Tablo 4.77. Öğretmen Adaylarının İki Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Verilen Model ve Problemlerin İfade Ettikleri İşlemleri Matematiksel Olarak Yazma Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo.....	292
Tablo 4.78. Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Kesirlerle Çarpmaya İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Gerekçelendirmelere İlişkin Açıklamalar	295
Tablo 4.79. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Kesirlerle Çarpmaya İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Gerekçelendirmelere İlişkin Açıklamalar	300
Tablo 4.80. Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Kesirlerle Çarpmaya İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Gerekçelendirmelere İlişkin Açıklamalar	306
Tablo 4.81. Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Çarpma İşlemine İlişkin Verilen Model ile Cevabın Doğruluğunu ve Verilen Problemin veya Modelin Neden O İşlemi İfade Ettiğini Gerekçelendirme Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo	309

Tablo 4.82. Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Kesirlerle Bölmeye İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Gerekçelendirmelere İlişkin Açıklamalar.....	313
Tablo 4.83. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Kesirlerle Bölmeye İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Gerekçelendirmelere İlişkin Açıklamalar.....	318
Tablo 4.84. Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Kesirlerle Bölmeye İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Gerekçelendirmelere İlişkin Açıklamalar.....	322
Tablo 4.85. Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Bölme İşlemine İlişkin Verilen Model ile Cevabın Doğruluğunu ve Verilen Problemin veya Modelin Neden O İşlemi İfade Ettiğini Gerekçelendirme Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo	327
Tablo 4.86. Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Kesirlerle Çarpmaya İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Açıklamalar.....	330
Tablo 4.87. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Kesirlerle Çarpmaya İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Açıklamalar.....	347
Tablo 4.88. Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Kesirlerle Çarpmaya İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Açıklamalar.....	354
Tablo 4.89. Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Çarpma İşlemine İlişkin Verilen Durumları Açıklama Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo	368
Tablo 4.90. Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Kesirlerle Bölmeye İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Açıklamalar.....	372
Tablo 4.91. Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Kesirlerle Bölmeye İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Açıklamalar.....	387
Tablo 4.92. Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Kesirlerle Bölmeye İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Açıklamalar.....	395
Tablo 4.93. Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Bölmeye İlişkin Verilen Durumları Açıklama Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo	417

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. ÖMB alan haritası	9
Şekil 2.2. Öğretim için matematiksel görevler	14
Şekil 2.3. Lesh çoklu temsil geçiş modeli	17
Şekil 2.4. Rasyonel sayıların öğretimine ilişkin kavramsal şema	34
Şekil 2.5. Çarpmanın tanımı	35
Şekil 2.6. Kesirlerle çarpmada çarpanların sırasını değiştirmenin sonucu değil ama çizimi değiştirmesine örnek	37
Şekil 2.7. Kesirlerle çarpma işlemine ilişkin kazanımlar	38
Şekil 2.8. Bölmenin tanımı ve anlamları	43
Şekil 2.9. Kesirlerle bölme işlemine ilişkin kazanımlar	45
Şekil 2.10. Öğretmenin ders kitabından alarak çizdiği sayı doğrusunda $\frac{2}{3}$ 'ün $\frac{1}{5}$ 'inin çözümü	57
Şekil 2.11. Alan modeliyle bölme örnekleri	58
Şekil 3.1. Çalışmada temel alınan boyutlar	77
Şekil 3.2. KÇB testinin geliştirilmesi süreci	79
Şekil 3.3. Öğretmen adaylarıyla gerçekleştirilen görüşmelerde oturma düzeni	91
Şekil 4.1. KÇB ön-testte 1. görevde ÖA6'nın çizdiği model	101
Şekil 4.2. KÇB ön-testte 1. görevde ÖA2'nin çizdiği model	101
Şekil 4.3. KÇB ön-testte 1. görevde ÖA4'ün çizdiği model	102
Şekil 4.4. KÇB ön-testte 1. görevde ÖA1'in çizdiği model	102
Şekil 4.5. KÇB ön-testte 1. görevde ÖA3'ün çizdiği model	103
Şekil 4.6. Görüşme-2'de verilen $5 \times \frac{1}{2}$ işlemi için ÖA6'nın çizdiği birinci model	106
Şekil 4.7. Görüşme-2'de verilen $5 \times \frac{1}{2}$ işlemi için ÖA5'in çizdiği model	106
Şekil 4.8. Görüşme-2'de verilen $5 \times \frac{1}{2}$ işlemi için ÖA6'nın çizdiği ikinci model	107
Şekil 4.9. Görüşme-2'de verilen $\frac{1}{2} \times 5$ işlemi için ÖA3'ün çizdiği birinci model	108
Şekil 4.10. Görüşme-2'de verilen problemin ifade ettiği $\frac{3}{7} \times 4$ işlemi için ÖA4'ün çizdiği model	109

Şekil 4.11. Görüşme-2’de verilen problemin ifade ettiği $3/7 \times 4$ işlemi için ÖA5’in çizdiği model.....	110
Şekil 4.12. Alıştırmalar-4’te verilen $3/4 \times 5$ işlemi için ÖA3’ün çizdiği model.....	111
Şekil 4.13. Görüşme-2’de 3. görevde $3/7 \times 4$ işlemi için ÖA6’nın çizdiği birinci model .	111
Şekil 4.14. Görüşme-2’de verilen problemin ifade ettiği $3/7 \times 4$ işlemi için ÖA6’nın çizdiği birinci modelin devamı	112
Şekil 4.15. Görüşme-2’de 3. görevde $3/7 \times 4$ işlemi için ÖA6’nın çizdiği ikinci model...	112
Şekil 4.16. KÇB son-testinde 1. görevde ÖA3’ün çizdiği model	114
Şekil 4.17. KÇB son-testinde 1. görevde ÖA6’nın çizdiği model	115
Şekil 4.18. KÇB son-testinde 1. görevde ÖA6’nın çizdiği modelin devamı	115
Şekil 4.19. KÇB ön-testinde 14. görevde ÖA1’in çizdiği model.....	119
Şekil 4.20. KÇB ön-testinde 14. görevde ÖA4’ün çizdiği model.....	119
Şekil 4.21. KÇB ön-testinde 14. görevde ÖA6’nın çizdiği model.....	119
Şekil 4.22. KÇB ön-testinde 17. görevde ÖA4’ün çizdiği model.....	120
Şekil 4.23. KÇB ön-testinde 17. görevde ÖA5’in çizdiği model.....	121
Şekil 4.24. Alıştırmalar-3’te verilen $1/4 \times 2/3$ işlemi için ÖA5’in çizdiği model.....	123
Şekil 4.25. Görüşme-3’te verilen $2/7 \times 3/5$ işlemi için ÖA2’nin çizdiği model	123
Şekil 4.26. Görüşme-3’te verilen $2/7 \times 3/5$ işlemi için ÖA4’ün çizdiği model	124
Şekil 4.27. Görüşme-3’te verilen problemin ifade ettiği $2/5 \times 3/4$ işlemi için ÖA3’ün çizdiği model.....	125
Şekil 4.28. KÇB son-testinde 14. görevde ÖA5’in çizdiği model	127
Şekil 4.29. KÇB son-testinde 14. görevde ÖA1’in çizdiği model	128
Şekil 4.30. KÇB son-testinde 17. görevde ÖA4’ün çizdiği model	129
Şekil 4.31. KÇB son-testinde 17. görevde ÖA6’nın çizdiği model	129
Şekil 4.32. KÇB ön-testinde 2. görevde ÖA6’nın çizdiği model.....	134
Şekil 4.33. KÇB ön-testinde 2. görevde ÖA1’in çizdiği model.....	134
Şekil 4.34. KÇB ön-testinde 2. görevde ÖA5’in çizdiği model.....	135
Şekil 4.35. KÇB ön-testinde 6. görevde ÖA4’ün çizdiği model.....	136
Şekil 4.36. KÇB ön-testinde 6. görevde ÖA1’in çizdiği model.....	137
Şekil 4.37. KÇB ön-testinde 20. görevde ÖA2’nin çizdiği model.....	137
Şekil 4.38. KÇB ön-testinde 20. görevde ÖA6’nın çizdiği model.....	138
Şekil 4.39. KÇB ön-testinde 20. görevde ÖA3’ün çizdiği model.....	138
Şekil 4.40. KÇB ön-testinde 20. görevde ÖA3’ün çizdiği modelin devamı	139

Şekil 4.41. Görüşme-4'te verilen $4 \div 1/3$ işleminin gruptama anlamı için ÖA3'ün çizdiği model.....	142
Şekil 4.42. Görüşme-4'te verilen $4 \div 1/3$ işleminin gruptama anlamı için ÖA6'nın çizdiği model.....	143
Şekil 4.43. Görüşme-4'te verilen $4 \div 1/3$ işleminin paylaşırma anlamı için ÖA1'in çizdiği model.....	143
Şekil 4.44. Görüşme-4'te verilen $4 \div 1/3$ işleminin paylaşırma anlamı için ÖA1'in çizdiği model.....	144
Şekil 4.45. Görüşme-4'te verilen $4 \div 1/3$ işleminin paylaşırma anlamı için ÖA6'nın çizdiği model.....	146
Şekil 4.46. Görüşme-4'te verilen $12 \div 4/5$ işleminin paylaşırma anlamı için ÖA6'nın çizdiği model.....	147
Şekil 4.47. Görüşme-5'te verilen $3 \div 1/4$ işleminin paylaşırma anlamı için ÖA5'in çizdiği model.....	149
Şekil 4.48. Görüşme-5'te verilen $3 \div 1/4$ işleminin paylaşırma anlamı için ÖA4'ün çizdiği model.....	149
Şekil 4.49. Görüşme-5'te verilen $3/5 \div 4$ işleminin paylaşırma anlamı için ÖA3'ün çizdiği model.....	150
Şekil 4.50. Görüşme-5'te verilen $3/5 \div 4$ işleminin gruptama anlamı için ÖA4'ün çizdiği model.....	151
Şekil 4.51. KÇB son-testinde 2. görevde ÖA6'nın çizdiği model	154
Şekil 4.52. KÇB son-testinde 6. görevde ÖA3'ün çizdiği model	154
Şekil 4.53. KÇB son-testinde 20. görevde ÖA5'in çizdiği model	155
Şekil 4.54. KÇB ön-testinde 16. görevde ÖA6'nın çizdiği model.....	162
Şekil 4.55. KÇB ön-testinde 16. görevde ÖA4'ün çizdiği model.....	162
Şekil 4.56. KÇB ön-testinde 16. görevde ÖA2'nin çizdiği model.....	163
Şekil 4.57. Alıştırma-8'de verilen $2/5 \div 3/7$ işleminin paylaşırma anlamı için ÖA5'in çizdiği model.....	167
Şekil 4.58. Görüşme-6'da verilen $3/4 \div 5/7$ işleminin gruptama anlamı için ÖA2'nin çizdiği model.....	168
Şekil 4.59. Görüşme-6'da verilen $3/4 \div 5/7$ işleminin gruptama anlamı için ÖA6'nın çizdiği model.....	169
Şekil 4.60. Görüşme-6'da verilen problemin ifade ettiğı $2/5 \div 3/4$ işleminin paylaşırma anlamı için ÖA5'in çizdiği model.....	171

Şekil 4.61. Görüşme-6’da verilen problemin ifade ettiği $2/5 \div 3/4$ işleminin paylaşırma anlamı için ÖA6’nın çizdiği model.....	173
Şekil 4.62. Görüşme-7’de verilen problemin ifade ettiği $4/5 \div 3/2$ işleminin gruptama anlamı için ÖA5’in çizdiği model.....	174
Şekil 4.63. Görüşme-7’de verilen problemin ifade ettiği $4/5 \div 3/2$ işleminin gruptama anlamı için ÖA4’ün çizdiği model.....	176
Şekil 4.64. Görüşme-7’de verilen problemin ifade ettiği $4/5 \div 3/2$ işleminin paylaşırma anlamı için ÖA4’ün çizdiği model.....	177
Şekil 4.65. KÇB son-testinde 16. görevde ÖA1’in paylaşırma anlamı için çizdiği model	180
Şekil 4.66. KÇB son-testinde 16. görevde ÖA1’in gruptama anlamı için çizdiği model ..	181
Şekil 4.67. Alıştırmalar-2’de 1. görevde verilen model	189
Şekil 4.68. Görüşme-2’de 1. görevde verilen model.....	191
Şekil 4.69. Alıştırmalar-3’te 1. görevde verilen model.....	201
Şekil 4.70. Alıştırmalar-4’te 1. görevde verilen birinci model	202
Şekil 4.71. Görüşme-3’te 1. görevde verilen model.....	203
Şekil 4.72. KÇB testinde 15. görevde verilen model	210
Şekil 4.73. KÇB testinde 7. görevde verilen model	229
Şekil 4.74. Görüşme-6’da birinci görevde verilen model	235
Şekil 4.75. KÇB testinde 4. görevde verilen model	250
Şekil 4.76. Görüşme-2’de 1. görevde ÖA6’nın $2 \times 2/3$ işlemi için çizdiği model.....	254
Şekil 4.77. Alıştırmalar-4’te 1. görevde verilen ikinci model.....	257
Şekil 4.78. Görüşme-7’de 1. görevde verilen kesir çubuğu modeli	265
Şekil 4.79. Alıştırmalar-5’te birinci görevde verilen dairesel alan modeli	272
Şekil 4.80. Alıştırmalar-5’te birinci görevde ÖA4’ün paylaşırma anlamı için çizdiği model	273
Şekil 4.81. Görüşme-4’te verilen bir model	273
Şekil 4.82. Görüşme-6’da verilen ikinci model	288
Şekil 4.83. KÇB testinde 9. görevde verilen dikdörtgensel alan modeli.....	296
Şekil 4.84. KÇB testinde 12. görevde verilen dikdörtgensel alan modeli.....	298
Şekil 4.85. Görüşme-3’te verilen problemin neden $2/5 \times 3/4$ işlemini ifade ettiğini gerekçelendirirken ÖA6’nın çizdiği dairesel alan modeli	304
Şekil 4.86. KÇB testinde 18. görevde verilen dikdörtgensel alan modeli	316
Şekil 4.87. KÇB ön-testinde verilen sekizinci görevde ÖA6’nın yaptığı UTA	332

Şekil 4.88. KÇB ön-testinde verilen sekizinci görevde ÖA2'nin yaptığı UTA.....	333
Şekil 4.89. KÇB ön-testinde verilen sekizinci görevde ÖA1'in yaptığı UTA.....	336
Şekil 4.90. KÇB ön-testinde verilen sekizinci görevde ÖA4'ün yaptığı MTA	336
Şekil 4.91. KÇB ön-testinde 9. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı UTA	338
Şekil 4.92. KÇB ön-testinde 5. görevde ÖA3'ün çizdiği model.....	340
Şekil 4.93. KÇB ön-testine ilişkin yapılan görüşmede (G1) 10. görevde ÖA2'nin çizdiği model.....	343
Şekil 4.94. KÇB ön-testinde 10. görevde ÖA4'ün çizdiği model.....	344
Şekil 4.95. KÇB ön-testinde 12. görevde ÖA4'ün çizdiği model.....	345
Şekil 4.96. KÇB ön-testine ilişkin yapılan görüşmede (G1) 12. görevde ÖA4'ün çizdiği model.....	346
Şekil 4.97. KÇB ön-testinde 12. görevde ÖA5'in çizdiği model.....	346
Şekil 4.98. Görüşme-3'te verilen $1/2 \times 5/6$ işlemi için ÖA3'ün çizdiği dikdörtgensel alan modeli	352
Şekil 4.99. Görüşme-7'de verilen $3/5 \times 2/7$ işlemi için ÖA5'in çizdiği dikdörtgensel alan modeli	353
Şekil 4.100. KÇB son-testinde 8. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı UTA.....	356
Şekil 4.101. KÇB son-testinde 8. Göreve ilişkin ÖA2'nin yaptığı MUTA	357
Şekil 4.102. KÇB son-testinde 9. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı UTA.....	359
Şekil 4.103. KÇB son-testinde 9. göreve ilişkin ÖA3'ün yaptığı UTA	360
Şekil 4.104. KÇB son-testinde 9. görevde ÖA5'in çizdiği model	360
Şekil 4.105. KÇB son-testinde 5. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı UTA.....	361
Şekil 4.106. KÇB son-testinde 5. göreve ilişkin ÖA1'in yaptığı MTA	363
Şekil 4.107. KÇB son-testinde 10. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı MTA	364
Şekil 4.108. Görüşme-8'de KÇB son-testinde verilen 10. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı UTA	365
Şekil 4.109. KÇB son-testinde 10. göreve ilişkin ÖA3'ün yaptığı UTA.....	366
Şekil 4.110. KÇB son-testinde verilen 12. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı UTA.....	367
Şekil 4.111. KÇB ön-testinde 13. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı UTA	374
Şekil 4.112. KÇB ön-testinde 11. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı UTA	376
Şekil 4.113. KÇB ön-testinde 11. göreve ilişkin ÖA3'ün yaptığı UTA	378
Şekil 4.114. Görüşme-1'de KÇB ön-testinde verilen 11. görev için ÖA2'nin çizdiği model	379
Şekil 4.115. KÇB ön-testinde 19. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı UTA	380

Şekil 4.116. KÇB ön-testinde 19. göreve ilişkin ÖA3'ün yaptığı UTA	381
Şekil 4.117. KÇB ön-testinde 3. görevde ÖA6'nın çizdiği model.....	382
Şekil 4.118. Görüşme-1'de KÇB ön-testinde 8. görevde verilen işlem için ÖA1'in çizdiği model.....	384
Şekil 4.119. Görüşme-1'de KÇB ön-testinde 8. görevde verilen işlem için ÖA2'nin çizdiği model.....	386
Şekil 4.120. Görüşme-6'da verilen $3/4 \div 5/7$ işlemi için ÖA2'nin çizdiği model	394
Şekil 4.121. KÇB son-testinde 13. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı MTA	397
Şekil 4.122. Görüşme-8'de KÇB son-testinde 13. görev için ÖA6'nın çizdiği model.....	398
Şekil 4.123. KÇB son-testinde 13. göreve ilişkin ÖA3'ün yaptığı UTA.....	399
Şekil 4.124. KÇB son-testinde 13. göreve ilişkin ÖA5'in yaptığı UTA.....	401
Şekil 4.125. KÇB son-testinde 11. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı UTA.....	402
Şekil 4.126. KÇB son-testinde 11. göreve ilişkin ÖA1'in yaptığı MUTA	405
Şekil 4.127. KÇB son-testinde 19. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı UTA.....	406
Şekil 4.128. KÇB son-testinde 3. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı MUTA	409
Şekil 4.129. KÇB son-testinde 3. göreve ilişkin ÖA1'in yaptığı MTA	410
Şekil 4.130. KÇB son-testinde 3. görevde ÖA5'in çizdiği kesir çubuğu modeli.....	411
Şekil 4.131. KÇB son-testinde 3. göreve ilişkin ÖA4'ün yaptığı UTA.....	413
Şekil 4.132. KÇB son-testinde 18. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı UTA.....	414
Şekil 4.133. KÇB son-testinde 18. görevde ÖA5'in çizdiği kesir çubuğu modeli.....	414
Şekil 4.134. KÇB son-testinde 18. görevde ÖA1'in çizdiği kesir çubuğu modeli.....	416

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

ÖMB	Öğretim için matematiksel bilgi
ÖAB	Özelleştirilmiş alan bilgisi
ÖA	Öğretmen adayı
KÇB	Kesirlerle çarpma ve bölme
G	Görüşme
D	Ders
K	Kazanım
A	Alıştırmalar
KB	Kavramsal bilgi
İB	İşlemsel bilgi
İKB	Hem işlemsel hem kavramsal bilgi
MTA	Matematiksel temelli açıklama
UTA	Uygulama temelli açıklama
MUTA	Hem matematiksel hem uygulama temelli açıklama
YÖK	Yüksek Öğretim Kurumu
MEB	Milli Eğitim Bakanlığı

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu bölüm problem durumu, araştırmanın önemi, araştırmanın amacı, sınırlılıklar, varsayımlar ve tanımlardan oluşmaktadır.

1.1. Problem Durumu

Matematik eğitiminde uzun yıllardır kesirler ve kesirlerle işlemlerin öğrenme ve öğretimine ilişkin çalışmalar yapılmaktadır (Armstrong ve Bezuk, 1995; Ball, 1990a; Behr, Lesh, Post ve Silver, 1983). Çalışmaların büyük çoğunluğu öğrencilerin öğrenmelerine ve kavram yanlışlarına ve kesirlerin derinlemesine incelenmesine ilişkindir (Birgin ve Gürbüz, 2009; Mack, 1990; Mulligan ve Mitchelmore, 1997; Ochefu, 2013). Son 30 yıldır öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının kesirler ve kesirlerle işlemlere ilişkin anlamalarına dayalı çalışmaların artarak devam ettiği görülmektedir (Alenazi, 2016; Ball, 1990b; Izsák, 2006a; Lee, Brown ve Orrill, 2011; Simon, 1993). Çalışmaların çoğu öğrencilerde bu konulara ilişkin görülen kavram yanlışlarının ve hataların çoğunun öğretmen adaylarında ve öğretmenlerde de görüldüğünü ortaya koymuşlardır ve yaşadıkları zorlukları ele almışlardır (Graeber, Tirosh ve Glover, 1989; Harel, Behr, Post ve Lesh, 1994; Işık, 2011; Işık ve Kar, 2012a).

Kesirler sadece sayılar konusunda değil farklı sınıf düzeylerinde farklı konularda da karşımıza çıkar. Örneğin, uzunluk ölçümünde ($\frac{1}{3}$ cm), olasılık hesaplarında (3 mavi, 4 yeşil bilye bulunan bir torbadan mavi bilye çekme olasılığı $\frac{3}{7}$) veya grafik çizerken kesirler kullanılır. Sekizinci sınıftan itibaren görülmeye başlanan rasyonel sayılarla işlemlerde ve rasyonel sayıların işlendiği polinomlar, türev ve integral gibi konularda da kesir işlemlerinin kuralları geçerlidir. Kesirlerin bu kavramsal zenginliği ve karmaşıklığından dolayı matematik derslerinde öğretimi dikkat gerektirir. Kesirler ve kesirlerle işlemlerin ilkökul ve ortaokulda iyi anlaşılması ve kesirlerle işlemleri anlayarak

hızla yapabilme becerilerinin kazandırılması öğrencilere kesirler ve kesirlerle işlemleri anlamlı hale getirecektir ve günlük yaşamda ve diğer derslerle ileri matematik konularında başarılı olmalarına yardımcı olacaktır (Alacacı, 2010, s. 65). Bu yüzden öğrencilere özellikle en zorlanılan kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin kavramsal anlamının kazandırılabilmesi için en başta öğretmen adaylarına kazandırılabilmelidir. Bu anlamda kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kavramsal anlamayı geliştirmeye yönelik çalışmalar yapılarak bunun sağlanabileceği düşünülmektedir. Bu çalışmada kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kavramsal anlamalarını geliştirmeye yönelik bir öğretim gerçekleştirilmiştir ve bu anlamalarının öğretim boyunca gelişimi incelenmiştir.

1.2. Araştırmanın Önemi

Literatürde yer alan çalışmaların çoğunda öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma, bölme veya her ikisine ilişkin anlamaları incelenmiştir (Ball, 1990a; Borko vd., 1992; Lo ve Luo, 2012; Simon, 1993; Tsay ve Hauk, 2009). Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamalarının gelişiminin incelendiği çalışmaların diğer çalışmalara kıyasla sayıca daha az olduğu görülmektedir (Azim, 1995; Chen, 2010; Tzur ve Timmerman, 1997; Tobias, 2009). Gelecek nesillere faydalı olması adına ve literatüre katkısı olması açısından öğretmen adaylarının anlamasının gelişiminin incelendiği bir çalışma gerçekleştirilmiştir. Geleceğin öğretmenleri olacak öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamalarının gelişiminin incelendiği bu çalışma önemlidir. Çünkü öğretmen adayları bunlara ilişkin işlemsel anlamının yanı sıra kavramsal anlamayı da kazanarak ve model çizme, problem kurma, matematiksel ifade yazma, gerekçelendirme ve açıklama yapma tecrübeleriyle özelleştirilmiş alan bilgilerini geliştirerek ileride bu konuları öğretecekleri öğrencilere de bu konuların anlamını kazandırabilirler. Bu şekilde öğrencilerin bu konularla ilgili yaşanan zorlukları yaşamalarını önleyebilirler. Literatürde öğrencilerin kesirler ve özellikle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin çok zorlandıklarını gösteren çalışmalar mevcuttur (Mack, 1990, 1998; Ochefu, 2013; Toluk, 2002). Bu anlamda bu çalışma hem öğretmen adayları hem de öğrenciler açısından önem taşımaktadır.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) uzun yıllardır matematik öğretimi programı üzerine değişiklikler gerçekleştirmektedir. İlk olarak ilköğretim 5 + 3 şeklindeydi ve kesirlerle işlemlerin hepsi 6. sınıfta veriliyordu (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2009) ancak 2012-

2013 eğitim-öğretim yılında yapılan değişiklikle 5 + 3 olan sistem 4 + 4 + 4 olarak değiştirilmiştir ve ilköğretim okulları “ilkokul” ve “ortaokul” olarak isimlendirilip iki kısma ayrılmıştır. 2013-2014 eğitim-öğretim yılında kesirlerle toplama ve çıkarma 6. sınıftan 5. sınıfa kaydırılmıştır. Ayrıca 2009’daki programda kesirlerle çarpma ve bölmenin anlamını kazandırma ve modelleme 2013’teki yeni programdaki kadar vurgulanmamıştır. Örneğin, $\frac{3}{4}$ ’ün $\frac{2}{5}$ ’i ifadesini $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$ şeklinde yazmaktansa $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ şeklinde yazılacağına dikkat çekilmektedir (MEB, 2013). Ayrıca kazanım cümlelerinde de “anlamlandırır ve modeller” şeklinde vurgular yapılmaktadır. Bu anlamda öğrencilerin kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamayı kazanmaları için öncelikle geleceğin öğretmeni olacak öğretmen adaylarının kazanmaları açısından bu çalışma önem taşımaktadır. Bununla beraber öğretmen adaylarının model çizerken ve problem kurarken kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamalarının nasıl geliştiğine ilişkin bilgi edinilmesi açısından bu çalışmanın önemli olduğu söylenebilir.

Kesirlerle çarpma ve bölmeyle ilgili literatürde çoğunlukla işlem verip problem kurması veya model çizmesi şeklinde çalışmaların gerçekleştirildiği görülmektedir (Ball, 1990a; Izsák, 2006b; Lo ve Luo, 2012; Simon, 1993). Bu çalışmada ise bunların yanısıra model verip işlem yazması veya problem kurması ve aynı işlemin farklı modellerle gösterimi de istenmiştir. Literatür incelendiğinde öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin çizili temsilleri kullanmaları ve anlamalarına ilişkin çalışmalara pek rastlanılmamıştır. Bu anlamda çalışmanın literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Çalışma aynı zamanda temsiller arası geçişleri (sayı doğrusu, kesir çubuğu, alan modeli ve küme modeli) de gözler önüne sereceğinden literatüre önemli bir katkısı olacağı düşünülmektedir. Çünkü literatürde daha çok işlemde modele veya problemde işleme geçişler şeklinde çalışmalar olduğu görülmektedir (Biber, Tuna ve Aktaş, 2013; Ma, 1999; Mack, 1990; Saenz-Ludlow, 1995).

Kesirlerle çarpma işlemi pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritması ile, kesirlerle bölme işlemi genellikle ters çevir çarp algoritması ile verilmektedir ve bu işlemler ile bu algoritmaların altında yatan anlamdan bahsedilmemektedir. Öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işlemini anlamıyla açıklamaktansa ters çevir çarp algoritmasını kullandıklarını ve bu algoritmanın neden işe yaradığını açıklamakta zorlandıklarını gösteren birçok çalışma vardır (Ball, 1990b; Behr, Knoury, Harel, Post ve Lesh, 1997; Gregg ve Gregg, 2007; Tirosh, 2000). Böylece kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlama kuralların ezberlenmesinden öteye geçmemektedir. Bu çalışmada pay ile pay,

payda ile payda çarpma ve ters çevir çarp algoritmalarının altında yatan anlam ve bununla beraber alternatif çözüm yolları kazandırılarak kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kavramsal anlamalarının geliştirilmesi amaçlanmıştır. Bunu gerçekleştirmek için kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin öğretim yapılmıştır. Böylece öğretmen adaylarının bu algoritmalara ilişkin kazanacakları kavramsal anlamaları gelecek nesillere de kazandırabilecekleri düşünülmektedir.

Öğretmen adaylarıyla gerçekleştirilen bu çalışmadan elde edilen bulguların öğretmen eğitiminin gelişimine de faydalı olacağı söylenebilir. Çünkü öğretmen yetiştirirken kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kavramsal anlamının kazandırılması için nasıl bir dersin verilmesi gerektiği gözler önüne serilecektir. Bununla beraber elde edilen bulgulardan öğretmen adaylarının problem kurarken, model çizerken, verilen model veya problemin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazarken, verilen durumu gerekçelendirirken veya açıklarken yaşadıkları zorlukları ve zorlukların nasıl giderildiğine ilişkin sonuçları ortaya koyacağı için bu çalışmanın literatüre önemli katkıları olacağı düşünülmektedir.

1.3. Araştırmanın Amacı

Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeyi öğretmek için gereken bilgi özelleştirilmiş alan bilgisidir (ÖAB). Öğretmen adaylarının ÖAB'lerinin gelişmesi için ÖAB'nin alt boyutları olan gerekçelendirme, açıklama ve temsilleri temel alan ve kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kavramsal anlamayı kazandırmaya dayalı hazırlanan bir öğretim gerçekleştirilmiştir. Öğretim sürecinde problem kurma, model çizme, matematiksel ifade yazma, gerekçelendirme ve açıklama ile çok fazla deneyim elde edebilecekleri bir ortam sunulmuştur. Bu bağlamda çalışmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının öğretim boyunca kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin ÖAB'lerinin gelişimini incelemek amaçlanmıştır. Bu problemi derinlemesine incelemek için şu sorulara cevap aranmıştır:

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının öğretim süreci boyunca (öğretimden önce, öğretim süresince ve öğretimden sonra) kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin

- verilen problem ve işlem için model çizme bilgilerinin gelişimi nasıldır?
- verilen model ve işlem için problem kurma bilgilerinin gelişimi nasıldır?
- verilen model ve problemin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazma bilgilerinin gelişimi nasıldır?

- verilen durumları gerekçelendirme bilgilerinin gelişimi nasıldır?
- verilen durumları açıklama bilgilerinin gelişimi nasıldır?
- model çizerken, problem kurarken, matematiksel ifade yazarken, gerekçelendirme ve açıklama yaparken karşılaştıkları zorluklar nelerdir?

1.4. Sınırlılıklar

1. Araştırmanın bağlamı özelleştirilmiş alan bilgisi, kesirlerle çarpma ve bölme işlemleri ve veri toplama araçlarında (kağıt-kalem testi, alıştırmalar, görüşmeler) kullanılan görevler ile sınırlıdır.
2. Öğretim sırasında grup çalışması yapılırken kamera ile yakın plan çekim yapılabilirdi ve/veya her bir öğretmen adayı için gözlem notları alınabilirdi ancak araştırmacının bu çalışmayı tek başına gerçekleştiriyor olması bunu kısıtlamıştır ve yapılamamıştır.
3. Öğretim sırasında çözdükleri alıştırmalarda yer alan sorulara ilişkin görüşmeler de yapılabilirdi ancak haftalık derslere paralel yapılan görüşmeler ve her bir görüşmenin hazırlık ve uygulama süreci çok fazla zaman aldığı için ilave bir görüşme yapılamamıştır.
4. Her görüşmeden sonra videolar izlenerek bir sonraki görüşmede açık olmayan noktalara ilişkin sorular sorulabilirdi ancak çok fazla video olmasından dolayı gerçekleştirilememiştir.

1.5. Varsayımlar

Araştırmaya katılan öğretmen adayları öğretimden önce ve sonra uygulanan testlerdeki, öğretim sırasında verilen alıştırmalardaki ve yapılan görüşmelerdeki görevleri samimi bir şekilde cevaplamışlardır. Bununla beraber bu öğretmen adayları bu çalışmaya gönüllü ve istekli bir şekilde katılmışlardır.

1.6. Tanımlar

a. İlköğretim matematik öğretmen adayı (ÖA): İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı'nda 4 yıl öğrenim gören ve bu programdan mezun olduktan sonra ortaokul 5-8. sınıflarda matematik dersini verecek olan öğretmen adaylarıdır.

- b. Öğretim için matematiksel bilgi (ÖMB): Matematik öğretme işini gerçekleştirmek için gerekli matematiksel bilgidir (Ball, Tames ve Phelps, 2008).
- c. Özelleştirilmiş alan bilgisi (ÖAB): Öğretmeye özgü matematiksel bilgi ve beceridir. Öğretimden başka amaçlar gerektirmeyen, sadece öğretmenlerin bilmesi gereken matematiksel bilgidir (Ball vd., 2008).
- ç. Gerekçelendirme: Kendisine ya da başkasına ait düşüncenin, kararın neden doğru olduğunu gösterme, kendini haklı gösterme, başkalarını ikna etmedir (Dreyfus, 1999).
- d. Açıklama: İlişkiler veya olayların neden var olduğunu veya gerçekleştiğini açık hale getirmedir (Thomas'tan aktaran Bicknell, 1999).
- e. Temsiller: Bir şeyleri bazı şekillerde temsil edebilen bir yapılandırma. Örneğin, bir kelime gerçek yaşam nesnesini temsil edebilir, bir sayı bir kümenin eleman sayısını temsil edebilir veya aynı sayı bir sayı doğrusu üzerinde bir konumu temsil edebilir (Goldin, 2002, s. 207).
- f. Model çizme: Verilen işlem veya problem için alan, uzunluk veya küme modellerinden herhangi birini çizme ve model üzerinden işlemin sonucunu ifade etme sürecidir.
- g. Problem kurma: Verilen bir durum için yeni bir problem oluşturma ve verilen bir problemi yeniden düzenlemedir (Silver, 1994).
- h. Matematiksel ifade yazma: Verilen model veya problemin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak ifade etme sürecidir.
- ı. Kesirlerle çarpma: $A \times B$ veya $A \cdot B$ işleminde A, grup sayısı; B, her bir gruptaki nesne sayısı (grubun büyüklüğü) ve $A \times B$, A gruptaki toplam nesne sayısıdır ki bu sonuca A ile B'nin çarpımı denir (Beckmann, 2005, s. 219).
- i. Kesirlerle bölme: Bölme işlemi toplam nesne sayısının (bölünenin) grup sayısı veya her bir gruptaki nesne sayısına (bölen) bölümüdür. $C \div B = A$ işleminde C, toplam nesne sayısı ve B, her bir gruptaki nesne sayısı (grubun büyüklüğü) ise A grup sayısıdır ve bölmenin grupta anlamıdır. Bu işlemde C, toplam nesne sayısı ve B, grup sayısı ise A her bir gruptaki nesne sayısıdır ki bu da bölmenin paylaşma anlamıdır (Siebert, 2002).

BÖLÜM 2

KURAMSAL ÇERÇEVE

2.1. Öğretmen Bilgisi

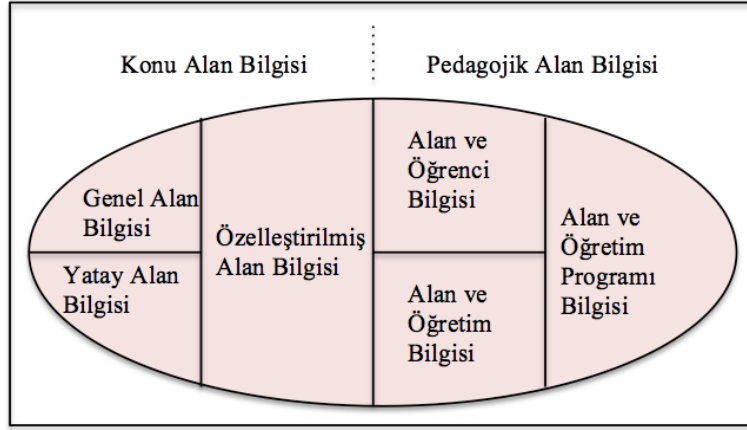
Öğretmen bilgisi, uzun yıllardır yoğun bir araştırma konusu olmuştur. Öğretmenlerin kullandığı bilgi çeşitliliği her geçen gün artmaktadır. Öğretmenin bilgisinin bir bileşenini diğerlerinden izole ederek tek başına incelemek gerçek dışı ve zordur (Baker ve Chick, 2006). Öğretmen bilgisinin doğasını ve özelliklerini açıklamaya çalışan birçok girişimde bulunulmuştur (Carter, 1990; Leinhardt ve Smith, 1985; Shulman, 1987). Elbaz'dan aktaran Park ve Oliver (2008) öğretmen bilgisini beş kategoriye ayırmıştır; *öğretmenin kendine ilişkin bilgi, öğretim ortamı bilgisi, konu alan bilgisi, öğretim programı geliştirme bilgisi, öğretim bilgisi*. Leinhardt ve Smith (1985) ise öğretmen bilgisinin sadece iki bileşeni olduğunu ifade etmiştir; *konu alan bilgisi, ders yapısı hakkında bilgi*. Daha sonraki araştırmalara öncülük eden Shulman (1987) öğretmenin sahip olması gereken bilgiyi yedi grup altında toplamıştır; *alan bilgisi, genel pedagoji bilgisi, öğretim programı bilgisi, pedagojik alan bilgisi, öğrenenler ve özellikleri hakkında bilgi, eğitim ortamı ve şartları bilgisi, eğitimsel amaçlar ve içerikler bilgisi*.

Pedagojik alan bilgisi (pedagogical content knowledge) (PAB) terimi ilk defa Shulman (1986, 1987) tarafından ortaya atılmıştır ve Shulman (1986)'a göre öğretmen sadece konu alan bilgisini bilmek ve anlamak zorunda değil aynı zamanda nasıl etkili bir şekilde anlatacağını da bilmesi gerekmektedir. Bunu da öğrencilerin öğrenmesini neyin kolaylaştıracağını veya zorlaştıracağını, öğrencilerin farklı ilgi ve becerilerine hitap edecek şekilde içeriği nasıl düzenleyeceğini, sıraya koyacağını ve sunacağını bilerek gerçekleştirebilir. Pedagojik alan bilgisinin tanımına ve hangi bileşenlerden oluştuğuna ilişkin ortak bir görüş olmamakla birlikte birçok araştırmacı tarafından farklı şekillerde açıklanmıştır (Grossman, 1990; Magnusson, Krajcik ve Borko, 1999; Marks, 1990; Shulman, 1987; Van der Valk ve Broekman, 1999). Bu bileşenlerin bir veya birkaçını

farklı araştırmacılar öğretmen veya öğretmen adaylarıyla yaptıkları çalışmalarda incelemişlerdir (Baştürk ve Dönmez, 2011; Black, 2008; Marks, 1990).

Shulman (1986, 1987) pedagojik alan bilgisinin *öğrencilerin anlayışı bilgisi ve belirli bir konunun öğretimi için temsillerin ve stratejilerin kullanımı* olmak üzere iki bileşenden oluştuğunu öne sürmüştür. Grossman (1990), Shulman (1987)'ın önerdiği bileşenleri içerecek şekilde pedagojik alan bilgisi için dört bileşen önermiştir (s. 5); *belirli konuların öğretimi için temsiller ve stratejiler bilgisi, öğrencilerin belirli konulara ilişkin anlama, kavrama ve kavram yanılışı bilgisi, belirli konuların öğretimi için amaçlara ilişkin bilgi ve inançlar, öğretim için kullanılabilir öğretim materyalleri bilgisi*. Magnusson vd. (1999); Shulman (1987) ve Grossman (1990)'ın önerdikleri bileşenlerden farklı olarak PAB'in bileşenlerine ölçme-değerlendirme ve oryantasyon bileşenlerini ilave ederek oryantasyonun diğer bileşenleri şekillendirdiğini ifade etmiştir (s. 97). İlgili literatürden özetle ifade etmek gerekirse PAB'in bileşenleri; *alan bilgisi, öğretim stratejileri bilgisi, öğretim programı bilgisi, öğrenci bilgisi, ölçme-değerlendirme bilgisi, öğretmenin konuya yönelik inançları ve oryantasyonudur*.

Matematik eğitimi literatüründe PAB'a ilişkin çatılar incelendiğinde PAB'in farklı bileşenlerini içeren birçok modeller öne sürülmüştür (An, Kulm ve Wu, 2004; Ball, Lubienski ve Mewborn, 2001; Chick, Baker, Pham ve Cheng, 2006). An vd. (2004) PAB'a ilişkin modelini *pedagojik alan bilgisi ağı* olarak tanımlamıştır. Bu ağda pedagojik alan bilgisi; *alan bilgisi, öğretim programı bilgisi ve öğretim bilgisi* bileşenlerini içeren etkili öğretim bilgisi olarak tanımlanmaktadır ve inançlarla etkileşim içindedir. Bu ağın çekirdek bileşeni, öğrencilerin düşüncesini bilme ve bunun alt bileşenlerini içermesi sebebiyle öğretim bilgisidir. Ball ve diğerleri (Ball vd., 2001; Ball, Hill ve Bass, 2005; Hill, Ball ve Schilling, 2008; Ball vd., 2008) de pedagojik alan bilgisi terimi yerine PAB'in üç alt boyutunu (*öğretim programı bilgisi, öğrenci bilgisi ve öğretim bilgisi*) da içerecek şekilde altı kategoriden oluşan *öğretim için matematiksel bilgi (mathematical knowledge for teaching) (ÖMB)* kavramını geliştirmişlerdir. Shulman (1986)'ın bilgi kategorilerinden konu alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisini genişleterek bu kategorilerin altında 6 kategori oluşturmuşlardır. Bu kategoriler; genel alan bilgisi, özelleştirilmiş alan bilgisi, yatay alan bilgisi, alan ve öğrenci bilgisi, alan ve öğretim bilgisi ve alan ve öğretim programı bilgisidir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1. ÖMB alan haritası. Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407. <https://www.math.ksu.edu/~bennett/onlinehw/qcenter/ballmkt.pdf> sayfasından erişilmiştir.

Şekil 2.1 iki bölümden oluşmaktadır; sol tarafı konu alan bilgisi ve sağ tarafı da pedagojik alan bilgisi olarak adlandırılmıştır. Konu alan bilgisi altında genel alan bilgisi (common content knowledge), özelleştirilmiş alan bilgisi (specialized content knowledge) ve yatay alan bilgisi (knowledge at the mathematical horizon) bölümleri, pedagojik alan bilgisi altında alan ve öğrenci bilgisi (knowledge of content and students), alan ve öğretim bilgisi (knowledge of content and teaching) ve alan ve öğretim programı bilgisi (knowledge of content and curriculum) bölümleri yer almaktadır. Genel alan bilgisi (GAB), öğretme işiyle birlikte matematikle ilgili diğer mesleklerde de kullanılan bilgidir. Özelleştirilmiş alan bilgisi (ÖAB), öğretmenleri belirli öğretim görevleriyle meşgul eden matematiksel bilgidir. Bu bilgi matematiksel fikirlerin tam olarak nasıl sunulacağını, genel kurallar için matematiksel açıklamaların nasıl yapılacağını ve problemlere verilen olağan dışı çözüm metotlarının nasıl inceleneceğini ve anlamayı içerir (Hill vd., 2008).

GAB, Shulman (1986)'ın bahsettiği konu alan bilgisidir. ÖAB yeni bir kavramdır. Bu iki bilgi de matematiksel bilgidir, öğrenci bilgisi veya öğretme bilgisi gerektirmez. Alan ve öğrenci bilgisi öğretim bilgisinden ayrılır. Örneğin, öğrencinin matematiksel bilgisi üzerine nasıl en iyi inşa edilir, öğrenci yanlışları nasıl düzeltilir. Alan ve öğrenci bilgisi, öğretim programı bilgisini de gerektirmez. Öğrencinin belirli bir konuyu nasıl öğrendiği anlayışına odaklanır. Dolayısıyla alan ve öğrenci bilgisi konu alan bilgisinden de ayrıdır (Hill vd., 2008).

2.2. Öğretim için Matematiksel Bilgi (ÖMB)

Öğretim için matematiksel bilgi (ÖMB) ile kastedilen matematik öğretme işini gerçekleştirmek için gerekli matematiksel bilgidir. Bu tanımın öğretmenlerle değil öğretmeyle başladığına dikkat edilmelidir. Öğretim öğrencilere problemlerin nasıl çözüleceğini göstermeyi, öğrencilerin sorularını cevaplamayı ve öğrencilerin çalışmalarını kontrol etmeyi içerdiği için ÖMB öğretim programının içeriğini anlamayı gerektirir. “Öğretim” ile kastedilen öğretmenin öğrencilerinin öğrenmesini destekleyen her şeydir. Açıkça, sınıfta etkileşimli ders öğretme işi ve derste ortaya çıkacak tüm görevlerdir. Örneğin, dersleri planlama, öğrencilerin çalışmalarını değerlendirme, puan verme, ebeveynlere ders içeriğini açıklama, ödevleri kontrol etme (Ball vd., 2008).

Ball vd. (2005) öğretim için matematiksel bilginin iki bileşenden oluştuğunu öne sürmüşlerdir; iyi eğitilmiş herhangi birinin sahip olduğu genel alan bilgisi ve öğretim için gereken, sadece öğretmenlerin bilmesi gereken özelleştirilmiş alan bilgisi. Öğretim için matematiksel bilginin mühendislik veya muhasebecilik gibi matematiksel olarak yoğun mesleklerde çalışanların ihtiyacı olduğu bilgiden farklı olduğunu iddia etmişlerdir.

ÖMB, diğer kimselerin ihtiyaç duyduğundan daha az değildir. Bir öğretmenin daha fazla

ve farklı matematik bilmesi gerekir. Bir örnekle açıklamak gerekirse, $\begin{array}{r} 307 \\ - 168 \\ \hline \end{array}$ Birçok kişi

algoritmayı biliyordur ve şu şekilde 139 cevabını bulacaktır. $\begin{array}{r} 307 \\ - 168 \\ \hline 139 \end{array}$ Bu bilgi diğerlerinin sahip olduğu ortak bir matematiksel bilgidir ancak öğretmek için yeterli değildir. Birçok 3. sınıf öğrencisi çıkarma işleminde zorlanmaktadır ve çoğunlukla hata yaparlar. Ortak

yapılan hatalardan birisi olarak şu verilebilir: $\begin{array}{r} 307 \\ - 168 \\ \hline 261 \end{array}$ Bu cevabın yanlış olduğunu bilmek özel bir bilgi gerektirmez. Bunu problem çözebilen herhangi biri bilir. Ustalık gerektiren öğretim matematiksel hataların kaynaklarını anlamaya çalışmayı gerektirir. Bu öğretmenlerin çoğunlukla anında ve hızlıca yapması gereken bir iştir çünkü öğrenciler öğretmenlerin çözmeye çalışmasını bekleyemez. Buradaki hata her hane için büyük rakamdan küçük olanı çıkarmasıdır. Bu cevabı neyin oluşturacağına ilişkin şaşırın

öğretmen tartışmasız daha yavaş hareket eder ve öğrencilerin problemini düzeltmeye tam olarak yardımcı olamaz (Ball vd., 2008).

Başka bir örnekle açıklamak gerekirse;

307	307	307
-168	-168	-168
-1	139	2
-60		30
200		107
139		139

Öğretmenler bunlar gibi öğrenciler tarafından ortaya konulan farklı çözümlerle karşılaşır. Öğrencinin ne yaptığını, bu düşüncenin problem için matematiksel olarak doğru olup olmadığını ve bu yaklaşımın genelde çalışıp çalışmayacağını anlamak zorundadır. Bu örneklerin hepsi doğrudur ve genelleştirilebilirler ama bunu anlamak, çıkarmayı sadece öğrendikleri gibi yapıldığını bilen birileri için kolay bir görev değildir. Öğretmenler işlemlerin mantığını, terimlerin anlamlarını ve kavramların açıklamalarını bilmelidir. Öğretmenlerin çıkarma işleminin anlamını temsil edecek etkili yollara ihtiyacı vardır, sadece cevabı doğrulamayıp aynı zamanda işlem basamaklarının anlamını ve neden anlamlı olduğunu göstermeleri gerekir (Ball vd., 2008).

Ball vd. (2005) yaptıkları çalışmada ÖMB ölçümlerinde yüksek puan alan öğretmenlerin öğrenci başarılarında daha iyi kazanç elde ettiklerini bulmuşlardır. ÖMB'nin ne anlama geldiğini Ball vd. (2005) tam sayılarla çarpma örneğiyle şöyle açıklamıştır:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 35 \\ \times 25 \\ \hline 255 \\ 80 \\ \hline 1055 \end{array}$$

Bazen öğrencilerin yaptıkları hatalar daha çok matematiksel analiz gerektirir. Burada ne olduğunu anlayabilmek için öğretmenler bunun gerçekleştiği basamaklara daha uzun bakmak zorunda olabilir. Ama öğretmenlerin çoğu hatanın kaynağını görebilecektir. Elbette öğretmenler her zaman öğrenciden ne yaptıklarını anlatmalarını isteyebilir ama 30 öğrenci varsa ve evde öğrencilerin ödevlerini puanlıyorsa bu hataya neyin sebep olabileceğine ilişkin iyi bir hipoteze sahip olması yardımcı olur. Öğretmenlerin tüm yaptıkları hata analizi değildir. Öğrenciler sadece hata yapmazlar, soru sorarlar, model kullanırlar ve problem çözerken alışılmadık bir çözüm bulurlar. Öğretmek aynı zamanda

bu örnekteki 7'nin neden bir basamak kaydırıldığını aslında burada 20 x 35 işleminin yapıldığı şeklinde açıklamayı gerektirir (Ball vd., 2005).

ÖMB'nin ilk boyutu olarak *genel alan bilgisi* verilebilir. GAB basitçe cevabı bulma, daha genel olarak matematik problemlerini doğru bir şekilde çözmedir. Öğretimden ziyade öğretimi düzenlemede kullanılan matematiksel bilgi ve beceridir. Öğretmenin öğrettiği materyali bilmesi gerekir, öğrencileri yanlış cevap verdiğinde veya ders kitabı hatalı bir tanım verdiğinde farkına varmalıdır. Öğretmen tahtaya yazarken terimleri ve notasyonu doğru bir şekilde kullanması gerekir ancak bunların bazıları diğerlerinin de sahip olduğu matematiksel bilgi ve becerileri gerektirir. Yani bu öğretmeye özgü değildir. Bu herkesin bildiği bir bilgi anlamına da gelmez (Ball vd., 2008).

Bu çalışmada temel alınan, ÖMB'nin diğer bir boyutu olan *özelleştirilmiş alan bilgisi* (*specialized content knowledge*) (ÖAB), öğretmeye özgü matematiksel bilgi ve beceridir. Öğretimden başka amaçlar gerektirmeyen matematiksel bilgidir. Çıkarma işlemi örneğindeki öğrenci hatalarını bulma veya olağandışı yaklaşımın genelde çalışıp çalışmayacağını anlamaya çalışma gibi, öğretmenler diğerlerinin zorunda olmadığı bir çeşit matematiksel iş yapmak zorundadırlar (Ball vd., 2008). ÖAB, ÖMB'nin bir bileşenidir ve matematik öğretmek için gereken bilgi ve beceriyi içerir. Yani ÖAB matematik kavramlarını ve matematikte öğrencilerin hatalarına ilişkin bilgiyi içerir. ÖAB öğretmenlerin ihtiyacı olan bir bilgidir ve öğretmeyenlerin ihtiyacı olmadığı bir bilgidir (Ball vd., 2008). ÖAB öğrenci başarısının olası öngörücüsüdür (Hill vd., 2008).

ÖMB'nin diğer bir boyutu olan *alan ve öğrenci bilgisi*, öğrenciler hakkında bilme ve matematiğe ilişkin bilmeyi birleştiren bir bilgidir. Öğretmenler öğrencilerin muhtemelen ne yapacağını ve neyi kafa karıştırıcı bulacaklarını önceden tahmin edip ona göre davranmalıdırlar. Örneğin, öğretmenin seçtiği örneğin öğrencinin ilgisini çekip çekmeyeceğini, motive edip etmeyeceğini tahmin etmesi gerekir. Bir görevi öğrenciler için neyin kolaylaştıracağını ya da zorlaştıracağını önceden tahmin etmesi gerekir. GAB, ÖAB ve alan ve öğrenci bilgisinin birbirlerinden farkı şöyle açıklanabilir: Yanlış cevabın farkına varma GAB, hatanın doğasını anlamaya çalışma özellikle alışılmadık hata, genellikle sayılara ilişkin düşünmede çabukluk gerektiren ve anlama ilişkin esnek düşünme ÖAB ve ortak hatalara aşinalık ve öğrencilerin en çok yaptığı birçok hataları belirleme alan ve öğrenci bilgisinin örnekleridir (Ball vd., 2008).

Alan ve öğrenci bilgisi, alan bilgisi ve öğrencilerin belirli bir konuya ilişkin nasıl düşündüğü, bildiği veya öğrendiği bilgisiyle iç içe geçmiş bir bilgidir. Alan ve öğrenci

bilgisi hem özel alan hem de öğrenciler hakkında özel bir şeyler içeren öğretim görevlerinde kullanılır. Örneğin, öğrenciler kesirlerle toplamayı genellikle nasıl öğrenirler ve bu süreçte yaygın görülen hatalar veya kavram yanlışları. Öğrencilere kesirlerle toplama öğretilirken, öğretmen kesirlerin çarpımsal doğasıyla çoğunlukla güçlük yaşayan öğrencilerin farkında olabilir. Bu öğrenciler muhtemelen iki kesrin paylarını ve paydalarını toplarlar. Bu bilgi öğretimini bu olası sorunu ele alacak şekilde planlamasına yardımcı olabilir. Bir başka örnek, öğrencilerin $56 + 9$ gibi bir problemi nasıl çözebileceğine ilişkin düşünürken, öğretmen bazı öğrencilerin 56'nın üzerine dokuz sayacağını bazılarının 10 ekleyip 1 çıkaracağını ve bazılarının da standart algoritmayı (sağdan sola doğru) kullanacağını bilebilir (Hill vd., 2008).

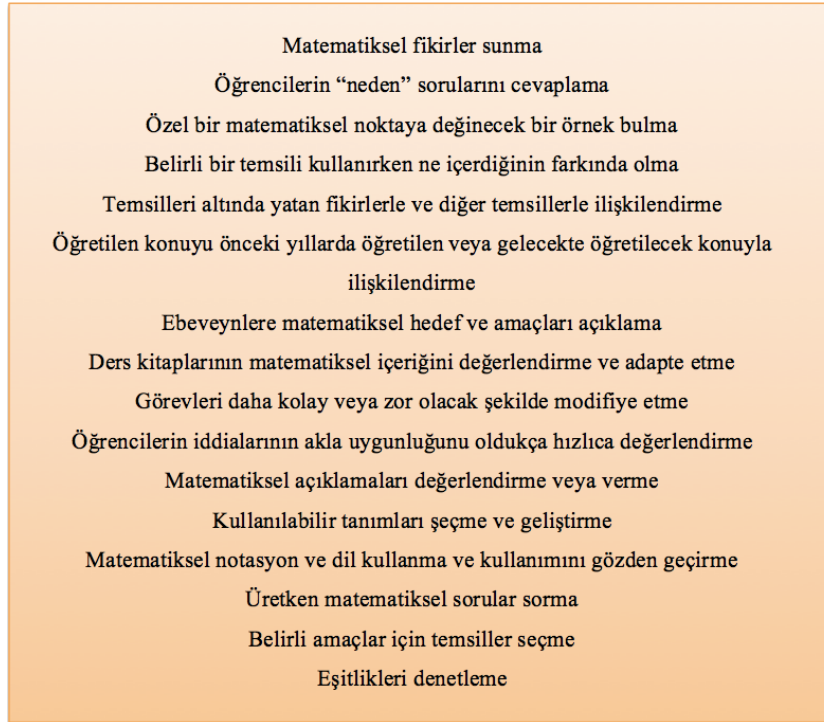
ÖMB'nin diğer bir boyutu olan *alan ve öğretim bilgisi*, öğretime ilişkin bilme ve matematiğe ilişkin bilmeyi birleştirir. Öğretim görevlerinin çoğu öğretimin tasarlanması matematiksel bilgisini gerektirir. Hangi örnekle başlanılacağını ve öğrencilere içeriği derinleştirmede hangisinin kullanılacağını seçme, özel bir fikri öğretmede temsillerin kullanımının öğretimsel avantaj ve dezavantajlarını değerlendirme alan ve öğretim bilgisinin görevleri arasındadır. Örneğin, basamak değer için öğretimsel olarak uygulanabilir farklı modelleri bilme, her birinin çıkarma işlemine ilişkin ne ortaya koyacağını bilme ve hepsini nasıl etkili bir şekilde uygulayacağını bilme (Ball vd., 2008). ÖMB'nin diğer bir boyutu olan *yatay alan bilgisi* öğretim programında yer alan matematiğin kapsamı ile matematiksel konuların nasıl ilişkili olduğunun farkında değildir. Öğretmenin belirli bir sınıf düzeyindeki öğretecekleri matematiksel konuların diğer sınıf düzeyleri ile nasıl ilişkili olduğuna ilişkin anlamalarına işaret eder. Örneğin, 1. sınıf öğretmenlerinin daha sonra gelecek konulara matematiksel temel oluşturabilmek için öğrettikleri matematikle öğrencilerin 3. sınıfta öğrenecekleri matematiğin nasıl ilişkili olduğunu bilmeye ihtiyacı olabilir (Ball vd., 2008).

ÖMB'nin son boyutu olan *alan ve öğretim programı bilgisi* öğrencilerin matematiği anlamasına öğretim programının nasıl olanak sağladığına ilişkin anlamadır. Öğretmenlerin, öğrencilerin farklı matematiksel konuları öğrenmelerini destekleyecek şekilde öğretim programını nasıl kullandıklarına işaret eder. Shulman (1986)'ın ortaya koyduğu üçüncü boyut olan öğretim programı bilgisi ile aynı anlamlıdır ve PAB başlığı altındadır (Ball vd., 2008). Öğretmenler öğreteceği konuyu iyi bilmelidirler. Öğretmenler konuyu iyi bilmezse öğrencilerin konuyu öğrenmesine yardımcı olacak bilgiye de muhtemelen sahip değildirler. Aynı zamanda sadece konuyu iyi bilmek öğretmek için yeterli olmayabilir. Öğretmenler

matematiksel dilin nasıl kullanıldığına ilişkin açık bir şekilde konuşabilmeli (günlük yaşamda masanın kenarı ile kenarın matematiksel anlamının nasıl farklı olduğunu açıklama gibi), matematiksel temsilleri etkili bir şekilde seçebilmeli, oluşturabilmeli ve kullanabilmeli (kesirleri karşılaştırırken dairesel veya dikdörtgensel alan modellerini kullanmanın avantaj ve dezavantajlarının farkında olma gibi) ve birinin matematiksel fikirlerini gerekçelendirebilmeli ve açıklayabilmelidir (kesirlerle bölmede neden ters çevirip çarpıldığını açıklama gibi) (Ball vd., 2008).

2.2.1. Özelleştirilmiş Alan Bilgisi (ÖAB)

Özelleştirilmiş alan bilgisi (ÖAB) Ball vd. (2008) tarafından ortaya konulan ÖMB'nin alt boyutlarından birisidir. ÖMB iki bölümden oluşmaktadır; konu alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi. ÖAB, konu alan bilgisi bölümünde yer almaktadır. ÖAB, öğretmeye özgü matematiksel bilgi ve beceridir. Öğretimden başka amaçlar gerektirmeyen matematiksel bilgidir. Çıkarma işlemi örneğindeki öğrenci hatalarını bulma veya olağandışı yaklaşımın genelde çalışıp çalışmayacağını anlamaya çalışma gibi, öğretmenler diğerlerinin zorunda olmadığı bir çeşit matematiksel iş yapmak zorundadırlar. Öğretmenin günlük görevlerinin birçoğu bu özel işe özgüdür (Ball vd., 2008) (Şekil 2.2).



Şekil 2.2. Öğretim için matematiksel görevler. Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407. <https://www.math.ksu.edu/~bennett/onlinehw/qcenter/ballmkt.pdf> sayfasından erişilmiştir.

ÖAB diğer mesleklerde gerekli değildir. Örneğin, bir mühendisin veya muhasebecinin “10 ile çarptığında sonuna sıfır eklensin” ifadesinin nedenini açıklamaya ihtiyacı yoktur (Ball vd., 2008). ÖAB sadece öğretmenlerin bilmesi gereken bilgidir. ÖAB ölçmek için öğretmenlerden sayılarla işlemleri resimler veya manipülatifler kullanarak göstermeleri ve “Son iki rakamı 4 ile bölünen sayı neden 4 ile bölünür?” gibi genel matematik kurallarını açıklamaları istenmiştir. ÖAB’yi ölçen bir örnek:

Öğrenci A	Öğrenci B	Öğrenci C
$\begin{array}{r} 35 \\ \times 25 \\ \hline 125 \\ + 75 \\ \hline 875 \end{array}$	$\begin{array}{r} 35 \\ \times 25 \\ \hline 175 \\ + 700 \\ \hline 875 \end{array}$	$\begin{array}{r} 35 \\ \times 25 \\ \hline 25 \\ 150 \\ 100 \\ + 600 \\ \hline 875 \end{array}$

Burada öğretmenlere öğrencilerin çözümlerinin herhangi iki tam sayının çarpımında kullanılıp kullanılmayacağı sorulmuştur. Etkili olabilmek için öğretmenler sınıfta meydana gelen bu gibi farklı matematiksel durumları kısa bir zamanda ve hızlı bir şekilde değerlendirebilmelidirler (Ball vd., 2005).

Ball vd. (2005) ÖAB’nin özellikle şu 3 matematiksel görevden oluştuğunu belirtmişlerdir ve çalışmalarında ÖAB’yi ölçmek için bunlara ilişkin sorular hazırlamışlardır:

- Sayıları ve işlemleri anlamlı bir şekilde resimler veya manipülatifler kullanarak gösterme veya temsil etme (Representations) (Temsiller)
- Genel kurallar veya algoritmaların altında yatan anlamı açıklama, matematiksel açıklamalar sağlama (Explanation) (Açıklama)
- Öğrencilerin alternatif strateji ve çözümlerinin matematiksel olarak uygun olup olmadığını anında ve hızlı bir şekilde analiz etme ve değerlendirme, bunların neden doğru veya yanlış olduğunu gerekçelendirme (Justification) (Gerekçelendirme)

ÖAB boyutu ve bu bilginin alt boyutları (temsiller, gerekçelendirme, açıklama) bu çalışmanın çatısını oluşturmaktadır. Bu çalışmada öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin ÖAB boyutunun ele alınmasının nedenleri şöyledir: 1) ilgili literatürde öğretmen adaylarının en çok zorlandığı konuların kesirlerle çarpma ve bölme işlemleri olması (Ball, 1990a; Borko vd., 1992; Ma, 1999); 2) ÖAB’nin öğretme işine özgü bir bilgi boyutu ve öğrenci başarısının öngörücüsü olması (Ball vd., 2005; Ball vd., 2008); 3) yurt içi ve yurt dışında yenilenen öğretim programlarında anlamlandırmanın vurgulanması (CCSSI, 2010; MEB, 2013; NCTM, 2000). Bu anlamlandırma model çizme, problem

kurma gibi çeşitli temsiller kullanarak sağlanabilir (Baek vd., 2017; Flores, Turner ve Bachman, 2005; Leung ve Carbone, 2013; Toluk-Uçar, 2009) Burada çeşitli temsilleri kullandırmanın yanısıra verilen durumlara ilişkin gerekçelendirme ve açıklama yaptırılarak öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kavramsal anlama kazanmaları amaçlanmıştır. Böylece kesirlerle çarpma ve bölmeyi öğretecekleri öğrencilerin de kavramsal anlamayı kazanmalarını sağlayabilirler ve kesirlerle çarpma ve bölme korkulu rüya olmaktan çıkabilir.

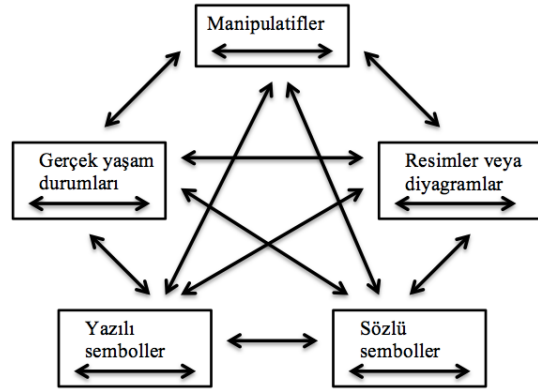
2.2.1.1. Temsiller (Representations)

ÖAB'nin alt boyutlarından birisi temsillerdir; temsiller oluşturma ve kullanmadır. Bu temsillere ilişkin ÖAB'nin içerdiği matematiksel görevler şunlardır; belirli bir temsili kullanırken ne içerdiğinin farkına varma, temsilleri altında yatan fikirlere ve diğer temsillere bağlama, belirli amaçlar için temsiller seçme (Ball vd., 2008). Temsiller, “iki temsil sistemi arasında simgeleme ilişkisidir” (Goldin, 1998, s. 143). Temsil, bir şeyleri bazı şekillerde temsil edebilen bir yapılanıştır. Örneğin, bir kelime gerçek yaşam nesnesini temsil edebilir, bir sayı bir kümenin eleman sayısını temsil edebilir veya aynı sayı bir sayı doğrusu üzerinde bir konumu temsil edebilir (Goldin, 2002).

Temsiller birçok araştırmacı tarafından farklı şekillerde sınıflandırılmıştır (Clements, 1999; Johnson, 1998; Lesh, Post ve Behr, 1987). Bu temsil türleri şu şekilde özetlenebilir:

- Manipulatifler, gerçek yaşam durumları, resimler veya diyagramlar, yazılı semboller, sözlü semboller (Lesh vd., 1987, s. 33-34)
- Sayısal, sözel, sembolik, görsel temsil (Bosse, Adu-Gyamfi ve Cheetham, 2011)
- Somut, görsel, soyut temsil (Lesser ve Tchoshanov, 2005)
- Somut, görsel, sembolik temsil (Clements, 1999)
- İçsel, dışsal temsil (Goldin ve Shteingold, 2001)
- Somut, sözel, sembolik, resimsel temsil (Johnson, 1998)

Lesh vd. (1987) matematiksel öğrenme ve problem çözme için 5 farklı temsil türü tanımlamıştır; gerçek yaşam durumları, manipulatifler (kesir çubuğu, vs.), resimler veya diyagramlar (sayı doğrusu, bölge, soyut modeller, vs.), sözlü semboller, yazılı semboller (s. 33). Bu temsil türlerini Lesh vd. (1987) “Lesh Çoklu Temsil Geçiş Modeli” olarak şu şekilde göstermiştir (s. 34) (Şekil 2.3):



Şekil 2.3. Lesh çoklu temsil geçiş modeli. Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning mathematics* içinde (s. 33-40). New Jersey: Erlbaum.

Bu modele göre öğrenci matematiksel fikri anlarsa, temsiller arası ve içi geçişler yapabilme becerisine sahiptir. Lesh vd. (1987) bu modelinde temsiller arası ve içi geçişin önemli olduğunu vurgulamaktadır (s. 34). Bunu destekleyen çalışmalar vardır (Behr vd., 1983; Bosse vd., 2011; Chigeza, 2013). Ball (1990b) öğretmenlerin konuyu uygun bir şekilde ve sözel problemler, resimler, durumlar ve somut materyaller gibi birçok yolla temsilleyebilmeleri için bu konuyu derinlemesine anlamasının gerektiğini belirtmiştir. Behr vd. (1983) ilkököl ve ortaokullarda kesirlerin temsili için en çok alan, soyut nesnelerin kümesi ve sayı doğrusu modellerinin kullanıldığını belirtmiştir (s. 93). Lesh vd. (1987)'nin bu modelindeki temsil türleri şu şekilde açıklanabilir (s. 35-36):

- *Resimler (Çizim, şekil):* Resimler, diyagramlar-durağan şekiller olarak adlandırılır. Matematiksel düşüncelerin resmedilmesidir. Örneğin, dikdörtgen şeklinin çizilmesi, bu şeklin 4 eşit parçaya ayrılıp, parçalardan birinin taranması.
- *Manipulatifler:* Öğrencilerin dokunabildikleri, taşıyabildikleri ve genellikle üst üste yığılabildikleri nesnelerdir. Örneğin, problem çözmek için küpler, onluk bloklar, vs. kullanılması. Kesir çubukları, sayı doğrusu, vs.
- *Sözlü semboller/Konuşma dili:* İki tane kullanım biçimi vardır; öğrencilerin kendi yanıtlarını anlatmaları ve akıl yürütmelerini vurgulamalarıdır. Örneğin, $\frac{1}{4}$ kesrinin “dörtte bir”, “sekizde iki”, “yüzde yirmi beş” biçiminde ifade edilmesi.
- *Yazılı semboller:* Hem matematiksel sembollere, hem de sembollerle ilişkili olan yazılı kelimelere denk gelir. Cümleler ya da sözcük dizisini de içerir. Örneğin, $\frac{1}{4}$, 0.25, %25.
- *Gerçek hayat durumları:* Çeşitli problem durumlarını yorumlama ve çözmeye yarayan bilginin gerçek yaşam olayları etrafında düzenlendiği deneyime dayalı

araçlardır. Örneğin, “Irmak ve üç arkadaşı büyük bir çikolatayı eşit olarak paylaşmışlardır. Buna göre her biri ne kadar çikolata yemiştir?”

ÖAB’nin temsiller boyutu altında Lesh vd. (1987)’nin modelindeki bu temsil türleri ile bu çalışmada kullanılan model çizme, problem kurma ve matematiksel ifade yazma eşleştirilerek açıklanabilir. Buna göre alan, uzunluk ve küme modellerinin *resimler*, sözel problemlerin *gerçek yaşam durumları* ve matematiksel ifade yazmanın *yazılı semboller* olarak alındığı söylenebilir. Literatürden özetle bu çalışmada temsil türleri sayısal, sözel ve görsel temsil olarak ele alınmıştır. Buna göre *sayısal temsil* olarak matematiksel ifade yazma (yazılı semboller), *sözel temsil* olarak problem kurma (gerçek hayat durumları) ve *görsel temsil* olarak model çizme ele alınmıştır. Öğretmen adaylarının bu temsilleri oluştururken ve temsiller arası geçiş yaparlarken kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamaları incelenmiştir.

Literatür incelendiğinde kesirlerle işlemlerde kullanılan temsil türlerinden olan görsel temsiller; resimsel temsiller (çizim, şekil) ve somut temsiller (manipulatifler, dokunulabilen, taşınılabilen nesneler) olarak ikiye ayrılmaktadır. Somut temsiller; örüntü blokları (altıgen, ikizkenar yamuk, eşkenar, vs.), şeffaf kesir kartları, noktalı kağıt, geometri tahtası, tahta kesir çubuklarıdır. Resimsel temsiller veya modeller; alan modeli (dikdörtgensel, dairesel, üçgensel, karesel, vs.), bölge modeli (üçgen, kare, dikdörtgen, vs.), uzunluk modeli (sayı doğrusu, kesir çubuğu), küme modeli (şeker, bilye, bozuk para, vs.), hacim modeli ve gerçek nesne modelidir (Alacacı, 2010; Lo ve Luo, 2012; Pesen, 2008; Van De Walle, Karp ve Bay-Williams, 2012).

Bazen “temsil” ve “model” birbirinin yerine kullanılmaktadır. Van De Walle vd. (2012) modelin kavramı temsil eden herhangi bir nesne, resim veya çizime işaret ettiğini ifade etmiştir (s. 288). Bu çalışmada “model” kavramı görsel temsil türlerinden olan “çizili temsil” olarak kullanılmıştır. Literatürde buna ilişkin birçok kavram vardır. Burada kullanılan kavramın İngilizcesi “math drawing” veya “drawn representations”dır. Bu çalışmada çizili temsillerden alan, uzunluk ve küme modeli temel alınmıştır. Buna göre bu çalışmada alan, uzunluk veya küme modelinden bir veya birkaçını kullanarak kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin verilen işlem ve problemler için uygun model çizimleri istenmiştir. Bu model çizme sürecinde kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamaları incelenmiştir.

Kesirlerle çarpma ve bölmede temsilleri kullanma önemlidir ancak literatürde öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının bu konularda özellikle çizili temsilleri kullanırken

zorluk yaşadıkları görülmektedir (Armstrong ve Bezuk, 1995; Ball, 1990a; Lamberg ve Wiest, 2015; Ma, 1999; Simon, 1993; Tuna, Biber ve Yurt, 2013). Ma (1999)'nın çalışmasında Amerikalı öğretmen adaylarının kesirlerle bölmenin öğretiminde temsillere ilişkin bilgilerinin zayıf olduğu görülmüştür (s. 64). Ball (1990a)'un çalışmasında 25 ilköğretim öğretmen adayının hiçbirisi $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemine ilişkin uygun bir temsil oluşturamamıştır ve 10 öğretmen adayı bu işlem için uygun olmayan temsiller oluşturmuşlardır. Ferreira ve Da Ponte (2016)'nin çalışmasında bir ilköğretim öğretmen adayı $1/2 \times 1/4$ işlemini ifade eden bir problem için bir dikdörtgensel alan modeli çizmiştir ancak bu işlem yerine $1/4 \times 1/2$ olarak ifade etmiştir. Burada öğretmen adayının sembolik temsil ile resimsel temsil arasında bağlantı kurmakta zorlandığı görülmüştür.

Lesser ve Tchoshanov (2005)'un çalışmasında soyut (sembolik modeller, cebir denklemleri, formüller, vs.), somut (harekete geçiren modeller, manipulatifler, vs.) ve görsel temsiller (görsel modeller, resimler, çizimler, grafikler, vs.) kullanma sırasına ilişkin öğrencilerin başarılarında farklılık olup olmadığını görmek adına farklı sıralamada öğretimler gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmanın sonucunda soyut temsilin ilk sırada olduğu öğretimin (soyut-somit-görsel gibi) soyut temsilin ikinci sırada olduğu öğretimden (görsel-soyut-somit gibi), onun da soyut temsilin üçüncü sırada verildiği öğretimden (görsel-somit-soyut gibi) daha başarılı olduğu görülmüştür. Bununla beraber öğretmenlerin yarısının temsillerin sıralamasına ilişkin tercihlerinde somut-görsel-soyut baskın çıkmıştır. Bu çalışmada literatürdeki çalışmalardan farklı olarak her görüşmede önce çizili temsiller verilmiştir ve matematiksel ifadeyi yazıp problem kurmaları istenerek başlanmıştır.

2.2.1.1.1. Problem Kurma

Problem kurma verilen bir durum için yeni bir problem oluşturma ve verilen bir problemi yeniden düzenlemedir (Silver, 1994). Problem kurma, verilen bir işleme ilişkin problem kurulduğu için temsil geçişi olarak görülebilir. Problem kurma matematik disiplininde ve matematiksel düşünmenin doğasında önemli bir yere sahiptir (Silver, Mamona-Downs, Leung ve Kenney, 1996). Problem kurmaya ilişkin yapılan araştırmalar öğrencilerin matematik bilgisinde, problem çözme becerilerinde, yarıcılık becerilerinde problem kurmanın pozitif etkisinin olduğunu göstermektedir (Cai, 1998; Cai ve Hwang, 2002). Öğrencilerin problem kurmalarını sağlamak ve bununla meşgul etmek için öğretmenlerin de problem kurmaya ilişkin yeterliliğe sahip olması gerekir (Silver vd., 1996). Crespo ve

Sinclair (2008) öğrencilerin ve göreve yeni başlayan öğretmenlerin matematiksel problem kurmaya ilişkin çok fazla deneyimlerinin olmadığını belirtmektedir. Silver vd. (1996) yaptıkları çalışmanın sonucunda ortaokul ve lise matematik öğretmenlerinin en az bir tane matematiksel problem kurduklarını ancak problemlerin çoğunun kötü ve zayıf bir şekilde kurulduğunu belirtmişlerdir. Bunun için öğretmen eğitiminde öğretmen adaylarının çok sayıda problem kurmaları sağlanarak problem kurma deneyimini yaşamaları gerekmektedir. Bu şekilde matematiksel problemler kurma öğretmene matematiksel bilgisini ve anlamasını geliştirmesine yardım eder (Flores vd., 2005). Flores vd. (2005)'nin çalışmasında iki öğretmenin kesirlerle bölmeye ilişkin kavramsal anlamalarını kurdukları problemlerin nasıl geliştirdiği incelenmiştir. Öğretmenlerin derslerinde gözlemler yapılmıştır ve sonra görüşmeler yapılmıştır. Bu çalışmanın sonucunda öğretmenlerin kesirlerle bölmeyi anlamlandırmalarında problem kurmanın büyük bir rol oynadığı görülmüştür.

Birçok araştırmacı kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin kurulan problemleri sınıflandırmaya çalışmıştır (Fischbein, Deri, Nello ve Marino, 1985; Kim, 2007; Ma, 1999; Van De Walle vd., 2012). Kesirlerle bölme problemleri için genellikle 7 yapıda (Fischbein vd., 1985; Harel vd., 1994; Van De Walle vd., 2012; vs.), çarpma problemleri için genellikle 4 yapıda (Sinicrope, Mick ve Kolb, 2002; Van De Walle vd., 2012; vs.) problemler görülmektedir. Bu çalışmada temsil türlerinden sözel temsil olarak problem kurma ele alınmıştır ve öğretmen adaylarından kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine uygun sözel problem kurmaları istenmiştir. Bu problemlerin kavramsal yönden analizine odaklanılmıştır. Buna göre problemler uygunluğu, türü, kullanılan anahtar kavramlar ve karşılaşılan zorluklar açısından incelenmiştir. Öğretmen adaylarının kurdukları bu problemlerin türleri literatürden çıkarılan şu özet tablo ile değerlendirilmiştir (Tablo 2.1):

Tablo 2.1.

Kesirlerle Çarpma ve Bölme İşlemlerine İlişkin Kurulan Problemlerin Türleri

Problem türleri	Açıklaması
Oran yapısında çarpma problemi	Oran-orantı yoluyla kurulan çarpma problemleridir. Örneğin, 5 x 3 işlemi için kurulan bir problem (Kim, 2007, s. 71): “Her bir çantada 3 tenis topu varsa, 5 çantada kaç tane tenis topu vardır?”
Oran yapısında paylaştırma bölme problemi	Oran-orantı yoluyla kurulan paylaştırma bölme problemleridir. Örneğin, $3/4 \div 2/5$ işlemi için bir öğretmen adayının kurduğu problem (Işık & Kar, 2012a, s. 2295): “Bir yere kaldırım taşı dönecektir. Bu alanın $3/4$ 'ü $2/5$ saatte döşendiğine göre 1 saatte bu alanın ne kadarı kaldırım taşı ile döşenir?”
Oran yapısında gruplama bölme problemi	Oran-orantı yoluyla kurulan gruplama bölme problemleridir. Örneğin, $15 \div 3$ işlemi için kurulan bir problem (Kim, 2007, s. 71): “Her bir çantada 3 top olacak şekilde 15 tenis topunu koymak için kaç tane çanta gerekir?”
Çarpımsal karşılaştırma yapısında çarpma problemi	Çarpımsal karşılaştırma durumlarını içerir. Karşılaştırma yaparak kurulan çarpma problemleridir. Örneğin, $1\frac{1}{2} \times 10\frac{1}{2}$ işlemine ilişkin kurulan bir problem (Van De Walle vd., 2012, s. 155): “Mustafa bu hafta geçen hafta çalıştığından $1\frac{1}{2}$ kat fazla çalışmıştır. Geçen hafta $10\frac{1}{2}$ saat çalışmıştır. Mustafa bu hafta kaç saat çalışmıştır?”
Çarpımsal karşılaştırma yapısında paylaştırma bölme problemi	Çarpımsal karşılaştırma durumlarını içerir. Bir küme diğerinin çoklu kopyalarını içerir. Karşılaştırma yaparak kurulan paylaştırma bölme problemleridir. Örneğin, $8\frac{1}{4} \div 4\frac{1}{2}$ işlemi için kurulan bir problem (Lo & Luo, 2012, s. 493): “Mert bu hafta geçen hafta çalıştığından $4\frac{1}{2}$ kat daha fazla çalışmıştır. Bu hafta $8\frac{1}{4}$ saat çalıştıysa, geçen hafta kaç saat çalışmıştır?”
Çarpımsal karşılaştırma yapısında gruplama bölme problemi	Çarpımsal karşılaştırma durumlarını içerir. Bir küme diğerinin çoklu kopyalarını içerir. Karşılaştırma yaparak kurulan gruplama bölme problemleridir. Örneğin, $8\frac{1}{4} \div 4\frac{1}{2}$ işlemi için kurulan bir problem (Lo & Luo, 2012, s. 493): “Mahmut bu hafta $8\frac{1}{4}$ saat spor yapmıştır. Geçen hafta $4\frac{1}{2}$ saat spor yapmıştır. Bu hafta geçen haftadan kaç kat fazla spor yapmıştır?”
Eş-grup yapısında çarpma problemi	Belirli sayıda gruplar ve hepsi eşit büyüklüktedir. Çarpmanın tanımından gelen grup sayısı ve her bir gruptaki nesne sayısı göz önüne alınarak kurulan problemlerdir. Grup sayısı ve grubun büyüklüğünün bilindiği problemlerdir. Örneğin, $2\frac{1}{2} \times 4\frac{2}{3}$ işlemi için kurulan bir problem (Van De Walle vd., 2012, s. 155): “Bir tepsi kurabiye yapmak için $4\frac{2}{3}$ bardak un gerekiyor. $2\frac{1}{2}$ tepsi kurabiye yapmak için kaç bardak un gerekir?”
Eş-grup yapısında paylaştırma bölme problemi	Belirli sayıda gruplar ve hepsi eşit büyüklüktedir. Çarpmanın tanımından gelen grup sayısı ve her bir gruptaki nesne sayısı göz önüne alınarak kurulan problemlerdir. Grup büyüklüğünün bilinmediği problemlerdir. Örneğin, $11\frac{2}{3} \div 2\frac{1}{2}$ işlemi için kurulan bir problem (Lo & Luo, 2012, s. 493): “Murat’ın $11\frac{2}{3}$ bardak unu vardır. Bu $2\frac{1}{2}$ tepsi kurabiye için yeterlidir. Bir tepsi kurabiye için kaç bardak un gerekir?”
Eş-grup yapısında gruplama bölme problemi	Belirli sayıda gruplar ve hepsi eşit büyüklüktedir. Çarpmanın tanımından gelen grup sayısı ve her bir gruptaki nesne sayısı göz önüne alınarak kurulan problemlerdir. Grup sayısının bilinmediği problemlerdir. Örneğin, $11\frac{2}{3} \div 4\frac{1}{3}$ işlemi için kurulan bir problem (Lo & Luo, 2012, s. 493): “Bir tepsi kurabiye yapmak için $4\frac{1}{3}$ bardak un gerekiyor. Meltem’in $11\frac{2}{3}$ bardak unu vardır. Kaç tepsi kurabiye yapabilir?”
Dikdörtgensel alan yapısında çarpma problemi	Çarpma işlemi iki boyutlu birimlerden oluşur. Örneğin, dikdörtgenin alanı için uzunluk x genişlik birimi. Örneğin, $2\frac{1}{10} \times 1\frac{3}{5}$ işlemi için kurulan bir problem (Van De Walle vd., 2012, s. 156): “ $2\frac{1}{10}$ m uzunluk ve $1\frac{3}{5}$ m genişliğindeki bir dikdörtgenin alanı kaçtır?”
Dikdörtgensel alan yapısında bölme problemi	Çarpma işlemi iki boyutlu birimlerden oluşur. Örneğin, dikdörtgenin alanı için uzunluk x genişlik birimi. Örneğin, $13\frac{1}{2} \div 3\frac{1}{4}$ işlemi için kurulan bir problem (Lo & Luo, 2012, s. 493): “Dikdörtgenin alanı $13\frac{1}{2}$ m ² ve uzunluğu $3\frac{1}{4}$ m ise genişliği ne kadardır?”

2.2.1.1.2. Model Çizme

Model çizme, matematiksel modelleme veya doğal sayılar ve kesirlerin çarpma ve bölme işlemi için öne sürülen modellerle farklıdır. Bu çalışmada kesir çubuğu, dikdörtgen, sayı doğrusu, vs. çizerek bunun üzerinde işlemdeki sayıları ve işlemi göstererek işlemin sonucuna ulaşma ve ifade etme süreci “model çizme” olarak ifade edilmiştir. Matematiksel modelleme ise öğrencilerin gerçek yaşam problemlerini çözebilmek için çabaladıkları süreçlerdir (Lesh ve Doerr’dan aktaran Bal ve Doğanay, 2014). Bu modelleme sürecini Galbraith ve Stillman (2006) bir diyagramla şu basamaklardan oluştuğunu göstermiştir: Karmaşık gerçek yaşam durumu, gerçek yaşam problem ifadesi, matematiksel model, matematiksel çözüm, çözümün gerçek yaşamdaki anlamı, modelin değerlendirilmesi, rapor.

Model olarak Azim (1995)’in ortaya koyduğu çarpma modeli (tekrarlı toplama, çarpımsal karşılaştırma, alan ve kartezyen çarpım); Ball (1990b)’un bölme modeli (ölçme modeli, parçalama modeli), Ma (1999)’nın bölme modeli (ölçme modeli, parçalama modeli, çarpım ve çarpanlar) gösterilebilir. Model çizme ise İngilizcesi “math drawing” veya “drawn representation” olarak ifade edilen temsil türlerinden biri olarak gösterilebilir. ÖAB’nin boyutlarından birisi temsillerdir. Temsillerin ilgili literatürden özetle sözel, sayısal, görsel olmak üzere çeşitleri vardır (Bosse vd., 2011; Clements, 1999; Johnson, 1998; Lesh vd., 1987). Bunlardan görsel temsil resimsel (çizim, şekil) ve somut olmak üzere ikiye ayrılır (Alacacı, 2010; Lo ve Luo, 2012; Pesen, 2008; Van De Walle vd., 2012). Bu çalışmada kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin verilen işlemi veya problemi model çizerek göstermek resimsel temsillerden çizili temsil olarak ele alınmıştır. Çalışmada model çizme temel alınmıştır çünkü model çizme sürecinde kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamaları hakkında oldukça fazla veriler elde edileceği düşünülmüştür.

NCTM (2000) standartları ve CCSSI (2010) sayıların içinde gömülü olduğu problemleri çözmenin ve görsel temsilleri kullanmanın (kesir çubuğu, sayı doğrusu, alan modeli, vs.) önemini vurgulamaktadır. Bununla beraber MEB (2013) 5-8. sınıf ortaokul matematik öğretim programında da kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin kazanımlarda bu işlemlerin modellerle farkettilmesi gerektiği belirtilmiştir. Buna göre çizili temsillerin öğrenciler açısından önemli olduğu söylenebilir. Orrill, Sexton, Lee ve Gerde (2008) çizili veya somut temsillerin öğrencilerin öğrenmesi açısından önemli olduğuna inanıldığı halde öğretmenlerin sınıflarında kullanmamalarının çizili temsilleri kullanmada ve yorumlamada

rahat olmamaları ile, bu rahatsızlığı da öğretim için matematiksel bilgilerindeki eksiklik ile ilgili olduğunu öne sürmüşlerdir.

İlkokul ve ortaokul matematiğinde kesirler ve kesirlerle işlemlere ilişkin yaygın olarak üç model görülür; uzunluk modeli, alan modeli, küme modeli. Matematik kitaplarında farklı modeller bulunsa da bu üç model baskın bir şekildedir. Sınıflarda bu modellerin yanısıra somut nesneler de kullanılmaktadır; kesir çubukları, sayma pulları, vs. Bunlarla beraber örüntü blokları da çoğunlukla kullanılmaktadır (Watanabe, 2002). Kesirlerle çarpmayı alan modeliyle göstermek dikdörtgenin alanını bulma olarak doğal sayılarla çarpma ön bilgisine dayanır. Alan modeli aynı zamanda çarpmanın dağılma özelliğine götürür. Basit kesirlerle çarpma işlemine ilişkin anlamının geliştirilmesi doğal sayılarla çarpma işlemi ve dikdörtgenin alanını bulma ölçme kavramıyla bağlantısını anlamaya bağlıdır (Tsankova ve Pjanic, 2009). Küme modeli, alan ve uzunluk modeline göre daha az tercih edilmektedir. Bunda bu modeli çizerken daha çok zorlanmalarının etkisi olduğu söylenebilir. Küme modelinde bütün nesneler topluluğudur ve bütünün alt kümeleri kesirsel kısımdır. Örneğin, 3 nesne, 12 nesnelik bir kümenin $\frac{1}{4}$ 'üdür. 12 nesnelik küme bütünü veya 1'i temsil eder. Nesnelerin oluşturduğu bu kümeyi tek bir şey olarak almak öğrencilere küme modelini zorlaştırmaktadır. Küme modelleriyle ilgili en yaygın kavram yanılgısı bir bütündeki eşit kümelerin sayısı yerine alt kümelerin büyüklüğüne odaklanmasıdır. Örneğin, 12 nesne 1 bütünü oluşturuyorsa 4 nesnelik alt küme $\frac{1}{3}$ 'üdür, $\frac{1}{4}$ 'ü değildir çünkü 3 eşit küme bütünü oluşturur (Van De Walle vd., 2012, s.290).

Literatürde model türleri farklı araştırmacılar tarafından farklı şekillerde öne sürülmüştür. Bunlardan bazıları şöyledir:

- Bölge, alan, küme, çizgi (sayı doğrusu) modeli (Alacacı, 2010, s. 84)
- Alan, doğrusal, soyut model, somut nesneler, örüntü blokları (Watanabe, 2002)
- Bölge, küme, uzunluk, hacim modeli (Pesen, 2008, s. 219)
- Alan, küme, sayı doğrusu modeli (Olkun ve Toluk-Uçar, 2014, s. 32)
- Alan, uzunluk, küme modeli (Van De Walle vd., 2012, s. 288)

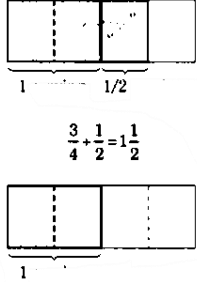
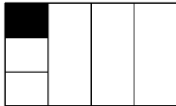
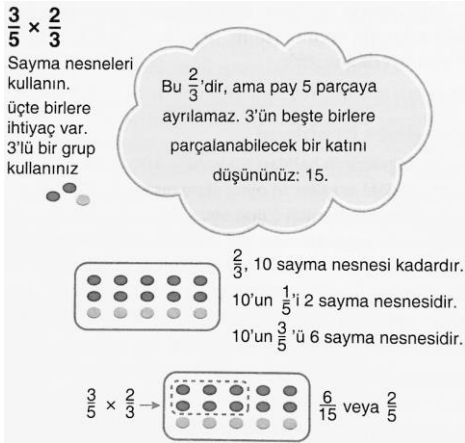
Bu çalışmada literatürde en yaygın olarak görülen alan, uzunluk ve küme modeli temel alınmıştır. Buna göre çalışmada alan, uzunluk veya küme modelinden bir veya birkaçını kullanarak kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin verilen işlem ve problemler için uygun model çizimleri istenmiştir. Model çizme sürecinde kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamaları incelenmiştir. Aynı etkinliği iki farklı temsille göstermek ve öğrencilerden bunlar arasındaki bağlantıyı kurmalarını istemek faydalıdır. Farklı temsiller

farklı öğrenme olanakları sağlar. Örneğin, alan modeli öğrencilerin bütünün parçalarını görselleştirmelerine yardım eder. Uzunluk modeli iki sayı arasında her zaman başka bir kesrin olduğunu gösterir. Bazı öğrenciler bir temsili anlamlandırır, diğerini anlamlandıramaz. Bazı içerikler bir temsille verilebilir ama diğeriyle verilemez. Örneğin, öğrencilere kimin en hızlı koştuğu sorulduğunda uzunluk modeli alan modeline göre öğrencilerin düşüncelerini daha çok destekler. Uygun temsiller ve farklı modeller kullanmak öğrencilerin ve öğretmenlerin kesirlere ilişkin anlamalarını genişletir ve derinleştirir (Van De Walle vd., 2012, s. 288). Öğretmen adaylarının bu çalışmada çizdikleri modellerin türleri literatürden çıkarılan şu özet tablo ile değerlendirilmiştir (Tablo 2.2):



Tablo 2.2.

Kesirlerle Çarpma ve Bölme İşlemlerine İlişkin Çizilen En Yaygın Model Türleri

Model Türü	Açıklaması
Uzunluk modeli	Sayı doğrusu veya kesir çubuğu çizerek gösterilen model türüdür. Öğrencilerin kesirlere ilişkin anlamalarının gelişmesinde çok önemlidir (Van De Walle vd., 2012). Örneğin, $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemine yönelik çizilen bir kesir çubuğu modeli (Gregg & Gregg, 2007, s. 493)  Burada $\frac{1}{2}$'ye 1 diyerek yeni bütüne işaret etmiştir ve ilk kesir çubuğunun bir parçasını bu iki parça olan yeni bütüne göre açıklamıştır.
Alan modeli	Dikdörtgen, daire, kare veya üçgen çizerek gösterilen model türüdür. Alan modelinde, kesirler bir alanın veya bogenin parçalarına dayanır (Lo & Luo, 2012). Örneğin, "Melinda'nın dün doğumgünüydü. Doğumgünü pastasının çeyreği ($\frac{1}{4}$) kalmıştır. Bu sabah Melinda kalan pastanın $\frac{1}{3}$'ünü yemiştir. Melinda'nın bu sabah yediği pasta bütün pastanın ne kadardır?" problemi için bir öğretmen adayının çizdiği dikdörtgensel alan modeli (Tsankova & Pjanic, 2009, s. 282): 
Küme modeli	Bilye, gazoz kapağı, bozuk para vs. veya küçük dairelerle veya X'lerle gösterilen model türüdür. Küme modelinde bütünün nesnelerin kümesi olduğunu ve bütünün alt kümelerinin kesir kısmını oluşturduğunu bilmek gerekir (Lo & Luo, 2012). Örneğin, $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$ işlemine yönelik çizilen küme modeli (Van De Walle vd., 2012, s.319): 
Gerçek nesne modeli	Gerçek yaşamdaki nesneleri çizerek gösterilen model türüdür. Örneğin, $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ işlemine yönelik bir öğrencinin çizdiği gerçek nesne (patates cipsi poşeti) modeli (Mack, 2001, s.286): 

2.2.1.2. Gerekçelendirme (Justification)

ÖAB'nin diğer bir alt boyutu gerekçelendirmedir. Gerekçelendirme; bir iddia veya savın doğru olduğuna ilişkin diğerlerini ikna edecek veya kendilerini inandıracak temeller, kanıt veya gerekçeler sağlamaktır (Thomas'tan aktaran Bicknell, 1999). Kendisine ya da başkasına ait düşüncenin, kararın neden doğru olduğunu gösterme, kendini haklı gösterme, başkalarını ikna etmedir (Dreyfus, 1999). Örnek gerekçelendirme soruları şu şekildedir:

- “Ali 36×17 işlemini yaparken $40 \times 20 = 800$ ile başlıyor ve sonra hem 4'ü hem 3'ü bundan çıkararak cevabı buluyor ($800 - 7 = 793$).” Bu işlemi 40×20 ile başlayarak nasıl doğru yapabilir? Neden bu çözümün doğru olduğunu gerekçelendirin. Gerekçelendirmenin neden metodun işe yaradığını ve neden Ali'nin metodunun çalışmadığını açıkladığından emin olun (Lo, Grant ve Flowers, 2008, s. 10).
- “Sınıfta 6 kişi var, her bir öğrenci bir elmanın yarısını yiyor. Hepsi kaç elma yer?” problemini neden çarpma işleminin çözdüğünü gerekçelendirme (Goodson-Espy, 2009, s.5).
- İki veya daha fazla kesrin çarpımının neden herhangi bir kesirden daha küçük olduğunu gerekçelendirme (Ochefu, 2013).

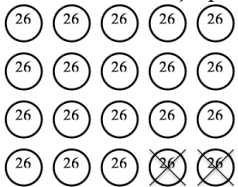
Bu çalışmada verilen problemin veya modelin neden o işlemi ifade ettiğini veya öğrencinin çözümünün neden doğru veya yanlış olduğunu gerekçelendirmeleri istenmiştir. Lo vd. (2008) çalışmalarının sonucunda öğretmen adaylarının çarpmaya ilişkin anlamalarının kendi düşüncelerini gerekçelendirme becerilerini geliştirdiği ve kendi düşüncelerini nasıl gerekçelendireceklerine ilişkin anlamaların çarpmaya ilişkin anlamalarını geliştirdiği varsayımında bulunmuşlardır.

Matematiksel olarak düşünmek için, öğrenciler sonuçlarını nasıl gerekçelendireceklerini, neden doğru olduklarını düşündüklerini nasıl açıklayacaklarını ve öğretmenlerini ve diğer öğrencileri nasıl ikna edeceklerini öğrenmelilerdir (Back, Manilla ve Wallin, 2009). Gerekçelendirmeler sadece öğrenci için değil öğretmen için de önemlidir, açıklamalar öğretmenlere matematiksel anlamayı geliştirmelerine olanak sağlar. “Çünkü öğretmenim öyle söyledi” veya “Ben bunu görebiliyorum” gibi söylemler akıl yürütmelerini ortaya çıkarmak için yeterli değildir (Dreyfus'tan aktaran Back vd., 2009). “ $26/65 = 2/5$ ” kısa cevabı öğrencinin anlamasına ilişkin okuyucuya herhangi bir şey söylemez. Öğrenci bu sonucu hem paydan hem paydadın 6'yı silerek elde etmiş de olabilir (Back vd., 2009). İşte bu noktada mantıksal muhakemeyi kullanarak iddiadan şüpheyi çıkarma süreci gerekçelendirme olarak tanımlanmıştır (Staples ve Truxaw, 2009).

Birçok araştırmacı tarafından gerekçelendirmenin türleri farklı şekillerde açıklanmıştır (Back vd., 2009; Goodson-Espy, 2009; Hunter ve Anthony, 2008; Lo, Grant ve Flowers; 2004; Lo vd., 2008). Back vd. (2009) gerekçelendirme türlerini *kendi açıklaması, varsayıma dayalı, kurala dayalı, belirsiz/genel ifade, işlemsel tanım* olarak ifade ederken Hunter ve Anthony (2008) *görsel, sözel ve sayısal* olarak ifade etmiştir. İlgili literatürden gerekçelendirme türlerine ilişkin özet bir tablo oluşturulmuştur (Tablo 2.3) ve bu çalışmada öğretmen adaylarının ortaya koydukları gerekçelendirmeler değerlendirilirken bu tablo temel alınmıştır.

Tablo 2.3.

Gerekçelendirme Türleri

Gerekçelendirme Türleri	Açıklaması
Kendi açıklaması şeklinde gerekçelendirme (Own explanation)	O basamağın neden geçerli olduğunu kendi kelimeleriyle veya sembollerle açıklama. Örneğin, “ k bir tam sayı ise $2k^2 + 2k$ bir tam sayıdır. Bu yüzden $2(2k^2 + 2k)$ çift bir tam sayıdır.” Bazı gerekçelendirmelerde matematiksel tanım kendi kelimeleriyle yazılmıştır. Örneğin, “ $2 \equiv_{13} 106$ çünkü $2 - 106 = -104$, $13 \mid -104$ ” (Back vd., 2009, s. 295).
Varsayıma dayalı gerekçelendirme (Assumption)	Görevin içinde verilen varsayıma doğrudan gönderme yapma veya yeni biçimde yeniden yazma (Back vd., 2009).
Kurala dayalı gerekçelendirme (Rule)	Kuralın veya tanımın ismine gönderme yapma. Örneğin, mutlak değer kuralı, totoloji, kongruens, vb. Bazı durumlarda gerekçelendirme açık şekilde yazılmış kuralı içerir (Back vd., 2009, s. 295).
Belirsiz/Genel ifade şeklinde gerekçelendirme (Vague/broad statement)	Çok kısa ve bilgilendirici olmayan gerekçelendirme türüdür. Örneğin, “mantiken” veya “sadeleştirme yapılır” (Back vd., 2009, s. 295)
İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme (Procedural description)	O basamakta ne yapıldığına ilişkin açıklama. Örneğin, “her iki tarafa $2x+4$ eklenir”, “3 diğer tarafa taşınır ve işaret değiştirilir” ve “toplam hesaplanır” (Back vd., 2009, s. 295)
Çarpmanın tekrarlı toplama anlamını kullanarak gerekçelendirme	“Sınıfta 6 kişi var, her bir öğrenci bir elmanın yarısını yiyor. Hepsi kaç elma yer?” problemini neden çarpma işleminin çözdüğünü gerekçelendirme (Goodson-Espy, 2009, s. 1134): “6 öğrencinin her biri $1/2$ elma yiyorsa, $1/2$ 'yi 6 kere toplayabilirsiniz ve 3 elde edersiniz. Bu $6 \times 1/2 = 3$ demekle aynıdır.”
Çarpmanın tanımı yoluyla gerekçelendirme	Çarpmanın tanımından yararlanarak gerekçelendirmedi. Örneğin, 18×26 işlemi için neden o metodun (18×20 ve 18×6 şeklinde ayırıp toplama) işe yaradığını şu şekilde gerekçelendirme (Lo vd., 2004, s.1162): “ 18×26 , 26 'nın 18 grubu olarak düşünülebilir. 26 , 20 ve 6 'dan oluşur bu yüzden 26 'nın 18 grubu, 20 'nin 18 grubu ve 6 'nın 18 grubu ile aynıdır.”
Resim çizerek gerekçelendirme	Örneğin, 18×26 işlemi için neden o metodun işe yaradığını şu şekilde gerekçelendirme (Lo vd., 2004, s.1163): 5 sütun ve 4 satır olmak üzere küçük dairelerden oluşan ve her birinin içinde 26 yazan bir küme modeli çiziyor. İki dairenin üzerine çarpı atıyor. 
Hikaye/problem yoluyla gerekçelendirme	Örneğin, 18×26 işlemi için neden o metodun (iki tane 10×26 'yı toplama ve bu toplamdan 2 tane 26 'yı çıkarma) işe yaradığını şu şekilde gerekçelendirme (Lo vd., 2004 s.1162): “10 çanta 26 kalem, 10 çanta 26 kalem, böylece 20 çanta 26 kalemi vardır. Sonra 2 çanta 26 kalemin arkadaşının olduğunu fark ediyor ve onları çıkarıyor, böylece onların kalemlerini çıkarıyor.”

2.2.1.3. Açıklama (Explanation)

ÖAB'nin diğer bir alt boyutu da açıklamadır; genel kurallar ve işlemler için matematiksel açıklamalar sağlamadır (Hill vd., 2008). Açıklama ve gerekçelendirmenin her ikisi de akıl yürütmedir. Birini diğerinden ayırmaya gerek yoktur. Ancak ikisinin farklı amaçları vardır; gerekçelendirme iddianın doğruluğuna ilişkin başkalarını ikna etme veya kendini inandırmadır, açıklama olayların veya meselelerin durumunu açık hale getirmedir. Yine de bu amaçlar sıklıkla birbirine karıştırılmaktadır ve biri diğerinden ayıramamaktadır (Kasachkoff, 1988). Açıklama; ilişkiler veya olayların neden varolduğunu veya gerçekleştiğini açık hale getirmedir (Thomas'tan aktaran Bicknell, 1999). Öğrenciler ve öğretmen başkalarına açık olmayabileceklerini düşündükleri matematiksel düşüncelerine açıklık getirmek için matematiksel açıklamalar yaparlar. Örneğin, “ $16 + 8 + 14$ işlemini nasıl yaparsınız?” sorusuna bir öğrenci “16'dan bir aldım ve 14'e ekledim, 15 ve 15 elde etmek için, sonra 15 ile 15'i topladım ve 30 elde ettim.” şeklinde sorunun çözümünü diğer öğrencilere açıklamıştır (Yackel, 2001). Bu çalışmada öğretmen adaylarından kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerini, bu işlemlere ilişkin algoritmaları, kuralları veya özellikleri altında yatan fikirlere dayalı olarak açıklamaları istenmiştir.

Açıklama türleri matematiksel içeriğe (geometri, aritmetik, cebir, vs.), gerçekleşen öğretim etkinliğinin türüne (kavram işleme, işlem yapma, tahmin etme, vs.), açıklamanın amacına (belirli bir durumun açıklaması, genelleştirmeye götüren açıklama, vs.) ve öğrencilerin yaş düzeylerine göre değişebilir (Levenson, Tsamir ve Tirosh, 2010). Öğretmenlerin kullandığı açıklama türlerinin alan bilgilerine göre değiştiğini gösteren birçok çalışma vardır (Ball, 1990b; Ma, 1999). Ma (1999)'nın çalışmasında işlemsel bilgiye sahip Amerikalı öğretmenler sadece işlemi somutlaştırmak için manipulatifler kullanırken, kavramsal bilgiye sahip Çinli öğretmenler sınıf içi diyalogları desteklemek için manipulatifleri kullanmışlardır (s. 27). Açıklama, farklı araştırmacılar tarafından farklı şekillerde sınıflandırılmıştır (Levenson, 2010, s.122-123):

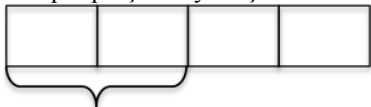
- Resmi (matematiksel tanımlara ve teoremlere dayanır) ve resmi olmayan açıklamalar (önseziler, sezgiler içerir) (Bonotto, 2005; Mack, 1995; Raman, 2002; vs.)
- İşlemsel (problemin çözümündeki işlemleri veya basamakları tanımlar) ve kavramsal açıklamalar (basamakların nedenlerini tanımlar, işlemsel bilgiyi kavramsal bilgiye bağlar) (Bowers ve Doerr, 2001; Cobb, McClain ve Gravemeijer, 2003; Fuchs vd., 1997; vs.)

- Matematiksel (matematiksel tanımlar ve özelliklere dayanır) ve uygulama temelli açıklamalar (matematiksel ifadelere anlam kazandıracak günlük içerikler veya manipulatifler kullanır) (Koren, 2004)

Koren (2004) açıklamaları üç gruba ayırmıştır; matematiksel temelli açıklama (MTA), uygulama temelli açıklama (UTA) ve kural temelli açıklama (KTA). MTA sadece matematiksel kavramları içerir. UTA matematiksel ifadelere anlam verecek gerçek yaşam bağlamına dayalı ve/veya manipulatifler kullanan açıklamalardır, matematiksel düşüncelere dayanmayan açıklamaları içerir. KTA sadece kuralı ifade etmeyi içerir. Örneğin, sıfır ile çarpmayı bir üçüncü sınıf öğrencisi “Sıfır ile çarpılan her şey sıfırdır.” şeklinde ifade etmiştir (Levenson, Tirosh ve Tsamir, 2004, s. 245). Bu çalışmada Koren (2004)’in ortaya koyduğu sınıflandırma temel alınmıştır ve öğretmen adaylarının verilen durum için yaptıkları açıklamalar MTA, UTA ve hem matematiksel hem uygulama temelli açıklama (MUTA) olarak şu tablo gözönüne alınarak değerlendirilmiştir (Tablo 2.4):

Tablo 2.4.

Açıklama Türleri

Açıklama türü	Açıklaması
Matematiksel temelli açıklama (MTA)	Matematiksel tanımlar veya daha önce öğrenilen matematiksel özelliklere dayalı açıklamalardır ve çoğunlukla matematiksel muhakemeyi kullanır (Levenson, Tirosh ve Tsamir, 2006). Örneğin: “$\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$ Neden eşittir?” sorusuna şu şekillerde cevap verme (Levenson vd., 2010, s. 347; Levenson, 2010, s.131): “$\frac{1}{4}$, $\frac{3}{12}$ ile aynıdır. $\frac{2}{4}$, 2 tane $\frac{3}{12}$’dir yani $\frac{6}{12}$’dir. Bu yüzden $\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$’dir.” (<i>İki eşit kesir</i>) “$\frac{6}{12} = \frac{6 \div 6}{12 \div 6} = \frac{1}{2}$ ve $\frac{2}{4} = \frac{2 \div 2}{4 \div 2} = \frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ ve $\frac{6}{12}$ kesirleri $\frac{1}{2}$’ye eşittir. Bu yüzden $\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$’dir.” (<i>Yarıma eşitlik</i>) “Her sayının 1 ile çarpımı kendisine eşittir: $1 = \frac{3}{3}$ $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{3}$ ile çarpılır: $\frac{2}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{6}{12}$ $\frac{2}{4} \times 1 = \frac{2}{4}$ ve $\frac{2}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{6}{12}$. Bu yüzden $\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$’dir.” (<i>Çarpımsal özdeşlik kullanma</i>) “$\frac{6}{12}$ kesrinin paydasını 3 ile bölersek $\frac{2}{4}$ kesrinin paydasıyla aynı sayıyı, 4’ü elde ederiz. Bu yüzden kesir 3 ile sadeleştirilir. $\frac{6}{12} = \frac{6 \div 3}{12 \div 3} = \frac{2}{4}$ Dolayısıyla $\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$.” (<i>Kesirleri sadeleştirme</i>)
Uygulama temelli açıklama (UTA)	Matematiksel ifadelere anlam verecek günlük/gerçek yaşam bağlamına dayalı ve/veya manipulatifler kullanan açıklamalardır (Levenson vd., 2004). Görsel destekler veya manipulatifler kullanan ve gerçek yaşam bağlamına dayalı açıklamalardır (Levenson vd., 2006). Örneğin, “$\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$ Neden eşittir?” sorusuna şu şekillerde cevap verme (Levenson vd., 2010, s. 347, Levenson, 2010, s.132): “Anneleri Derya ve Meryem’e eş çikolatalar vermiştir. Derya çikolatasını 4 eşit parçaya bölüp 2 parçasını yemiştir. Meryem çikolatasını 12 eşit parçaya bölüp 6 parçasını yemiştir. Çocukların her biri aynı miktar çikolata yemiştir. Dolayısıyla $\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$.” (<i>Çizimsiz çikolata açıklaması</i>) “Anneleri Derya ve Meryem’e eş çikolatalar vermiştir. Derya çikolatasını 4 eşit parçaya bölüp 2 parçasını yemiştir.  4 parçadan 2’sini yemiştir. Meryem çikolatasını 12 eşit parçaya bölüp 6 parçasını yemiştir.  12 parçadan 6’sını yemiştir. Çocukların her biri aynı miktar çikolata yemiştir. Dolayısıyla $\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$.” (<i>Çizimle çikolata açıklaması</i>)
Hem matematiksel hem uygulama temelli açıklama (MUTA)	Hem matematiksel temelli hem de uygulama temelli açıklama kullanan açıklamalardır (Levenson vd., 2010).

2.2.2. İşlemsel ve Kavramsal Bilgi

İşlemsel ve kavramsal bilgi geçmiş yıllardan beri matematiksel alan bilgisi bağlamında düşünülmektedir. Her ikisi de matematiksel bilginin önemli bileşenleridir (Shulman, 1987). İşlemsel bilgi matematiksel bileşenler, algoritmalar ve tanımları tanımlamak için işlemler bilgisi ve hesaplama becerilerinde ustalıktır (problemi nasıl tanımlayacağını ve nasıl doğru bir şekilde çözeceğini bilme). Matematiğe ilişkin işlemsel bilgi iki kısımdan oluşur; sembol temsil sisteminin şekil ve sözdizimi bilgisi, matematiksel görevleri tamamlamada kullanılabilecek bazıları sembolik olan kurallar ve algoritmalar bilgisi. Örneğin, kesirlerle bölmeye ilişkin işlemsel bilgiye sahip olan bir öğrenci problemi kağıda nasıl yazacağını ve bölme işlemini tamamlamak için gereken algoritmanın basamaklarını bilecektir (önce bölüneni ters çevir, sonra yeni kesirleri çarp). Bu işlemin içinde işlemler vardır; kesirlerin hangi sırada yazılacağı, nasıl çevrileceği, kesirlerin nasıl çarpılacağı. Kesirlerle bölmeye ilişkin işlemsel bilgi kurallar ve algoritmalar basamak basamak verilerek ve bunları hatırlama stratejileri verilerek öğretilir. Kavramsal bilgi matematiksel işlemlere anlam kazandıran ve açıklayan fikirlerin ilişkileri ve bağlantılarına, matematiğin altında yatan yapıya ilişkin bilgiye işaret eder. Örneğin, kesirlerle bölmeye ilişkin kavramsal bilgi genel olarak kesirlerin ve bölünecek belirli kesirlerin doğasını ve bölmenin ne anlama geldiğini içerir. Kesirlerle bölmeye ilişkin kavramsal bilgi şöyle öğretilir; kesirlerle bölmeyi gösteren somut ve yarı-somut modellerle (kesir çubukları, dikdörtgensel veya dairesel çizimler, vs.), matematiksel fikirler arasındaki ve içindeki ilişkilerin tartışılmasıyla (bölmenin paylaştırma ve grupta anamları nasıl, önce doğal sayılarla sonra kesirlere genişletilerek; kesirlerle bölme orantı ile nasıl ilişkili; çarpma, bölme ile nasıl ilişkili; sözel problemler matematiksel ifadelerle nasıl ilişkili) (Eisenhart vd., 1993).

İşlemsel bilgi matematiğin basamaklıklarını ve kurallarını anlamayı içerir, kavramsal bilgi matematiksel ilişkileri anlamayı içerir (Forrester ve Chinnappan, 2010). Forrester ve Chinnappan (2010)'ın çalışmasında öğretmen adaylarından $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$ işlemini çözmeleri ve bu işleme ilişkin model çizimleri istenmiştir. Bu çalışmanın sonucunda bu problemi çözmeye esnasında kavramsal bilgi gösteren öğretmen adaylarının yaklaşık 4 katı kadarı öğretmen adayları işlemsel bilgiyi harekete geçirmişlerdir. Öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğunun kesirlerle çarpma ile ilişkin alan bilgilerinin işlemsel düzeyde olduğu görülmüştür. Benzer şekilde öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamalarının işlemsel düzeyde olduğunu ortaya koyan birçok çalışma vardır (Ball, 1990a, 1990b; Graeber vd., 1989; Ma, 1999; Özel, 2013). Bu durum dikkate

alınarak bu çalışmada öğretmen adaylarının kavramsal anlamalarının gelişmesine yönelik bir öğretim hazırlanmıştır ve gerçekleştirilmiştir. Bu şekilde öğretmen adaylarının ÖAB'lerinin de gelişeceği düşünülmüştür. Çünkü ilgili literatür incelendiğinde işlemsel ve kavramsal bilginin ÖAB'nin bütünleyici öğeleri olduğu ifade edilmektedir (Chinnappan, Forrester ve Thurtell-Hoare, 2012; Forrester ve Chinnappan, 2011).

İşlemsel ve kavramsal bilgiye ilişkin birçok araştırmacı tarafından farklı tanımlar yapılmıştır (Rittle-Johnson ve Alibali, 1999; Hiebert ve Lefevre, 1986; Khashan, 2014). Bu çalışmada Hiebert ve Lefevre (1986)'nin tanımları temel alınmıştır (Tablo 2.5).

Tablo 2.5.

İşlemsel ve Kavramsal Bilginin Tanımları ve Örnekleri

İşlemsel bilgi (İB) (Anlamdan uzak, sadece işlem)	Kavramsal bilgi (KB) (Altında yatan anlamdan haberdar)	Hem işlemsel hem kavramsal bilgi (İKB)
Bir matematiksel görevi tamamlamak için gereken algoritma, işlemler ya da kuralları nasıl uygulayacağını bilmez (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3).	Matematiksel kurallar ve aralarındaki ilişkilerin özüne hitap eden soyut bilgidir (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 6).	İşlemsel ve kavramsal bilginin ayrılmaz bir şekilde olduğu durumlarıdır.
Örneğin, $1\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ işlemine ilişkin işlemsel bilgi (Forrester & Chinnappan, 2011, s. 264):	Örneğin, $1\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ işlemine ilişkin kavramsal bilgi (Forrester & Chinnappan, 2011, s. 264):	
➤ Tam sayılı kesri bileşik kesre çevirme	➤ $1\frac{1}{2}$ 'nin içinde kaç tane $\frac{1}{4}$ olduğunu bulma	
➤ Bölünü ters çevirme	➤ $1\frac{1}{2}$ 'yi $\frac{1}{4}$ 'lere/çeyreklerle	
➤ Payları ve paydaları çarpma	parçalama ve çeyrekleri sayma	
➤ Sonuç sadeleşiyor mu diye bakma	Örneğin, $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$ işlemine ilişkin kavramsal bilgi (Forrester ve Chinnappan, 2010, s. 187):	
Örneğin, $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$ işlemine ilişkin işlemsel bilgi (Forrester ve Chinnappan, 2010, s. 187):	➤ $\frac{2}{3}$ 'ün $\frac{1}{4}$ 'ünü veya $\frac{1}{4}$ 'ün $\frac{2}{3}$ 'ünü bulma	
➤ Payları çarpma	➤ $\frac{2}{3}$ 'ün $\frac{1}{4}$ 'ünü bulmak için $\frac{2}{3}$ 'ü 4 eş parçaya parçalama veya $\frac{1}{4}$ 'ün $\frac{2}{3}$ 'ünü bulmak için $\frac{1}{4}$ 'ü 3 eş parçaya parçalama	
➤ Paydaları çarpma		
➤ Cevabı sadeleştirmek		

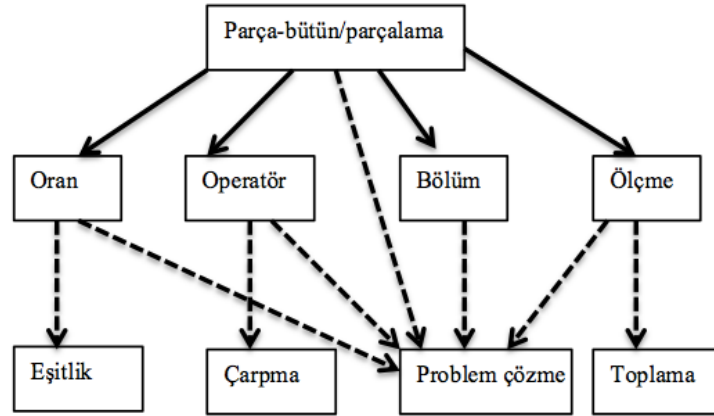
2.3. Kesir ve Anlamları

A ve B tam sayılar ve B sıfırdan farklı olmak üzere bir nesnenin, bir nesneler topluluğunun veya bir niceliğin kesri, B eşit parçaya bölünmüş A parçadan oluşan bir miktardır (parça-bütün anlamı) veya A tane $1/B$ parçasıdır (ölçme anlamı). Örneğin, $4/5$ kesri $1/5$ 'lik parçalardan 4 tane veya eşit bütüklükteki 5 parçanın 4'ü anlamına gelir (Beckmann, 2005, s. 39). Kesirler a/b şeklinde yazılan iki parçalı sembollerdir. Buna göre kesir kelimesi bir kesir çizgisi ve iki tam sayı ile yazılan bir sembol, notasyonel sisteme işaret eder (Lamon, 2007). Kesir kelimesi ile rasyonel sayı sıklıkla birbiri yerine kullanılır ancak bunlar aynı kavramlar değildir. Her kesir rasyonel sayı değildir. Örneğin, $3/4$, $\frac{\sqrt{4}}{3}$, $\frac{2,1}{4,1}$ kesir ve

rasyonel sayıdır ancak $\frac{\pi}{2}$ kesir formunda yazıldığı halde rasyonel sayı değildir. Bütün kesirler farklı rasyonel sayılar değildir. Örneğin, $6/9$, $10/15$ ve $8/12$ kesirlerinin altında bir tane rasyonel sayı vardır, o da $2/3$ 'tür (Lamon, 1999, s. 26).

Kesir kelimesi sınıf içinde ve dışında birçok farklı şekilde kullanılır. Kesir kelimesinin birçok anlamı vardır, bunların hepsi matematiksel değildir. Örneğin, bir kasaba halkının bir kesri seçimlerde oy kullandı denildiğinde kesir “bir kısmı/bölümü” anlamındadır. Matematik sınıfında öğrenciler günlük yaşamlarından kesri “küçük bir parça” anlamıyla bilmektedirler ve $4/3$ kesriyle karşılaştıkları zaman bu anlam işe yaramamaktadır. Bu durumda kesrin parça-bütün anlamını öğrenme ihtiyacı doğar (Lamon, 2007). Bu zamana kadar kesirler öğretimde rasyonel sayıların tek bir anlamı olarak parça-bütün karşılaştırması ile kullanıldığı için kesir ve parça-bütün kesir eşanlamlı olarak anlaşılabilir. Daha sonra eğitimciler bunun öğrencileri rasyonel sayıların fakir bir anlamı ile bıraktığının farkına varmıştır ve rasyonel sayıların alternatif anlamları olan operatör, ölçme, oran ve bölüm anlamlarına işaret etmişlerdir (Lamon, 2007). Kesirleri anlamak bu beş anlamıyla ve bunların birçok temsilleriyle deneyimi gerektirir (Güçler, Park ve McCrory, 2009).

İlk olarak Kieren (1976) rasyonel sayıların 4 alt boyuttan oluştuğunu ileri sürmüştür: oran, bölüm, operatör ve ölçme. Daha sonra beşinci bir boyut olarak parça-bütün boyutunu eklemiştir (s. 103). Behr vd. (1983) Kieren (1976)'ın öne sürdüğü rasyonel sayıların bu 5 boyutunu kesirlerle işlemlere ve problem çözmeye bağlayan teorik bir model ortaya koymuştur (s. 100) (Şekil 2.4).



Şekil 2.4. Rasyonel sayıların öğretimine ilişkin kavramsal şema. Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983) Rational number concepts. R. Lesh & M. Landau (Ed.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* içinde (s. 91-125). New York: Academic.

Burada parçalamayla birlikte kesrin parça-bütün anlamı kesrin oran, operatör, bölüm ve ölçme anlamlarının gelişmesinde temeldir. Kesrin oran anlamı eşit kesirlerin bulunmasında, operatör anlamı kesirlerle çarpımsal işlemlere ilişkin anlamının geliştirilmesinde ve ölçme anlamı kesirlerle toplama işlemlerinde yeterlilik kazanmada yardımcıdır ve önemlidir. Son olarak kesrin bu 5 anlamı kesirlerle ilgili problemleri çözmede önkoşuldur (Behr vd., 1983, s. 100).

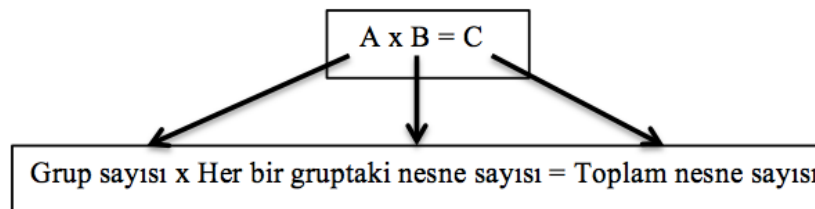
Kesirlerin anlamlarını ortaya koyan birçok çalışma vardır (Behr vd., 1983; Kieren, 1976; Lamon, 1999, 2007; Redmond, 2009; Sowder, Philipp, Armstrong ve Schapelle, 1998; Van De Walle vd., 2012). Bu anlamları bu çalışmalardan özetlemek gerekirse şöyledir:

- **Bölüm:** Kesir payı paydaya bölme şeklindedir. $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ iken m, n eşit parçaya bölündüğünde bir parçanın büyüklüğüdür; $\frac{m}{n} = m \div n$. Örneğin, $3/4$ kesri için bir problem: “3 kg pirinci 4 kişi eşit şekilde bölüşmek istiyor, her bir kişi kaç kg pirinç alır?”
- **Ölçme:** Kesrin bu anlamı parça-bütün anlamından farklıdır çünkü uzaklık veya uzunluk olarak görülür. Örneğin, $3/4$ kesrini sayı doğrusunda göstermek için $1/4$ birim kesri uzunluk olarak alınır, $3/4$ ’e ulaşmak için bundan 3 tane olduğu belirtilir ve bu uzunluk 3 kere tekrarlanarak çizilir.
- **Oran:** İki nicelik arasında çarpımsal karşılaştırmayı ifade eder. Bu anlam parça-bütün anlamıyla karıştırılır ama çok farklıdır. Örneğin, $3/4$ ’ün oran anlamı bir sınıftaki her 4 erkek öğrenci için 3 kız öğrenci vardır şeklindedir. Burada $3/4$ kesri kızların erkeklere oranı şeklinde ifade edilmiştir.

- *Parça-bütün*: Kesrin bu anlamı parça-bütün karşılaştırması için kullanılır. Bütün B eşit parçaya bölünmüş ve A parçası alınmıştır. Örneğin, $3/4$ kesrinin parça-bütün anlamı “eşit büyüklükteki parçaların” dördünün üçü şeklindedir ve bu kesir için problem: “Bir sakız paketinde dört tane sakız vardır. Üç çocuk bu paketten birer parça sakız çiğner. Bu sakız paketindeki sakızların ne kadarı çiğnenmiştir?”
- *Ondalık sayı*: Kesirler ondalık sayı olarak ifade edilebilir. Örneğin, $3/4$ kesri için problem: “Sinem Ahmet’e ne kadar parası olduğunu sorar. Ahmet de cebinden 3 tane 25 kuruş çıkarır. Ahmet’in kaç lirası vardır?” Bu problemde $3/4$ kesri 0,75 olarak ifade edilmiştir.
- *Sayı*: Kesirler A/B formunda bir sayıdır. Negatif olmayan rasyonel sayılardır. Sayı doğrusunda karşılık gelen bir nokta vardır. Kesirler soyut olarak sayı şeklinde göründüklerinde bile halen “bir bütünün”dür. Örneğin, $3/4$, 1’in $3/4$ ’üdür.
- *Operatör (İşlemci)*: Kesir diğer sayı üzerine etki eder, işlem görür. Örneğin, bir toplantıda 12 erkek vardır ve bu erkeklerin sayısının $3/4$ ’ü kadar kadınlar vardır. Burada kadınların sayısı ister 12’yi 4’e bölüp 3 ile çarparak, istenirse 3 ile çarpıp 4’e bölerek bulunur.
- *Olasılık*: Olayın olma olasılığı olarak ifade edilebilir. Örneğin, Talip’in 12 mavi ve 4 siyah çorabı vardır. Sol ayağına mavi çorabın bir tekini giydiğinde diğer ayağına da mavi çorabın gelme olasılığı $12/16 = 3/4$.
- *Yüzde*: Kesirler yüzde olarak ifade edilebilir. Örneğin, $3/4$ kesrinin problemde “Bir giyim mağazasında büyük indirim var ve vitrininde %75 indirim yazıyor.” şeklinde verilmesi.

2.3.1. Kesirlerle Çarpmanın Anlamı

Çarpma işlemi grup sayısı (çarpan) ile her bir grubun büyüklüğünün (çarpılan) çarpımıdır ve “çarpan x çarpılan” olarak ifade edilir (Harel vd., 1994). $A \times B$ veya $A \cdot B$ işleminde A, grup sayısı; B, her bir gruptaki nesne sayısı (grubun büyüklüğü) ve $A \times B$, A gruptaki toplam nesne sayısıdır ki bu sonuca A ile B’nin çarpımı denir (Beckmann, 2005, s. 219).



Şekil 2.5. Çarpmanın tanımı

Çarpmanın anlamına ilişkin ortak bir görüş olmasa da birçok araştırmacı tarafından yapılan araştırmalardan (Fischbein vd., 1985; Watanabe, 2003) özetle şunlardır:

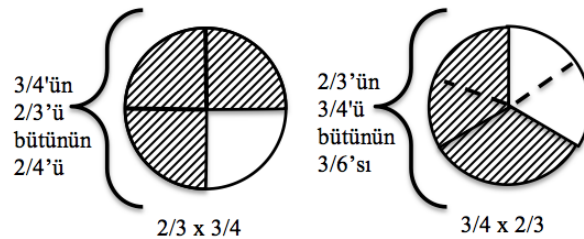
- *Eş gruplar/Tekrarlı toplama*: Eşit büyüklükteki gruplar olduğunda toplam nesne sayısı bu grupların toplamı ile bulunabilir ki bu da kısaca grup sayısı ve grubun büyüklüğünün çarpımıdır. Örneğin, her bir çantada 4 çikolata vardır ve 3 çanta varsa toplam çikolata sayısı $4 + 4 + 4 = 3 \times 4$ işlemiyle bulunabilir.
- *Dikdörtgensel alan/dizi (array)*: Dizideki toplam nesne sayısı satırların sayısı ile sütunların sayısının çarpımı ile elde edilir. Aynı şekilde dikdörtgenin alanı dikdörtgenin uzunluğunun ve genişliğinin çarpımı ile bulunabilir. Örneğin, 3 satır ve 4 sütun olacak şekilde sandalyeler dizilidir, toplam sandalye sayısı 3×4 işlemiyle bulunabilir.
- *Çarpımsal karşılaştırma*: Bir nicelik diğerinden belirli bir miktar katı daha fazladır. Örneğin, Ayşe'nin Ali'ninkinin 3 katı kadar mumu vardır, Ali'nin 4 tane mumu varsa Ayşe'nin mum sayısı 3×4 işlemiyle bulunabilir.
- *Kartezyen çarpım*: İki küme verilir, bir kümeden bir nesne, diğer kümeden bir nesne seçilerek oluşturulacak çiftlerin toplam sayısı kümelerdeki nesnelerin sayılarının çarpımı ile elde edilir. Örneğin, 3 pantolon ve 4 gömlek vardır, bunlardan oluşturulabilecek toplam kombin sayısı 3×4 işlemiyle bulunabilir.

Bunların hepsi kesirler için geçerli değildir. Kartezyen çarpım ve dikdörtgensel dizide çarpanların her ikisi de doğal sayı olmalıdır ve eş gruplarda grup sayısı doğal sayı olmalıdır.

Kesirlerle çarpma, çarpımsal yapılar arasında çarpımsal ilişkiler aramaya ilişkindir. Örneğin, 5. ve 6. sınıf öğrencileri bir bütünü, bir daireyi sürekli olarak parçalar ve parçanın parçasını bulur. $1/4$ oluşturmak için önce yarıya böler sonra yarımları yarıya böler ve $1/4$ 'leri elde eder. Böyle yaparak öğrenci $1/2$ 'nin $1/2$ 'sinin $1/4$ olduğunu ifade eder. Sonra da sembolleştirme parçalama deneyimi ile ilişkilendirilir, önce yazılı dilde sonra da sembollerle. Yarımın yarısı bir bölü dördtür; $1/2$ 'nin $1/2$ 'si $1/4$ 'tür; $1/2 \times 1/2 = 1/4$ (Armstrong ve Bezuk, 1995). Kesirlerle çarpmayı anlamak kesirlere ilişkin fikirleri anlamayı ve çarpmaya ilişkin fikirleri anlamayı içerir. Kesirlerle çalışırken, öğrencilerin eşit büyüklükteki parçaların gerektiğini ve bir parçanın büyüklüğünün bütünün büyüklüğüne dayalı olduğunu anlamaları gerekir. Aynı zamanda eşit paylaşım içeren problemleri çözebilmeleri gerekir. Ayrıca her bir kesrin eşit başka gösterimleri olduğunu anlaması gerekir. Örneğin, $9/12$ ve $6/8$, $3/4$ 'ün formlarıdır (Mack, 1998).

Çarpmayı sadece tekrarlı toplama anlamıyla vermek $3/4 \times 2/7$ gibi iki kesrin çarpımını yorumlamak için yetersiz kalır (Orrill, Araujo ve Jacobson, 2010). Tekrarlı toplama doğal sayıyla kesrin çarpımını güzel bir şekilde destekler. Örneğin, $3 \times 1/2$ sayısal olarak, resimsel olarak veya sayı doğrusunda $1/2 + 1/2 + 1/2$ olarak öğrencilere açık bir şekilde gösterilebilir ancak tekrarlı toplama iki basit kesrin çarpımını göstermek için uygun değildir (Tsankova ve Pjanic, 2009). Kesirlerle çarpma işlemlerinde ilk sayı doğal sayı, ikinci sayı kesirli sayı olduğunda mesela $3 \times 1/4$ için “3 tane $1/4$ ” anlamını verir. Ancak ilk sayı kesirli sayı olduğunda veya her ikisi de kesirli sayı olduğunda mesela $2/3 \times 4/5$ için “ $4/5$ ’in $2/3$ ’ü” olarak ifade edilir (Siebert ve Gaskin, 2006).

Kesirlerle çarpmada bütünleri ifade etmek toplama veya çıkarmaya göre daha zordur. Toplama probleminde toplananlar aynı büyüklükteki bütüne işaret ederken, çarpma probleminde çarpanlar farklı bütüne işaret eder. Örneğin, $2/3 \times 3/4$ işlemi için problem: “Sema’ya pizzanın $3/4$ ’ü kalmıştır. Sema bu kalan pizzanın $2/3$ ’ünü yemiştir. Sema bütün pizzanın ne kadarını yemiştir?”. Burada $3/4$ bütüne ve $2/3$ de $3/4$ ’e işaret eder. Tam sayılarla çarpmada çarpma işareti aynı zamanda “-nın” anlamına gelebilmektedir. Gruplama durumuyla bakıldığında 6×5 , 5’in 6 grubu anlamına gelir. Benzer şekilde bütünün $3/4$ ’ü alınır ve sonra da $3/4$ ’ün $2/3$ ’ü alınır. Sonuç olarak Sema, bütün pizzanın $2/4$ ’ü veya $1/2$ ’sini yemiştir. Tam tersi yapıldığında da sonuç aynıdır ama çizimler farklıdır (Şekil 2.6). Burada önce bütünün $3/4$ ’ünü aldıktan sonra $2/3$ ’ünü bulmak için $3/4$ yeni bütün olarak kullanılmıştır. Sonuçta, sorunun cevabı için bütün orijinal pizzanın bütününe döner ve cevap pizzanın $1/2$ ’si olur (Dixon ve Tobias, 2013).



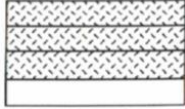
Şekil 2.6. Kesirlerle çarpmada çarpanların sırasını değiştirmenin sonucu değil ama çizimi değiştirmesine örnek. Dixon, J. K. & Tobias, J. M. (2013). The whole story: Understanding fraction computation. *Mathematics Teaching In The Middle School*, 19(3), 156-163. http://www.nctm.org/Publications/mathematics-teaching-in-middle-school/2013/Vol19/Issue3/mtms2013-10-156a_pdf/ sayfasından erişilmiştir.

Kesrin operatör anlamı kesirlerle çarpmaya rehberlik eder. Örneğin, $2/3 \times 3/4$ işlemi “bir bütünün $3/4$ ’ünün $2/3$ ’ünü alma” ve “bir bütünün $1/2$ ’sini veya $6/12$ ’sini alma” anlamına gelir. Burada $3/4$ ve $2/3$ operatör olarak düşünülebilir. Bunlar çarpma ve bölme

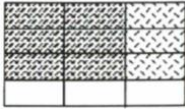
işlemlerinden oluşur. $3/4$ 'ün $2/3$ 'ü de işlemlerin işlemlerinden yani operatörlerden oluşur. Bu durum alan modeliyle şöyle açıklanır (Lamon, 1999):



Bu dikdörtgen bir bütündür ve $3/4$ 'ü taranır.



Burada $3/4$, 1 bütün üzerinde işlem gerçekleştirmiştir ve taralı kısım 1'in $3/4$ 'üdür. Sonra $2/3$, $3/4$ operatörünün uygulanmasından elde edilen sonuç üzerinde işlem gerçekleştirecektir. Yani 1'in $3/4$ 'ünün $2/3$ 'ü alınır.



Burada yatay bölmeler ilk operatörü, dikey bölmeler ikinci operatörü gösterir. Çift taralı kısım 1'in $3/4$ 'ünün $2/3$ 'üdür ve sonuç olan $6/12$ 'yi verir.

Kesirlerle çarpma işlemlerinin ülkemizde ortaokul matematik dersi öğretim programı (MEB, 2013) incelendiğinde 6. sınıf sayılar ve işlemler öğrenme alanında kesirlerle işlemler alt öğrenme alanında iki kazanım olarak verildiği görülmektedir (Şekil 2.7). Bu kazanımlar verilmeden önce doğal sayılarla ve tam sayılarla çarpma işlemleri, kesirlerle toplama ve çıkarma işlemleri verilmektedir. Kesirlerle çarpmaya ilişkin verilen kazanımlarda kesirlerle çarpmanın anlamı vurgulanmaktadır ve gerçek yaşam durumları ile model çizerek açıklamaya yer verilmektedir.

6.1.4.3. Bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır.

- Örneğin $6 \cdot \frac{2}{3}$ ifadesinin 6 tane $\frac{2}{3}$ 'ün toplamı anlamına geldiği ve $\frac{2}{3} \cdot 6$ ifadesinin de 6'nın $\frac{2}{3}$ kadarı olduğu ve bu işlemlerin aynı sonucu verdiği vurgulanır. Gerçek yaşam durumları ve uygun kesir modelleriyle yapılacak çalışmalara yer verilir.
- Bir doğal sayı 1'den büyük bir kesirle çarpıldığında sonucun bu sayıdan büyük, 1'den küçük bir kesirle çarpıldığında ise küçük olduğunu anlamaya yönelik çalışmalara yer verilir.

6.1.4.4. İki kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır.

- Örneğin $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}$ ifadesinin $\frac{2}{5}$ 'in $\frac{1}{2}$ 'si (yani yarısı) ve $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}$ ifadesinin $\frac{1}{2}$ 'nin $\frac{2}{5}$ 'i anlamına geldiği vurgulanır.
- Gerçek yaşam durumları ve uygun kesir modelleriyle yapılacak çalışmalara yer verilir.

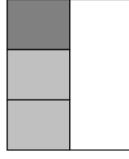
Şekil 2.7. Kesirlerle çarpma işlemine ilişkin kazanımlar. Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2013). Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı. <http://ttkb.meb.gov.tr/program2.aspx> sayfasından erişilmiştir.

Bu çalışmada bu kazanımlar gözönüne alınarak öğretmen adaylarına kesirlerle çarpmaya ilişkin kavramsal anlama kazandırılmaya çalışılmıştır. Bunun için hazırlanan öğretim sürecinde öğretmen adayları çarpmanın tanımı ve çarpmanın anlamları ele alınarak kesirlerle çarpma işlemine ilişkin model çizme, problem kurma, verilen model veya problem için matematiksel ifade yazma, verilen durumu gerekçelendirme ve açıklama deneyimleri yaşamışlardır. Öğretim boyunca çarpma işlemindeki ilk sayı “*grup sayısı*”, ikinci sayı “*her bir gruptaki nesne sayısı*” ve işlemin sonucu “*toplam nesne sayısı*” olarak ifade edilmiştir. Bununla beraber bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemi “*çarpmanın tekrarlı toplama anlamı*”, bir kesir ile bir doğal sayının ve iki kesrin çarpma işlemi kesrin operatör anlamından “*çarpmanın operatör anlamı*” olarak ele alınmıştır. Buna göre örneğin, $5 \times 2/3$ işlemi “5 tane $2/3$ ”; $1/5 \times 3/4$ işlemi “ $3/4$ ’ün $1/5$ ’i” olarak ifade edilmiştir. Bunlar grup kavramıyla da şöyle ifade edilmiştir; ilkinde “her bir grupta bir bütünün $2/3$ ’ü olmak üzere 5 grup” ve ikincisinde “her bir grupta bir bütünün $3/4$ ’ü olmak üzere bu grubun $1/5$ ’i” şeklindedir. Bu çalışmada gerçekleştirilen öğretimin hazırlanmasında ve çalışmadan elde edilen verilerin değerlendirilmesinde ilgili literatürden özetlenerek oluşturulan şu tablodaki kesirlerle çarpmaya ilişkin önemli noktalar dikkate alınmıştır (Tablo 2.6):

Tablo 2.6.

Kesirlerle Çarpma İşlemine İlişkin Önemli Noktalar

Anahtar kavramlar	Açıklaması
Çarpmanın tanımı	$A \times B$ veya $A \cdot B$ işleminde A, grup sayısı; B, her bir gruptaki nesne sayısı (grubun büyüklüğü) ve $A \times B$, A gruptaki toplam nesne sayısıdır ki bu sonuca A ile B’nin çarpımı denir (Beckmann, 2005, s. 219). Grup sayısı $\times$ Her bir gruptaki nesne sayısı = Toplam nesne sayısı Nesne ve grup kavramları önemlidir. Örneğin, 3 poşet ve her bir poşette 4 patates var. Yani 4’ün 3 grubu (eş-grup); 3×4. Kesirlerle çarpma işlemlerinde ilk sayı doğal sayı, ikinci sayı kesirli sayı olduğunda mesela $3 \times 1/4$ için 3 tane $1/4$ anlamını verir. Ancak ilk sayı kesirli sayı olduğunda veya her ikisi de kesirli sayı olduğunda mesela $2/3 \times 4/5$ için $4/5$’in $2/3$’ü olarak ifade edilir (Siebert & Gaskin, 2006).
Çarpmanın tekrarlı toplama anlamı	Çarpma işleminin anlamlarından birisidir. a tane b’nin toplamı $a \times b$ olarak ifade edilebilir. $b + b + b + \dots + b = a \times b$ Aynı sayıyı tekrar tekrar topladığında, çarpma işlemi bu tekrarlı toplama ile aynıdır (Burns, 2003). Örneğin, $2 \times 3/5$ işlemini “$3/5$’in 2 grubu” veya “2 tane $3/5$” olarak ifade etme ve $3/5 + 3/5$ olarak yazma.
Çarpmanın operatör anlamı	Çarpma işlemi tekrarlı toplamının yanısıra “-(n)ın” ifadesi kullanılarak da açıklanabilir. Örneğin, $3/4 \times 3$ işlemini $3/4$ tane 3 şeklinde ifade etmek uygun olmayabilir bu yüzden 3’ün $3/4$’ü olarak ifade etmek daha uygun olabilir. Örneğin, $1/3 \times 1/2$ işlemi için çizilen bir model (Olanoff, 2011, s. 154):



Burada çarpmanın operatör anlamı kullanılarak bu model çizilmiştir ve kesirsel bir alanın kesrini alma şeklinde gerçekleştirilmiştir.

Pay ile pay,
payda ile payda
çarpma

İki kesrin çarpımı bir kesrin diğer kesir kadarını bulmaktır. Burada kısaca “pay ile pay, payda ile payda çarpılır” denilir. Bu algoritmanın neden işe yaradığı algoritmik olarak şöyle açıklanabilir (“Ders Planı”, t.y.):

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} &= a \times \left(\frac{1}{b}\right) \times c \times \left(\frac{1}{d}\right) \quad \left(\frac{a}{b} \text{ ve } \frac{c}{d} \text{ 'nin tanımı}\right) \\ &= a \times c \times \left(\frac{1}{b}\right) \times \left(\frac{1}{d}\right) \quad (\text{Değişme özelliği}) \\ &= a \times c \times \left(\frac{1}{b \times d}\right) \quad (\text{ii}) \\ &= \frac{a \times c}{b \times d} \quad (\text{Kesrin tanımı})\end{aligned}$$

(i) $\frac{a}{a} = 1$ Neden?

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \quad (\text{Kesrin tanımı, } \frac{1}{b}, b \text{ 'nin çarpmaya göre tersi})$$

b = a alınırsa;

$$\frac{a}{a} = a \times \frac{1}{a} = 1 \quad \left(\frac{1}{a}, a \text{ 'nin çarpmaya göre tersi}\right)$$

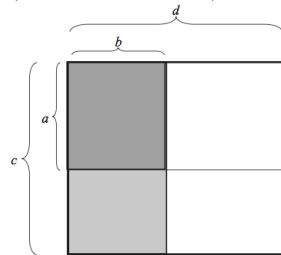
(ii) $\frac{1}{b \times d} = \frac{1}{b} \times \frac{1}{d}$ Neden? ($d \neq 0, b \neq 0$)

$\frac{1}{b} \times \frac{1}{d}$ işlemini $b \times d$ işleminin çarpmaya göre tersi olduğunu görmek için $b \times d$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned}(b \times d) \times \left(\frac{1}{b} \times \frac{1}{d}\right) &= b \times \frac{1}{b} \times d \times \frac{1}{d} \quad (\text{Değişme özelliği}) \\ &= 1 \times 1 \quad (\text{Birim eleman özelliği (i)}) \\ &= 1 \quad (\text{Çarpmaya göre tersi olduğunu gösterir})\end{aligned}$$

Dolayısıyla $\frac{1}{b} \times \frac{1}{d} = \frac{1}{b \times d}$ yazılır.

Bu algoritmanın neden işe yaradığı dikdörtgensel alan modeliyle şöyle açıklanabilir (Izsák, 2008, s.108):



	$\frac{b}{d} \cdot \frac{a}{c} = \frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{a \times b}{c \times d}$
Çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliği	Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğinden dolayı kesirlerle çarpma işleminin sonucunun değişmediğini ancak modellerin değişeceğini ifade etme. Örneğin, $\frac{3}{5} \times 2$ işlemini her bir bütünün $\frac{3}{5}$'i yani $\frac{3}{5} \times (1 + 1)$ olarak ifade etme ve buna göre model çizme, problem kurma veya açıklama yapma. Örneğin, $\frac{2}{3} \times 4$ işleminde 4'ü bir bütün olarak ele alıp onun $\frac{2}{3}$'ünü alma ile 4'ü 4 ayrı bütün olarak ele alıp her bir bütünün $\frac{2}{3}$'ünü almanın aynı sonuca ulaştıracağını ama modelin değişeceğini ifade etme. Bunu da $\frac{2}{3} \times 4 = \frac{2}{3} \times (1 + 1 + 1 + 1)$ ile açıklama. Birden fazla bütün varsa bunlar modelde birleşik olarak veya ayrı ayrı olarak gösterilebilir. Dağılma özelliğinden yararlanılarak açıklanabilir.
Çarpmada değişme özelliği	Çarpma işleminde değişme özelliğinden dolayı kesirlerle çarpma işleminin sonucun değişmediğini ancak işlemin anlamının ve modelinin değişeceğini ifade etme. Örneğin, $6 \times \frac{2}{3}$ ve $\frac{2}{3} \times 6$ işlemleri bu özellikten dolayı aynıdır ancak anlamları ve modelleri farklıdır.
Yeni bütün	İki bütün söz konusu olamayacağı için ikinci bütün olarak alınana <i>yeni bütün</i> denilmektedir. Örneğin, $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$ işleminde $\frac{3}{5}$ için referans alınan bütün 1 bütün iken $\frac{1}{2}$ için referans alınan bütün $\frac{3}{5}$'tir ve bu yeni bütündür. Burada işlemin sonucunun asıl (orijinal) bütüne yani 1 bütüne göre ifade edilmesi gerektiğinin göz ardı edilmemesi çok önemlidir.
Dikdörtgensel alan anlamı	Çarpma işlemi alan ile gösterilebilir. Alan modeliyle gösterimde dikey ve yatay parçalamanın algoritmayı oluşturduğu ve parçanın parçası kavramı açıklanmalıdır. Parçanın parçasıyla bütün ilişkilendirilmelidir. Örneğin, $\frac{2}{7} \times \frac{3}{4}$ işlemi için önce orijinal dikdörtgenin $\frac{3}{4}$'ü alınıyor sonra $\frac{3}{4}$'lük parçasının $\frac{2}{7}$'si alınıyor. Yani dikdörtgenin $\frac{3}{4}$'ü yeni bir bütün oluyor. Dikdörtgenin $\frac{3}{4}$'ünün $\frac{2}{7}$'si bulunduğu orijinal dikdörtgenin parçası olan kesrin ne olduğunun belirlenmesi gerekir. Yani orijinal bütüne geri dönmek zorundadır. Kesirlerle çalışırken parçanın parçası mı yoksa bütünün parçası mı olduğuna çok dikkat gösterilmelidir. Dikdörtgenin içindeki küçük karelerin sayısının toplamı satır ve sütun sayılarının çarpımı ile elde edilebilir. Aynı şekilde, dikdörtgenin alanı uzunluğunun ve genişliğinin çarpımı ile elde edilebilir. (Watanabe, 2003). Örneğin, $6 \times \frac{1}{2}$ işlemi şu şekilde gösterilebilir (Burns, 2003, s.3):
Referans alınan bütün	Hem bölme için hem çarpma için bütünün doğru yorumlanmasıdır. Yeni bütün, orijinal bütün kavramlarını anlamayı gerektirir. Örneğin, $\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}$ işlemi yani $\frac{2}{3}$'ün $\frac{1}{5}$'i için $\frac{2}{3}$ ve $\frac{2}{15}$ için referans alınan bütün orijinal bütün yani 1 iken $\frac{1}{5}$ için referans alınan bütün yeni bütün yani bir bütünün $\frac{2}{3}$'üdür.
Ortak kesişim	İki kesrin çarpımını ortak kesişimle gösterme. Önce ilk kesri gösterip tarama, sonra ikinci kesri gösterip tarama ve taran kısımların kesiştiği kısma işaret etme. Kesirlerle çarpma işlemi dikdörtgensel alan modeli ile gösterilirken sadece taralı kısımların kesiştiği bölge olarak tanımlanması yeterli değildir. Burada bütün ve yeni bütüne vurgu yaparak bütünün parçası mı yoksa parçanın parçasının mı alındığı ifade edilmelidir.

Bu çalışmada elde edilen veriler bu tablodaki önemli noktalar ışığında analiz edilmiştir ve öğretmen adaylarının kesirlerle çarpmaya ilişkin kavramsal anlamalarının gelişimi ortaya koyulmuştur.

2.3.2. Kesirlerle Bölmenin Anlamı

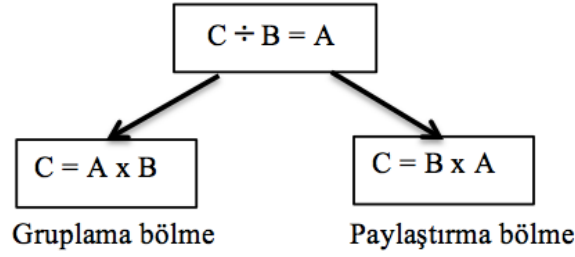
Bölme, K-12 öğretim programı boyunca her düzeyinde belirgin bir şekilde görülen matematikte merkez bir kavramdır. Bölme öğrenirken, öğrenciler rasyonel ve irrasyonel

sayıları, basamak değerini, dört işlem arasındaki ilişkileri ve matematiği gerçek hayatla ilişkilendirmenin gücü ve sınırlarını öğrenebiliyorlar. Öğrenciler bölmeyi öğrenirken sıklıkla güçlük yaşadıkları için öğretmenler bunu iyi anlamalıdır (Ball, 1990a). Bölme işlemi dört işlemin en karmaşık olanıdır. Bununla beraber kesirler de ilköğretim okul matematiğinde en karmaşık sayılardır. Kesirlerle bölme en karmaşık sayılarla en karmaşık işlemdir ve aritmetiğin zirvesindeki bir konu olarak göz önüne alınabilir (Ma, 1999, s. 55).

Doğal sayılarla bölmenin iki anlamı vardır. İlk anlamı bir sayı diğerinden kaç kere çıkarılabilir, ikincisi bir şeyi eş gruplara ayırmadır. Matematik eğitimcileri ilk anlamı ölçme veya grupta bölme ve ikinci anlamı paylaşırma veya parçalama bölme olarak tanımlarlar. Bölmenin bu iki anlamı şöyle örneklendirilebilir (Siebert, 2002):

- Tolga'nın 8 şekerı vardır. Her bir arkadaşına 2 şeker vermeyi planlıyorsa bu şekerleri kaç arkadaşına verebilir?
- Tolga'nın 8 şekerı vardır. Bu şekerleri iki arkadaşına eşit olarak vermek istiyorsa her bir arkadaşına kaç şeker alır?

Bu problemlerin her ikisi de $8 \div 2$ işlemi ile çözülebilir. İlk problemde 2 şekerlik gruplar oluşturularak kaç tane grup olduğu belirlenir ve bu ölçme/gruplama bölme işlemidir (measurement/quotitive division). İkinci problemde 8 şeker iki eş gruba ayrılır ve her bir grupta kaç tane şeker olduğu belirlenir ve bu paylaşırma/parçalama bölme işlemidir (sharing/partitive division). Siebert (2002) ikinci problemdeki bölme işlemini “Toplam nesne sayısı $\div$ Grup sayısı = Her bir gruptaki nesne sayısı” şeklinde tanımlamıştır (s. 248). Bölmenin iki anlamı birçok araştırmacı tarafından farklı şekillerde tanımlanmıştır (Ball, 1990a; Fischbein vd., 1985; Gregg ve Gregg, 2007; Lamon, 1999; Siebert, 2002; Simon, 1993). Bölmenin tanımları özetlenerek bu çalışmada şu şekilde ele alınmıştır: Bölme işlemi toplam nesne sayısının (bölünenin) grup sayısı veya her bir gruptaki nesne sayısına (bölen) bölümüdür. $C \div B = A$ işleminde C, toplam nesne sayısı ve B, her bir gruptaki nesne sayısı (grubun büyüklüğü) ise A grup sayısıdır ve bölmenin grupta bölme anlamıdır. Bu işlemde C, toplam nesne sayısı ve B, grup sayısı ise A her bir gruptaki nesne sayısıdır ki bu da bölmenin paylaşırma anlamıdır (Şekil 2.8).



Şekil 2.8. Bölmenin tanımı ve anlamları

Paylaştırma bölme: Belirli sayıda gruplar oluşturmazdır. Toplam nesne sayısı ve grup sayısı bilinmektedir, her bir gruptaki nesne sayısı yani grubun büyüklüğü bulunur. Kısaca “her bir grupta kaç?” olarak ifade edilir.

Gruplama bölme: Belirli büyüklükte gruplar oluşturmazdır. Toplam nesne sayısı ve her bir gruptaki nesne sayısı bilinmektedir, grup sayısı bulunur. Kısaca “kaç grup?” olarak ifade edilir.

Bölmenin bu iki anlamının kesirlerle bölme işlemine uygulanmasında öğretmen adaylarının zorluk yaşadığını ortaya koyan çalışmalar bulunmaktadır (Armstrong ve Bezuk, 1995; Ball, 1990a; Simon, 1993; vs.). Armstrong ve Bezuk (1995)’un çalışmasında öğretmenlerin hiçbiri $3/4 \div 1/8$ işlemine uygun problem yazamamıştır, en çok kurulan problem bir şeyin $3/4$ 'ü 8 kişiye paylaştırılacak şeklinde olmuştur. Kesirlerle bölmede kesirler ve bölme, kesirler ve oran, çarpımsal karşılaştırma olarak bölme, çarpmaya göre tersleri ve ters işlemlerle bağlantı kurmak gereklidir. Bu bağlantılar öğrencilerin öğrenmelerinin kolay anlaşılır olmasına yardımcı olacaktır. Kesirlerle bölme aynı zamanda ortaokul matematiğinin merkezinde olan orantısal düşünmeyi geliştirmeyi sağlar. Öğrenciler ters işlem ve çarpmaya göre tersi gibi kavramlarla uğraşarak cebirsel düşüncelerini geliştirme fırsatına sahiptirler (Flores, 2002).

Ma (1999) Amerikalı ve Çinli ilköğretim öğretmenleriyle yaptığı çalışmada öğretmenlerin kesirlerle bölmenin anlamını anlaması için bir model ortaya koymuştur. Bu modele göre kesirlerle bölmeye ilişkin derin kavramsal anlamının oluşması daha önceki bilgilere dayalıdır. Bu bilgiler bütün kavramını, kesirlerle çarpmanın anlamını, doğal sayılarla bölmenin anlamını, doğal sayılarla çarpmanın anlamını, bölme ile çarpmanın birbirinin tersi olması kavramını, kesir kavramını ve toplamının anlamını içerir. Burada kesirlerle çarpmanın anlamı anahtar parçadır. Öğretmenler bunu kesirlerle bölmenin anlamını destekleyen kavramlar kümelerini bağlayan bir düğüm olarak görmektedirler (s. 77). Kesirlerle bölmeye ilişkin derin anlamaya sahip öğretmenler çarpmaya göre tersi, bölme ve çarpmanın işlemlerinin ters yapısı gibi bölme ve çarpmanın temel kavramlarının ve

kurallarının farkındadır. Öğretmenler öğretirken bu temel düşünceleri tekrar ziyaret eder ve takviye eder. Bu düşünceler aynı zamanda gerekçelendirme yollarına rehberlik eder (Flores, 2002, s. 238).

Ölçme bölme, grupta, bir parçası verilen bütünü bulma ve eksik çarpanlar anlamlarıyla vermek kesirlerle bölmeyi anlamaya yardımcıdır. Ölçme bölme anlamında bir sayı diğerinin içinde kaç tanedir şeklinde yorumlanır. Örneğin, $1/2 \div 1/3$ işlemini öğrenciler somut modellerle veya “ $1/2$ bardak un var ve her bir tepsi kek için $1/3$ bardak una ihtiyaç vardır. Buna göre kaç tepsi kek yapılabilir?” şeklinde ölçme bölme anlamını yansıtan bir problemle biraz yardımla çözebilirler. Paylaştırma bölme anlamında kesirler doğal sayıya bölündüğü zaman çok güzel işe yarar. Örneğin, $1/2 \div 3$ işleminde yarım 3 eş parçaya bölünür ve sonuç orijinal bütünün $1/6$ 'sıdır. Buna ilişkin yarım kekin 3 çocuğa eşit bir şekilde paylaştırıldığı şeklinde bir problem kurulabilir. Kesirlerle bölmeyi bir parçası verilen bütünü bulma olarak yorumlamak örneğin, $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemini bir sayının $1/2$ 'si $1\frac{3}{4}$ 'tür şeklinde ele almaktır. Bu işlem eksik çarpan olarak da yorumlanabilir. Buna göre bu işlem “ $1/2$ hangi sayıyla çarpıldığında $1\frac{3}{4}$ 'ü verir?” şeklinde ifade edilir. Bu iki yorum benzer olsa da aynı değildir. Eksik çarpan doğal sayılarla bölmede de işe yarar ancak bir parçası verilen bütünü bulma işe yaramaz. Örneğin, “2 ile neyi çarparsan 6'yı verir?” (Flores, 2002, s. 239).

Problemdeki sayılar için uygun referans alınan bütünü belirlemek çok önemlidir. Hangi kesir için hangi bütünün referans alındığını belirlemektir. Örneğin, $2/3 \div 3/4 = 8/9$ işleminde $2/3$ 'ün içinde $3/4$ 'ün kaç tane olduğu aranıyorsa cevap olan $8/9$ bir bütünün $8/9$ 'u değil, $3/4$ 'ün $8/9$ 'udur yani $8/9$ için referans alınan bütün $3/4$ 'tür (Bradshaw, Izsák, Templin ve Jacobson, 2014). $a \div b$ için, grupta bölmede a ve b için referans alınan bütün aynıken, paylaştırma bölme için farklıdır. Örneğin, $5/8 \div 2/3$ işlemi için grupta bölmede $5/8$ ve $2/3$ için referans alınan bütün aynı ve 1'dir, paylaştırma bölmede farklıdır, $5/8$ için 1'dir, $2/3$ grup büyüklüğüdür. Sonuç olan $15/16$ için grupta bölmede referans alınan bütün $2/3$ 'tür, paylaştırma bölmede referans alınan bütün 1'dir (Cluff, 2005).

Doğal sayılarla bölmenin anlamı kavramsal olarak kazandırılmazsa kesirlerle bölme ters çevir çarp algoritmasını uygulamaktan öteye geçemez. Çocuklara örneğin $24 \div 3 = 8$ işlemi “24 nesneyi 3 gruba eşit bir şekilde böl, her bir grupta 8 nesne olacaktır” şeklinde öğretilir. Bununla beraber 24 nesneyi grupta 8 + 8 + 8'i gösterir, bu da 3×8 ile

aynıdır. Bu durumda $24 \div 8$ işlemi $24 = 3 \times 8$ anlamına gelir. Bunu öğrenciler şu genel haliyle anlamakta zorluk yaşamazlar: “ $m \div n = k$, $m = n \times k$ ile aynıdır.” Bu şekilde öğretilerek öğrenciler bölmeyi çarpma bakımından ele almış olurlar. Bu bölmenin yorumu “*bölme çarpmanın tersidir*” olarak ifade edilir. Bu matematiksel ilke kesirlerle bölmeye uygulandığında ters çevir çarp algoritması gerekçelendirilebilir. Bu işlemsel gerekçelendirme öğrencilerin matematiksel bilgilerini artıracak güçlü bir araç olarak görülebilir (Wu, 1999).

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \times \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{d}{c} \times \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{d}{c} \times \frac{a}{b}$$

Kesirlerle bölme işlemlerinin ülkemizde ortaokul matematik dersi öğretim programı (MEB, 2013) incelendiğinde 6. sınıf sayılar ve işlemler öğrenme alanında kesirlerle işlemler alt öğrenme alanında üç kazanım olarak verildiği görülmektedir (Şekil 2.9). Bu kazanımlar verilmeden önce doğal sayılarla ve tam sayılarla çarpma işlemleri, kesirlerle toplama ve çıkarma işlemleri ve kesirlerle çarpma işlemleri verilmektedir. Kesirlerle bölmeye ilişkin verilen kazanımlarda kesirlerle bölmenin anlamı vurgulanmaktadır ve gerçek yaşam durumları ile model çizerek açıklamaya yer verilmektedir.

6.1.4.5. Bir doğal sayıyı bir birim kesre ve bir birim kesri bir doğal sayıya böler, bu işlemi anlamlandırır.

• Örneğin, $6 \div \frac{1}{2}$ ifadesinin 6'nın içinde kaç tane $\frac{1}{2}$ olduğu; $\frac{1}{2} \div 2$ ifadesinin de $\frac{1}{2}$ 'yi 2'ye bölmek (yani $\frac{1}{2}$ 'nin yarısı) olduğu modellerle fark ettirilir.

6.1.4.6. Bir doğal sayıyı bir kesre ve bir kesri bir doğal sayıya böler, bu işlemi anlamlandırır.

• Örneğin $3 \div \frac{3}{4}$ ifadesinin 3'ün içinde kaç tane $\frac{3}{4}$ olduğu; $\frac{3}{4} \div 3$ ifadesinin de $\frac{3}{4}$ 'ü 3'e bölmek olduğu modellerle fark ettirilir. Kesirlerde bölme işlemi anlamlandırılırken basit işlemlere yer verilir.

• Bir doğal sayı 1'den büyük bir kesirle bölündüğünde sonucun bu sayıdan küçük, 1'den küçük bir kesre bölündüğünde ise büyük olduğunu anlamaya yönelik çalışmalarına yer verilir.

6.1.4.7. İki kesrin bölme işlemini yapar ve anlamlandırır.

• Bölme işlemi anlamlandırılırken büyük kesrin küçük kesre bölündüğü ve sonucun tam sayı çıktığı basit işlemler üzerinde durulur. Örneğin, $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ ifadesinin, yarımın içinde kaç tane çeyrek olduğu anlamına geldiği modellerle ele alınır.

Şekil 2.9. Kesirlerle bölme işlemine ilişkin kazanımlar. Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2013). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı*. <http://ttkb.meb.gov.tr/program2.aspx> sayfasından erişilmiştir.

Bu çalışmada bu kazanımlar gözönüne alınarak öğretmen adaylarına kesirlerle bölmeye ilişkin kavramsal anlama kazandırılmaya çalışılmıştır. Bunun için hazırlanan öğretim

sürecinde öğretmen adayları bölmenin tanımı ve bölmenin anlamları ele alınarak kesirlerle bölme işlemine ilişkin model çizme, problem kurma, verilen model veya problem için matematiksel ifade yazma, verilen durumu gerekçelendirme ve açıklama deneyimleri yaşamışlardır. Bu öğretim boyunca bölme işlemindeki bölünen “toplam nesne sayısı”, bölen “grup sayısı” veya “her bir gruptaki nesne sayısı” ve işlemin sonucu “grup sayısı” veya “her bir gruptaki nesne sayısı” olarak ifade edilmiştir. Burada bölünenin “grup sayısı” olduğu ve bilindiği durumda bölme işlemi “*bölmenin paylaştırma anlamı*”, bölenin “her bir gruptaki nesne sayısı” olduğu ve bilindiği durumda bölme işlemi “*bölmenin gruptama anlamı*” olarak ele alınmıştır. Buna göre örneğin, $4 \div 1/3$ işleminin paylaştırma anlamı için işlemin sonucu “her bir gruptaki nesne sayısı” ve gruptama anlamı için “grup sayısı” olarak ifade edilmiştir. Burada bu işlem çarpmanın tersi şeklinde ifade edilerek şöyle ele alınmıştır: $4 \div 1/3 = A$ işlemi $4 = A \times 1/3$ (bölmenin gruptama anlamı) veya $4 = 1/3 \times A$ (bölmenin paylaştırma anlamı). Bu çalışmada gerçekleştirilen öğretimin hazırlanmasında ve çalışmadan elde edilen verilerin değerlendirilmesinde Tablo 2.7’deki kesirlerle bölmeye ilişkin önemli noktalar dikkate alınmıştır. Bu tablo ilgili literatürden özetlenerek oluşturulmuştur.

Tablo 2.7.

Kesirlerle Bölme İşlemine İlişkin Önemli Noktalar

Anahtar kavramlar	Açıklaması
Paylaştırma bölme anlamı	$C \div B = A$ işlemi $C = A \times B$ veya $C = B \times A$ olarak iki şekilde ifade edilebilir. Burada her bir gruptaki nesne sayısının (A) bulunduğu ikinci ifade $C = B \times A$, bölmenin paylaştırma anlamını verir. A gruptaki toplam nesne sayısı (C) ve grup sayısı (B) bilinmektedir. “Her bir grupta kaç nesne var” sorusuna cevap aranır. Bölme işlemindeki bölünen ve bölen için referans alınan bütünler farklıdır. $12 \div 3 = 4$ işlemi için 12, 3 gruba eşit bir şekilde paylaştırılıyor ve her bir grupta 4 olur (Roche & Clarke, 2009).
Gruplama bölme anlamı	$C \div B = A$ işlemi $C = A \times B$ veya $C = B \times A$ olarak iki şekilde ifade edilebilir. Burada grup sayısının (A) bulunduğu ilk ifade $C = A \times B$, bölmenin gruptama anlamını verir. A gruptaki toplam nesne sayısı (C) ve her bir gruptaki nesne sayısı (B) bilinmektedir. “Kaç grup” sorusuna cevap aranır. Bölme işlemindeki bölünen ve bölen için referans alınan bütünler aynıdır. Örneğin, $12 \div 3 = 4$ işlemi için 12, 3’lerin gruplarına bölünüyor ve 4, 3’lerin gruplarının sayısıdır (Roche & Clarke, 2009).
Tekrarlı çıkarma	Her bir grupta kaç tane olacağını bildiğiniz için gruptama bölmede uygulanabilir. Bölmenin gruptama anlamını açıklamaktadır. Gruptama bölme büyük bir niceliğin içinde verilen niceliğin kaç tane olduğunu belirlemedir. Bölüm tam sayı ise tekrarlı çıkarma olarak görülebilir (Fischbein vd., 1985). Çarpma işleminde tekrarlı toplama anlamından yola çıkarak burada da tekrarlı çıkarma yapılarak bölme işlemi tanımlanabiliyor. Örneğin, $18 \div 3$ işleminin cevabı 18’den 3’ün kaç kere çıkarılabileceğini görerek belirlenebilir. Örneğin, $2 \div 1/4$ işlemini $2-1/4-1/4-1/4-1/4-1/4-1/4-1/4-1/4$ olarak ifade etme.
Referans alınan bütün	Hem bölme için hem çarpma için bütünün doğru yorumlanmasıdır. Yeni bütün, orijinal bütün kavramlarını anlamayı gerektirir. $9 \div 4$ için 9 ve 4 için referans alınan bütün orijinal бүтүндүр yani 1’dir ama 4’ün gruplarına bakıldığında sonuç olan $2\frac{1}{4}$ için referans

alınan bütün yeni bütündür yani 4 olur.

Bölme için uygun anlamı bilmek bölme görevini tamamlamak için her zaman yeterli değildir, aynı zamanda hangi sayı için hangi bütünün referans alındığını bilmek gerekir (Izsák, Jacobson & Lobato, 2011). $a \div b$ için, gruplama bölme a ve b için referans alınan bütün aynıken, paylaştırma bölme için farklıdır. $5/8 \div 2/3$ işlemi için gruplama bölme $5/8$ ve $2/3$ için referans alınan bütün aynı ve 1'dir, paylaştırma bölme farklıdır, $5/8$ için 1'dir, $2/3$ grup büyüklüğüdür. Sonuç olan $15/16$ için gruplama bölme referans alınan bütün $2/3$ 'tür, paylaştırma bölme referans alınan bütün 1'dir (Cluff, 2005).

Yeni bütün

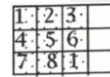
İki bütün söz konusu olamayacağı için ikinci bütün olarak alınana *yeni bütün* denilmektedir. Örneğin, $2/3 \div 2/5$ işleminde $2/3$ 'ün içinde $2/5$ aranırken $2/3$ ve $2/5$ için referans alınan bütün 1 bütündür ancak sonuç olan $5/3$ için referans alınan bütün $2/5$ 'tir. Burada en çok yapılan şey $2/5$ 'ten 1 tane olduğunu görüp 1 olarak cevap verilmesidir. Kalan parçalar dikkate alınmamaktadır, bu kalan parçaların da $2/5$ 'e yani yeni bütüne göre açıklanması gerekmektedir. Örneğin, $3/4 \div 2/3$ işlemi "1'in $3/4$ 'ünün içinde 1'in $2/3$ 'ü kaç tanedir?" anlamına gelir. Bir dikdörtgen çizilir ve bu bir bütünü ifade eder.



=1 Bu bütün yatay olarak 3 ve dikey olarak 4 eş parçaya bölünerek birim değiştirilir.



Burada 1'in $2/3$ 'üne 8 küçük dikdörtgen karşılık gelmektedir. 1'in $3/4$ 'ü bu dikdörtgende taranarak gösterilir, bu taranan kısımda bu 8 küçük dikdörtgenden kaç tane olduğu hesaplanır ve $1 \frac{1}{8}$ tanedir.



Burada $3/4$ ve $2/3$ aynı bütüne göre belirlenirken, bölen yani $2/3$, kalan yorumlanırken yeni bütün olmuştur (Lamon, 1999).

Ters çevir çarp

Bölmeyi çarpmanın tersi olarak anlamayı gerektirir. İkinci kesir ters çevrilir ve çarpılır.

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ Örneğin, $6 \div 2$ işlemi $6 \times 1/2$ işlemi ile aynı sonucu verir. Bunu tam sayılı kesirlerde kullanmak için bileşik kesre çevrilmeli, paylar ve paydalar çarpılmalıdır.

Örneğin, $1 \frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemi $7/4 \times 2/1$ olur (Ball, 1990b).

Ters çevir çarp algoritmasını açıklamak için birçok yol vardır:

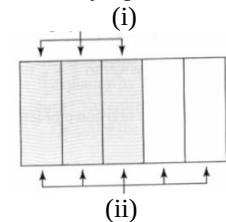
- Ortak payda algoritması

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \div \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bd} \times \frac{bc}{bc} = \frac{ad \div bc}{bd \div bd} = \frac{ad \div bc}{1} = ad \div bc = \frac{ad}{bc}$$

- Paylaştırma bölme yorumu

Beckmann (2005) bu durumu bir örnekle açıklamıştır: $\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ işlemi için "Bir duvarın $\frac{3}{5}$

'ini boyamak için bir boya kutusunun $\frac{1}{2}$ 'sini kullandın. Bütün duvarı boyamak için kaç kutu boya gerekecektir?" sözel problemi olsun.



Şekle bakacak olursak bir duvarı 5 eşit parçaya böleriz, bunların 3'ünü $1/2$ kutu boya ile

boyadın. 3 parçasını boyamak için $\frac{1}{2}$ kutu boya kullandıysan her bir parçası için $\frac{1}{2} \div 3$

veya $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ kutu boya gereklidir (i). Tamamını boyamak için gereken boyayı bulmak için bir parçası için gereken boya miktarını 5 ile çarparsın (ii). Bu $\frac{1}{2}$ 'yi $\frac{5}{3}$ ile çarpmak ile aynıdır.

Duvarın $\frac{3}{5}$ 'ini boyamak için boyanın $\frac{1}{2}$ 'si kullanılır.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \div 3 & \text{veya} & \times \frac{1}{3} \end{array}$$

Duvarın $\frac{1}{5}$ 'ini boyamak için boyanın $\frac{1}{6}$ 'sı kullanılır.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \times 5 & & \times 5 \end{array}$$

Duvarın bütününü boyamak için boyanın $\frac{5}{6}$ 'sı kullanılır.

Tek bir adımla çözülecek olursa:

Duvarın $\frac{3}{5}$ 'ini boyamak için boyanın $\frac{1}{2}$ 'si kullanılır.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \times \frac{5}{3} & & \times \frac{5}{3} \end{array}$$

Duvarın bütününü boyamak için boyanın $\frac{5}{6}$ 'sı kullanılır.

- *Gruplama bölme yorumu*

Armstrong ve Bezuk (1995) bu algoritmayı basit bir şekilde şöyle açıklamıştır:

$$1 \div \frac{1}{2} = \frac{2}{1}; 1 \div \frac{1}{3} = \frac{3}{1}; 1 \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2}; 1 \div \frac{3}{4} = \frac{4}{3}; 1 \div \frac{4}{5} = \frac{5}{4}$$

Burada 1'in içinde kaç tane $\frac{A}{B}$ olduğu aranmaktadır ki görüldüğü gibi cevap her zaman

$\frac{B}{A}$ olmaktadır. Daha sonraki örneklerde herkesin 1'e bölünen sayının çarpmaya göre tersinin cevabı verdiğini ve bunun 1'in içinde kaç tane olduğunu söylediğini farketmeleri beklenir.

- *Paydayı 1 yapma*

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

- *Çarpmanın tersi*

Bölme işlemi çarpma işleminin tersi olarak sunulur (Tirosh, 2000):

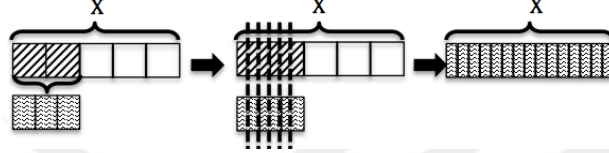
$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = x \Leftrightarrow x \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}; \left(x \cdot \frac{c}{d} \right) \cdot \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c};$$

$$x \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c} \right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}; x \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}; x = \frac{ad}{bc};$$

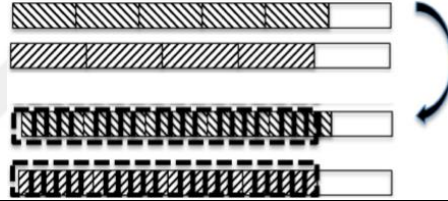
Dolayısıyla

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Paylaştırma anlamında ortak pay Bölmenin “paylaştırma” anlamına ilişkin çizilen modelde ortak pay kullanılarak parçalama yapıldığı görülür. Örneğin, $3 \div \frac{2}{5}$ işleminde “Neyin $\frac{2}{5}$ ’i 3’tür?” diye bakılır ve 3 ve $\frac{2}{5}$ için bütünler farklı çizilir. Burada 3 parçaya 2 parça karşılık geldiğinden 3 parçanın her birini 2 parçaya, 2 parçanın her birini 3 parçaya bölme.



Gruplama anlamında ortak payda Bölmenin “gruplama” anlamına ilişkin çizilen modelde ortak payda kullanılarak parçalama yapıldığı görülür. $\frac{5}{6} \div \frac{4}{5}$ işleminde “ $\frac{5}{6}$ ’nın içinde kaç tane $\frac{4}{5}$ var?” diye bakılır ve $\frac{5}{6}$ ve $\frac{4}{5}$ için bütünler aynı çizilir. Bunların her ikisi de 1 bütündür ve ilkinde 6, ikincisinde 5 eş parçaya bölünmüştür. Burada 6 parçaya 5 parça karşılık geldiğinden 6 parçanın her birini 5 parçaya, 5 parçanın her birini 6 parçaya bölme.



Bölme çarpmanın tersi Kesirlerle bölmeyi anlamak çarpmanın tersi olduğu anlamaktır (Wu, 1999). Örneğin $24 \div 3$ işlemi $8 \times 3 = 24$ ile aynıdır çünkü bölme işlemi 24’ün içinde kaç tane 3 var olarak yorumlanabilir (gruplama bölme modeli). Çarpma işlemi 3’ün 8 grubu olarak yorumlanır. 8 grup vardır, her bir grupta 3 nesne vardır ve çarpımları toplam nesneyi verir. Bölmenin çarpmanın tersi olduğu kuralı matematiğin genel kuralıdır ve “ $m \div n = k$ ile $m = n \times k$ ($k, m, n \in \mathbb{Z}$)” şeklinde gösterilir (Wu, 1999). Örneğin, “Yedinci sınıfta yemek tercihleri araştırılmıştır ve 48 öğrenci pizza tercih ediyor. Bu salata tercih edenlerin bir buçuk

katıdır. Kaç kişi salata tercih ediyor?” Burada $48 \div 1\frac{1}{2}$ bölme işlemi için problem

kurarken $48 = 1\frac{1}{2} \times X$ işleminden yani çarpma işleminden yararlanmıştır.

2.3.3. Kesirlerle Çarpma ve Bölmede Karşılaşılan Zorluklar

Kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin öğrencilerin zorluklar yaşadıklarını ortaya koyan birçok çalışma bulunmaktadır (Biber vd., 2013; Birgin ve Gürbüz, 2009; Haser ve Ubuz, 2003; Işık ve Kar, 2012b; Kılıç ve Özdaş, 2010; Kocaoğlu ve Yenilmez, 2010; Mack, 1998; Mulligan ve Mitchelmore, 1997; Ochefu, 2013; Soylu ve Soylu, 2005; Toluk, 2002). Mack (1998)’in çalışmasında öğrencilerin $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$ işlemini çözseler de parçanın parçasını almayı içeren başka problemleri çözemedikleri ve çözümlerini çarpma işlemiyle

ilişkilendiremedikleri görülmüştür. Sekiz kurabiyeyi 3 kişiye paylaşırma gibi problemleri çözerken kullanılabilecek matematiksel işlemler sorulduğunda “bölme” diye cevap vermişlerdir. Bu problemlerde çarpmanın kullanılıp kullanılamayacağı sorulduğunda “hayır” demişlerdir. Mack (1998) burada öğrencilerin bir bütünün parçasının parçasını çarpma açısından düşünmediklerini, bunu bölme açısından gördüklerini belirtmiştir. Ochefu (2013)’nın çalışmasında öğrenciler kesirlerle çarpmayı içeren problemleri doğru çözmüşlerdir (%70) ancak bu doğru cevap veren öğrencilerin çoğu (%80) neden bu cevap olduğunu açıklayamamıştır. Öğrenciler parçalama kavramını kullanarak kesirlerle çarpma etkinliklerini gerçekleştirdikten sonra yaşadıkları zorlukları aşmışlardır, iki veya daha fazla kesrin çarpımının sonucunun neden o olduğunu açıklayabilmişlerdir ve iki veya daha fazla kesrin çarpımının sonucunun neden işlemdeki kesirlerden küçük olduğunu gerekçelendirmişlerdir.

Tirosh (2000) literatürde öğrencilerin kesirlerle bölmeye ilişkin yaptıkları hataları 3 kategoriye ayırmıştır:

- *Algoritmaya dayalı hatalar:* Bu tür hatalar çoğunlukla algoritmanın ezbere hatırlanmasından kaynaklanır. En çok yapılan hata bölen yerine bölüneni ters çevirme veya her ikisini de ters çevirmedir.
- *Sezgisel hatalar:* Bu tür hatalar doğal sayılarla işlemlerin özelliklerini kesirlere aşırı genellemeden ve bölmeyi parçalama anlamıyla kullanmadan kaynaklanır. Bu anlam bölmeye ilişkin 3 kısıtlama getirir (Fischbein vd., 1985). Bununla beraber ölçme bölme anlamı da 2 kısıtlama getirir (Fischbein vd., 1985).
- *Formel bilgiye dayalı hatalar:* Bu hatalar kesir kavramına ilişkin sınırlı kavramsallaştırmalar ve işlemlerin özelliklerine ilişkin yetersiz bilgiden dolayı yanlış performanslardan kaynaklanır. Örneğin, $1/4 \div 1/2$ işlemini bir öğrenci bölmenin değişme özelliği olduğunu düşünerek $1/4 \div 1/2 = 1/2 \div 1/4 = 2$ şeklinde ifade etmiş olabilir. Bunun yanısıra bölen yerine bölüneni ters çevirerek algoritmik hata veya “bölünen bölenden her zaman büyük olur” sezgisel inancıyla sezgisel hata yaptığı da söylenebilir.

Çarpma işlemi tekrarlı toplama ile ilişkilendirilir yani aynı büyüklükteki kümelerin sayısı biraraya getirilir. Buna göre 3×5 işlemi $5 + 5 + 5$ veya $3 + 3 + 3 + 3 + 3$ anlamına gelir. Çarpmanın tekrarlı toplama anlamı çarpmayı yer değiştirme olarak görmez. Çarpanlardan birisi olan eşit kümelerin sayısı çarpan ve diğeri olan bir kümenin büyüklüğü çarpılan olarak alınır. Burada çarpılan herhangi bir pozitif sayı olabilir ancak çarpan doğal sayı

olmalıdır. Bu da sezgisel olarak çarpmanın her zaman büyüttüğü algısını oluşturur (Fischbein vd., 1985). Parçalama bölme paylaştırma bölme olarak da ifade edilebilir. Bir nesne veya nesnelerin kümesi belirli sayıda alt kümelere bölünür. Sezgisel olarak bölmenin bu anlamında bölünen bölenden büyük olmalıdır, bölen doğal sayı olmalıdır ve bölüm bölünenden küçük olmalıdır şeklinde ele alınır. Gruplama bölme ölçme bölme olarak da ifade edilebilir. Verilen bir niceliğin daha büyük bir niceliğin içinde kaç tane olduğu aranır. Bölüm doğal sayı ise tekrarlı çıkarma olarak görülebilir. Bu anlam için sezgisel kısıtlama sadece bölünenin bölenden daha büyük olması gerektiğidir (Fischbein vd., 1985). Fischbein vd. (1985)'nin çarpma ve bölmeye ilişkin ortaya koyduğu sezgisel kısıtlamalar özetlenecek olursa şöyledir (Tablo 2.8):

Tablo 2.8.

Çarpma ve Bölme İşlemlerine İlişkin Sezgisel Kısıtlamalar

Çarpma ve bölme işlemi	Sezgisel kısıtlamalar
Çarpma	1) Çarpan doğal sayı olmalıdır. 2) Çarpma büyütür.
Paylaştırma bölme	1) Bölen doğal sayı olmalıdır. 2) Bölen bölünenden küçük olmalıdır. 3) Bölme küçültür.
Gruplama bölme	1) Bölen bölünenden küçük olmalıdır.

Graeber vd. (1989) Fischbein vd. (1985)'nin öğrenciler için ortaya koyduğu bu sezgisel kısıtlamaların ilköğretim öğretmen adaylarında da görülüp görülmediğini incelemiştir. Bu çalışmada 129 öğretmen adayına Fischbein vd. (1985)'nin kullandığı 26 çarpma ve bölme problemlerini uygulamışlardır ve 33 öğretmen adayıyla görüşmeler yapmışlardır. Bu görüşmelerde bu problemlerden yapamadıklarına benzer problemler verilerek problemin ifade ettiği işlemi yazmalarını istemişlerdir. Bu öğretmen adaylarının hepsinin en çok hata yapılan 8 problemin en az birini yanlış cevapladıkları görülmüştür. Bu çalışmada problemlere verilen cevaplardan ve yapılan görüşmelerden öğretmen adaylarının 10-15 yaşlarındaki öğrencilerin sahip olduğu kavram yanlışlarından en az birine sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bölen bölünenden küçük olmalıdır yanlışına düşmüşlerdir. Bu tür problemlerde 33 kişiden 22'si bölenle bölünenin yerini değiştirmişlerdir.

Harel vd. (1994)'nin çalışmasında Fischbein vd. (1985)'nin çalışmasındaki sezgisel kısıtlamaları göz önüne alarak çarpma ve bölme işlemindeki sayıların türünün problemi öğretmen ve öğretmen adayları için zorlaştırıp zorlaştırmadığını incelemişlerdir ve paylaştırma bölme probleminde bölenin doğal sayı olması ve bölünenin küçük veya büyük olmasının başarıyı etkilediğine ulaşmışlardır. Buna göre bölenin bölünenden küçük ve doğal sayı olduğu zaman problem çözme başarısı yüksek iken bölenin bölünenden büyük

olduğunda probleme ilişkin verilen doğru cevapların azaldığı ve bölenin bölünenden küçük ve ondalık sayı olduğunda en düşük performans olduğu görülmüştür. Benzer şekilde gruplama bölmede de bölen bölünenden küçük olduğunda daha yüksek performans elde edilmiştir. Bununla beraber çarpma işleminde de çarpanın 1'den küçük veya büyük ondalık sayı olmasına bağlı olarak zorluk yaşandığı sonucuna ulaşılmıştır.

Yapılan çalışmalar göstermiştir ki öğrencilerde görülen bu kısıtlamalar benzer şekilde öğretmen adaylarında ve öğretmenlerde de görülmektedir (Graeber vd., 1989; Harel vd. 1994; Tirosh, 2000). Tirosh (2000)'un çalışmasında öğretmen adaylarının matematik metot dersinden önce kesirlerle bölmenin nasıl yapılacağını bildikleri ancak işlemi anlatamadıkları görülmüştür. Bu çalışmada öğretmen adaylarına kesirlerle bölmeye ilişkin işlemler verilmiştir ve çözmeleri, sonra problemler verilmiştir ve bu problemlerin ifade ettiği işlemi yazmaları ve her iki durumda da öğrencilerin yapabilecekleri ortak hataları yazmaları ve bu hataların nelerden kaynaklanabileceğini yazmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının 5'inin dersten önce sorulan bölme işlemlerine yanlış cevap verdikleri görülmüştür. Tirosh (2000) bu hataların öğrencilerde görülen "bölüm, bölenden küçük olmalıdır" sezgisel kısıtlamasından kaynaklı olduğunu belirtmiştir. Öğrencilerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin yapılan çalışmalar bu zorlukları aşmaları ve anlamalarını geliştirmek için öğrencilerle problem kurma, model çizme gibi etkinliklerin yapılmasını önermektedir. Benzer zorlukları yaşayan öğretmen adaylarına ve öğretmenlere de benzer uygulamaların yapılabileceğini Tzur ve Timmerman (1997) öne sürmüştür. Çalışmalarında 12 öğretmenle öğretim gerçekleştirmişlerdir ve bu öğretim boyunca kesirlerle bölme problemlerini model çizerek çözmelerine yardımcı bir bilgisayar programı kullanarak ters çevir çarp algoritmasına ve kesirlerle bölmeye ilişkin anlamalarını geliştirmeyi amaçlamışlardır. Bu çalışmanın sonucunda öğrencilerin öğrenmelerinde kullanılan aşamaların öğretmenlerin ters çevir çarp algoritmasını anlamlandırmalarına yardımcı olduğuna ulaşılmıştır.

Kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin model çizme veya problem kurma sadece öğrenciler için değil aynı zamanda öğretmenler ve öğretmen adayları için de zordur (Armstrong ve Bezuk, 1995; Azim, 1995; Simon, 1993; Sowder vd., 1998; Tuna vd., 2013). Özellikle kesirlerle bölme işlemine ilişkin oldukça fazla zorluk yaşanmaktadır (Ball, 1990a; Borko vd., 1992; Flores, 2002; Ma, 1999). Bu durum özellikle ters çevir çarp algoritmasını açıklamakta görülmektedir (Alenazi, 2016; Borko vd., 1992; Chen, 2010; Gregg ve Gregg, 2007; Li ve Smith, 2007). Öğretmen ve öğretmen adaylarının kesirlerle

çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin anlamalarını konu alan çalışmalar incelendiğinde karşılaştıkları zorluklar şöyle özetlenebilir:

- Ters çevir çarp algoritmasının neden işe yaradığını açıklamak (Borko vd., 1992; Gregg ve Gregg, 2007)
- Kesirlerle bölme işleminde bölenin bölünenden büyük olduğu durumda grupta, bölenin bölünenden küçük olduğu durumda paylaşma anlamı için model çizememek ve problem kuramamak (Alenazi, 2016; Lo ve Luo, 2012; Ma, 1999)
- Sezgisel kısıtlamalar, hatalar ve kavram yanılgıları (Graeber vd., 1989; Harel vd. 1994; Tirosh, 2000)
- Kesirle bölmeyi, paydadaki doğal sayı ile bölme ve kesirle çarpma ile karıştırma (Armstrong ve Bezuk, 1995; Ball, 1990a; Borko vd., 1992; Işık ve Kar, 2012a; Leung ve Carbone, 2013; Li ve Smith, 2007; Ma, 1999)
- Aşına olunmayan model türlerini kullanarak model çizerken zorlanmak veya çizememek (Lee vd., 2011; Orrill vd., 2008; Tuna vd., 2013)
- Referans alınan bütünü belirlemede zorluk yaşamak veya yanlış bütünü almak (Armstrong ve Bezuk, 1995; Azim, 1995; Izsák, 2008; Lamberg ve Wiest, 2015; Orrill vd., 2010; Sowder vd., 1998)

Gregg ve Gregg (2007) çalışmasında ilköğretim matematik öğretmenliğinde okuyan öğretmen adaylarının ters çevir çarp algoritmasının neden işe yaradığını açıklamakta zorlandıklarını şu problemle açıklamıştır: “Yeni bir makine $\frac{3}{4}$ saatte yerin $\frac{1}{2}$ 'sini parlatmaktadır. Bir saatte yerin kaçta kaçını parlatır?” Bu problemi çözerken öğretmen adaylarının sıklıkla $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ şeklinde yazdığı görülmektedir. Bu işlemin neden işe yaradığı sorulduğunda bunu çoğunlukla şöyle açıklamaktadırlar: “Bu aslında $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$ işlemidir ama ben ikinci kesri ters çevirdim ve çarptım.” Bunun üzerine ters çevirip çarpmanın neden bu işlemin sonucunu verdiğini açıklaması istendiğinde de çoğunlukla “Çünkü bu bölme problemidir.” şeklinde cevaplamaktadırlar.

Birçok öğretmen ve öğretmen adayları iki kesrin çarpma ve bölme işlemlerini doğru yapabildikleri halde birçok araştırma problemde gömülü olan çarpım ve bölme ilişkin muhakemede, bunları açıklamakta zorluk yaşadıklarını öne sürmektedir (Armstrong ve Bezuk, 1995; Ball vd., 2001; Borko vd., 1992; Ma, 1999; Simon, 1993; Sowder vd., 1998). Armstrong & Bezuk (1995) ortaokul öğretmenlerinden $\frac{3}{4}$ 'ün $\frac{1}{3}$ 'ü işlemini verecek bir problem yazmalarını istemiştir. Öğretmenler bu işlemin çarpma işlemi olduğunun farkına

varmışlardır ama bu düşüncelerini açıklamada, işlemin çözümüyle eşleşen bir çizim yapmada ve problem için uygun birim veya bütünü anlamada zor anlar yaşamışlardır.

Ball (1990a)'un çalışmasında öğretmen adaylarında en çok görülen hata $1/2$ ile bölme yerine 2 ile bölmeyi göstermek olmuştur. Örneğin, bir öğretmen adayının $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemine

ilişkin problemi şöyledir: “Bir ve $3/4$ pizzamız kalmış ve bunu iki kişi paylaşmak istiyoruz, nasıl bölünür?” Bu problemi açıklarken her birinin $1/2$ ve $3/4$ 'ün yarısı kadar pizza alacağını ve sonuç olarak her birinin $7/8$ pizza alacağını ifade etmiştir. Ball (1990a) öğretmen adaylarının burada zorluk yaşamasını işlemi bölmeden ziyade kesirler olarak ele almalarıyla ve kesirleri gerçek yaşamla ilişkilendirmekte zorlanmalarıyla açıklamıştır. Bununla beraber bu durumun öğretmen adaylarının günlük dille matematiksel dili karıştırmalarından kaynaklandığını belirtmiştir. Bunu bir öğretmen adayının şu açıklaması ile örneklendirmiştir: “Bir model olarak yemeği düşünmek imkansızdır çünkü bir insanın $1/2$ 'sine bu yemeği paylaşmak zordur.” Bununla beraber “yarıya bölmek (division in half)” ve “yarıma bölmek (division by half)” ifadelerinin karıştırıldığını belirtmiştir. Burada yarıya bölmenin iki eşit parçaya bölmek ($\div 2$) ve yarıya bölmenin $1/2$ grupları oluşturmak ($\div 1/2$) anlamına geldiğini ifade etmiştir.

Işık (2011)'in çalışmasında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin kurdukları problemlerin kavramsal analizi yapılmıştır. Bu analizin sonucunda öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işlemine yönelik problem kurmada, kesirlerle çarpma işlemine yönelik problem kurmaya göre kavramsal düzeyde daha çok güçlükler yaşadıkları görülmüştür. Öğretmen adaylarının yaşadıkları güçlükler şöyledir:

- Bir doğal sayı ile bir kesir sayısının çarpımına yönelik problem kurmada işlemin sonucunu göz ardı ederek sadece işleme odaklanarak parça-bütün ilişkisini aktaramamışlardır.
- Basit kesirlerin çarpımına yönelik kurulan problem kurma sürecinde de başlangıçta alınan bütün veya çokluğa birinci kesri uyguladıktan sonra oluşan yeni kısma ikinci kesrin uygulanmasını gerektiren ifadeyi problem cümlesine aktaramamışlardır.
- Tam sayılı kesre problem içinde anlam yükleyememişlerdir.
- Bölünen ve bölenin kesir sayısı olduğu durumlarda kurdukları problemlerde ölçme anlamını oluşturmada güçlükler yaşamışlardır.

- Kurulan problemlerde bölen kesir sayısına doğal sayı anlamı yükleme eğilimindedirler.
- Bölünen kesir sayısını bölen durumundaki kesrin paydasındaki sayıya bölme eğilimindeki problemler kurmuşlardır ($7/8 \div 1/4$ işleminde $1/4$ yerine 4 ile bölmeye yönelik problem).
- En fazla zorluğu tam sayılı iki kesrin bölümünde yaşamışlardır. Bu süreçte bölen durumundaki tam sayılı kesri bileşik kesre çevirerek, bütünden daha büyük olan bileşik kesre birim anlamı yüklemeye çalışmışlardır.

Armstrong ve Bezuk (1995) öğretmenlerin başlıca güçlüğü düşüncelerini açıklarken meydana çıktığını belirtmiştir. Çizdikleri gösterimle algoritmik çözümü eşleştirirken açıklamada ve problemdeki uygun birim veya bütüne ilişkin kafa karışıklığı yaşamışlardır. Örneğin, $3/4 \div 1/8$ işlemi için uygun bir problem yazmaları istendiğinde hiçbir öğretmen kesirlerle bölme yapısıyla problem yazmamıştır. En çok verilen cevap birşeyin $3/4$ 'ü 8 kişiye paylaştırılacak şeklindedir. Diğer sık karşılaşılan cevap da $3/4 \times 8$ ifadesini açıklayan problemlerdir. Burada bu problemi zorlaştıranın ne olduğu sorulduğunda şunları sıralamışlardır:

- Problemin çarpma veya bölme problemi olduğunu farketmede güçlük.
- Bölmenin farklı anlamları-parçalamalı ve ölçme bölme.
- Kesirleri kullanmanın problemi zorlaştırması.
- Uygun sözel problem yazmaya ilişkin tecrübe eksikliği.

Borko vd. (1992)'nin çalışmasında bir öğretmen adayı $3/4 \div 1/2$ işlemi için ters çevir çarp kuralının neden bu işlemin sonucunu verdiğini açıklayamamıştır ve bu işlemi $3/4$ 'ün içinde $1/2$ aramak yerine $3/4$ 'ü 2'ye bölme şeklinde açıklamıştır. Bu öğretmen adayı bu işlemi anlatırken “ters çevir çarp” algoritmasını kullanarak şöyle ifade etmiştir: “ $3/4 \div 1/2$ işleminde $3/4$ aynen bırakılır ve $1/2$ ters çevirilerek çarpılır.” Tam bu noktada öğrencilerden birisi neden bunun böyle yapıldığını sormuştur ve öğretmen adayı da şekil çizerek açıklamaya çalışmıştır: “Bir duvar düşünelim. Bu duvarı dörde bölelim, $1/4$ 'ü önceden boyanmıştır geriye boyanak kısım duvarın $3/4$ 'ü kalmıştır. Bu dört eş parçayı göstermek için bir dikdörtgen çizilir ve 3 dikey çizgi çizilir ve bir parçası taranır. Ancak bu boyanmayan kısmın sadece yarısını boyayacak kadar boyamız var. Taralı olmayan kısmı her bir dörtte birlik parçalar yarıya dikey olarak bölünür. Kaç tane birime bölündü duvar? 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. $2/8$ 'i zaten boyanmıştı. Geriye kalan kısmın yarısını boyayabileceğimize göre kaç tane sekizde bir var? 1, 2, 3. Oh bekle. Bir şeyleri yanlış

yaptım.” Burada öğretmen adayı tahtada iki dakika bekledikten sonra işin içinden çıkamamış ve daha sonra buna tekrar bakacaklarını söyleyerek “Bunu daha önce öğrenmiştiniz ters çevir çarp algoritmasını hatırlayın.” diyerek konuyu kapatmıştır. Bu durumda öğretmen adayını kesirlerle bölme ve kesirlerle bölmeye ilişkin pedagoji bilgisindeki sınırlılıklar engellemiştir (Borko vd., 1992).

Tuna vd. (2013) öğretmen adaylarına kesirlerle ilgili hayat problemleri vermişlerdir ve bu problemlerin çözümünü model çizerek gerçekleştirmişlerdir ancak büyük bir çoğunluğunun model çizmede zorlandığı ve yanlış yaptığı görülmüştür. Bunun üzerine matematik öğretmeni adaylarının modelleme becerilerini geliştirmeye yönelik üniversitedeki öğretim programında matematiksel modelleme etkinliklerine daha fazla yer verilmesi gerektiğini belirtmişlerdir.

Lee vd. (2011)’nin çalışmasında öğretmenlerin alan modellerine göre sayı doğrusu modelleriyle daha çok zorlandıkları sonucuna ulaşılmıştır. Bununla beraber aynı tür modellerden aşına olmadıklarını yorumlarken zorluk yaşadıkları görülmüştür. Örneğin, $3/4$ ’ün $1/3$ ’ünün gösterildiği iki modelin birinde parçanın parçası, diğerinde ortak kesişim kullanılmıştır ancak öğretmenler ders kitaplarından ortak kesişim şeklinde gösterilen modele daha aşına oldukları için diğer modeli yorumlarken zorlanmışlardır. Buna göre öğretmenlere seminerlerde farklı temsiller ve aynı temsillerin farklı gösterimlerinin verilmesi gerektiği ifade edilmiştir.

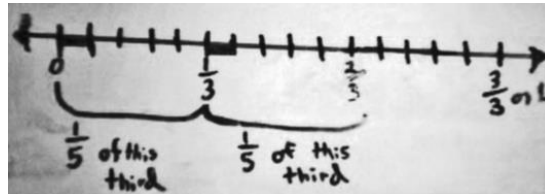
Sowder vd. (1998) yaptıkları çalışmada ortaokul matematik öğretmenlerinin kesirlerle çarpmayı alan modeliyle açıklarken ve kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde referans alınan bütünü ifade ederken zorluk yaşadıklarını belirtmişlerdir. Bu çalışmada 2 yıl boyunca 5 ortaokul matematik öğretmeniyle seminerler gerçekleştirmişlerdir. Bu seminerlerde rasyonel sayılar, orantısal muhakeme ve sayısal düşünmeye odaklanılmıştır. Bu seminerlerden sonra öğretmenlerin konuya ilişkin anlamalarında meydana gelen değişimin ve konuyla rahatlık düzeylerinin öğretimlerini belirgin şekilde etkilediği görülmüştür. Örneğin, bir öğretmen projenin ilk yılında seminerde sunulan birçok düşünceyi kullanamamıştır ancak ikinci yılında bu ilk yılında sunulan düşüncelerin çoğunu anlamıştır ve istekli bir şekilde kullanmıştır. Bir başka öğretmen orantısal muhakemeyi projenin ilk yılında öğretmemiştir ve bunu bu konuda kendisini rahat hissetmemesi ile açıklamıştır ancak ikinci yılında derslerinde orantısal muhakemeye daha çok odaklandığı, başlangıçta anlamadığı problemleri kullandığı görülmüştür.

Li ve Smith (2007)'in çalışmasında öğretmen adayları kesirlerle bölme işlemini yapmada çok iyidirler ama problem kavramsal gereklilikle çok az değiştirildiğinde performansları düşmüştür. Örneğin, $7/9 \div 2/3$ işlemini % 93'ü doğru yaparken, “ $1/3$ 'ün içinde kaç tane $1/2$ var?” denildiğinde % 52'si doğru cevap vermiştir. Buna çoğu “hiç” veya “sıfır” diye cevap vermişlerdir. Öğretmen adaylarının kesirlerle bölmeye ilişkin verilen problemin çözümünde zorlandıkları görülmüştür. Öğretmen adaylarından $2/3 \div 2 = 1/3$, $2/3 \div 1/6 = 4$ işlemlerinin neden böyle olduğunu açıklamaları istendiğinde % 26'sı resimsel temsiller (kesir çubuğu, pasta grafik/dairesel diyagram, vs.) çizmiştir ve kullanmıştır, % 22'si “ters çevir çarp” ile açıklamıştır ve büyük bir çoğunluğu, % 46'sı her ikisini de tam olarak açıklayamamıştır. Hiçbiri neden ters çevirip çarptıklarını açıklamaya çalışmamışlardır. Problemden yer alan $a/b \div c/d = (a \div c)/(b \div d)$ ifadesi için 46'sından sadece 2'si doğru olduğunu ifade etmiştir. Bu çalışmada öğretmen adaylarının ilgili literatürde karşılaşılan şu zorlukları yaşadığı görülmüştür ancak zorluk dereceleri çeşitlidir:

- Kesirlerle bölme işlemini farklı temsillerle açıklama
- Neden ters çevir çarp yapıldığını açıklama
- Kesirlerle bölme ve diğer matematiksel bilgi (kesir kavramı, çıkarma, toplama, kesirlerle çarpma gibi) arasındaki matematiksel ilişkiler
- İlgili kavram yanılgıları (küçük sayı büyük sayıya bölünemez, bölme her zaman sayıyı küçültür gibi)
- Kesirlerle bölmeyi içeren problemleri çözme

Bununla beraber öğretmen adaylarının düşünceleri ve açıklamaları çizili temsillerle desteklendiğinde daha başarılı oldukları görülmüştür.

Izsák (2008)'in çalışmasında bir altıncı sınıf öğretmeni bir öğrenciye referans alınan bütünü açıklamaya ilişkin zorluk yaşamıştır. Bu öğretmen derste $1/5 \times 2/3$ işlemini sayı doğrusu modeli kullanarak açıklamıştır (Şekil 2.10).

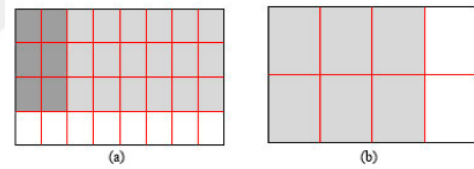


Şekil 2.10. Öğretmenin ders kitabından alarak çizdiği sayı doğrusunda $2/3$ 'ün $1/5$ 'inin çözümü. Izsák, A. (2008). Mathematical knowledge for teaching fraction multiplication. *Cognition and Instruction*, 26(1), 95-143. <http://dx.doi.org/10.1080/07370000701798529>

Öğretmen burada önce bütünün 3 eş parçaya bölündüğünü, sonra $1/3$ 'lük kısımların 5 eş parçaya bölündüğünü ve böylece bütünün 15 eş parçaya bölündüğünü ifade etmiştir.

Öğretmen $1/3$ 'ün $1/5$ 'inin $1/15$ olduğunu, dolayısıyla $2/3$ 'ün $1/5$ 'inin iki katı yani $2/15$ olacağını belirtmiştir. Öğrencilerden birisi $1/5$ 'in $3/15$ 'e eşit olduğunu ifade etmesi üzerine öğretmen bu durumu açıklamakta zorluk yaşamıştır ve işlemdeki her bir kesir için referans alınan bütünlerin farklı olduğunu açık bir şekilde ifade edememiştir. Bununla beraber bu öğrenci bu işlemi $1/3$ 'ün $2/5$ 'i şeklinde ifade edebileceğini belirttiğinde öğretmen bu yaklaşımı farketmekte zorluk yaşamıştır. Bunu farketmek işlemi $2/5 \times 1/3 = 1/5 \times 2/3 = 1/5 \times (1/3 + 1/3) = 1/5 \times 1/3 + 1/5 \times 1/3$ şeklinde ele almayı gerektirir ancak öğretmen yapılan görüşmede dağılma özelliğini gözönüne almadığını belirtmiştir (Izsák, 2008).

İşlemi verip model istendiğinde öğretmenin işlemin sonucunu bulup ona göre modeli bulması istenmeyen bir durumdur çünkü öğretmenin modeli nasıl yorumladığı anlamaya çalışılmaktadır. Orrill vd. (2008)'nin çalışmasında bu durum gözlenmiştir. Burada öğretmenler işlemde ziyade sonuca odaklanmıştır. Aynı sonucu veren çıkarma ve çarpma işlemlerini ifade eden iki sayı doğrusu verilmiştir ve sonuç odaklı oldukları için bu iki modelin de işleme uygun olabileceğini ifade etmişlerdir. Çizimi çözüm sürecinin temsili olarak gören bir öğretmen $2/5 \div 1/7 = 14/5$ işlemini “ters çevir çarp” olarak düşünüp $7 \times 2/5$ yani $2/5$ uzunluğunun 7 kere tekrarlandığı bir modeli aramıştır.



Şekil 2.11. Alan modeliyle bölme örnekleri. Orrill, C. H., Sexton, S., Lee, S. J. & Gerde, C. (2008) Mathematics teachers' abilities to use and make sense of drawn representations. *Proceedings of the 8. International Conference for the Learning Sciences 2*, 140-147.

Burada $3/4 \div 1/8$ işlemi gösteren model istenmiştir ve a) ve b) şıklarını seçerek hataya düşmüşlerdir (Şekil 2.11). Çünkü aşına oldukları çarpma problemlerinin modellerindeki ortak kesişim gibi verilmiştir. Benzer şekilde çarpma işlemi için alan modeline daha çok aşınadırlar ve sayı doğrusu modeliyle göstermeleri istendiğinde çıkarmayı gösteren modeli yanlışlıkla seçtikleri görülmüştür. Daha az aşına oldukları çizili temsillerle daha çok zorlanmışlardır. Bu çalışmanın sonucunda öğretmenlerin modelleri yorumlarken kesirlerle işlemlere ilişkin kavramsal bilgilerini etkinleştirmedikleri ortaya çıkmıştır. Orrill vd. (2008) bunun öğretmenlerin kesirlerle işlemlere ilişkin derin işlemsel bilgilerinden kaynaklanabileceğini belirtmişlerdir. Ayrıca bu çalışmada ondalık sayılarla çarpmaya ilişkin alan modelinde çok az öğretmen akıl yürütürken, kesirlerle çarpmaya ilişkin alan modelinde hepsi başarılı bir şekilde akıl yürütmüştür. Bu da öğretmenlerin aynı modelin farklı halleri arasında geçiş yapmakta zorlandığını göstermektedir. Bu zorlanmanın

nedenlerini Orrill vd. (2008) referans alınan bütüne dikkat etmemeleri, belirli temsillere aşına olmamaları ve aynı anda birden çok kesrin temsil edildiği modele ilişkin esnekliklerinin olmaması olarak öne sürmüştür. Bununla beraber temsilleri çözümün veya çözüm sürecinin gösterimi olarak algılamalarından dolayı aynı temsil için bir halinden diğerine geçişte zorlanmış olabileceklerini belirtmişlerdir. Ayrıca bu hallere ne kadar aşına değillerse o kadar geçişte zorlanmışlardır. Bunların yanısıra referans alınan bütünü belirlemeye ilişkin esnekliğe sahip olmalarından dolayı kesirlerle bölmeye ilişkin verilen modelleri yorumlarken zorlandıkları görülmüştür. Orrill vd. (2008) öğretmenlerin bir probleme ilişkin doğru bir modeli nasıl çizdiklerine odaklanmadan ziyade farklı modelleri oluşturmalarına ve yorumlamalarına odaklanmanın önemli olduğunu vurgulamışlardır.

Alenazi (2016)'nin çalışmasında 11 öğretmen adayına iki tane kesirlere bölme işlemi ve 4 tane kesirlerle bölme işlemini ifade eden 4 sözel problem verilmiştir. Öğretmen adaylarının hepsi bu iki işlemi ($1/2 \div 1/3$, $1/3 \div 1/2$) doğru bir şekilde çözmüşlerdir ancak kesirlerle bölmenin anlamlarını gösterememişlerdir. Ters çevir çarp ve ortak payda algoritmasını kullanmışlardır ancak neden bu algoritmaların işe yaradığını açıklayamamışlardır. Örneğin, bir öğretmen adayı $1/2 \div 1/3$ işlemi ile $1/2 \times 3/1$ işleminin eşit olduğunu ifade etmiştir ve bunu “Sadece üçe bölmenin ve 3 ile çarpmanın eşit olduğunu biliyorum.” şeklinde açıklamıştır. Başka bir öğretmen adayı bu işlem için hem ters çevir çarp hem de ortak payda algoritmasını kullandığı halde bu işlemin ne ifade ettiği sorulduğunda “Benim için hiç bir anlamı yoktur.” şeklinde açıklamıştır. Öğretmen adaylarının çoğu sözel problemleri doğru bir şekilde çözmüştür ve çözümlerinde model çizimini kullanmışlardır. Ancak tekrarlı çıkarma ve oran kavramlarının uygulandığı problemlerin kesirlerle bölme olduğunu farkedememişlerdir ve bu problemlerin kesirlerle bölme işlemi olarak gösterilebileceği fikrini çoğunlukla reddetmişlerdir. Bu çalışmada “Bir mutfak duvarının $3/4$ 'ünü boyamak için bir kutu boyanın $1/3$ 'ü kullanılmıştır. Bu duvarın tamamını boyamak için ne kadar boya gerekir?” şeklinde verilen problem için öğretmen adaylarının hepsi bölme işlemini içermediğini çarpma problemi olduğunu iddia etmişlerdir. Buradan Alenazi (2016) bölmenin farklı yorumlamalarının aynı kesirlerle bölme algoritmasını farklı şekillerde anlamlandırmaya yardımcı olabileceğini ve öğretmen hazırlık programlarında ders etkinliklerinde kesirlerle bölmenin hem geleneksel hem de geleneksel olmayan yorumlamalarının verilmesinin kesirlerle bölmeye ilişkin derin ve kapsamlı bir anlama geliştirmelerine yardımcı olabileceğini öne sürmüştür. Örneğin, $1/2 \div 1/4$ işlemi $1/2$ 'nin

içinde kaç tane $\frac{1}{4}$ 'ün olduğunu yanısıra “Bir sayının $\frac{1}{4}$ 'ü $\frac{1}{2}$ 'dir, o zaman bu sayı kaçtır?” şeklinde de verilmelidir.

İlgili araştırmalardan öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin model çizerken, problem kurarken veya açıklama yaparken yaptıkları hatalar ve yaşadıkları zorluklar şu şekilde özetlenebilir (Tablo 2.9):



Tablo 2.9.

Kesirlerle Çarpma ve Bölme İlişkin Literatürde Karşılaşılan Zorluklar

Karşılaşılan zorluklar ve hatalar	Açıklaması
Bölen kesir yerine paydasına bölme	Bölen kesir yerine bölen kesrin paydasına bölmeyi yansıtan problem kurma. Örneğin, $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemi için bir öğretmen adayının kurduğu problem (Ball, 1990): “ $1\frac{3}{4}$ pizza kalmıştır ve ikimiz bunu bölüşmek istiyoruz, o zaman nasıl bölüşebiliriz?”
Bölme yerine çarpma	Bölme yerine çarpma işlemini yansıtan problem kurma veya model çizme. Bir öğretmen adayı $3/4 \div 2/5$ işlemi için sözel problem kurarken $3/4 \times 2/5$ işlemini kullanıyor (Işık & Kar, 2012a, s. 2296): “Ali marketten karışık çerez almıştır. Çerezin ağırlığının $3/4$ 'ü fındıktır. Fındıkların ağırlığının $2/5$ 'i kabuktur. Buna göre aldığı çerezin ne kadarı kabuktur?”
Bölme yerine oran kullanma	Problem soru kökünün bölmenin herhangi bir anlamı yerine oran üzerine kurulması. Örneğin, $3 \div 3/5$ işlemi için bir öğretmen adayının kurduğu problem (Işık, 2011, s. 237): “Bir baba ve oğlu akşama kadar çalışarak tarlalarını sürüp bitirmişlerdir. Gün sonunda baba 3 dönüm, oğlu ise $3/5$ dönümlük yer sürmüştür. Babanın sürdüğü kısmın, oğlunun sürdüğü kısma oranı nedir?”
Çarpma yerine gruplama bölme	Bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine yönelik model çizerken çarpma yerine gruplama bölmeyi yansıtan model çizme veya problem kurma.
Çarpma yerine paylaştırma bölme	Bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine yönelik model çizerken çarpma yerine paylaştırma bölmeyi yansıtan model çizme veya problem kurma.
Tersine çevirme	İşlemdeki sayıları ters kullanarak problem kurma veya model çizme. Örneğin, $6 \div 3/4$ işlemi için $3/4 \div 6$ işlemine yönelik problem kurma.
Parça-bütün ilişkisi kuramama	İşlemdeki kesir sayılarının veya çarpımlarının bütünden büyük olduğunu veya bölme işlemi sonunda bölümün bölünen kesir sayısının belirtmiş olduğu çokluktan daha fazlasını gerektirdiğini dikkate almadan problem kurma. Örneğin, $3/4 \div 2/5$ işlemi için bir öğretmen adayının kurduğu problem (Işık & Kar, 2012a, s. 2295): “Seda bir pastanın $3/4$ 'ünü ayırmıştır. Ayırdığı bu pastanın $5/2$ 'sini Ayşe'ye vermiştir. Ayşe pastanın ne kadarını almıştır?”
Kesir sayısına doğal sayı anlamı yükleme	İşlemin sonucu veya işlemdeki sayılar kesir sayısı olmasına rağmen doğal sayı gibi düşünülerek soru kökünü oluşturma. Örneğin, $\frac{7}{8} \div 3\frac{1}{2}$ işlemi için “ $7/8$ metrelik bir kurdele kaç kişiye eşit olarak paylaştırılırsa kişi başına $3\frac{1}{2}$ metre kurdele düşer?” problemini kurma (Işık & Kar, 2012a, s. 2295). Burada bu problemin ifade ettiği işlemin sonucu $1/4$ kişiye karşılık gelmektedir, öte yandan her bir kişiye verilen miktarın bölünenden daha çok miktar olduğu göz ardı edilmiştir ki bu da parça-bütün ilişkisini kuramadığını göstermektedir.
Çarpmanın operatör ve tekrarlı toplama anlamı ikilemi	$A/B \times C$ işlemi C'nin A/B 'sidir. Operatör görüşüyle A/B kesri C niceliği üzerinde işlem yapar. $C \times A/B$ işlemi bir miktar bütünün A/B 'sinin C grubu veya $A/B + A/B + \dots + A/B$, C tanesinin toplamı olarak göz önüne alınır. Bu iki görüş birbiriyle karıştırılmaktadır. Örneğin, $2/3 \times 6$ işlemi için bir öğretmen adayının kurduğu problem (Matthews & Ding, 2011, s. 190): “6 arkadaş pizza yemeye çıkmışlardır. Her biri $2/3$ 'ünü yemiştir, kaç tane yemişlerdir?” Bu problem $2/3 \times 6$ işlemi yerine $6 \times 2/3$ işlemini yansıtmaktadır.
Bölmenin paylaştırma ve gruplama anlamı ikilemi	Bölmenin paylaştırma anlamında her bir gruptaki nesne sayısı aranırken, gruplama anlamında grup sayısı aranır. Bu iki anlamı birbiriyle karıştırılmaktadır. Örneğin, $1/2 \div 3/4$ işleminin “her bir grupta kaç” yani paylaştırma anlamı için bir öğretmen adayının kurduğu problem (Matthews & Ding, 2011, s. 190): “Bir ölçek pasta için $3/4$ bardak yağ gerekiyor ve elimizde $1/2$ bardak yağ vardır, o halde kaç ölçek yapabiliriz?” Bu problemde her bir gruptaki nesne sayısı yerine grup sayısı bulunmaktadır.
Bütünü çokluk olarak alma	İşlemden yer almayan bir sayı ilave ederek onun üzerinden işlemi gerçekleştirerek problem kurma veya model çizme. $6 \times 2/5$ işlemi için “Ayşe'nin 10 TL'si vardır. Parasının $2/5$ 'i ile kalem alıyor. Bir kalem fiyatının 6 katına da defter alıyor. Ayşe kalem ve deftere ne kadar para ödemiştir?” problemini kurma (Işık, 2011, s. 234). Burada işlemden yer almayan 10 sayısı ilave edilerek problem kurulmuştur ve işlem bir bütün yerine 10 bütün üzerinden gerçekleştirilmiştir.
Birim kargaşası	Kesir sayılarının uygun birimle ifade edilemediği ve kesir sayıları için yazılan birimlerin birbiri ile tutarlı olmadığı problemler. Örneğin, $6 \times 2/5$ işlemi için “Ezgi yürüyüş parkurunu $2/5$ saatte tamamlamaktadır. Ara vermeden bu parkuru 6 kez yürütmesi kaç dakika sürer?” problemini kurma (Işık, 2011, s. 234). Bu problemde hem saat hem de dakika birimlerini kullanmıştır, problem sorulana göre $6 \times 2/5$ işleminden ziyade 6×24 işlemini yansıtmaktadır.
Bilgi değiştirme/ekleme	Problem kurarken veya model çizen verilen işlemdeki farklı sayılar kullanmak veya başka bir sayı veya işlem daha kullanmak (Osana ve Royea, 2011). Örneğin, $1/5 \times 2/3$ işlemi için “15 tane çikolatanın $2/3$ 'ü kalmıştır. Kalan çikolataların $1/5$ 'ini yiyen Ayşe kaç çikolata yemiştir?” problemini kurma.
Eksik/yetersiz bilgi	Problemi çözmek için yeteri kadar bilgi olmamasıdır. Örneğin, $1/3 \div 7$ işlemi için “Doğumgünü partisinde $1/3$ pizza vardır. Pizzalar eşit olarak bölünürse kaç kişi yiyebilir?” problemini kurma (Osana & Royea, 2011, s. 340).
Bilinmeyen olmaması	Problem sorunun cevabını içermesidir. Örneğin, “6 tane ekmeğin $3/4$ 'ünü alıyor. Her bir kişi ne kadar alır?” (Osana & Royea, 2011, s. 340)

Bu çalışmada kesirlerle çarpma ve bölmeyle ilişkin verilen görevlerde model çizerken, problem kurarken, verilen model veya problem için işlem yazarken, verilen durumu

gerekçelendirirken veya verilen durum için açıklama yaparken öğretmen adaylarının ne tür zorluklarla karşılaştıkları ve ne tür hatalar yaptıkları bu tablo kullanılarak incelenmiştir.

2.3.4. Kesirlerle Çarpma ve Bölmeye İlişkin Çalışmalar

Literatür incelendiğinde kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin öğretmenlerle (sınıf öğretmeni, matematik öğretmeni, ilköğretim, ortaokul ve/veya lise), öğrencilerle (4., 5., 6., 7., 8., 9. sınıflar), öğretim elemanlarıyla ve öğretmen adaylarıyla gerçekleştirilen çalışmalar olduğu görülmektedir. Bununla beraber farklı ülkelerin ders kitaplarının, öğretim programlarının karşılaştırıldığı, öğrencilerin veya öğretmen adaylarının karşılaştıkları zorlukları, yaptıkları hataları ve kavram yanlışlarını araştıran çalışmalar da bulunmaktadır. Son yıllarda özellikle öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve/veya bölmeye ilişkin anlamalarını inceleyen çalışmalar baskın bir şekilde görülmektedir. Literatürde yer alan kesirler ve kesirlerle çarpma ve/veya bölmeyle ilgili yapılan çalışmalar şöyle gruplanabilir:

- Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve/veya bölmeye ilişkin kurdukları problemlerde yaptıkları hatalar, kavram yanlışlarını inceleyen çalışmalar (Graeber vd., 1989; Işık, 2011; Işık ve Kar, 2012a; vs.)
- Öğrencilerin kesirlere ve kesirlerle çarpma ve/veya bölmeye ilişkin anlamaları, yaşadıkları güçlükler, kavram yanlışlarını inceleyen çalışmalar (Biber vd., 2013; Birgin ve Gürbüz, 2009; Haser ve Ubuz, 2003; Işık ve Kar, 2012b; Kılıç ve Özdaş, 2010; Kocaoğlu ve Yenilmez, 2010; Mack, 1990, 1998; Mulligan ve Mitchelmore, 1997; Ochefu, 2013; Saenz-Ludlow, 1995; Soylu ve Soylu, 2005; Toluk, 2002; vs.)
- Öğretmen adaylarının ve /veya öğretmenlerin kesirlerle çarpma ve/veya bölmeye ilişkin anlamalarını inceleyen çalışmalar (Alenazi, 2016; Ball, 1990a, 1990b; Izsák, 2006a, 2006b; Kılcan, 2006; Lee vd., 2011; Li ve Smith, 2007; Lo ve Luo, 2012; Orrill vd., 2008; Simon, 1993; Tuna vd., 2013; vs.)
- Öğretmen adaylarının ve/veya öğretmenlerin kesirlerle çarpma ve/veya bölmeye ilişkin anlamalarını ölçen test geliştirme çalışmaları (Bradshaw vd., 2014; Marshall, 2016; vs.)
- Öğretim elemanlarının matematik metot derslerinde kesirlerle çarpma ve/veya bölmeyi nasıl verdiğine ilişkin çalışmalar (Güçler vd., 2009; Lo vd., 2009; Olanoff, 2011; Park, Güçler ve McCrory, 2012 vs.)

- Farklı ülkelerin matematik öğretim programlarında ve ders kitaplarında kesirlerle çarpma ve/veya bölmenin nasıl verildiğine ilişkin karşılaştırma çalışmaları (Feil, 2010; Lin, Becker, Byun, Yang ve Huang, 2013; Son ve Senk, 2010; Watanabe, 2003; vs.)
- Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamalarının gelişiminin incelendiği çalışmalar (Azim, 1990; Chen, 2010; Cluff, 2005; Lee, 2010; Ochefu, 2013; Rayner, 2007; Redmond, 2009; Tobias, 2009; Tzur ve Timmerman, 1997; vs.)

Öğretmen adaylarıyla yapılan çalışmalar incelendiğinde çoğunlukla kağıt-kalem testi, gözlem ve görüşme veya gözlem ve görüşme veya kağıt-kalem testi ve görüşme şeklinde gerçekleştirildikleri görülmektedir. Bununla beraber kesirlerle çarpma ve/veya bölmeye ilişkin anlamaları problem kurmaları ve model çizimleri yoluyla ağırlıklı olarak incelenmiştir. Öğretmen adaylarının matematiksel konulara ilişkin bilgilerini geliştirme yollarını arayan çalışmalarda genellikle belirli bir konu alanına odaklanıldığı ve bir matematik metot dersinin kullanıldığı görülmektedir. Bu gelişimi çoğunlukla kavramsal anlamayı kazandıracak şekilde hazırlanan matematik metot dersi yoluyla ve/veya öğretim deneyimleri yoluyla incelemişlerdir. Öğretmenlerle yapılan araştırmalarda seminerler veya mesleki gelişim dersleriyle veya çalıştaylarla kesirler, çarpma ve bölmeye ilişkin alan bilgilerinin kazandırılmasının yanısıra öğrencilerin bu kavramları nasıl gördüğüne ve bu kavramlara ilişkin ne tür hatalar ve kavram yanılgılarına sahip olduklarına ilişkin pedagojik bilgilerinin geliştirilmesine yardımcı olmuştur.

Leung ve Carbone (2013)'un çalışmasında Hong Konglu 72 öğretmen adayından $2\frac{1}{2} \div \frac{1}{2}$ işlemini ifade eden gerçek yaşam problemi kurmaları istenerek kesirlerle bölmeye ilişkin kavramsal anlamaları incelenmiştir. Ön-testte öğretmen adaylarının kurdukları problemler incelendiğinde öğretmen adayları problemlerini ölçme bölme yerine paylaşma bölme olarak yanlış bir şekilde yorumlamışlardır. Öğretmen adaylarına iki hafta boyunca kesirlerle toplama ve çarpmada referans alınan bütüne ilişkin kısa bir öğretim müdahalesinde bulunulmuştur ve son-test olarak yine aynı işlem için problem kurmaları istenmiştir. Son-testte kurdukları problemler incelendiğinde öğretim müdahalesinin gerçek yaşamla ilişkili problem kurmalarında matematiksel doğruluk bakımından gelişme olduğu görülmüştür. Bununla beraber ön-testten son-teste ölçme bölmeye ilişkin doğru kullanımda artış olduğu görülmüştür. Sonuç olarak bu çalışma problem kurmanın kavramsal anlamayı

ölçmede kullanılabileceğini göstermiştir. Veriler kısa öğretim müdahalesinin öğretmen adaylarının kavramsal anlamasında artış olduğunu desteklemektedir.

Ho ve Lai (2012)'nin çalışmasında öğretmen adaylarına $1/3 \times 3/4$ işlemini ifade eden “Partiden sonra bir pizzanın $3/4$ 'ü kalmıştır. Kalan pizzanın $1/3$ 'ünü evine götürmesi için Sara'ya verilmiştir. Sara evine bir pizzanın ne kadarını götürmüştür?” problemi verilmiştir. Öğretmen adaylarının bu probleme ilişkin çözümlerini bir analitik araç kullanarak incelemiştir. Buna göre cevabın doğruluğu, cevabın neden doğru olduğuna ilişkin verdikleri gerekçelendirmenin tam olup olmadığı, yaptıkları açıklamanın işlemsel mi, uygulama temelli kavramsal mı, matematiksel temelli kavramsal mı yoksa hepsi mi olduğu ve açıklamalarında temsil kullanıp kullanmadıkları, kullandırsa bu temsilin soyut veya resimsel olup olmadığı değerlendirilmiştir. Bu çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun tam bir gerekçelendirme sağlayamadığı ve işlemsel açıklama yaptıkları görülmüştür. Bununla beraber sadece $1/3$ 'ü uygulama temelli açıklama kullanırken, hiçbirisi üç açıklama türünü birlikte kullanmamıştır ve matematiksel temelli açıklama kullanmamıştır. Öğretmen adaylarının sadece %38'i açıklamalarında resimsel temsil kullanmıştır.

Baek vd. (2017) öğretmen adaylarına problem vermişlerdir ve bunu model çizerek çözmelerini istemişlerdir. Öğretmen adaylarının çizdikleri modelleri ve çizerken kullandıkları stratejileri incelemiştir. Bu çalışmanın sonucunda farklı resimsel stratejilerin öğretmen adaylarının kesirler ve ilgili kavramlara ilişkin kavramsal anlamalarını derinleştirmesine yardımcı olabileceğini öne sürmüşlerdir. Örneğin, öğretmen adaylarından birisi verilen problemdeki bilinmeyen niceliği küme modelinde önce 6 küçük daireyle göstermiştir, sonra kalan 2 küçük daireyi 3'e bölemeyeceğini görünce toplam küçük daire sayısını 18'e artırmıştır ve böylece kalan 6 küçük daire 3 ile bölünebilecektir. Bununla beraber öğretmen adaylarının kendi modellerini oluşturma deneyimlerinin kesirler ve işlemlere ilişkin anlamalarını derinleştirmeye yardımcı olabileceğini belirtmişlerdir. Bu şekilde verilen problem için model oluşturabilen öğretmen adaylarının bu bilgiyi gelecekteki öğrencilerinin kesirleri anlamalarına ve yorumlamalarına yardımcı olmada gerekli bir beceri olan verilen modelleri yorumlamada kullanabileceklerini ifade etmişlerdir.

Lamberg ve Wiest (2015) öğretmenlerin kesirlerle bölme problemlerini alan modeli kullanarak nasıl anladıklarını ve çözdüklerini incelemiştir. Bu çalışmada 12 öğretmen, alan bilgilerini artırmak üzere tasarlanmış olan mesleki gelişim oturumlarına katılmışlardır.

Öğretmenlerden $\frac{3}{4}$ 'ün içinde kaç tane $\frac{2}{3}$ olduğunu belirlemeyi içeren bir probleme ilişkin alan modeli çizimleri istenmiştir. Öğretmenler başlangıçta alan modelini çizmede ve anlamada zorlanmışlardır. Bununla beraber kesirlerle bölmede kalanı yani referans alınan bütünü yorumlamakta zorluk çekenler de olmuştur. Sonuç olarak Lamberg ve Wiest (2015) sadece modeli çizdirmenin veya incelemenin kesirlerle bölme ile alan modeli arasında ilişki kurmak için yeterli olmadığını, model üzerine tartışmaların da yapılması gerektiğini belirtmişlerdir. Böylece sınıf içi diyalog ve görsel temsille desteklenerek görsel temsilden sözel temsile geçişe olanak sağlandığını ifade etmişlerdir.

Ball (1990a)'un çalışmasında ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının konu alan bilgileri incelenmiştir. Öğretmen adaylarının öğretmen eğitimine geldiklerinde matematiğe ilişkin ne bildiklerini incelemek için 252 öğretmen adayına anket uygulanmıştır ve görüşmeler yapılmıştır. Bu çalışma boyamsal bir çalışmadır, öğretmen adayı oldukları zaman boyunca ve öğretimlerinin ilk yıllarında takip edilen gruplarla görüşmeler ve gözlemler gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada öğretmen adaylarının $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemine ilişkin sorulara verdikleri yanıtlar ve temsillerinin uygunluğu incelenmiştir (uygun oluşturanlar, uygun oluşturmamayanlar ve hiç oluşturmamayanlar). Öğretmen adaylarına önce problemler verilmiştir ve hangisinin bu işlemi ifade ettiği sorulmuştur, sonra bu işleme yönelik problem kurmaları istenmiştir. Sonuçlara göre; öğretmen adaylarının çok azı hangi problemin bu işlemi ifade ettiğini doğru bir şekilde seçmiştir ve ortaöğretim öğretmen adaylarının çok azı uygun bir problem kurarken ilköğretim öğretmen adaylarının hiçbiri uygun bir problem kuramamıştır. Bununla beraber hem ilköğretim hem de ortaöğretim matematik öğretmen adayları öğretmen eğitimine kesirlerle bölmeye ilişkin kurala bağlı ve zayıf bir anlama getirmişlerdir. İşlemi veren problemi doğru bulan öğretmen adayları kendileri verilen işlem için problem kurarken zorlanmışlardır. Bununla beraber öğretmen adaylarının çoğu kesirlerle bölmeye ilişkin problem kurarken paylaştırma bölme anlamını dikkate almışlardır.

Ball (1990b)'un çalışmasında 19 öğretmen adayının konu alan bilgileri ve matematiksel gerekçelendirmeyi neyin oluşturduğu incelenmiştir. Bu çalışmada özellikle öğretmen adaylarının kesirlerle bölme bilgilerine odaklanılmıştır. Anket soruları öğretmen adaylarının bölmeye ilişkin anlamalarını 3 bağlamda incelemiştir; kesirlerle bölme, sıfır ile bölme ve cebirsel denklemlerle bölme. Her bir durumda öğretmen adaylarından temsilleri açıklamaları veya oluşturmaları istenmiştir. Matematikte bir şeyi doğru veya mantıklı

olduğuna onları neyin inandırdığı yani matematiksel olarak uygun bir gerekçelendirme olduğuna nasıl karar verdikleri incelenmiştir. Anket uygulandıktan sonra görüşmeler yapılmıştır ve ses kaydı yapılmıştır. Verilerin analizinde cevaplar iki boyutta kodlanmıştır: doğrulukları ve ğretmen adayı tarafından sağlanan gerekçelendirmenin doğası. Öğretmen adaylarının birçoğu sorulara doğru cevap verdikleri halde, birkaçı verememiştir ve çok azı altında yatan ilkeler ve anlamlar için matematiksel açıklamalar yapmışlardır. Öğretmen adaylarının çoğu bölmeyi sadece parçalamalı olarak yorumlamış ve belirli sayıda eş gruplar oluşturmuşlardır. Öğretmen adaylarının bölme bilgisi kavramsal anlamadan çok ezberlemeye dayalı olduğu grlmştir. Sonuçlar doğru cevapların bile mantıklı matematiksel gerekçelerle veya anlamlarla desteklenmediğini göstermiştir.

Işık ve Kar (2012a)'ın çalışmasında ilköğretim matematik ğretmeni adaylarının kesirlerle bölme işlemine yönelik kurdukları problemlerdeki hataların analizi yapılmıştır. Araştırmaya son sınıfta okuyan 64 ğretmen adayı katılmıştır. Öğretmen adaylarına kesirlerle bölme ile ilgili 4 işlem verilmiştir (bölünenin bilinmediği, bölenin bilinmediği, bölümün bilinmediği ve bölünen kesir sayısının bölen kesir sayısından küçük olduğu ve bölümün bilinmediği bölme işlemi) ve ğretmen adaylarından bu işlemlere uygun problem kurmaları istenmiştir. Problem kurmada karşılaşılan hataları teyit etmek ve bu hataların nedenlerini ayrıntılı bir şekilde ortaya koymak için 16 ğretmen adayı ile görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarının kurdukları problemlerde 7 hata türü belirlenmiştir; birim kargaşası, kesir sayılarına doğal sayı anlamı yükleme, oran-orantı yoluyla problem kurma, parça-bütün ilişkisini kuramama, bölen kesrin paydasına bölme, bölme yerine çarpma işlemini kullanma, bölen kesir sayısının ters çevrilerek çarpılması yoluyla problem kurma. Bunun yanısıra adayların kurdukları problemlerde bölmenin kavramsal boyutunu göz ardı ettikleri grlmştir.

Lo ve Luo (2012)'nın çalışmasında Tayvan'lı ğretmen adaylarının matematik metot derslerinin başlangıcında ortaya koydukları konu alan bilgisinin doğası incelenmiştir. Matematik ve fen alanında uzman olmayan ilköğretim ğretmen adaylarının genel ve özelleştirilmiş kesirlerle bölme bilgileri, problemlerde kullandıkları stratejiler, stratejilerinin Ma (1999)'nın modeliyle ilişkisi, sözel problemler oluştururken ne tür çarpma ve bölme yapıları kullandıkları ve sözel problemlerini modellemede ne tür modeller kullandıkları araştırılmıştır. Bu çalışmada veri toplama metodu olarak görüşme ve anket (16 madde, arka arkaya uygulama) kullanılmıştır. Büyük sayıda gruba (45) anket uygulanmış ve küçük sayıda grupla görevler ve takip eden soruları aydınlatmak adına

görüşmeler yapılmıştır. Bu çalışmada üç probleme odaklanılmıştır; iki tane parçalama bölme ile ilgili problem; birisi sayı doğrusuna dayalı resimsel problem, diğeri yolculuk durumuna dayalı sözel problem ve verilen işleme uygun sözel problem yazmalarını ve çizerek modellemelerini isteyen bir problem. Birçok öğretmen adayının Ma (1999) tarafından ortaya konulan kesirlerle bölme bilgi paketini geliştirdikleri görülmüştür. Önemli sonuçlardan birisi üçüncü problem için kurdukları problemlerin çoğu (% 57.5) eş-grup ölçme problem iken eş-grup parçalama bölmeden oldukça daha fazladır (% 15). Problemleri modellemek için alan, uzunluk, küme modelleri ve gerçek nesne kullanmışlardır. Öğretmen adaylarının çoğunun çizimi problemi nasıl çözdüklerini göstermemektedir. Problemlerin çözümleri için birçok strateji geliştirmişlerdir. En çok kullandıkları stratejiler; birim kesir yaklaşımı, parça-bütün yaklaşımı ve oran yaklaşımıdır. Kesirlerle bölme için güçlü genel alan bilgisine sahiplerken, özelleştirilmiş alan bilgilerinin bazı yönlerinde sağlam değillerdir; sözel problemleri kurarken ölçme bölmeyi ve bu problemleri modellemede doğrusal ve alan modellerini kullanmayı tercih etmişlerdir. Kesirlerle bölmenin sözel problemle veya resimsel diyagramlarla modelleme görevleri ilköğretim ve ortaokul matematiğinde yüksek derecede uzman olanları dahi zorladığı sonucuna ulaşılmıştır.

Simon (1993)'ın çalışmasında öğretmen adaylarının bölme bilgileri açık uçlu yazılı doküman ve görüşmelerle incelenmiştir. Bölmeyi anlamının iki yönüne ilişkin 5 problem hazırlanmıştır; işlemsel ve kavramsal bilgi ve bütünler bilgisi arasındaki ve içindeki bağıllık. Bu çalışmanın amacı öğretmen adaylarının bölme bilgilerinin geçerli durumunu nitelendirmektir. Bu çalışmada üç tür ilişki incelenmiştir; işlemsel ve kavramsal bilgi arasındaki, kavramlar arasındaki ve aritmetik işlemler ve gerçek yaşam durumları arasındaki. Çalışmaya yazılı aşamada 33, görüşme aşamasında 8 ilköğretim öğretmen adayı büyük bir üniversiteden katılmıştır. Hiçbir öğretmen adayı çalışmanın her iki aşamasına da katılmamıştır. Önce 33 öğretmen adayına 5 tane problem verilmiştir ve bunları cevaplamaları istenmiştir, sonra 8 öğretmen adayıyla bu 5 işlemin üçüne ilişkin verdikleri cevaplar üzerinden görüşmeler yapılmıştır. Bu problemlerin ilk ikisinde işlemler ($51 \div 4$ ve $3/4 \div 1/4$) verilmiştir ve problem kurmaları istenmiştir, kalan üçünde problemler verilmiştir ve çözmeleri istenmiştir. Sonuçlar öğretmen adaylarının bazı alanlarda kavramsal bilgisinin zayıf olduğuna işaret etmiştir; bilinen algoritmaların kavramsal temelleri, paylaşırma ve grupta bölme arasındaki ilişki, sembolik bölme ve

gerçek yaşam problemleri arasındaki ilişki, bölme işlemindeki sayıların bütünlerini belirleme.

Tobias (2009)'ın çalışmasında öğretmen adaylarının öğretim için gerekli olan matematiksel bilgiyi geliştirmelerine ilişkin matematiği anlamaları incelenmiştir. Öğretmen adayları için bir dönem boyunca matematik alan dersinde sayılar ve işlemlere dayalı öğretim gerçekleştirilmiştir. Bu çalışma ilköğretim matematik öğretmenliğinde okumakta olan 33 öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir. Araştırma ekibi 2 profesör ve matematik eğitiminde doktora yapan 6 öğrenciden oluşmaktadır. Profesörlerden birisi dersi yürütmüştür. Veriler 10 hafta boyunca çekilmiş sınıf video kayıtlarından, öğrenci çalışmalarından, ön-test ve son-test puanlarından ve araştırma ekibi notlarından oluşmaktadır. Öğretmen adaylarına rasyonel sayılar ünitesinden önce ve sonra ön-test ve son-test olarak Matematik Öğretimi için Alan Bilgisi testi uygulanmıştır. Ön-test sonuçlarına ve matematiksel inançlarına göre seçilen 5 öğretmen adayı ile rasyonel sayılar ünitesinden önce ve sonra görüşmeler yapılmıştır. Öğretmen adaylarına rasyonel sayılara ilişkin problemler verilmiş ve kendi metotlarıyla çözmeleri istenmiştir. En sonunda seçilen problemler sınıf tartışması şeklinde tartışılmış ve ders boyunca öğretmen adayları kendi problem çözme metotlarını resimler yoluyla geliştirmeleri için cesaretlendirilmişlerdir. Bu çalışma büyük bir proje olan araştırmanın kesirlerle çarpma kısmını kapsamaktadır, kesirlerle çarpma bu öğretim sürecinin bir buçuk günlük kısmında gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma konusuna ilişkin kavramsal anlamalarının gelişimleri sonuç olarak sunulmuştur. Sonuçlara göre öğretmen adaylarının kesirlerle çarpmaya ilişkin kavramsal anlamaları 3 aşamada gelişmiştir. Birinci aşama, verilen problemi çözecek işleme geri dönme; ikinci aşama, çözümleri ve çözüm stratejilerini açıklama ve gerekçelendirme yolları geliştirme; üçüncü aşama, yeni kavramlar geliştirmedir.

Cluff (2005)'un çalışmasında 3 öğretmen adayının kesirlerle çarpma ve bölmeyi anlamaları incelenmiştir. Bu çalışmada öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kavramsal anlamalarının gelişimine odaklanılmıştır. Öğretmen adaylarının kesirler ve kesirlerle işlemlere ilişkin imajları (kavramsal imajları = matematik kavramlarına ve işlemlerine ilişkin zihinsel görselleştirme) ve anlamalarının dersteki deneyimlerinin sonucu olarak nasıl derinleştiği ve genişlediği incelenmiştir. Öğretmen adayları bir üniversitedeki matematik metot dersinde kesirler boyunca takip edilmiştir. Veriler birçok kaynaktan toplanmıştır. Önce öğretmen adaylarının kesirler ve kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin

imajlarının ne olduğunu belirlemek için ön-test uygulanmıştır. İkinci veri seti sınıfta toplanmıştır. 3 öğretmen adayından bir grup oluşturulmuş dersteki deneyimleri video kayıt edilmiştir. Aynı zamanda araştırmacı sınıf deneyimine ilişkin kapsamlı notlar almıştır. Bu kayıtlarla beraber ödevlerinin, sınıf çalışmalarının ve günlüklerinin fotokopileri kesirlerle deneyimlerine ilişkin içgörü kazanmak için toplanmıştır. Üçüncü veri seti haftalık görüşmelerle toplanmıştır. Her bir öğretmen adayı ile sınıf deneyimlerine ilişkin içgörü kazanmak için birebir görüşme yapılmıştır. Tüm görüşmeler video kayıt edilmiştir ve görüşmeci görüşmelere ilişkin notlar almıştır. Veri 3 durum çalışması olarak sunulmuştur; her bir öğretmen adayının matematik geçmişi ve kesirlere ilişkin daha önceki anlamalarını açıklama; kesirler, kesirlerle çarpma ve kesirlerde bölmeye ilişkin anlamasındaki değişim; her bir durum çalışmasının sonunda öğretmen adayının kavramsal anlamasına ilişkin tartışma verilmiştir. Her bir öğretmen adayı kesirler, kesirlerle çarpma ve kesirlerle bölmeye ilişkin derin kavramsal anlama göstermiştir. Öğretmen adayının kesirler ve kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin önceki bilgisi anlamasının gelişimini etkilemiştir.

Rayner (2007)'in çalışmasında matematik alan bilgisinin türünün (kavramsal ve işlemsel, vs.) öğretmen adaylarının özelleştirilmiş alan bilgisini artırıp artırmadığı incelenmiştir. Bu çalışmanın amaçları şunlardır: a) Kesirlerle bölmeyi temel alan içerik odaklı öğretimin öğretmen adaylarının özelleştirilmiş alan bilgilerini artırıp artırmadığını incelemek, b) öğretim içeriğinin iki türünün (kavramsal içerik, kavramsal ve işlemsel içeriğin kombinasyonu, vs.) öğretmen adaylarının kesirlerle bölmeye ilişkin özelleştirilmiş alan bilgilerindeki (ÖAB-KB) artışa etkisini incelemek. Sekiz öğretmen adayı, 2 uygulama durumundan birine katılmıştır ve ÖAB-KB'lerinin gelişimi yarı yapılandırılmış ön ve son görüşmelerle ölçülmüştür. Katılımcılar iki gruptan birine katılmıştır ve her bir gruba kesirlerle bölme konusunu ele alan öğretim boyunca farklı tür içerik sağlanmıştır. Kontrol grubunun öğretimsel içeriği, kesirlerle bölme problemleri için standart algoritmayı açıklayan matematiksel kavramları kullanmayı içermektedir ve kesirlerle bölmenin yorumlanabildiği farklı yollara odaklanmıştır. Deney grubunun öğretimsel içeriği, kesirlerle bölme problemlerini çözmek için kullanılan alternatif algoritmaların her ikisini (kompleks kesirler, ortak payda algoritması) de anlamlı bir şekilde gerekçelendirmek için matematiksel kavramlar ve işlemler kullanmayı içermektedir. Öğretmen adaylarının ÖAB-KB'leri ön-test ve son-test ses kayıtlı görüşme kullanılarak ölçülmüştür. Her bir öğretim aşamasının sonunda katılımcıların öğretime ilişkin anlamalarını ölçen kağıt-kalem testi uygulanmıştır. Görüşme verileri araştırmacı tarafından geliştirilen kesirlerle bölmeye

ilişkin özelleştirilmiş alan bilgisinin analizi rubriği kullanılarak kodlanmıştır. Genel olarak sonuçlar şu hipotezleri desteklemiştir: a) katılımcıların ÖAB-KB'leri içerik odaklı öğretimden sonra artmıştır, b) işlemsel ve kavramsal öğretimsel içeriğin kombinasyonunu beraber alan katılımcılar ÖAB-KB'lerinde daha büyük artış göstermişlerdir.



BÖLÜM 3

YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın deseni, çalışma grubu, araştırmacının rolü, veri toplama araçları, pilot çalışma, veri toplama süreci, veri analizi ve geçerlik ve güvenirlik çalışmaları yer almaktadır.

3.1. Araştırma Deseni

Nitel araştırmalarda değişkenlerin bilinmediği ve araştırılmaya ihtiyaç duyulan bir problem ele alınır. Literatür çalışma durumuna ilişkin çok az bir bilgi sağlayabilir, katılımcılardan araştırma yoluyla daha çok öğrenmeye ihtiyaç duyulur (Creswell, 2012, s. 16). Nitel araştırmayı Glesne (2015) şöyle tanımlamıştır (s. 385): “Kelimeler ya da gözlemler gibi ölçülmesi zor olan nitelikler üzerine odaklanan ve niteliklerin yorumlanmasına ve çözümlenmesine dayanan bir araştırma türüdür.” Nitel araştırma ilişkilerin, etkinliklerin, durumların veya materyallerin niteliğini inceleyen çalışmalardır. Nitel araştırmaların aşamaları şöyle sıralanabilir (Fraenkel ve Wallen, 2006, s. 433):

1. Araştırılmak istenen konunun tanımlanması
2. Katılımcıların belirlenmesi
3. Hipotezlerin oluşturulması
4. Verilerin toplanması
5. Verilerin analizi
6. Yorum yapılması ve sonuçların ortaya koyulması

Nitel araştırma deseni, araştırmanın yaklaşımını belirleyen ve çeşitli aşamaların bu yaklaşım çerçevesinde tutarlı olmasına rehberlik eden bir stratejidir. Nitel araştırma desenini bazı araştırmacılar “nitel araştırma yaklaşımı” olarak da ifade etmektedirler. Nitel araştırma desenleri; kuram oluşturma (grounded theory) araştırması, kültür analizi (ethnographic) araştırması, olgubilim (phenomenology), durum çalışması (case study) ve eylem araştırmasıdır (action research) (Yıldırım ve Şimşek, 2016, s. 67). Bu çalışmada

ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin özelleştirilmiş alan bilgilerinin gelişimini incelemek amacıyla nitel araştırma yaklaşımlarından birisi olan durum çalışması yöntemi kullanılmıştır.

Durum çalışması gerçek yaşamın, güncel bağlamdaki bir durum ya da çoklu durumlar hakkında çeşitli veri kaynakları (gözlem, görüşme, doküman) aracılığıyla derinlemesine bilgi toplanan nitel bir yaklaşımdır (Creswell, 2016b, s. 97). Durum çalışması “nasıl” ve “neden” soruları ortaya koyulduğu zaman, araştırmacı durumları biraz kontrol altına aldığı ve gerçek yaşam bağlamında günümüze ait bir olaya odaklanıldığında tercih edilen bir stratejidir (Yin, 1994, s. 1).

Durum çalışması nitel araştırmada en çok kullanılan bir yaklaşımdır. Durum çalışması, bir duruma ilişkin etkenlerin (ortam, olaylar, bireyler, süreçler, vs.) bütüncül bir yaklaşımla araştırıldığı ve ilgili durumu nasıl etkiledikleri ve ilgili durumdan nasıl etkilendiklerine odaklanan bir çalışmadır. Durum çalışmasında bir ya da birkaç durum derinliğine araştırılır. Durum çalışmasının farklı türleri (tek durum, çoklu durum, vs.) vardır. Durum çalışmasında birden fazla veri toplama yöntemi kullanılarak veri çeşitliliğine ulaşılmaya çalışılır. Durum çalışmaları durumlar birbirinden farklı olduğu için genellenemez ancak benzer durumların anlaşılmasına yardımcı olur (Yıldırım ve Şimşek, 2016, s. 73). Bu çalışmada durum çalışması desenlerinden içiçe geçmiş tek durum deseni kullanılmıştır. Tek durum içinde birden fazla alt tabaka veya analiz birimi bulunabilir ve bu durumlarda içiçe geçmiş tek durum deseni kullanılır (Yıldırım ve Şimşek, 2016, s. 301). Çalışmada öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin ÖAB’lerinin gelişimi tek durum olarak ele alınmıştır. Bu durumun içinde yer alan her bir öğretmen adayının model çizme, problem kurma, matematiksel ifade yazma, gerekçelendirme ve açıklama bilgilerinin gelişimi alt analiz birimlerini oluşturmaktadır.

Yıldırım ve Şimşek (2016), Creswell (2012), Fraenkel ve Wallen (2006)’ın nitel araştırma sürecine ilişkin ortaya koydukları aşamaların ışığında bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde şu aşamalar izlenmiştir:

1. Araştırma probleminin belirlenmesi
2. Kavramsal çerçevenin oluşturulması
3. Araştırma sorularının yazılması
4. Katılımcıların belirlenmesi
5. Araştırmacı rolünün belirlenmesi

6. Verilerin toplanması (Veri toplama araçlarının geliştirilmesi, veri toplama yöntemlerinin (gözlem, görüşme, doküman incelemesi, vs.) kullanılması)
7. Verilerin analizi (Verilerin düzenlenmesi, özetlenmesi, yorumlanması)
8. Yorum yapılması ve sonuçların ortaya koyulması

3.2. Çalışma Grubu

Bu çalışmada amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitlilik örnekleme kullanılmıştır. Amaçlı örnekleme, zengin bilgi içeren durumların derinlemesine çalışılmasına olanak vermektedir. Seçilen durumlar birey (bir öğretmen, bir öğrenci, vs.), aile, organizasyon (bir sınıf, vs.), kültür, olay veya etkinlikler olabilir. Burada önemli olan araştırma sorularına açıklık getirecek zengin bilgi içeren durumları seçmektir (Patton, 2014, s. 242). Maksimum çeşitlilik örneklemesinin amacı küçük bir örneklem oluşturmak ve bu örnekleme çalışılan bireylerin çeşitliliğini maksimum derecede yansıtmaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2016, s. 119).

Nitel araştırmalarda birkaç birey veya birkaç olay çalışılır. Bunun amacı derinlemesine bilgi sağlamaktır. Bazı durumlarda bir birey veya bir olay çalışılabilir. Bazı durumlarda da 1 ile 40 arasında değişen sayıda çalışılabilir. Her bir bireye ilişkin detaylar rapor edilmesi gerektiği için çok sayıda durumlar kullanışsız olur ve yüzeysel kalır. Bununla beraber veri toplama ve analiz etme oldukça fazla zaman alır (Creswell, 2012, s. 209).

Bu çalışma Ankara’da bir devlet üniversitesinde İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı’nın 3. sınıfında öğrenim gören 6 öğretmen adayı ile 2014-2015 bahar döneminde gerçekleştirilmiştir. Çalışmaya katılan öğretmen adayları öğretimden önce ön-test olarak uygulanan KÇB testinden aldıkları puanlar ve gönüllü olmaları dikkate alınarak belirlenmiştir. KÇB testi 41 ilköğretim matematik öğretmen adayına uygulanmıştır, öğretmen adaylarının testte verdikleri cevaplar hazırlanan analitik rubriğe göre puanlanmıştır ve testten aldıkları toplam puanlar hesaplanmıştır. Bu toplam puan üzerinden öğretmen adayları öğretimden önce kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin hazırbulunuşluk düzeyleri yüksek, orta ve düşük olmak üzere üç gruba ayrılmıştır. Burada hazırbulunuşluk düzeyleri ile öğretmen adaylarının öğretimden önce kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin sahip oldukları model çizme, problem kurma, matematiksel ifade yazma, gerekçelendirme ve açıklama bilgileri kastedilmiştir. Düzeylerin hesaplanması için en yüksek puandan en düşük puan çıkarılıp tercih edilen grup sayısına (3) bölünerek aralık katsayısı (Büyüköztürk, Çokluk ve Köklü, 2013, s. 17-18) bulunmuştur: $(95-45)/3=16,6$. Böylece

her bir grubun puan aralığı en düşük puandan başlanarak 17’şer puan artırılarak belirlenmiştir. Buna göre 45-61 puan arası “düşük”, 62-78 puan arası “orta” ve 79-95 puan arası “yüksek” grup olarak adlandırılmıştır. Bunun yanı sıra bu gruplardaki adayların testte verdikleri cevaplar nitel olarak da incelenmiştir ve kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kavramsal ve işlemsel anlamaları açısından da yüksek, orta ve düşük düzeyde olanları belirlenmiştir. Böylece örneğin, kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin hem model çizmesi hem işlemsel ve kavramsal anlaması yüksek olan öğretmen adaylarının gönüllü olanlarından 2 kişi öğretim sürecinde çalışmak üzere seçilmiştir. Bunun gibi orta ve düşük gruptan da ikişer kişi belirlenmiştir. Bu şekilde 6 öğretmen adayı belirlendikten sonra bu kişilerle kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin öğretim gerçekleştirilmiştir ve her hafta derslere paralel görüşmeler yapılmıştır.

Öğretmen adaylarına öğretim sürecinde lisans ders programlarının dışında haftada bir gün 1 saat ders ve her biriyle 1 saat görüşmelerin yapılacağı ayrıntılı olarak açıklanmıştır ve bu öğretmen adayları çalışmaya gönüllü olarak katılmayı kabul etmişlerdir. Buna göre 6 öğretmen adayıyla 6 hafta ders ve 2 hafta ön-test ile son-testin uygulanması şeklinde toplam 8 hafta süren bir uygulama yürütülmüştür. Bu çalışmada 6 öğretmen adayının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin kurdukları problemler, çizdikleri modeller, verilen model veya problem için yazdıkları matematiksel ifadeler, verilen durumlar için yaptıkları gerekçelendirmeler ve açıklamalar analiz edilmiştir. Bu analiz sürecinde öğretmen adayları ÖA1, ÖA2, ÖA3, ÖA4, ÖA5 ve ÖA6 şeklinde kodlanmıştır.

İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı’nın 3. sınıfında öğrenim gören öğretmen adaylarının bu çalışmaya katılmadan önceki aldıkları lisans dersleri incelendiğinde kesirler ve kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin problem kurma veya model çizmeye ilişkin deneyimlerinin olmadığı söylenebilir. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarından sadece ÖA2, ÖA4 ve ÖA1’in diğer öğretmen adaylarına göre kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin deneyimleri bulunmaktadır. ÖA4 ve ÖA1 öğretimden önce uygulanan KÇB testine ilişkin yapılan görüşmede özel ders verdiklerini ve bu derslere öğretim programı kitabından bakarak hazırlandıklarını belirtmişlerdir. Bununla beraber ÖA4 günlük yaşamında birçok şeyi problem kurarak açıkladığını bu yüzden problem kurmaya ayrı bir ilgisinin olduğunu ifade etmiştir. ÖA2 ise öğretmen adayları arasında tek Fen Lisesi mezunu olan öğretmen adaydır, diğerleri öğretmen lisesi mezunlardır. ÖA2 öğretimden önce uygulanan KÇB testine ilişkin yapılan görüşmede eğitim-öğretim hayatı boyunca her şeyi anlamlandırmaya çalıştığını belirtmiştir.

3.3. Araştırmacının Rolü

Katılımcı rolü üstlenen araştırmacının kendi varsayımlarını ve önyargılarını araştırma sürecinde elde edilen bilgilerden ayrı tutabilmesi ve veri toplama ve analiz sürecinin etkilenmemesini sağlaması önemlidir. Araştırmacının kendi görüşleri veriler analiz edildikten sonra yorumlama aşamasında kullanılmalıdır. Daha önce kullanılması durumunda verilerin analizini etkileyebilir, bu yüzden araştırmacının kendi rolünü açık bir şekilde belirlemesi ve kendi varsayım ve önyargılarının farkında olması önemlidir (Yıldırım ve Şimşek, 2016, s. 85). Araştırmacıdan bir öğrenen olarak dinlemesi beklenirken, uzman ya da otorite olarak konuşması beklenir. Öğrenen olarak araştırmacı rolünde araştırmacı katılımcıdan bir şeyler öğrenmek isteyen meraklı bir öğrencidir. Bu rol araştırmacıyı araştırma sürecinin ve bulgularının tüm yönlerine ilişkin derin düşünmeye yönlendirir. Uzman ya da otorite olarak araştırmacı rolünde katılımcılar yeteri kadar açık sözlü olmaya cesaret edemezler. Bu iki rol arasındaki fark büyüktür (Glesne, 2015, s. 80).

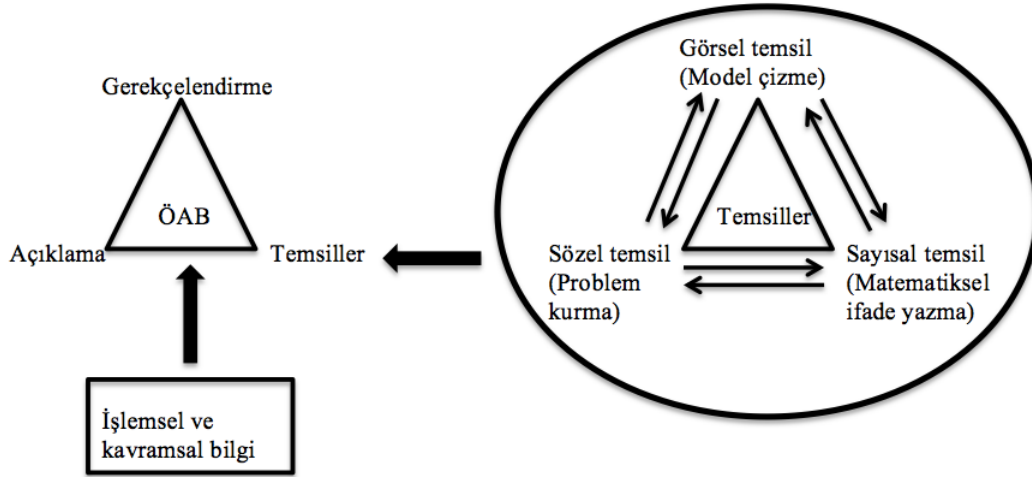
Bu çalışmada araştırmacı bütün süreçleri (veri toplama araçlarının geliştirilmesi, uygulanması, öğretimin gerçekleştirilmesi) kendisi yürütmüştür. Araştırmacının daha önce kesirler veya kesirlerle işlemlere ilişkin öğretim deneyimi bulunmamaktadır ancak çeşitli matematik derslerinde (genel matematik, analiz I, diferensiyel denklemler, vs.) öğretim tecrübesi bulunmaktadır. Araştırmacı kesirlerle çarpma ve bölmenin anlamının nasıl kazandırılacağına ve kavramsal anlamaya dayalı öğretimin nasıl gerçekleştirileceğine ilişkin bilgi edinmek ve en başta kendisi kesirlerle çarpma ve bölmenin anlamını kazanmak, kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin model çizme sürecini anlamlandırmak için doktora öğreniminin bir bölümünde bu çalışmaya ilişkin verileri toplamadan önce Amerika'da özellikle kesirlerle çarpma ve bölmeye ve bu konuları anlamaya ilişkin çok fazla çalışmaları bulunan bir öğretim üyesinin yanına 10 ay süreyle giderek bu öğretim üyesinin yürüttüğü projenin araştırma ekibine dahil olmuştur. Bu süre boyunca araştırmacı öğretim üyesinin derin bilgilerinden yararlanmıştır, araştırma ekibinde bulunarak kesirlerle çarpma ve bölmeyi anlamlandırmaya ilişkin uygulama çalışmalarının nasıl gerçekleştirildiğini gözlemlemiştir ve bu çalışmalara katılarak kendisi de kesirlerle çarpma ve bölmeyi anlamlandırmaya çalışmıştır. Araştırma ekibinin yürüttüğü proje kapsamında kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin dersler gerçekleştirilmiştir, araştırmacı öğretim üyesinin bu dersleri nasıl gerçekleştirdiğini gözlemlemiştir ve bu dersler esnasında öğretmen adaylarıyla yakın ilişkide bulunarak anlamlandırma süreçlerine tanık olmuştur. Araştırmacı bu dersler boyunca kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinin anlamına, bu

işlemler için nasıl problem kurulduğuna ve model çizildiğine ilişkin bilgiler edinmiştir. Araştırmacı bunların yanısıra ilgili literatürü okuyarak öğretim elemanıya haftalık toplantılar yapıp bu çalışmanın kavramsal çatısını oluşturmuştur. Böylece araştırmacı bu çalışmada gerçekleştirilecek öğretim sürecine hazırlanmıştır.

Araştırmacı bu çalışma boyunca gerçekleştirilen görüşmelerde öğretmen adaylarını yönlendirmemeye özen göstermiştir. Araştırmacı verilerin analizi sırasında kendi görüşlerini ve önyargılarını uzak tutmaya çalışmıştır, bu görüşleri verilerin analizi sonucu elde edilen bulguları yorumlama kısmına saklamıştır. Araştırmacı bu çalışmayı aynı zamanda kendisinin çalıştığı bir üniversitede gerçekleştirmiştir. Bu durum verilerin toplanmasını kolaylaştırmış olabilir ancak araştırmacı çalışmaya katılan öğretmen adaylarının herhangi bir dersine girmediği için çalışmanın güvenilirliğini olumsuz etkileyecek herhangi bir durum söz konusu değildir. Aynı zamanda gerçekleştirilen öğretimin öğretmen adaylarının dersi dışında bir zamanda olması da bunu destekler. Yani bu çalışma öğretmen adaylarının tamamen kendi istekleri ve gönüllülükleri doğrultusunda gerçekleştirilmiştir. Diğer taraftan araştırmacının bu çalışmadan önce bu öğretmen adaylarıyla hiçbir ilişkisi bulunmamaktadır. Hepsiyle bu çalışmanın başında tanışmıştır ve çalışma süresince öğretmen adaylarını daha yakından tanıma fırsatı bulmuştur.

3.4. Veri Toplama Araçları

Çalışmanın amacı öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme konularına ilişkin özelleştirilmiş alan bilgilerinin (ÖAB) gelişimini öğretim yoluyla incelemektir. Burada özellikle özelleştirilmiş alan bilgisinin bileşenleri olan gerekçelendirme, açıklama ve temsillere odaklanılmıştır. Açıklama; matematiksel temelli ve uygulama temelli olarak ayrılmaktadır. Temsil olarak görsel temsil (çizili temsil), sözel temsil (problem kurma) ve sayısal temsil (matematiksel ifade yazma) ele alınmıştır. Bu temsiller arası geçiş sağlanarak öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kavramsal anlamalarının dolayısıyla özelleştirilmiş alan bilgilerinin artırılması planlanmıştır. Öğretim boyunca verilen model veya problemlerin matematiksel olarak ifade edilmesi, verilen durumların gerekçelendirilmesi ve açıklanması, verilen işlemlerin çizerek modellenmesi ve problem kurma yoluyla özelleştirilmiş alan bilgilerinin gelişimi incelenmiştir. Bu süreci özetleyen şema şu şekildedir (Şekil 3.1).



Şekil 3.1. Çalışmada temel alınan boyutlar

Çalışmada veri toplama aracı olarak kağıt-kalem testi, görüşme ve doküman kullanılmıştır. Böylece veri çeşitlemesi yapılarak çalışmanın geçerliği ve güvenilirliği artırılmıştır (Yin, 1994, s. 91). Bu çalışmada veri toplamak için şunlar hazırlanmıştır:

- Haftalık dersler
- Haftalık görüşme soruları/Görevler
- Haftalık alıştırmalar soruları/Görevler
- Kesirlerle çarpma ve bölme testi (KÇB testi)
- Rubrik (KÇB testini puanlama)

Bu veri toplama araçları hazırlandıktan sonra pilot çalışma gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışma sonunda gerekli düzeltmeler yapılarak veri toplama araçları son haline getirilmiştir. Çalışma sürecine ait çalışma takvimi Tablo 3.1’de verilmiştir.

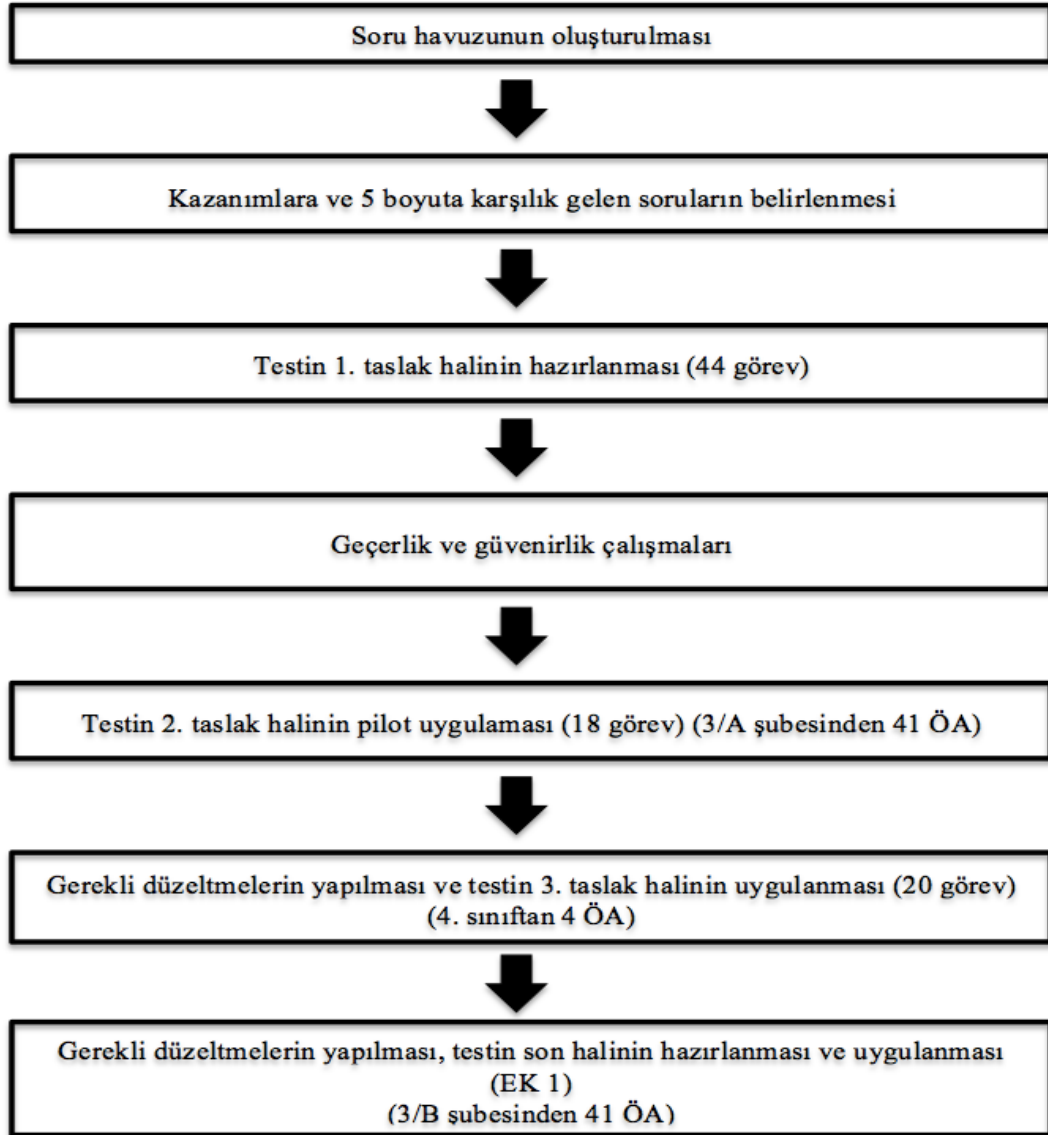
Tablo 3.1.

Çalışma Takvimi

Yapılanlar	Tarihler
Literatür inceleme ve kuramsal çatının belirlenmesi	Şubat 2013-Aralık 2013
Veri toplama araçlarının hazırlanması	Ocak 2014-Temmuz 2014
Gönüllü katılımcıların belirlenmesi, veri toplama araçlarının denenmesi (Pilot çalışma)	Ekim 2014-Aralık 2014
Veri toplama araçlarının düzenlenmesi ve son halinin hazırlanması	Ocak 2015-Şubat 2015
Verilerin toplanması (Esas çalışma)	Şubat 2015-Haziran 2015
Verilerin transkript edilmesi/çözümlemesi	Ağustos 2015-Mart 2016
Verilerin analizi	Nisan 2016-Aralık 2016
Literatürün yazılması	Ocak 2017-Şubat 2017
Bulgular ve sonuç, tartışmaların yazılması	Şubat 2017-Mayıs 2017

3.4.1. KÇB Testinin Geliştirilmesi ve Uygulanması

Öğretmen adaylarının öğretimden önce kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin model çizme, problem kurma, matematiksel ifade yazma, gerekçelendirme ve açıklama bilgilerinin başlangıçtaki durumlarını ve öğretimden sonra son durumlarını belirlemek için bir kağıt-kalem testi geliştirilmiştir. Bu test “*Kesirlerle Çarpma ve Bölme Testi (KÇB testi)*” olarak ifade edilmiştir. Bu testin geliştirilmesi süreci Şekil 3.2’de verilmiştir. Buna göre önce kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin verilen işlem ve problem için model çizmeyi, verilen işlem ve model için problem kurmayı, verilen model ve problem için matematiksel ifade yazmayı, verilen bir durum için gerekçelendirme ve açıklama yapmayı içeren görevler hazırlanmıştır ve soru havuzu oluşturulmuştur. Bu süreçte araştırmacının araştırma için Amerika’da bulunduğu sürede katıldığı Dr. Izsák ve Dr. Beckmann’ın araştırma ekibinde proje (PROMPT, 2013) için kullanılan görevlerden bazıları izin alınarak ve Türkçe’ye uyarlanarak bu havuza dahil edilmiştir. Bunun yanı sıra ilgili literatürden (Beckmann, 2005; Dixon ve Tobias, 2013; Izsák, 2006a; Lamon, 1999) elde edilen görevlerden bazıları da bu havuza ilave edilmiştir. Sonra bu görevlerden kesirlerle çarpma ve bölme kazanımlarının her birine eşit sayıda karşılık gelecek şekilde testte yer alacak görevler seçilmiştir. Böylece 44 görevin yer aldığı testin taslak hali hazırlanmıştır ve görevlerin uygunluğunu değerlendirmek üzere alanında uzman 3 öğretim üyesi ile matematik eğitiminde doktora yapmakta olan, öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamalarının incelendiği bir projede yer almış doktora tez aşamasında bulunan 3 araştırma görevlisine danışılmıştır. Alınan uzman görüşünden sonra gerekli düzeltmeler yapılarak bazı görevler çıkartılmıştır, yeni görevler ilave edilmiştir, bazıları maddelendirilerek bir görev altında birleştirilmiştir ve 18 görevin yer aldığı testin yeni hali hazırlanmıştır. 18 görevin yer aldığı testin taslak hali pilot çalışmaya katılan 41 öğretmen adayına uygulanmıştır. Pilot çalışmanın sonunda bu testte yer alan görevler düzeltilmiştir ve teste yeni görevler ilave edilmiştir. Buna göre pilot çalışmadan sonra testte 20 görevin her birinin altında yer alan maddelerle beraber 41 madde bulunmaktadır. Test son kez bu sefer 4. sınıfta öğrenim görmekte olan 4 ilköğretim matematik öğretmen adayına uygulanmıştır. Bu uygulamanın sonucunda gerekli düzeltmeler yapılmıştır ancak madde sayısında herhangi bir değişiklik olmamıştır. Böylece KÇB testi son halini almıştır (EK 1).



Şekil 3.2. KÇB testinin geliştirilmesi süreci

KÇB testinin pilot çalışmada uygulanması toplam 2,5 saat sürmüştür. Uygulamanın ilk bir saatinin bitmesinin ardından öğretmen adayları testte çok soru olmasından ve uzun zaman almasından şikayette bulunmuşlardır. Bunun üzerine 15 dakikalık yemek arası verilerek öğretmen adaylarına yiyecek ikram edilmiştir. Böylece testin kalan kısmını biraz daha rahatlamış bir şekilde cevaplamaya devam ettikleri görülmüştür. Ancak son yarım saat içinde öğretmen adaylarının motivasyonunun düştüğü ve oldukça sıkıldıkları gözlemlenmiştir. Bütün bu durumlar testin son halinin uygulanmasında göz önüne alınarak değişikliklere gidilmiştir. Buna göre pilot çalışmada tek oturumda gerçekleştirilen uygulama, esas çalışmada öğleden önce ve öğleden sonra olacak şekilde iki oturumda gerçekleştirilmiştir. Bu uygulama sırasında da yiyecek-içecek ikramlarında bulunulmuştur. Böylece testin son halinin esas çalışmada uygulanması toplam 3 saat sürmüştür.

3.4.2. Rubrik Hazırlama Süreci

Rubrikler performans ölçülmesinde kullanılan kontrol listesinin aksine derecelendirme ölçekleridir. Bunlar genellikle puanlama yönegesi olarak tanımlanır, daha önceden tahmin edilen belirli performans kriterlerinden oluşur ve öğrencilerin performans ölçülmesindeki çalışmasının değerlendirilmesinde kullanılır. Rubrikler genellikle öğrenci performanslarının veya performans görevlerinin sonucunda çıkan ürünlerin değerlendirilmesinde kullanılan puanlama aracının özel bir şeklidir (Mertler, 2001). Belirli bir öğretim süreci sonunda beklenen öğrenci performansları farklı boyut ve düzeylere bölünerek değerlendirilir. Rubrik ülkemizde “değerlendirme ölçeği”, “puanlama yönegesi”, “dereceli puanlama anahtarı” veya “derecelendirme ölçeği” olarak da ifade edilmektedir (Sezer, 2005). İki tür rubrik vardır; bütüncül (holistic) ve analitik (analytic) rubrik. Bütüncül rubrik öğretmenin parçaları ayrı ayrı değerlendirmeksizin tüm süreci veya ürünün tamamını puanlamasını gerektirir. Analitik rubrikte öğretmen önce ürünün veya performansın parçalarını ayrı ayrı puanlar, sonra bu bireysel puanları toplayarak toplam puan elde eder (Nitko’dan aktaran Mertler, 2001). Ölçülecek performansı farklı boyutlara ayırmadan, özelliklerin tümünün farklı düzeyler için tanımlanması yapılacağında bütüncül, ölçülecek performansı oluşturan özellikleri alt boyutlarına ayırarak farklı performans düzeyleri için tanımlar yapıldığında analitik rubrik geliştirilir (Sezer, 2005).

Bu çalışmada ön-test ve son-test olarak uygulanan KÇB testinin değerlendirilmesinde analitik rubrik hazırlanmıştır. Bu testte açık uçlu 20 tane soru yer almaktadır ve her bir sorunun altında da maddeler yer almaktadır. Buna göre bu rubrik ile puanlanması gereken 41 madde bulunmaktadır. Bu testte yer alan maddeler 5 boyutu oluşturmaktadır; model çizme, problem kurma, matematiksel ifade yazma, gerekçelendirme ve açıklama. Bu rubrik de bu beş boyutu ayrı ayrı değerlendirecek şekilde hazırlanmıştır. Rubriğin 4 düzeyi bulunmaktadır (Tablo 3.2); “yok = 0 puan”, “uygun değil = 1 puan”, “uygun, eksik = 2 puan” ve “uygun, tam = 3 puan”. Sezer (2005) rubrikte performans düzeyini gösteren kategori sayısında bir sınırlama olmadığını ancak 6’dan fazla olması durumunda her bir boyut için bu düzeylerin gözlenebilmesinin ve ölçülebilmesinin zor olduğunu belirtmiştir. Rubriğin güvenilirliği uzmanlara danışılarak sağlanmıştır. Buna göre alanında uzman 3 öğretim elemanından rubriğin boyutları ve düzeylerinin uygunluğu açısından değerlendirilmesi istenmiştir ve buna göre gerekli düzeltmeler yapılarak rubriğin son hali kullanılmıştır (EK 2).

Tablo 3.2.

KÇB Testini Değerlendirmek İçin Hazırlanan Analitik Rubriğin Boyutları ve Düzeyleri

Boyutlar	Düzeyler			
	0	1	2	3
Matematiksel ifade yazma	Yok	Uygun değil	Uygun, eksik	Uygun, tam
Model çizme	Yok	Uygun değil	Uygun, eksik	Uygun, tam
Problem kurma	Yok	Uygun değil	Uygun, eksik	Uygun, tam
Gerekçelendirme	Yok	Uygun değil	Uygun, eksik	Uygun, tam
Açıklama	Yok	Uygun değil	Uygun, eksik	Uygun, tam

Testte yer alan her bir boyut bu düzeylere göre puanlanmıştır. Puanlamanın güvenilirliğini sağlamak için alanında uzman bir öğretim elemanından bu teste verilen cevapları puanlaması istenmiştir. Böylece kodlamanın güvenilirliğine bakılmıştır. Öğretim elemanı testte yer alan maddeleri puanladıktan sonra araştırmacının puanlaması ile karşılaştırılmıştır. Bu testte toplam 1681 kodlama (20 madde, alt maddeleriyle beraber 41 madde ve 41 kişiden) vardır ve puanlayıcılar arasında (1681-201) tane aynı kodlama yapılmıştır. Buna göre puanlayıcılar arası uyum, aynı kodlamalar toplam kodlamalara bölünerek yani $\frac{1681-201}{1681} = 0,88$ ile bulunmuştur (Miles ve Huberman, 1994, s. 64). Buna göre kodlayıcılar arası güvenilirlik %88'dir. Bu güvenilirlik yüzdesinin en az %80 olması yeterli görülmektedir. Bu orana ulaşamadığı durumlarda kodlar üzerinde birlikte çalışılarak fikir birliğine ulaşılmaya çalışılmaktadır (Miles ve Huberman, 1994; Yıldırım ve Şimşek, 2016, s. 247). Daha sonra farklı kodlamalar üzerine çalışmak için kodlamayı yapan öğretim elemanı ile bir araya gelinmiştir ve fikir birliği sağlanmıştır.

3.4.3. Görüşmeler

Görüşme nitel araştırmalarda en çok kullanılan veri toplama aracıdır. Görüşme yoluyla deneyimler, düşünceler, tutumlar, yorumlar, niyetler ve zihinsel algılar gibi gözlenemeyen durumlar anlaşılmaya çalışılır. Görüşme sırasında görüşmeci görüşülen kişinin rahat, dürüst ve doğru bir şekilde tepkide bulunmasını sağlamalıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2016, s. 129). Nitel bir görüşmede araştırmacılar bir veya daha çok katılımcıya açık uçlu sorular sorar ve cevaplarını kaydeder. Bunun bir katılımcı ve bir görüşmeci arasında yapılanına birebir görüşmeler denilmektedir. Bu görüşme türü duraksamadan konuşan, fikirlerini rahat bir şekilde paylaşılan ve konuşkan katılımcılarla görüşme yapmak için idealdir. Nitel projelerde birkaç birebir görüşmeler kullanılabilir. Bunun yanısıra odak grup

görüşmesi, telefon görüşmesi, e-mail görüşmesi gibi görüşme türleri de bulunmaktadır (Creswell, 2012, s. 218-219). Bu çalışmada birebir görüşmeler gerçekleştirilmiştir.

Görüşmeler üçe ayrılır; yapılandırılmış, yarı yapılandırılmış ve yapılandırılmamış görüşme (Merriam, 2015, s. 87; Berg, 1998, s. 60). Yapılandırılmış görüşmelerde görüşme soruları önceden hazırlanmıştır, görüşme sırasında her katılımcıya aynı sorular sorulur ve bu soruların dışında sorular sorulmamaktadır. Yapılandırılmamış görüşmelerde görüşme soruları önceden hazırlanmamıştır ve görüşmeciler görüşme esnasında verilen duruma uygun sorular geliştirmektedir. Yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılandırılmış ile yapılandırılmamış görüşme arasında bir yapıya sahiptir. Bu görüşme türünde görüşme soruları önceden hazırdir, her görüşmede aynı sırayla katılımcıya sorulur ancak görüşmeci bu soruların cevabına ulaşmak için görüşme sırasında alt sorular ekleyebilmektedir (Berg, 1998, s. 60-61). Bu çalışmada öğretmen adaylarıyla her hafta derslere paralel olarak yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerde o hafta derste verilen kazanıma yönelik görevler verilmiştir ve alt sorularla desteklenmiştir. Derse paralel yapılan görüşmelerin yanısıra ön-test uygulandıktan sonra ve son-test uygulandıktan sonra bu testlere ilişkin görüşmeler de yapılmıştır. Böylece testlerde verdikleri cevapları nasıl düşünerek yaptıklarının ortaya koyulması planlanmıştır. Derslerde yaptıkları alıştırmalara ilişkin görüşme yapılmaması bir sınırlılık olarak görülebilir. Yapılan bu görüşmelerde öğretmen adaylarının model çizme sürecinde veya problem kurma sırasında kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamalarını ortaya çıkaracak şöyle alt sorular sorulmuştur:

- Çizdiğin modelde verilen işlemdeki sayılar görülüyor mu?
- İşlemdeki sayılar ne ifade ediyor?
- Kurduğun problemin verilen işlemi yansıtıyor mu?
- Çizdiğin modelde verilen işlem görülüyor mu?
- Ters çevir çarp algoritmasından gelen bu sayı ne ifade ediyor, modelde görülüyor mu?
- Verilen model neden bu işlemi gösteriyor?
- Modelden elde ettiğin sonuç ile işlemin sonucu eşleşmiyorsa bunu nasıl açıklarsın?
- Bu işlem ne ifade ediyor?

Görüşme ile elde edilen veriler kamera veya ses kayıt cihazı ile kaydederek veya not alarak kaydedilebilir. Kayıt cihazı kullanıldığında araştırmacı daha etkili bir şekilde soru sorabilir ve dinleyebilir. Not almada ise soru sorma, dinleme ve not alma işinin hepsini birden gerçekleştirmesi gerekmektedir. Kayıt cihazı kullanılacağında görüşülecek kişilerden izin

alınması gereklidir. Bununla beraber kayıt cihazının çalışıp çalışmadığı test edilmelidir, pilinin bitmesi durumunda ne yapılması gerektiğine ilişkin önlemler alınmalıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2016, s. 153). Bu çalışmada öğretmen adaylarından gerekli izin alınarak görüşmeler çalışma boyunca kamera ile kaydedilmiştir. Kamera özellikle bu çalışmada kullanılmak üzere araştırmacı tarafından temin edilen kişisel bir el kamerasıdır. Bu kamera pille çalışmaktadır ve pilin şarj süresi (1,5 saat) yeterli görülmediği için tedbir amaçlı yedek piller alınmıştır. Bununla beraber görüşmeler sırasında elektriğe bağlı şekilde daha uzun süre kullanabilmek adına şarj aleti takılı şekilde kayıt yapılmıştır. Kameranın kayıt hafızası yeterli düzeydedir ancak tedbir amaçlı yedek bir hafıza kartı bulundurulmuştur. Kamera çekimlerinin rahat yapılabilmesi için tripod kullanılmıştır ve her görüşme öncesi kamera bunun üzerine kurularak sabitlenmiştir. Bu şekilde görüşme sırasında gerekli olduğunda kamera daha rahat bir şekilde hareket ettirilerek kayıt gerçekleştirilmiştir. Kamera pilot çalışmada kullanılarak deneme çekimleri yapılmıştır ve karşılaşılabilecek olumsuz durumlar esas çalışma öncesi ortadan kaldırılmıştır. Bu çalışma sırasında elde edilen görüşme videoları izlendiğinde kameranın mikrofon ayarlarının yeterli olduğu ve ekstra bir mikrofona ihtiyaç olmadığı görülmüştür. Öğretmen adayının sesinin net bir şekilde kaydedilmesi önemlidir çünkü daha sonra bu kayıtlardan elde edilen veriler çözümlenerek analiz edilecektir yani çalışmanın temel veri kaynağıdır. Bu yüzden buna özellikle özen gösterilmiştir.

3.4.4. Dokümanlar

Doküman incelemesi, araştırılması hedeflenen olgu veya olgular hakkında bilgi içeren yazılı materyallerin analizini içerir. Dokümanlar, nitel araştırmalarda etkili bir şekilde kullanılması gereken önemli bilgi kaynaklarıdır. Dokümanlar tek başına kullanılabileceği gibi gözlem ve görüşme gibi diğer veri toplama yöntemleriyle beraber de kullanılabilir. Böylece veri çeşitliliği sağlanarak araştırmanın geçerliği ve güvenilirliği artırılmış olur. Şu tür dokümanlar veri kaynağı olarak kullanılabilir; dergi, kitap, resmi belgeler, yazılar, mektuplar, günlükler, film, video, fotoğraf (Yıldırım ve Şimşek, 2016, s. 190). Durum çalışmalarında dokümanların kullanımının en önemli yanı diğer kaynaklardan elde edilen bulguları artırması ve desteklemesidir. Dokümanlar görüşmede geçen örgütlerin (organization) doğru yazılışları, başlıkları veya isimlerini doğrulamaya yardımcı olur ve diğer kaynaklardan elde edilen bilgileri destekleyecek başka özel detaylar sağlar (Yin, 1994, s. 81).

Nitel araştırmalarda dokümanlar değerli bir bilgi kaynağıdır. Dokümanlar çalışmadaki katılımcılara veya durumlara ilişkin araştırmacının elde ettiği herkese açık veya gizli kayıtlardan oluşur, bunlar gazeteler, toplantı raporları, günlükler ve mektuplar olabilir. Bu kaynaklar araştırmacıya çalışılan olguya ilişkin değerli bilgiler sağlar (Creswell, 2012, s. 223). Bu çalışmada görüşmelerdeki görevlerin çözüldüğü kağıtlar ve ğretmen adaylarının derste kullandıkları defterler doküman olarak kullanılmıştır. Bu defterlerdeki ğretmen adaylarına haftalık verilen alıştırmaların çözümleri ele alınarak analiz yapılmıştır. Öğretmen adaylarından çalışmanın başında ğretim boyunca deftere not almaları ve çözümleri deftere yazmaları istenmiştir. Birçoğu düzenli olarak not tutmuştur ve alıştırmaların çözümlerini deftere yazmışlardır ancak bazıları defter yerine alıştırmalar kağınınn üzerine çözmüşlerdir, bazıları da her alıştırmayı çözmemiştir. Öğretimin sonunda ğretmen adaylarının defterlerinin fotokopisi çekilmiştir ve verilerin analizi sürecinde ders esnasında deftere ve kağıtlara çözdükleri alıştırmaların cevapları da değerlendirilmiştir.

Defterlerin yanısıra görüşme dokümanları da vardır. Görüşmede görevler her bir sayfada bir tane olacak şekilde ğretmen adaylarına verilmiştir ve görüşmenin sonunda bu kağıtlar araştırmacıda kalmıştır. Görüşme transkriptleri analiz edilirken bu kağıtlar kullanılmıştır.

3.5. Pilot alışma

Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin özelleştirilmiş alan bilgilerinin gelişiminin incelenmesi için kavramsal anlama kazandırmaya dayalı bir ğretim hazırlanmıştır. Bu ğretim sürecinde, KB testinde ve görüşmelerde kullanılmak üzere hazırlanan görevlerin uygunluğunun ve uygulama sürecinin değerlendirilmesi için 3. sınıfta öğrenim gören ğretmen adaylarının başka bir şubesiyle pilot bir uygulama gerçekleştirilmiştir. Buna göre esas uygulama esnasında karşılaşılabilecek zorlukların giderilmesi planlanmıştır.

Pilot uygulamaya Ankara'da bir devlet niversitesinde İlköğretim Matematik ğretmenliği Programında 3. sınıfta öğrenim gören 41 ğretmen adayı katılmıştır. nce ğretmen adaylarının tamamına KB testinin 2. taslak hali ön-test olarak uygulanmıştır. Öğretmen adayları bu testin çok uzun sürmesinden ve tek oturumda gerçekleştirilmesinden çok şikayetçi olmuşlardır. Bu durum pilot çalışmada karşılaşılan ilk zorluk olmuştur. Sonra bu ğretmen adaylarıyla haftada 1 saat olmak üzere 7 hafta kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin ğretim gerçekleştirilmiştir. Bu ğretim 20 dk. sunum, 20 dk. grup çalışması ve 20 dk. sınıf tartışması şeklinde uygulanmıştır. Buna göre derslerin ilk 20 dakikasında

öğretmen adaylarına kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kazanımlar sırasıyla powerpointle sunum şeklinde verilmiştir. Bu sunumlarda kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinin anlamı kazandırılmaya çalışılmıştır. Derslerin ikinci 20 dakikasında öğretmen adaylarından 4-5 kişilik gruplar oluşturmaları istenmiştir. Öğretmen adayları bu grupları her ders aynı şekilde oluşturmak zorunda tutulmamıştır. Böylece farklı gruplar oluşturularak farklı kişilerle de fikir alışverişinde bulunma fırsatı bulabilmişlerdir. Öğretmen adaylarının her birine o günkü derse paralel alıştırmalar kağıdı verilmiştir. Bu alıştırmalar model çizme, problem kurma, matematiksel ifade yazma ve gerekçelendirme etkinliklerini içeren görevlerden oluşmaktadır. Buna göre her hafta derse paralel verilen alıştırmalarda verilen işlem için problem kurdukları ve model çizdikleri, verilen model için matematiksel ifade yazdıkları, verilen problem için matematiksel ifade yazdıkları ve neden o işlem olduğunu gerekçelendirdikleri toplam 6 görev yer almaktadır (EK 3). Öğretmen adaylarından bu görevleri önce kendilerinin çözmeleri sonra çözümlerini grup içi tartışmaları istenmiştir.

Öğretmen adaylarına derslerde kullanmaları için defterler verilmiştir ve özellikle alıştırmalara ilişkin çözümlerini bu defterlere yazmaları istenmiştir. Her dersin sonunda bu defterler toplanmıştır ve bir sonraki ders tekrar dağıtılmıştır. Derslerin son 20 dakikasında her bir gruptan görevlere ilişkin çözümler istenmiştir ve bu çözümler üzerine sınıf tartışması yapılmıştır. Bütün dersler ve KÇB testinin uygulanması sırasında çalışmanın güvenilirliği açısından öğretmen adaylarının izni alınarak kamera ile kayıt edilmiştir. Kamera tüm sınıfı görecektir şekilde sınıfın bir köşesine sabitlenmiştir. Kameranın konumu öğretmen adaylarının sırtı kameraya dönük olacak şekilde oturmalarına göre ayarlanmıştır, böylece öğretmen adaylarının yüzlerinin kayıtlarda görünmemesi sağlanmıştır. Dersler tüm sınıfla gerçekleştirilmiştir ve bazı öğretmen adaylarının istekli bir şekilde katılmadığı gözlemlenmiştir. Bu kişiler özellikle grup çalışmalarında grup oluşturmak istememe, alıştırmaları çözmeme ve sunum sırasında başkalarıyla konuşma veya başka şeylerle ilgilenme şeklinde davranışlar ortaya koymuşlardır. Bu durum pilot çalışmada karşılaşılan ikinci zorluk olmuştur. Öğretim sırasında karşılaşılan diğer bir zorluk da alıştırmalardaki görev sayısının çok olması ve bu yüzden ayrılan 20 dakikalık zamanın yetmemesi olmuştur.

Dersler her hafta gerçekleştirilirken öğretmen adaylarının gönüllü olanlarından 3'ü ile derslere paralel görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmeler öğretmen adaylarıyla bireysel olarak ayrı ayrı yapılmıştır ve genellikle 80-90 dk. sürmüştür. Derse paralel

gerçekleştirilen bu görüşmelerde yine model çizme, problem kurma ve matematiksel ifade yazma etkinliklerini içeren görevler yer almıştır. Bu görüşmeler yarı yapılandırılmış görüşmeler şeklindedir ve görüşme esnasında alt sorularla desteklenmiştir. Görüşmeler sadece öğretmen adaylarının üzerinde çalıştığı kağıdı çekecek şekilde sabitlenerek kamera ile kayıt edilmiştir. Bu kayıtlarda öğretmen adaylarının yüzleri görünmemektedir, sadece sesleri duyulmaktadır. Görüşmelerde bir görev bir sayfada yer alacak şekilde 5 görev verilmiştir (EK 4). Bu görevlerde verilen işlem için problem kurmaları ve model çizmeleri, verilen problem için matematiksel ifade yazmaları ve model çizmeleri ve verilen model için matematiksel ifade yazmaları ve problem kurmaları istenmiştir. Bu görevler sırasında alt sorularla öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamalarına dair bilgi edinilmeye çalışılmıştır. Görüşmelerde fazla sayıda görevin yer alması ve görüşme süresinin uzun olması pilot çalışmada karşılaşılan diğer bir zorluk olmuştur.

Dersler ve görüşmeler 7 hafta boyunca gerçekleştirildikten sonra başlangıçta uygulanan KÇB testi son-test olarak tekrar uygulanmıştır. Böylece ön-testten son-teste kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamalarındaki gelişmelerin daha somut bir şekilde görülmesi planlanmıştır. Son-test uygulandıktan sonra görüşmelere katılan 3 öğretmen adayıyla yine ayrı ayrı olarak bu teste ve ön-teste verdikleri cevapları üzerinden son bir görüşme yapılmıştır. Bu görüşmede ön-testte verdikleri cevapları nasıl yaptıklarını çok fazla hatırlamadıkları görülmüştür. Bu da pilot çalışmada karşılaşılan diğer bir zorluk olmuştur.

Pilot çalışmada karşılaşılan zorluklar sonrasında tez izleme kuruluna danışılarak veri toplama araçlarında ve uygulama sürecinde şu düzeltmelerin yapılmasına karar verilmiştir:

- KÇB testinin ikiye parçalanarak iki oturum şeklinde uygulanması
- Öğretmen adaylarının defterlerinin her dersin sonunda toplanmaması ve kendilerinin defterleri yanlarında götürmesinin sağlanması
- Alıştırmalarda ve görüşmelerde yer alan görev sayısının azaltılması
- Tüm sınıf yerine gönüllülerden seçilen küçük bir grupta (6-7 kişi) öğretimin gerçekleştirilmesi
- Son-testin yanısıra ön-teste ilişkin görüşmenin de uygulanmasının hemen arkasından yapılması

3.6. Veri Toplama Süreci

Öğretime başlamadan belirlenen 6 öğretmen adayına KÇB testi ön-test olarak uygulanmıştır. Bu öğretmen adaylarıyla önce ön-teste ilişkin görüşme yapılmıştır, sonra 6

hafta boyunca kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin öğretim gerçekleştirilmiştir ve her hafta derslere paralel görüşmeler yapılmıştır. Daha sonra bu öğretmen adaylarına aynı KÇB testi son-test olarak uygulanmıştır ve öğretmen adaylarıyla son-teste ilişkin görüşme yapılmıştır. Veri toplama sürecine ait çalışma takvimi Tablo 3.3'te verilmiştir.

Tablo 3.3.

Veri Toplama Sürecine Ait Çalışma Takvimi

Tarihler	Yapılanlar
23-25.02.2015	Ön-test
25.02.2015-15.03.2015	Ön-testin değerlendirilmesi
16.03.2015	G1 (Ön-teste ilişkin yapılan görüşme)
23.03.2015	D1 (Kesirler) (K1) + A1 (Kesirler) + A2 (K1) + G2 (K1)
30.03.2015	D2 (K2) + A3 (K2) + A4 (K1 ve K2) + G3 (K1 ve K2)
Vize haftası (06-10.04.2015)	-
13.04.2015	D3 (K3 ve K4) + A5 (K3 ve K4) + G4 (K3 ve K4)
Vize sonrası tatil (20.04.2015)	-
27.04.2015	D4 (K3 ve K4) + ÖDEV (K3 ve K4) + A6 (K3 ve K4) + G5 (K3 ve K4)
04.05.2015	D5 (K5) + A7 (K5) + A8 (K5) + G6 (K3, K4 ve K5)
11.05.2015	D6 (K1, K2, K3, K4 ve K5) + A9 (K1, K2, K3, K4 ve K5) + G7 (K1, K2, K3, K4 ve K5)
18.05.2015	Son-test
20-23.05.2015	G8 (Son-teste ilişkin yapılan görüşme)

Yukarıda verilen tablo veri toplama sürecini özetlemektedir ve veri toplama sürecine ait bir zaman çizelgesi sunmaktadır. Burada dersler D1, D2, D3, D4, D5, D6 olarak; kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin öğretim programında yer alan kazanımlar K1, K2, K3, K4, K5 olarak ve haftalık derslere paralel yapılan görüşmeler ve ön-test ile son-teste ilişkin yapılan görüşmeler G1, G2,...,G8 olarak kodlanmıştır. Veri toplama sürecinde yapılanlar sırasıyla daha ayrıntılı bir şekilde şöyle ifade edilebilir:

1. KÇB testi 41 ÖA'ya ön-test olarak uygulanmıştır. Böylece öğretmen adaylarının KÇB'ye ilişkin bilgilerinin başlangıçtaki durumunun belirlenmesi planlanmıştır. Buna göre KÇB testine verdikleri cevaplar puanlanmıştır ve bu puanlara göre başlangıç durumları yüksek, orta ve düşük olmak üzere 3 grup oluşturulmuştur. Bununla beraber öğretmen adaylarının bu teste verdikleri cevaplar nitel olarak da incelenip işlemsel, kavramsal ve hem işlemsel hem kavramsal bilgilerine sahip olanlar belirlenmiştir.
2. Öğretim sürecine ve haftalık görüşmelere katılacak gönüllü öğretmen adaylarından 6'sı seçilmiştir. Bu seçimde öğretmen adaylarının KÇB ön-testinden aldıkları puanlara göre oluşturulan yüksek, orta ve düşük gruptan ikişer kişi olması dikkate alınmıştır. Bununla beraber kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin işlemsel bilgi,

kavramsal bilgi ve hem işlemsel hem kavramsal bilgi sahibi kişilerden olmalarına özen gösterilmiştir. Seçilen öğretmen adaylarıyla KÇB ön-testine ilişkin görüşme yapılmıştır.

3. Seçilen öğretmen adaylarıyla 6 hafta boyunca kesirler, kesirlerle çarpma ve kesirlerle bölmeye ilişkin öğretim gerçekleştirilmiştir. Bu öğretim öğretmen adaylarına çarpma ve bölmenin anlamını kazandıracak şekilde kavramsal anlamaya dayalı olarak hazırlanmıştır. Buna göre öğretim sürecinde kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin model çizme, problem kurma, matematiksel ifade yazma, gerekçelendirme ve açıklama etkinliklerine ilişkin fazla sayıda deneyim yaşamışlardır. Bu yaşantıları yoluyla KÇB'ye ilişkin kavramsal anlamalarının artması ve dolayısıyla ÖAB'lerinin de gelişmesi planlanmıştır.
4. Derslere paralel olarak her hafta her bir öğretmen adayıyla ayrı ayrı olarak görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmelerde model çizme, problem kurma, matematiksel ifade yazma, gerekçelendirme ve açıklama görevleri yer almaktadır. Böylece haftadan haftaya ÖAB'lerinde gelişimin gözlenmesi planlanmıştır.
5. Dersler bittikten sonra başlangıçta uygulanan KÇB testi son-test olarak 6 ÖA'ya uygulanmıştır. Böylece ön-testten son-testte doğru öğretmen adaylarının KÇB'ye ilişkin anlamalarının gelişimine ilişkin somut kanıtlar elde edilmesi planlanmıştır. Son-testin uygulandığı aynı hafta her bir öğretmen adayıyla son-teste ilişkin son bir görüşme yapılmıştır. Böylece her bir öğretmen adayıyla toplam 8 görüşme yapılmıştır.

Öncelikle çalışmanın yapılması düşünülen öğretmen adaylarıyla çalışmanın içeriği ve süreci hakkında konuşulmuştur. Öğretmen adaylarına KÇB testinin uygulanacağı ve bu uygulama süresince kamera ile kayıt edileceği açıklanmıştır. Öğretmen adaylarının uygulamayı ve çekimi kabul etmeleri üzerine sınıf ortamında hazırlığa başlanmıştır. Önce sınıfın tamamını görecektir şekilde sınıfın bir köşesine kamera sabitlenerek kayda hazır hale getirilmiştir. Bu kayıttan elde edilen veriler veri analizinde kullanma amaçlı değildir, bu kayıtlar tamamen çalışmanın güvenilirliği açısından gerçekleştirilmiştir. Sonra sınıfta bulunan 41 öğretmen adayına KÇB testi dağıtılmıştır. Bu testin dışında boş kağıt verilmemiştir çünkü her sorunun altında yeteri kadar boşluk bırakılmıştır. Testi çözmeye başlamadan önce öğretmen adaylarına bu testin bilgilerini ölçme amaçlı olmadığı özellikle vurgulanmıştır ve öğretmen adaylarından gerçekten fikirlerinin olmadığı soruları boş bırakmaları istenmiştir. Bununla beraber daha sonra gerçekleştirilecek öğretime ve

görüşmelere katılmaya gönüllü olanların testin ilk sayfasına “gönüllüyüm” şeklinde yazması istenmiştir. Öğretmen adaylarının soruları cevaplaması sırasında araştırmacı ara sıra sıralar arasında dolaşmıştır. Bu testin uygulanması iki aşamada gerçekleştirilmiştir; ilk 10 soru ve son 10 soru. İlk aşamada ilk 10 soruyu çözmeleri istenmiştir ve bu aşamayı tamamlamaları yaklaşık 1,5 saat sürmüştür. Sonra 30-40 dakikalık yemek arası verilmiştir ve öğretmen adaylarına araştırmacı tarafından yiyecek ikramında bulunulmuştur. Yemek yedikten sonra daha motive olan öğretmen adayları son 10 soruyu çözmüşlerdir ve bu ikinci aşama da yaklaşık 1,5 saat sürmüştür. Bu şekilde ön-test uygulaması tamamlanmıştır ve testler toplanarak kamera kaydı bitirilmiştir.

Ön-testin uygulanmasından hemen sonra testlere verilen cevaplar değerlendirilmeye başlanmıştır ve bu yaklaşık 2 hafta sürmüştür. Bu süreçte bu cevaplar hazırlanan rubriğe göre puanlanmıştır, sonra bu puanlamanın güvenilirliği için bir öğretim elemanının da puanlaması istenmiştir ve bu şekilde kodlayıcılar arası güvenirlik %88 bulunmuştur. Miles ve Huberman (1994)’a göre bu değer yeterli düzeydedir (s. 64). Daha sonra bu testlerden hesaplanan toplam puanlara göre öğretmen adayları üç gruba ayrılmıştır; yüksek, orta ve düşük. Bu gruplar öğretmen adaylarının KÇB’ye ilişkin model çizme, problem kurma, matematiksel ifade yazma, gerekçelendirme ve açıklama boyutlarındaki bilgilerinin başlangıç durumlarını göstermektedir. Bununla beraber öğretmen adaylarının teste verdikleri cevaplar nitel olarak da analiz edilmiştir ve işlemsel, kavramsal ve hem işlemsel hem kavramsal bilgiye sahip olan öğretmen adayları belirlenmiştir. Bu belirlemelerin ardından öğretmen adaylarının içinden gönüllü olmaları esas alınarak her gruptan iki kişi olacak şekilde 6 kişi seçilmiştir. Bu kişilerin seçilmesi sırasında aynı zamanda işlemsel ve/veya kavramsal bilgiye sahip olmaları da dikkate alınmıştır.

Öğretmen adaylarının seçilmesinin ardından bu öğretmen adaylarına KÇB’ye ilişkin gerçekleştirilecek dersin yeri ve zamanı haber verilmiştir. Dersler başlamadan önce seçilen öğretmen adaylarıyla ön-teste ilişkin görüşme (G1) yapılmıştır. Bu görüşmede öğretmen adaylarının testteki çözümlerinin açık olmayan kısımları açık hale getirmek istenmiştir. Öğretmen adaylarına bu görüşmede “Burada ne demek istedin?”, “Bu işlem ne ifade ediyor?”, “Bu problemin işleme uygunluğu hakkında ne düşünüyorsun?”, “Modeli nasıl çizdin?”, “Problemi nasıl kurdun?” gibi sorular yöneltilmiştir.

Dersler haftada bir saat olmak üzere 6 hafta boyunca sadece 6 öğretmen adayıyla araştırmacı tarafından gerçekleştirilmiştir. Bütün dersler kamera ile kayıt altına alınmıştır ancak veri analizinde kullanılmamıştır. Bu kayıtlar tamamen çalışmanın güvenirliği

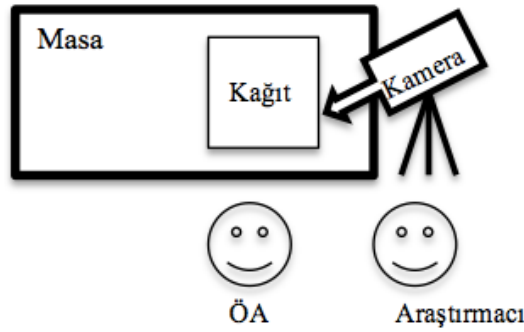
açısından yapılmıştır. Her ders kamera sınıfın bir kesine tahtayı ve ğretmen adaylarını sırtından gorecek şekilde sabitlenerek yerleştirilmiştir. İlk ders ğretmen adaylarına ğretim boyunca kullanabilecekleri defterler dağıtılmıştır. Bu defterleri her hafta derse getirmeleri ve özellikle alıştırmaların cmlerini deftere yazmaları istenmiştir. Bu şekilde dersler bittikten sonra ğretmen adaylarının defterlerinin veri analizinde kullanılması planlanmıştır.

Öğretmen adaylarıyla ğretim süreci boyunca dersler 20 dakika sunum, 20 dakika grup içi tartışma ve 20 dakika sınıf tartışması şeklinde gerçekleştirilmiştir. Buna gore dersin ilk 20 dakikasında araştırmacı tarafından powerpoint ile konu sunumu yapılmıştır, ikinci 20 dakikasında ğretmen adaylarından 2-3 kişilik gruplar oluşturmaları istenmiştir ve her bir ğretmen adaya konuya ilişkin alıştırmalar verilmiştir. Bu dersler ve alıştırmalarda yer alan görevler ğretmen adaylarına KB'ye ilişkin kavramsal anlama kazandıracak şekilde araştırmacı tarafından hazırlanmıştır (EK 5). Öğretmen adaylarından önce kendilerinin bireysel olarak bu alıştırmaları cmeleri istenmiştir, sonra grup içi tartışmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarına her ders bu grupları aynı kişilerle oluşturmanın zorunlu olmadığı belirtilmiştir. Böylece heterojenliğin sağlanması yani farklı düzeylerden kişilerle de fikir alışverişinde bulunmaları planlanmıştır. Derslerin son 20 dakikasında her gruptan alıştırmalara ilişkin cmleri istenmiştir ve bu cmler sınıfa tartışılmıştır. Bu şekilde dersler tamamlanmıştır.

Öğretmen adaylarıyla gerçekleştirilen ilk derste kesirler ve bir doğal sayı ile bir kesrin carpma işlemine ilişkin önemli noktalar, modeller (uzunluk, alan ve küme modeli), problemler ve özellikler verilmiştir (EK 6). Her ders sunumlarda 3 model türünün de kullanılmasına zen gösterilmiştir. İkinci derste iki kesrin carpma işlemine ilişkin önemli noktalar, modeller, problemler ve özellikler verilmiştir. Bu dersin hemen ertesini hafta ğretmen adaylarının vize sınavları olduğu için üçüncü ders bir sonraki hafta yapılmıştır. nc derste bir doğal sayı ile bir birim kesrin ve bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemine ilişkin önemli noktalar, modeller, problemler ve özellikler verilmiştir. Bu dersin ertesini hafta ğretmen adayları vizeler sonrası evlerine gitmek istediklerini belirttikleri için dördüncü ders bir sonraki hafta yapılmıştır ancak ğretmen adaylarına bu derse kadar evde cmeleri için dev sorular verilmiştir. Dördüncü ders önce bu dev sorularına ilişkin cmleri sınıfa tartışılmıştır, sonra tekrar üçüncü derse paralel başka alıştırmalar verilerek önce kendilerinin cmeleri sonra grup içi tartışmaları istenmiştir ve bu alıştırmalara ilişkin cmleri sınıfa tartışılarak ders tamamlanmıştır. Beşinci derste iki

kesrin bölme işlemine ilişkin önemli noktalar, modeller, problemler ve özellikler verilmiştir. Altıncı ders bütün derslere paralel yani hem kesirlerle çarpma hem de kesirlerle bölme sorularının yer aldığı alıştırmaların çözümü ve tartışılması şeklinde tamamlanmıştır.

Öğretim boyunca her hafta derslere paralel olarak öğretmen adaylarıyla görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmelerde öğretmen adaylarına o hafta derste gördükleri konuya ilişkin araştırmacı tarafından hazırlanan görevler verilmiştir (EK 7) ve bu görevleri çözmeleri esnasında alt sorular sorarak öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeyle ilişkin anlamaları ortaya koyulmaya çalışılmıştır. Öğretmen adaylarıyla bu görüşmeler öğretmen adaylarının uygun olduğu zaman dilimlerinde üniversitede bir öğretim elemanına ait odada yapılmıştır. Görüşmeler genellikle 60-70 dakika sürmüştür. Her görüşme kamera ile kayıt altına alınmıştır ve bu kayıtlardan elde edilen veriler çözümlenerek veri analizinde kullanılmıştır. Görüşmelerin yapıldığı odada her görüşmeden önce kamera odada bulunan masanın hemen yanına masanın üzerindeki kağıdı görecektir şekilde sabitlenerek yerleştirilmiştir. Öğretmen adaylarının bu kağıdı kameranın görüş alanından çıkartmamasına görüşmeler boyunca dikkat edilmiştir. Görüşme esnasında odada sadece öğretmen adayı ve araştırmacı bulunmuştur ve masanın arkasında yan yana oturmuşlardır. Bu oturma düzeni Şekil 3.3'te görülmektedir.



Şekil 3.3. Öğretmen adaylarıyla gerçekleştirilen görüşmelerde oturma düzeni

Görüşmelerin her birinde 3 tane görev yer almaktadır. Görüşmelerde kullanılan görevler ve derslerde verilen alıştırmalarda yer alan görevler çalışmanın en başında oluşturulan soru havuzundan seçilmiştir ve alanında uzman 3 öğretim elemanına bu görevlerin uygunlukları açısından danışılmıştır ve gerekli düzeltmeler yapılmıştır. Öğretim elemanlarının verdikleri öneriler ışığında görevler alıştırmalar ve görüşmelerde kullanılmak üzere hazırlanmıştır. Bununla beraber pilot çalışmada bu görevler kullanılarak esas çalışma sırasında karşılaşılabilecek zorluklar tespit edilmiştir, buna göre bazıları düzenlenmiştir, bazıları çıkarılmıştır ve yeni görevler eklenmiştir. Görüşmelerde ve alıştırmalarda görevler şu sıralamayla verilmiştir ve şunları içermektedir:

1. Model verilir modelin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazmalarının ve problem kurmalarının istendiği görev
2. İşlem verip bu işleme ilişkin model çizmelerinin ve problem kurmalarının istendiği görev
3. Problem verip problemin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazmalarının ve model çizmelerinin istendiği görev

Bu şekilde her görüşmede temsiller arası geçiş yapmaları sağlanarak öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamalarının gelişmesine yardımcı olacağı düşünülmüştür. Öğretmen adayları bu görevleri çözerken şu gibi sorularla gerekçelendirme ve açıklama boyutlarına ilişkin bilgi edinilmeye çalışılmıştır:

- Burada pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasının işlemin sonucunu vermesini nasıl açıklarsınız?
- Bu modelin/problemin neden bu işlemi ifade ettiğini açıklayınız.
- Ters çevir çarp algoritmasının işlemin sonucunu vermesini nasıl açıklarsınız?
- Burada öğrenciler genelde bölmenin sonucu küçülttüğünü belirterek sonucun yanlış olduğunu ifade etmektedirler. Sen bu durumu öğrencilere nasıl açıklarsın?
- Modelde ters çevir çarp algoritmasından gelen sayı görülüyor mu? Nasıl açıklarsın?

Görüşmelerde öğretmen adaylarına rahat bir ortam sağlanmaya çalışılmıştır ve görevleri tamamlayamadıklarında bir sonraki göreve geçip tekrar o göreve geri dönmüştür. Öğretmen adaylarına görevler her biri bir sayfada olacak şekilde verilmiştir ve bunları çözerken kullanmaları için renkli keçeli kalemler verilmiştir. Öğretmen adaylarından kağıda cevaplarını yazarken bu keçeli kalemleri kullanmaları ve kağıdın arka yüzünü kullanmamaları istenmiştir. Öğretmen adaylarına gerekirse ek kağıt verileceği söylenmiştir. Bununla beraber görevleri çözerken sesli düşünceleri istenmiştir. Böylece öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamalarına ulaşılması hedeflenmiştir. Sesli düşünme; resim yapma veya problem çözme gibi bir performans görevi sırasında kişinin duygu ve düşüncelerini kelimelere dökmesini sağlar. Böylece kişinin beyninde nelerin meydana geldiğini ortaya koyar. Kişi bu aktiviteyle meşgulken görüşme yapan araştırmacı çeşitli sorular sorarak, kişinin görev esnasında ne düşündüğü hakkında konuşmasını sağlar (Patton, 2014, s. 385). Görüşmeler bu şekilde her hafta, dersin ertesi günlerinde öğretmen adaylarıyla birebir olarak gerçekleştirilmiştir.

Bütün dersler ve görüşmeler tamamlandıktan sonra başlangıçta öğretmen adaylarına uygulanan KÇB testi öğretime katılan 6 öğretmen adayına son-test olarak uygulanmıştır.

Bu testin uygulanması öğleden önce ilk yarısı ve öğleden sonra ikinci yarısı olmak üzere iki aşamada gerçekleştirilmiştir. Bu şekilde öğretmen adaylarının sıkılmalarının önüne geçilmiştir ve daha motive olarak cevaplamaları sağlanmıştır. Bu testin uygulanması sırasında da yine kamera ile kayıt yapılmıştır.

3.7. Verilerin Analizi

Bu çalışmada içerik analizi yapılmıştır. İçerik analizi genellikle diğer yöntemlerle birlikte kullanılır. Özellikle gözlem ve görüşmelerden elde edilen verilerin analizinde kullanılır (Büyüköztürk, Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2012, s. 240). İçerik analizinde birbirine benzeyen veriler belirli kavramlar ve temalar çerçevesinde biraraya getirilir ve bunlar okuyucunun anlayacağı şekilde düzenlenerek yorumlanır (Yıldırım ve Şimşek, 2016, s. 242). İçerik analizi araştırmacılara insan davranışlarını dolaylı bir yoldan, iletilerlerinin analizi yoluyla araştırmalarına olanak tanıyan bir tekniktir. İletilerin neredeyse her türünün içeriği, örneğin, ders kitapları, makaleler, gazeteler, romanlar, yemek kitapları, şarkılar, resimler analiz edilebilir. Kişilerin veya grupların bilinçli veya bilinç dışı inançları, tutumları, değerleri ve fikirleri iletilerinde çoğunlukla ortaya çıkar (Fraenkel ve Wallen, 2006, s. 483).

İçerik analizinin ilk aşamasında veriler kodlanır. Üç tür kodlama şekli vardır; verilerden çıkarılan kavramlara göre kodlama, daha önceden belirlenmiş kavramlara göre yapılan kodlama ve genel bir çerçeve içinde kodlama (Fraenkel ve Wallen, 2006, s. 485; Yıldırım ve Şimşek, 2016, s. 244-247). Bu çalışmada verilerin analizinde “*genel bir çerçeve içinde yapılan kodlama*” kullanılmıştır. Bu kodlama türü ilk iki kodlama türünün ikisinin birlikte kullanıldığı kodlamadır. Yani hem araştırmanın temelini oluşturan kavramsal çerçeveden çıkarılan kodlarla bir kodlama tablosu oluşturularak kullanılmıştır, hem de verilerden yeni kodlar üretilmiştir ve bunlar kodlama tablosuna eklenmiştir. Burada kodlama tablosunun oluşturulması özellikle daha sonrasında kodlama güvenilirliğini belirlerken diğer kodlayıcıya kodların tanımının verilmesini sağlar ve böylece kodlar arası tutarlılığı maksimum hale getirir (Creswell, 2016a, s. 199).

Öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerin tamamı kamera ile kayıt edilmiştir ve toplam yaklaşık 60 saatlik video kayıt bulunmaktadır. Bu kayıtlar araştırmacı tarafından çözümlenmiştir. Bu çözümleme süreci yaklaşık 8 ay sürmüştür ve toplam 704 sayfa olmuştur. Bu çözümlemeler satır satır analiz edilmiştir. Verilerin analizi yapılırken şöyle bir yol izlenmiştir:

1. Ön-test ve ön-teste ilişkin yapılan görüşme soruları
2. Kazanım 1'e ilişkin alıştırmalar
3. Kazanım 1'e ilişkin görüşme soruları
4. Kazanım 2'ye ilişkin alıştırmalar
5. Kazanım 2'ye ilişkin görüşme soruları
6. Kazanım 3'e ilişkin alıştırmalar
7. Kazanım 3'e ilişkin görüşme soruları
8. Kazanım 4'e ilişkin alıştırmalar
9. Kazanım 4'e ilişkin görüşme soruları
10. Kazanım 5'e ilişkin alıştırmalar
11. Kazanım 5'e ilişkin görüşme soruları
12. Son-test ve son-teste ilişkin yapılan görüşme soruları

Her bir öğretmen adayı için her bir kazanım ve her bir kazanımın altında 5 boyut yani model çizme, problem kurma, matematiksel ifade yazma, gerekçelendirme ve açıklama ayrı ayrı kodlanmıştır. Bu kodlama sürecinde bu boyutlar uygunluğu, türü, kullanılan anahtar kavramlar açısından ele alınmıştır ve literatürden çıkarılan kodlardan oluşturulan kodlama tablosundan yararlanılmıştır (EK 8). Kodlama sırasında bu kodlardan başka bir kod çıktığında bu tabloya ilave edilmiştir. Bu boyutların uygunluğu KÇB testinin değerlendirilmesi için geliştirilen rubrikteki düzeyler kullanılarak kodlanmıştır ancak nicel olarak puanlanmamıştır. Bu boyutların türleri şu şekilde kodlanmıştır:

- Modeller (Uzunluk, alan, küme, gerçek nesne modeli)
- Problemler (Oran yapısında çarpma problemi, oran yapısında gruplama bölme problemi, oran yapısında paylaşırma bölme problemi, çarpımsal karşılaştırma yapısında çarpma problemi, çarpımsal karşılaştırma yapısında gruplama bölme problemi, çarpımsal karşılaştırma yapısında paylaşırma bölme problemi, eş-grup yapısında çarpma problemi, eş-grup yapısında gruplama bölme problemi, eş-grup yapısında paylaşırma bölme problemi)
- Gerekçelendirmeler (Kendi açıklaması şeklinde gerekçelendirme, varsayıma dayalı gerekçelendirme, kurala dayalı gerekçelendirme, belirsiz/genel ifade şeklinde gerekçelendirme, işlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme, çarpmanın tekrarlı toplama anlamını kullanarak gerekçelendirme, çarpmanın tanımı yoluyla gerekçelendirme, resim çizerek gerekçelendirme, hikaye/problem yoluyla gerekçelendirme)

- Açıklamalar (Matematiksel temelli açıklama (MTA), uygulama temelli açıklama (UTA), hem matematiksel hem uygulama temelli açıklama (MUTA))

Bu boyutlarda kullanılan anahtar kavramlar kesirler, çarpma ve bölmenin anlamına ilişkin kodları içermektedir. Bunların yanısıra bu boyutların hepsinde öğretmen adaylarının karşılaştıkları zorluklar ve yaptıkları hatalar da literatürden çıkarılan kodlara göre kodlanmıştır. Son olarak her bir boyutta öğretmen adaylarının ortaya koydukları matematiksel bilgileri işlemsel bilgi (İB), kavramsal bilgi (KB) ve hem işlemsel hem kavramsal bilgi (İKB) olarak kodlanmıştır. Kodlamalar sırasında verilerle kodlama tablosundaki kodlar ve kodlara ilişkin tanımlar sürekli karşılaştırılarak kodlamaların güvenilirliği artırılmaya çalışılmıştır (Creswell, 2016a, s. 203).

Öğretmen adaylarının ön-test ile başlayıp, öğretim süreci ile devam edip ve son-test ile sonlandığı bu yol izlenerek her bir kazanım için 5 boyut göz önüne alınarak verilerin analizi yapılmıştır. Buna göre örneğin, birinci kazanım model çizme boyutu için şu sıralamayla veriler analiz edilmiştir:

1. Ön-testte yer alan birinci kazanıma ilişkin model çizme görevlerine verdikleri cevaplar
2. Öğretim sürecinde yer alan alıştırmalardaki birinci kazanıma ilişkin model çizme görevlerine verdikleri cevaplar
3. Derslere paralel gerçekleştirilen görüşmelerdeki birinci kazanıma ilişkin model çizme görevlerine verdikleri cevaplar
4. Son-testte yer alan birinci kazanıma ilişkin model çizme görevlerine verdikleri cevaplar

Bu analiz sırasında hem görüşme transkriptleri hem dokümanlar (KÇB testi, görüşme soruları, alıştırmalar) birlikte ele alınmıştır. Bütün kodlamalar tamamlandıktan sonra kodlamaların güvenilirliğini belirlemek için 6 öğretmen adayının içinden rasgele seçilen bir öğretmen adayının verileri tekrar kodlanmak üzere alanında uzman bir öğretim elemanı ile paylaşılmıştır. Öğretim elemanına bütün kodlama tabloları verilmiştir ve nasıl bir yol izlendiği açıklanmıştır. Öğretim elemanı bu tabloları inceledikten sonra anlamadığı kısımlar tekrar açıklanmıştır ve kodlamaya başlamıştır. Öğretim elemanı bu öğretmen adayına ait verileri yaklaşık bir ay süresince kodlamıştır. Kodlaması tamamlandıktan sonra araştırmacı tarafından yapılan kodlamalar ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen iki kodlama arasındaki benzerlikler ve farklılıklar tespit edilmiştir ve toplam kodlamadan uyumsuz

kodlamalar çıkarılıp toplam kodlamalara bölünerek yani $\frac{410-91}{410} = 0,78$ ile kodlayıcılar arası güvenirlik %78 tespit edilmiştir. Bu güvenirlik yüzdesinin en az %80 olması yeterli görülmektedir (Miles ve Huberman, 1994, s. 64). Bu orana ulaşamadığı durumlarda kodlar üzerinde birlikte çalışılarak fikir birliğine ulaşılmaya çalışılmaktadır (Miles ve Huberman, 1994; Yıldırım ve Şimşek, 2016). Bunun üzerine fikir birliğine ulaşmak için bu öğretim elemanı bir araya gelinmiştir. Öğretim elemanı bu görüşmenin ardından yeniden kodlama yapmıştır ve bu sefer $\frac{410-21}{410} = 0,95$ ile kodlayıcılar arası güvenirlik %95 tespit edilmiştir.

İçerik analizinin ikinci aşamasında ilk aşamada ortaya çıkan kodları belirli kategoriler altında toplayabilen temalar bulunur. Kodlar arasındaki ortak yönler bulunmaya çalışılır. Bu şekilde temalar oluşturulduktan sonra veriler, kodlar ve temalara göre düzenlenir. Sonra bu bulgular araştırmacı tarafından yorumlanır ve sonuçlar çıkarılır. Bu şekilde veri analizi süreci tamamlanır (Yıldırım ve Şimşek, 2016, s. 249-251). Bu çalışmada halihazırdaki kodlarla yeni ortaya çıkan kodlardan kategoriler ve temalar oluşturulmuştur.

3.8. Geçerlik ve Güvenirlik

Nitel araştırmalarda geçerlik ve güvenirliği kontrol etmek veya artırmak için şunlar yapılabilir (Fraenkel ve Wallen, 2006, s. 462-463):

- Çeşitli veri toplama araçları kullanma (Birden çok farklı araçlarla veri toplanması çalışmanın geçerliğini artırır. Bu bir tür çeşitlemedir.)
- Farklı katılımcıların aynı şeyi betimlemelerini kontrol etme (Betimlemeler arasındaki farklılıklar verinin geçersiz olduğu anlamına gelebilir.)
- Çalışmaya katılanların dilini anlama ve yeri geldiğinde konuşma (Araştırmacı katılımcıların belirli terimleri kullanmasının ne anlama geldiğini bilmezse geçersiz veri elde edilebilir.)
- Cevapların yanısıra sorulan soruları yazma (Araştırmacının daha sonra görüşmede verilen cevapları anlamlandırmasına yardımcı olur.)
- Gözlem ve görüşmeler sırasında kişisel düşünceleri yazma (Sıradışı ve yanlış cevaplar not alınabilir, sonraki gözlemlerde ve görüşmelerde kontrol edilebilir.)
- Çalışmadaki bir veya daha çok katılımcıya araştırma raporunun doğruluğunu gözden geçirmesini isteme (Bu katılımcı teyidi olarak ifade edilir.)

Çalışmanın geçerliğinin ve güvenilirliğinin sağlanması için çeşitleme (triangulation), uzman kanısı (external audits) ve katılımcı teyidi (member checking) kullanılır (Creswell, 2012, s. 259). Bunların yanısıra zengin betimleme (rich, thick description) de kullanılır (Creswell, 2016a, s. 202). Çeşitleme nitel araştırmada tanımlar ve temaları farklı bireylerden (okul müdürü ve öğrenci gibi), farklı veri türlerinden (gözlem notları ve görüşmeler gibi) veya farklı veri toplama yöntemlerinden (dokümanlar ve görüşmeler gibi) elde edilen kanıtlarla destekleme sürecidir. Bu şekilde birden çok bilgi kaynaklarından, bireylerden veya yöntemlerden yararlanarak bilgi elde edildiği için çalışmanın doğruluğunu ve inandırıcılığını artırır. Katılımcı teyidi araştırmacının bir veya daha çok katılımcıdan raporun doğruluğunu kontrol etmelerini istediği bir süreçtir. Araştırmacı bulguları katılımcılara verir ve bunların doğruluğunu kontrol etmelerini ister. Bu süreçte katılımcılara temaların doğru olup olmadığı, tanımların tam olup olmadığı gibi sorular sorulabilir. Uzman kanısında araştırmacı çalışmanın dışında bir uzmandan araştırmayı farklı açılardan gözden geçirmesini ister. Uzman projeyi ve yazıları gözden geçirir veya çalışmanın değerlendirmesini bildirir (Creswell, 2012, s. 260). Zengin betimlemede araştırmacı bir durumu tanımlarken veya bir tema hakkında yazarken detayları verir. Bu detaylar, fiziki tanım, hareket tanımı ve faaliyet tanımı şeklinde olabilir. Araştırmacı katılımcıları ve çalışılan ortamı detaylarıyla betimler (Creswell, 2016a, s. 202). Bu çalışmanın geçerliğinin ve güvenilirliğinin sağlanması için veri çeşitlemesi, uzman kanısı ve zengin betimleme kullanılmıştır.

Çeşitleme (triangulation) nitel araştırmada geçerliğin ve güvenilirliğin sağlanmasında kullanılan stratejilerden biridir. Farklı veri kaynakları, farklı veri toplama ve analiz yöntemleri kullanarak araştırma sonuçlarının inandırıcılığını artırmaya yönelik çabalardır (Yıldırım ve Şimşek, 2016, s. 91). Denzin'den aktaran Patton (2014)'a göre çeşitleme sosyal bilimlerde dört kategoriye ayrılmıştır; veri çeşitlemesi (bir çalışmada farklı veri kaynaklarının kullanılması), araştırmacı çeşitlemesi (farklı araştırmacılar veya değerlendirmeciler kullanılması), yöntem çeşitlemesi (bir programı veya bir problemi çalışmak için birkaç yöntem kullanılması) ve teori çeşitlemesi (bir veri setini yorumlamak için birkaç bakış açısının kullanılması) (s. 247). Bu çalışmada test, görüşme ve doküman kullanılarak veri toplama çeşitliliği sağlanmaya çalışılmıştır.

Çalışmada kullanılan veri toplama araçlarının hazırlanmasında ve değerlendirilmesinde uzman görüşlerine başvurulmuştur. Öncelikle KÇB testinde yer alan görevler, öğretim süreci ile görüşmelerde yer alan görevler hakkında ve KÇB testinin puanlaması için

geliştirilen rubriğe ilişkin alanında uzman öğretim üyeleri ve öğretim elemanlarından görüşler alınmıştır. Sonra KÇB testinin puanlamasında ve görüşmelerden elde edilen verilerin kodlamasında kodlayıcılar arası güvenilirliği tespit etmek için alanında uzman bir öğretim üyesinden destek alınmıştır. Uzman görüşü alınan öğretim üyeleri ve öğretim elemanları matematik eğitiminde çalışmaları bulunan kişilerdir. Bu kişilerin çoğunluğu kesirler, kesirlerle işlemler ve anlamlarına ilişkin bilgiye sahip kişilerdir. Araştırmacı bu kişilerle bu konuları içeren bir projenin araştırma ekibinde bulunmuştur ve konuya daha yakın olan kişiler olarak en başta bu kişilerin görüşlerinden yararlanılmıştır.

Çalışmada katılımcıların ve araştırma ortamının özellikleri ayrıntılı olarak açıklanmıştır. Diğer taraftan çalışmada verilerden elde edilen bulgular kısmında öğretmen adaylarıyla yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılara sıklıkla yer verilmiştir ve öğretmen adaylarının çalışmalarını gösteren görsellerle zenginleştirilmiştir. Bu şekilde kanıtlar sağlayarak çalışmanın geçerliği ve güvenilirliği artırılmıştır.

BÖLÜM 4

BULGULAR

Bu bölümde çalışmadan elde edilen verilen analizi sonucu ortaya çıkan bulgulara yer verilmiştir. Bulgular model çizme, problem kurma, matematiksel ifade yazma, gerekçelendirme ve açıklama bilgisi alt başlıkları şeklinde sunulmuştur. Burada model çizme bilgisi ile model çizmek için gereken bilgi, problem kurma ile problem kurmak için gereken bilgi, matematiksel ifade yazma bilgisi ile matematiksel ifade yazmak için gereken bilgi, gerekçelendirme bilgisi ile gerekçelendirmek için gereken bilgi ve açıklama bilgisi ile açıklamak için gereken bilgi kastedilmiştir. Her alt başlık altında öğretimden öncesi yani başlangıç durumlarını, öğretim sürecindeki durumlarını ve öğretimden sonraki yani son durumlarını gösteren bulgulara yer verilmiştir. Bu durumlarını gösteren tablolarda kalın punto ile gösterilen ifadeler olumsuzluğu belirtmektedir. Bu tablolarda “ders 1, ders 2,..., ders 6” kısaca “D1, D2,..., D6”, “alıştırmalar 1, alıştırmalar 2,..., alıştırmalar 9” kısaca “A1, A2,..., A9” ve “görüşme 1, görüşme 2,..., görüşme 8” kısaca “G1, G2,..., G8” olarak verilmiştir. Burada KÇB ön-testine ilişkin yapılan görüşme G1, birinci derse paralel yapılan görüşme G2,..., altıncı derse paralel yapılan görüşme G7 ve KÇB son-testine ilişkin yapılan görüşme G8 olarak adlandırılmıştır. Diğer taraftan öğretmen adayları kısaca “ÖA1, ÖA2,..., ÖA6” olarak verilmiştir ve buradaki rakamlar herhangi bir başarı sıralamasını göstermemektedir.

4.1. Model Çizme Bilgisi

4.1.1. Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Model Çizme Bilgisi

4.1.1.1. Başlangıç Durumu

Öğretmen adaylarının öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgilerinin zayıf olduğu görülmüştür (Tablo 4.1). Öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde birinci görevde verilen $6 \times \frac{2}{3}$ işlemini ÖA6, ÖA4 ve ÖA1 “6 tane $\frac{2}{3}$ ” yerine

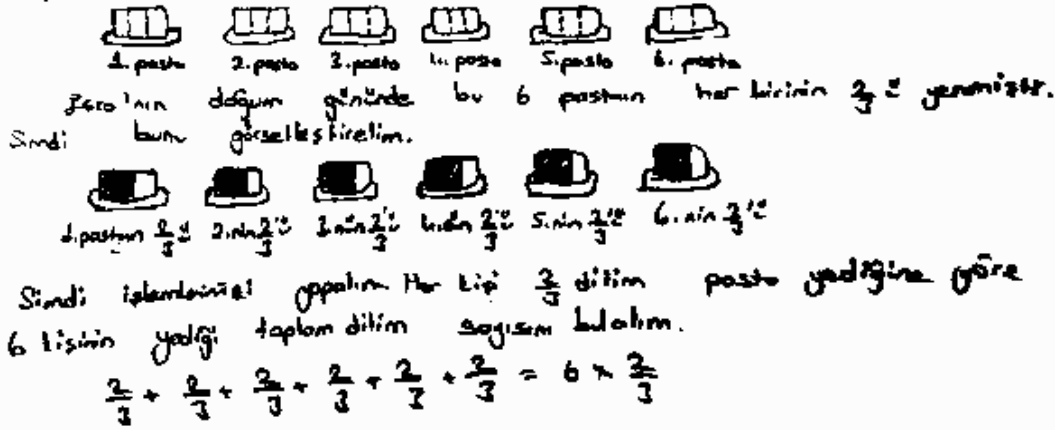
“6’nın $\frac{2}{3}$ ’ü” olarak ele almışlardır ve modeli ona göre çizmişlerdir, ÖA3 ve ÖA5 “6 tane $\frac{2}{3}$ ” olarak ifade etseler de modelde gösterememişlerdir. Öğretmen adaylarının içinde sadece ÖA2 verilen işlemin doğru bir şekilde “6 tane $\frac{2}{3}$ ” anlamını kullanarak model çizmiştir. Öğretmen adaylarının modelleri incelendiğinde ÖA2, ÖA4 ve ÖA1’in alan modelini, ÖA3 ve ÖA5’in gerçek nesne modelini ve ÖA6’nın kesir çubuğu modelini kullandığı görülmektedir (Tablo 4.1).

Tablo 4.1.

Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin Çarpma İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar

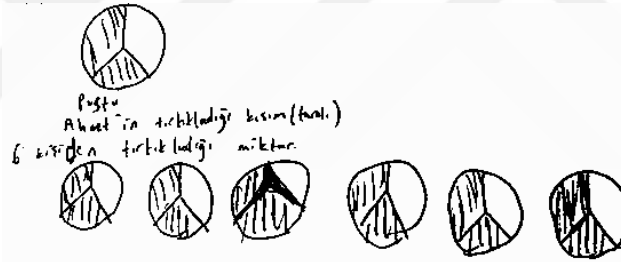
6 x $\frac{2}{3}$	
ÖA6	• Kesir çubuğu modeli • İşlemin tersini ($\frac{2}{3}$ x 6 işlemini) yansıtan model • İşlemin sonucunu gösteren basamak yok
ÖA2	• Dairesel alan modeli • İşlemi yansıtan model • İşlemin sonucunu gösteren basamak yok
ÖA4	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemin tersini ($\frac{2}{3}$ x 6 işlemini) yansıtan model • İşlemin sonucu görünmüyor (Modelde 6 bütünü parçalamadan 1 bütün olarak gösterme)
ÖA3	• Gerçek nesne modeli (Ekmek) • İşlemin hangi anlamını ele aldığı belirsiz • Sadece bir basamak var
ÖA5	• Gerçek nesne modeli (Ekmek) • İşlemin hangi anlamını ele aldığı belirsiz • Sadece bir basamak var
ÖA1	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemin tersini ($\frac{2}{3}$ x 6 işlemini) yansıtan model • Bütün basamaklar var

ÖA6’nın modeli incelendiğinde işlemin sonucunu gösteren son basamağı çizmediği ve 6 x $\frac{2}{3}$ yerine $\frac{2}{3}$ x 6 işlemini yansıtan bir model çizdiği görülmektedir (Şekil 4.1). Diğer yandan ÖA6 verilen işlemi $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 6 \times \frac{2}{3}$ şeklinde ifade etmiştir ve bunu ön-testte şöyle açıklamıştır: “Aynı ifadeden ($\frac{2}{3}$ ’ten) 6 tane topladığımız için bunun daha kısa gösterimi $6 \times \frac{2}{3}$ olduğundan bu şekilde eşitlik kurabiliriz.” Burada ÖA6 işlemi “6 tane $\frac{2}{3}$ ” anlamını kullanarak ifade etmiştir ancak “6’nın $\frac{2}{3}$ ’ü” anlamını yansıtan bir model çizmiştir. Buna göre ÖA6’nın öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgisinin zayıf olduğu söylenebilir.



Şekil 4.1. KÇB ön-testte 1. görevde ÖA6'nın çizdiği model

ÖA2 öğretim sürecine diğer öğretmen adaylarına göre bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin anlaması biraz daha güçlü bir şekilde başlamıştır. Buna kanıt olarak işlemi “bir bütünün $\frac{2}{3}$ 'ünden 6 tane” olarak ifade etmesi ve tekrarlı toplama anlamını yansıtan bir model çizmesi gösterilebilir. ÖA2 verilen işlemi ve “6 tane $\frac{2}{3}$ ” anlamını yansıtan bir dairesel alan modeli çizmiştir (Şekil 4.2).

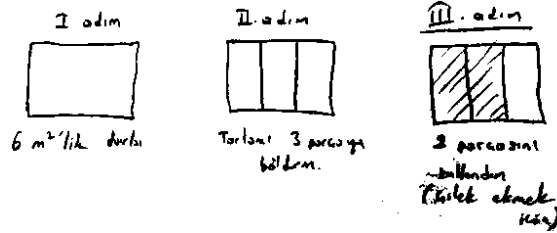


Şekil 4.2. KÇB ön-testte 1. görevde ÖA2'nin çizdiği model

ÖA2, ÖA6 gibi modelinde işlemin sonucunu gösteren basamağı çizmemiştir ancak ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) taralı parçaları biraraya getirerek gösterilebileceğini şöyle ifade etmiştir: “Buradaki $\frac{1}{3}$ parçayı buraya ekleriz, buradaki iki parçayı buraya ekleriz, bu tarz bir şey yaparsak böylece görmüş oluruz.” Buna göre ÖA2'nin öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgisinin kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. Bu görüşmede (G1) ÖA2 aldığı bir lisans dersinde bilgisayarda matematiksel modellemeye ilişkin bir uygulama yaptıklarını belirtmiştir. Bu da ÖA2'nin öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgisine nasıl sahip olduğunu açıklamaktadır.

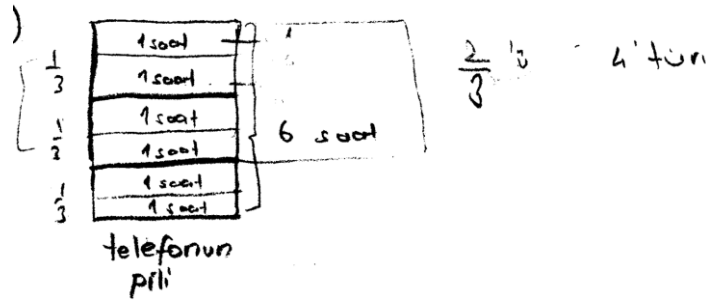
ÖA4 öğretim sürecine ÖA6 ve ÖA2'ye göre bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgisi daha zayıf bir şekilde başlamıştır. ÖA4 hem “6 tane $\frac{2}{3}$ ” yerine “6'nın $\frac{2}{3}$ 'ü” anlamını yansıtan bir dikdörtgensel alan modeli çizmiştir hem de modelde 6'yı 1 bütün olarak gösterdiği için işlemin sonucunu modelde gösterememiştir (Şekil 4.3). Burada

ÖA4'ün modeli bu şekilde çizmesine kesrin paydasının doğal sayıya bölünebiliyor olmasının etkisi olmuş olabilir. Bunu öğretim sürecinde daha sonraki görevlerde bütünü kesrin paydasına bölünebilen bir sayı seçerek işlemi göstermeye çalışması desteklemektedir.



Şekil 4.3. KÇB ön-testte 1. görevde ÖA4'ün çizdiği model

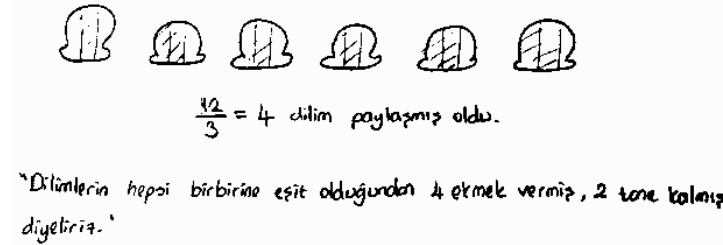
ÖA4'ün bu modeli incelendiğinde işlemdeki 6'yı yeni bütün olarak aldığı ancak modelde bu yeni bütünü 1 bütün olarak gösterdiği görülmektedir. Bu şekilde gösterdiği için ön-testte ilişkin yapılan görüşmede (G1) sorulduğunda işlemin sonucunu model üzerinden ifade edememiştir. ÖA4 işlemin sonucunu işlem yaparak şöyle ifade etmiştir ve modelin son basamağındaki taralı her bir parçanın içine “2” yazarak göstermiştir: “Şimdi parçam 6 metrekairelik parça, her biri ikişer metrekairelik haliyle ikiye bölersem, benden ne istiyor iki parçasını taramış olmamı. Ne kadarlık taramış oldum? 4 metrekaire diyebilirim. Bu da $\frac{2}{3}$ 'üdür tarlanın.” Buna göre ÖA4'ün öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgisinin işlemsel düzeyde ve zayıf olduğu söylenebilir. ÖA1 de ÖA4 gibi verilen işlem yerine $\frac{2}{3} \times 6$ işlemini yansıtan bir dikdörtgensel alan modeli çizmiştir ancak 6'yı dikdörtgeni parçalayarak doğru bir şekilde göstermiştir ve işlemin sonucunu da doğru bir şekilde ifade etmiştir (Şekil 4.4).



Şekil 4.4. KÇB ön-testte 1. görevde ÖA1'in çizdiği model

ÖA3 ve ÖA5 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak modellerinde sadece bir basamak çizmişlerdir. Bu basamak hem $\frac{2}{3} \times 6$ hem de $6 \times \frac{2}{3}$ işlemi için ortak bir basamaktır ve buna göre bu modelin hangi işlemi yansıttığına ilişkin bir şey söylenememektedir. Her iki öğretmen adayı da verilen işlem için kurdukları problem üzerinden hareket ederek benzer şekilde gerçek nesne modelini kullanarak “ekmek” çizmişlerdir (Şekil 4.5) ancak

parçaların eş olmasını gözardı etmişlerdir. ÖA3 bunu ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) modelini açıklarken şöyle belirtmiştir: “6 tane $\frac{2}{3}$ anlamına geldiği için altı tane ekmek var, altı ekmeğin de hepsinin $\frac{2}{3}$ ’ü. Yani 6 tane $\frac{2}{3}$ oluyor. Her bir ekmeğin $\frac{2}{3}$ ’ü, şekil biraz eşit olmamış gibi ama ekmek dilimini.”



Şekil 4.5. KÇB ön-testte 1. görevde ÖA3’ün çizdiği model

ÖA3 ve ÖA5’in modellerinde her ne kadar verilen işlemin hangi anlamını yansıttığı görülmese de ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) her ikisinin de verilen işlemi “6 tane $\frac{2}{3}$ ” olarak ifade etmesi, bununla beraber ÖA5’in ön-testte işlemi $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 6 \times \frac{2}{3}$ şeklinde yazması verilen işlemi “6 tane $\frac{2}{3}$ ” anlamıyla ele aldıkları şeklinde yorumlanabilir. ÖA3 ve ÖA5 verilen işlemi bu anlamıyla ele alarak doğru bir şekilde ifade etmişlerdir ama modelde gösterememişlerdir. Buna göre bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgilerinin öğretimden önce zayıf olduğu söylenebilir. Diğer taraftan modelleri incelendiğinde işlemin sonucunu gösteren basamağın olmadığı görülmektedir ve ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) bu durum sorulmuştur. ÖA5 bunu açıklayamazken, ÖA3 model üzerinden ÖA2 gibi taralı parçaları biraraya getirerek gösterebileceğini şöyle ifade etmiştir: “Mesela her dilimden iki tane ya, şunun bu kısmını alıp buraya koyduğumda birbirine eşit olduğu için bu bir ekmek olacak (taralı parçaları biraraya getirmeye işaret ediyor). Bu şekilde böyle birleştirdiğimde 4 tane ekmeğim olacak. İki tanesi bana kalacak.” Buna göre ÖA5’in diğer öğretmen adaylarına göre öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgisinin oldukça zayıf olduğu söylenebilir.

4.1.1.2. Öğretim Süreci

Öğretim sürecine ÖA2 hariç diğer öğretmen adayları bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgileri zayıf bir şekilde başlamışlardır. Öğretim sürecinde bu bilgilerinde gelişme olduğu görülmüştür. Öğretimden önce verilen işlem yerine tersini yansıtan veya basamakları eksik model çizerlerken öğretim sürecinde verilen işlemi yansıtan birer model çizmişlerdir. Öğretmen adaylarının öğretim sürecinde çizdikleri modeller incelendiğinde daha çok kesir çubuğu modelini kullandıkları, bununla beraber

sayı doğrusu, alan, gerçek nesne ve küme modelini de kullandıkları görülmektedir (Tablo 4.2). Öğretmen adaylarının öğretim sürecinde her ne kadar bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgilerinde gelişme görülse de bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine yani çarpmanın operatör anlamına ilişkin model çizerken ÖA2 hariç diğer öğretmen adayları zorluk yaşamışlardır. ÖA2'nin burada zorluk yaşamaması öğretimden önce diğer öğretmen adaylarına göre bu bilgisinin daha güçlü ve kavramsal düzeyde olması ile açıklanabilir. Diğer taraftan öğretim sürecine bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgisi diğer öğretmen adaylarına göre oldukça zayıf bir şekilde başlayan ÖA5'in öğretim sürecinde hiç zorluk yaşamadığı görülmüştür. Buna göre ÖA5'in bu bilgisinde diğerlerine göre daha çok gelişim olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının bu süreçte yaşadıkları zorluklar incelendiğinde çarpma işlemi yerine paylaştırma bölme anlamını yansıtan model çizdikleri, modelde yeni bütünü parçalamadan bir bütün şeklinde göstererek işlemin sonucunu tam olarak gösteremedikleri ve çarpmanın tekrarlı toplama ve operatör anlamına ilişkin ikilem yaşadıkları görülmektedir (Tablo 4.2). Öğretmen adaylarından ÖA4 öğretim sürecinde bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin model çizerken diğer öğretmen adaylarına göre daha çok zorlanmıştır (Tablo 4.2). Burada ÖA4 bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin model çizerken modelde işlemin sonucunu gösteren basamağı çizmemiştir. Bununla beraber çarpma yerine paylaştırma bölmeyi yansıtan bir model çizmiştir ve tek basamak çizerek çarpmanın hangi anlamını ele aldığı belli olmayan bir model çizmiştir.

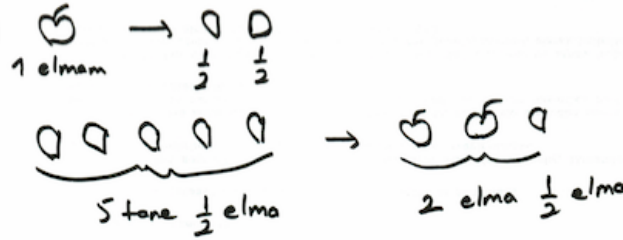
Öğretim sürecinde ilk derste kesirler, bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin bir öğretim gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adayları ilk derste bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin anlamalarında bir ilerleme göstermişlerdir. Öğretimden önce öğretmen adayları verilen işlem yerine tersini yansıtan ve/veya eksik model çizerlerken ilk derse paralel yapılan görüşmede (G2) modelleri eksiksiz bir şekilde çizmişlerdir. Bu görüşmede (G2) ikinci görevde verilen $5 \times \frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{2} \times 5$ işlemleri için öğretmen adaylarının daha çok kesir çubuğu modelini kullandıkları görülmektedir (Tablo 4.2). Bununla beraber $\frac{1}{2} \times 5$ işlemi için model çizerken ÖA2 ve ÖA5 hariç diğer öğretmen adaylarının zorlandıkları görülmektedir. Burada işlemin sonucunu gösteren basamağı çizmemişlerdir veya çarpma yerine paylaştırma bölmeyi yansıtan birer model çizmişlerdir.

Tablo 4.2.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Çarpma İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar

Öğretmen Adayı	D1/G2 5 x 1/2	1/2 x 5	3/7 x 4 (Problem)	D2/A4 3/4 x 5 (Problem)
ÖA6	- Gerçek nesne modeli (Elma) - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Gerçek nesne modeli (Elma) - İşlemi yansıtan model İşlemin sonucunu gösteren basamak yok	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var İşlemin sonucu görünmüyor (Modelde 4 bütünü parçalamadan 1 bütün olarak gösterme) Çarpmanın tekrarlı toplama ve operatör anlamı ikilemi (Çizdiği modelin ifade ettiği işlemi 4 x 3/7 olarak ifade etme)	- Gerçek nesne modeli (Poşet) - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var
ÖA2	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Küme modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Sayı doğrusu modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Dikdörtgensel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var
ÖA4	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Dikdörtgensel alan modeli Çarpmadan ziyade paylaşırma bölmeyi yansıtıyor İşlemin sonucunu gösteren basamak yok	- Küme modeli - İşlemi yansıtan model İşlemin sonucunu gösteren basamak yok	- Küme modeli İşlemin hangi anlamını ele aldığı belirsiz Sadece bir basamak var
ÖA3	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Kesir çubuğu modeli Çarpmadan ziyade paylaşırma bölmeyi yansıtıyor İşlemin sonucunu gösteren basamak yok	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model İşlemin sonucu görünmüyor (Modelde 4 bütünü parçalamadan 1 bütün olarak gösterme) Çarpmanın tekrarlı toplama ve operatör anlamı ikilemi (Çizdiği modelin ifade ettiği işlemi 4 x 3/7 olarak ifade etme)	- Gerçek nesne ve küme modeli (Poşet) - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var
ÖA5	- Dairesel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Dairesel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Sayı doğrusu modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var - Çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanma	- Dairesel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var
ÖA1	- Gerçek nesne modeli (Ekmek) - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Kesir çubuğu modeli Çarpmadan ziyade paylaşırma bölmeyi yansıtıyor İşlemin sonucunu gösteren basamak yok	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model İşlemin sonucu görünmüyor (Modelde 4 bütünü parçalamadan 1 bütün olarak gösterme)	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var - Çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanma

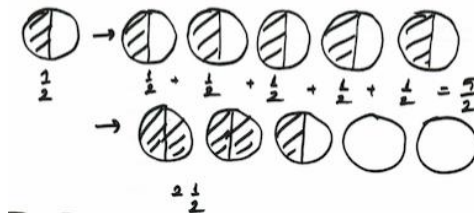
ÖA6 ve ÖA1 verilen $5 \times \frac{1}{2}$ işlemi için kurdukları problem üzerinden hareket ederek gerçek nesne modeli çizmişlerdir. ÖA6'nın modeli incelendiğinde gerçek nesne olarak "elma" kullandığı ve "5 tane $\frac{1}{2}$ " yani tekrarlı toplama anlamını yansıtan bir model çizdiği görülmektedir (Şekil 4.6). ÖA1 de benzer şekilde ekmek çizerek bu işlemi göstermiştir.



Şekil 4.6. Görüşme-2'de verilen $5 \times \frac{1}{2}$ işlemi için ÖA6'nın çizdiği birinci model

ÖA6'nın modeli çizerken yaptığı şu açıklama çarpmanın tekrarlı toplama anlamını kullandığını desteklemektedir (G2, ÖA6, 24/03/2015, 107-111): "Bu bir elmam (modelin ilk basamağını gösteriyor), $\frac{1}{2}$ elmam, hani önce bir elmanın iki tane $\frac{1}{2}$ 'ye eşit olduğunu, yani bir bütünün iki tane $\frac{1}{2}$ olduğunu bu şekilde gösterirsem (modelin ikinci basamağını gösteriyor), bu şekilde bir, iki, üç, dört, beş tane $\frac{1}{2}$ elma var (modelin üçüncü basamağını gösteriyor). Daha sonra bu her iki elmadan bir tane elma oluştursak bu şekilde, bu da iki elma bir de $\frac{1}{2}$ elma olur (modelin dördüncü basamağını gösteriyor)." ÖA6 ve ÖA1 öğretimden önce verilen işlem yerine tersini yansıtan model çizerlerken burada doğru bir şekilde verilen işlemi ve tekrarlı toplama anlamını yansıtan birer model çizmişlerdir. Buna göre ÖA6 ve ÖA1'in ön-testten ikinci görüşmeye bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgilerinde gelişme olduğu söylenebilir.

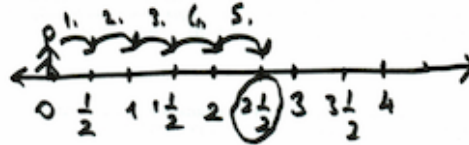
ÖA4, ÖA3, ÖA5 ve ÖA2 verilen $5 \times \frac{1}{2}$ işlemi için ÖA6 ve ÖA1'den farklı olarak alan ve uzunluk modellerini kullanmışlardır. Öğretim sürecine bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgisi diğer öğretmen adaylarına göre oldukça zayıf bir şekilde başlayan ÖA5'in bu işlem için dairesel alan modelini kullandığı ve eksiksiz bir şekilde çizdiği görülmektedir (Şekil 4.7). ÖA4, ÖA3 ve ÖA2 de modellerini ÖA5 gibi benzer şekilde çizmişlerdir.



Şekil 4.7. Görüşme-2'de verilen $5 \times \frac{1}{2}$ işlemi için ÖA5'in çizdiği model

ÖA5'in bu modeli incelendiğinde işlemi ve "5 tane $1/2$ " anlamını yansıtan bir model olduğu görülmektedir. Bunu modelde işlemi $1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 = 5/2$ şeklinde yazması ve " $1/2$ 'nin 5 tanesi, 5 tane $1/2$ " olarak ifade etmesi desteklemektedir. ÖA5 ve ÖA3 öğretimden önce sadece bir basamağı çizerken ilk dersten sonra modelin bütün basamaklarını çizmişlerdir. ÖA2 işlemin sonucunu gösteren basamağı çizemezken burada çizerek göstermiştir. Buna göre öğretmen adaylarının bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgilerinin ön-testten/ilk görüşmeden ikinci görüşmeye geliştiği söylenebilir.

Öğretmen adaylarının burada modelleri çizmeden önce problem kurdukları ve bu problem üzerinden hareket ederek model çizdikleri görülmektedir. Buna göre problemin bağlamının model seçimini etkilediği söylenebilir. Buna kanıt olarak öğretmen adaylarından $5 \times 1/2$ işlemi için başka bir model çizmeleri istendiğinde ÖA6'nın başlangıçta kurduğu problemden başka bir problem kurarak modeli çizmesi gösterilebilir. ÖA6 ikinci modeli (Şekil 4.8) çizmeden önce yeniden bir problem kurmuştur: "*Bir kızın adımları $1/2$ metredir, 5 adım attığında ne kadar gitmiştir?*" ÖA6 burada yeniden problem kurmasını elmanın sayı doğrusunda canlandırılmayabileceği şeklinde ifade etmiştir. Zira $5 \times 1/2$ işlemi için ilk modeli çizmeden önce "*5 tane yarım elmam vardır. Toplamda kaç tane elma vardır?*" problemini kurmuştur ve gerçek nesne modeli çizmiştir (Şekil 4.6).



Şekil 4.8. Görüşme-2'de verilen $5 \times 1/2$ işlemi için ÖA6'nın çizdiği ikinci model

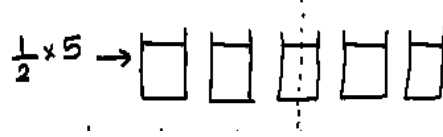
ÖA6 ikinci modeli (Şekil 4.8) çizerken şöyle açıklamıştır (G2, ÖA6, 24/03/2015, 118-

119): "*Şimdi $1/2$ 'ler, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$ buraya bir cin Ayşe çizelim, 0'dan 5 tane $1/2$ gidecek,*

bir adım attı buraya geldi, iki adım attı geldi, üç, dört, beş adım atınca $2\frac{1}{2}$ 'ye geldi."

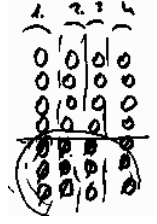
Öğretmen adaylarından daha sonra $1/2 \times 5$ işlemi için de model çizmeleri istenmiştir. ÖA6, ÖA2 ve ÖA5'in çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğinden yararlanarak $1/2 \times (1 + 1 + 1 + 1 + 1)$ işlemini yansıtan, ÖA3, ÖA4 ve ÖA1'in çarpma işleminden ziyade bölmenin paylaştırma anlamını yansıtan birer model çizdikleri görülmektedir. Buna kanıt olarak ÖA3'ün modeli (Şekil 4.9) çizmeden önce yaptığı şu açıklama gösterilebilir: "*5'in $1/2$ 'si, 5'in yarısı olarak ifade etmiştir, sonra 5 tane kutuysa, şu şekilde 5 tane kutu var ya*

bunun direk yarısını almak olarak, böyle ortadan ikiye çizmek gibi. Yani hepsinin ayrı ayrı yarısını almak değil de, hepsinin yarısını almak. Mesela ikilere ayırabilirim, direk ortadaki kalanı çizebilirim.” ÖA3, ÖA4 ve ÖA1 bu işlem için ikinci bir model olarak sayı doğrusu ve kesir çubuğu modeli çizmişlerdir ve bu modellerinde de yine bölmenin paylaşırma anlamından yararlandıkları görülmektedir.



Şekil 4.9. Görüşme-2’de verilen $1/2 \times 5$ işlemi için ÖA3’ün çizdiği birinci model

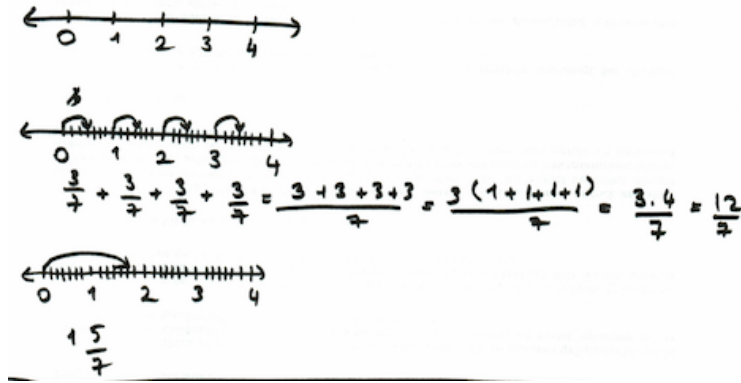
Öğretmen adayları ilk dersin sonunda bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin anlamalarında gelişme gösterebilirler de bu anlamının bir kesir ile bir doğal sayının yani çarpmanın operatör anlamı için yeterince derinlemesine olmadığı görülmüştür. İkinci görüşmede (G2) verilen $3/7 \times 4$ işlemi ifade eden problem için model çizerken ÖA6, ÖA3 ve ÖA1 zorluk yaşamışlardır, ÖA2, ÖA4 ve ÖA5 ise herhangi bir zorluk yaşamadan bu işlemi ve problemi yansıtan birer model çizmişlerdir. Bu görüşmede (G2) verilen “Bir terzi müşterilerinden birisi için bir pantolon dikecektir ve elinde 4 metre kumaş vardır. Terzi bu pantolon için bu kumaşın $3/7$ ’sini kullanacaktır o halde bu pantolon kaç metre kumaştan dikilecektir?” probleminin ifade ettiği işlemi öğretmen adayları önce doğru bir şekilde $3/7 \times 4$ olarak ifade etmişlerdir. Sonra bu işlem için ÖA5 ve ÖA2 sayı doğrusu, ÖA4 küme ve ÖA3, ÖA6 ve ÖA1 de kesir çubuğu modelleri çizmişlerdir. ÖA4 ön-testte $6 \times 2/3$ işlemi için çizdiği dikdörtgensel alan modelinde 6 bütünü parçalamadan 1 bütün olarak gösterip onun üzerinden hareket ederken burada küme modelini kullanarak işlemdeki hem $3/7$ ’yi hem de 4’ü göstermiştir (Şekil 4.10). Buna göre küme modelinin bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemi anlamlandırmasına yardımcı olduğu söylenebilir. Bunu ÖA1’in önce kesir çubuğu çizmeye çalışıp, sonra çizemeyince küme modellerinden X’ler dikdörtgenini kullanarak işlemi yansıtan bir model çizmesi desteklemektedir. Burada ÖA1 önce 4 bütünü parçalamadan 1 bütün olarak gösterip onun üzerinden $3/7$ ’yi göstermiştir ama işlemi gösteremeyince X’ler dikdörtgenini çizerek bu işlemi göstermekte başarılı olmuştur.



Şekil 4.10. Görüşme-2’de verilen problemin ifade ettiği $3/7 \times 4$ işlemi için ÖA4’ün çizdiği model

ÖA4 bu modelinde önce her bir sütunda 7 küçük daire olacak şekilde 4 sütundan oluşan bir küme çizmiştir ve her bir sütunu “bir bütün” olarak ifade etmiştir. Sonra “*Bir bütünümlün öncelikle 3/7’si. 3/7’si ne kadar olur, şöyle şey yapabilirim her bir bütün için (her sütunda üç küçük daireyi tarıyor). Her bir bütünümlün 3/7’si bu kısmı.*” şeklinde ifade ederek her bir sütunda 3 küçük daireyi taramıştır. Burada her birinin 3/7’sini alma ile 4’ün 3/7’sini almanın aynı olup olmadığı sorulmuştur ve ÖA4 aynı olduğunu model üzerinde taralı olan küçük dairelerin bulunduğu 4 satırı daire içine alarak göstermiştir. Buna göre ÖA4’ün çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğine ilişkin anlamasının kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. Daha sonra ÖA4’e işlemin sonucuna nasıl ulaştığı sorulmuştur ve ÖA4 bunu şu şekilde ifade etmiştir: “*12 parça taranmış, 12 parça, bir bütünüml 7 parçadan oluşuyordu. 12 parçam da 12/7 bütündür. 12/7 metre diyelim.*” Burada ÖA4’ün işlemin sonucu için referans alınan bütünü doğru bir şekilde belirlediği görülmektedir. ÖA4’e bu modele bakarak bir öğrencinin işlemin sonucu için 12/28 derse bu durumu nasıl açıklayacağı sorulmuştur ve ÖA4 bunu şöyle açıklamıştır: “*Tamamına 1 metre deseydim ve bundan 1 tane olsaydı tamam, ama bundan 4 tane olacak o zaman ve her birinin taranan yeri 12/28 olacak, bundan da 4 tane olacağı için $4 \times 12/28$ olacak o da 12/7 oluyor yine. Ama tamamına 1 metre demedim ki, tamamına 4 metre dedim.*” Bu açıklamasına göre ÖA4’ün bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin anlamasının kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

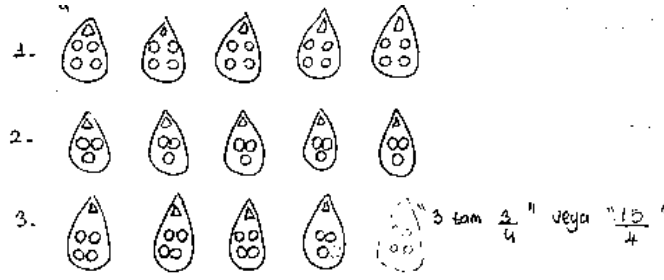
ÖA2 ve ÖA5 verilen problemin ifade ettiği $3/7 \times 4$ işlemi sayı doğrusu modelini kullanarak göstermişlerdir. ÖA5’in modeli incelendiğinde model bilgisinin diğer öğretmen adaylarına göre algoritmaya dayalı olduğu görülmektedir (Şekil 4.11).



Şekil 4.11. Görüşme-2'de verilen problemin ifade ettiği $3/7 \times 4$ işlemini için ÖA5'in çizdiği model

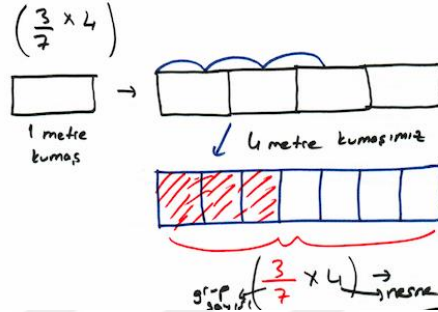
ÖA5'e bu modelde 4'ün $3/7$ 'sinin görülüp görülmediği sorulmuştur ve ÖA5 bunu şöyle açıklamıştır: “Evet, 4'ün $3/7$ 'si. İşte $3 + 3 + 3 + 3$ yazacaklar, 3 parantezine almayı biliyorlar, böylelikle sonuçta çarpmayı yaptığında $12/7$ 'yi görecektir (modelin ikinci basamağını gösteriyor ve altına yazdığı işlemi şu şekilde devam ettiriyor; $\frac{3+3+3+3}{7} = \frac{3 \times (1+1+1+1)}{7} = \frac{3 \times 4}{7} = \frac{12}{7}$). Buradan da 1 tam $5/7$ diyecek (modelin üçüncü basamağını gösteriyor).” Burada ÖA5'in çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullandığı görülmektedir. ÖA5 işlem üzerinden açıklarken ÖA2 bunun yanı sıra ÖA4 gibi model üzerinde de göstermiştir. Bunun için sayı doğrusundaki parçaları dörderli olarak gruplamıştır (sayı doğrusundaki her dört küçük parçayı yuvarlak içine almıştır), bunu “her dört parçayı bir kabul edersek” şeklinde ifade etmiştir ve taralı olan parçaların sayı doğrusunun $3/7$ 'si olduğunu göstermiştir.

Burada $3/7 \times 4$ işlemi için model çizerken zorluk yaşayan ÖA1, ÖA3 ve ÖA6'dan ÖA1 ve ÖA6 başlangıçta çizdikleri kesir çubuğu modelinden sonra ikinci bir model çizerek bu işlemi göstermekte başarılı olmuşlardır ancak ÖA3 başka bir model çizmemiştir ve bu işlemi göstermekte başarılı olamamıştır. Buna göre ÖA3'ün bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin model bilgisinin henüz zayıf olduğu söylenebilir. ÖA3 daha sonra ikinci derste verilen alıştırmalarda (A4) $3/4 \times 5$ işlemi için küme modelini kullanarak “5'in $3/4$ 'ü” anlamını yansıtan bir model (Şekil 4.12) ve üçüncü görüşmede (G3) verilen $1/3 \times 6$ işlemi için dairesel alan modelini kullanarak “6'nın $1/3$ 'ü” anlamını yansıtan bir model çizmiştir. Buna göre ÖA3'ün bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işleminin operatör anlamına ilişkin anlamasının ilk dersten ikinci derse geliştiği söylenebilir.



Şekil 4.12. Alıştırma-4'te verilen $\frac{3}{4} \times 5$ işlemini için ÖA3'ün çizdiği model

ÖA6'nın çizdiği ilk model incelendiğinde işlemi ve "4'ün $\frac{3}{7}$ 'si" anlamını yani çarpmanın operatör anlamını yansıttığı görülmektedir ancak ÖA6 bu modelinde yeni bütün olan 4 bütünü 1 bütün olarak kabul edip onun üzerinden doğrudan $\frac{3}{7}$ 'sini almayı göstermiştir (Şekil 4.13).



Şekil 4.13. Görüşme-2'de 3. görevde $\frac{3}{7} \times 4$ işlemini için ÖA6'nın çizdiği birinci model

ÖA1 ve ÖA3 de modellerini benzer şekilde çizmişlerdir ve işlemi gösterememişlerdir. Burada çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini gözardı ettikleri ve "4'ün $\frac{3}{7}$ 'si" yerine "1'in $\frac{3}{7}$ 'si"ni gösterdikleri söylenebilir. Bu durumu ÖA6 görüşme esnasında farketmiştir ve yeniden bir basamak çizerek düzeltmiştir. Buna ilişkin geçen diyalog şöyledir (G2, ÖA6, 24/03/2015, 225-243):

ÖA6: Şimdi kumaşı böyle çizsem olur mu, 1 metre kumaş mesela (Şekil 4.13'deki modelin ilk basamağını çiziyor). Bu da 4 metre kumaşımız (Şekil 4.13'deki modelin ikinci basamağını çiziyor). Bunun $\frac{3}{7}$ 'si. Şimdi ben bunu 7 parçaya ayırsam, bir, iki, üç, hmm (Şekil 4.13'deki modelin ikinci basamağındaki kesir çubukların tamamını göz önüne alıp yedi parçaya bölmeye çalışıyor). Ben bunu direk zaten aynı uzunlukta olduğu için, şu arada çizgiler olunca bu bununla aynı desem, bir, iki, üç, dört, beş, altı (Şekil 4.13'deki modelin üçüncü basamağını çiziyor). Yedi parçamız oldu bu şekilde. Bu 7 parçanın üçünü aldık, bu da zaten hepsi bir bütünümüz olduğu için $\frac{3}{7}$ 'yi temsil etti.

G: Peki işlemin sonucuna nasıl ulaşırsın?

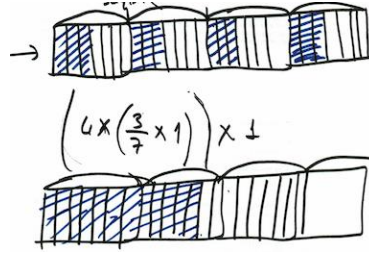
ÖA6: Ama şimdi hani bu $\frac{3}{7} \times 4$ dedim ya, buradaki 4 metre kumaşı bir bir bütün olarak aldık. Ama burada 4 bir bütünmüş, 4 tane bütün varmış gibi duruyor. 4'ün $\frac{3}{7}$ 'si, 4 metrenin $\frac{3}{7}$ 'si. O zaman bu model tam, 4'ün $\frac{3}{7}$ 'si. Ama sözel olarak bu modele baktığımız zaman doğru ama modelde işlemin sonucunu göremiyoruz.

G: Buradan sonuca ulaşabiliyor muyuz?

ÖA6: Hani bunun yine 4 metre olduğunu biliyoruz, hani 4'ün $\frac{3}{7}$ 'si şeklinde çarparak ulaşabiliriz ama burada o 4 görünmüyor. Hani o 4 metre görünmüyor. Ama bu şekilde değil de her birini yediye bölüp üçünü alsak sanki daha kolay görülürmüştü.

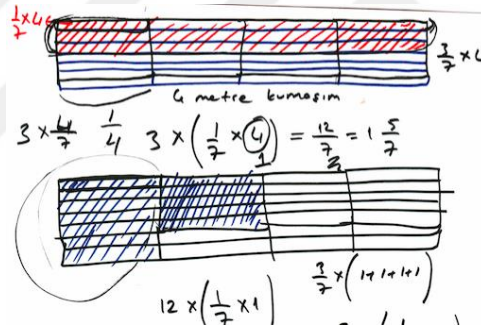
G: İstersen yeniden çizebilirsin.

ÖA6: Evet, şuradan devam edeyim (Şekil 4.14).



Şekil 4.14. Görüşme-2’de verilen problemin ifade ettiği $\frac{3}{7} \times 4$ işlemini için ÖA6’nın çizdiği birinci modelin devamı

ÖA6 yeni çizdiği basamaklarda (Şekil 4.14) 4 bütünün her birini 7 eş parçaya bölüp üçer parçasını taramıştır ve modele karşılık gelen işlemi $\frac{3}{7} \times 4$ yerine $4 \times \frac{3}{7}$ olarak ifade etmiştir. Burada ÖA6’nın çarpmanın operatör ve tekrarlı toplama anlamına ilişkin ikilem yaşadığı görülmektedir. ÖA6 bunun üzerine bir dikdörtgensel alan modeli çizmiştir (Şekil 4.15). Modelinde bütünleri kesir çubuğu modelindeki gibi birleşik çizmiştir ve önce dikdörtgenin tamamını yatay olarak 7 eş parçaya bölmüştür, sonra 3 satırının tamamını taramıştır. Bunu “Mesela düşündüğümüz zaman 4 metre kumaşın $\frac{1}{7}$ ’lerinden 3 tane var ($3 \times (\frac{1}{7} \times 4)$ yazıyor)” şeklinde ifade etmiştir.



Şekil 4.15. Görüşme-2’de 3. görevde $\frac{3}{7} \times 4$ işlemini için ÖA6’nın çizdiği ikinci model

ÖA6’dan yeni çizdiği modelinden işlemin sonucunu ifade etmesi istendiğinde önce zorlanmıştır, hatta işlemi çözerek işlemin sonuca ulaşmıştır ama sonrasında modelden nasıl ulaşacağını bulmuştur. Buna 4 metrenin $\frac{3}{7}$ ’sini alırken aynı zamanda her bir metrenin $\frac{3}{7}$ ’sinin alındığını farketmesinin yani çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğinin yardımcı olduğu söylenebilir. Bu anlama sürecini gösteren diyalog şöyledir (G2, ÖA6, 24/03/2015, 320-347):

G: Peki bu yeni modelinden sonucu nasıl ifade edersin?

ÖA6: 4 metre kumaşın $\frac{3}{7}$ ’si $\frac{12}{7}$ yapar işlem olarak düşündüğüm zaman. O zaman şu şekilde ifade etsem, bu 4 metrelik kumaşımın $\frac{1}{7}$ ’sini düşündüğüm zaman $\frac{1}{7} \times 4$ ile ifade ettim. Bu da $\frac{4}{7}$ olarak karşımıza geldi, bundan 3 tane olduğu için $3 \times \frac{4}{7}$ dedim. O zaman aynı şey olmuş oluyor mu acaba? Evet. Mesela düşündüğümüz zaman 4 metre kumaşın $\frac{1}{7}$ ’lerinden 3 tane var (Şekil 14’teki $3 \times (\frac{1}{7} \times 4)$ işlemini yazıyor).

G: İşlemin sonucu ne oluyor?

ÖA6: $\frac{12}{7}$.

G: Bunu işlem yaparak mı yoksa modelden mi buluyorsun?

ÖA6: İşlem yaparak çünkü modelden göremiyorum ben bunu şu an. Mesela şunları ayrı ayrı düşündüğümüz zaman görüyorum ama ben burada 4 kumaşı bir bütün olarak alıp yaptığım için. O

zaman burada $3/7$ varmış gibi, mesela 3 tane varmış gibi duruyor. Hani burada direk 12'yi değil de bir, iki, üç, 3'ü görüyorum, $3/7$ 'yi görüyorum. İşte yine az önceki dediğim gibi her bir metre kumaş yedi parçalara ayrılıp üçü alınmış şeklinde ifade edersem, aaa buldum. Şimdi bunu bu şekilde gösterdik işlemimizi, bu da anlamamız için diyelim. Yine aynı model üzerinden gidiyorum. Şimdi biz burada 12 tane taradık ya, o 12'yi alıyorum şimdi zaten burada 7 tane var. 5 kaldı, bu da şurası (Şekil 1.14'teki son basamağı gösteriyor). Burada 4 metre kumaş yedi parçaya böldüm, aynı zamanda her 1 metre kumaş da 7 parçaya böldüm. Mesela bu 1 metre kumaşın $1/7$ 'si, bunlardan 12 tane olduğu için $12 \times 1/7$ 'yi ifade ediyor ($12 \times (1/7 \times 1)$ yazıyor). Ama şimdi bununla bu aynı şeyi mi ifade ediyor ona bakıyoruz. Şu 3 ile 4'ü çarpıp buraya atarsak aynı şey gibi duruyor. Aslında aynı şey, 4 bütünü $1/7$ 'sinde her 1 kumaşın $1/7$ 'lerinden 4 tane var. Ben 4 bütünü $1/7$ 'lerinden 3 tane aldığım zaman her 1 kumaşın $1/7$ 'lerinden 4×3 tane almış oluyorum. Ben 4 metre kumaşın $1/7$ 'sini 1 metre kumaşın $1/7$ 'sinden 4 tane şeklinde ifade etsem ($1/7 \times 4 = 4 \times (1/7 \times 1)$ yazıyor). Daha sonra devam edecek olursam 4 metre kumaşın $1/7$ 'sinden 3 tane aldım, 1 metre kumaşın $1/7$ 'lerinden 4 tane almıştım, bir dakika 1 metre kumaşın $1/7$ 'lerinden 3 tane olacak, bundan da 4 tane var. Düşündüğüm zaman mantıklı gibi geliyor. 4 metre kumaşın $1/7$ 'si 1 metre kumaşın $1/7$ 'sinden 3 tanesine denk geliyor.

Daha sonra ÖA6'dan $3/7 \times 4$ işlemi için çizdiği ilk model olan kesir çubuğu modelinden (Şekil 4.13) işlemin sonucunu ifade etmesi istenmiştir ancak ÖA6 sonucu ifade etmekte oldukça zorlanmıştır ve yine çarpmanın operatör ve tekrarlı toplama anlamına ilişkin ikileme düşmüştür. Burada zorlanmasının nedeni ilginç bir şekilde kesir çubuğu modelinde her bir metrenin $3/7$ 'sini almayla 4 metrenin $3/7$ 'sini almanın aynı olduğunu görememiş olmasıdır. Bunda bütünleri birleşik olarak göstermesinin etkisi olmuş olabilir. Bu anlamda dikdörtgensel alan modelinin ÖA6'ya bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemini anlamlandırmasında daha çok yardımcı olduğu söylenebilir. Öğretim sürecinde karşılaştığı sonraki görevlerde çoğunlukla alan modelini kullanması ve bu modeli tercih etmesi bunu desteklemektedir.

Sonuç olarak bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemini çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanarak ÖA4 ve ÖA1'in küme, ÖA2 ve ÖA5'in sayı doğrusu ve ÖA6'nın da dikdörtgensel alan modelleriyle anlamlandırdıkları görülmüştür. Buna göre bir öğretmen adayının anlamlandırmasına yardımcı olan model türünün diğer öğretmen adayına yardımcı olmayabileceği söylenebilir.

4.1.1.3. Son Durum

Öğretmen adaylarının ön-testten son-teste öğretim sürecinde bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin anlamalarının geliştiği görülmüştür (Tablo 4.4). Öğretimden sonra uygulanan KÇB son-testinde birinci görevde verilen $6 \times 2/3$ işlemi için ÖA6, ÖA4 ve ÖA1 kesir çubuğu, ÖA3 ve ÖA2 alan ve ÖA5 de sayı doğrusu modelleri çizmişlerdir (Tablo 4.3). Öğretmen adaylarının modelleri incelendiğinde işlemi ve “6 tane $2/3$ ” anlamını yansıtan, eksiksiz birer model çizdikleri görülmektedir. ÖA6, ÖA4 ve ÖA1 ön-testte “6 tane $2/3$ ” yerine “6'nın $2/3$ 'ü” anlamını yansıtan bir model çizerken son-testte “6 tane $2/3$ ” anlamını yansıtan doğru bir model çizmişlerdir. ÖA5 ve ÖA3 ön-testte sadece bir basamak

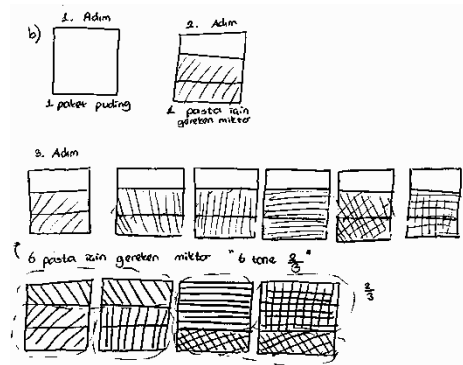
çizerken son-testte bütün basamakları eksiksiz bir şekilde çizmişlerdir. ÖA2 ön-testtekinе benzer şekilde son-testte de dairesel alan modelini kullanmıştır ve ön-testtekinden farklı olarak işlemin sonucunu gösteren basamağı da çizmiştir.

Tablo 4.3.

Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin Çarpma İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar

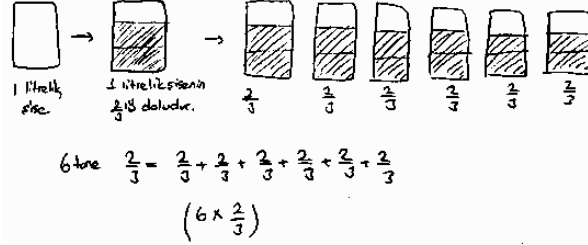
Öğretmen Adayı	6 x 2/3
ÖA6	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var
ÖA2	• Dairesel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var
ÖA4	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var
ÖA3	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var
ÖA5	• Sayı doğrusu modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var
ÖA1	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var

ÖA3'ün son-testte $6 \times \frac{2}{3}$ işlemi için çizdiği model incelendiğinde diğer öğretmen adaylarından farklı olarak her bir $\frac{2}{3}$ 'lük kısmın taramasını farklı bir şekilde yaptığı görülmektedir (Şekil 4.16). Burada ÖA3'ün işlemdeki 6 ve işlemin sonucu olan 4 için referans alınan bütünlerin farklı olduğuna işaret ettiği söylenebilir. Bunu son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) 6'yı farklı çizerek gösterdiğini sık sık vurgulaması desteklemektedir.



Şekil 4.16. KÇB son-testinde 1. görevde ÖA3'ün çizdiği model

ÖA6'nın ön-testte çizdiği modeli incelendiğinde ÖA4 ve ÖA1 gibi çarpmanın tekrarlı toplama anlamı yerine operatör anlamını yansıtan bir model çizerken son-testte tekrarlı toplama anlamını yansıtan doğru bir model çizdiği görülmektedir (Şekil 4.17).



Şekil 4.17. KÇB son-testinde 1. görevde ÖA6'nın çizdiği model

ÖA6 son-testte ön-testtekine benzer şekilde modelde işlemin sonucunu gösteren son basamağı çizmemiştir ancak son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) son basamağı çizmiştir (Şekil 4.18). ÖA6 son-testte çizdiği modelde her ne kadar son basamağı son görüşmede (G8) çizse de ön-testte çizdiği model (Şekil 4.1) ile karşılaştırıldığında belirgin farklılıklar olduğu görülmektedir. Buna göre ÖA6'nın bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgisinin ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir.



Şekil 4.18. KÇB son-testinde 1. görevde ÖA6'nın çizdiği modelin devamı

Sonuç olarak öğretmen adaylarının bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin model bilgilerinin ön-testten son-teste öğretim süreci boyunca geliştiği söylenebilir. Öğretmen adaylarının model bilgilerindeki gelişimleri Tablo 4.4'te verilmiştir. Bu tablo öğretmen adaylarının ön-testte, öğretim sürecinde ve son-testte çizdikleri modelleri açıklayan Tablo 4.1, 4.2 ve 4.3'ün birarada verilmiş hali olarak sunulmuştur.

Tablo 4.4.

Öğretmen Adaylarının Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Çarpma İşlemine İlişkin Model Çizme Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo

Öğretmen	Ön-test/G1	Öğretim Süreci/G2-G7				Son-test/G8
Adayı	6 x 2/3	5 x 1/2	1/2 x 5	3/7 x 4 (Problem)	3/4 x 5 (Problem)	6 x 2/3
ÖA6	- Kesir çubuğu modeli - İşlemin tersini (2/3 x 6 işlemini) yansıtan model - İşlemin sonucunu gösteren	- Gerçek nesne modeli (Elma) - İşlemin yansıtan model - Bütün basamaklı	- Gerçek nesne modeli (Elma) - İşlemin yansıtan model - İşlemin sonucunu gösteren basamak yok	- Kesir çubuğu modeli - İşlemin yansıtan model - Bütün basamaklar var - İşlemin sonucu görünmüyor (Modelde 4)	- Gerçek nesne modeli (Poşet) - İşlemin yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Kesir çubuğu modeli - İşlemin yansıtan model - Bütün basamaklar var

	basamak yok	ar var		bütünü parçalamadan 1 bütün olarak gösterme) • Çarpmanın tekrarlı toplama ve operatör anlamı ikilemi (Çizdiği modelin ifade ettiği işlemi 4 x 3/7 olarak ifade etme)		
ÖA2	- Dairesel alan modeli - İşlemi yansıtan model İşlemin sonucunu gösteren basamak yok	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar ar var	- Küme modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Sayı doğrusu modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Dikdörtgensel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Dairesel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var
ÖA4	- Dikdörtgensel alan modeli İşlemin tersini yansıtan model İşlemin sonucu görünmüyor (Modelde 6 bütünü parçalamadan 1 bütün olarak gösterme)	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar ar var	- Dikdörtgensel alan modeli Çarpmadan ziyade paylaşırma bölmeyi yansıtıyor İşlemin sonucunu gösteren basamak yok	- Küme modeli - İşlemi yansıtan model İşlemin sonucunu gösteren basamak yok	- Küme modeli İşlemin hangi anlamını ele aldığı belirsiz Sadece bir basamak var	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var
ÖA3	- Gerçek nesne modeli (Ekmek) İşlemin hangi anlamını ele aldığı belirsiz Sadece bir basamak var	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar ar var	- Kesir çubuğu modeli Çarpmadan ziyade paylaşırma bölmeyi yansıtıyor İşlemin sonucunu gösteren basamak yok	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model İşlemin sonucu görünmüyor (Modelde 4 bütünü parçalamadan 1 bütün olarak gösterme) Çarpmanın tekrarlı toplama ve operatör anlamı ikilemi (Çizdiği modelin ifade ettiği işlemi 4 x 3/7 olarak ifade etme)	- Gerçek nesne ve küme modeli (Poşet) - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Dikdörtgensel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var
ÖA5	- Gerçek nesne modeli (Ekmek) İşlemin hangi anlamını ele aldığı belirsiz Sadece bir basamak var	- Dairesel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar ar var	- Dairesel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Sayı doğrusu modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var - Çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanma	- Dairesel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Sayı doğrusu modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var
ÖA1	- Dikdörtgensel alan modeli İşlemin tersini yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Gerçek nesne modeli (Ekmek) - İşlemi yansıtan model	- Kesir çubuğu modeli Çarpmadan ziyade paylaşırma bölmeyi yansıtıyor	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model İşlemin sonucu görünmüyor (Modelde 4)	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var - Çarpmanın	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar

• Bütün basamaklar var	• İşlemin sonucunu gösteren basamak yok	bütünü parçalamadan 1 bütün olarak gösterme)	toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanma	var

4.1.2. İki Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Model Çizme Bilgisi

4.1.2.1. Başlangıç Durumu

Öğretmen adaylarının öğretimden önce iki kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgilerinin bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine göre daha iyi durumda olduğu söylenebilir. Her ne kadar modellerinde verilen işlem yerine tersini yansıtan birer model çizseler de bu modellerin eksiksiz olduğu görülmektedir. Ön-testte bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin modelleri hem verilen işlemin tersini yansıtmaktadır hem de basamakları eksiktir. Öğretmen adaylarının öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde iki kesrin çarpma işlemine ilişkin verilen problem ve işlem için daha çok alan modelini kullandıkları bununla beraber kesir çubuğu modelini de kullandıkları görülmektedir (Tablo 4.5). ÖA2, ÖA4 ve ÖA5 KÇB ön-testinde verilen her iki görev için alan modelini kullanmışlardır. Burada sadece ÖA3 küme modeli kullanmıştır ancak bu model verilen işlemin tersini yansıtmaktadır ve modelde işlemin sonucunu gösteren basamak yoktur. Öğretmen adaylarının hepsi verilen problemin ifade ettiği işlemi ters yazmışlardır ancak çizdikleri modeller bu problemi yansıtmaktadır. Bu problem için model çizerken ÖA4 ve ÖA1'in zorluk yaşadığı görülmektedir (Tablo 4.5). Her iki öğretmen adayı da bir bütün yerine çokluk üzerinden hareket etmişlerdir, bununla beraber ÖA4 işlemin sonucunu gösteren basamakta diğer parçaları parçalamamıştır ve parçayı bütün üzerinden göstermediği için işlemdeki sayılar ve işlemin sonucu modelde tam olarak görülmemektedir. Bu testte ÖA1 hariç diğer öğretmen adayları verilen işlem yerine tersini yansıtan birer model çizmişlerdir ve ÖA1 bütünü çokluk alarak verilen işlemi yansıtmayan bir model çizmiştir (Tablo 4.5). Bu işlem için ÖA3 hariç diğer öğretmen adayları dikdörtgensel alan modeli çizmişlerdir. ÖA3 bu işlem için küme modeli çizmiştir ancak verilen işlem yerine tersini yansıtan bir model çizmiştir, bütünü çokluk olarak almıştır ve modelde işlemin sonucunu gösteren basamak yoktur. ÖA4 ve ÖA6'nın modellerinde işlemin sonucunu gösteren basamak vardır ancak ÖA6 taralı olmayan parçaları parçalamadığı ve ÖA4 de parçayı bütün üzerinden göstermediği için işlemin sonucu tam olarak görülmemektedir. ÖA2 ve ÖA5'in modelleri incelendiğinde diğer öğretmen adaylarına göre daha az zorluk yaşadıkları görülmektedir (Tablo 4.5). Her iki öğretmen adayı da sadece verilen işlem yerine tersini yansıtan model çizmişlerdir. Öğretmen

adaylarının verilen problemi yansıtan model çizerken verilen işlem yerine tersini yansıtan model çizmeleri sözel ifadenin model çizmeyi kolaylaştırdığı şeklinde yorumlanabilir.

Tablo 4.5.

Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde İki Kesrin Çarpma İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar

Öğretmen Adayı	2/3 x 3/5 (Problem)	1/2 x 2/5
ÖA6	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemin tersini yansıtan model • İşlemin sonucu tam olarak görünmüyor (İşlemin sonucunu gösteren basamakta diğer parçaları parçalamama)
ÖA2	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemin tersini yansıtan model • Bütün basamaklar var
ÖA4	• Dairesel alan modeli • İşlemi yansıtan model • İşlemin sonucunu gösteren basamakta diğer parçaları parçalamama • İşlemdaki 3/5, 2/3 ve işlemin sonucu tam olarak görünmüyor (Parçayı bütün üzerinden göstermeme) • Bütünü çokluk olarak alma	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemin tersini yansıtan model • İşlemin sonucu tam olarak görünmüyor (Parçayı bütün üzerinden göstermeme) • Bütünü çokluk olarak alma
ÖA3	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Küme modeli • İşlemin tersini yansıtan model • İşlemin sonucunu gösteren basamak yok • Bütünü çokluk olarak alma
ÖA5	• Dairesel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemin tersini yansıtan model • Bütün basamaklar var
ÖA1	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var • Bütünü çokluk olarak alma	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtmayan model (1/5 x 1/2 x 2 işlemini yansıtıyor.) • Bütünü çokluk olarak alma

Öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde ondördüncü görevde verilen “Bir sınıf geziye gidecektir. Öğrencilerin $\frac{3}{5}$ ’i İzmir’e gitmek istiyor. İzmir’e gitmek isteyen

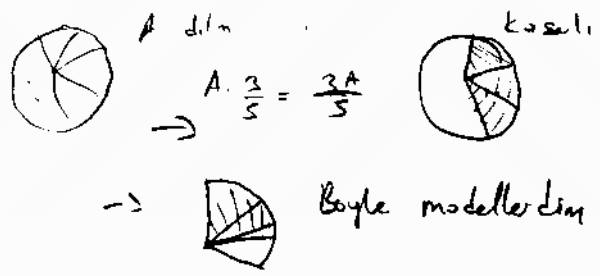
öğrencilerin $\frac{2}{3}$ ’ü Çeşme’ye gitmek istiyor. Çeşme’ye gitmek isteyen öğrenciler sınıftaki

öğrencilerin kaçta kaçındır?” problemi için bütün öğretmen adayları her ne kadar problemin ifade ettiği işlemi $2/3 \times 3/5$ yerine $3/5 \times 2/3$ olarak ifade etseler de doğru bir şekilde “3/5’in 2/3’ü” anlamını yansıtan birer model çizmişlerdir. ÖA1, ÖA3 ve ÖA6 kesir çubuğu modelini, ÖA4, ÖA5 ve ÖA2 alan modelini kullanmışlardır (Tablo 4.5). ÖA1 ve ÖA4 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak bir bütün yerine bütünü çokluk olarak ele almışlardır. ÖA1, 5 bütünün 3/5’inin 2/3’ünü yansıtan bir model çizmiştir (Şekil 4.19).



Şekil 4.19. KÇB ön-testinde 14. görevde ÖA1'in çizdiği model

ÖA1 bu modeli (Şekil 4.19) ön-testte şu şekilde açıklamıştır: “ $3/5$, ilk baştaki durumun kaç parçaya bölüneceğini gösteriyor, $2/3$ de o elimizde seçtiğimizin ne kadarı olduğunu gösteriyor. $3/5$, bir tamın, bütünün $3/5$ 'lik kısmı. $2/3$, o seçtiğim hani bu sefer de bunu (modelde $3/5$ 'lik kısmı gösteriyor) bir tam olarak seçiyorum bütünü olarak. $3k$ yani 3 tamın $2/3$ 'ü olmuş oluyor, bu sefer bunu tam almış oluyoruz.” Burada bütünü $5k$, $3/5$ 'lik kısmı $3k$ ve $2/5$ 'lik kısmı da $2k$ olarak ifade etmiştir. Bu da bütünü çokluk olarak ele aldığını desteklemektedir. ÖA4 bütünü çokluk olarak almanın yanısıra işlemin sonucunu gösteren basamakta taralı olmayan parçaları parçalamamıştır ve parçayı bütün üzerinden göstermemiştir (Şekil 4.20).



Şekil 4.20. KÇB ön-testinde 14. görevde ÖA4'ün çizdiği model

ÖA6 modelinde ÖA2, ÖA3 ve ÖA5 gibi bir bütün üzerinden hareket etmiştir ve bir bütünün $3/5$ 'inin $2/3$ 'ünü göstermiştir (Şekil 4.21).



Şekil 4.21. KÇB ön-testinde 14. görevde ÖA6'nın çizdiği model

ÖA6'nın bu modeli nasıl çizdiğine ilişkin birinci görüşmede (G1) şöyle bir diyalog geçmiştir (ÖA6, G1, 17/03/2015, 474-479):

ÖA6: İlk adımda bütünü 5 eş parçaya bölüp 3'ünü almışız (modelin ilk basamağını gösteriyor), burada $3/5$ 'i bir bütün düşünüp onun $2/3$ 'ünü almışız (modelin ikinci basamağını gösteriyor).

G: $3/5$ 'i bir bütün düşünüp dedin, neden böyle bir ifade kullandın?

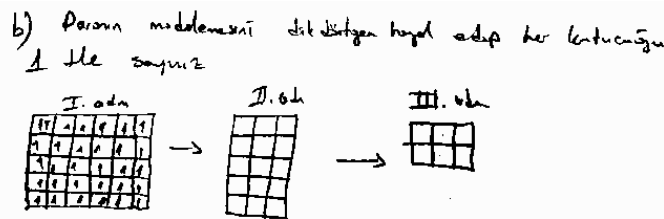
ÖA6: Hani $3/5$ 'in diyoruz ya, bu zaten elimizde var olan bir şey, bize bu taradığımız kısmın içeriğinden soruyor. Hani şu an şurayla (modelin ilk basamağındaki taralı olmayan parçaları gösteriyor) bir işlem yok ya hani taramak için filan, bunu bir bütün olarak algıladığımız zaman $2/3$ 'ünü bulmak daha kolay.

Bu diyalogda ÖA6'nın kullandığı “ $3/5$ 'i bir bütün düşünüp” ifadesiyle “yeni bütün” kavramına işaret ettiği söylenebilir. Buna göre ÖA6'nın öğretimden önce iki kesrin çarpma

işlemine ilişkin anlamasının bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemi kadar zayıf olmadığı söylenebilir. Benzer durum diğer öğretmen adaylarında da görülmektedir.

Burada öğretmen adayları verilen problemin ifade ettiği işlemi ters yazsa da modelde doğru bir şekilde göstermişlerdir. Bu duruma problemin verilmesinin etkisinin olduğu söylenebilir. Bunu ön-testte sadece işlem verildiğinde verilen işlem yerine tersini yansıtan birer model çizmeleri desteklemektedir. Öğretmen adaylarının öğretimden önce iki kesrin çarpma işlemini okunduğu gibi soldan sağa doğru yazdıkları ve bu sırayı dikkate alarak model çizdikleri görülmüştür. Bu durum problem verildiğinde modeli doğru çizmelerini açıklar. Şöyle ki; problemde işlem sözel olarak ifade edilmektedir, öğretmen adayları da okunduğu sırayla model çizdikleri için model, verilen işlemi yansıtmaktadır. Öğretmen adaylarının problem verildiğinde modeli doğru, işlem verildiğinde ters çizmeleri öğretimden önce çarpmanın tanımına ilişkin kavramsal anlamaya yani hangisi grup sayısı hangisi bir gruptaki nesne sayısı olduğuna ilişkin anlamaya henüz sahip olmadıkları şeklinde yorumlanabilir.

Öğretmen adayları KÇB ön-testinde on yedinci görevde verilen $1/2 \times 2/5$ işlemi yerine tersini yani $2/5 \times 1/2$ işlemini yansıtan modeller çizmişlerdir. ÖA3 küme modelini, diğer öğretmen adayları dikdörtgensel alan modelini kullanmışlardır. ÖA4, ÖA1 ve ÖA3'ün bir bütün yerine bütünü çokluk olarak alıp onun üzerinden hareket ederek model çizdikleri görülmüştür. ÖA4'ün modeli incelendiğinde bir bütün yerine işlemde yer almayan bir sayı ilave ederek önce 30'un $1/2$ 'sini, sonra 15'in $2/5$ 'ini gösterdiği görülmektedir (Şekil 4.22).

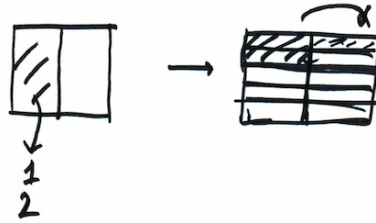


Şekil 4.22. KÇB ön-testinde 17. görevde ÖA4'ün çizdiği model

ÖA4'ün bu modeli çizerken işlem yaparak işlem üzerinden hareket ettiği söylenebilir. Bunu ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) işlemin sonucunu şu şekilde ifade etmesi desteklemektedir: “Sonucu zaten altıdır. Bütün parama ben ne demiştim? 30 TL demiştim. 6/30. Şöyle de diyebiliriz. Yarıya böldük tarayalım yarısını, $2/5$ 'lik kısmını da farklı bir renkle tarayalım hani çarpıraz ve düz düz, zaten görecektir.” Burada ÖA4 işlemin sonucunu önce parçalar üzerinden hareket ederek $6/30$ olarak ifade etmiştir. Daha sonra bütün üzerinden hareket ederek yarısını ve $2/5$ 'lik kısmını tarayarak ortak kesişim olarak

göstermeye işaret etmiştir. ÖA4'ün her iki durumda da bir bütünün $2/5$ 'inin $1/2$ 'sini almayı ele almadığı görülmektedir.

ÖA5 verilen $1/2 \times 2/5$ işlemi için modeli diğer öğretmen adaylarına göre basamakları daha eksiksiz bir şekilde çizmiştir (Şekil 4.23). Bununla beraber işlemin sonucunun iki farklı şekilde ifade edilebileceğini modelde göstermiştir. ÖA5 öğretim sürecine bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgisi diğer öğretmen adaylarına göre daha zayıf bir şekilde başlarken iki kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgisi daha güçlü bir şekilde başladığı söylenebilir.



Şekil 4.23. KÇB ön-testinde 17. görevde ÖA5'in çizdiği model

ÖA5 verilen işlemin sonucunun hem $2/10$ hem de $1/5$ olacağını model üzerinden şöyle açıklamıştır: “Yine bu parçalar birbirine eşit her biri derim (modelin son basamağında taralı bir küçük parçayla taralı olmayan bir küçük parçayı gösteriyor), buraya kaydırın derim çocuklara, sonra derim aaa bak 5 oldu derim, burada 5 tane var. Şu ortadaki çizgiyi görmeyin derim, oradan görebilirler (önce modelin son basamağında taralı bir küçük parçayı diğerinin yanına taşıyamaya işaret ediyor ve o bir küçük parçayı tarıyor, sonra dikey olarak bölmeyi gösteren çizginin görülmezse dikdörtgenin yatay olarak 5 parçaya bölündüğüne işaret ediyor).” Buna göre ÖA5'in öğretimden önce iki kesrin çarpma işlemine ilişkin anlamasının kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

4.1.2.2. Öğretim Süreci

Öğretmen adayları öğretim sürecine iki kesrin çarpma işlemine ilişkin bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine göre daha güçlü bir anlamayla başlamışlardır ve bu durum öğretim sürecine de yansımıştır. Öğretim sürecinde bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin bazı zorluklar yaşarken iki kesrin çarpma işleminde nerdeyse hiç zorluk yaşamamışlardır. Öğretimden önce iki kesrin çarpma işlemine ilişkin verilen bir işlemin modelini çizerken verilen işlem yerine tersini yansıtan bir model çizmektedirler. İki kesrin çarpma işleminin verildiği ikinci derste verilen alıştırmalarda hemen bu durumu düzelttikleri ve modelleri doğru bir şekilde çizdikleri görülmüştür. Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin çarpma işlemine ilişkin anlamalarının oldukça hızlı geliştiği

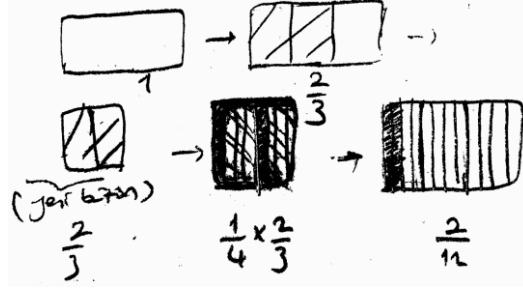
söylenbilir. Öğretmen adaylarının öğretim sürecinde daha çok alan modelini kullandıkları, bununla beraber sayı doğrusu, kesir çubuğu ve küme modellerini de kullandıkları görülmektedir (Tablo 4.6). Öğretim sürecinde sadece ÖA4 üçüncü görüşmede verilen $2/7 \times 3/5$ işlemi için model çizerken zorluk yaşamıştır. ÖA4 burada yeni bütünü parçalamadan bir bütün olarak göstermiştir ve bu yüzden modelde işlemin sonucu tam olarak görülmemektedir.

Tablo 4.6.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde İki Kesrin Çarpma İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar

Öğretmen Adayı	D2/A3 1/4 x 2/3	D2/G3 2/7 x 3/5	2/5 x 3/4 (Problem)
ÖA6	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Dairesel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Dairesel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var
ÖA2	• Sayı doğrusu modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Küme modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var
ÖA4	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Sayı doğrusu modeli • İşlemin sonucu görünmüyor (Modelde bir bütünün 3/5'lik kısmını parçalamadan 1 bütün olarak gösterme)	• Küme modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var
ÖA3	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Sayı doğrusu modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Dairesel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var
ÖA5	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var • Yeni bütünü ayrı çizerek gösterme	• Sayı doğrusu modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Küme modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var
ÖA1	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var

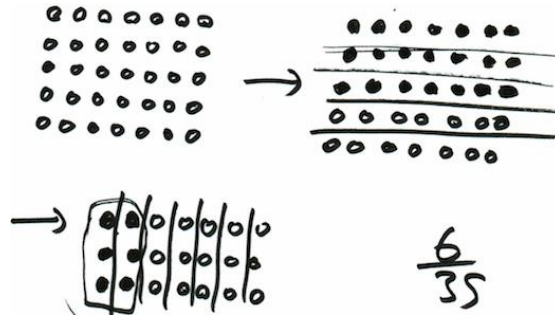
İkinci derste verilen alıştırmalarda (A3) yer alan $1/4 \times 2/3$ işlemi için ÖA1, ÖA6, ÖA4 ve ÖA3 dikdörtgensel alan, ÖA5 kesir çubuğu ve ÖA2 de sayı doğrusu modelleri çizmişlerdir. Öğretmen adaylarının modelleri incelendiğinde verilen işlemi ve “ $2/3$ ’ün $1/4$ ’ü” anlamını yansıtan birer model oldukları görülmektedir. ÖA5 çizdiği modelin (Şekil 4.24) açıklamasında diğer öğretmen adaylarından farklı olarak “yeni bütün” kavramından bahsetmiştir. Bu durum ÖA5’in öğretim sürecine diğer öğretmen adaylarına göre iki kesrin çarpma işlemine ilişkin anlaması daha güçlü bir şekilde başlaması ile açıklanabilir.



Şekil 4.24. Alıştırma-3'te verilen $1/4 \times 2/3$ işlemi için ÖA5'in çizdiği model

ÖA5 bu modeli çizmeden önce verilen işlemi şu şekilde açıklamıştır: “ $1/4 \times 2/3$ işlemi şunu ifade eder: Bir bütünün $2/3$ 'ü alınmıştır. Sonra $2/3$ olan yeni bütün de 4'e bölünmüş 1'i alınmıştır. Sonuca baktığımızda 1 bütünün kaçta kaçı olduğu görülür.” Burada ÖA5 bir bütünün $2/3$ 'ünü “yeni bütün” olarak ifade etmiştir. Buna göre ÖA5'in iki kesrin çarpma işlemine ilişkin anlamasının ön-teste göre geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

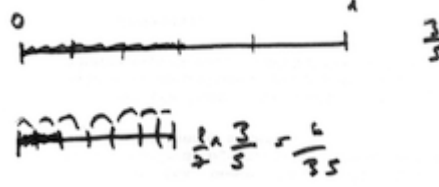
Öğretmen adaylarının iki kesrin çarpma işleminde en çok kullandıkları ve anlama sürecine yardımcı olan model türünün alan modeli olduğu görülmüştür. Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpmaya ilişkin anlaması sadece dikdörtgensel veya dairesel alan modeliyle sınırlı kalmamıştır. Aynı zamanda az da olsa küme ve uzunluk modellerini de kullanmışlardır. İkinci derse paralel yapılan üçüncü görüşmede (G3) verilen $2/7 \times 3/5$ işleminde sayı doğrusu modeli ve küme modeli kullandıkları da görülmüştür. ÖA2 bu işlem için “ $3/5$ 'in $2/7$ 'si” anlamını yansıtan bir küme modeli çizmiştir (Şekil 4.25).



Şekil 4.25. Görüşme-3'te verilen $2/7 \times 3/5$ işlemi için ÖA2'nin çizdiği model

ÖA2 bu modelinde ilk basamağı “bir bütün”, ikinci basamakta içini boyadığı küçük dairelerin tamamını “yeni bütün” olarak alıp işlemin sonucunu parça-bütün ilişkisi kurarak model üzerinden şöyle ifade etmiştir: “İlk bütünüme göre bu parça (modelin üçüncü basamağında içini boyadığı küçük daireleri gösteriyor) da 6 bölü 35 değerini vermektedir ($6/35$ yazıyor) yani 35 parçada 6 parça.”

ÖA4 diğerlerinden farklı olarak modelinde yeni bütün olan bir bütünün $\frac{3}{5}$ 'lik kısmını 1 bütün olarak onun üzerinden hareket etmiştir ve işlemin sonucunu modelde tam olarak gösterememiştir (Şekil 4.26).



Şekil 4.26. Görüşme-3'te verilen $\frac{2}{7} \times \frac{3}{5}$ işlemi için ÖA4'ün çizdiği model

ÖA4 modelin ilk basamağında önce bir sayı doğrusu çizip 0 ile 1 aralığını göstermiştir ve bunu “bir bütün” olarak ifade etmiştir. Sonra bu aralığı 5 eş parçaya bölüp 3 parçasını taramıştır ve bunu “ $\frac{3}{5}$ 'lik kısmı” olarak ifade etmiştir. Modelin ikinci basamağında bu doğrunun sadece modelin birinci basamağında taradığı 3 parçasını ara çizgiler olmadan çizmiştir ve bu üç parçanın tamamını doğrudan 7 eş parçaya bölmüştür. Burada işlemin sonucu nasıl ifade edeceği sorulmuştur ve ÖA4 modelin ikinci basamağında iki küçük parçayı tarayarak $\frac{2}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{35}$ işlemini yazmıştır. Buna nasıl ulaştığı sorulduğunda çarpma işlemi yaparak bulduğunu ifade etmiştir. Bunun üzerine işlem yapmadan modelden nasıl ulaşacağı sorulmuştur ve ÖA4, $\frac{3}{5}$ 'lik kısmı gösteren 3 parçanın her birini 7 eş parçaya ayırarak bulunabileceğini ifade edip sayı doğrusunu yeniden çizmiştir, 5 eş parçaya bölmüştür, bu parçaların her birini 7 eş parçaya bölmüştür. Sonra $\frac{3}{5}$ 'lik kısmı alt satıra ayrıca çizmiştir ve bunun “yeni bütün” olduğunu ifade etmiştir. Daha sonra $\frac{3}{5}$ 'lik kısımda her bir parçanın $\frac{2}{7}$ 'sinin alındığını ifade edip 6 küçük parçayı taramıştır ve tamamında 35 parça olduğunu ifade edip işlemin sonucunun $\frac{6}{35}$ olduğuna işaret etmiştir. Buna göre ÖA4'ün iki kesrin çarpma işlemine ilişkin anlamasının hem işlemsel hem kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. Çünkü verilen işlemi modelde göstermiştir ve işlemin sonucunu hem işlem yaparak bulmuştur hem de model üzerinde göstermiştir. ÖA4'ün önce yeni bütünü 1 bütün olarak göstermesi sonra bunu düzeltmesinin model türünden kaynaklandığı söylenebilir. Zira ÖA4'ün diğer işlemler için çizdiği dikdörtgensel alan ve küme modelleri incelendiğinde böyle bir durum görülmemiştir. O halde bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işleminde olduğu gibi dikdörtgensel alan ve küme modellerinin öğretmen adaylarının iki kesrin çarpma işlemini anlamlandırmasına yardımcı olduğu söylenebilir.

Bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işleminde model çizerken verilen problemin bağlamının model seçimini etkilemesi durumunun iki kesrin çarpma işlemine ilişkin model

çizerken de bazı öğretmen adaylarında devam ettiği görülmüştür. Buna kanıt olarak üçüncü görüşmede (G3) verilen “Mira’nın doğumgünü partisi vardı ve parti bittikten sonra doğumgünü pastasının $\frac{3}{4}$ ’ü kalmıştır. Bu pastanın kalanının $\frac{2}{5}$ ’i partiye gelemeyen kardeşine götürmesi için Suzan’a verilmiştir. Suzan’ın aldığı pasta bütün pastanın ne kadarıdır?” problemi için ÖA3’ün pastaya dairenin daha uygun olacağını belirterek dairesel alan modeli çizmesi gösterilebilir. ÖA3’ün modeli incelendiğinde problemin ifade ettiği işlemi ve “ $\frac{3}{4}$ ’ün $\frac{2}{5}$ ’i” anlamını yansıtan bir model olduğu görülmektedir (Şekil 4.27).



Şekil 4.27. Görüşme-3’te verilen problemin ifade ettiği $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ işlemi için ÖA3’ün çizdiği model

ÖA3 modelinde önce bir daire çizmiştir ve bunu 4 eş parçaya bölüp 3 parçasını taramıştır. Sonra bu üç parçanın her birini 5 eş parçaya bölmüştür ve 15 parça olduğunu belirtip bu 15 küçük parçayı üçer üçer olacak şekilde 5 eş parçaya ayırmıştır ve 2 parçayı yani 6 küçük parçayı tekrar tarayarak işlemin sonucu olduğunu göstermiştir. Bunu matematiksel olarak şöyle ifade etmiştir: “Şimdi her bir şu küçük parça $\frac{1}{20}$ ’yi gösteriyor. Her biri $\frac{1}{20}$, bir, iki, üç, dört, beş, altı tane olduğu için de $\frac{6}{20}$ (en son taradığı kısımdaki küçük parçaları sayıyor).” Daha sonra işlemin sonucunun aynı zamanda $\frac{3}{10}$ olabileceğini nasıl açıklayacağı sorulduğunda ÖA3 model üzerinden doğru bir şekilde açıklamıştır. Buna ilişkin geçen diyalog aşağıdaki gibidir (G3, ÖA3, 01/04/2015, 171-182):

G: Peki bu işlemin sonucu sadeleştirme yapılırsa $\frac{3}{10}$ da olabiliyor. Sonucun aynı zamanda $\frac{3}{10}$ olmasını nasıl açıklarsın?

ÖA3: Onu da birimimizi değiştirirsek. Onu da şöyle diyeyim mesela şuraya bir dilim dersek yani bir birim dersem, şu küçük iki dilimi bir birim alırsam $\frac{3}{10}$ ’u ifade etmiş olurum. Evet o zaman toplamda 10 dilim olur (taralı kısımdaki her iki küçük parçayı bir parça olarak alıyor).

G: 10’u nasıl görüyoruz modelde?

ÖA3: Şu şekilde gösterebilirim (kalan diğer küçük parçaları da ikili olarak alıyor). Toplamda 10 tane olacak. Bundan da üçünü aldım, $\frac{3}{10}$.

G: Bunu sözel olarak nasıl açıklarsın?

ÖA3: Normalde $\frac{1}{20}$ ’lik dilimim benim bir dilimimdi, bu sefer $\frac{2}{20}$ ’lik dilimimi ben bir birim aldım yani şurayı (2 küçük parçayı gösteriyor).

G: Tamam.

ÖA3 daha önce bu eşitliği model üzerinden açıklayamazken burada doğru bir şekilde göstermiştir. Buna göre ÖA3’ün iki kesrin çarpma işlemine ilişkin anlamasının geliştiği ve bu anlamının kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

4.1.2.3. Son Durum

Öğretmen adayları öğretim sürecine iki kesrin çarpma işlemine ilişkin bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine göre daha güçlü bir anlamayla başlamışlardır. Bu durumun etkisi öğretim sürecinde görülmüştür, model çizerken herhangi bir zorluk yaşamamışlardır ve verilen işlemi yansıtan modeller çizmişlerdir. Öğretimden önce verilen işlem yerine tersini yansıtan model çizerlerken öğretim sürecinde ve son-testte verilen işlemi yansıtan doğru modeller çizmişlerdir. Öğretmen adaylarının ön-test ve son-testte çizdikleri modeller karşılaştırıldığında iki kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgilerinin öğretim süreci boyunca geliştiği görülmektedir (Tablo 4.8). ÖA2 ve ÖA5 hariç diğer öğretmen adayları son-testte verilen iki görev için alan modelini kullanmışlardır, ÖA2 verilen problem için dikdörtgensel alan modeli kullanırken verilen işlem için küme modeli kullanmıştır (Tablo 4.7). ÖA5 ise verilen problem için küme modelini kullanırken, verilen işlem için dairesel alan modeli çizmiştir. Öğretmen adaylarından ÖA6 ve ÖA1 çizdikleri modellerde diğer öğretmen adaylarından farklı olarak işlemin sonucunu iki farklı şekilde gösteren fazladan bir basamak çizmişlerdir. Bununla beraber ÖA1 verilen problem için bir model daha çizmiştir. Burada ÖA1'in ikinci modelinde de yine alan modelini tercih ettiği görülmektedir (Tablo 4.7). Diğer taraftan öğretmen adaylarından sadece ÖA4 öğretim sürecinde olduğu gibi son-testte de verilen işlem için model çizerken zorluk yaşamıştır. Burada ÖA4 verilen işlem yerine tersini yansıtan bir model çizmiştir ve çarpmanın iki anlamına ilişkin ikileme düşmüştür. Buna göre ÖA4'ün ön-testten son-teste doğru iki kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgisi gelişse de bu bilginin derin olmadığı söylenebilir. Öğretmen adayları öğretimden önce modelde taralı olmayan parçaları parçalamama, parçayı bütün üzerinden göstermeme veya bütünü çokluk olarak alma gibi zorluklar yaşarken bu zorlukların öğretim sürecinde ve son-testte ortadan kalktığı görülmektedir. Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir. Öğretmen adaylarının ön-testten son-teste öğretim süreci boyunca iki kesrin çarpma işlemine ilişkin model çizerken alan modelini diğer modellere göre daha fazla tercih ettikleri görülmektedir (Tablo 4.8). Bu durum alan modelinin iki kesrin çarpma işlemini anlamlandırmalarına diğer modellere göre daha fazla yardımcı olduğu şeklinde yorumlanabilir.

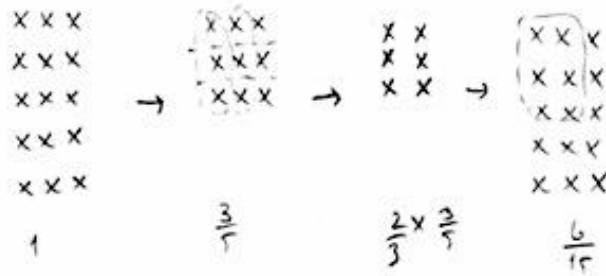
Tablo 4.7.

Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde İki Kesrin Çarpma İşlemi İçin Çizdikleri

Modellere İlişkin Açıklamalar

Öğretmen Adayı	2/3 x 3/5 (Problem)	1/2 x 2/5
ÖA6	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var • Sonucu iki farklı şekilde gösteren ekstra basamak çizme	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var • Sonucu iki farklı şekilde gösteren ekstra basamak çizme
ÖA2	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Küme modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var
ÖA4	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemin tersini yansıtan model • Çarpmanın iki anlamına ilişkin ikilem
ÖA3	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var
ÖA5	• Küme modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Dairesel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var
ÖA1	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var • Ekstra model çizme (Dairesel alan modeli)	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var • Sonucu iki farklı şekilde gösteren ekstra basamak çizme

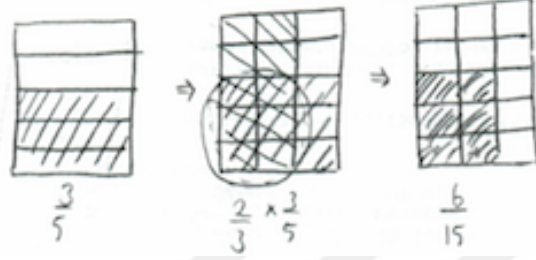
Öğretmen adayları öğretimden sonra uygulanan KÇB son-testinde 14. görevde verilen problemin ifade ettiği işlemi yansıtan birer model çizmişlerdir. ÖA5 hariç diğer öğretmen adayları dikdörtgensel alan modelini kullanmışlardır. ÖA5 bu işlem için küme modellerinden X'ler dikdörtgeni çizmiştir (Şekil 4.28).



Şekil 4.28. KÇB son-testinde 14. görevde ÖA5'in çizdiği model

Son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) ÖA5 bu modeli nasıl çizdiğini şöyle açıklamıştır: “Bir bütün, bir sınıf (modelin ilk basamağını gösteriyor), geziye gidecek bir sınıfın 3/5’ini de gösterdim (modelin ikinci basamağını gösteriyor). 3/5’in 2/3’ünü gösterdim, üçe bölünüp ikisi (modelin üçüncü basamağını gösteriyor), sınıfın tamamına göre baktığımızda da sonucu oradan gördüm (modelin son basamağı olan dördüncü basamağı gösteriyor).” Burada ÖA5’in işlemin sonucunu parça-bütün ilişkisi kurarak ifade ettiği görülmektedir.

ÖA1 diğer öğretmen adayları gibi dikdörtgensel alan modeli (Şekil 4.29), ikinci bir model olarak da dairesel alan modeli çizmiştir. ÖA1'in dikdörtgensel alan modeli incelendiğinde diğerlerinkinden farklı olarak bu işlemi $3/5$ 'in $2/3$ 'ünden ziyade ortak kesişimden yararlanarak gösterdiği söylenebilir. Son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) modeli açıklarken kullandığı şu ifade bunu desteklemektedir: “...şu 3 ile 2'nin kesişimi, $6/15$ olmuş oluyor (taralı satırla ve sütunların kesişimine işaret ediyor).”

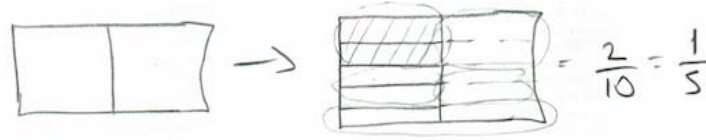


Şekil 4.29. KÇB son-testinde 14. görevde ÖA1'in çizdiği model

Son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) ÖA1'e işlemin sonucunun aynı zamanda $2/5$ olduğunu nasıl açıklayacağı sorulmuştur ve ÖA1 model üzerinden şu şekilde açıklayarak 3 küçük parçayı birim olarak almaya işaret etmiştir: “Şu üçünü bağlar hani bir dersem (modelde 3 küçük parçayı bir birim olarak almaya işaret ediyor), iki tane olmuş oluyor, hepsini hani bağlarsam 5 tane parçadan bir bütün oluyor, böylece $2/5$ olmuş oluyor.” ÖA6 işlemin sonucunun aynı zamanda $2/5$ olmasını ÖA1'in açıklamasındaki gibi ancak modelinde ayrı bir basamak çizerek göstermiştir. Öğretmen adayları ön-testte verilen işlem yerine tersini yansıtan modeller çizip çeşitli zorluklar yaşarlarken son-testte hem modeli doğru bir şekilde çizmişlerdir hem de işlemin sonucunun iki farklı şekilde ifade edilebileceğini modeller üzerinden açıklamışlardır. Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin çarpma işlemine ilişkin anlamalarının ön-testten son-teste geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

KÇB son-testte 17. görevde verilen $1/2 \times 2/5$ işlemi için ÖA2 hariç diğer öğretmen adayları alan modeli çizmişlerdir. ÖA2 küme modelini kullanmıştır. Öğretmen adaylarının modelleri incelendiğinde ÖA4 hariç diğerlerinin modelleri verilen işlemi ve “ $2/5$ 'in $1/2$ 'si” anlamını yansıtan birer model olduğu görülmektedir. Öğretmen adayları öğretimden önce bu işlem yerine tersini yansıtan birer model çizerken son-testte doğru bir şekilde çizmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin çarpma işlemine ilişkin anlamalarının ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir. ÖA4 ön-testte bir bütün yerine bütünü çokluk olarak alıp onun üzerinden hareket etmiştir, son-testte ise bir bütün

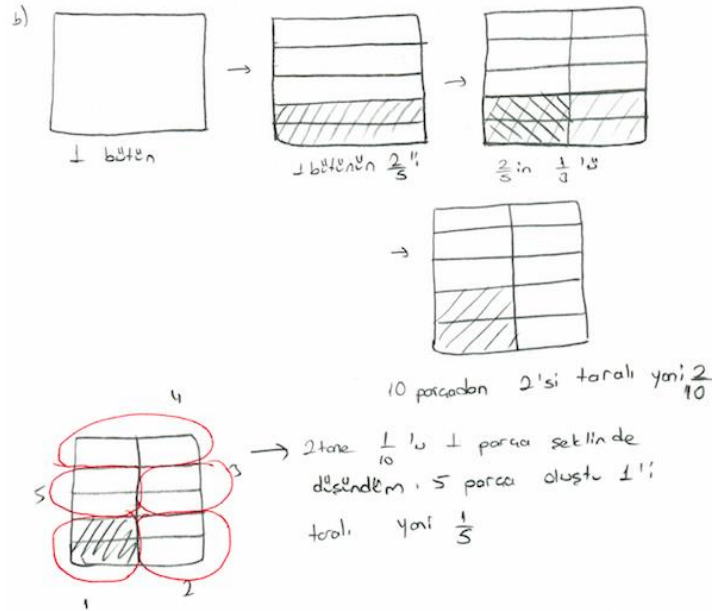
üzerinden hareket ederek model çizmiştir ancak bu model $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$ yerine $\frac{2}{5} \times \frac{1}{2}$ işlemini yansıtmaktadır (Şekil 4.30).



Şekil 4.30. KÇB son-testinde 17. görevde ÖA4'ün çizdiği model

Son-testte ilişkin yapılan görüşmede (G8) ÖA4'e işlemdeki $\frac{1}{2}$ 'nin modelde görülüp görülmediği sorulduğunda ilk basamak olarak bir dikdörtgen çizileceğini sonra burada ilk basamak olarak çizdiği dikdörtgenin ikinci basamak olacağını ve bir parçasını tarayarak gösterilebileceğini ifade etmiştir. Ayrıca modelin ikinci basamağında küçük parçaları ikiye bölerek yuvarlak içine almasını $\frac{2}{10}$ 'un $\frac{1}{5}$ olarak da ifade edilebileceğini göstermek için olduğunu belirtmiştir. Bu görüşmede (G8) ÖA4 son-testte çizdiği bu modelin verilen işlem yerine tersini yansıttığını farketmemiştir. Buna göre ÖA4'ün iki kesrin çarpma işlemine ilişkin anlamasının yeterince derin olmadığı söylenebilir.

ÖA6 ve ÖA1 verilen $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$ işlemi için diğer öğretmen adayları gibi dikdörtgensel alan modeli çizmiştir (Şekil 4.31) ancak diğerlerinden farklı olarak fazladan bir basamak çizerek işlemin sonucunun iki farklı şekilde ifade edilebileceğini göstermiştir.



Şekil 4.31. KÇB son-testinde 17. görevde ÖA6'nın çizdiği model

ÖA6'nın son-testte çizdiği bu model incelendiğinde ön-testte çizdiği modele göre basamakları daha ayrıntılı bir şekilde gösterdiği görülmektedir. ÖA6 ön-testte $\frac{2}{5} \times \frac{1}{2}$ işlemini yansıtan bir model çizerken burada doğru bir şekilde $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$ işlemini yansıtan bir model çizmiştir. Bununla beraber işlemin sonucunun aynı zamanda $\frac{1}{5}$ olduğunu

fazladan bir basamak çizerek göstermiştir. Buna göre ÖA6'nın iki kesrin çarpma işlemine ilişkin anlamasının ön-testten son-teste geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. Sonuç olarak öğretmen adaylarının iki kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgileri ön-testten son-teste öğretim süreci boyunca gelişmiştir. Bu gelişim Tablo 4.8'de görülmektedir. Bu tablo öğretmen adaylarının ön-testte, öğretim sürecinde ve son-testte çizdikleri modelleri açıklayan Tablo 4.5, 4.6 ve 4.7'nin birarada verilmiş hali olarak sunulmuştur.

Tablo 4.8.

Öğretmen Adaylarının İki Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Model Çizme Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo

Öğretmen	Ön-test/G1		Öğretim Süreci/G2-G7			Son-test/G8	
Adayı	2/3 x 3/5 (Problem)	1/2 x 2/5	1/4 x 2/3	2/7 x 3/5	2/5 x 3/4 (Problem)	2/3 x 3/5 (Problem)	1/2 x 2/5
ÖA6	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Dikdörtgen sel alan modeli İşlemin tersini yansıtan model İşlemin sonucu tam olarak görünmüyör (İşlemin sonucunu gösteren basamakta diğer parçaları parçalama ma)	- Dikdörtgens el alan modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Dairesel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Dairesel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Dikdörtgens el alan modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var - Sonucu iki farklı şekilde gösteren ekstra basamak çizme	- Dikdörtgens el alan modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var - Sonucu iki farklı şekilde gösteren ekstra basamak çizme
ÖA2	- Dikdörtgen sel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Dikdörtgen sel alan modeli İşlemin tersini yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Sayı doğrusu modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Küme modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Dikdörtgens el alan modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Küme modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var
ÖA4	- Dairesel alan modeli - İşlemi yansıtan model İşlemin sonucunu gösteren basamakta diğer parçaları parçalama ma - İşlemdaki 3/5, 2/3 ve işlemin sonucu	- Dikdörtgen sel alan modeli İşlemin tersini yansıtan model İşlemin sonucu tam olarak görünmüyör (Parçayı bütün üzerinden göstermem e) Bütünü çokluk	- Dikdörtgens el alan modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Sayı doğrusu modeli İşlemin sonucu görünmüyör (Modelde bir bütünün 3/5'lik kısmını parçalamada n 1 bütün olarak gösterme)	- Küme modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Dikdörtgens el alan modeli - İşlemi yansıtan model - Bütün basamaklar var	- Dikdörtgens el alan modeli İşlemin tersini yansıtan model Çarpmanın iki anlamına ilişkin ikilem

	tam olarak görünmüyör (Parçayı bütün üzerinden göstermem e)	olarak alma					
ÖA3	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Küme modeli • İşlemin tersini yansıtan model • İşlemin sonucunu gösteren basamak yok • Bütünü çokluk olarak alma	• Dikdörtgens el alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Sayı doğrusu modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Dairesel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Dikdörtgens el alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Dikdörtgens el alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var
ÖA5	• Dairesel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Dikdörtgens el alan modeli • İşlemin tersini yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var • Yeni bütünü ayrı çizerek gösterme	• Sayı doğrusu modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Küme modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Küme modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Dairesel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var
ÖA1	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var • Bütünü çokluk olarak alma	• Dikdörtgens el alan modeli • İşlemin tersini yansıtan model • (1/5 x 1/2 x 2 işlemini yansıtır.) • Bütünü çokluk olarak alma	• Dikdörtgens el alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Dikdörtgens el alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Dikdörtgens el alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var	• Dikdörtgens el alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var • Ekstra model çizme (Dairesel alan modeli)	• Dikdörtgens el alan modeli • İşlemi yansıtan model • Bütün basamaklar var • Sonucu iki farklı şekilde gösteren ekstra basamak çizme

4.1.3. Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Model Çizme Bilgisi

4.1.3.1. Başlangıç Durumu

Öğretmen adaylarının öğretimden önce bir doğal sayının bir kesre bölündüğü durumda grupta, bir kesrin bir doğal sayıya bölündüğü durumda paylaştırma anlamını yansıtan model çizdikleri görülmektedir (Tablo 4.9). Bununla beraber problem kurduktan sonra model çizdikleri ve problemin bağlamının kesirlerle çarpmada olduğu gibi model seçimini etkilediği tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının öğretimden önce uygulanan KÇB ön-

testinde verilen işlemler için gerçek nesne modelini ve verilen problem için alan modelini kullandıkları görülmektedir (Tablo 4.9). Öğretmen adayları gerçek nesne olarak “elma”, “kablo”, “ekmek”, “tabildot”, “silgi” ve “paket süt” kullanmışlardır. Öğretmen adaylarının modelleri incelendiğinde en çok karşılaşılan zorluğun parçayı bütün üzerinden göstermemeleri dolayısıyla işlemdeki sayıları ve/veya işlemin sonucunu modelde tam olarak gösterememeleri olduğu görülmektedir. Bununla beraber ÖA6 verilen işlem yerine ters çevir çarp algoritmasının uygulanması sonucu ortaya çıkan çarpma işlemini yansıtan bir model çizmiştir. ÖA2 verilen problem için model çizerken taralı olmayan diğer parçaları parçalamamıştır ve ÖA3 de işlemdeki kesri parçalamadan 1 bütün şeklinde göstermiştir. Bu yüzden işlemin sonucu ÖA2 ve ÖA3’ün çizdikleri modellerde tam olarak görülmemektedir. Öğretmen adaylarından sadece ÖA1 bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin model çizerken zorluk yaşamamıştır. ÖA1 verilen işlemi ve bölmenin paylaşırma anlamını yansıtan eksiksiz modeller çizmiştir. Buna göre ÖA1’in öğretimden önce bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin model bilgisinin diğer öğretmen adaylarınıninkine göre daha güçlü olduğu söylenebilir. ÖA1 sadece verilen bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemi için model çizmekte zorlanmıştır ve sadece bölüneni çizmiştir. ÖA2, ÖA4 ve ÖA3’ün ön-testte verilen üç görevde de zorluk yaşadığı görülmektedir (Tablo 4.9). Buna göre bu öğretmen adaylarının bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin model bilgilerinin diğerlerinininkine göre daha zayıf olduğu söylenebilir. Sonuç olarak öğretmen adaylarının öğretim sürecine bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin model bilgileri zayıf bir şekilde başladıkları söylenebilir.

Tablo 4.9.

Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar

Öğretmen Adayı	$5 \div 1/2$	$1/2 \div 2$	$2/5 \div 3$ (Problem)
ÖA6	- Gerçek nesne modeli (Elma) 10 x 1/2'yi yansıtan model	- Gerçek nesne ve dairesel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var İşlemin sonucu tam olarak görünmüyor (Parçayı bütün üzerinden göstermeme)	- Dikdörtgensel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var
ÖA2	- Gerçek nesne modeli (Kablo) İşlem görünmüyor - Gruplama anlamı İşlemdaki 1/2 tam olarak görünmüyor (Parçayı bütün üzerinden göstermeme)	- Gerçek nesne modeli (Kablo) - Paylaştırma anlamı İşlemdaki 1/2 ve 1/4 tam olarak görünmüyor (Parçayı bütün üzerinden göstermeme)	- Dairesel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı İşlemin sonucu tam olarak görünmüyor (İşlemin sonucunu gösteren basamakta diğer parçaları parçalamama)
ÖA4	- Gerçek nesne modeli (Tabildot) - İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı İşlemdaki 1/2 tam olarak görünmüyor (Parçayı bütün üzerinden göstermeme)	- Gerçek nesne modeli (Ekmek) - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı İşlemdaki 1/2 ve 1/4 tam olarak görünmüyor (Parçayı bütün üzerinden göstermeme)	- Dikdörtgensel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı İşlemin sonucu tam olarak görünmüyor (Parçayı bütün üzerinden göstermeme)
ÖA3	- Gerçek nesne modeli (Elma) - İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı Parçayı bütün üzerinden göstermeme (1/2 tam olarak görünmüyor.)	- Gerçek nesne modeli (Ekmek) - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var İşlemdaki 1/2 tam olarak görünmüyor (Parçayı bütün üzerinden göstermeme)	- Dikdörtgensel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı İşlemin sonucu görünmüyor (Modelde 1 bütünün 2/5'ini parçalamadan 1 bütün olarak gösterme)
ÖA5	- Gerçek nesne modeli (Elma) - İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı Parçayı bütün üzerinden göstermeme (1/2 tam olarak görünmüyor.)	- Gerçek nesne modeli (Silgi) - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var İşlemdaki 1/2 ve 1/4 tam olarak görünmüyor (Parçayı bütün üzerinden göstermeme)	- Dikdörtgensel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var
ÖA1	- Gerçek nesne modeli (Ekmek) - Gruplama anlamı Sadece 5'i gösteren basamak var	- Gerçek nesne modeli (Paket süt) - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var	- Dikdörtgensel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var

d) $0000000... 1111111...$ 1 tane bildiğimiz elmalar
 Şimdi yarım elmaları birleştirerek her tane yarım elmadan bütün oluşturalım bakalım.

$\begin{array}{c} 00 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{c} 00 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{c} 00 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{c} 00 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{c} 00 \\ \hline \end{array}$
1 bütün elma	2 bütün elma	3 bütün elma	4 bütün elma	5 bütün elma

10 yarım elmadan her bütün elde ettik.

ÖA6'nın burada $5 \div 1/2$ işlemini $X \cdot 1/2 = 5$ işlemi olarak ele aldığı söylenebilir. Buna kanıt olarak modelinde yazdığı “*kaç tane yarımдан bütün oluşturabiliriz*” ifadesi gösterilebilir. ÖA6'nın modeli ve modele ilişkin açıklamaları göz önüne alındığında bölme işleminin anlamına ilişkin herhangi bir işaret yoktur. Daha ziyade bu işlemi “1/2'leri 5 bütün elde edene kadar ardışık olarak toplama” şeklinde ele almıştır. ÖA6 burada 5'in içinde 1/2'leri aramaktansa 10 tane 1/2'yi yani çarpma işlemini göstermiştir. Buna göre ÖA6'nın öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin model bilgisinin diğer öğretmen adaylarına göre daha zayıf olduğu söylenebilir.

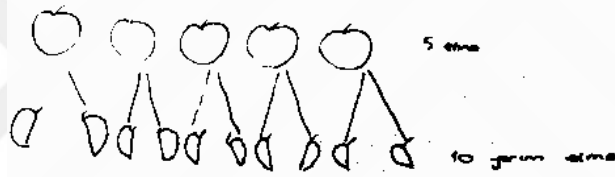
 → 2 yearon
 → 2 yearon
 → 2 yearon
 → 2 yearon
 → 2 yearon

Topborn 10 yearon older. Please to kisi g...

134

görüyoruz, iki tane yarım, bunların hepsi bir yarım oluyor (bir ekmeği ikiye bölmeye işaret ediyor ve her bir parçasını gösteriyor). 10 tane yarım olmuş oluyor burada da.” Burada ÖA1 bu basamağın gösterilmesiyle bölme işleminin daha rahat görülebileceğini ifade etmiştir ancak çizerek göstermemiştir. Buna göre ÖA1’in öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin anlamaya sahip olduğu ancak model bilgisinin zayıf olduğu söylenebilir.

ÖA3 ile ÖA5 modellerini aynı şekilde çizmişlerdir ve gerçek nesne olarak “elma” kullanmışlardır. ÖA4 ve ÖA2 de benzer şekilde model çizmişlerdir ancak gerçek nesne olarak “kablo” ve “tabildot” kullanmışlardır. Öğretmen adaylarının modelleri incelendiğinde $5 \div 1/2$ işlemini ve bölmenin gruptama anlamını yansıtan modeller çizdikleri görülmektedir. ÖA5’in çizdiği model incelendiğinde her ne kadar parçaların eş olmasını gözardı etse de bölmenin gruptama anlamını yansıtan bir model çizdiği görülmektedir (Şekil 4.34).



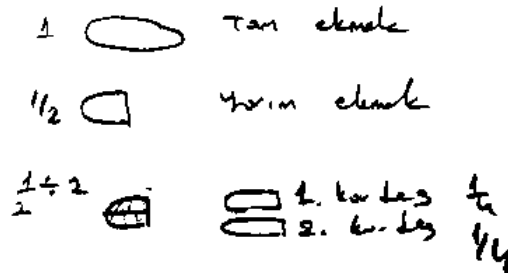
Şekil 4.34. KÇB ön-testinde 2. görevde ÖA5’in çizdiği model

ÖA5 ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) bu modeli nasıl çizdiğini şöyle açıklamıştır: “5 tane elma çizdim, 5 elma başta demişim. $1/2$ elma verecek her arkadaşına, $1/2$ elma vermesi için de her bir elmadan, elmayı ikiye bölecek. $1/2$ elma, $1/2$ elma. Bir elmadan ayırdım. Bir elmadan iki yarım elma çıktı. Böyle böyle böyle her bir elmayı gösterdiğimde 10 tane $1/2$ elma, toplam 10 tane yarım elma. Yani 10 arkadaş olduğunu buradan çıkarabiliriz.” Buna göre ÖA5’in öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin kavramsal anlamaya sahip olduğu söylenebilir. Burada ÖA5’in işlem için kurduğu problem üzerinden hareket ederek bu modeli çizdiği görülmektedir. Aynı durum diğer öğretmen adaylarının modellerinde de tespit edilmiştir. Buna göre çarpma işleminde olduğu gibi bölme işleminde de problemin model çizmelerini kolaylaştırdığı söylenebilir.

Öğretmen adaylarının öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin gruptama anlamına sahip oldukları gibi bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaşırma anlamına da sahip oldukları görülmüştür. Öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde altıncı görevde verilen $1/2 \div 2$ ve yirminci görevde verilen problemin ifade ettiği $2/5 \div 3$ işlemi için işlemleri ve bölmenin paylaşırma anlamını yansıtan birer model

çizdikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarının altıncı görevde verilen işlem için kurdukları problem üzerinden hareket ederek gerçek nesne modelini kullanırken, yirminci görevde verilen problemin ifade ettiği işlem için ÖA2 hariç diğerlerinin dikdörtgensel alan modelini kullandıkları görülmektedir. ÖA2 dairesel alan modelini kullanmıştır. Diğer öğretmen adaylarının dikdörtgensel alan modelini tercih etmelerinde problemde verilen “dikdörtgen şeklinde kek” ifadesinin etkisinin olduğu söylenebilir. Bu da çarpma işleminde olduğu gibi bölme işleminde de problemin bağlamının model seçimini etkilediğine kanıt olarak gösterilebilir.

Öğretmen adaylarının altıncı görevde verilen $1/2 \div 2$ işlemi için çizdikleri modeller incelendiğinde gerçek nesne olarak “ekmek”, “silgi”, “kablo”, “paket süt” ve “pasta” kullandıkları ve ÖA1 hariç diğerlerinin parçaları bütün üzerinden göstermedikleri görülmektedir. Bu yüzden modelde işlemin sonucunun tam olarak görüldüğü söylenememektedir. ÖA4’ün çizdiği model incelendiğinde her ne kadar parçaların eş olmasını gözardı etse de bu işlemi ve paylaşırma anlamını yansıtan bir model olduğu görülmektedir (Şekil 4.35). ÖA4 modelinde gerçek nesne olarak “ekmek” kullanmıştır.

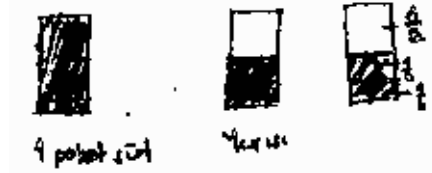


Şekil 4.35. KÇB ön-testinde 6. görevde ÖA4’ün çizdiği model

Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) ÖA4 bu modelde bölme işleminin görülüp görülmediğini model üzerinden şöyle açıklamıştır: “Evet, gösterirsem şöyle, bundan iki eş parçaya ayıracağım çünkü iki çocuğa da eşit olarak ayırmam gerekiyor. Böyle parçalara ayırabilirim. Yani her bir çocuğa aslında $1/4$ ’lük, tam ekmeğin $1/4$ ’lük kısmı gelir.” Burada ÖA4 işlemin sonucunu “tam ekmeğin $1/4$ ’lük” kısmı olarak ifade ettikten sonra bir bütün ekmek çizerek onun üzerinden de göstermiştir. ÖA4 burada “bütün” yerine “tam” ifadesini kullanarak uygun olmayan bir matematiksel dil kullanmıştır. Buna göre ÖA4’ün öğretimden önce bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaşırma anlamına ilişkin kavramsal anlamaya sahip olduğu söylenebilir.

ÖA1’in modeli incelendiğinde diğer öğretmen adaylarından farklı olarak bütün üzerinden hareket ettiği ve işlemin sonucunun tam olarak görüldüğü söylenebilir (Şekil 4.36). ÖA1 verilen işlem için kurduğu problem üzerinden hareket ederek bu modeli çizmiştir ve gerçek

nesne olarak “paket süt” kullanmıştır. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) işlemdeki $1/2$ 'yi “paketin yarısı”, 2 'yi “kaç kişiye bölüneceği” şeklinde ve verilen bölme işlemini “kaç parçaya böleceğimi” şeklinde ifade etmiştir. Buna göre ÖA1'in öğretimden önce bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin kavramsal anlamaya sahip olduğu söylenebilir.



Şekil 4.36. KÇB ön-testinde 6. görevde ÖA1'in çizdiği model

Öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde yirminci görevde verilen “Leyla Hanım, altın günü için gelen misafirlerlerine dikdörtgen şeklindeki bir kekten ikram etmiştir ve kekin $\frac{2}{5}$ 'i kalmıştır. Misafirler gittikten sonra Leyla Hanım'ın 3 çocuğu kekin kalanını eşit olarak paylaşmışlardır o halde çocukların her biri kekin ne kadarını yemiştir?” probleminin ifade ettiği işlemi ÖA2 ve ÖA1 hariç diğerleri $2/5 \div 3$ olarak ifade etmiştir. ÖA2 ve ÖA1 verilen problemin ifade ettiği işlemi $2/5 \times 1/3$ olarak ifade etmişlerdir. Sonra öğretmen adayları bu işlemleri yansıtan birer model çizmişlerdir. ÖA2 hariç diğerleri dikdörtgensel alan modeli kullanmıştır. ÖA2 bu işlem için dairesel alan modeli çizmiştir (Şekil 4.37).

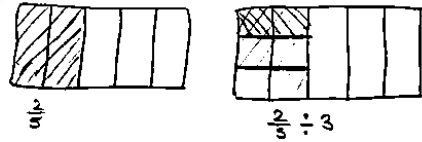


Şekil 4.37. KÇB ön-testinde 20. görevde ÖA2'nin çizdiği model

Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) ÖA2 çizdiği bu modeli şu şekilde açıklamıştır: “Bir pastamız var, pastanın $2/5$ 'i kalmış, beşe böleceğiz, bu şekilde beşe böldük. Bu beş parçadan şu iki parçası kalmış. Bu iki parçayı da 3 çocuğa paylaştıracamız. Bu iki parçayı ayrı ayrı şu şekilde 3'e böleriz. Bu 3'e böldükten sonra her bir çocuğa bir tane buradan bir tane buradan parça düşer. O da kekin ne kadarı eder dersek, $2/15$ eder.” Bu görüşmede ÖA2'ye bu problemin ifade ettiği işlem için bazılarının $2/5 \div 3$ olarak ifade ettikleri söylenmiştir ve bununla ilgili ne düşündüğü sorulmuştur. ÖA2 de bu durumu “Çocukların her biri dediğimiz için bölü 3 yazsak daha iyi işlemi karşılar.” şeklinde ifade etmiştir. Bununla beraber her çocuk denilirse bölü 3 ve bir çocuk denilirse “çarpı $1/3$ ” olacağını belirtmiştir. Bunun üzerine bu iki ifadenin farklı olup olmadığı sorulmuştur ve ÖA2 bunu şöyle açıklamıştır: “Herhangi bir çocuğa ne kadar düşerle bir çocuk ne kadar

yer mesela Ahmet ne kadar yer, eşit parçaya bölünecek diyoruz ama Ahmet ne kadar yer. Mesela Ahmet, Mehmet ve Murat diye 3 çocukları olsun, burada Ahmet pastanın ne kadarını yemiştir? $1/3$ 'ü olur, her bir çocuğa ne kadar düşer? Bu bölü 3 olur.” Burada ÖA2’nin bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaştırma anlamı için ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen çarpma işlemine ilişkin kavramsal anlamaya henüz sahip olmadığı söylenebilir. Çünkü bu anlamaya sahip olsaydı o zaman verilen problemin ifade ettiği bölme işlemine karşılık gelen işlemin $2/5 \times 1/3$ değil $1/3 \times 2/5$ olduğunu ifade edebilirdi. Buna göre ÖA2’nin bir kesir ile bir doğal sayının paylaştırma anlamına ilişkin anlamaya sahip olduğu ancak henüz kavramsal düzeyde olmadığı söylenebilir.

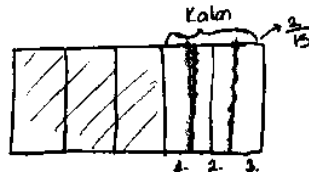
ÖA6, ÖA4, ÖA5 ve ÖA1’in KÇB ön-testte verilen bu problem için benzer model çizdikleri görülmektedir. ÖA6’nın çizdiği model incelendiğinde bölmenin paylaştırma anlamını yansıtan bir model olduğu görülmektedir. Ancak modelde diğer parçaları parçalamadığı için bütün parçaları eş değildir ve işlemin sonucu tam olarak görülmemektedir (Şekil 4.38). ÖA6 ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) modelin son basamağını yeniden çizmiştir ve diğer parçaları da parçalayarak işlemin sonucunu ifade etmiştir.



Şekil 4.38. KÇB ön-testinde 20. görevde ÖA6’nın çizdiği model

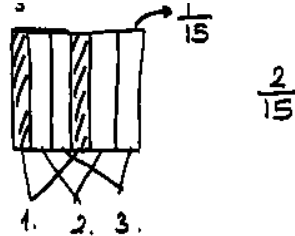
Buna göre ÖA6’nın öğretim sürecine bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin model çizme bilgisi bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaştırma anlamına göre daha zayıf bir şekilde başladığı söylenebilir.

ÖA3 bu problem için diğer öğretmen adayları gibi dikdörtgensel alan modeli çizmiştir. Ancak $2/5$ ’lik kısmı parçaların eş olmasına dikkat etmeksizin doğrudan 3 parçaya bölmüştür (Şekil 4.39). Benzer şekilde öğretimden önce kesirlerle çarpma işleminde model çizerken öğretmen adaylarından bazıları yeni bütünü 1 bütün olarak göstermişlerdir ve bunun üzerinden işlemi gösterdikleri için işlemin sonucunu ifade edememişlerdir. Buna göre çarpma işlemindeki bu durumun bölme işleminde de görüldüğü söylenebilir.



Şekil 4.39. KÇB ön-testinde 20. görevde ÖA3’ün çizdiği model

Buna kanıt olarak ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) ÖA3'ün çizdiği model için yaptığı şu açıklama gösterilebilir: “*Pastam, pastamın 5’te üçü gitti, geriye bu kadarı kaldı (modelde taralı olmayan iki parçayı gösteriyor). Kalan kısmın da yani şunu (modelde taralı olmayan iki parçayı gösteriyor) tamamen bir bütün olarak düşünüp üçe bölüyorum herkese eşit paylaştırıyorum.*” Burada 2/5’lik kısmı yeni bütün olarak aldığına işaret etmiştir ve bu yeni bütünü eşit parçaladığını sözel olarak ifade etmiştir ancak modelde gösterememiştir. Buradan işlemin sonucuna ulaşmak mümkün değildir. Bu görüşmede (G1) işlemin sonucu sorulduğunda ÖA3 işlem yaparak 2/15 olduğunu ifade etmiştir. Bunun üzerine ÖA3’e işlemin sonucuna işlem yapmadan modelden nasıl ulaşacağı sorulduğunda her bir parçayı üçe bölerek ulaşacağını şu şekilde ifade etmiştir: “*O zaman benim her iki parçayı da üçe bölüp öyle almam gerekiyordu galiba. İki parça eğer bunun ikisini de üçe eşit bir şekilde bölersem daha emin olabilirim galiba (modelde taralı olmayan iki parçayı yeniden çiziyor ve her bir parçayı 3 eş parçaya bölüyor (Şekil 4.40)). Buradan bunu ve bunu birinci çocuğa, bunu ve bunu ikinci çocuğa, bunu ve bunu üçüncü çocuğa alırsam hepsi eşit olur. Bu normalde 1/5’i (modeldeki kesir çubuğunun taralı olmayan bir parçasını gösteriyor), 1/5’in 1/3’ü, buradan şu küçük parça 1/15’e denk geliyor (modeldeki bir küçük parçayı gösteriyor). Birinci çocuk için şu ikisini alıyor ya, iki tane 1/15’likten aldığı için 2/15 oluyor (modeldeki iki küçük parçayı gösteriyor).*”



Şekil 4.40. KÇB ön-testinde 20. görevde ÖA3'ün çizdiği modelin devamı

ÖA3 ön-testte modelde parçaları eş olarak bölmese de ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) eş olarak bölmüştür. Buna göre ÖA3'ün öğretimden önce diğer öğretmen adayları gibi bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin kavramsal anlamaya sahip olduğu söylenebilir.

4.1.3.2. Öğretim Süreci

Üçüncü ve dördüncü derste bir doğal sayı ile bir birim kesrin ve bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemine ilişkin öğretim gerçekleştirilmiştir. Üçüncü derse (D3) paralel yapılan dördüncü görüşmede (G4) ÖA5 hariç diğer öğretmen adaylarının bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemi için paylaştırma anlamına ilişkin bir anlama kazandıkları görülmüştür.

Öğretmen adayları öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin bir anlamaya sahip değilken bu görüşmede verilen $4 \div 1/3$ işlemi için birer model çizmişlerdir. Öğretmen adaylarının bu modelleri incelendiğinde verilen işlemi ve paylaştırma anlamını yansıtan birer model oldukları görülmektedir. Aynı görüşmede (G4) verilen problemin ifade ettiği $12 \div 4/5$ işleminin paylaştırma anlamı için ÖA4, ÖA3 ve ÖA5 hariç diğer öğretmen adayları doğru bir şekilde model çizmişlerdir (Tablo 4.10). Burada ÖA5 modeli hiç çizemezken, ÖA4 ve ÖA3 modellerinde işlemin sonucunu tam olarak gösterememişlerdir. Diğer taraftan ÖA2 bu iki görevde diğer öğretmen adaylarından farklı olarak ters çevir çarp algoritmasından gelen kesirli sayıyı doğru bir şekilde ifade etmiştir ve çizdiği modelde ortak pay almayı doğru bir şekilde göstermiştir.

Öğretmen adaylarının dördüncü derse paralel yapılan görüşmede (G5) verilen işlemlere ilişkin model çizerken neredeyse hiç zorluk yaşamadıkları görülmektedir (Tablo 4.10). Burada sadece ÖA5 verilen $3 \div 1/4$ işleminin paylaştırma anlamı için model çizerken işlemin sonucunu modelde gösterememiştir. Bu durum ÖA5'in bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin model bilgisinin diğer öğretmen adaylarınıninkine göre daha zayıf olmasıyla ve beşinci görüşmede (G5) yeni gelişmeye başlaması ile açıklanabilir. Öğretmen adaylarının modelleri incelendiğinde verilen işlemi yansıtan birer model çizdikleri görülmektedir (Tablo 4.10). Öğretmen adaylarının daha çok kesir çubuğu modelini tercih ettikleri, bununla beraber küme, sayı doğrusu ve alan modellerini de kullandıkları tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının beşinci görüşmede (G5) verilen görevlerde ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen çarpma işlemini doğru bir şekilde ifade ettikleri görülmektedir (Tablo 4.10). Buna göre öğretmen adaylarının bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin model bilgilerinin ön-testten öğretim sürecinin sonuna doğru geliştiği söylenebilir.

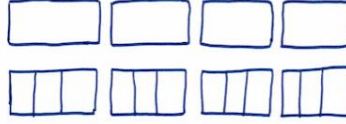
Tablo 4.10.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar

Öğretmen Adayı	D3/G4 $4 \div 1/3$	12 $\div$ 4/5 (Problem)	D4/G5 $3 \div 1/4$	3/5 $\div$ 4 (Paylaştırma anlamı)	3/5 $\div$ 4 (Gruplama anlamı)
ÖA6	- Küme ve dairesel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var	- Kesir çubuğu ve küme modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var - Ters çevir çarp'tan	- Sayı doğrusu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı - Bütün basamaklar var - Ters çevir çarp'tan gelen 1/4 ile modelde 3/5 x 1/4 işleminin

	• Bütün basamaklar var		gelen 4 ile modelde 4 x 3 işleminin görüldüğünü ifade etme		görüldüğünü ifade etme
ÖA2	• Küme modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var • Ters çevir çarp'tan gelen 3 ile modelde 3 x 4 işleminin görüldüğünü ifade etme	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı ("4/5'i bu kadar olursa tamamı ne kadar olur?") • Ortak pay alma • Bütün basamaklar var	• Sayı doğrusu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var • Ters çevir çarp'tan gelen 4 ile modelde 4 x 3 işleminin görüldüğünü ifade etme	• Dairesel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var • Ters çevir çarp'tan gelen 1/4 ile modelde 1/4 x 3/5 işleminin görüldüğünü ifade etme	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı ("Bir bütünün 3/5'ini 4 kişiye paylaştırma") • Bütün basamaklar var
ÖA4	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • İşlemin sonucu tam olarak görünmüyor (İşlemin sonucunu gösteren basamakta diğer parçaları parçalamama)	• Sayı doğrusu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var • Ters çevir çarp'tan gelen 4 ile modelde 4 x 3 işleminin görüldüğünü ifade etme	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamakları var • Ters çevir çarp'tan gelen 1/4 ile modelde 1/4 x 3/5 işleminin görüldüğünü ifade etme	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı ("4'ün ne kadarı 3/5'tir?") • Bütün basamaklar var • Ters çevir çarp'tan gelen 1/4 ile modelde 3/5 x 1/4 işleminin görüldüğünü ifade etme
ÖA3	• Küme modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı ("4/5'i bu kadar olursa tamamı ne kadar olur?") • İşlemin sonucu görünmüyor	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Ters çevir çarp'tan gelen 4 ile modelde 4 x 3 işleminin görüldüğünü ifade etme	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var • Ortak pay alma • Ters çevir çarp'tan gelen 1/4 ile modelde 1/4 x 3/5 işleminin görüldüğünü ifade etme	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı ("4'ün ne kadarı 3/5'tir?") • Bütün basamaklar var • Ters çevir çarp'tan gelen 1/4 ile modelde 3/5 x 1/4 işleminin görüldüğünü ifade etme
ÖA5	• Paylaştırma anlamı için model çizemememe	• Paylaştırma anlamı için model çizemememe	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • İşlemin sonucu görünmüyor • Ters çevir çarp'tan gelen 4 ile modelde 4 x 3 işleminin görüldüğünü ifade etme	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var • Ters çevir çarp'tan gelen 1/4 ile modelde 1/4 x 3/5 işleminin görüldüğünü ifade etme	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı • Bütün basamaklar var
ÖA1	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var	• Sayı doğrusu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var • Ters çevir çarp'tan gelen 4 ile modelde 4 x 3 işleminin görüldüğünü ifade etme	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var • Ters çevir çarp'tan gelen 1/4 ile modelde 1/4 x 3/5 işleminin görüldüğünü ifade etme	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı • Bütün basamaklar var

Öğretmen adayları üçüncü derse paralel yapılan görüşmede (G4) $4 \div 1/3$ işleminin gruptama anlamını yansıtan model çizmişlerdir. ÖA6 dairesel alan modeli kullanırken, diğer öğretmen adayları kesir çubuğu modeli kullanmışlardır. Kesir çubuğu modeli kullanan öğretmen adaylarının modellerini benzer şekilde çizdikleri görülmüştür. Bu öğretmen adaylarından birisi olan ÖA3'ün modeli incelendiğinde verilen işlemi ve bölmenin gruptama anlamını yansıtan bir model olduğu görülmektedir (Şekil 4.41).

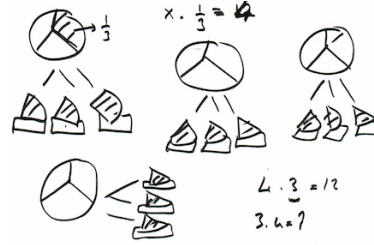


Şekil 4.41. Görüşme-4'te verilen $4 \div 1/3$ işleminin gruptama anlamı için ÖA3'ün çizdiği model

ÖA3 öncelikle verilen bu işlemi “4 tane bütünü, 1/3'er parçalara ayırmak” ve “4'ün içinde kaç tane 1/3'ü bulmak” olarak ifade etmiştir. Sonra modelin ilk basamağında 4 tane kesir çubuğu çizmiştir ve “4 tane test” olarak ifade etmiştir, ikinci basamağında her bir kesir çubuğunu üç eş parçaya ayırmıştır ve oluşan küçük parçaların 1/3 olduğunu ve bunlardan 12 tane olduğunu belirterek işlemin sonucunu ifade etmiştir. Burada ÖA3'e ters çevir çarp algoritmasından gelen 3'ün modelde ne ifade ettiği ve modelde 4×3 mü yoksa 3×4 işleminin mi görüldüğü sorulmuştur. ÖA3 doğru bir şekilde modelde 4×3 işleminin görüldüğünü ifade etmiştir ve nedenini de şöyle açıklamıştır: “4 tane 3 görüyorum yani şunların hepsini ayrı ayrı olarak düşünürsem (modelin ikinci adımındaki kesir çubuğunun her bir parçasına işaret ediyor) ve bu grubum olursa üç (kesir çubuğunun tamamına işaret ediyor), bundan 4 tane.” Burada bir bütünde 3 tane 1/3 olursa 4 bütünde bu 1/3'ten 4×3 tane olduğuna işaret etmiştir. Bu durum diğer öğretmen adaylarına da sorulmuştur ve benzer şekilde açıklamışlardır. Buna göre öğretmen adaylarının bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin anlamalarının ön-testten dördüncü görüşmeye geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

ÖA6 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak verilen $4 \div 1/3$ işlemi için dairesel alan modeli çizmiştir (Şekil 4.42). ÖA6'nın bu modeli incelendiğinde her ne kadar parçaların eş olmasını göz ardı etse de verilen işlemi ve bölmenin gruptama anlamını yansıtan bir model olduğu görülmektedir. ÖA6 modelinde verilen işlem için kurduğu problemde hareket ederek bir bütünü “bir pasta” olarak ele alıp bir daire çizmiştir ve dairenin altına çizdiği küçük parçaları “her bir pastadan çıkan 3 tabak servis” olarak ifade etmiştir. Buradan modelde 4×3 işleminin görüldüğünü belirterek işlemin sonucunu şu şekilde doğru bir şekilde açıklamıştır: “Şimdi burada ifade ettiği her bir grubunda 4 nesnem var, 3

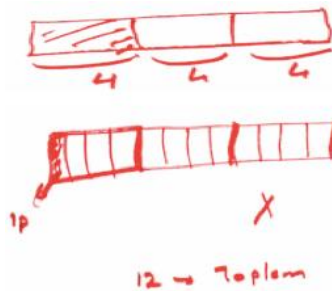
grubumun olması lazım ama burada 3 grubum yok. Yani 4 nesnem biraz karmaşık, o yüzden 4 çarpı 3 daha mantıklı geldi bana. Sonuçta 4 pastam var, birer pastadan üç tane tabağı çıkıyor. Sonuçta da zaten 12 tabak çıkmış oluyor ve yine aynı bütünleri kullanmış oluyoruz.”



Şekil 4.42. Görüşme-4’te verilen $4 \div \frac{1}{3}$ işleminin gruptama anlamı için ÖA6’nın çizdiği model

ÖA6 ön-testte $5 \div \frac{1}{2}$ işlemi için bölmeden ziyade çarpma işlemini yansıtan bir model çizerken burada bölmenin gruptama anlamını yansıtan bir model çizmiştir. Buna göre ÖA6’nın bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin anlamasının diğer öğretmen adaylarınıninki gibi ön-testten dördüncü görüşmeye geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

Öğretmen adaylarından bu görüşmede (G4) $4 \div \frac{1}{3}$ işleminin gruptama anlamının yanı sıra paylaşırma anlamı için de model çizmeleri istenmiştir. ÖA6, ÖA2 ve ÖA3 küme modelini kullanırken, ÖA4 ve ÖA1 kesir çubuğu modelini kullanmışlardır. ÖA5 ise model çizememiştir. Buna göre ÖA5’in bir doğal sayı ile kesrin bölme işleminin paylaşırma anlamına ilişkin anlamasının henüz gelişmediği söylenebilir. ÖA1’in modeli incelendiğinde verilen işlemi ve bölmenin paylaşırma anlamını yansıtan bir model çizdiği görülmektedir (Şekil 4.43).

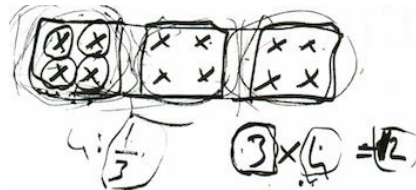


Şekil 4.43. Görüşme-4’te verilen $4 \div \frac{1}{3}$ işleminin paylaşırma anlamı için ÖA1’in çizdiği model

ÖA1 bu modeli çizmeden önce işlemi $4 = \frac{1}{3} \cdot X$ olarak ifade etmiştir ve işlemin paylaşırma anlamını yansıtan bir problem kurmuştur. Sonra dairesel alan modeli, sayı doğrusu ve X’ler dikdörtgeni çizerek bu işlemi göstermeye çalışmıştır ancak başarılı olamamıştır. Daha sonra kesir çubuğu modelini kullanarak bu işlemi ve bölmenin

paylaştırma anlamını yansıtan bir model çizebilmiştir. Buna göre model türünün bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemini anlamlandırma sürecine etkisinin olduğu söylenebilir. ÖA1 çizdiği modelde önce bir kesir çubuğu çizmiştir ve bunu “bir tam” olarak ifade etmiştir. Burada “bütün” yerine bu ifadeyi kullanarak uygun olmayan bir matematiksel dil kullanmıştır. Sonra bu kesir çubuğunu 3 eş parçaya bölüp bir parçasını taramıştır ve buradan şu şekilde ifade ederek işlemin sonucuna ulaşmıştır: “Üçte biri, burası dörtmüş. O zaman şurası 4 olur, şurası 4 olur, 12 olmuş olur (kesir çubuğunun her bir parçasının altına 4 yazıyor).” ÖA1 burada 4’ü ve işlemin sonucu olan 12’yi sadece sayısal olarak ifade etmiştir ancak göstermemiştir. Bunun üzerine bunları nasıl gösterebileceği sorulmuştur ve ÖA1 modelin ikinci basamağı olarak bu kesir çubuğunun bir parçasının altına birleşik olarak 4 küçük parçalı bir kesir çubuğu çizmiştir. Sonra bu 4 küçük parçanın yanına 8 küçük parça daha çizmiştir ve 12 olduğunu belirtmiştir. Benzer şekilde ÖA4 de modelini tek bir basamakta çizmiştir. Buna göre her iki öğretmen adayının bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin anlamalarının ön-testten dördüncü görüşmeye geliştiği ancak henüz işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir. Bununla beraber ÖA1 ve ÖA4’ün bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemine ilişkin anlamalarının ÖA6, ÖA2 ve ÖA3’e göre daha zayıf olduğu söylenebilir. Çünkü modelde ters çevir çarp algoritmasından gelen 3’ü ve modelde 4×3 mü yoksa 3×4 işleminin mi görüldüğünü açıklayamamışlardır.

ÖA2 bu işlem için küme modellerinden X’ler dikdörtgeni çizmiştir (Şekil 4.44). ÖA2 bu modeli çizmeden önce işlemi şu şekilde ifade etmiştir: “Bunda nasıl yaparız, her bir gruptaki nesne, 4 bölü $1/3$, her bir gruptaki nesne sayısını bulacağız. O zaman bu grup sayısı ($1/3$ ’ü gösteriyor), bu toplam nesne sayısı (4’ü gösteriyor), her bir gruptaki nesne sayısını bulacağız. Nasıl bulacağız? Toplam nesnenin içerisinde grup sayısı, haaa, tamam. Şimdi $1/3$ gruptaki nesne sayımız 4 ise toplam nesne sayımız da 12’dir şeklinde.” Burada ÖA2 çarpmanın tanımını kullanarak işlemdeki $1/3$ ve 4’ü, buradan da işlemin sonucunu ifade etmiştir.

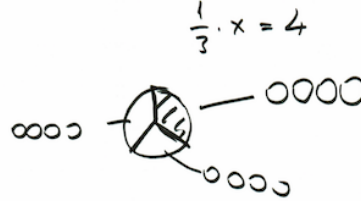


Şekil 4.44. Görüşme-4’te verilen $4 \div 1/3$ işleminin paylaştırma anlamı için ÖA1’in çizdiği model

ÖA2 modelinde önce iki satır ve iki sütundan oluşan bir X'ler dikdörtgeni çizmiştir. Burada bir tane X'in "bir bütün" olduğunu belirtmiştir ve bu 4 tane X'i "*4 tane nesnemiz var yani 4 bütünümüz var.*" şeklinde ifade etmiştir. Sonra bu X'ler dikdörtgeninden yanına 2 tane daha çizmiştir. ÖA3 önce dikdörtgensel alan modeli çizmeye çalışmıştır ve bölmenin paylaştırma ve gruplama anlamına ilişkin ikileme düşerek başarılı olamamıştır. Bunun üzerine verilen işlem için problem kurmuştur ve bu problem üzerinden hareket ederek ÖA2 gibi küme modeli çizmiştir. Buna göre ÖA3'ün kurduğu problemin model çizmesine yardımcı olduğu söylenebilir. Diğer taraftan dikdörtgensel alan modeli çizerek başarılı olamayıp küme modeli çizerek işlemi gösterebilmesi model türünün bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemini anlamlandırma sürecine etkisi olduğunu desteklemektedir. Daha sonra ÖA2 ve ÖA3 ters çevir çarp algoritmasından gelen 3'ü ve modelde 3 x 4 mü yoksa 4 x 3 işleminin mi görüldüğünü doğru bir şekilde açıklamışlardır. ÖA2 bunu şöyle açıklamıştır: "*Bir grubumuzda yani grubumuzun üçte birinde yani grup sayımız şunların her biri (her bir x'ler dikdörtgenini gösteriyor), grubumuzun üçte biri. Her bir grupta yani grubumuzun her bir üçte birinde dört eleman varsa, tamamında kaç eleman var dediğimiz zaman 3 ile çarparsız, yani 3 çarpı 4.*" Buna göre ÖA2 ve ÖA3'ün bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin anlamalarının ön-testten dördüncü görüşmeye geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

ÖA2 burada işlemi $4 = 1/3 \cdot X$ şeklinde çarpma işlemi olarak yazmadan çarpmanın tanımını kullanarak sözel olarak açıklamıştır ve bunun üzerinden hareket ederek modeli çizmiştir. Buna göre işlemi çarpmanın tanımını kullanarak grup ve nesne kavramlarıyla açıklamanın model çizmesine yardımcı olduğu söylenebilir. Bunu daha sonraki görevlerde işlemlerin modelini çizmeden önce bu şekilde açıklaması desteklemektedir. Diğer öğretmen adaylarının işlemi sözel olarak ifade etmenin yanısıra çarpma işlemi şeklinde yazarak işlem üzerinden hareket ettikleri görülmüştür. Buna göre bölme işlemini çarpmanın tersi olarak ifade etmenin ve çarpmanın tanımını kullanarak açıklamanın öğretmen adaylarının özellikle bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin model çizmelerine yardımcı olduğu söylenebilir. Özellikle ÖA6'nın öğretim süreci boyunca buna sıkı sıkıya bağlandığı görülmüştür. Bunu öğretim sürecinde daha sonraki bütün görevlerde ve son-testte kullanmıştır. Hatta bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin gruplama anlamı için ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaştırma anlamı için model çizmeye de taşımıştır. ÖA6 dördüncü görüşmede (G4)

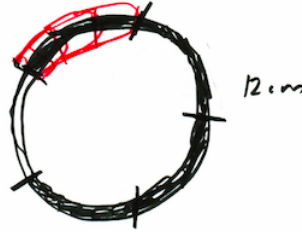
verilen $4 \div 1/3$ işleminin paylaştırma anlamı için model çizmeden önce bu işlemi $1/3 \cdot X = 4$ şeklinde yazmıştır ve şöyle ifade etmiştir: “Yazmayınca sanki böyle soyuttan düşünüyormuşum gibi geliyor.” Sonra bu işlemi “ $1/3$ grubum, bir grubumda X nesnem var” olarak ifade edip modeli çizmiştir (Şekil 4.45). Modelinde daire ve küçük daire çizerek dairesel alan modelini ve küme modelini beraber kullanmıştır.



Şekil 4.45. Görüşme-4’te verilen $4 \div 1/3$ işleminin paylaştırma anlamı için ÖA6’nın çizdiği model

ÖA6 bu modeli çizerken şöyle ifade etmiştir: “Burası $1/3$ grubum, tamamı 1 grubum (bir daire çiziyor, üç eş parçaya ayırıyor ve bir parçasını tarıyor). Bunda bir, iki, üç, dört tane nesnem varsa (aynı dairenin taralı parçasından bir ok çıkararak 4 tane küçük daire çiziyor), her bir grubumda da 4 tane nesnem olur. O zaman X burada bir gruptaki nesne sayımsa, X buradan 12 çıkar.” ÖA6’nın çizdiği bu modelde $1/3$ ve 4 için referans alınan bütünleri doğru bir şekilde farklı gösterdiği ve bölmenin paylaştırma anlamını doğru bir şekilde ele aldığı görülmektedir. Daha sonra ÖA2 ve ÖA3 gibi ters çevir çarp algoritmasından gelen 3’ü ve modelde 3×4 mü yoksa 4×3 işleminin mi görüldüğünü doğru bir şekilde açıklamıştır. Buna göre ÖA6’nın da ÖA2 ve ÖA3 gibi bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin anlamasının ön-testten dördüncü görüşmeye geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

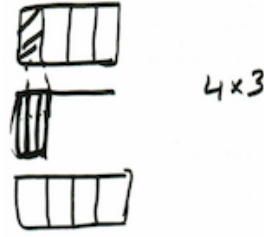
Öğretmen adaylarının bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin model çizmesini işlemdeki kesrin payının doğal sayıya kalansız bölünebiliyor olmasının kolaylaştırdığı tespit edilmiştir. Buna kanıt olarak dördüncü görüşmede (G4) verilen “Murat’a babası oyuncak tren almış ve Murat da oyuncak treni için rayları kurmak istiyor. Murat’ın kurduğu kısım tren için gerekli rayların $4/5$ ’i yani 12 santimetre raydır. Tren için gerekli olan rayın tamamı kaç santimetredir?” probleminin ifade ettiği işlem için rahat bir şekilde model çizerken 12 yerine 9 verildiğinde zorlanmaları gösterilebilir. Öğretmen adaylarından ÖA6 öncelikle verilen probleme karşılık gelen işlemi doğru bir şekilde $12 \div 4/5$ olarak ifade etmiştir ve işlemin paylaştırma anlamını yansıttığını bu işlemi $4/5 \cdot X = 12$ şeklinde yazarak belirtmiştir. Daha sonra bu işlem üzerinden hareket ederek bir kesir çubuğu modeli çizmiştir (Şekil 4.46).



Şekil 4.46. Görüşme-4'te verilen $12 \div 4/5$ işleminin paylaştırma anlamı için ÖA6'nın çizdiği model

ÖA6'nın çizdiği bu model kesir çubuğu modelidir ancak problemde “tren rayı” olarak ifade edilmesinden dolayı ÖA6'nın çember şeklinde çizdiği söylenebilir. Burada ÖA6 bu kesir çubuğunu 5 eş parçaya bölüp 4 parçasını taramıştır ve bu taralı kısmın 12 santimetre olduğunu ifade etmiştir ancak 12'yi çizerek göstermemiştir. Bunun üzerine 12'yi modelde nasıl gösterebileceği sorulduğunda şu şekilde açıklayarak $4/5$ kesrini “4 tane $1/5$ ” olarak ele alıp, her bir parçayı 3 parça şeklinde göstermeye işaret etmiştir: “Bu rayları şey yapmak için hani böyle küçük şeyleri birbirine geçiriyorlar ya (önünde bulunan iki tane keçeli kalemi gösteriyor ve bunları arka arka birleştirmeye işaret ediyor), mesela bunu kullanmak için 12 tanesini buraya, 12 tanesini birleştirerek, santimetre değil de onlardan 12 tanesini birleştirerek mesela zaten her birine 3 tane mi düşüyor? Hani şu şekilde gösterebilirim (çember şeklindeki kesir çubuğunun bir parçasının üzerine birleşik üç küçük dikdörtgen çiziyor).” Burada 12'nin 4'e bölünebilir bir sayı olması ÖA6'nın modeli bu şekilde çizmesini ve sonuca ulaşmasını kolaylaştırmış olabilir. Bunun için 12 yerine 9 olsaydı nasıl göstereceği sorulmuştur ve ÖA6 bunu şöyle açıklamıştır: “ $4/5$ 'i 9 olsaydı, 9 santimetre olsaydı. O zaman da onun için 36 oyuncak gerekirdi derdik (gülüyor). Yani yine kat, böyle katlar olunca daha kolay oluyor ya, insan oraya gidiyor. 9 santimetrem olsa, yine şey yapabiliriz mesela, yine 4 parça 9 santimetre olacak ya 9 santimetre (modeldeki taralı 4 parçayı gösteriyor), dört buçuk santimetre (modeldeki taralı iki parçayı gösteriyor), iki yirmi beş (modeldeki taralı bir parçayı gösteriyor). Küsüratlar karıştırıyor işi.” Burada önce kesir çubuğunda her bir parçayı 9 parça almaya işaret etmiştir ancak oradan işlemin sonucunun ne olacağını ifade edememiştir. Sonra 9'u doğrudan 4'e bölmeye işaret etmiştir ve buradan $1/5$ 'lik kısmın 2,25 olmasının kafa karıştırdığını belirterek yine işlemin sonucunu ifade edememiştir. Buna göre işlemdeki kesrin payının doğal sayıya bölünebilir bir sayı olmaması ÖA6'nın bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamı için model çizmesini zorlaştırmıştır. Benzer şekilde diğer öğretmen adayları da önce 12 için rahat bir şekilde modellerini çizerken sonra 9 için model çizmekte zorlanmışlardır.

Dördüncü görüşmede (G4) ÖA4 ve ÖA1'in bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin anlamalarının ÖA6, ÖA2 ve ÖA3'e göre daha zayıf olduğu ve ÖA5'in bu anlamayı henüz kazanmadığı görülmüştür. Dördüncü derste bir doğal sayı ile bir birim kesir ve bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemine ilişkin öğretime devam edilmiş ve ilgili alıştırmalar çözdürülmüştür. Dördüncü derse paralel yapılan beşinci görüşmede (G5) ÖA4, ÖA1 ve ÖA5'in bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin anlamalarının dördüncü görüşmeye göre daha güçlü hale geldiği görülmüştür. Bu görüşmede (G5) öğretmen adaylarından $3 \div 1/4$ işleminin paylaştırma anlamı için model çizmeleri istenmiştir. ÖA6, ÖA3 ve ÖA5 kesir çubuğu modeli, ÖA2, ÖA4 ve ÖA1 sayı doğrusu modeli kullanmışlardır. Öğretmen adaylarının modelleri incelendiğinde birbirlerinininkine benzer şekilde modeller çizdikleri ve verilen işlemin paylaştırma anlamını yansıtan birer model çizebildikleri görülmektedir. ÖA5 bir önceki görüşmede $4 \div 1/3$ işleminin paylaştırma anlamı için model çizemezken burada bu anlamı yansıtan bir kesir çubuğu modeli çizmiştir (Şekil 4.47). Bununla beraber ters çevir çarp algoritmasından gelen 4'ü ve modelde 3×4 mü yoksa 4×3 işleminin mi görüldüğünü doğru bir şekilde ifade etmiştir. Bu da ÖA5'in dördüncü görüşmeden beşinci görüşmeye bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin anlamasının geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. ÖA5 öncelikle bu işlemi $3 = 1/4 \cdot X$ şeklinde yazmıştır. Sonra bir kesir çubuğu çizmiştir ve bunu 4 eş parçaya bölüp bir parçasını taramıştır. Burada taradığı parçayı göstererek 3'ün bunun içindeki nesne sayısı olduğunu ifade etmiştir. Sonra bu kesir çubuğunun altına bir parçası kadar bir kesir çubuğu çizmiştir, bunu 3 eş parçaya bölmüştür ve “3 bütün” olarak ifade etmiştir. Daha sonra ilk kesir çubuğunun bir parçasını ve ikinci kesir çubuğunun tamamını göstererek işlemin sonucunun 12 olduğunu şu şekilde açıklamıştır: *“1/4 grup var ya, bunun bir grubu (ilk kesir çubuğunun bir parçasını gösteriyor) onun 3 bütününe (ikinci kesir çubuğunun tamamını gösteriyor), 3 nesnesine denk geliyor. Bu gruptan da 4 tane grup var, toplam 12 nesne oluyor.”* Burada modelde 4×3 mü yoksa 3×4 işleminin mi görüldüğünü ÖA5 şöyle açıklamıştır: *“Burada da 4 çarpı 3 olmalı. Çünkü 4 grup var, 4 grup olacak, 4 grup, her bir gruptaki nesne sayısı da 3, evet, 4 çarpı 3 olur (4×3 yazıyor).”*



Şekil 4.47. Görüşme-5'te verilen $3 \div 1/4$ işleminin paylaştırma anlamı için ÖA5'in çizdiği model

Bu görüşmede (G5) ÖA1 ve ÖA4 sayı doğrusu modelini kullanarak verilen $3 \div 1/4$ işlemi için aynı modeli çizmişlerdir (Şekil 4.48). Öğretmen adaylarının her ikisi de önce işlemi $3 = 1/4 \cdot X$ şeklinde yazmışlar ve sonra bu işlemin paylaştırma anlamını yansıtan birer problem kurmuşlardır. Daha sonra bu problem üzerinden hareket ederek Şekil 4.48'de verilen modeli çizmişlerdir. ÖA4 bu modeli nasıl çizdiğini şöyle açıklamıştır: “0’dan X’e bilmediğim bir alan var (bir sayı doğrusu çiziyor ve 0 ile X aralığına işaret ediyor). Bu araziye 4 eş parçaya ayırıyorum (0 ile X aralığını 4 eş parçaya bölüyor). Bir tanesi de 3 lira yapıyormuş (bir parçasını tarıyor), tamamı kaç lira yapıyor işte? (Altına bir sayı doğrusu daha çiziyor.) X’in $1/4$ ’ü 3 liraydı, o zaman şu kısım (ilk sayı doğrusunun bir parçasını gösteriyor) 3 lira, 6 lira, 9 lira, eğer eşitse burası da 12 lira (ikinci sayı doğrusunda 3’er birim ilerleyerek parçalıyor) yani 12 lira (X’e işaret ediyor) (ilk sayı doğrusundaki her bir parçanın 3’er birim olduğuna işaret ediyor).”



Şekil 4.48. Görüşme-5'te verilen $3 \div 1/4$ işleminin paylaştırma anlamı için ÖA4'ün çizdiği model

Öğretmen adaylarının bu modelleri incelendiğinde verilen işlemi ve bölmenin paylaştırma anlamını yansıtan birer model oldukları görülmektedir. ÖA1 ve ÖA4 bir önceki görüşmede (G4) de verilen $4 \div 1/3$ işleminin paylaştırma anlamı için yine birbirlerinininkine benzer şekilde ve bu anlamı yansıtan bir model çizmişlerdir. Ancak ters çevir çarp algoritmasından gelen 3’ü ve modelde 4×3 mü yoksa 3×4 işleminin mi görüldüğünü ifade edememişlerdir. Bu görüşmede ise bunu doğru bir şekilde 4×3 olarak açıklamışlardır. ÖA4 bunu şöyle açıklamıştır: “Dört eş parça, dört tane parça var. X’in dörtte biri, aslında her bir parçadan 4 tane var. Bir parçadan 4 tane var. Aynı eş parçadan 4 tane var.” Buna göre ÖA4 ve ÖA1’in bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin anlamalarının dördüncü görüşmeden beşinci görüşmeye geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

Öğretmen adayları bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamı gibi öğretimden önce bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin anlamaya da sahip değillerdir. Ancak beşinci görüşmede (G5) bu anlamayı öğretmen adaylarının kazandıkları görülmüştür. Öğretmen adayları bu görüşmede (G5) verilen $3/5 \div 4$ işleminin gruptama anlamı için birer model çizmişlerdir. Öğretmen adaylarının bu modelleri incelendiğinde verilen işlemi ve gruptama anlamını yansıtan birer model çizebildikleri görülmektedir.

Öğretmen adayları bu görüşmede (G5) önce $3/5 \div 4$ işleminin paylaştırma anlamını yansıtan model çizmişlerdir. ÖA2 ve ÖA4 alan modelini, ÖA6 sayı doğrusu modelini kullanırken, diğer öğretmen adayları kesir çubuğu modelini kullanmışlardır. Öğretmen adaylarının bu modelleri incelendiğinde verilen işlemi ve bölmenin paylaştırma anlamını yansıtan birer model çizebildikleri görülmektedir. ÖA3 bu işlem için bir kesir çubuğu modeli çizmiştir (Şekil 4.49).



Şekil 4.49. Görüşme-5’te verilen $3/5 \div 4$ işleminin paylaştırma anlamı için ÖA3’ün çizdiği model

ÖA3 önce verilen işlemin paylaştırma anlamını yansıtan bir problem kurup daha sonra bu problem üzerinden hareket ederek modeli çizmiştir. Modelin ilk basamağında bir kesir çubuğu çizmiştir ve bunu “bir pasta” olarak ifade etmiştir, bu kesir çubuğunu 5 eş parçaya bölüp üç parçasını tarayarak elinde bu kadar olduğunu ve 4 kardeşin paylaşacağını belirtmiştir. Modelin ikinci basamağında önce kesir çubuğunun taralı olan parçaları kadarını çizip bunu 4 eş parçaya bölmüştür ve her bir parçasını 3 eş parçaya bölmüştür, sonra işlemin sonucunu ifade etmek için 8 küçük parça daha çizerek kesir çubuğunun kalan parçalarını da göstermiştir ve toplamda 20 küçük parça olduğunu belirtmiştir. Daha sonra bir küçük parçayı önce “ $3/5$ ’in $1/12$ ’si”, sonra $1/20$ olarak ifade etmiştir ve bu $1/20$ ’nin birim olduğunu belirtmiştir. Buradan işlemin sonucunu şu şekilde ifade etmiştir: “Bir kardeş de şu kadar yediği için (ikinci kesir çubuğunda taralı kısmı dörde böldüğünde oluşan parçalardan birini yani 3 küçük parçayı gösteriyor), 3 tane, bu $1/20$ ’likten 3 tane yediği için o zaman $3/20$.” Burada ÖA3 ilk kesir çubuğundaki 3 parçaya ikinci kesir

çubuğunda 4 parçayı karşılık getirmiştir ve sonra bu 4 parçanın her birini 3 eş parçaya bölerek paylaşırma anlamında ortak pay almayı kullanarak parçalama yaptığı söylenebilir. Burada ÖA3 diğer öğretmen adayları gibi işlemi doğrudan aynı kesir çubuğu üzerinde göstermektense iki kesir çubuğu üzerinde göstermiştir yani bir bütünün $3/5$ 'ini 4 eş parçaya bölmeden ziyade “4 grubu $3/5$ ise bir grubu kaç” şeklinde ele almıştır. Daha sonra ters çevir çarp algoritmasından gelen $1/4$ 'ü “*grup sayısını ifade etti, evet zaten 4 kardeşe ayırdığım için $1/4$ grubum oldu*” şeklinde ifade ederek modelde $1/4 \times 3/5$ işleminin görüldüğünü belirtmiştir. Benzer şekilde diğer öğretmen adayları da bunu doğru bir şekilde açıklamıştır. Buna göre öğretmen adaylarının bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaşırma anlamına ilişkin anlamalarının ön-testten beşinci görüşmeye geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

Öğretmen adayları bu görüşmede (G5) paylaşırma anlamından sonra $3/5 \div 4$ işleminin gruptama anlamını yansıtan model çizmişlerdir. ÖA2 hariç diğer öğretmen adayları kesir çubuğu modelini kullanmışlardır. Öğretmen adaylarının modelleri incelendiğinde verilen işlemi ve bölmenin gruptama anlamını yansıtan birer model çizdikleri görülmektedir. Öğretmen adayları öncelikle bu işlemi $3/5 = X \cdot 4$ şeklinde yazmışlardır ve bu işlemin gruptama anlamını yansıtan problem kurduktan sonra bu problem üzerinden hareket ederek model çizmişlerdir. Öğretmen adaylarından ÖA4'ün modeli incelendiğinde bu işlemin gruptama anlamını yansıtan bir kesir çubuğu modeli çizdiği görülmektedir (Şekil 4.50).



Şekil 4.50. Görüşme-5'te verilen $3/5 \div 4$ işleminin gruptama anlamı için ÖA4'ün çizdiği model

ÖA4 diğer öğretmen adayları gibi öncelikle verilen işlemi $X \cdot 4 = 3/5$ şeklinde yazmıştır ve “*4'ün X kadarı $3/5$ yani 4'ün ne kadarı $3/5$.*” olarak ifade etmiştir. ÖA4 burada diğer öğretmen adaylarından farklı olarak problem kurmadan model çizmiştir. Modelinde önce alt alta 4 ayrı kesir çubuğu çizmiştir, her birini 5 eş parçaya bölmüştür ve ilk kesir çubuğunun 3 parçasını taramıştır. Burada ÖA4 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak 4'ü ayrı ayrı çizerek göstermiştir, diğer öğretmen adayları ise birleşik olarak yan yana çizmiştir. Sonra parça-bütün ilişkisi kurarak taralı parçaların sayısını toplam parça sayısına oranlamıştır ve işlemin sonucunun $3/20$ olduğunu ifade etmiştir. Daha sonra ters çevir çarp algoritmasından gelen $1/4$ 'ü “*Dört parçaya ayrıldı, $1/4$ 'lük kaç parça var?*” şeklinde ifade

ederek modelde $3/5 \times 1/4$ işleminin görüldüğünü belirtmiştir. Benzer şekilde diğer öğretmen adayları da bunu doğru bir şekilde açıklamıştır. Buna göre öğretmen adaylarının bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin grupta anlamına ilişkin anlamalarının ön-testten beşinci görüşmeye geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

4.1.3.3. Son Durum

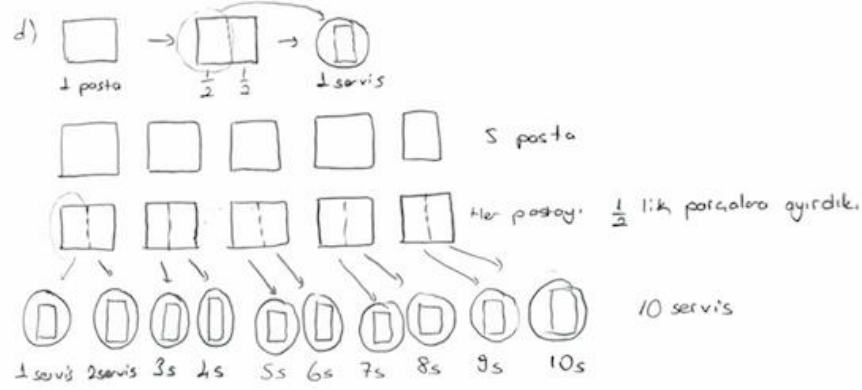
Öğretmen adayları öğretim süresince bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin anlamalarında gelişme göstermişlerdir. Bu gelişim ön-test ve son-testteki modelleri karşılaştırıldığında da görülmektedir (Tablo 4.12). Öğretimden önce öğretmen adayları verilen işlemler için çizdikleri modellerde işlemin sonucunu gösteren basamağı çizmiyorlarken veya işlemin sonucunu modelde tam olarak gösteremiyorlarken son-testte eksiksiz bir şekilde model çizdikleri görülmektedir. Bununla beraber ön-testte öğretmen adayları verilen işlemler için gerçek nesne modeli ve verilen problem için alan modeli kullanırken son-testte verilen 3 görev için daha çok alan modelini kullanmışlardır. Öğretmen adaylarının hiçbirisi gerçek nesne modeli kullanmamıştır (Tablo 4.11). Öğretmen adaylarından sadece ÖA2 son-testte verilen $1/2 \div 2$ işlemi için model çizerken işlemin sonucunu gösteren basamakta taralı olmayan parçaları parçalamadığı için işlemin sonucunu tam olarak gösterememiştir. Diğer taraftan ÖA6 son-testte verilen $1/2 \div 2$ işlemi için bir model daha çizerek bölmenin her iki anlamı için de model çizmiştir (Tablo 4.11). ÖA3 ve ÖA5 son-testte verilen problemin ifade ettiği işlem için model çizerken ortak pay almayı modellerinde doğru bir şekilde göstermişlerdir.

Tablo 4.11.

Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar

Öğretmen Adayı	$5 \div 1/2$	$1/2 \div 2$	$2/5 \div 3$ (Problem)
ÖA6	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı • Bütün basamaklar var	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı (“2’nin ne kadarı 1/2’dir”) • Bütün basamaklar var • Ekstra model çizme (Paylaştırma anlamı)	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var
ÖA2	• Sayı doğrusu modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı • Bütün basamaklar var	• Dairesel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • İşlemin sonucu tam olarak görünmüyor (İşlemin sonucunu gösteren basamakta diğer parçaları parçalamama)	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var
ÖA4	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı • Bütün basamaklar var	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var
ÖA3	• Dairesel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı • Bütün basamaklar var	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı (“2’nin ne kadarı 1/2’dir”) • Bütün basamaklar var	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var • Ortak pay alma
ÖA5	• Küme modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı • Bütün basamaklar var	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var • Ortak pay alma
ÖA1	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı • Bütün basamaklar var	• Dairesel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var

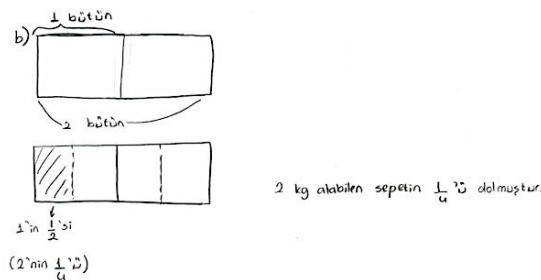
Öğretimden sonra uygulanan KÇB son-testinde ikinci görevde verilen “5’in içinde kaç tane 1/2 vardır?” ifadesine karşılık gelen işlemi öğretmen adaylarının hepsi doğru bir şekilde $5 \div 1/2$ olarak ifade etmişlerdir ve bu işleme uygun problem kurduktan sonra bu problem üzerinden birer model çizmişlerdir. Öğretmen adaylarının bu modelleri incelendiğinde işlemi ve bölmenin gruplama anlamını yansıtan modeller çizdikleri görülmektedir. ÖA2, ÖA6 ve ÖA1 uzunluk modeli, ÖA4 ve ÖA3 alan modeli ve ÖA5 küme modeli kullanmıştır. ÖA6 bu işlem için kesir çubuğu modeli çizmiştir (Şekil 4.51).



Şekil 4.51. KÇB son-testinde 2. görevde ÖA6'nın çizdiği model

Ön-testte ÖA6 verilen ifadeye karşılık gelen işlem için gerçek nesne modeli çizmiştir ve bu model bölme işleminden ziyade $10 \times 1/2$ işlemini yansıtan bir modeldir. Son-testte ise bölmenin gruplama anlamını yansıtan eksiksiz bir model çizmiştir (Şekil 4.51). Diğer öğretmen adayları da modellerini benzer şekilde çizmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin anlamalarının ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir.

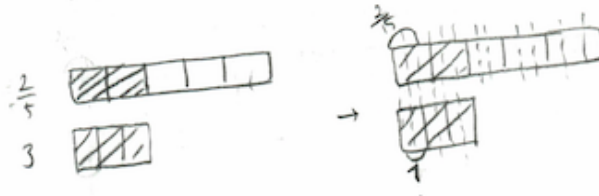
Öğretmen adaylarının benzer şekilde bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaşırma anlamına ilişkin anlamalarının da ön-testten son-teste geliştiği görülmüştür. KÇB son-testinde altıncı görevde verilen $1/2 \div 2$ işlemi için ve yirminci görevde verilen problemin ifade ettiği $2/5 \div 3$ işlemi için bölmenin paylaşırma anlamını yansıtan birer model çizmişlerdir. ÖA2, ÖA4, ÖA5 ve ÖA1 altıncı görevde ön-testtekine benzer şekilde birer model çizmişlerdir. Ancak ön-testtekinden farklı olarak gerçek nesne modeli yerine alan ve kesir çubuğu modeli tercih etmişlerdir ve parçaları eş olacak şekilde bütün üzerinden göstermişlerdir. Bu modeller incelendiğinde verilen işlemi ve bölmenin paylaşırma anlamını yansıtan birer model oldukları görülmektedir. ÖA6 ve ÖA3 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak verilen işlemin gruplama anlamını yansıtan birer kesir çubuğu modeli çizmişlerdir. ÖA3'ün modeli incelendiğinde bölme işlemini çarpmanın tersi olarak ifade ettiği yani $X \cdot 2 = 1/2$ işlemini yansıtan bir model çizdiği görülmektedir (Şekil 4.52).



Şekil 4.52. KÇB son-testinde 6. görevde ÖA3'ün çizdiği model

ÖA3 öncelikle verilen bu işlemi “2’nin ne kadarı $1/2$?” olarak ifade etmiştir ve işlemin grupta anlamını yansıtan bir problem kurmuştur. Sonra bu problem üzerinden yine aynı anlamı yansıtan bir kesir çubuğu modeli çizmiştir. Modelin ilk basamağında kesir çubuğunun bir parçasını “1 bütün”, tamamını “2 bütün” olarak ifade etmiştir. İkinci basamağında aynı kesir çubuğunun her bir parçasını 2 eş parçaya bölerek bir küçük parçayı “1’in $1/2$ ’si” olarak ifade etmiştir ve 2’nin $1/4$ ’ü olduğunu belirtmiştir. Ön-testte gerçek nesne modelini ve işlemin paylaşırma anlamını kullanırken son-testte grupta anlamını ve kesir çubuğu modelini kullanmıştır.

KÇB son-testinde yirminci görevde ÖA6, ÖA2, ÖA4, ÖA3 ve ÖA1 ön-testtekine benzer şekilde birer model çizmişlerdir. Ancak ön-testtekinden farklı olarak basamakları eksiksiz bir şekilde çizmişlerdir ve parçalamayı daha açık bir şekilde göstermişlerdir. ÖA5 hariç diğer öğretmen adayları dikdörtgensel alan modelini kullanmışlardır. Bu modeller incelendiğinde verilen işlemi ve bölmenin paylaşırma anlamını yansıtan birer model oldukları görülmektedir. ÖA5 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak verilen işlemin paylaşırma anlamını yansıtan bir kesir çubuğu modeli çizmiştir (Şekil 4.53). Bu model incelendiğinde ÖA5’in diğerlerinden farklı olarak bölme işlemini çarpmanın tersi olarak ifade etmeyi bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaşırma anlamına taşıdığı görülmektedir.



Şekil 4.53. KÇB son-testinde 20. görevde ÖA5’in çizdiği model

ÖA5 modelin ilk basamağında iki tane kesir çubuğu çizmiştir, ilk kesir çubuğunu 5 eş parçaya bölüp 2 parçasını tarayarak $2/5$ ’i göstermiştir ve ikinci kesir çubuğunu 3 eş parçaya bölüp bütün parçalarını taramıştır. Modelin ikinci basamağında aynı kesir çubuklarını tekrar çizmiştir ve ilk kesir çubuğunun her bir parçasını 3, ikinci kesir çubuğunun her bir parçasını 2 eş parçaya bölmüştür. Burada ÖA5 paylaşırma anlamında ortak pay almayı kullanmıştır ve ikinci kesir çubuğunun bir parçasını 1 olarak ifade edip buna karşılık gelen birinci kesir çubuğunun bir parçasının $2/15$ olduğunu belirtmiştir. Buna göre işlemin sonucunun $2/15$ olduğunu bu şekilde gösterdiği söylenebilir. Bunu son-teste ilişkin yapılan görüşmedeki (G8) şu açıklaması desteklemektedir: “ $2/5$ kalan pasta (modelde ilk kesir çubuğunu gösteriyor), bunu 3 kişi (modelde ikinci kesir çubuğunu

gösteriyor). Her bir kişiye pastanın ne kadarı düşer? Burada üçe bölersek, yine burada ifade edemeyeceğimiz için buradaki birleri de bir bütünleri de ikiye böldüm, yukarıdaki her 1/5 de üçe bölünmüş oldu (modelin ikinci basamağını gösteriyor). Oradan bir bütüne pastanın, yani bir kişiye pastanın 2/15'inin denk geldiğini gördük.” ÖA5'in bu modeli incelendiğinde modeli $2/5 = 3 \cdot X$ işlemi üzerinden hareket ederek çizdiği söylenebilir çünkü bir bütünün 2/5'ini çizip bunu 3 eş parçaya bölme şeklinde değil 3'ü de ayrı bir şekilde göstererek çizmiştir. Ön-testte de paylaşırma anlamını yansıtan bir model çizmiştir ancak orada doğrudan parçalama şeklinde gösterirken burada 2/5 ve 3'ü ayrı ayrı göstermiştir. Buna göre ÖA5'in bu öğretimin sonunda paylaşırma anlamında bütünleri farklı alma ve ortak pay alarak parçalama, bölmeyi çarpmanın tersi olarak ifade etme ve çarpmanın tanımını kullanarak 2/5'i her bir gruptaki nesne sayısı ve 3'ü grup sayısı olarak ifade etmeye ilişkin bir anlama kazandığı söylenebilir.

Sonuç olarak öğretmen adaylarının ön-testten son-teste öğretim süreci boyunca bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin anlamalarının geliştiği söylenebilir. Başlangıçta bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaşırma ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin gruptama anlamı için model bilgisine sahip değillerken son durumda doğru modeller çizebildikleri görülmüştür. Buna göre özellikle bu durumlara ilişkin kavramsal anlamalarının ve model bilgilerinin geliştiği söylenebilir. Bu gelişim Tablo 4.12'de verilmiştir. Bu tablo öğretmen adaylarının ön-testte, öğretim sürecinde ve son-testte çizdikleri modelleri açıklayan Tablo 4.9, 4.10 ve 4.11'in birarada verilmiş hali olarak sunulmuştur.

Tablo 4.12.

Öğretmen Adaylarının Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemine İlişkin Model Çizme Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo

Öğretmen Adayı	Ön-test/G1			Öğretim Süreci/G2-G7					Son-test/G8		
	5 ÷ 1/2	1/2 ÷ 2	2/5 ÷ 3 (Problem)	4 ÷ 1/3	12 ÷ 4/5 (Problem)	3 ÷ 1/4	3/5 ÷ 4 (Paylaştırma anlamı)	3/5 ÷ 4 (Gruplama anlamı)	5 ÷ 1/2	1/2 ÷ 2	2/5 ÷ 3 (Problem)
ÖA6	- Gerçek nesne modeli (Elma) 10 x 1/2'yi yansıtan model	- Gerçek nesne ve dairesel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var - Bütün basamaklar var İşlemin sonucu tam olarak görünmüyor (Parçayı bütün üzerinden gösterme)	- Dikdörtgen sel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var	- Küme ve dairesel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var - Ters çevir çarp'tan gelen 4 ile modelde 4 x 3 işleminin görüldüğünü ifade etme	- Kesir çubuğu ve küme modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var	- Sayı doğrusu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı - Bütün basamaklar var - Ters çevir çarp'tan gelen 1/4 ile modelde 3/5 x 1/4 işleminin görüldüğünü ifade etme	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı - Bütün basamaklar var	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı ("2'nin ne kadarı 1/2'dir") - Bütün basamaklar var - Ekstra model çizme (Paylaştırma anlamı)	- Dikdörtgen sel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var
ÖA2	- Gerçek nesne modeli (Kablo) İşlem görünmü	- Gerçek nesne modeli (Kablo) - Paylaştırma	- Dairesel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma	- Küme modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model	- Sayı doğrusu modeli - İşlemi yansıtan model	- Dairesel alan modeli - İşlemi yansıtan model	- Dikdörtgen sel alan modeli - İşlemi yansıtan model	- Sayı doğrusu modeli - İşlemi yansıtan model	- Dairesel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma	- Dikdörtgen sel alan modeli - İşlemi yansıtan model

	• yor • Graplama anlamı • İşlemdeki 1/2 tam olarak görünmü yor (Parçayı bütün üzerinden gösterme)	• İşlemdeki 1/2 ve 1/4 tam olarak görünmü yor (Parçayı bütün üzerinden gösterme)	• İşlemin sonucu tam olarak görünmü yor (İşlemin sonucunu gösteren basamakta diğer parçaları parçalamama)	• a anlamı • Bütün basamakları var • Ters çevir çarp'tan gelen 3 ile modelde 3×4 işleminin görüldüğünü ifade etme	• Paylaştırma anlamı • ("4/5'i bu kadar olursa tamamı ne kadar olur?") • Ortak pay alma • Bütün basamakları var	• Paylaştırma anlamı • Bütün basamakları var • Ters çevir çarp'tan gelen 4 ile modelde 4×3 işleminin görüldüğünü ifade etme	• Paylaştırmaya anlamı • Bütün basamakları var • Ters çevir çarp'tan gelen 1/4 ile modelde $1/4 \times 3/5$ işleminin görüldüğünü ifade etme	• Graplama anlamı • ("Bir bütünün 3/5'ini 4 kişiye paylaştırma") • Bütün basamakları var	• Graplama anlamı • Bütün basamakları var	• İşlemin sonucu tam olarak görünmü yor (İşlemin sonucunu gösteren basamakta diğer parçaları parçalamama)	• Paylaştırma anlamı • Bütün basamakları var
ÖA4	• Gerçek nesne modeli (Tabildot) • İşlemi yansıtan model • Graplama anlamı • İşlemdeki 1/2 tam olarak görünmü yor (Parçayı bütün üzerinden gösterme)	• Gerçek nesne modeli (Ekmek) • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • İşlemdeki 1/2 ve 1/4 tam olarak görünmü yor (Parçayı bütün üzerinden gösterme)	• Dikdörtgen sel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • İşlemin sonucu tam olarak görünmü yor (Parçayı bütün üzerinden göstermeme)	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırmaya anlamı	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • İşlemin sonucu tam olarak görünmü yor (İşlemin sonucunu gösteren basamakta diğer parçaları parçalamama)	• Sayı doğrusu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamakları var • Ters çevir çarp'tan gelen 4 ile modelde 4×3 işleminin görüldüğünü ifade etme	• Dikdörtgen sel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırmaya anlamı • Bütün basamakları var • Ters çevir çarp'tan gelen 1/4 ile modelde $1/4 \times 3/5$ işleminin görüldüğünü ifade etme	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Graplama anlamı ("4'ün ne kadarı 3/5'tir?") • Bütün basamakları var • Ters çevir çarp'tan gelen 1/4 ile modelde $3/5 \times 1/4$ işleminin görüldüğünü ifade etme	• Dikdörtgen sel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Graplama anlamı • Bütün basamakları var	• Dikdörtgen sel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamakları var	• Dikdörtgen sel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamakları var

ÖA3	- Gerçek nesne modeli (Elma) - İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı Parçayı bütün üzerinde n gösterme me (1/2 tam olarak görünmü yor.)	- Gerçek nesne modeli (Ekmek) - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var İşlemden i 1/2 tam olarak görünmü yor (Parçayı bütün üzerinden gösterme me)	- Dikdörtgen sel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı İşlemin sonucu görünmü yor (Modelde 1 bütünün 2/5'ini parçalamad an 1 bütün olarak gösterme)	- Küme modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırm a anlamı - Bütün basamaklar r var	- Dikdörtge nsel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırm a anlamı - Paylaştırm a ("4/5'i bu kadar olursa tamamı ne kadar olur?") İşlemin sonucu görünmü yor	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırm a anlamı - Ters çevir çarp'tan gelen 4 ile modelde 4 x 3 işleminin görüldüğünü ifade etme	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırm a anlamı - Bütün basamaklar r var - Ortak pay alma - Ters çevir çarp'tan gelen 1/4 ile modelde 1/4 x 3/5 işleminin görüldüğünü ifade etme	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı ("4'ün ne kadarı 3/5'tir?") - Bütün basamaklar var - Ters çevir çarp'tan gelen 1/4 ile modelde 3/5 x 1/4 işleminin görüldüğünü ifade etme	- Dairesel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı - Bütün basamaklar var	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı ("2'nin ne kadarı 1/2'dir") - Bütün basamaklar var	- Dikdörtgen sel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırm a anlamı - Bütün basamaklar var - Ortak pay alma
ÖA5	- Gerçek nesne modeli (Elma) - İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı Parçayı bütün üzerinde n gösterme me (1/2 tam olarak görünmü yor.)	- Gerçek nesne modeli (Silgi) - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var İşlemden i 1/2 ve 1/4 tam olarak görünmü yor	- Dikdörtgen sel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırm a anlamı - Bütün basamaklar var	Paylaştırm a anlamı için model çizememe me	Paylaştırm a anlamı için model çizememe me	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırm a anlamı İşlemin sonucu görünmü yor - Ters çevir çarp'tan gelen 4 ile modelde 4 x 3 işleminin görüldüğünü ifade etme	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırm a anlamı - Bütün basamaklar r var - Ters çevir çarp'tan gelen 1/4 ile modelde 1/4 x 3/5 işleminin	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı - Bütün basamaklar var	- Küme modeli - İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı - Bütün basamaklar var	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırm a anlamı - Bütün basamaklar var	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırm a anlamı - Bütün basamaklar var - Ortak pay alma

ÖA1	yor.)	yor (Parçayı bütün üzerinden gösterme me)											görüldüğü nü ifade etme
	- Gerçek nesne modeli (Ekme) - Gruplama anlamı Sadece 5'i gösteren basamak var	- Gerçek nesne modeli (Paket süt) - İşlemi yansıtan model - Paylaştıma anlamı - Bütün basamaklar var	- Dikdörtgen sel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştıma anlamı - Bütün basamaklar var	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştıma anlamı - Bütün basamaklar var	- Sayı doğrusu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var - Ters çevir çarp'tan gelen 4 ile modelde 4 x 3 işleminin görüldüğünü ifade etme	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştıma anlamı - Bütün basamaklar var - Ters çevir çarp'tan gelen 1/4 ile modelde 1/4 x 3/5 işleminin görüldüğünü ifade etme	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı - Bütün basamaklar var	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı - Bütün basamaklar var	- Dairesel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var	- Dikdörtgen sel alan modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var		

4.1.4. İki Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Model Çizme Bilgisi

4.1.4.1. Başlangıç Durumu

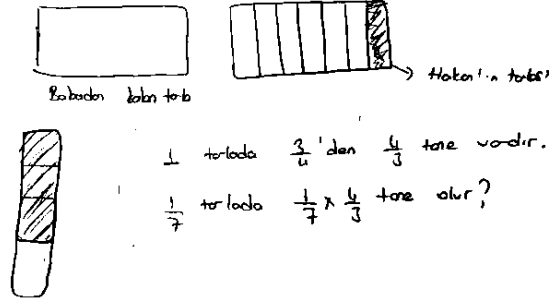
Öğretmen adaylarının öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemine ilişkin bölmenin paylaştırma ve gruplama anlamını yansıtan eksik de olsa bazı modeller çizdikleri görülmüştür ancak iki kesrin bölme işlemi için model çizerken zorlandıkları ve çizemedikleri tespit edilmiştir (Tablo 4.13). Öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde on altıncı görevde verilen $1/7 \div 3/4$ işlemi için ÖA6, ÖA2, ÖA4 ve ÖA1 model çizerken, ÖA3 ve ÖA5 model çizememiştir. Her ne kadar öğretmen adayları burada model çizmişlerse de çizdikleri modeller verilen işlemi yansıtmamaktadır. ÖA6 ve ÖA2 alan modeli, ÖA4 ve ÖA1 kesir çubuğu modeli çizmişlerdir. ÖA6 modelinde işlemi göstermekten sadece işlemdeki $1/7$ ve $3/4$ 'ü göstermiştir. ÖA2 bölme işlemi yerine ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen çarpma işlemi yansıtan model çizmiştir. ÖA4 ve ÖA1 de bölme işlemi yerine çarpma işlemi yani $3/4 \times 1/7$ işlemi yansıtan birer model çizmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının öğretimden önce iki kesrin bölme işlemine ilişkin model bilgilerinin zayıf olduğu hatta olmadığı söylenebilir.

Tablo 4.13.

Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde İki Kesrin Bölme İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar

Öğretmen Adayı	$1/7 \div 3/4$
ÖA6	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtmayan model • Sadece $1/7$ ve $3/4$'ü ayrı ayrı gösterme • Referans alınan bütünü yanlış alma
ÖA2	• Dikdörtgensel alan modeli • Bölme yerine $4/3 \times 1/7$ işlemi yansıtan model
ÖA4	• Kesir çubuğu modeli • Bölme yerine çarpma işlemi $(3/4 \times 1/7)$ yansıtan model
ÖA3	• Model yok
ÖA5	• Model yok
ÖA1	• Kesir çubuğu modeli • Bölme yerine çarpma işlemi $(3/4 \times 1/7)$ yansıtan model

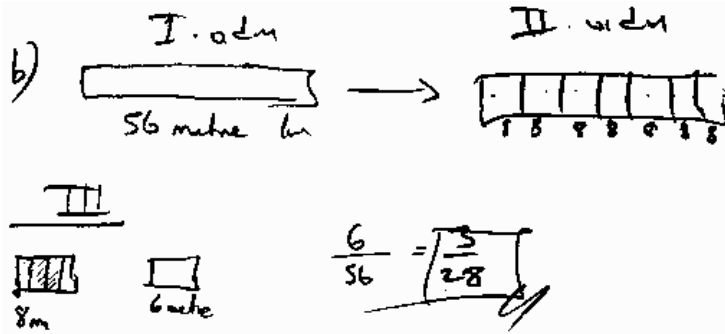
Öğretmen adaylarının modelleri incelendiğinde ÖA6 hariç diğerlerinin modellerinin bölme işlemi yansıtmadığı görülmektedir. ÖA6'nın modeli ise bölme işlemi yansıtsa da verilen işlem yerine $1/7 \div (3/4 \times 1/7)$ işlemi yansıtmaktadır (Şekil 4.54).



Şekil 4.54. KÇB ön-testinde 16. görevde ÖA6'nın çizdiği model

ÖA6 bu modelinde işlemdeki $1/7$ 'yi ve $3/4$ 'ü ayrı ayrı gösterdiği ve işlemin sonucunu orantı yoluyla ifade ettiği görülmektedir. ÖA6 burada orantıyı kurarken her ne kadar “1 tarlada $3/4$ 'ten $4/3$ tane vardır” ifadesiyle bölmenin gruptama anlamına işaret etse de ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) yaptığı şu açıklama öğretimden önce iki kesrin bölme işlemine ilişkin anlamasının işlemsel düzeyde olduğunu göstermektedir: “Aslında burada $3/4$ ile $4/3$ 'ü çarptığımız zaman 1'e eşit oluyor ya 12 bölü 12'den bir bütünü vermiş oluyor.” Burada ÖA6'nın modelde yaptığı açıklamalara göre $1/7$ 'nin içinde $1/7$ 'nin $3/4$ 'ünden kaç tane olduğunu ifade ettiği söylenebilir. Bu durumda her ne kadar bölmenin gruptama anlamına işaret etse de $3/4$ için referans alınan bütünü 1 bütün yerine 1 bütünün $1/7$ 'si almıştır. Buna göre ÖA6'nın öğretimden önce iki kesrin bölme işlemine ilişkin kavramsal anlamaya sahip olmadığı söylenebilir.

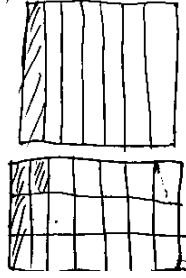
ÖA4 ve ÖA1 ön-testte verilen $1/7 \div 3/4$ işlemi için birer kesir çubuğu modeli çizmişlerdir ancak her ikisinin de modeli bu işlem yerine $3/4 \times 1/7$ işlemini yansıtmaktadır. ÖA4, ÖA1'den farklı olarak işlemde yer almayan bir sayı ilave ederek bütünü çokluk olarak ele almıştır ve bunun üzerinden hareket ederek modeli çizmiştir (Şekil 4.55).



Şekil 4.55. KÇB ön-testinde 16. görevde ÖA4'ün çizdiği model

ÖA4'ün bu modeli incelendiğinde bir bütün yerine 56 bütün üzerinden hareket ettiği ve $3/4 \times 1/7 \times 56$ işlemini yansıtan bir model çizdiği görülmektedir. Buna göre ÖA4 ve ÖA1'in öğretimden önce iki kesrin bölme işlemine ilişkin kavramsal anlamaya sahip olmadığı söylenebilir.

ÖA2 bu işlem için dikdörtgensel alan modelini kullanmıştır ancak ters çevir çarp algoritmasından yararlanarak $4/3 \times 1/7$ işlemini yansıtan bir model çizmiştir (Şekil 4.56).



Şekil 4.56. KÇB ön-testinde 16. görevde ÖA2'nin çizdiği model

ÖA2 bu modelinde önce bir dikdörtgen çizmiştir ve bunu dikey olarak 7 eş parçaya bölüp bir parçasını tarayarak bir bütünün $1/7$ 'sini göstermiştir. Sonra aynı dikdörtgeni tekrar çizmiştir ve bunu yatay olarak 3 eş parçaya bölüp 4 küçük parçayı tarayarak bir bütünün $1/7$ 'sinin $4/3$ 'ünü göstermiştir. Modeli incelendiğinde verilen bölme işlemi yerine $4/3 \times 1/7$ işlemini göstermiştir. Burada ÖA2'nin ters çevir çarp algoritmasını kullandığını ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) yaptığı şu açıklama desteklemektedir: “*Modellememde $3/4$ kaç tanedir $1/7$ 'nin içerisinde o tarz bir şeyi ifade ettim yani. Aslında ters çevir çarpı direk yapmışım.*” Buna göre ÖA2'nin de diğer öğretmen adayları gibi öğretimden önce iki kesrin bölme işlemine ilişkin kavramsal anlamaya sahip olmadığı söylenebilir.

4.1.4.2. Öğretim Süreci

Öğretmen adayları öğretim sürecine iki kesrin bölme işlemine ilişkin model bilgileri oldukça zayıf bir şekilde başlamışlardır. Öğretim sürecinde beşinci ve altıncı derste iki kesrin bölme işlemine ilişkin öğretim gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarının beşinci derste iki kesrin bölme işlemine ilişkin model bilgilerinde az da olsa gelişim gösterdikleri ancak model çizerken zorluk yaşadıkları görülmektedir (Tablo 4.14). ÖA3 ve ÖA5 ön-testte iki kesrin bölme işlemine ilişkin model çizemezken öğretim sürecinde önce zorluk yaşasalar da öğretim sürecinin sonunda herhangi bir zorluk yaşamadan eksiksiz bir şekilde model çizmişlerdir. Hatta ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen çarpma işlemini de doğru bir şekilde ifade etmişlerdir. Buna göre ÖA3 ve ÖA5'in iki kesrin bölme işlemine ilişkin model bilgisinin ön-testten yedinci görüşmeye geliştiği ve kavramsal düzeye ulaştığı söylenebilir. Öğretmen adaylarının beşinci derste (D5) ve beşinci derse paralel yapılan altıncı görüşmede (G6) çizdikleri modeller incelendiğinde işlemin sonucunu modelde gösteremedikleri veya modelde ortak pay alamadıkları görülmektedir (Tablo 4.14). Altıncı görüşmede (G6) ÖA4 model çizememiştir. ÖA2 ise diğer öğretmen

adaylarına göre daha az zorluk yaşamıştır. Buna göre ÖA2'nin iki kesrin bölme işlemine ilişkin model bilgisinin ön-testten altıncı görüşmeye geliştiği söylenebilir. Altıncı derse paralel yapılan yedinci görüşmede (G7) öğretmen adaylarının hepsinin verilen işlemler için model çizerken herhangi bir zorluk yaşamadıkları ve verilen işlemleri ve bölmenin paylaştırma ile grupta anlamalarını yansıtan birer model çizdikleri görülmektedir (Tablo 4.14). Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin bölme işlemine ilişkin model bilgilerinin beşinci görüşmeden altıncı görüşmeye geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. ÖA5 ön-testte iki kesrin bölme işlemine ilişkin model çizemezken, altıncı görüşmede (G6) model çizmiştir ancak işlemin sonucunu modelde tam olarak gösterememiştir ve bölmenin iki anlamına ilişkin ikilem yaşamıştır. Bu zorlukların yedinci görüşmede (G7) ortadan kalktığı, bununla beraber ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen çarpma işlemini doğru bir şekilde ifade ettiği görülmüştür. ÖA3 de benzer şekilde ön-testte iki kesrin bölme işlemine ilişkin model çizemezken öğretim sürecinde altıncı görüşmede (G6) model çizmiştir ancak işlemin sonucunu modelde tam olarak gösterememiştir ve ortak pay alamamıştır. Yedinci görüşmede (G7) ÖA3'ün yaşadığı bu zorlukların ortadan kalktığı görülmektedir. Buna göre hem ÖA3 hem de ÖA5'in iki kesrin bölme işlemine ilişkin model bilgilerinin ön-testten yedinci görüşmeye geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. ÖA4 ön-testte verilen işlem yerine çarpma işlemini yansıtan bir model çizmiştir ve öğretim sürecinde beşinci derste (D5) ve altıncı görüşmede (G6) verilen işlem için model çizememiştir ve işlemi yansıtmayan modeller çizmiştir. Yedinci görüşmede (G7) ÖA4 verilen işlemler için modelleri eksiksiz bir şekilde çizmiştir. Buna göre ÖA4'ün iki kesrin bölme işlemine ilişkin model bilgisinin ön-testten yedinci görüşmeye geliştiği söylenebilir. Öğretmen adaylarının öğretim sürecinde kesir çubuğu modelini daha çok tercih ettikleri, bununla beraber alan ve sayı doğrusu modellerini de kullandıkları görülmektedir (Tablo 4.14).

Tablo 4.14.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde İki Kesrin Bölme İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar

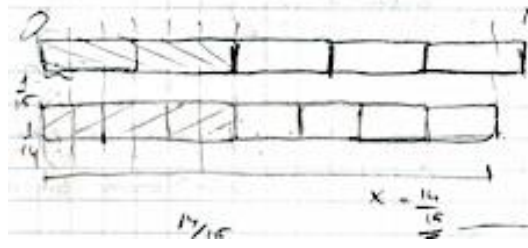
Öğretmen Adayı	D5/A8 2/5 ÷ 3/7 (Paylaştırma anlamı)	D5/G6 3/4 ÷ 5/7 (Gruplama anlamı)	D6/G7 2/5 ÷ 3/4 (Problem) (Paylaştırma anlamı)	D6/G7 4/5 ÷ 3/2 (Paylaştırma anlamı)	D6/G7 4/5 ÷ 3/2 (Gruplama anlamı)
ÖA6	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama	• Küme modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı	• Sayı doğrusu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama

	- model • Paylaştırma anlamı • Ortak pay alamama • İşlemin sonucu görünmüyor	- anlamı • Ortak payda alma • İşlemin sonucu görünmüyor	• Bütün basamaklar var • Ters çevir çarp algoritmasında n gelen $\frac{4}{3}$ ile modelde $\frac{4}{3} \times \frac{2}{5}$ işleminin görüldüğünü ifade etme	- anlamı • Bütün basamakları var • Ters çevir çarp algoritmasında n gelen $\frac{2}{3}$ ile modelde $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ işleminin görüldüğünü ifade etme	- anlamı • Bütün basamakları var • Ters çevir çarp algoritmasında n gelen $\frac{2}{3}$ ile modelde $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ işleminin görüldüğünü ifade etme
ÖA2	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Ortak pay alma • İşlemin sonucu tam olarak görünmüyor (Diğer parçaları parçalamama)	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı • Bütün basamaklar var • Ortak payda alma • Ters çevir çarp algoritmasından gelen $\frac{7}{5}$ ile modelde $\frac{3}{4} \times \frac{7}{5}$ işleminin görüldüğünü ifade etme	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var • Ortak pay alma	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamakları var • Ters çevir çarp algoritmasında n gelen $\frac{2}{3}$ ile modelde $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ işleminin görüldüğünü ifade etme	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı • Bütün basamakları var • Ters çevir çarp algoritmasında n gelen $\frac{2}{3}$ ile modelde $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ işleminin görüldüğünü ifade etme
ÖA4	• Model yok	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtmayan model	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtmayan model	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamakları var • Ters çevir çarp algoritmasında n gelen $\frac{2}{3}$ ile modelde $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ işleminin görüldüğünü ifade etme	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı • Bütün basamakları var • Ters çevir çarp algoritmasında n gelen $\frac{2}{3}$ ile modelde $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ işleminin görüldüğünü ifade etme
ÖA3	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Ortak pay alamama • İşlemin sonucu görünmüyor	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı • İşlemdaki $\frac{5}{7}$ tam olarak görünmüyor	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var • Ortak pay alma	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamakları var • Ters çevir çarp algoritmasında n gelen $\frac{2}{3}$ ile modelde $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ işleminin	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı • Bütün basamakları var • Ters çevir çarp algoritmasında n gelen $\frac{2}{3}$ ile modelde $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ işleminin

				görüldüğünü ifade etme	görüldüğünü ifade etme
ÖA5	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Ortak pay alma • İşlemin sonucu tam olarak görünmüyor (Diğer parçaları parçalamama)	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı • Ortak pay alma • Ters çevir çarp algoritmasında n gelen 7/5 ile modelde 3/4 x 7/5 işleminin görüldüğünü ifade edememe	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Ortak pay alma • Bölmenin paylaştırma ve gruplama anlamı ikilemi (Ortak pay yerine ortak payda alma) • İşlemin sonucu tam olarak görünmüyor (Diğer parçaları parçalamama)	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamakları var • Ters çevir çarp algoritmasında n gelen 2/3 ile modelde 2/3 x 4/5 işleminin görüldüğünü ifade etme	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı • Bütün basamakları var • Ters çevir çarp algoritmasında n gelen 2/3 ile modelde 4/5 x 2/3 işleminin görüldüğünü ifade etme
ÖA1	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Ortak pay alma • İşlemin sonucu tam olarak görünmüyor (Diğer parçaları parçalamama)	• Kesir çubuğu modeli • Gruplama anlamı • İşlemi yansıtmayan model	• Sayı doğrusu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamakları var • Ters çevir çarp algoritmasında n gelen 2/3 ile modelde 2/3 x 4/5 işleminin görüldüğünü ifade etme	• Dikdörtgensel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı • Bütün basamakları var • Ters çevir çarp algoritmasında n gelen 2/3 ile modelde 4/5 x 2/3 işleminin görüldüğünü ifade etme

Öğretmen adayları öğretim sürecine iki kesrin bölme işlemine ilişkin model bilgileri işlemsel düzeyde ve zayıf bir şekilde başlamışlardır ve iki kesrin bölme işleminin verildiği beşinci derste (D5) kavramsal düzeyde bilgiyi kazanmaya başladıkları tespit edilmiştir. Bu derste verilen alıştırmalarda (A8) yer alan $2/5 \div 3/7$ işlemi için öğretmen adayları bölmenin paylaştırma anlamını ele alarak birer model çizmişlerdir. ÖA4 hariç diğer öğretmen adayları kesir çubuğu modelini kullanmışlardır. ÖA4 bu işlem için model çizmemiştir. Buna göre ÖA4'ün iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin kavramsal anlamasının henüz gelişmediği söylenebilir.

ÖA5'in çizdiği model incelendiğinde verilen işlemi ve bölmenin paylaştırma anlamını yansıtan bir model olduğu görülmektedir (Şekil 4.57).



Şekil 4.57. Alıştırmalar-8'de verilen $2/5 \div 3/7$ işleminin paylaştırma anlamı için ÖA5'in çizdiği model

ÖA5 modelinde iki kesir çubuğu çizmiştir, ilkinin 5 eş parçaya bölüp 3 parçasını taramıştır ve ikincisini 7 eş parçaya bölüp 3 parçasını taramıştır. Burada ilk kesir çubuğunun 2 parçasına ikinci kesir çubuğunun 3 parçasının karşılık geldiğini göstermiştir. Sonra ilk kesir çubuğunun taralı her bir parçasını 3, ikinci kesir çubuğunun taralı her bir parçasını 2 eş parçaya bölerek paylaştırma anlamında ortak pay almayı kullanmıştır. Daha sonra ÖA5 ilk kesir çubuğunda oluşan bir küçük parçanın $1/15$ ve ikinci kesir çubuğunun bir küçük parçasının $1/14$ olduğunu belirtip işlemin sonucunu $14/15$ olarak ifade etmiştir. Buna göre ÖA5'in burada ilk kesir çubuğunun bir küçük parçasına ikinci kesir çubuğunun bir küçük parçasının karşılık geldiğine ve bu parçadan 14 tane olduğuna yani ikinci kesir çubuğunu ilk kesir çubuğuna göre açıklamaya ilişkin anlamaya sahip olduğu söylenebilir. ÖA6 ve ÖA3 modellerini ÖA5'inkine benzer şekilde çizmişlerdir ancak ortak pay almayı kullanamadıkları için işlemin sonucunu model üzerinden ifade edememişlerdir. ÖA1 ve ÖA2 ortak pay almayı kullanabilmişlerdir ancak işlemin sonucunu ifade edememişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin kavramsal anlamalarının ön-testten beşinci derse geliştiği ve ÖA5'in anlamasının diğer öğretmen adaylarına göre daha güçlü olduğu söylenebilir.

Beşinci derse (D5) paralel yapılan görüşmede (G6) verilen $3/4 \div 5/7$ işlemi için öğretmen adayları bölmenin gruptama anlamını ele alarak birer model çizmişlerdir. ÖA6 dikdörtgensel alan modelini, diğer öğretmen adayları kesir çubuğu modelini kullanmışlardır. ÖA4 ve ÖA3 bu işlem için model çizmekte oldukça zorlanmışlardır ve ÖA4 bu işlemi göstermekte başarılı olamamıştır. Buna göre ÖA4'ün iki kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin anlamasının henüz gelişmediği söylenebilir. ÖA3 her ne kadar zorlansa da işlemi modelde gösterebilmiştir. ÖA2, ÖA3, ÖA1 ve ÖA5'in modelleri incelendiğinde benzer şekilde ve bölmenin gruptama anlamını yansıtan birer model çizibildikleri görülmektedir. ÖA3 ve ÖA1 modellerini çizmeden önce işlemi

“ $3/4$ ’ün içinde $5/7$ ’leri arıyoruz.” şeklinde sözel olarak ifade ederken, ÖA5 çarpma işlemi yani $3/4 = X \cdot 5/7$ şeklinde yazarak ifade etmiştir. ÖA5’in bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminde olduğu gibi iki kesrin bölme işleminde de bölmeyi çarpmanın tersi olarak ifade etmeyi sürdürdüğü görülmektedir. Bu da bu şekilde ifade etmenin öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işlemine ilişkin model çizmelerine yardımcı olduğunu desteklemektedir. ÖA2 ise verilen işlemin grupta anlamı için problem kurduktan sonra bu problem üzerinden hareket ederek modelini çizmiştir (Şekil 4.58).

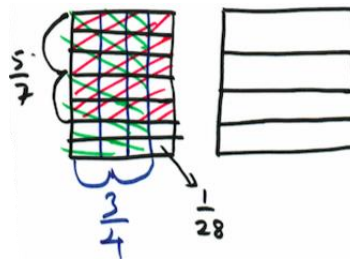


Şekil 4.58. Görüşme-6’da verilen $3/4 \div 5/7$ işleminin grupta anlamı için ÖA2’nin çizdiği model

ÖA2 modelinde önce bir kesir çubuğu çizmiştir, bunu 4 eş parçaya bölüp 3 parçasını taramıştır ve “ $3/4$ litrelik süt” olarak ifade etmiştir. Sonra “bunların bütünleri aynı, bu da 1 litre bu da 1 litre” diyerek bu kesir çubuğunun altına aynısından bir tane daha çizmiştir, bunu 7 eş parçaya bölüp 5 parçasını taramıştır ve “ $5/7$ litrelik kap” olarak ifade etmiştir. Daha sonra paydaların eşitleneceğini belirterek ilk kesir çubuğunun her bir parçasını 7, ikinci kesir çubuğunun her bir parçasını 4 eş parçaya bölmüştür ve iki kesrin birimlerinin eşitlendiğini ifade etmiştir. Burada ÖA2’nin iki kesrin bölme işleminin grupta anlamına ilişkin modelde bütünlerin aynı olduğuna ve birimlerin aynı olması için ortak payda almanın kullanıldığına ilişkin anlamaya sahip olduğu görülmektedir. ÖA5 de ÖA2 gibi iki kesir çubuğu çizip ortak payda almayı kullanmıştır ve işlemin sonucunu model üzerinden ifade edebilmiştir. ÖA3 ve ÖA1 tek bir kesir çubuğu üzerinde hem $3/4$ ’ü hem $5/7$ ’yi göstermeye çalıştıkları için ortak payda almada zorlanmışlardır. Bu zorlanmanın $5/7$ için referans alınan bütünü belirleyememekten kaynaklandığı söylenebilir. Çünkü önce her $1/4$ ’lük kısımda $5/7$ ’yi göstermeye çalışarak referans alınan bütünü 1 bütün yerine bir bütünün $1/4$ ’ünü almışlardır. Bunun üzerine araştırmacı tarafından $2 \div 5/7$ işleminin grupta anlamı için model çizmeleri istenmiştir ve bu modeli çizerken bütünlerin aynı olması gerektiğini farketmişlerdir. Daha sonra $3/4 \div 5/7$ işlemine döndüklerinde her iki öğretmen adayı kesir çubuğunda $3/4$ ’lük kısmı gösterdikten sonra her bir parçayı 7 eş parçaya bölmüşlerdir ve bu küçük parçaları 4’erli gruplayarak $5/7$ ’yi göstermişlerdir. Daha sonra ÖA3 oluşan 20 küçük parçanın $5/7$ ’lik kısım ve 21 küçük parçanın $3/4$ ’lük kısım olduğunu gösterip 21 parçanın içinde 20 parçanın $21/20$ tane olduğunu ifade ederken ÖA1 işlemin sonucunu model üzerinden ifade edememiştir. ÖA2, ÖA3’üne benzer şekilde

işlemin sonucunu şöyle ifade etmiştir: “Şimdi $3/4$ litrelik süt kaç tane şişeye denk gelir? Yani $5/7$ litrelik olduğu için şişelerimiz, ne kadarını alır? Bu buraya denk gelir, şu fazla kalır (ilk kesir çubuğunun 21 küçük parçasının ikinci kesir çubuğunun 20 küçük parçasına ve 1 küçük parçasına denk geldiğine işaret ediyor). Burada ne kadar şişeye ihtiyacımız var? Bir tane şişeye ihtiyacımız var, tam, bir de bir parça sütümüz dışarıda kaldı, şurayı tam denk getirememişim ama (modeli tam eşit çizemediğini kastediyor), bir şişeyi aldık artı o bir şişenin, bu ne kadar ediyor bir şişenin? $1/20$ ’si kadar. Yani bu bütün üzerinden konuşmuyoruz artık, şişe bütün üzerinden konuşuyoruz. Bir şişe yani $20/20$, artı bir şişenin $1/20$ ’i, $1/20$ şişe lazım, o da eşittir $21/20$ ($20/20 + 1/20 = 21/20$ yazıyor).” Burada ÖA2 “şişe bütün üzerinden konuşuyoruz” ifadesiyle yeni bütün kavramına işaret etmiştir. Bununla beraber işlemin sonucu için referans alınan bütünün yeni bütün olduğuna işaret etmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin anlamalarının ön-testten altıncı görüşmeye geliştiği ve ÖA1’in anlamasının diğerlerinininkine göre daha zayıf olduğu söylenebilir.

ÖA6 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak verilen $3/4 \div 5/7$ işlemi için dikdörtgensel alan modeli çizmiştir (Şekil 4.59). ÖA6, ÖA5 gibi öncelikle bu işlemi $3/4 = X \cdot 5/7$ şeklinde yazarak ifade etmiştir. Bu da bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminde hep tercih ettiği bölmeyi çarpmanın tersi olarak ifade etme durumunun iki kesrin bölme işleminde de devam ettiğini göstermektedir. ÖA6 modelinde önce bir dikdörtgen çizip $5/7$ ’yi göstermiştir, sonra bir dikdörtgen daha çizip işlemi nasıl göstereceğini şöyle ifade etmiştir: “Bu $5/7$ ’lerden kaç tane olursa $3/4$ ’ü bulacaktım. Bütünlerim aynı olduğu için aynı şekli $3/4$ ’ü gösterecek şekilde çiziyorum (dikdörtgenin yanına aynı dikdörtgenden çiziyor ve yatay olarak 4 eş parçaya bölüyor). Daha sonra az önceki soruda da yaptığımız gibi birimlerini birbirine eşitliyorum.” Burada ÖA6’nın işlemdeki $3/4$ ve $5/7$ için referans alınan bütünlerin aynı olduğuna ilişkin ve gruptama anlamında ortak paydanın alınacağına ilişkin anlamaya sahip olduğu görülmektedir.



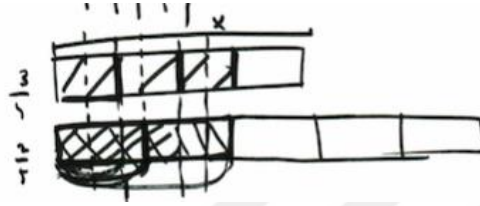
Şekil 4.59. Görüşme-6’da verilen $3/4 \div 5/7$ işleminin gruptama anlamı için ÖA6’nın çizdiği model

Daha sonra ÖA6'ya $\frac{3}{4}$ ve $\frac{5}{7}$ 'yi ayrı ayrı göstermektense bir dikdörtgen üzerinde bu işlemi nasıl göstereceği sorulmuştur. ÖA6 çizdiği ilk dikdörtgeni dikey olarak 4 eş parçaya bölmüştür ve üç parçasını tarayarak $\frac{3}{4}$ 'ü gösterdiğini belirtmiştir. Böylece birimlerin eşit olduğunu ve her bir küçük parçanın $\frac{1}{28}$ olduğunu ifade etmiştir. Sonra $\frac{3}{4}$ 'ü “21 tane $\frac{1}{28}$ ”, $\frac{5}{7}$ 'yi de “20 tane $\frac{1}{28}$ ” olarak ifade edip birbirine oranlayarak işlemin sonucunun $\frac{21}{20}$ olduğunu belirtmiştir. Burada ÖA6'nın ortak payda almayı kullanarak işlemin sonucuna ulaştığı söylenebilir. Daha sonra işlemin sonucunun aynı zamanda $1\frac{1}{20}$

olduğunu ve bir dikdörtgeni “1 bütün” olarak ifade ettiğini buna göre işlemin sonucundaki 1 ile bu 1 için ne söyleyeceği sorulduğunda şu şekilde açıklamıştır: *“O 1 ile bu 1 aynı değil çünkü burada hani 20/20 bir bütünüümüze verecek, yani buradaki yirmimiz $\frac{3}{4}$ 'ün bütünü yani yeni bir bütün oluşturmuş olduk aslında biz burada hani baştaki bütünüümüzden gitmedik.”* Burada $\frac{3}{4}$ için referans alınan bütünün $\frac{5}{7}$ olduğuna ve bu $\frac{5}{7}$ 'nin yeni bütün olduğuna işaret etmiştir. ÖA6 işlemin sonucunu model üzerinde her ne kadar gösteremese de sözel olarak doğru bir şekilde ifade etmiştir. Buna göre ÖA6'nın iki kesrin bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin anlamasının diğer öğretmen adayları gibi ön-testten altıncı görüşmeye geliştiği ve kavramsal düzeye olduğu söylenebilir.

Öğretmen adaylarının iki kesrin bölme işlemi için çizdikleri modeller incelendiğinde daha çok uzunluk modellerini, özellikle de kesir çubuğu modelini kullandıkları görülmüştür. Altıncı görüşmede (G6) verilen problemin ifade ettiği $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$ işleminin paylaştırma anlamı için ÖA2, ÖA3, ÖA5 ve ÖA1 uzunluk modeli çizerken, ÖA6 diğerlerinden farklı olarak küme modeli çizmiştir. ÖA4 ise model çizememiştir. Buna göre ÖA4'ün iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin kavramsal anlamasının halen gelişmediği söylenebilir. ÖA2, ÖA3 ve ÖA5 bu işlem için kesir çubuğu modeli çizmişlerdir. Modelleri incelendiğinde benzer modeller çizdikleri ve verilen işlem ile bölmenin paylaştırma anlamını yansıtan bir model çizdikleri görülmektedir (Şekil 4.60). ÖA2 ve ÖA3 modeli herhangi bir zorluk yaşamadan çizerken, ÖA5'in bölmenin iki anlamına ilişkin ikilem yaşadığı görülmüştür. ÖA2 beşinci derste (D5) verilen alıştırmalarda (A8) yer alan $\frac{2}{5} \div \frac{3}{7}$ işleminin paylaştırma anlamı için model çizerken ortak pay almayı kullandığı halde model üzerinden işlemin sonucunu ifade edemezken burada doğru bir şekilde ifade edebilmiştir. ÖA3 sekizinci alıştırmalarda (A8) verilen $\frac{2}{5} \div \frac{3}{7}$ işleminin paylaştırma anlamı için model çizerken hem ortak pay almayı kullanamazken hem de model üzerinden işlemin sonucuna ulaşamazken, burada ÖA3'ün bunları başarıyla gerçekleştirdiği görülmüştür. Buna göre ÖA2 ve ÖA3'ün iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına

ilişkin kavramsal anlamalarının beşinci dersten sonra geliştiği söylenebilir. ÖA5 daha önce verilen $2/5 \div 3/7$ işlemi için model çizerken ortak pay almayı kullanıp işlemin sonucunu model üzerinden doğru bir şekilde ifade ederken burada ortak pay alma yerine ortak payda almayı kullanarak bölmenin iki anlamına ilişkin ikilem yaşadığı görülmüştür. Bununla beraber işlemin sonucunu ifade etmekte oldukça fazla zorlanmış ancak en son doğru bir şekilde ifade edebilmiştir. Buna göre ÖA5'in iki kesrin bölme işleminin paylaşırma anlamına ilişkin kavramsal anlamasının henüz derin olmadığı söylenebilir.



Şekil 4.60. Görüşme-6'da verilen problemin ifade ettiği $2/5 \div 3/4$ işleminin paylaşırma anlamı için ÖA5'in çizdiği model

ÖA5 modeli çizmeden önce bu işlemi sözel olarak "X'in $3/4$ 'ü $2/5$ " şeklinde ifade etmiştir ve bir kesir çubuğu çizmiştir. ÖA2 de işlemi verilen problemde yararlanarak ve çarpmanın tanımını kullanarak " $3/4$ 'lük grupta $2/5$ mama varsa, bir grupta kaç mama vardır?" şeklinde ifade ederken ÖA3 bölmeyi çarpmanın tersi olarak ifade etmeden yararlanarak $3/4 \cdot X = 2/5$ şeklinde yazmıştır. Bu da öğretmen adaylarının model çizerken verilen problemin yansıttığı aynı anlamı yani bölmenin paylaşırma anlamını ele aldıklarını göstermektedir. ÖA5 modelinde önce bir kesir çubuğu çizmiştir, tamamını X olarak ifade etmiştir, 4 eş parçaya bölüp 3 parçasını taramıştır ve "X'in $3/4$ 'ü" olarak ifade etmiştir. Sonra bu kesir çubuğunun altına 3 parçasına 2 parçası karşılık gelecek şekilde bir kesir çubuğu çizmiştir ve bunu 5 eş parçaya bölüp 2 parçasını taramıştır. Daha sonra ilk kesir çubuğunun taralı olan her bir parçasını 5 ve ikinci kesir çubuğunun taralı olan her bir parçasını 4 eş parçaya bölmüştür. Burada ÖA5 ortak pay alma yerine ortak payda almayı kullanarak bölmenin paylaşırma ve grupta alma anlamına ilişkin ikileme düşmüştür. Bunun üzerine burada kesir çubuğunu neden böyle parçaladığı sorulmuştur ve ÖA5 payda eşitlemek için yaptığını belirtmiştir. Buna göre ÖA5 bütünlerin farklı olduğunu göz ardı etmiştir. ÖA5'e neden payda eşitlediği sorulmuştur ve o an yanlış yaptığının farkına varmıştır. Bunu şu açıklaması göstermektedir: "Payda eşitleyerek burada neyi bulacağım, ikisinde de toplam 20 olacak (iki kesir çubuğunda da 20 küçük parça olmasına işaret ediyor). $3/4$ 'ünde 15 tane olacak, (her iki kesir çubuğunun kalan diğer taralı parçalarını da bölüyor), $3/4$, $2/5$ 'e eşit. $1/4$ 'ü, toplam burada kaç var, 15 (ilk kesir çubuğunun taralı kısmındaki küçük parçaları sayıyor), burada kaç var, 8 (ikinci kesir çubuğunun taralı

kısımındaki küçük parçaları sayıyor). Aslında ne yapmam gerekiyordu benim? Eşitleyecektik buraları, $2/5$, $3/4$ 'e eşit.” Bunun üzerine çizdiği kesir çubuklarının altına aynı kesir çubuklarını tekrar çizmiştir ve ilk kesir çubuğunun taralı her bir parçasını 2, ikinci kesir çubuğunun taralı her bir parçasını 3 eş parçaya bölmüştür. Buradan işlemin sonucunu şöyle ifade etmiştir: “Şimdi böyle yapınca, bu $3/4$, bu da $2/5$ 'ti. $3/4$ 'ün $1/4$ 'ünde (sadece X 'in $1/4$ 'ünü kastediyor), $2/5$ 'in ne kadarı vardır? Onu oradan bulacağız. Şimdi $1/4$ 'te, bakıyoruz, $1/4$ 'te $2/5$ 'in $2/6$ 'sı var. O zaman 4 tanesinde deriz, 4 çarpı $2/6$ deriz. Bakayım cevap doğru mu ($4 \times 2/6$ yazıyor)? (Gülüyor.) Neden böyle oldu?” Burada X 'in $1/4$ 'üne karşılık gelen iki küçük parçayı $2/5$ 'in $2/6$ 'sı olarak ifade etmiştir ancak işlemi yazarken $4 \times 2/6 \times 2/5$ yerine $4 \times 2/6$ yazdığı için yanlış yapmıştır. Bunun üzerine bir küçük parçanın ne ifade ettiği sorulmuştur. ÖA5 bunu ifade etmekte oldukça zorlanmış ancak en sonunda doğru bir şekilde ifade etmiştir. Buna ilişkin geçen diyalog aşağıdaki gibidir (G6, ÖA5, 05/05/2015, 484-506):

G: Burada şu bir küçük parça ne ifade ediyor?

ÖA5: Bu bir parça $2/5$ 'in $1/6$ 'sını ifade ediyor.

G: Yani?

ÖA5: $1/3$ 'ünü. Burası $1/5$, $1/5$ 'in $1/3$ 'ü.

G: Yani ne oluyor o $1/5$ 'in $1/3$ 'ü?

ÖA5: $1/15$. Evet, buraya da $2/15$ denk geliyor.

G: O halde sonuç ne oluyor?

ÖA5: 4 tane $2/5$ 'in $2/3$ 'ü çünkü 6 değil, bunu, $2/5$ 'in içinde 2 tane $1/5$ var, o zaman $1/5$ 'in içinde $2/3$ var bir tane, $2/5$ 'in içine bakıyoruz biz ($4 \times 2/3 \times 2/5$ yazıyor).

G: Neden $2/6$ 'dan $2/3$ 'e değiştirdin?

ÖA5: $2/6$ 'yı direk altıya bölüp ikisini almış gibi düşündüm.

G: Neden $2/3$ oldu?

ÖA5: Çünkü burada $2/5$ var ve $2/5$, yani nasıl diyeyim, $1/5$ üçe bölünmüş, $1/5$ üçe bölünmüş, yani $2/5$ üçe bölünmüş diye ifade ederiz. Onun içinde de $1/5$ 'e karşılık gelen $2/3$ 'tür. $2/5$ 'in $2/3$ 'ü şurası (ilk kesir çubuğunun bir parçasını gösteriyor), ondan da 4 tane var. 4, böyle ($4 \times (2/3 \times 2/5)$ işlemine işarete diyor). Biz X 'i arıyorduk zaten, X de bu olur.

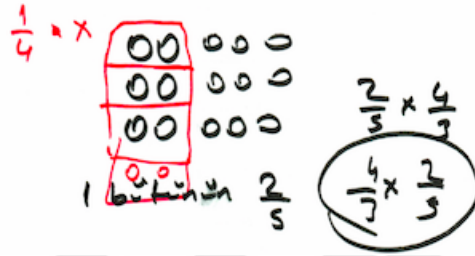
G: Sonuç ne oluyor o halde?

ÖA5: $16/15$ olur. $8/15$ (işlemi zihninden yapıyor), o zaman neyi yine yanlış düşündüm ki ben? $1/5$ 'in $2/3$ 'ünden 4 tane. O zaman ne değişiyor? $1/5$ 'in $2/3$ 'ü dediğimde tamam, ondan 4 tane. Ama $2/5$ 'in $2/3$ 'ü de şurası oluyor o zaman (ilk kesir çubuğunun iki parçasını gösteriyor), ondan da iki tane olur deriz. Şu yine yanlış olmuş ($4 \times 2/3 \times 2/5$ işleminin üzerini çiziyor), $2/5$ 'in yine $2/3$ 'ü dersem, şurası yani (ilk kesir çubuğunun iki parçasını gösteriyor), ondan da iki tane ($2 \times (2/3 \times 2/5)$ yazıyor).

ÖA2 ve ÖA3 de işlemin sonucunu ÖA5 gibi “4 tane $2/15$ ” olarak hiçbir zorluk yaşamadan doğru bir şekilde ifade etmişlerdir. ÖA1 verilen işlem için ÖA2, ÖA3 ve ÖA5'in modeline benzer şekilde bir sayı doğrusu modeli çizmiştir. ÖA1 modelinde ortak pay almayı kullanarak işlemin sonucunu ifade ederken benzer şekilde $2/15$ üzerinden hareket etmiştir. Ancak “4 tane $2/15$ ” şeklinde ifade etmektense “ $X/4$ 'ünde ben şunu 3 parçaya ayırdığım için $2/5$ bölü 3 yani $2/15$ gitmiş oldum şurası (ikinci sayı doğrusunda bir parçayı gösteriyor). O zaman şuraya $2/15$ daha eklediğimde (ikinci sayı doğrusunda bir birim ilerleterek $2/15$ kadar ilerlediğine işaret ediyor), $2/5$ artı $2/15$ daha eklediğimde $12/15$

olmuş oluyor ($2/5 + 2/15$ yazıyor).” şeklinde ifade etmiştir. ÖA1 daha önce verilen $2/5 \div 3/7$ işleminin paylaştırma anlamı için model çizerken ortak pay almayı kullanarak işlemin sonucunu ifade edememiştir. Ancak burada işlemin sonucunu doğru bir şekilde ifade edebilmiştir. Buna göre ÖA1’in iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin kavramsal anlamasının geliştiği görülse de halen algoritmaya dayalı hareket ettiği söylenebilir. Buna kanıt olarak işlemin sonucunu $2/5 + 2/15$ şeklinde ifade etmesi gösterilebilir.

ÖA6 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak bu görüşmede (G6) verilen $2/5 \div 3/4$ işlemi için küme modeli çizmiştir. Bu model incelendiğinde bu işlemi ve bölmenin paylaştırma anlamını yansıtan bir model olduğu görülmektedir (Şekil 4.61).



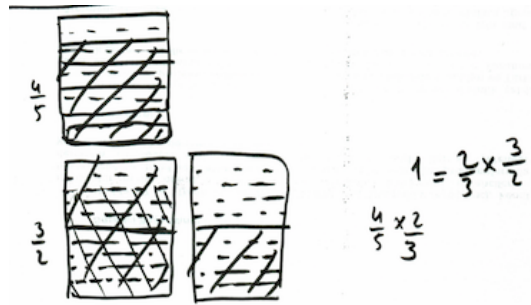
Şekil 4.61. Görüşme-6’da verilen problemin ifade ettiği $2/5 \div 3/4$ işleminin paylaştırma anlamı için ÖA6’nın çizdiği model

ÖA6 modeli çizmeden önce işlemi “*Grubumda X nesnelerim var, bunun 3/4’ü 2/5’i ifade ediyor.*” şeklinde ifade etmiştir. Modelinde önce 3 satır ve 5 sütundan oluşan 15 tane küçük daire çizmiştir ve bunun iki sütununu “1 bütünün 2/5’i” olarak ifade etmiştir. Sonra bunun aynı zamanda X’in 3/4’ünü ifade ettiğini belirterek bunu birer satır olarak bölmüştür ve bir satırının X’in 1/4’ünü ifade ettiğini belirtmiştir. Daha sonra iki sütunun altına bir satır daha çizip bunun bir grubu vereceğini ifade etmiştir. Buradan işlemin sonucunu bu iki sütundaki 8 küçük daireyi başlangıçtaki 5 sütundaki 15 daireye oranlayarak doğru bir şekilde $8/15$ olarak ifade etmiştir. ÖA6 daha önce verilen $2/5 \div 3/7$ işlemi için model çizerken ortak pay almayı kullanamazken ve işlemin sonucunu ifade edemezken burada doğru bir şekilde ifade etmiştir. Buna göre ÖA6’nın iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin anlamasının beşinci dersten sonra geliştiği söylenebilir. Bununla beraber diğer öğretmen adayları tarafından zor olarak görülen küme modelini kullanması ve modelde ters çevir çarp algoritmasından gelen $4/3$ ile $4/3 \times 2/5$ işleminin görüldüğünü doğru bir şekilde ifade etmesi ÖA6’nın iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin kavramsal anlamasının diğer öğretmen adaylarına göre daha güçlü olduğunu göstermektedir.

ÖA6 küme modelini doğru bir şekilde çizerken ÖA2'nin ikinci bir model olarak küme modelini çizmeye çalıştığında başarılı olamadığı görülmüştür. Buna göre model türünün çarpma işleminde olduğu gibi iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamı için de model çizmeyi zorlaştırdığı söylenebilir.

Öğretmen adaylarının iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin kavramsal anlamalarının beşinci dersten sonra geliştiği görülürken gruplama anlamına ilişkin kavramsal anlamalarının altıncı derse paralel yapılan yedinci görüşmede (G7) geliştiği görülmüştür. Bu görüşmede verilen $4/5 \div 3/2$ işleminin gruplama anlamı için ÖA4 ve ÖA3 kesir çubuğu modeli, diğer öğretmen adayları dikdörtgensel alan modeli çizmişlerdir. Bu modeller incelendiğinde verilen işlemi ve bölmenin gruplama anlamını yansıtan birer model oldukları görülmektedir. Öğretmen adaylarının özellikle ÖA4 ve ÖA1'in bu görüşmede iki kesrin bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin anlamalarının altıncı görüşmeye göre ilerlediği görülmüştür. ÖA4 daha önce altıncı görüşmede (G6) verilen $3/4 \div 5/7$ işleminin gruplama anlamı için model çizemezken burada doğru bir şekilde çizmiştir ve ortak payda almayı kullanarak işlemin sonucunu doğru bir şekilde ifade etmiştir. Buna göre ÖA4'ün iki kesrin bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin kavramsal anlamasının altıncı görüşmeden yedinci görüşmeye geliştiği söylenebilir. ÖA1 de daha önce ortak payda almayı kullanırken zorlanarak işlemin sonucunu model üzerinden ifade edememesine rağmen burada doğru bir şekilde ifade etmiştir. Buna göre ÖA1'in de iki kesrin bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin kavramsal anlamasının altıncı görüşmeden yedinci görüşmeye geliştiği söylenebilir.

Öğretmen adaylarından ÖA5, ÖA6, ÖA2 ve ÖA1'in çizdiği modeller incelendiğinde benzer şekilde modeller çizdikleri ve verilen işlem ile bölmenin gruplama anlamını yansıtan birer model çizebildikleri görülmektedir (Şekil 4.62).



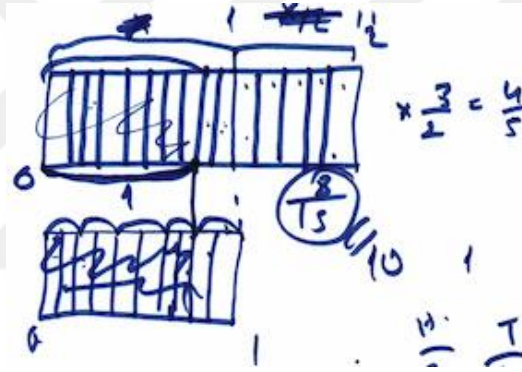
Şekil 4.62. Görüşme-7'de verilen problemin ifade ettiği $4/5 \div 3/2$ işleminin gruplama anlamı için ÖA5'in çizdiği model

ÖA5 öncelikle işlemi $X \cdot 3/2 = 4/5$ şeklinde yazarak gruplama anlamını yansıtan bir problem kurmuştur. ÖA6, ÖA2 ve ÖA1 de işlemi aynı şekilde yazmıştır ve “ $3/2$ 'nin ne

kadarı 4/5'tir?" şeklinde ifade etmişlerdir. ÖA5 modelinde önce bir dikdörtgen çizmiştir, bunu yatay olarak 5 eş parçaya bölüp 4 parçasını taramıştır ve "4/5 litre süt" olarak ifade etmiştir. Sonra "3/2 litre süt, yine 1 litre, hepsi aynı" diyerek bu dikdörtgenin altına aynı dikdörtgenden yan yana ayrı olarak iki dikdörtgen çizmiştir. Her birini yatay olarak 2 eş parçaya bölerek ilkinin tamamını ve ikincinin bir parçasını taramıştır. Daha sonra ilk dikdörtgenin her bir parçasını yatay olarak 2, ikinci ve üçüncü dikdörtgenin her bir parçasını yatay olarak 5 eş parçaya bölmüştür. Burada ortak payda almayı uygun bir şekilde kullanmıştır. ÖA5, ÖA2 ve ÖA6 ortak payda almayı daha önce de kullanırken, ÖA1 kullanmakta zorlanmaktadır, burada ise zorluk yaşadığı görülmemiştir. Buna göre ÖA1'in iki kesrin bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin anlamasının altıncı görüşmeden yedinci görüşmeye geliştiği söylenebilir. Buradan işlemin sonucunu ÖA5 şöyle ifade etmiştir: "3/2 litre alan şişelere koyarsak ne kadarı dolar? 4/5'i bunun içine koyacağız, ne kadarı dolar (ilk dikdörtgeni ikinci dikdörtgenin içine koymaya işaret ediyor)? Tamam, 4/5 burada bir tane ama ne kadarı oluyor, bir saniye, 3/2'nin içine koyduğumda, beşe böleyim ben, her 1/2'yi ve sonuçta göreceğiz (ikinci ve üçüncü dikdörtgenin taralı olan her bir parçasını yatay olarak 5 eş parçaya bölüyor). Böldüğümde 4/5'i, 4/5 burada nereyi ifade ediyor, 8/10'ini diyeceğim. 8/10'i yani şuraya kadar dolu (ikinci dikdörtgenin 8 küçük parçasını tekrar tarıyor). Yani sonuçta da 3/2'nin ne kadarı olmuş oluyor dediğimde 8/20'i mi, 3/2 dediğime göre, 3/2'nin ne kadarı dolar, 8/15'i." ÖA5 burada işlemin sonucu için referans alınan bütünü doğru bir şekilde belirlemiştir ve işlemin sonucunu parça-bütün ilişkisi kurarak doğru bir şekilde ifade etmiştir. ÖA5'e modelde ters çevir çarp algoritmasından gelen $2/3$ 'ün ne ifade ettiği ve $4/5 \times 2/3$ mü yoksa $2/3 \times 4/5$ işleminin mi görüldüğü sorulmuştur. ÖA5 modelde $4/5 \times 2/3$ işleminin görüldüğünü ifade etmiştir ve $2/3$ 'ü şöyle açıklamıştır: "Burası 3/2 ya (ikinci ve üçüncü dikdörtgenin taralı kısmını gösteriyor), ben de şimdi dedim ki burası 2/3 (ikinci dikdörtgenin tamamını gösteriyor). Burası bizim, uı, bir bütünümüz, 3/2'nin bütünü, 3/2'nin bütünü, 3/2'nin bütününe 2/3 dedim." Burada 3/2'nin bütününe nasıl 2/3 dediği sorulmuştur ve ÖA5 bunu şöyle açıklamıştır: "Üç parçanın ikisi yani 3/2'nin bütünü, bir bütün, 3/2'yi üçe bölüp ikisini alırsak bir bütündür. Bu da çarpmadaki 3/2'nin 2/3'ü 1 ($1 = 2/3 \times 3/2$ yazıyor) ise burada ters çevir çarp'tan gelen 2/3'ü buluruz işte. Oradan da 4/5'ini alarak sonuca ulaşıyoruz." ÖA5 burada ters çevir çarp'tan gelen $2/3$ 'ü doğru bir şekilde ifade etmiştir. ÖA6, ÖA2 ve ÖA1 de işlemin sonucunu benzer şekilde açıklamışlardır. Ters çevir çarp algoritmasından gelen $2/3$ ile modelde görülen işlemin $4/5 \times 2/3$ olduğunu ÖA6 ve ÖA2 de doğru bir şekilde açıklamışlardır. Ancak ÖA1 bu işlem

yerine $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ olarak ifade etmiştir. Buna göre ÖA1'in iki kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin anlamasının ÖA6, ÖA2 ve ÖA5'inki kadar derin olmadığı söylenebilir.

ÖA4 ve ÖA3 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak verilen işlem için kesir çubuğu modeli çizmişlerdir. Bu modeller incelendiğinde benzer modeller çizdikleri ve verilen işlem ile bölmenin gruptama anlamını yansıtan birer model çizibildikleri görülmektedir (Şekil 4.63). ÖA4 ve ÖA3 öncelikle bu işlemi $X \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{5}$ olarak yazmışlardır ve X'i "grup sayısı", $\frac{3}{2}$ 'yi "her bir gruptaki nesne sayısı" ve $\frac{4}{5}$ 'i "nesne sayısı" olarak ifade etmişlerdir. Bununla beraber bu işlemi ÖA4 " $\frac{3}{2}$ 'nin X kadarı $\frac{4}{5}$ " ve ÖA3 "Bir grupta $\frac{3}{2}$ nesne varsa kaç grupta $\frac{4}{5}$ nesne vardır?" şeklinde ifade etmişlerdir. Burada öğretmen adaylarının çarpmanın tanımını kullanarak işlemi açıklamalarının model çizmelerine yardımcı olduğu söylenebilir.

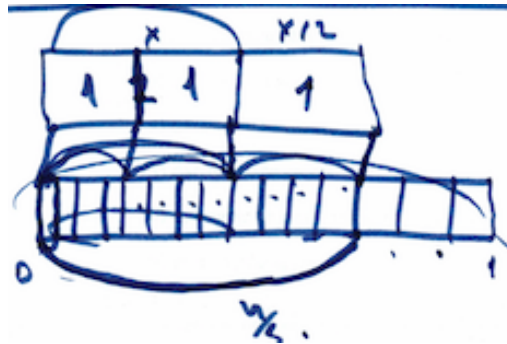


Şekil 4.63. Görüşme-7'de verilen problemin ifade ettiği $\frac{4}{5} \div \frac{3}{2}$ işleminin gruptama anlamı için ÖA4'ün çizdiği model

ÖA4 modelinde önce bir kesir çubuğu çizip yarısı kadarını sonuna ilave etmiştir ve bunu $\frac{3}{2}$ olarak ifade etmiştir. Sonra altına bu kesir çubuğunun ilk kısmı kadarını çizmiştir, başına 0 ve sonuna 1 yazmıştır ve bu kesir çubuğunu 5 eş parçaya bölmüştür. Burada bütünlerin aynı olmasını $\frac{3}{2}$ ve $\frac{4}{5}$ 'in her ikisinin de nesne olması ile açıklamıştır. Benzer şekilde ÖA3 de bütünlerin aynı olduğunu vurgulamıştır. Bununla beraber $\frac{3}{2}$ 'yi gösterdiği kesir çubuğunun tamamını "grup" ve iki parçasını "bütün" olarak ifade etmiştir. Buna göre ÖA3'ün iki kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin kavramsal anlamasının derinleştiği söylenebilir. Daha sonra ilk kesir çubuğunu 1 ve $\frac{1}{2}$ 'lik kısım diye ayırıp 1'lik kısmı 10 eş parçaya, ikinci kesir çubuğunun tamamını 10 eş parçaya bölerek bir bütünün 10 eş parçadan oluştuğunu belirtmiştir. Buradan $\frac{4}{5}$ 'in 8 parça olduğunu ifade edebilmiştir ancak buna işlem yaparak ulaştığını belirtmiştir. ÖA4'e buna işlem yapmadan nasıl ulaşacağı sorulduğunda şöyle ifade etmiştir: "Haaa, işlem yaptım. Bunu işlem yapmadan, ha şunun ikisine bir dersem (ikinci kesir çubuğunun iki küçük parçasını gösteriyor), bana

zaten $4/5$ 'lik kısmını soruyordu, o zaman 8 tane var.” Burada ÖA4 ikinci kesir çubuğunda parçaları ikiye bölerek gruplayarak bu gruplardan 4 tanesinin $4/5$ 'i verdiğini göstererek 8 parça olduğunu ifade etmiştir. Sonra işlemin sonucunu şu şekilde ifade ederek $3/2$ 'nin içinde $4/5$ 'in kaç tane olduğunu aramaya yönelmiştir: “Burada kaç tane bundan var, bundan kaç tane var burada (ilk dikdörtgenin içinde 8 küçük parçayı aramaya işaret ediyor), aslında onu bulursak bitecek. Bir tane var.” Daha sonra ÖA4 bunu aramadığını farkedip “ $3/2$ 'nin X kadar $4/5$ 'tir” ifadesinden hareket ederek $3/2$ 'nin $8/15$ 'inin $4/5$ olduğunu doğru bir şekilde ifade etmiştir. Bunu da ilk kesir çubuğunun tamamında 15 parça olduğunu belirterek açıklamıştır. Burada ÖA4'ün işlemin sonucunu parça-bütün ilişkisi kurarak ifade ettiği görülmektedir. ÖA3 ise bunu kesrin ölçme anlamını kullanarak “8 tane $1/15$ ” şeklinde açıklayarak birim üzerinden hareket etmiştir. Sonuç olarak ÖA4'ün ve ÖA1'in iki kesrin bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin anlamasının geliştiği ancak diğer öğretmen adaylarınınkindi kadar derinleşemediği söylenebilir. Çünkü burada ÖA4 modelde her ne kadar $4/5$ 'i ve $3/2$ 'yi gösterse de işlemin sonucunu ifade ederken $3/2$ 'nin içinde $4/5$ 'i aramaya yönelmiştir. ÖA1 de ters çevir çarp algoritmasından gelen $2/3$ ile modelde görülen işlemin $4/5 \times 2/3$ yerine $2/3 \times 4/5$ olduğunu ifade etmiştir.

ÖA4 bu görüşmeye (G7) kadar iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin kavramsal anlamasında herhangi bir ilerleme göstermemiştir. Daha önce verilen $2/5 \div 3/7$ ve $2/5 \div 3/4$ işlemlerinin paylaştırma anlamı için model çizemezken burada verilen $4/5 \div 3/2$ işleminin paylaştırma anlamı için bir kesir çubuğu modeli çizebilmiştir (Şekil 4.64). Buna göre ÖA4'ün iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin kavramsal anlamasının ön-testten yedinci görüşmeye (G7) geliştiği söylenebilir. Bu model incelendiğinde verilen işlemi ve bölmenin paylaştırma anlamını yansıtan bir model olduğu görülmektedir.



Şekil 4.64. Görüşme-7’de verilen problemin ifade ettiği $4/5 \div 3/2$ işleminin paylaştırma anlamı için ÖA4’ün çizdiği model

ÖA4 verilen işleme uygun problem kurduktan sonra bu problem üzerinden model çizmiştir. Modelinde önce bir kesir çubuğu çizerek bunu X olarak ifade etmiştir. Sonra bu kesir çubuğunun sonuna yarısı kadar daha bir kesir çubuğu çizmiştir ve bunu “ X artı $X/2$, tamamı $3X/2$ ” olarak ifade etmiştir. Daha sonra modelinde çizdiği kesir çubuğunun altına bir kesir çubuğu daha çizip bunu 5 eş parçaya bölmüştür ve 4 parçasının ilk kesir çubuğunun tamamına denk geldiğini ifade etmiştir. Ondan sonra X ’lik kısmın arandığını belirterek ikinci kesir çubuğunun 4 parçasının her birini 3 eş parçaya bölmüştür. Buna göre ÖA4 burada paylaştırma anlamında ortak pay almayı gerçekleştirmiştir. Burada ÖA4 ikinci kesir çubuğunun her bir parçasını 3 eş parçaya bölmüştür ve ilk kesir çubuğunun tamamına 12 parçanın karşılık geldiğini göstererek “ $3/2$ ’lik kısma 12 parça gelir. $3/2$ ’ye $4/5$ karşılık geliyordu ya, o zaman tamamı 15 ise 15’in $4/5$ ’idir ($4/5 \times 15$ yazıyor)” şeklinde ifade etmiştir. ÖA4’ün bu ifadesinde işlemin sonucuna modelden ziyade işlem yaparak ulaştığı görülmektedir. ÖA4’e işlem yapmadan X ’e 12 parçanın denk geldiğini nasıl göstereceği sorulmuştur ve ÖA4 şöyle ifade etmiştir: “Şimdi şurası $4/5$ ’ti. $4/5$ ’e $3X/2$ gelir. Ya yine bölmem gerekiyor, 12 parçaya nasıl ulaştım? İşlem yaptım, işlem yapmadan nasıl ulaşabilirim? Ulaşamam yani ulaşabileceğimi düşünüyorum ama nasıl? Şimdi şu kısım $4/5$ ’lik kısmı. Şimdi 15 parça bütünse, $4/5$ ’lik kısım 12 parça olur. Burada bir tane var, bir de yarımı var yani $3/2$ ’lik kısım (ilk dikdörtgeni gösteriyor). Hatta bölü 2’yi de çıkarırım, 3 kısım var. 3 kısım 12 parçaya düşmüş. O zaman her bir parçaya hani 3 kısım on ikiyse, her bir parçaya 4 kısım düşer.” Burada ÖA4 yine işlem üzerinden hareket etmiştir ve 1 tane $X/2$ ’lik kısma ikinci kesir çubuğunun 4 parçasının denk geldiğini ifade etmiştir. Buna göre ÖA4’ün iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin kavramsal anlamasının ön-testten yedinci görüşmeye (G7) geliştiği ancak işlemsel anlamasının daha ağır bastığı söylenebilir. Buna kanıt olarak ÖA4’e ikinci kesir çubuğunun her bir parçasını neden 3 eş parçaya böldüğü sorulduğunda yaptığı şu açıklama gösterilebilir: “Ona şöyle karar verdim, 3 ile 4’ün en küçük ortak katı, eş parçalara ayıracağız ya eşit düşmesi için, şu şekilleri görebilmem için hani şuna dört gelebileceğini, şuna da dört, buna dört (ilk dikdörtgenin her bir parçasına ikinci dikdörtgenden eşit parçalar geleceğine işaret ediyor). Mesela iki alsaydım tam olmayacaktı. Yani net göremeyecektim şekilde bu yüzden.” ÖA4 burada $3/2$ ile $4/5$ kesirlerinin paylarının en küçük ortak katını almadan bahsetmiştir ama bu açıklama kavramsaldan ziyade yine işlemsel düzeyde kalmıştır. Burada işlemin sonucunun ne olduğu sorulduğunda parça-bütün ilişkisi kurarak şu şekilde ifade etmiştir: “ X , 8 parça, $3/2$ ’si için 15 parça kullanılıyordu, biri için de 8 parça kullanılır, $8/15$ ’tir sonuç ($8/15$ yazıyor).” Burada ÖA4 bütünü $3X/2$ ve 15 parça olarak ifade edip bunun üzerinden

açıklamıştır. Bir parçanın $1/15$ olduğundan ve X'in 8 tane $1/15$ 'ten oluştuğu için $8/15$ 'i ifade ettiğinden bahsetmemiştir. Sonra ters çevir çarp algoritmasından gelen $2/3$ 'ün ne ifade ettiği sorulduğunda ÖA4 ikinci kesir çubuğunda 8 küçük parçayı ve 12 küçük parçayı göstererek *“ikisini aldım ya, $2/3$ ”* şeklinde ifade etmiştir. Daha sonra doğru bir şekilde modelde $2/3 \times 4/5$ işleminin görüldüğünü *“ $4/5$ 'in $2/3$ 'ü yani $2/3$ çarpı $4/5$, bunu net bir şekilde görebildim.”* şeklinde ifade etmiştir. Buna göre ÖA4'ün iki kesrin bölme işleminin paylaşırma anlamına ilişkin anlamasının kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

4.1.4.3. Son Durum

Öğretmen adaylarının öğretim sürecinde iki kesrin bölme işlemine ilişkin kavramsal anlamalarında görülen gelişim ön-testte çizdikleri modeller ile son-testte çizdikleri modeller kıyaslandığında da görülmektedir. Öğretimden sonra uygulanan KÇB son-testinde 16. görevde verilen $1/7 \div 3/4$ işlemi için öğretmen adaylarının hepsi kesir çubuğu modeli çizmişlerdir. Ön-testte bu işlem için ÖA3 ve ÖA5 model çizemezken diğerlerinin çizdikleri modeller de bölmeden ziyade çarpma işlemini yansıtan modellerdir. Son-testte çizdikleri modeller incelendiğinde verilen işlemi ve bölmenin paylaşırma anlamını yansıtan modeller oldukları görülmektedir (Tablo 4.15). ÖA1 diğerlerinden farklı olarak işlemin grublama anlamı için de model çizmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin bölme işlemine ilişkin anlamalarının geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

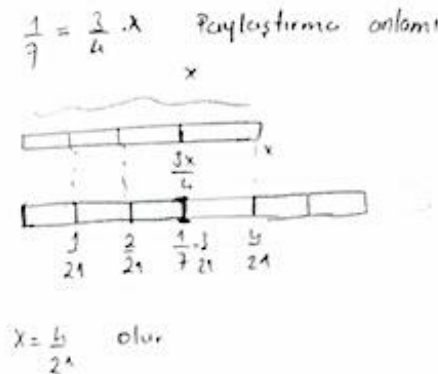
Öğretmen adayları öncelikle verilen işlemi $1/7 = 3/4 \cdot X$ şeklinde yazmışlardır. Bu şekilde bölmenin paylaşırma anlamını ele aldıklarını belirtmişlerdir. Bu da bölmeyi çarpmanın tersi olarak ifade etmenin iki kesrin bölme işleminin paylaşırma anlamı için model çizmelerini kolaylaştırdığını desteklemektedir. Sonra bütün öğretmen adayları benzer şekilde birer kesir çubuğu modeli çizmişlerdir. Öğretmen adayları öğretim sürecinde kesir çubuğu modelini daha çok kullanmışlardır ve son-testte de kesir çubuğu modelini tercih etmişlerdir. Buna göre kesir çubuğu modelinin öğretmen adaylarının iki kesrin bölme işlemini anlamlandırmalarına yardımcı olduğu söylenebilir.

Tablo 4.15.

Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde İki Kesrin Bölme İşlemi İçin Çizdikleri Modellere İlişkin Açıklamalar

Öğretmen Adayı	ÖA6	ÖA2	ÖA4	ÖA3	ÖA5	ÖA1
$1/7 \div 3/4$	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var - Ortak pay alma	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var - Ortak pay alma	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var - Ortak pay alma	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var - Ortak pay alma	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var - Ortak pay alma - Ekstra model çizme (Gruplama anlamı)	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı - Bütün basamaklar var - Ortak pay alma - Ekstra model çizme (Gruplama anlamı)

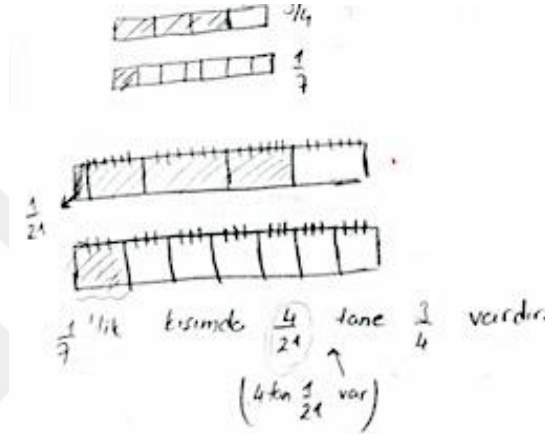
ÖA1'in modeli incelendiğinde verilen işlemi ve paylaştırma anlamını yansıtan bir model çizemediği görülmektedir (Şekil 4.65). ÖA1 modelinde alt alta iki kesir çubuğu çizmiştir, ilkinin X olarak ifade edip 4 eş parçaya bölmüştür ve 3 parçasının $3X/4$ 'ü ifade ettiğini belirtmiştir. Modelde ikinci kesir çubuğunu yedi eş parçaya böldüğünü farzederek ilk kesir çubuğunun 3 parçasına ikinci kesir çubuğunun $1/7$ 'lik kısmı denk gelecek şekilde çizmiştir.



Şekil 4.65. KÇB son-testinde 16. görevde ÖA1'in paylaştırma anlamı için çizdiği model
Sonra ikinci kesir çubuğunun bir parçasını 3 eş parçaya bölmüştür ve ilk kesir çubuğunun bir parçasının $1/21$ olduğunu bularak işlemin sonucunun yani X'in $4/21$ olduğunu ifade etmiştir. Diğer öğretmen adayları da modellerini benzer şekilde çizmişlerdir ve işlemin sonucunu model üzerinden doğru bir şekilde ifade etmişlerdir.

ÖA1 diğerlerinden farklı olarak verilen işlemin gruplama anlamı için de model çizmiştir (Şekil 4.66). Modelinde alt alta iki kesir çubuğu çizmiştir, ilkinin 4 eş parçaya bölüp 3 parçasını taramıştır ve ikincisini 7 eş parçaya bölüp 1 parçasını taramıştır. Sonra bunları biraz daha büyük olarak yeniden çizmiştir, ilk kesir çubuğunun her bir parçasını 7 eş

parçaya ve ikinci kesir çubuğunun her bir parçasını 4 eş parçaya bölmeye işaret etmiştir. Burada ilk kesir çubuğunun bir küçük parçasını $\frac{1}{21}$ olarak ifade edip ikinci kesir çubuğunda $\frac{1}{7}$ 'lik kısımda 4 tane $\frac{1}{21}$ olduğunu belirterek işlemin sonucunun $\frac{4}{21}$ olduğunu ifade etmiştir. ÖA1'in bir küçük parçayı $\frac{1}{21}$ olarak ifade etmesi kavram yanılgısına sebep olabilir. Çünkü referans alınan bütün 1 bütün yerine 1 bütünün $\frac{3}{4}$ 'ü alınmıştır. Bu yüzden burada işlemin sonucu için referans alınan bütünün $\frac{1}{7}$ ve $\frac{3}{4}$ için referans alınan bütünden farklı olduğunu belirtmesi gerekmektedir. Bunu son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) doğru bir şekilde ifade etmiştir.



Şekil 4.66. KÇB son-testinde 16. görevde ÖA1'in gruplama anlamı için çizdiği model

Son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) bir küçük parçanın neden $\frac{1}{21}$ olduğu sorulduğunda ÖA1 yanlış yazdığını, $\frac{1}{28}$ olması gerektiğini ifade etmiştir. Buradan işlemin sonucunu şöyle açıklamıştır: “Burada 4 tane $\frac{1}{28}$ var, burada da 21 tane $\frac{1}{28}$ var. Elimde uğraştığım şey $\frac{3}{4}$ 'lük kısım ya, şurası, 21 tanenin içindeki bir tanesini almam gerekiyor çünkü bilinen burası. Şunların her birisi eşitti, 4 tane var bundan, $\frac{4}{21}$ olmuş oluyor. Bir paketin $\frac{4}{21}$ 'i dolmuş oluyor.” Buna göre ÖA1'in iki kesrin bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin anlamasının kavramsal düzeyde olduğu ve yedinci görüşmeden sekizinci görüşmeye geliştiği söylenebilir.

Sonuç olarak öğretmen adaylarının bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin gruplama anlamı ve bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamı için model çizmeye ilişkin anlamaları başta bulunmuyorken ilk görüşmeden itibaren ortaya çıktığı, sonrasında geliştiği ve derinleştiği söylenebilir (Tablo 4.12). Bununla beraber öğretimden önce iki kesrin bölme işleminin her iki anlamı için de model çizme bilgisine sahip değillerken öğretimin sonunda iki kesrin bölme işleminin paylaştırma ve gruplama anlamına ilişkin model çizme bilgilerinin geliştiği, kavramsal düzeyde olduğu ve gruplama anlamı için bu bilginin daha güçlü olduğu söylenebilir (Tablo 4.16). Tablo 4.16 öğretmen

adaylarının ön-testte, öğretim sürecinde ve son-testte iki kesrin bölme işlemine ilişkin çizdikleri modelleri açıklayan Tablo 4.13, 4.14 ve 4.15'in birarada verilmiş hali olarak sunulmuştur. Bölmeyi çarpmanın tersi olarak ifade edip çarpmanın tanımını kullanarak düşünmenin model çizmelerini çarpma işleminde olduğu gibi kolaylaştırdığı görülmüştür. Buna kanıt olarak neredeyse bütün görüşme ve alıştırılarda verilen kesirlerle bölmeye ilişkin işlemlerin her iki anlamı için model çizerken bölmeyi çarpmanın tersi olarak yazmayı kullanmaları gösterilebilir. Bu şekilde düşünmeye sıkı sıkıya bağlı olmalarından dolayı verilen işlemlerdeki kesrin türünün model çizmelerini zorlaştırmadığı söylenebilir. Buna kanıt olarak yedinci görüşmede (G7) bölenin bileşik kesir olarak verildiği işlem için herhangi bir zorluk yaşamadan model çizmeleri gösterilebilir.

Çarpma işleminde olduğu gibi bölme işleminde de kullandıkları model türüne göre model çizmede zorlandıkları görülmüştür. Öğretmen adayları kesirlerle bölme işlemleri için daha çok uzunluk ve alan modellerini kullanmışlardır. Bu modeller dışında örneğin küme modeli kullandıklarında bazı öğretmen adaylarının zorlandıkları ve başarılı olamadıkları görülmüştür. Diğer taraftan model çizmeden problem kurmanın veya problemin verilmesinin model çizmeyi kolaylaştırdığı söylenebilir. Öğretmen adaylarının problemde yer alan sayıların ifade edilişlerine göre aynı veya farklı cins olduğunu farkedip bütünlerin aynı veya farklı olmasına karar verebildikleri tespit edilmiştir. Öğretmen adayları bölmenin grupta anlamında bütünlerin aynı ve paylaştırma anlamında bütünlerin farklı olması gerektiğini bilerek verilen problemin bölmenin hangi anlamına uygun olduğunu belirleyebildikleri gözlenmiştir.

Tablo 4.16.

Öğretmen Adaylarının İki Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Model Çizme Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo

Öğretmen Adayı	Ön-test/G1 1/7 ÷ 3/4	Öğretim Süreci/G2-G7					Son-test/G8 1/7 ÷ 3/4
		2/5 ÷ 3/7 (Paylaştırma anlamı)	3/4 ÷ 5/7 (Gruplama anlamı)	2/5 ÷ 3/4 (Problem) (Paylaştırma anlamı)	4/5 ÷ 3/2 (Paylaştırma anlamı)	4/5 ÷ 3/2 (Gruplama anlamı)	
ÖA6	• Dikdörtgenel alan modeli • İşlemi yansıtmaya n model • Sadece 1/7 ve 3/4'ü ayrı ayrı gösterme • Referans alınan bütünün yanlışı alma	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Ortak pay alamama • İşlemin sonucu görünümü	• Dikdörtgenel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı • Ortak payda alma • İşlemin sonucu görünümü	• Küme modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamaklar var • Ters çevir çarp algoritmasının dan gelen 4/3 ile	• Sayı doğrusu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırma anlamı • Bütün basamakları var • Ters çevir çarp algoritmasının dan gelen	• Dikdörtgenel alan modeli • İşlemi yansıtan model • Gruplama anlamı • Bütün basamakları var • Ters çevir çarp algoritmasının dan gelen	• Kesir çubuğu modeli • İşlemi yansıtan model • Paylaştırm a anlamı • Bütün basamaklar var • Ortak pay alma

	yor	modelde 4/3 x 2/5 işleminin görüldüğün ü ifade etme	2/3 ile modelde 2/3 x 4/5 işleminin görüldüğün ü ifade etme	2/3 ile modelde 4/5 x 2/3 işleminin görüldüğün ü ifade etme			
ÖA2	- Dikdörtgens el alan modeli Bölme yerine 4/3 x 1/7 işlemini yansıtan model	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırm a anlamı - Ortak pay alma İşlemin sonucu tam olarak görünmü yor (Diğer parçaları parçalama ma)	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı - Bütün basamaklar var - Ortak payda alma - Ters çevir çarp algoritmasın dan gelen 7/5 ile modelde 3/4 x 7/5 işleminin görüldüğünü ifade etme	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırm a anlamı - Bütün basamaklar var - Ortak pay alma	- Dikdörtgens el alan modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırm a anlamı - Bütün basamakları var - Ters çevir çarp algoritmasın dan gelen 2/3 ile modelde 2/3 x 4/5 işleminin görüldüğün ü ifade etme	- Dikdörtgens el alan modeli - İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı - Bütün basamakları var - Ters çevir çarp algoritmasın dan gelen 2/3 ile modelde 4/5 x 2/3 işleminin görüldüğün ü ifade etme	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırm a anlamı - Bütün basamaklar var - Ortak pay alma
ÖA4	- Kesir çubuğu modeli Bölme yerine çarpma işlemini (3/4 x 1/7) yansıtan model	Model yok	- Kesir çubuğu modeli İşlemi yansıtmaya n model	- Dikdörtgens el alan modeli İşlemi yansıtmaya n model	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırm a anlamı - Bütün basamakları var - Ters çevir çarp algoritmasın dan gelen 2/3 ile modelde 2/3 x 4/5 işleminin görüldüğün ü ifade etme	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı - Bütün basamakları var - Ters çevir çarp algoritmasın dan gelen 2/3 ile modelde 4/5 x 2/3 işleminin görüldüğün ü ifade etme	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırm a anlamı - Bütün basamaklar var - Ortak pay alma
ÖA3	Model yok	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırm a anlamı Ortak pay alamama İşlemin sonucu görünmü yor	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı İşlemdaki 5/7 tam olarak görünmüy o r	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırm a anlamı - Bütün basamaklar var - Ortak pay alma	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırm a anlamı - Bütün basamakları var - Ters çevir çarp algoritmasın dan gelen 2/3 ile modelde 2/3 x 4/5 işleminin görüldüğün ü ifade etme	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı - Bütün basamakları var - Ters çevir çarp algoritmasın dan gelen 2/3 ile modelde 4/5 x 2/3 işleminin görüldüğün ü ifade etme	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştırm a anlamı - Bütün basamaklar var - Ortak pay alma
ÖA5	Model yok	Kesir çubuğu modeli	Kesir çubuğu modeli	Kesir çubuğu modeli	Kesir çubuğu modeli	Dikdörtgens el alan modeli	Kesir çubuğu modeli

	- İşlemi yansıtan model - Paylaştı rma anlamı - Ortak pay alma İşlemin sonucu tam olarak görünmü yor (Diğer parçaları parçalama ma)	- İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı - Ortak payda alma Ters çevir çarp algoritması ndan gelen 7/5 ile modelde 3/4 x 7/5 işleminin görüldüğün ü ifade edememe	- İşlemi yansıtan model - Paylaştı rma anlamı - Ortak pay alma Bölmenin paylaştı rma ve gruplama anlamı ikilemi (Ortak pay yerine ortak payda alma) İşlemin sonucu tam olarak görünmüyo r (Diğer parçaları parçalama ma)	- İşlemi yansıtan model - Paylaştı rma anlamı - Bütün basamakları var - Ters çevir çarp algoritmasın dan gelen 2/3 ile modelde 2/3 x 4/5 işleminin görüldüğün ü ifade etme	- İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı - Bütün basamakları var - Ters çevir çarp algoritmasın dan gelen 2/3 ile modelde 4/5 x 2/3 işleminin görüldüğün ü ifade etme	- İşlemi yansıtan model - Paylaştı rma anlamı - Bütün basamaklar var - Ortak pay alma - Ters çevir çarp algoritması ndan gelen 4/3 ile modelde 4/3 x 1/7 işleminin görüldüğün ü ifade etme	
ÖA1	- Kesir çubuğu modeli Bölme yerine çarpma işlemini (3/4 x 1/7) yansıtan model	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştı rma anlamı - Ortak pay alma İşlemin sonucu tam olarak görünmü yor (Diğer parçaları parçalama ma)	- Kesir çubuğu modeli - Gruplama anlamı İşlemi yansıtmaya n model	- Sayı doğrusu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştı rma anlamı - Bütün basamaklar var	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştı rma anlamı - Bütün basamakları var - Ters çevir çarp algoritmasın dan gelen 2/3 ile modelde 2/3 x 4/5 işleminin görüldüğün ü ifade etme	- Dikdörtgens el alan modeli - İşlemi yansıtan model - Gruplama anlamı - Bütün basamakları var - Ters çevir çarp algoritmasın dan gelen 2/3 ile modelde 4/5 x 2/3 işleminin görüldüğün ü ifade etme	- Kesir çubuğu modeli - İşlemi yansıtan model - Paylaştı rma anlamı - Bütün basamaklar var - Ortak pay alma - Ekstra model çizme (Gruplama anlamı)

Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma işleminde en çok alan modeli ve kesirlerle bölme işleminde en çok uzunluk modelini kullandıkları görülmüştür. Bununla beraber bütün modeller incelendiğinde en çoktan en aza doğru dikdörtgensel alan modeli, kesir çubuğu modeli, dairesel alan modeli, küme modeli, sayı doğrusu modeli ve gerçek nesne modelinin tercih edildiği sonucuna ulaşılmıştır. Model türlerine göre en çok kullanan kişiler de aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

- Sayı doğrusu modelini ÖA6 ve ÖA2 diğerlerine göre daha çok kullanmışlardır.
- Küme modelini en çok ÖA6 kullanmıştır.
- Kesir çubuğu modelini en çok ÖA5 ve ÖA1 kullanmışlardır.
- Gerçek nesne modelini en çok ÖA3 kullanmıştır.
- Alan modelini özellikle dikdörtgensel alan modelini en çok ÖA4 kullanmıştır.
- Hem alan hem uzunluk modelini en çok ÖA2 kullanmıştır.

4.2. Problem Kurma Bilgisi

4.2.1. Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Problem Kurma Bilgisi

4.2.1.1. Başlangıç Durumu

Öğretmen adaylarının öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinin zayıf olduğu görülmüştür (Tablo 4.17). Bu tabloya göre öğretmen adaylarından bazıları öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde verilen $6 \times \frac{2}{3}$ işlemi için bu işlem yerine $\frac{2}{3} \times 6$ işlemini yansıtan problem kurarak çeşitli zorluklar yaşamışlardır. Öğretmen adaylarının problem kurarken karşılaştıkları zorluklar şu başlıklar altında toplanabilir; *bütünü çokluk olarak alma*, *birim kargaşası*, *bilgi ekleme ve bilinmeyen olmaması*. Öğretmen adaylarından ÖA2 ve ÖA5 verilen işlemi ve “6 tane $\frac{2}{3}$ ” anlamını yansıtan birer problem kurmuşlardır. Buna göre ÖA2 ve ÖA5’in öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinin diğer öğretmen adaylarına göre daha güçlü olduğu söylenebilir.

Tablo 4.17.

Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde $6 \times \frac{2}{3}$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen $6 \times \frac{2}{3}$ işlemi için kurduğu problem	Problem ifade ettiği anlam ve karşılaşılan zorluklar
ÖA6	Esra’nın doğum gününe 5 arkadaşı geldi. Herkese ayrı küçük pastalar verdi. Esra, pastaları 3 dilim olacak şekilde kesti. Esra da içine dahil olmak üzere bu 6 kişi kendi pastalarının $\frac{2}{3}$ ’ünü yediler. Esra’nın doğumgününde kaç dilim pasta yenmiştir?	• İşlemi yansıtmayan problem • Bütünü çokluk olarak alma • Birim kargaşası • Bilgi ekleme
ÖA2	Ahmet bir pastanın $\frac{2}{3}$ ’ünü kendine ayırıp, $\frac{1}{3}$ ’ünü satmaktadır. Ahmet 6 kişiye pasta satarsa ne kadar pastayı tırtıklamış olur?	• İşlemi yansıtan problem • “6 tane $\frac{2}{3}$” anlamı
ÖA4	Ali Bey 6 m^2 tarlasının $\frac{2}{3}$ ’üne çilek ekmek istiyor. Kaç m^2 ’lik alan kullanır çilek ekmek için?	• İşlemi yansıtan problem • “6’nın $\frac{2}{3}$’ü” anlamı
ÖA3	Arda’nın 6 dilim ekmeği var. Her dilimin $\frac{2}{3}$ ’ünü bir arkadaşı ile paylaşıyor. Arda ekmeklerinin ne kadarını paylaşmış oldu?	• İşlemi yansıtmayan problem • “6’nın $\frac{2}{3}$’ü” anlamı • Bilinmeyen olmaması
ÖA5	Sokakta yaşayan 6 kişiye bir fırıncı her gün kalan ekmekleri dağıtmak istiyor. Fırıncının elinde bir miktar ekmeği vardır ve her kişi için bir ekmeğin $\frac{2}{3}$ ’ünü verebilecektir. Fırıncının elinde kaç ekmeği vardır?	• İşlemi yansıtan problem • Eş grup yapısında • “6 tane $\frac{2}{3}$” anlamı
ÖA1	Bir çocuğun telefonunun şarjı 6 saatte tamamen dolmaktadır. Pilin $\frac{2}{3}$ ’ü kaç saatte dolar?	• İşlemi yansıtan problem • Oran yapısında • “6’nın $\frac{2}{3}$’ü” anlamı

ÖA5’in problemi (Tablo 4.17) incelendiğinde eş grup yapısında bir problem kurduğu ve işlemdeki 6’yı “6 kişi” ve $\frac{2}{3}$ ’ü “her bir kişinin alacağı ekmeğin miktarı, bir ekmeğin $\frac{2}{3}$ ’ü” olarak ifade ettiği görülmektedir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) ÖA5 problemi

nasıl kurduğunu şu şekilde açıklayarak “6 tane $2/3$ ” anlamını ele aldığını desteklemektedir: *“Her bir kişiye bir ekmğin $2/3$ ’ü düşecek şekilde verince 6 kişiyle çarpacak çocuk diye düşündüm.”*

Öğretmen adaylarından ÖA4 ve ÖA1 verilen $6 \times 2/3$ işlemi yerine $2/3 \times 6$ işlemini yansıtan birer problem kurmuşlardır. ÖA4 problemde (Tablo 4.17) işlemdeki 6’yı “6 m² tarla” ve $2/3$ ’ü “çilek ekilecek kısım, 6 m² tarlanın $2/3$ ’ü” olarak ifade etmiştir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) ÖA4’ün yaptığı şu açıklama problem kurarken “6’nın $2/3$ ’ü” anlamını ele adığını göstermektedir: *“Bütünü $2/3$ ile çarpmadır. $2/3$ ’lük kısmı, 3’te birinin iki parçası. $2/3$ ’üne çilek ekmek istiyor. Üçe bölmüşüm iki parçasını istiyor. Bu durumda çarpma işlemi kullanırım kesirlerde.”* ÖA1’in oran-orantı yoluyla problem kurduğu görülmektedir (Tablo 4.17). Problemde işlemdeki 6’yı “bir pilin tamamının dolma süresi, 6 saat” ve $2/3$ ’ü “pilin $2/3$ ’ü” olarak ifade etmiştir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) ÖA1 kurduğu problemin ifade ettiği işlemi şöyle açıklamıştır: *“Galiba problemimle işlem tutmuyor. Bir çocuğun telefonunun şarjı 6 saatte tamamen dolmaktadır, pilin $2/3$ ’ü, pil 1 tam olsun. $2/3$ ’ü ne kadar sürede dolar? $2/3$ sürede 6’nın $2/3$ ’ü yani ne olmuş oluyor 4 olmuş oluyor. 6’yı üç parçaya bölmüşüz, iki parçasını almışız.”* Bu açıklaması ÖA1’in problem kurarken “6’nın $2/3$ ’ü” anlamını ele aldığını göstermektedir. Buna göre ÖA4 ve ÖA1’in öğretimden önce çarpmanın tanımına ilişkin kavramsal anlamaya sahip olmadığı söylenebilir. Buna kanıt olarak ÖA1’in işlemdeki 6’yı “üzerinde çalıştığımız sayı, bir bütünümüz, tamımız” ve $2/3$ ’ü “6’nın $2/3$ ’ü, $2/3$ birimler” olarak ifade etmesi gösterilebilir.

Öğretmen adaylarından ÖA6 ve ÖA3 verilen $6 \times 2/3$ işlemi için bu işlemi yansıtan bir problem kuramamışlardır. ÖA3’ün kurduğu problem (Tablo 4.17) incelendiğinde işlemdeki 6’yı “6 dilim ekmek” ve $2/3$ ’ü “her dilimin $2/3$ ’ü” şeklinde ifade ederek her ne kadar “6’nın $2/3$ ’ü” anlamını yansıtan bir problem kurmuş gibi görünse de “ekmeklerin ne kadarı” ifadesiyle sorunun cevabını problemin içinde verdiği görülmektedir. Buna göre problemin cevabı “ekmeklerin $2/3$ ’ünü paylaşmış oldu” şeklinde olur. Burada “kaç ekmek vermiş olur” ifadesini kullanması daha uygun olabilirdi. Öte yandan bu problem için “paylaşıyorlar” ifadesi ile bölmeyi çağrıştırdığı da söylenebilir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) bu ifadeyi “arkadaşına vermesi” anlamında kullandığını belirtmiştir ve *“Ne kadarını arkadaşına vermiş oldu desek belki daha doğru olabilir.”* şeklinde düzeltmiştir ancak yine cevap problemin içinde verilmiş durumdadır. Bu durumda ÖA3’ün bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemi için problem kurmaya ilişkin başlangıçtaki

durumu hakkında problem kurabilmekte ancak çarpmanın anlamına ve işlemdeki sayıların ne ifade ettiğine dikkat etmemekte ve problemde kullandığı ifadelerin bu sayıları veya işlemi karşılayıp karşılamadığını göz ardı etmekte olduğu söylenebilir. Buna göre ÖA3'ün öğretimden önce çarpmanın tanımı ve anlamlarına ilişkin kavramsal anlamaya sahip olmadığı ve bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin anlamasının işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir. ÖA6'nın kurduğu problem (Tablo 4.17) incelendiğinde her ne kadar çarpmanın tekrarlı toplama anlamını yansıtıyor gibi görünse de bu işlemi tam olarak yansıtmamaktadır. Çünkü bir bütün yerine çokluk üzerinden hareket ettiği görülmektedir. Bununla beraber problemde hem “birer pasta” demiştir, hem “her bir pasta 3 dilim” demiştir, hem de “kaç dilim pasta” şeklinde sormuştur. Buna göre bu problemin şunu ifade ettiği söylenebilir: “Her bir kişinin 3 dilim pastası vardır, her biri bu üçer dilim pastanın $\frac{2}{3}$ 'ünü yemiştir, 6 kişi kaç dilim pasta yemiştir?” Bu durumda bu problemin ifade ettiği işlem $6 \times \frac{2}{3} \times 3$ 'tür. Bunun yanı sıra burada kaç dilim pasta mı yoksa kaç pasta mı arandığı açık değildir. Buna göre ÖA6'nın birim kargaşası yaşadığı söylenebilir. Önteste ilişkin yapılan görüşmede (G1) geçen şu diyalog bunu desteklemektedir (G1, ÖA6, 17/03/2015, 3-17):

G: Problemin ifade ettiği işlemi yazabilir misin?

ÖA6: Burada sanki bir eksiklik var, kaç pasta olduğunu soruda vermişiz ama kendi pastalarının demişiz. Herkes $\frac{2}{3}$ dilim pasta yemiş, 6 kişi kaç dilim yemiştir şeklinde.

G: Evet o devamını soracaktım, kaç dilim pasta mı? Kaç pasta mı? Veya başka bir şey mi? Şu ifade uygun mu burası için?

ÖA6: Aslında kaç dilim pasta dediğimiz zaman, pastanın $\frac{1}{3}$ 'ü 1 dilim olur, o zaman burada 12 dilim pasta yenmiş gibi bir ifade çıkar sonucuna göre. O zaman burada yanlış, ne kadar pasta?

G: Senin demek istediğin o zaman o muydu, ne kadar pasta?

ÖA6: Evet.

G: Ne kadar pasta dersek o zaman ne olacak?

ÖA6: 4 pasta olmuş oluyor.

G: Yani şu işlemi yansıtıyor mu peki?

ÖA6: Burada bir şey eksik ama?

G: Sonuç olan dört demiştin sanırım o toplam dilim sayısı mı oluyor?

ÖA6: Hayır ne kadar pasta yediği oluyor, dilim sayısı dersek farklı sormuş oluyoruz.

Bu diyalog sonucunda ÖA6 problemde birim kargaşası yaşadığını farketmiştir ve “kaç dilim pasta” ifadesini “ne kadar pasta” olarak düzeltmiştir. ÖA6 bu iki ifadenin farklı sonuçlar ortaya koyacağını belirtmiştir. Bu durumda problemde her bir pastanın 3 dilim olduğuna ilişkin verilen bilgi gereksiz bir bilgi olmuştur yani işlemde yer almayan bir sayı ilave ederek bütünü çokluk olarak almıştır. ÖA6 görüşme esnasında kurduğu problemi düzeltmiştir ancak ÖA3 tam olarak düzeltememiştir. Buna göre ÖA6'nın öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin problem kurma bilgisinin ÖA3'e göre daha güçlü ancak ÖA2 ve ÖA5'inkinden daha zayıf olduğu söylenebilir.

4.2.1.2. Öğretim Süreci

Öğretmen adayları öğretim sürecine bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgileri zayıf bir şekilde başlamışlardır. Öğretim sürecinde bu bilginin geliştiği görülmüştür (Tablo 4.18). Bu tabloya göre öğretim sürecine zayıf bilgiyle başlamalarının etkisinin öğretim sürecine yansıdığı ve problem kurarken çeşitli zorluklar yaşadıkları görülmektedir. Öğretim sürecinde verilen alıştırmalar ve derslere paralel yapılan görüşmelerde verilen görevlerde yer alan modelin türüne göre ve bu görevlerde yer alan işlemlerin anlamlarına göre problem kurmada zorluk yaşamışlardır. Öğretim sürecinde öğretmen adaylarından en çok ÖA3'ün zorluk yaşadığı görülmektedir (Tablo 4.18.). Öğretim süresince öğretmen adayları bütünü çokluk olarak alma, bilgi ekleme, kesir sayısına doğal sayı anlamı yükleme, yetersiz bilgi ve bilinmeyen olmaması şeklinde zorluklar yaşadıkları tespit edilmiştir. Kesirlerle çarpma işleminin verildiği öğretim sürecinin sonuna doğru öğretmen adaylarının herhangi bir zorluk yaşamadan problem kurdukları görülmüştür.

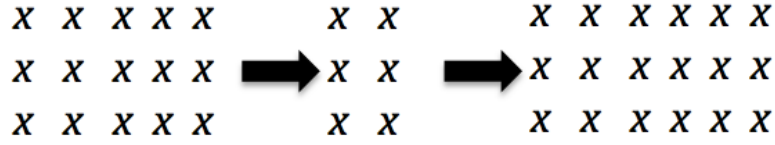
Tablo 4.18.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Çarpma İşlemi İçin Kurdukları Problemlere İlişkin Açıklamalar

Öğretmen Adayı	D1/A2 3 x 2/5 (Küme modeli)	2/3 x 6	D1/G2 2/3 x 2 (Dairesel alan modeli)	5 x 1/2
ÖA6	- İşlemi yansıtmayan problem - Oran yapısında problem - Bütünü çokluk olarak alma - Bilgi ekleme	- İşlemi yansıtan problem - Operatör anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Operatör anlamı	- İşlemi yansıtan problem "5 tane 1/2" anlamı
ÖA2	- İşlemi yansıtmayan problem - Bütünü çokluk olarak alma - Bilgi ekleme - Kesir sayısına doğal sayı anlamı yükleme	- İşlemi yansıtan problem - Operatör anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Operatör anlamı	- İşlemi yansıtan problem "5 tane 1/2" anlamı
ÖA4	- İşlemi yansıtan problem - Tekrarlı toplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Operatör anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Operatör anlamı	- İşlemi yansıtan problem "5 tane 1/2" anlamı - Eş grup yapısında
ÖA3	- İşlemi yansıtmayan problem - Birim kargaşası - Bilgi ekleme - Yetersiz bilgi	- İşlemi yansıtmayan problem - Operatör anlamı - Bilinmeyen olmaması	- İşlemi yansıtmayan problem - Operatör anlamı - Bilinmeyen olmaması	- İşlemi yansıtan problem "5'in 1/2'si" anlamı
ÖA5	Problem yok	- İşlemi yansıtan problem - Operatör anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Operatör anlamı	- İşlemi yansıtan problem "5 tane 1/2" anlamı
ÖA1	İşlemi yansıtmayan problem	- İşlemi yansıtan problem - Operatör anlamı	İşlemi yansıtmayan problem	- İşlemi yansıtan problem "5 tane 1/2" anlamı - Eş grup yapısında

Öğretim sürecinde ilk derste (D1) bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin bir öğretim gerçekleştirilmiştir. Bu derste (D1) verilen

alıştırmalarda (A2) birinci görevde küme modeli olarak X'ler dikdörtgeni verilmiştir (Şekil 4.67). Öğretmen adayları öncelikle verilen bu modele karşılık gelen işlemi doğru bir şekilde $3 \times 2/5$ olarak ifade etmişlerdir. Sonra bu işleme yönelik birer problem kurmuşlardır (Tablo 4.19).



Şekil 4.67. Alıştırmalar-2'de 1. görevde verilen model

Öğretmen adaylarının kurdukları problemler incelendiğinde ÖA4 hariç diğer öğretmen adaylarının verilen işlemi ve “3 tane $2/5$ ” anlamını yansıtan bir problem kuramadıkları görülmektedir. ÖA4 problemde işlemdeki $2/5$ kesrini operatör anlamını kullanarak 2 ile çarpma ve 5 ile bölme şeklinde vermiştir (Tablo 4.19). Problemde $2/5$ 'i “bir pakette bulunan pasta miktarı” ve 3'ü “3 paket” olarak ifade etmiştir. Burada ÖA4 her ne kadar $2/5$ kesrini operatör anlamı ile kullansa da işlemin tekrarlı toplama anlamını yansıtan bir problem kurmuştur. Buna göre ÖA4'ün bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin problem kurma bilgisinin ön-testten birinci derse geliştiği söylenebilir. Çünkü ön-testte $6 \times 2/3$ yerine $2/3 \times 6$ işlemini yansıtan problem kurarken burada doğru bir şekilde problem kurmuştur.

Tablo 4.19.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen Küme Modelinin İfade Ettiği $3 \times 2/5$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen küme modelinin ifade ettiği $3 \times 2/5$ işlemi için kurduğu problem
ÖA6	Bir masada 15 kişi oturmaktadır. Oturanların $2/5$ 'i bayandır. Aynı şekilde toplam 3 masamız vardır. Masalardaki tüm bayanlar tüm masalarda oturanların kaçta kaçındır?
ÖA2	15 kişilik 3 sınıf vardır. Her bir sınıftan $2/5$ kişi seçersek kaç kişi seçeriz?
ÖA4	5 eş parçaya bölünmüş bir pastanın 2 parçası alınıp paketleneyecektir. 3 paket yapıldığına göre ne kadar pastaya ihtiyacım var?
ÖA3	Ayşe'nin 15 tane elması vardır. Ayşe elmalarını 5 poşete eşit olarak paylaşmak istiyor. Ayşe elmalarını poşetlere koyduktan sonra poşetlerin $2/5$ 'ini kendisi alıyor. Geriye kalanını ise arkadaşı Müberra'ya veriyor. Ayşe daha sonra kalan elmalarının 3 katı olacak kadar elma alıyor. Ayşe'nin yaptıklarını işleme dökünüz.
ÖA5	-
ÖA1	Hafta içinde 2 gün okulda olan bir görevli 3 haftada kaç gün okulda olur?

ÖA1'in kurduğu problem modelin ifade ettiği $3 \times 2/5$ işleminden ziyade 3×2 işlemini yansıtan bir problemdir (Tablo 4.19). ÖA1'in burada $2/5$ kesrini bir hafta içindeki gün sayısının $2/5$ 'i yani 2 gün olarak ifade ettiği söylenebilir. Buradan kaç gün olduğu sorulduğunda problemin cevabını 3×2 işleminin sonucu vermektedir. Sonuç olarak ÖA1'in bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin problem kurma bilgisinin ön-

testten ilk derse halen gelişmediği ve zayıf olduğu söylenebilir. Ön-testte $6 \times \frac{2}{3}$ yerine $\frac{2}{3} \times 6$ işlemini yansıtan bir problem kurarken burada da işlemdeki $\frac{2}{5}$ kesrini doğru bir şekilde ifade edemediği için $3 \times \frac{2}{5}$ işlemini yansıtan bir problem kuramamıştır.

ÖA2, ÖA3 ve ÖA6 problemlerinde bir bütün yerine çokluk üzerinden hareket etmişlerdir ve $3 \times \frac{2}{5}$ işlemini yansıtan birer problem kuramamışlardır. Bunda verilen modelin etkisinin olduğu söylenebilir. Çünkü öğretmen adayları öğretim sürecine bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgileri zayıf bir şekilde başlamışlardır. Ayrıca öğretim sürecinde bu model türüyle de yeni tanışmışlardır. Bu yüzden her ne kadar modelin ifade ettiği işlemi doğru ifade etseler de bu modeli henüz tam olarak anlamlandıramamış olabilirler ve modelde 15 tane X olduğu için bir bütün yerine 15 bütün üzerinden hareket etmiş olabilirler. Buna göre modelin verilmesinin öğretmen adaylarının problem kurmasını zorlaştırdığı söylenebilir. Buna kanıt olarak ÖA2'nin ön-testte $6 \times \frac{2}{3}$ işlemi için doğru bir şekilde problem kurarken burada kuramaması gösterilebilir. ÖA2 burada kurduğu problemde (Tablo 4.19) kullandığı “ $\frac{2}{5}$ kişi” ifadesiyle $\frac{2}{5}$ kesrine doğal sayı anlamı yüklemiştir ancak burada bir sınıftaki öğrenci sayısının $\frac{2}{5}$ 'ini kastetmiş olabilir. Bu durumda ÖA2'nin kurduğu problem $\frac{2}{5} \times 3 \times 15$ işlemini yansıtır. ÖA6 ve ÖA3 de benzer şekilde bu işlemi yansıtan birer problem kurmuşlardır. ÖA3 probleminde bütünü çokluk olarak almanın yanısıra “15 elma 5 poşete konulacak” gibi gereksiz bir bilgi vermiştir ve problemde neyi sorduğunu ifade etmemiştir (Tablo 4.19). Bununla beraber ÖA3'ün hem “poşet” hem “elma” birimlerini kullanarak birim kargaşası yaşadığı söylenebilir. ÖA3'ün kurduğu problemde elmaların $\frac{2}{5}$ 'i mi yoksa poşetlerin $\frac{2}{5}$ 'i mi olduğu belirsizdir. ÖA6'nın ÖA3 ve ÖA2'den farklı olarak problem kurarken oran-orantıyı kullandığı görülmektedir (Tablo 4.19). ÖA6 burada problemin cevabını “masalardaki tüm bayanlar tüm masalarda oturanların kaçta kaçındır” şeklinde ifade etmiştir. Bu durumda bu

problemin ifade ettiği işlem $3 \times \frac{2}{5} \times 15$ 'tir.

Öğretmen adayları verilen model için problem kurmada zorlanırken işlem verildiğinde herhangi bir zorluk yaşamadıkları görülmüştür (Tablo 4.20). Aynı ders (D1) verilen aynı alıştırılmalarda (A2) yer alan $\frac{2}{3} \times 6$ işlemi için ÖA3 hariç diğer öğretmen adayları bu işlemi ve “6'nın $\frac{2}{3}$ 'ü” anlamını yansıtan birer problem kurmuşlardır (Tablo 4.20). ÖA3 ön-testteki problemine benzer şekilde burada da “bunların kaçta kaçındır” ifadesiyle problemin cevabını problemin içinde vermektedir (Tablo 4.20). Bu durumda bu problemin cevabının işlem yapmadan $\frac{2}{3}$ olduğu ifade edilebilir çünkü problemin içinde 6 pizzadan

her birinin $\frac{2}{3}$ 'ü olduğu verilmiştir. Buna göre ÖA3'ün bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin problem kurma bilgisinde henüz bir gelişme olmadığı ve diğer öğretmen adaylarına göre problem kurma bilgisinin oldukça zayıf olduğu söylenebilir.

Tablo 4.20.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $\frac{2}{3} \times 6$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen $\frac{2}{3} \times 6$ işlemi için kurduğu problem
ÖA6	Elimde 6 tane renkli boncuk var. Elimde bulunan boncuklarımın $\frac{2}{3}$ 'ü kaç boncuk eder?
ÖA2	6 pastanın $\frac{2}{3}$ 'ü yenip gerisi satılacaktır. Ne kadar yenir?
ÖA4	A şehrinden B şehrine giden Ali 6 depo benzin harcıyor. Yolun $\frac{2}{3}$ 'lük kısmında kaç litre benzin harcar?
ÖA3	6 pizzadan her birinin $\frac{2}{3}$ 'ü yenmiştir. Bunların kaçta kaçı yenmiştir?
ÖA5	6 arkadaş her biri 1'er tane çiğ köfte dürüm almışlardır. Ama her biri çiğ köftelerini yerken $\frac{2}{3}$ 'ünü bitirmiş ve tıkanmışlardır. Toplam ne kadar çiğ köfte yenmiştir?
ÖA1	Bir araba 6 km'lik yolun $\frac{2}{3}$ 'ünü almıştır. Kaç km yol gitmiştir?

Öğretmen adaylarının model verildiğinde problem kurmada zorlanırken burada sadece işlem verildiğinde zorluk yaşamamalarında modelin verilmemiş olmasının yanı sıra çarpmanın operatör anlamı için problem kuruyor olmalarının da etkisi olmuş olabilir. Buna göre öğretmen adaylarının bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinin bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine göre daha güçlü olduğu söylenebilir. Bunu ilk derse paralel yapılan görüşmede (G2) verilen dairesel alan modeli (Şekil 4.68) için problem kurarken herhangi bir zorluk yaşamamaları ve ÖA4'ün bu görüşmede $2 \times \frac{2}{3}$ mü yoksa $\frac{2}{3} \times 2$ işlemi için mi problem kurmanın daha kolay olduğu sorulduğunda yaptığı şu açıklama desteklemektedir: “Bence 2'nin $\frac{2}{3}$ 'ü daha kolay. Neden çünkü günlük hayata daha yakın olduğunu düşünüyorum.” Öğretmen adayları daha önce verilen X'ler dikdörtgeninin ifade ettiği $3 \times \frac{2}{5}$ işlemini doğru ifade etseler de problemini kurmakta zorlanmışlardır ve bu işlemi yansıtan problem kuramamışlardır, burada ise doğru bir şekilde problem kurabilmişlerdir.



Şekil 4.68. Görüşme-2'de 1. görevde verilen model

Öğretmen adayları öncelikle bu görüşmede (G2) verilen modele karşılık gelen işlemi doğru bir şekilde $\frac{2}{3} \times 2$ olarak ifade etmişlerdir, sonra bu işlem için birer problem kurmuşlardır (Tablo 4.21). Öğretmen adaylarının kurdukları problemler incelendiğinde ÖA3 ve ÖA1 hariç diğer öğretmen adaylarının verilen modelin ifade ettiği $\frac{2}{3} \times 2$ işlemini ve “2'nin $\frac{2}{3}$ 'ü” anlamını yansıtan birer problem kurdukları görülmektedir (Tablo 4.21). ÖA4 hariç

diğer öğretmen adayları X'ler dikdörtgeni verildiğinde problem kurmada zorluk yaşarken burada dairesel alan modeli verildiğinde ÖA3 ve ÖA1 hariç diğerleri herhangi bir zorluk yaşamamışlardır. Bununla beraber verilen X'ler dikdörtgeninin çarpmanın tekrarlı toplama anlamını yansıtan bir model olması ve bu anlamı yansıtan bir problem kuracak olmaları da problem kurarken zorluk yaşamalarında etkili olmuş olabilir. Buna göre öğretmen adaylarının verilen model için problem kurarken zorlanmalarının model türüne ve modelin çarpmanın tekrarlı toplama veya operatör anlamını yansıtmasına göre değiştiği söylenebilir.

Tablo 4.21.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen Dairesel Alan Modelinin İfade Ettiği $\frac{2}{3} \times 2$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen dairesel alan modelinin ifade ettiği $\frac{2}{3} \times 2$ işlemi için kurduğu problem
ÖA6	İki pastamız var, her pastanın $\frac{2}{3}$ 'ü yenmiştir. Toplamda ne kadar pasta yenmiştir?
ÖA2	İki tane pizzamız vardır, bu iki pizzanın $\frac{2}{3}$ 'ünü misafirler yemiştir. Misafirler pizzanın ne kadarını yemiştir?
ÖA4	Kapıcı Kemal Bey suyu kesilen apartmana su verecektir. Tankerinde 2 ton su vardır. Kemal Bey su tankerindeki suyun $\frac{2}{3}$ 'ünü kullanmıştır. Kemal Bey kaç ton su kullanmıştır?
ÖA3	2 tane pizzam var, $\frac{2}{3}$ 'ünü yiyorum. Ne kadarını yemiş olurum?
ÖA5	2 arkadaş her biri kendisine bir pizza alıyor. İkisi de pizzalarının $\frac{2}{3}$ 'ünü yedikten sonra doyuyorlar. Toplam ne kadar pizza yenmiştir?
ÖA1	İki ekmeği 3 kişi 2 günde ne kadarını yer?

ÖA5'in bu görüşmede (G2) $\frac{2}{3} \times 2$ işlemine göre $2 \times \frac{2}{3}$ işlemi için problem kurmada zorlandığı görülmüştür. Bu da bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinin daha güçlü olduğuna kanıt olarak gösterilebilir. ÖA5 ile buna ilişkin geçen diyalog şöyledir (G2, ÖA5, 24/03/2015, 87-104):

G: Peki bunun için problem kurmak daha mı karmaşık, zorlayıcı geldi ($2 \times \frac{2}{3}$ işlemini kastediyorum)?

ÖA5: Bana öyle geldi, bilmiyorum bu daha kolay geldi ($\frac{2}{3} \times 2$ işleminin problemini gösteriyor).

G: Modelleme hangisi için daha kolay?

ÖA5: Modelleme de bunun modellemesi daha kolay geldi ama ($2 \times \frac{2}{3}$ işlemi için çizdiği modeli gösteriyor). Şimdi çoğalacak ya nasıl çoğaltacağım ben bunu ($2 \times \frac{2}{3}$ işleminin modelini göstererek problemini düşünüyor). $\frac{2}{3}$ bir şey var, 2 tane olması için problem işte. Ne diyeyim, $\frac{2}{3}$ pizza var, sonra bir arkadaş ama 2 ile çarpmak var. Dün yaptığımız gibi de hatırlayamıyorum ki (önceki gün gerçekleştirilen ilk dersi kastediyor). $\frac{2}{3}$ pizza var bir arkadaşın elinde, sonra bir arkadaşı da onun gibidir hani elinde $\frac{2}{3}$ pizza vardır. Beraber yiyeceklerdir, ellerinde toplam ne kadar pizza vardır.

G: Peki az önceki problemden farklı mı ($\frac{2}{3} \times 2$ işlemi için kurduğu problemi kastediyorum)?

ÖA5: Evet farklı. Bunda iki bütün pizza var ($\frac{2}{3} \times 2$ işleminin problemini kastediyor). Pizzaların $\frac{2}{3}$ 'ünü yiyorlar, ne kadar pizza yediklerini soruyoruz burada. Öbüründe başta $\frac{2}{3}$ var ($2 \times \frac{2}{3}$ işleminin problemini kastediyor). $\frac{2}{3}$ bütün var. Buradan yola çıkarsak. Bir tane $\frac{2}{3}$ bütün var, ondan 2 tane.

G: $\frac{2}{3}$ bütün diyerek ne demek istiyorsun?

ÖA5: Bir bütünün $\frac{2}{3}$ 'ü yani. Ondan bir tane var, bir bütünün $\frac{2}{3}$ 'ü var elimizde başta. Bundan 2 tane var, 2 ile çarpmak bu demek oluyor burada. Elleri ne kadar pizza oldu? Bence bu problem uygun oldu.

ÖA2 ve ÖA6 da ÖA4 ve ÖA5'in kurdukları problemler gibi $\frac{2}{3} \times 2$ işlemi için zorlanmadan birer problem kurmuşlardır (Tablo 4.21). ÖA3 ve ÖA1 ise bu işlem için

problem kurmakta zorlanmışlar ve işlemi yansıtan problem kuramamışlardır. ÖA3 daha önce verilen işlemler için kurduğu problemlerde olduğu gibi burada da yine problemin cevabını problemin içinde vermiştir (Tablo 4.21). Buna göre “ne kadarını yemiş olurum” ifadesine karşılık gelen cevabın işlem yapmadan $2/3$ olduğu söylenebilir çünkü problemde 2 pizzanın $2/3$ ’ünün yenildiği verilmiştir. ÖA3 burada verilen modelin ifade ettiği işlem için $2 \times 2/3$ ve $2/3 \times 2$ işlemleri arasında ikilemede kalmıştır. Sonra problem kurması istendiğinde “2 tane pizzanın $2/3$ ’ü” olarak ifade edip “*2 tane pizzam var, işte $2/3$ ’ünü yiyorum. Ne kadarını yemiş olurum?*” şeklinde problem kurmuştur ve bu problemin $2/3 \times 2$ işlemi için olduğuna işaret etmiştir. Daha sonra $2 \times 2/3$ işlemi için de problem kurması istendiğinde yine ikileme düşmüştür ve bu kurduğu problemin $2 \times 2/3$ işlemi için uygun olduğunu ifade etmiştir. Burada bu iki işlemin farkını verilen modelin ikinci basamağını göstererek şöyle açıklamıştır: “*2 tane elmanın mesela ikisinin de $2/3$ ’ü yeniyor gibi. 2 tane $2/3$ oluyor elimde, o geliyor aklıma ama diğerinde 2’nin $2/3$ ’ü. 2’yi bir tane bütün alıp onun $2/3$ ’ü gibi.*” Bu açıklamasına göre ÖA3’ün her iki işlem için ortak olan ikinci basamakta çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini göz ardı ettiği için ikileme düştüğü söylenebilir. Bu yüzden $2/3 \times (1 + 1) = 2/3 \times 2$ olduğunu yani her bir bütünün $2/3$ ’ünü alma ile 2 bütünün $2/3$ ’ünü almanın aynı olduğunu göremediği söylenebilir. Bunun yanısıra verilen modelin ilk basamağında kaç bütünün verildiğini de gözardı etmektedir. Tüm bunlar ÖA3’ün bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin model bilgisinin zayıf olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla ÖA3 verilen modelin ifade ettiği işlemi belirlemekte zorlanmaktadır ve buna bağlı olarak problem kurmakta da zorlandığı söylenebilir. ÖA3 burada $2 \times 2/3$ işlemine göre $2/3 \times 2$ işlemi için problem kurmada daha fazla zorlandığını şu şekilde açıklamıştır: “*Hani diğerinde direk 2 sepet diyebiliyorum ama bunda işin içine bir kesir karıştığı için, grup kısmına o yüzden biraz daha zorlayıcı oluyor.*” Buna göre ÖA3’ün çarpmanın operatör anlamına ilişkin problem kurma bilgisinin ön-testten ikinci görüşmeye gelişmediği ve halen zayıf olduğu söylenebilir.

ÖA1 de ÖA3 gibi verilen modelin ifade ettiği işlemi belirlemekte oldukça fazla zorlanmıştır. Buna bağlı olarak problem kurarken de zorluk yaşamıştır ve işlemi yansıtan bir problem kuramamıştır (Tablo 4.21). ÖA1’in daha önce verilen işlemler için çarpmanın operatör anlamını yansıtan problemler kurarken burada kuramaması bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin model bilgisinin zayıf olması ile açıklanabilir. Bunu burada

verilen modelin ifade ettiği işlemi belirlerken $2 \times \frac{2}{3}$ ve $\frac{2}{3} \times 2$ işlemleri arasında ikilem yaşaması desteklemektedir.

Öğretmen adaylarının çarpmanın tekrarlı toplama anlamı için model verildiğinde problem kurmada zorlandığı bu durum ikinci görüşmede (G2) verilen $5 \times \frac{1}{2}$ işlemi için problem kurarken görülmemiştir. Bu da modelin verilmesinin problem kurmayı zorlaştırdığını desteklemektedir. Daha önce model verildiğinde modelin ifade ettiği $3 \times \frac{2}{5}$ işlemi için ÖA4 hariç diğer öğretmen adayları problem kuramazken burada ÖA3 hariç diğer öğretmen adayları verilen $5 \times \frac{1}{2}$ işlemini ve “5 tane $\frac{1}{2}$ ” anlamını yansıtan birer problem kurmuşlardır (Tablo 4.22). Buna göre öğretmen adaylarının ön-testten ikinci görüşmeye bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinin geliştiği söylenebilir.

Tablo 4.22.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $5 \times \frac{1}{2}$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen $5 \times \frac{1}{2}$ işlemi için kurduğu problem
ÖA6	5 tane yarım elmam var. Toplamda ne kadar elmam vardır?
ÖA2	Yarım ekmek dürüm satan bir iş yerine 5 kişi gelmiştir, ne kadar ekmek tüketmiştir?
ÖA4	Kamil ve ekibi inşaatta çalışmaktadır. Her biri bir kalıbın yarısını tek başına yukarı çıkarmaktadır. Kamil ve ekibi 5 kişi olduğuna göre ve her biri görevini yerine getirdikten sonra yukarıda kaç tane kalıp olur?
ÖA3	Selin 5 bardak meyve suyunun, her bir bardağının $\frac{1}{2}$ 'sini içiyor. Selin kaç bardak meyve suyu içmiştir?
ÖA5	Ayşe'nin elinde $\frac{1}{2}$ kağıt vardır. Dört arkadaşında daha $\frac{1}{2}$ kağıt vardır. Elleriinde toplam ne kadar kağıt vardır?
ÖA1	Bir çocuk günde yarım ekmek yiyor. 5 günde kaç ekmek yer?

ÖA3 burada verilen işlem yerine $\frac{1}{2} \times 5$ işlemini ve “5'in $\frac{1}{2}$ 'si” anlamını yansıtan bir problem kurmuştur (Tablo 4.22). Buna göre ÖA3'ün burada çarpmanın tekrarlı toplama ve operatör anlamına ilişkin bir ikilem yaşadığı söylenebilir. Bu ikilemin ikinci derse (D2) paralel yapılan görüşmede (G2) verilen $6 \times \frac{1}{3}$ işlemi için problem kurarken ortadan kalktığı görülmüştür. ÖA3 bu işlem için şöyle bir problem kurmuştur: “Bir pizzanın $\frac{1}{3}$ 'ü kadar olan bir dilim pizzam var, o büyüklükte 6 tane dilimim var. Bunların hepsini yersem kaç pizza yemiş olurum?” ÖA3'ün bu problemi incelendiğinde verilen işlemi ve “6 tane $\frac{1}{3}$ ” anlamını yansıtan bir problem olduğu görülmektedir.

4.2.1.3. Son Durum

Öğretmen adayları öğretim süresince bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin problem kurarken çeşitli zorluklar yaşasalar da öğretimin

sonunda problem kurma bilgilerinin geliştiği görülmüştür. Bu durum ön-test ve son-testte kurdukları problemler karşılaştırıldığında açık bir şekilde görülmektedir (Tablo 4.24). Ön-testte $6 \times \frac{2}{3}$ yerine $\frac{2}{3} \times 6$ işlemini yansıtan veya işlemi yansıtmayan problemler kurmuşlardır ve bununla beraber “birim kargaşası”, “bilinmeyen olmaması”, “bütünü çokluk olarak alma” gibi zorluklarla karşılaşmıştır. Son-testte ise öğretmen adaylarının hiçbir zorluk yaşamadan verilen $6 \times \frac{2}{3}$ işlemini ve “6 tane $\frac{2}{3}$ ” anlamını yansıtan birer problem kurdukları görülmektedir (Tablo 4.23).

Tablo 4.23.

Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde $6 \times \frac{2}{3}$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen $6 \times \frac{2}{3}$ işlemi için kurduğu problem	Problemın ifade ettiği anlam ve karşılaşılan zorluklar
ÖA6	1 litrelik şişenin $\frac{2}{3}$ 'ü su doludur. Bu şekilde 6 tane şişede kaç litre su vardır?	• İşlemi yansıtan problem • Tekrarlı toplama anlamı
ÖA2	6 kişi bir kafeye gidip birer pasta söylüyor. Her biri pastalarının $\frac{2}{3}$ 'ünü yiyor, ne kadar pasta yenmiştir?	• İşlemi yansıtan problem • Tekrarlı toplama anlamı
ÖA4	Bir litre kapasiteye sahip bir su şişesinin $\frac{2}{3}$ 'ü suyla doludur. Ahmet bu şişelerden 6 tane almıştır. Ahmet'in toplam kaç litre su aldığını bulalım.	• İşlemi yansıtan problem • Tekrarlı toplama anlamı
ÖA3	Bir pasta yapmak için bir poşet pudingin $\frac{2}{3}$ 'ü gerekmektedir. Elif doğumgünü partisi için 6 tane pasta yapmak istiyor. Elif'e ne kadar puding gerekir?	• İşlemi yansıtan problem • Tekrarlı toplama anlamı • Eş grup yapısında
ÖA5	İçinde $\frac{2}{3}$ kg un olan çuvalardan 6 tane vardır. Toplam kaç kg un vardır?	• İşlemi yansıtan problem • Tekrarlı toplama anlamı
ÖA1	Bir araç bir günde $\frac{2}{3}$ km yol alıyor. 6 günde aldığı toplam yol kaç km?	• İşlemi yansıtan problem • Tekrarlı toplama anlamı • Eş grup yapısında

KÇB ön-testinde problem kurmada zorluk yaşayanlardan birisi olan ÖA6 öğretimden sonra uygulanan KÇB son-testinde verilen $6 \times \frac{2}{3}$ işlemi için şöyle bir problem kurmuştur: “*1 litrelik şişenin $\frac{2}{3}$ 'ü su doludur. Bu şekilde 6 tane şişede kaç litre su vardır?*” ÖA6'nın bu problemi incelendiğinde verilen işlemi ve “6 tane $\frac{2}{3}$ ” anlamını tam olarak yansıtan bir problem kurduğu görülmektedir. Son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) ÖA6 bu problemi nasıl kurduğunu şöyle açıklamıştır: “*Şimdi burada 6 çarpı $\frac{2}{3}$ kesri 6 tane $\frac{2}{3}$ 'ü ifade etmektedir. Hani problemimi de ona göre kurdum. Bir şişenin $\frac{2}{3}$ 'ü doludur, 6 şişe olursa yani bir litrelik şişenin $\frac{2}{3}$ 'ü $\frac{2}{3}$ litre ya, 6 tane şişe, aynı şekilde 6 şişe olursa toplam kaç litre su vardır şeklinde düşündüm.*” ÖA6 ön-testte kurduğu problemde bir bütün yerine çokluk üzerinden hareket etmiştir ve birim kargaşası yaşamıştır. ÖA6 son-testte kurduğu problemde herhangi bir zorluk yaşamamıştır. Buna göre ÖA6'nın bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin problem kurma bilgisinin ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir.

Sonuç olarak öğretmen adaylarının bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinin öğretimden önce zayıf olduğu ve öğretim sürecinde problem kurarken çeşitli zorluklar yaşadıkları ancak öğretimin sonunda bu bilgilerinin geliştiği görülmüştür. Bu gelişim Tablo 4.24’de verilmiştir. Bu tablo öğretmen adaylarının ön-testte, öğretim sürecinde ve son-testte kurdukları problemlerin birarada verilmiş hali olarak sunulmuştur. Bu tabloya göre problem kurmada en çok zorluk yaşayan öğretmen adayının ÖA3 olduğu görülmektedir. ÖA3’ün bu kadar zorlanması çarpmanın iki anlamına ilişkin anlamasının derin olmaması ile açıklanabilir. Zira öğretim süresince bu iki anlama ilişkin ikilem yaşadığı görülmüştür. ÖA1’in de modelin verildiği durumlarda uygun problem kuramadığı görülmektedir. Bu da ÖA1’in bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin model çizme bilgisinin derin olmaması ile açıklanabilir. Öyle ki model verilmediğinde verilen işleme uygun problem kurabilmiştir. Öğretmen adaylarının kurdukları problemlerinde çoğunlukla “bütünü çokluk olarak alma”, “birim kargaşası” ve “bilinmeyen olmaması” gibi zorluklarla karşılaşmıştır. Öğretmen adaylarının problem kurmasını modelin verilmesinin zorlaştırdığı ancak bu zorluğun modelin türüne ve modelin yansıttığı çarpmanın anlamına göre değiştiği görülmüştür. Buna kanıt olarak küme modeli verildiğinde problem kurmada zorlanırken, dairesel alan modeli verildiğinde daha az zorluk yaşamaları ve model verilmeden sadece işlem verildiğinde neredeyse hiç zorluk yaşamamaları kanıt olarak gösterilebilir. Öğretmen adaylarının kurdukları problemler incelendiğinde problemin bağlamını verilen modelin türünün etkilediği söylenebilir. Burada dairesel alan modeli verildiğinde “pasta” veya “pizza” kullanmaları ve X’ler dikdörtgeni modeli verildiğinde X’lerin sayısını ele alarak “15 kişi” veya “15 elma” şeklinde problemler kurmaları buna kanıt olarak gösterilebilir. Öğretmen adaylarından sadece ÖA4’ün modelden bağımsız olarak problem kurduğu görülmüştür. Bu durum ÖA4’ün öğretim sürecine problem kurma bilgisi yüksek bir şekilde başlaması ve öğretim sürecinde diğer öğretmen adaylarına göre problem kurma bilgisinin daha güçlü olması ile açıklanabilir. Bunun yanı sıra görüşmeler esnasında günlük yaşamında çoğu durumu problem kurarak açıkladığını belirtmesi, problem kurmaya ayrı bir ilgisinin olduğunu ve özel ders verdiğini belirtmesi de problem kurmaya ilişkin deneyiminin diğer öğretmen adaylarına göre daha fazla olduğunu göstermektedir.

Tablo 4.24.

Öğretmen Adaylarının Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Çarpma İşlemine İlişkin Problem Kurma Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo

Öğretmen Adayı	Ön-test/G1	Öğretim Süreci/G2				Son-test/G8
	6 x 2/3	3 x 2/5 (Küme modeli)	2/3 x 6	2/3 x 2 (Dairesel alan modeli)	5 x 1/2	6 x 2/3
ÖA6	- İşlemi yansıtmayan problem - Bütünü çokluk olarak alma - Birim kargaşası - Bilgi ekleme	- İşlemi yansıtmayan problem - Oran yapısında problem - Bütünü çokluk olarak alma - Bilgi ekleme	- İşlemi yansıtan problem “6’nın 2/3’ü” anlamı	- İşlemi yansıtan problem “2’nin 2/3’ü” anlamı	- İşlemi yansıtan problem “5 tane 1/2” anlamı	- İşlemi yansıtan problem “6 tane 2/3” anlamı
ÖA2	- İşlemi yansıtan problem “6 tane 2/3” anlamı	- İşlemi yansıtmayan problem - Bütünü çokluk olarak alma - Bilgi ekleme - Kesir sayısına doğal sayı anlamı yükleme	- İşlemi yansıtan problem “6’nın 2/3’ü” anlamı	- İşlemi yansıtan problem “2’nin 2/3’ü” anlamı	- İşlemi yansıtan problem “5 tane 1/2” anlamı	- İşlemi yansıtan problem “6 tane 2/3” anlamı
ÖA4	- İşlemi yansıtan problem “6’nın 2/3’ü” anlamı	- İşlemi yansıtan problem “3 tane 2/5” anlamı	- İşlemi yansıtan problem “6’nın 2/3’ü” anlamı	- İşlemi yansıtan problem “2’nin 2/3’ü” anlamı	- İşlemi yansıtan problem “5 tane 1/2” anlamı - Eş grup yapısında	- İşlemi yansıtan problem “6 tane 2/3” anlamı
ÖA3	- İşlemi yansıtmayan problem “6’nın 2/3’ü” anlamı - Bilinmeyen olmaması	- İşlemi yansıtmayan problem - Birim kargaşası - Bilgi ekleme - Yetersiz bilgi	- İşlemi yansıtmayan problem “6’nın 2/3’ü” anlamı - Bilinmeyen olmaması	- İşlemi yansıtmayan problem “2’nin 2/3’ü” anlamı - Bilinmeyenin olmaması	- İşlemi yansıtan problem “5’in 1/2’si” anlamı	- İşlemi yansıtan problem “6 tane 2/3” anlamı - Eş grup yapısında
ÖA5	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında “6 tane 2/3” anlamı	Problem yok	- İşlemi yansıtan problem “6’nın 2/3’ü” anlamı	- İşlemi yansıtan problem “2’nin 2/3’ü” anlamı	- İşlemi yansıtan problem “5 tane 1/2” anlamı	- İşlemi yansıtan problem “6 tane 2/3” anlamı
ÖA1	- İşlemi yansıtan problem - Oran yapısında “6’nın 2/3’ü” anlamı	İşlemi yansıtmayan problem	- İşlemi yansıtan problem “6’nın 2/3’ü” anlamı	İşlemi yansıtmayan problem	- İşlemi yansıtan problem “5 tane 1/2” anlamı - Eş grup yapısında	- İşlemi yansıtan problem “6 tane 2/3” anlamı - Eş grup yapısında

4.2.2. İki Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Problem Kurma Bilgisi

4.2.2.1. Başlangıç Durumu

Öğretmen adaylarının öğretimden önce iki kesrin çarpma işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinin bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemindeki gibi zayıf olduğu görülmüştür (Tablo 4.25). Öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde verilen $1/2 \times 2/5$ işlemi için öğretmen adaylarının bazıları verilen işlem yerine tersini yansıtan, bazıları da işlemi yansıtmayan problemler kurmuşlardır. Öğretmen adaylarının hiçbiri bu işlemi ve “ $2/5$ ’in $1/2$ ’si” anlamını yansıtan bir problem kuramamışlardır (Tablo 4.25).

Tablo 4.25.

Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde $1/2 \times 2/5$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen $1/2 \times 2/5$ işlemi için kurduğu problem	Problem ifade ettiği anlam ve karşılaşılan zorluklar
ÖA6	Babam tarlasının yarısını abime, yarısını bana verdi. Abim tarlasının $2/5$ ’ine ağaç dikti. Abim tarlanın ne kadarına ağaç dikmiştir?	• İşlemin tersini yansıtan problem ($2/5 \times 1/2$ işlemi yansıtıyor.)
ÖA2	Selin Hoca’nın tezi için sınıfın yarısı gönüllü olmuştur. 40 kişilik sınıftan Selin Hoca bu gönüllülerin içinden $2/5$ ’ini seçecektir. Kaç kişi seçer?	• İşlemi yansıtmayan problem ($2/5 \times 1/2 \times 40$ işlemi yansıtıyor.) • Bütünü çokluk olarak alma
ÖA4	Kaan’ın annesi, Kaan’ın bayramda topladığı harçlıkları hemen harcamaması için belli miktarlara bölerek gün-gün verme kararı almıştır. Annesi her gün bu paranın yarısının $2/5$ ’ini verecektir. Bu durumda Kaan her gün bütün parasının kaçta kaçını almıştır?	• İşlemin tersini yansıtan problem ($2/5 \times 1/2$ işlemi yansıtıyor.)
ÖA3	Nuri elindeki paraların önce $1/2$ ’sini sonra geriye kalan parasının $2/5$ ’ini harcamıştır. Nuri parasının kaçta kaçını harcamıştır?	• İşlemi yansıtmayan problem ($1/2 + (2/5 \times 1/2)$ işlemi yansıtıyor.)
ÖA5	İzmir’den kalkan Manisa’ya giden bir otobüsteki yolcuların $1/2$ ’si yol üzerinde bir durakta inmiştir. Geri kalan yolcuların $2/5$ ’i de Manisa’ya gelmeden bir durakta daha inmiştir. Manisa’ya İzmir’den binen yolcuların ne kadarı inmiştir?	• İşlemi yansıtmayan problem ($1/2 + (2/5 \times 1/2)$ işlemi yansıtıyor.)
ÖA1	5 arkadaş 2 paket sütü herkes süt almak kaydıyla 2 günde bitirebiliyor. Bir günde 1 çocuk paketin kaçta kaçını içmiştir?”	• İşlemi yansıtmayan problem

ÖA6 ve ÖA4’ün problemleri incelendiğinde verilen işlem yerine tersini yani $2/5 \times 1/2$ işlemi yansıtan birer problem kurdukları görülmektedir (Tablo 4.25). Burada her ne kadar verilen işlemin tersini yansıtan birer problem kursalar da herhangi bir zorlukla karşılaşmamışlardır. Öğretmen adaylarının $1/2 \times 2/5$ yerine $2/5 \times 1/2$ işlemi yansıtan birer problem kurmaları öğretimden önce kesirlerle çarpmanın tanımına ilişkin kavramsal anlamaya sahip olmamaları ile açıklanabilir. Bu yüzden bu işlemi yazıldığı gibi soldan sağa doğru “ $1/2$ ’nin $2/5$ ’i” şeklinde okuyup ona göre problem kurdukları söylenebilir. Benzer durum model çizerken de görülmüştür. ÖA2 probleminde ÖA6 ve ÖA4 gibi “ $2/5$ ’in $1/2$ ’si” anlamını ele almıştır ancak onlarınkinden farklı olarak işlemde yer almayan

bir sayı ilave ederek bir bütün yerine çokluk üzerinden hareket etmiştir (Tablo 4.25). Buna göre ÖA2'nin problemi $1/2 \times 2/5$ yerine $2/5 \times 1/2 \times 40$ işlemini yansıtan bir problemidir.

ÖA3 ve ÖA5 diğerlerinden farklı olarak verilen $1/2 \times 2/5$ işlemi yerine bu işleme bir basamak daha ekleyerek $1/2 + (2/5 \times 1/2)$ işlemini yansıtan birer problem kurmuşlardır (Tablo 4.25). Buna göre ÖA3 ve ÖA5'in öğretimden önce iki kesrin çarpma işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinin zayıf olduğu söylenebilir. ÖA1'in probleminde verilen işlemdeki ne $1/2$ ne de $2/5$ yer almaktadır (Tablo 4.25). Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) ÖA1 kurduğu problemi açıklarken her gün içilen süt miktarının eşit olduğunu ve her bir kişinin eşit miktarda süt içtiğini belirtmiştir. Bu durumda 1 çocuğun bir günde bir paket sütün $1/5$ 'ini içtiğine $1/2 \times 1/5 \times 2$ işlemi ile ulaşılabilir. Burada ÖA1'in $2/5$ kesrini bölme anlamını kullanarak 2 paket sütün 5 kişiye eşit olarak bölünmesi, $1/2$ kesrini yine bölme anlamını kullanarak bir kişinin içtiği süt miktarını 2 güne eşit olarak bölme şeklinde ele aldığı ve bu problemi işlemde ziyade işlemin sonucunu göz önüne alarak kurduğu söylenebilir. Bunu ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) yaptığı şu açıklama desteklemektedir: *“5 arkadaş var, 2 günde bitirecekler bunlar, 2 paket süt var, şimdi problemden bağımsız olarak yine bakınca 5 arkadaş var, 2 paket sütü eşit içiyorlar, $2/5$ olmuş oluyor. 2 günde, tekrar ikiye böleceğim, ben bir paketi bir bütün olarak düşünmemişim, o zaman iki paketi mi düşünmüştüm? Ben problemi şey yazmışım. 5 arkadaş iki paket sütü herkes eşit almak kaydıyla 2 günde bitirebiliyor, 5 arkadaş iki paket sütü, bir günde bir çocuk paketin kaçta kaçını içmiştir. Ben herhalde şey almışım, bir günde bir paket süt içiliyor, hatta çocuklar da eşit süt içiyor. Ondan sonra yarım çarpı iki kişi var, iki günde pardon beş tane çocuk ne kadarını içer diye düşünmüştüm. Hani çözüme odaklı yazmışım biraz soruyu.”* Buna göre ÖA1'in öğretimden önce iki kesrin çarpma işlemine ilişkin problem kurma bilgisinin diğer öğretmen adaylarına göre oldukça zayıf olduğu söylenebilir.

4.2.2.2. Öğretim Süreci

Öğretmen adayları öğretim sürecine bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemindeki gibi iki kesrin çarpma işlemine ilişkin problem kurma bilgileri de zayıf bir şekilde başlamışlardır ancak öğretim sürecinde daha az zorluk yaşamışlardır. Öğretimin sonunda öğretmen adaylarının iki kesrin çarpma işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinde gelişim olduğu görülmüştür (Tablo 4.26). Bu tabloya göre verilen küme modeli için problem kurmada öğretmen adaylarının hepsi zorluk yaşarlarken verilen diğer işlemler için

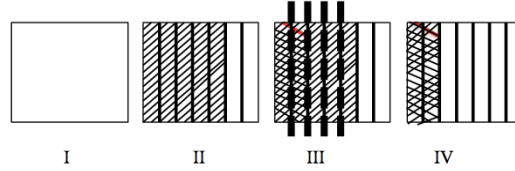
herhangi bir zorluk yaşamadıkları görülmektedir. Bu da bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işleminde görülen verilen modelin türüne göre modelin verilmesinin öğretmen adayının problem kurmasını zorlaştırması durumunu desteklemektedir. Öğretim sürecinde iki kesrin çarpma işlemine ilişkin problem kurarken daha az zorluk yaşamalarında bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinin gelişiminin etkisi olduğu söylenebilir. Zira iki kesrin çarpma işlemine ilişkin öğretim bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin öğretimden sonra yapılmıştır.

Tablo 4.26.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde İki Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Kurdukları Problemlere İlişkin Açıklamalar

Öğretmen Adayı	D2/A3 2/5 x 5/7 (Dikdörtgensel alan modeli)	D2/A4 3/5 x 3/8 (Küme modeli)	D2/G3 2/7 x 3/5 (Dikdörtgensel alan modeli)	1/2 x 5/6	D6/G7 4/5 x 5/9 (Kesir çubuğu modeli)
ÖA6	- İşlemi yansıtan problem “5/7’nin 2/5’i” anlamı	İşlemi yansıtmayan problem (3/5 x (3/8 x 40)) / 40 işlemini yansıtıyor.) - Oran yapısında Bütünü çokluk olarak alma Bilgi ekleme	- İşlemi yansıtan problem “3/5’in 2/7’si”	- İşlemi yansıtan problem “5/6’nın 1/2’si”	- İşlemi yansıtan problem “5/9’un 4/5’i”
ÖA2	- İşlemi yansıtan problem “5/7’nin 2/5’i” anlamı	İşlemi yansıtmayan problem (3/5 x (3/8 x 40)) / 40 işlemini yansıtıyor.) - Oran yapısında Bilgi ekleme Bütünü çokluk olarak alma	- İşlemi yansıtan problem “3/5’in 2/7’si”	- İşlemi yansıtan problem “5/6’nın 1/2’si”	- İşlemi yansıtan problem “5/9’un 4/5’i”
ÖA4	- İşlemi yansıtan problem “5/7’nin 2/5’i” anlamı - Oran yapısında	İşlemi yansıtmayan problem (3/5 x (3/8 x 40)) / 40 işlemini yansıtıyor.) - Oran yapısında Bilgi ekleme Bütünü çokluk olarak alma	- İşlemi yansıtan problem “3/5’in 2/7’si” - Oran yapısında	- İşlemi yansıtan problem “5/6’nın 1/2’si”	- İşlemi yansıtan problem “5/9’un 4/5’i”
ÖA3	- İşlemi yansıtan problem “5/7’nin 2/5’i” anlamı	Problem yok	- İşlemi yansıtan problem “3/5’in 2/7’si”	- İşlemi yansıtan problem “5/6’nın 1/2’si”	- İşlemi yansıtan problem “5/9’un 4/5’i”
ÖA5	Problem yok	Problem yok	- İşlemi yansıtan problem “3/5’in 2/7’si”	- İşlemi yansıtan problem “5/6’nın 1/2’si”	- İşlemi yansıtan problem “5/9’un 4/5’i”
ÖA1	- İşlemi yansıtan problem “5/7’nin 2/5’i” anlamı	- İşlemi yansıtan problem “3/8’in 3/5’i”	- İşlemi yansıtan problem “3/5’in 2/7’si”	- İşlemi yansıtan problem “5/6’nın 1/2’si”	- İşlemi yansıtan problem “5/9’un 4/5’i”

İkinci derste (D2) iki kesrin çarpma işlemine ilişkin bir öğretim gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adayları bu derste (D2) verilen alıştırmalarda (A3) yer alan dikdörtgensel alan modelinin (Şekil 4.69) ifade ettiği $2/5 \times 5/7$ işlemi için birer problem kurmuşlardır. Öğretmen adaylarının problemleri incelendiğinde bu işlemi ve “ $5/7$ ’nin $2/5$ ’i” anlamını yansıtan birer problem oldukları görülmektedir (Tablo 4.27).



Şekil 4.69. Alıştırmalar-3’te 1. görevde verilen model

Ön-testte öğretmen adayları verilen $1/2 \times 2/5$ yerine $2/5 \times 1/2$ işlemi yansıtan problem kurarlarken, bununla beraber bütünü çokluk olarak alırlarken ve işleme bir basamak daha eklerlerken burada işlemi yansıtan birer problem kurabilmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin çarpma işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinin ön-testten ikinci derse geliştiği söylenebilir.

Tablo 4.27.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $2/5 \times 5/7$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen dikdörtgensel alan modelinin ifade ettiği $2/5 \times 5/7$ işlemi için kurduğu problem
ÖA6	Bir test kitabının $5/7$ ’sini çözmüştür. Çözdüğü kısmın $2/5$ ’sini kontrol ettiğine göre toplamda ne kadarını kontrol etmiştir?
ÖA2	Bir pastanın $5/7$ ’sini sınıfa getiren Murat $2/5$ ’ini kendisi yemiştir. Bir pastanın ne kadarını Murat yemiştir?
ÖA4	Ahmet tarlasının önce $5/7$ ’sine armut ve bu armut ektiği arazinin $2/5$ ’indeki ağaçları aşılıp hem armut hem de kiraz üretiyor. Değişikliğin olduğu arazinin bütününe oranı nedir?
ÖA3	Ali bir testteki soruların $5/7$ ’sini çözmüştür. Çözdüğü soruların $3/5$ ’ini yanlış çözdüğüne göre Ali testin kaçta kaçını yanlış cevaplamıştır?
ÖA5	-
ÖA1	Pastanın $5/7$ ’sinin $2/5$ ’ini yiyen Ali ne kadar pasta yer?

Öğretmen adaylarının bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemi için problem kurarken modelin verilmesinin model türüne göre problem kurmalarını zorlaştırdığı görülmüştür. Benzer durum iki kesrin çarpma işlemi için problem kurarken de tespit edilmiştir. Aynı derste (D2) verilen diğer alıştırmalarda (A4) yer alan küme modelinin (Şekil 4.70) ifade ettiği $3/5 \times 3/8$ işlemi için ÖA1 hariç diğer öğretmen adayları bu işlemi yansıtan bir problem kuramamışlardır (Tablo 4.28). ÖA5 ve ÖA3 bu modele karşılık gelen işlemi doğru bir şekilde ifade etmişlerdir ancak problem kuramamışlardır. ÖA1’in kurduğu problem (Tablo 4.28) incelendiğinde her ne kadar işlemi yansıtan bir problem olsa da ön-

testte kurduğu probleme benzer şekilde işlemdeki $\frac{3}{5}$ kesrini operatör anlamıyla ele aldığı görülmektedir.



Şekil 4.70. Alıştırmalar-4'te 1. görevde verilen birinci model

Öğretmen adayları aynı derste (D2) dikdörtgensel alan modelinin verildiği durumda rahat bir şekilde problem kurarken burada çeşitli zorluklarla karşılaşmışlardır. ÖA6, ÖA4 ve ÖA2 benzer şekilde işlemde yer almayan bir sayı ilave ederek bir bütün yerine çokluk üzerinden hareket etmişlerdir.

Tablo 4.28.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen Küme Modelinin İfade Ettiği $\frac{3}{5} \times \frac{5}{8}$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen küme modelinin ifade ettiği $\frac{3}{5} \times \frac{3}{8}$ işlemi için kurduğu problem
ÖA6	Bir kutuda 40 bilye vardır. Bu kutudaki bilyelerin $\frac{3}{8}$ 'ini babam oynaması için abime veriyor. Abim de yalnız oynamaktan sıkılıp beraber oynayalım diye bilyelerinin $\frac{3}{5}$ 'ini bana veriyor. Abimin bana verdiği bilyeler tüm bilyelerin kaçta kaçıdır?
ÖA2	40 kişilik bir sınıfta halaybaşı seçmeleri için sınıfın $\frac{3}{8}$ 'i başvurmuş ve başvuranların $\frac{3}{5}$ 'i kabul edilmiştir. Sınıfın kaçta kaçı kabul edilmiştir?
ÖA4	40 parçadan oluşan bir bütünümenin $\frac{3}{8}$ 'inin $\frac{3}{5}$ 'i alınıyor. Alınan kısmın bütünüme oranı nedir?
ÖA3	-
ÖA5	-
ÖA1	Bir pizzanın $\frac{3}{8}$ 'ini 5 kişi herkes eşit almak koşuluyla paylaşıyor. 3 kişinin yediği miktar tüm pastanın ne kadardır?

ÖA6 verilen modelin ifade ettiği “ $\frac{3}{8}$ 'in $\frac{3}{5}$ 'i” yerine işlemde yer almayan bir sayı ilave ederek “40'ın $\frac{3}{8}$ 'inin $\frac{3}{5}$ 'i” anlamını yansıtan bir problem kurmuştur (Tablo 4.28). Burada bütünü çokluk olarak ele almasında verilen küme modelinin etkisinin olduğu düşünülürse küme modelinde bütünün nesneler topluluğundan oluştuğunu gözardı etmiş olabilir. Buna göre modelde kaç tane nesne verildiyse o nesnelerin sayısını probleme

eklemektedir. Diğer yandan bu problem oran yapısında olup $\frac{\frac{3}{5} \times \left(\frac{3}{8} \times 40\right)}{40}$ işlemini

yansıtmaktadır. Buna göre işlemin sonucunu bulmak için önce 40'ın $\frac{3}{8}$ 'i, sonra 15'in $\frac{3}{5}$ 'i bulunur ve buradan bulunan 9 ilk baştaki bütüne oranlanarak $\frac{9}{40}$ elde edilir. Buna göre ÖA6'nın verilen modelin basamaklarını dikkate alarak problem kurduğu söylenebilir ama 1 bütün yerine çokluk üzerinden hareket etmiştir. Bu durumda iki kesrin çarpma

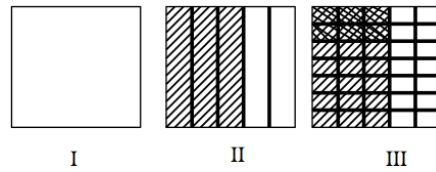
işlemini yansıtan bir problem kuramamıştır. ÖA4 ve ÖA2'nin de benzer şekilde hareket ederek problem kurdukları görülmektedir (Tablo 4.28).

Tablo 4.29.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen Dikdörtgensel Alan Modelinin İfade Ettiği $2/7 \times 3/5$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen dikdörtgensel alan modelinin ifade ettiği $2/7 \times 3/5$ işlemi için kurduğu problem
ÖA6	Bir çekirdek paketinin $3/5$ 'i doludur. Ben bu dolu olan kısmın $2/7$ 'sini yersem, yediğim kısmın paketin tamamına oranı ne kadardır
ÖA2	Bir pidenin $3/5$ 'ünü Murat yiyecektir. O beşte üçün de yedide ikisini yiyememiştir. Pidenin ne kadarını yiyememiştir?
ÖA4	Bir okul yapılacaktır. Bu okul için gerekli arazinin $3/5$ 'ine kütüphane ve $3/5$ 'lik kısmın $2/7$ 'sine arşiv olarak planlanmıştır. Arşiv olarak planlanan kısmın ya da arazinin bütün arazimize oranı kaçtır?
ÖA3	Ali bir testteki soruların $3/5$ 'ünü cevaplıyor, cevapladığı sorulardan $2/7$ 'sini yanlış yapıyor. Ali testin kaçta kaçını yanlış cevaplamıştır?
ÖA5	Bir pastanın $3/5$ 'i yeniyor, bir pastanın $3/5$ 'i var, $3/5$ 'inin de $2/7$ 'si yeniyor. Pastanın ne kadarı yenmiştir?
ÖA1	Bir paketin $2/7$ 'si kadar süt vardır, bunun $3/5$ 'ini içen bir çocuk paketin kaçta kaçını içmiştir?

Öğretmen adayları dikdörtgensel alan modeli verildiğinde iki kesrin çarpma işlemi için problem kurmada zorluk yaşamazken küme modeli verildiğinde zorluk yaşamışlardır. Bu da verilen modelin türüne göre modelin verilmesinin problem kurmayı zorlaştırdığı görüşünü desteklemektedir. Alan modelinin öğretmen adaylarının kesirlerle çarpmada en çok kullandıkları model türü olmasının da problem kurmalarını kolaylaştırdığı söylenebilir. İkinci derse (D2) paralel yapılan görüşmede (G3) verilen dikdörtgensel alan modelinin (Şekil 4.71) ifade ettiği $2/7 \times 3/5$ işlemi için bütün öğretmen adayları bu işlemi ve “ $3/5$ 'in $2/7$ 'si” anlamını yansıtan birer problem kurmuşlardır (Tablo 4.29).



Şekil 4.71. Görüşme-3'te 1. görevde verilen model

Öğretmen adayları aynı görüşmede (G3) verilen $1/2 \times 5/6$ işlemi için ve yedinci görüşmede (G7) verilen modelin ifade ettiği $4/5 \times 5/9$ işlemi için bu işlemleri yansıtan birer problem kurmuşlardır ve herhangi bir zorluk yaşamamışlardır (Tablo 4.30 ve Tablo 4.31). Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin çarpma işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinin yedinci görüşmede derinleştiği söylenebilir.

Tablo 4.30.

*Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $1/2 \times 5/6$ İşlemi İçin Kurdukları**Problemler*

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen $1/2 \times 5/6$ işlemi için kurduğu problem
ÖA6	Bir pastanın $1/6$ 'sı gelen misafirlere ikram edilmiştir. Daha sonra kardeşlerimle kalan pastanın $1/2$ 'sini yersem bir pastanın ne kadarını yemiş oluruz?
ÖA2	Bir sınıfın $5/6$ 'i matematik dersinde başarılıdır. Bu matematik dersinde başarılı öğrencilerin yarısı olimpiyatlara gidecektir. Sınıfın kaçta kaç olimpiyatlara gider?
ÖA4	Ahmet Bey bahçesinin $5/6$ 'sını tarla yapmak için kullanmakta, bu tarlanın yarısına domates ekmektedir. Bir tarım işçisi olduğunu varsayalım. Domates ektiği kısım bütünün arazinin kaçta kaçtır?
ÖA3	Bir kutu cipsin $5/6$ 'sı dolu, cipsi satın aldıktan sonra bunun $1/2$ 'sini ben yiyorum, cips kutusunun ne kadarı yenmiştir?
ÖA5	Bir süt şişesinin $5/6$ 'sı doludur. Anne çocuğuna bu kadar süttten $1/2$ 'sini verecektir. Tüm şişenin ne kadarını vermiş olur?
ÖA1	Bir kitabın $5/6$ 'inin yarısını çözen bir çocuk ne kadarını çözmüş olur kitabın?

Tablo 4.31.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen Kesir Çubuğu Modelinin İfade Ettiği $4/5 \times 5/9$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen kesir çubuğu modelinin ifade ettiği $4/5 \times 5/9$ işlemi için kurduğu problem
ÖA6	Bir metre tahtanın $5/9$ 'u kesiliyor. Daha sonra bu kesilen parçanın $4/5$ 'i maviye boyanırsa, o baştaki parçamızın ne kadarı maviye boyanıyordu?
ÖA2	Elimizde 1 metrelik kablo vardır, bunun $5/9$ 'u kullanılacaktır. Bu $5/9$ 'un da $4/5$ 'i, ıı, nasıl diyeyim, deforme olmuştur. Ne kadarı deforme olmuştur, tüm kablunun ne kadarı deforme olmuştur?
ÖA4	Bir su deposunun $5/9$ 'unun $4/5$ 'i bahçe sulamak için kullanılacaktır, kullanılan su bütün suyun kaçta kaçtır?
ÖA3	Fatma bir testteki soruların $5/9$ 'unu cevaplıyor. Çözdüğü sorulardan $4/5$ 'i doğruysa, Fatma testteki soruların kaçta kaçını doğru cevaplamıştır?
ÖA5	Bir kasanın $5/9$ 'u meyveyle doludur. Bu meyvelerin de $4/5$ 'i elmadır. Kasanın ne kadarı elmayla doludur, kaçta kaç?
ÖA1	Bir kitabın $5/9$ 'unu okuyor, sonra okuduğu kısmın $4/5$ 'inin altını çizmiş olsun. O zaman ne kadarının altını çizmiş oluyor?

Öğretmen adaylarının öğretim sürecinde kurdukları problemler incelendiğinde bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işleminde olduğu gibi iki kesrin çarpma işlemi için verilen modelin problemin bağlamını etkilediği söylenebilir. Buna kanıt olarak dikdörtgensel alan modeli verildiğinde problem kurarken “paket süt”, “test kitabı”, “tarla” gibi hikayeleri kullanırken, kesir çubuğu modeli verildiğinde “tahta”, “kablo” ve “meyve kasası” gibi hikayelerin kullanılması gösterilebilir. Bu durumun her öğretmen adayı için geçerli olmadığı tespit edilmiştir. ÖA3’ün problemleri incelendiğinde işlemlerin çoğu için “cevaplanan sorular” ve “cevaplanan soruların doğru veya yanlış olan kısmı” şeklinde problemler kurduğu görülmektedir. Bu durum ÖA3’ün iki kesrin çarpma işlemine ilişkin anlamasını bu problem hikayesi üzerinden geliştirmiş olmasından kaynaklanıyor olabilir.

4.2.2.3. Son Durum

Öğretmen adayları ön-testte verilen işlemin tersini yansıtan birer problem kurarlarken öğretim sürecindeki görüşmelerde ve alıştırılmalarda bu durum görülmemiştir ancak küme modeli verildiğinde çeşitli zorluklar yaşamışlardır. Öğretimin sonuna gelindiğinde bu zorlukların ortadan kalktığı görülmüştür. Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin çarpma işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinin öğretim sürecinde geliştiği söylenebilir. Öğretimden sonra uygulanan KÇB son-testinde verilen $1/2 \times 2/5$ işlemi için öğretmen adaylarının hepsinin bu işlemi ve “ $2/5$ ’in $1/2$ ’si” anlamını yansıtan birer problem kurmaları bunu desteklemektedir. Ön-testte $1/2 \times 2/5$ yerine $2/5 \times 1/2$ veya $1/2 + (1/2 \times 2/5)$ işlemlerini yansıtan birer problem kurarlarken ve zorluklar yaşarlarken burada doğru bir şekilde $2/5$ ’in $1/2$ ’sini yansıtan birer problem kurabilmişlerdir (Tablo 4.32). Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin çarpma işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinin geliştiği söylenebilir.

Tablo 4.32.

Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde $1/2 \times 2/5$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen $1/2 \times 2/5$ işlemi için kurduğu problem	Problemin ifade ettiği anlam ve karşılaşılan zorluklar
ÖA6	Bir duvarın $2/5$ ’ini beyaza boyadım. Beyaza boyadığım kısmın $1/2$ ’sine kırmızı çiçekler çizdim. Kırmızı çiçekler çizdiğim kısım duvarın ne kadarıdır?	• İşlemi yansıtan problem • “$2/5$’in $1/2$’si”
ÖA2	Bir pizzanın $2/5$ ’i kalmıştır. Ahmet bunun yarısını yiyecektir. Ahmet tüm pizzanın ne kadarını yemiştir?	• İşlemi yansıtan problem • “$2/5$’in $1/2$’si”
ÖA4	Selin Hanım $2/5$ metre kumaşın $1/2$ ’si ile masa örtüsü yapacaktır. Bu masa örtüsü kaç metredir?	• İşlemi yansıtan problem • “$2/5$’in $1/2$’si”
ÖA3	Salih bir dönüm tarlasının $2/5$ ’ine ağaç dikmiştir. Diktiği ağaçların $1/2$ ’si kiraz ağacıdır. Salih tarlasının kaçta kaçına kiraz ağacı dikmiştir?	• İşlemi yansıtan problem • “$2/5$’in $1/2$’si”
ÖA5	Bir pastanın $2/5$ ’i kalmıştır. Kalan pastanın $1/2$ ’sini bir kişi yemek istiyorsa pastanın ne kadarını yer?	• İşlemi yansıtan problem • “$2/5$’in $1/2$’si”
ÖA1	Bir usta bir duvarın $2/5$ ’ini boyamıştır. Boyadığı kısmın $1/2$ ’sini farklı renkle boyamıştır. Farklı renkle boyanan kısım tüm duvarın ne kadarını oluşturur?	• İşlemi yansıtan problem • “$2/5$’in $1/2$’si”

Sonuç olarak öğretmen adaylarının iki kesrin çarpma işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği görülmüştür. Bu gelişim Tablo 4.33’te verilmiştir. Bu tablo öğretmen adaylarının ön-testte, öğretim sürecinde ve son-testte iki kesrin çarpma işlemine ilişkin kurdukları problemlerin birarada verilmiş hali olarak sunulmuştur. Bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin problem kurarken çok fazla zorluk yaşanırken iki kesrin çarpma işleminde çok fazla zorluk yaşanmamıştır. Öğretmen adaylarının hepsi iki kesrin çarpma işleminde sadece küme modeli verildiğinde zorluklar yaşamışlardır ve modelin ifade ettiği işlemi yansıtan problem kuramamışlardır.

Tablo 4.33.

Öğretmen Adaylarının İki Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Problem Kurma Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo

Öğretmen Adayı	Ön-test/G1 1/2 x 2/5	Öğretim Süreci/G2-G7 2/5 x 5/7 (Dikdörtgensel alan modeli)					Son-test/G8 1/2 x 2/5
ÖA6	İşlemin tersini yansıtan problem (2/5 x 1/2 işlemini yansıtıyor.)	- İşlemin yansıtan problem "5/7'nin 2/5'i" anlamı	- İşlemin yansıtmayan problem (3/5 x (3/8 x 40)) / 40 işlemini yansıtıyor.) - Oran yapısında - Bütünü çokluk olarak alma - Bilgi ekleme	- İşlemin yansıtan problem "3/5'in 2/7'si"	- İşlemin yansıtan problem "5/6'nın 1/2'si"	- İşlemin yansıtan problem "5/9'un 4/5'i"	- İşlemin yansıtan problem "2/5'in 1/2'si"
ÖA2	- İşlemin yansıtmayan problem (2/5 x 1/2 x 40 işlemini yansıtıyor.) - Bütünü çokluk olarak alma	- İşlemin yansıtan problem "5/7'nin 2/5'i" anlamı	- İşlemin yansıtmayan problem (3/5 x (3/8 x 40)) / 40 işlemini yansıtıyor.) - Oran yapısında - Bilgi ekleme - Bütünü çokluk olarak alma	- İşlemin yansıtan problem "3/5'in 2/7'si"	- İşlemin yansıtan problem "5/6'nın 1/2'si"	- İşlemin yansıtan problem "5/9'un 4/5'i"	- İşlemin yansıtan problem "2/5'in 1/2'si"
ÖA4	İşlemin tersini yansıtan problem (2/5 x 1/2 işlemini yansıtıyor.)	- İşlemin yansıtan problem "5/7'nin 2/5'i" anlamı - Oran yapısında	- İşlemin yansıtmayan problem (3/5 x (3/8 x 40)) / 40 işlemini yansıtıyor.) - Oran yapısında - Bilgi ekleme - Bütünü çokluk olarak alma	- İşlemin yansıtan problem "3/5'in 2/7'si" - Oran yapısında	- İşlemin yansıtan problem "5/6'nın 1/2'si"	- İşlemin yansıtan problem "5/9'un 4/5'i"	- İşlemin tersini yansıtan problem "1/2'nin 2/5'i"
ÖA3	İşlemin yansıtmayan problem (1/2 + (2/5 x 1/2) işlemini yansıtıyor.)	- İşlemin yansıtan problem "5/7'nin 2/5'i" anlamı	Problem yok	- İşlemin yansıtan problem "3/5'in 2/7'si"	- İşlemin yansıtan problem "5/6'nın 1/2'si"	- İşlemin yansıtan problem "5/9'un 4/5'i"	- İşlemin yansıtan problem "2/5'in 1/2'si"
ÖA5	İşlemin yansıtmayan problem (1/2 + (2/5 x 1/2) işlemini yansıtıyor.)	Problem yok	Problem yok	- İşlemin yansıtan problem "3/5'in 2/7'si"	- İşlemin yansıtan problem "5/6'nın 1/2'si"	- İşlemin yansıtan problem "5/9'un 4/5'i"	- İşlemin yansıtan problem "2/5'in 1/2'si"
ÖA1	İşlemin yansıtmayan problem	- İşlemin yansıtan problem "5/7'nin 2/5'i" anlamı	- İşlemin yansıtan problem "3/8'in 3/5'i"	- İşlemin yansıtan problem "3/5'in 2/7'si"	- İşlemin yansıtan problem "5/6'nın 1/2'si"	- İşlemin yansıtan problem "5/9'un 4/5'i"	- İşlemin yansıtan problem "2/5'in 1/2'si"

4.2.3. Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Problem Kurma Bilgisi

4.2.3.1. Başlangıç durumu

ÖA6 hariç diğer öğretmen adaylarının öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinin zayıf olmadığı görülmüştür (Tablo 4.34). Bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemi için bölmenin grupta anlamını yansıtan, bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemi için bölmenin paylaşma anlamını yansıtan birer problem kurmuşlardır. Kesirlerle çarpma işleminde olduğu gibi bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemine ilişkin problem kurarken modelin verilmesi problem kurmalarını zorlaştırmıştır. Öğretimden önce kesirlerle bölmenin anlamına ve modeline ilişkin anlamaya sahip olmadıkları için verilen modelin ifade ettiği işlemi belirleyemedikleri ve dolayısıyla problem kurmakta zorlandıkları söylenebilir. Öğretmen adayları işlemde yer almayan bir sayı ilave ederek bir bütün yerine çokluk üzerinden hareket etmişlerdir. Öğretimden önce öğretmen adayları içinde bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemi için problem kurarken en çok zorlanan öğretmen adayının ÖA6 olduğu görülmüştür. ÖA6 bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemi için verilen bölme işlemi yerine çarpma işlemini yansıtan bir problem kurarken, bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemi için verilen işlemi yansıtan bir problem kuramamıştır (Tablo 4.34).

Tablo 4.34.

Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemi İçin Kurdukları Problemlere İlişkin Açıklamalar

Öğretmen Adayı	$5 \div 1/2$ (Sözel ifade)	$1/2 \div 2$	$2/7 \div 3$ (Kesir çubuğu modeli)
ÖA6	• Bölme yerine çarpma işlemini yansıtan problem ($5 = X \cdot 1/2$)	• İşlemi yansıtmayan problem (İşlemin sonucuna yönelik kurmuş)	• İşlemi yansıtmayan problem (İşlemin sonucuna yönelik kurmuş) • Bilgi ekleme
ÖA2	• İşlemi yansıtan problem • Grupta anlamı	• İşlemi yansıtan problem • Paylaşma anlamı	• İşlemi yansıtmayan problem • Paylaşma anlamı • Bütünü çokluk olarak alma • Bilgi ekleme
ÖA4	• İşlemi yansıtan problem • Eş grup yapısında • Grupta anlamı	• İşlemi yansıtan problem • Paylaşma anlamı	• İşlemi yansıtmayan problem • Bilgi ekleme • Bütünü çokluk olarak alma
ÖA3	• İşlemi yansıtan problem • Grupta anlamı • Yetersiz bilgi	• İşlemi yansıtan model • Paylaşma anlamı	• Problem yok
ÖA5	• İşlemi yansıtan problem • Grupta anlamı • Yetersiz bilgi	• İşlemi yansıtan problem • Paylaşma anlamı	• Problem yok
ÖA1	• İşlemi yansıtan problem • Grupta anlamı	• İşlemi yansıtan problem • Paylaşma anlamı	• İşlemi yansıtmayan problem

Öğretmen adayları öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde ikinci görevde verilen “5’in içinde kaç tane $1/2$ vardır?” ifadesine karşılık gelen işlemi $5 \div 1/2$ olarak ifade etmişlerdir ve ÖA6 hariç diğerleri bu işlemi ve bölmenin gruplama anlamını yansıtan birer problem kurmuşlardır (Tablo 4.35). Öğretmen adaylarının problemleri incelendiğinde işlemdeki 5’i “elma”, “kablo” ve çoğunlukla “ekmek” olarak ifade ettikleri görülmektedir. ÖA5 ve ÖA3 benzer şekilde her ikisi de problemlerinde her bir kişiye ne kadar verileceğini belirtmemişlerdir (Tablo 4.35), bu yüzden bu problemlerin çözülmesi için gereken bilgiler yeterli değildir. ÖA5 ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) bu problemde her bir kişiye yarım elmanın verildiğini vurgulamıştır. ÖA2, ÖA4 ve ÖA1 verilen işlemi yansıtan birer problem kurmuşlardır (Tablo 4.35). Buna göre ÖA2, ÖA4 ve ÖA1’in öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinin diğer öğretmen adaylarına göre daha güçlü olduğu söylenebilir. ÖA6’nın problemi incelendiğinde çarpma işlemi yani $5 = X \cdot 1/2$ işlemi üzerinden bir problem kurduğu söylenebilir (Tablo 4.35). Buna kanıt olarak ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) yazdığı “ $a \cdot 1/2 = 5$ ” ifadesi ve yaptığı şu açıklama gösterilebilir: “Aslında ben yine tam tersini sormuşum. $1/2$ ’den 5’e gitmişim. Yazdığuma göre böyle olur. Çarpma ile bölme birbirinin tersi ya tamamlıyor gibi. Galiba biz bölmeyi modelleyemeyince çarpmadan yola gitmişiz. İşin kolayına kaçmışız burada galiba.” Buna göre ÖA6’nın öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgisinin diğer öğretmen adaylarına göre daha zayıf olduğu söylenebilir.

Tablo 4.35.

Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Verilen Sözel İfadeye Karşılık Gelen $5 \div 1/2$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen sözel ifadeye karşılık gelen $5 \div 1/2$ işlemi için kurduğu problem
ÖA6	Elimdeki bütün elmaları ikiye böldüm. Kaç yarım elmayı birleştirerek 5 bütün elma elde edebiliriz?
ÖA2	Beş metre kablomuz vardır. Bunu $1/2$ m’lik parçalara ayırıp satacağız. Kaç tane ürün satarız?
ÖA4	Aslı Hanım yemekhanede aşçı olarak çalışmaktadır. Her bir yaptığı tabildot yemek için yarım ekmek vermektedir. Aslı Hanım’ın 5 adet ekmeği için kaç tabildot yemek yapmalıdır?
ÖA3	Rümeysa’nın 5 tane elması vardır. Rümeysa bütün elmalarını yarıya bölüp arkadaşlarına dağıtmak istiyor. Rümeysa kaç arkadaşına elma verebilir?
ÖA5	5 elması olan Ahmet bunların her birini yarıya bölerek yani $1/2$ kadar ayırıp arkadaşlarına dağıtmak istiyor. Ahmet’in elma vereceği kaç arkadaşı vardır?
ÖA1	Ahmet ailesiyle piniğe gitmiştir. Babası herkesin eşit miktarda ekmek yiyeceğini düşünerek 5 tane ekmek almıştır. Herkes yarım ekmek yediğine göre piknikte toplam kaç kişi vardır?

Öğretimden önce öğretmen adaylarının bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin zayıf bir anlamaya sahip olmadıkları görülmüştür (Tablo 4.36). KÇB ön-testinde altıncı görevde verilen $1/2 \div 2$ işlemi için ÖA6 hariç diğer

öğretmen adayları bu işlemi ve bölmenin paylaştırma anlamını yansıtan birer problem kurmuşlardır (Tablo 4.36). Öğretmen adaylarının problemleri incelendiğinde işlemdeki $1/2$ 'yi “paket süt”, “silgi”, “ekmek”, “kablo” ve “pasta” olarak ifade ettikleri görülmektedir.

Tablo 4.36.

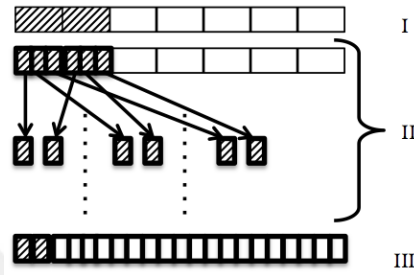
Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Verilen $1/2 \div 2$ İşlemi İçin Kurdukları

Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen $1/2 \div 2$ işlemi için kurduğu problem
ÖA6	İki arkadaş bir pastaneden orta büyüklükte bir pasta alırlar. Eve gelip yarısını biri alır diğer yarısını biri alıp tabağına koyar. Yemeden iki arkadaşları ziyarete gelir. Her biri pastasının yarısını bölüp yeni gelen arkadaşına verir. Kişi başına ne kadar pasta düşmüştür?
ÖA2	Yarım metrelik bir kablomuz var. Bunu 2'ye bölüp 2 ayrı yerde kullanmak istiyoruz. Böldüğümüzde kaç metre kablomuz olur?
ÖA4	Ebru Hanım'ın iki çocuğu vardır. Ebru Hanım elindeki yarım ekmeği iki çocuğuna eşit paylaşmak istemektedir. Bu durumda her bir çocuk ne kadar ekmek alır?
ÖA3	Ali'nin elinde yarım ekmek vardır. Bu ekmeğin yarısını da aç olan kardeşiyle paylaşıyor. Ali ekmeğin kaçta kaçını yemiştir?
ÖA5	Elinde yarım silgi olan Nuriye sıra arkadaşına sınavda silgisi olmadığı için onunla paylaşmak ister. Bunun için eşit olarak paylaştırdınc her birine ne kadar silgi düşer?
ÖA1	Yusuf süt içmek için dolabı açtığında paketin yarısının bittiğini görmüştür. Kalanının tamamını alacak şekilde kardeşi ve kendine 2 bardağa doldurmuş ve içmişlerdir. Yusuf bir paket sütün kaçta kaçını içmiştir?

ÖA6'nın problemi incelendiğinde verilen işlemi tam olarak yansıtan bir problem kuramadığı görülmektedir (Tablo 4.36). Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) problemde kullandığı “*Her biri pastasının yarısını bölüp yeni gelen arkadaşına verir.*” ifadesiyle ne demek istediğini ÖA6 şu şekilde açıklamıştır: “*Yani $1/2$ 'sini alıp yarısını yani tekrar bunun yarısını alıp. Yani pastalarımız zaten yarım yarımdı. Bunları tekrar yarılayıp yani $1/2$ 'ye bölüp.*” Burada yarısının yarısını almayı kastettiği ancak “yarısını alma” kavramı yerine “yarılama” ve “ $1/2$ 'ye bölme” ifadelerini kullandığı görülmektedir. Burada ÖA6 uygun olmayan bir matematiksel dil kullanmıştır. Bu problem her ne kadar işlemin paylaştırma anlamını ele almış gibi görünse de daha ziyade ikiye bölme veya yarısını alma kavramına ilişkindir. Yani önce bir bütünü ikiye bölme, sonra her bir yarımı ikiye bölmeyi yansıtan bir problemdir. Bunu ÖA6 ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) şöyle ifade etmiştir: “*Önce 1'i ikiye bölmüşüz, bir bütün pastayı ikiye bölmüşüz, onu şu şekilde ifade edecek olursak tekrar ikiye bölmüşüz onu yani aslında aynı şey olmuş oluyor, $1/2$ bölü 2 ($1/2 \div 2$ yazıyor). Aslında bizden istenen şu kısım ben buna bir adım daha eklemiğim.*” Buna göre ÖA6'nın öğretimden önce bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgisinin diğer öğretmen adaylarına göre zayıf olduğu söylenebilir.

Öğretmen adaylarının öğretimden önce bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinin zayıf olmadığı görülse de model verildiğinde zorlandıkları tespit edilmiştir. Bu durum öğretmen adaylarının öğretimden önce bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin model bilgilerinin zayıf olması ile açıklanabilir. KÇB ön-testinde on beşinci görevde verilen modelin (Şekil 4.72) ifade ettiği işlemi öğretmen adaylarının bazıları doğru bir şekilde $2/7 \div 3$ olarak, bazıları $2/7 \times 1/3$ olarak ifade etmişlerdir, bazıları da yanlış ifade etmişlerdir. Buna bağlı olarak bu model için problem kurarken zorlandıkları görülmüştür.



Şekil 4.72. KÇB testinde 15. görevde verilen model

ÖA3 ve ÖA2 verilen modele karşılık gelen işlemi doğru bir şekilde ifade etmişlerdir ancak ÖA3 problem kuramazken ÖA2 de bir bütün yerine çokluk üzerinden hareket ederek $(2/7 \times 210) \div 3$ işlemini yansıtan bir problem kurmuştur (Tablo 4.37).

Tablo 4.37.

Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Verilen Kesir Çubuğu Modelinin İfade Ettiği $2/7 \div 3$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen kesir çubuğu modelinin ifade ettiği $2/7 \div 3$ işlemi için kurduğu problem
ÖA6	Yedi arkadaş bir pastaneye gittik. Bir tane büyük boy pasta istedik. Herkeste 3'er lira vardı. Fatma ve Esra paralarının $1/3$ 'ünü vererek pastanın fiyatını karşıladılar. Pastaya verilen para hepimizde toplamda olan paranın kaçta kaçtır?
ÖA2	Bir kafe sahibi bırakılan 210 TL bahşişlerin $2/7$ 'sini garsonlara vermektedir. Kafede 3 garson bulunduğu göre her biri ne kadar pay alır?
ÖA4	Bir usta 7 kalıp betonun $2/7$ 'sini kullanacaktır. Ardından bu kalıpların herbirinin $1/3$ 'ünü alıp ilk duvar için kullanmıştır. Bu durumda kullandığı kalıpların tüm kalıplara oranı nedir?
ÖA3	-
ÖA5	-
ÖA1	Bir usta bir duvarı 7 günde bitirmeyi düşünmüştür. Sonra kendine 2 günlük bir plan yaparak günü eşit 3 parçaya bölmüştür. Her gün çalışma süresinin $1/3$ 'ünü dinlenmeye ayıran usta 2 günde 7 günlük bir işten ne kadar dinlenmeye zamanını ayırmıştır?

Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) ÖA2'nin problemin çözümüne ilişkin yaptığı şu açıklama bir bütün yerine çokluk üzerinden hareket ettiğini desteklemektedir: “Yani 210 TL bahşişlerin $2/7$ 'si ne kadar eder? Kırk, otuz, altmış TL eder. Bu 60 TL'nin de üçe bölünmesi bölü 3 diyerek yazarız direk. Eğer bir garson kaç para alır deseydik üçte birini alırdı.” Burada ÖA2 her ne kadar bütünü çokluk olarak alsa da bölmenin paylaşma

anlamını yansıtan bir problem kurduğu görülmektedir. Buna göre ÖA2'nin diğer öğretmen adaylarına göre bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgisinin daha güçlü olduğu söylenebilir.

ÖA5 verilen modele karşılık gelen işlemi $2/7 \times 1/3$ olarak ifade etmiştir ancak problem kuramamıştır (Tablo 4.37). ÖA6 ve ÖA4'ün her ikisi de verilen modele karşılık gelen işlemi $(2/7 \div 6) \times 2$ olarak ifade etse de kurdukları problemler incelendiğinde ne bu işlemi ne de modeli yansıttığı görülmektedir (Tablo 4.37). ÖA4'ün kurduğu problem incelendiğinde işlemde yer almayan bir sayı ilave ederek oran yapısında ve çarpma işlemini yansıtan bir problem kurduğu görülmektedir (Tablo 4.37). Buna göre bu

problemin yazdığı işlemde $\frac{1}{3} \times \frac{2}{7} \times 7$ işlemi yansıttığı söylenebilir. Burada

“kullandığı kalıpların tüm kalıplara oranı” ifadesi yerine “kulladığı kalıplar tüm kalıpların ne kadarı” ifadesi uygun olup bütünü de bir bütün almak gerekmektedir. Böylece modelin ifade ettiği bölme işlemine ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen $1/3 \times 2/7$ işlemini ifade eden bir problem olurdu. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) 7 kalıba “bütün” diyerek işlemin sonucunu $2/21$ olarak ifade etmiştir ve problemin ifade ettiği işlemin $2/7 \times 1/3$ olduğunu belirtmiştir ancak bunun sonuç odaklı olduğunu, burada aslında “6’ya bölüp tekrardan 2’li gruplar” şeklinde ifade etmesi gerektiğini çünkü modelde bunun görüldüğünü ifade etmiştir. Burada ÖA4'ün bölmenin paylaşırma anlamına işaret ettiği görülmektedir ancak bunu açık bir şekilde ifade edememiştir. Bu durum ÖA4'ün bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaşırma anlamına ilişkin anlamasının ve model bilgisinin öğretimden önce zayıf olması ile açıklanabilir. Çünkü modeli bölme işleminden ziyade çarpma işlemi ile açıklamıştır ve kesrin operatör anlamını kullanmıştır. Yani $1/3$ kesrini $2/6$ olarak alıp $2/7$ 'yi 6’ya bölme ve 2 ile çarpma şeklinde ifade etmiştir.

ÖA6'nın kurduğu problem incelendiğinde işlemde yer almayan bir sayı ilave ederek daha çok işlemin sonucu olan $2/21$ 'e ulaşmak üzere bir problem kurduğu söylenebilir (Tablo 4.37). Buna göre bu problemin ifade ettiği işlem yazdığı $(2/7 \div 6) \times 2$ işleminden ziyade

$\frac{\left(\frac{1}{3} \times 3\right) + \left(\frac{1}{3} \times 3\right)}{7 \times 3}$ işlemidir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) ÖA6'nın yaptığı şu

açıklama bunu desteklemektedir: “Yani 7 arkadaşta her birinde 3'er lira varmış, toplamda 21 liralari var. Sadece 2 kişi paralarının $1/3$ 'ünü vererek yani 3'er lira vardı, 3'er liranın $1/3$ 'ü 1, iki kişi verdiği için 2 lira. Paranın tamamının 2 bölü 21'ini vermiş oluyor direk.”

Bu görüşmede (G1) ÖA6'dan bu problemin ifade ettiği işlemi yazması istenmiştir ve ÖA6 şu şekilde ifade ederek işlemi yazamamıştır: *“Aslında burada işlem daha karmaşık gibi, önce 3'ün 1/3'ü, sonra 7 çarpı 3, 3'er lira varmış. Ama bir de tabi burada iki kişi veriyor, çok uzatmışız.”* Buna göre ÖA6'nın öğretimden önce bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgisinin diğer öğretmen adaylarına göre daha zayıf olduğunun bir kez daha görüldüğü söylenebilir.

ÖA1 her ne kadar verilen modele karşılık gelen işlemi $1/7 \times 1/3 + 1/7 \times 1/3$ olarak ifade etse de kurduğu problem incelendiğinde ÖA4'ün kurduğu probleme benzer şekilde

$$\frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{7} \times 7}{7}$$

işlemini yansıtan bir problem kurduğu görülmektedir. Burada işlemde yer almayan 7 sayısını ilave ederek $2/7$ kesrini 7 günün 2 günü olarak $2/7 \times 7$ şeklinde ifade ettiği ve işlemin sonucu olan $2/21$ 'e ulaşmak üzere bir problem kurduğu söylenebilir. Önteste ilişkin yapılan görüşmede (G1) ÖA1'e kurduğu problemin ifade ettiği işlem sorulduğunda ÖA1 bunu şu şekilde açıklamıştır: *“Tamamı 7 olsun dedim, sonra iki günlük plan yaparak demiş, şöyle iki gününü ayarlamış (bir kesir çubuğu çiziyor ve yedi eş parçaya böldüğünü farzederek iki parçasını gösteriyor). Hani şurası da yedi tane, beş tane daha var. Üç eşit parçaya bölmüştür, hani bunu, gününü üçe bölmüş mesela ($1/7$ 'lik parçayı üçe bölüyor), ondan sonra her gün çalışma süresinin $1/3$ 'ünü dinlenmeye ayırmıştır, şurasını dinlenmeye ayırmış, bir de şurasını (2 tane $1/21$ 'lik parçayı gösteriyor). Ondan sonra iki günde yedi günlük işten ne kadarını şey yapmıştır, şurası ne olmuş oldu? $1/7$ 'nin $1/3$ 'ü $1/21$ artı $1/21$ olmuş oldu, hani tamamına şey yaptığımızda. Burası $1/7$ 'lik kısımdı önce, sonra $1/3$ 'üydü şurada da aynı şekilde. Burada da beş tane daha var, öyle yaptım.”* Burada ÖA1 işlemin sonucunu $2/21$ olarak ifade etmiştir. ÖA1 problemin ifade ettiği işlemde modelin ifade ettiği işlemi açıklamıştır ve 1 bütün yerine 7 bütünü aldığını, bu yüzden sonucun değiştiğini farkedememiştir. Burada model çizerek gösterince bölme işleminin görüldüğünü ancak işlemlerde çarpma işleminin görüldüğünü $1/3 \times 1/7 + 1/3 \times 1/7$ işlemine işaret ederek ifade etmiştir. ÖA1'in burada $1/3 \times 2/7$ işlemine yönelik bir problem kurduğu ve iki kesrin çarpma işleminde olduğu gibi burada da kesrin operatör anlamını kullanarak hareket ettiği için kurduğu problemin işlemi yansıtmadığı söylenebilir.

Sonuç olarak ÖA6 hariç diğer öğretmen adaylarının bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin gruplama ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaşırma anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinin öğretim sürecine başlarken zayıf olmadığı görülmüştür.

4.2.3.2. Öğretim Süreci

Öğretmen adaylarının öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin problem kurma bilgisine sahip oldukları görülmemiştir. Bunun yansıra öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin model bilgilerinin zayıf olması sebebiyle model verildiğinde problem kurmada zorlandıkları görülmüştür. Öğretim sürecinde de bu zorlanmanın başlangıçta devam ettiği ancak sonlarına doğru ortadan kalktığı görülmektedir (Tablo 4.38). Bununla beraber bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinin de öğretim sürecinde geliştiği görülmüştür. Öğretim sürecinde problem kurarken en çok zorluğu ÖA6'nın yaşadığı görülmektedir. Bunda öğretim sürecine diğerlerine göre daha zayıf bir problem kurma bilgisiyle başlamasının etkisi olabilir. Öğretim sürecinde öğretmen adaylarının model çizmede olduğu gibi problem kurmada da bölme işlemini çarpmanın tersi olarak ifade etmenin ve çarpmanın tanımına göre açıklamanın kesirlerle bölmeyi anlamlandırmalarına ve problem kurmalarına yardımcı olduğu söylenebilir. Buna kanıt olarak kurdukları problemlerin çoğunun eş grup yapısında olması gösterilebilir. Öğretmen adayları bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin problem kurarken çok zorlanmışlardır ve bölmenin paylaştırma ve gruplama anlamına ilişkin ikileme düşmüşlerdir. Öğretimin sonlarına doğru bu ikilemi yaşamadıkları görülmüştür (Tablo 4.38). Buna göre öğretmen adaylarının problem kurma bilgilerinin öğretim sonunda geliştiği söylenebilir.

Tablo 4.38.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemine İlişkin Kurdukları Problemlere İlişkin Açıklamalar

Öğretmen Adayı	D3/G4 4 ÷ 1/3 (Paylaştırma anlamı)	5/7 ÷ 3 (Gruplama anlamı)	D4/G5 3 ÷ 1/4 (Paylaştırma anlamı)	3/5 ÷ 4 (Gruplama anlamı)
ÖA6	- İşlemi yansıtan problem - Çarpımsal karşılaştırma yapısında - Paylaştırma anlamı Bölmenin gruplama ve paylaştırma anlamı ikilemi	- İşlemi yansıtan problem - Gruplama anlamı - Eş grup yapısında	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı	Problem yok
ÖA2	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Gruplama anlamı - Eş grup yapısında	Problem yok	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı
ÖA4	Problem yok	Problem yok	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı Bütünü çokluk olarak alma	Problem yok
ÖA3	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı Bölmenin gruplama ve paylaştırma anlamı ikilemi	Problem yok	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı	Problem yok
ÖA5	Problem yok Bölmenin gruplama ve paylaştırma anlamı ikilemi	Problem yok	Problem yok	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı
ÖA1	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı Bölmenin gruplama ve paylaştırma anlamı ikilemi	Problem yok	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı

Öğretmen adaylarından ÖA6 öğretim sürecine diğerlerine göre kesirlerle bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgisi daha zayıf bir şekilde başlamıştır. Üçüncü derste (D3) bir doğal sayı ile bir birim kesrin ve bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemine ilişkin öğretim gerçekleştirilmiştir. ÖA6'nın bu dersten sonra problem kurma bilgisinde ilerleme olduğu görülmüştür. ÖA6 bu derste verilen alıştırmalarda (A5) yer alan dairesel alan modelinin ifade ettiği işlemi doğru bir şekilde $2 \div 2/3$ olarak ifade etmiştir ve bu işlem için şöyle bir problem kurmuştur: “2 tepsi baklavam var. Her tepsinin $2/3$ 'ünü bir kişi yerse kaç kişi baklavanın hepsini bitirir?” ÖA6'nın bu problemi incelendiğinde eş grup yapısında ve bölmenin gruplama anlamını yansıtan bir problem olduğu görülmektedir. ÖA6 burada

verilen modelin yansıttığı anlam ile aynı anlamı kullanmıştır. Ön-testte bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemi için uygun bir problem kuramazken burada kurabilmiştir.

ÖA6'nın bu derste (D3) bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin problem kurma bilgisinin de geliştiği görülmüştür. ÖA6 aynı alıştırılmalarda (A5) verilen $\frac{3}{5} \div 2$ işlemi için şöyle bir problem kurmuştur: “Tarlamızın $\frac{3}{5}$ 'ini abim kullanacaktır. Kullanacağı kısmı ortadan ikiye ayırarak bir tarafına meyve ağacı diğer tarafına sebze ekecektir. Sebze ekeceği kısım tarlanın kaçta kaçtır?” ÖA6'nın burada verilen işlemi ve bölmenin paylaştırma anlamını yansıtan bir problem kurduğu görülmektedir. Ön-testte verilen işlemi ve paylaştırma anlamını tam olarak yansıtan bir problem kuramazken burada uygun bir problem kurabilmiştir.

Öğretmen adayları öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin model bilgisine sahip olmadıkları gibi problem kurma bilgisine de sahip olmadıkları tespit edilmiştir. Bu durum üçüncü derse paralel yapılan görüşmeye (G4) de yansımıştır. Bu görüşmede öğretmen adaylarının bu anlam için problem kurarken zorluk yaşadıkları ve grupta anlamı ile ikileme düştükleri görülmüştür. Bu görüşmede verilen $4 \div \frac{1}{3}$ işleminin paylaştırma anlamı için öğretmen adaylarından ÖA4 ve ÖA5 hariç diğer öğretmen adayları bu işlemi ve bu anlamı yansıtan birer problem kurabilmişlerdir (Tablo 4.39). Bu öğretmen adayları her ne kadar işlemi yansıtan birer problem kursalar da problem kurarken bölmenin paylaştırma ve grupta anlamına ilişkin ikilem yaşadıkları görülmüştür.

Tablo 4.39.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $4 \div \frac{1}{3}$ İşlemi İçin Kurdukları

Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen $4 \div \frac{1}{3}$ işleminin paylaştırma anlamı için kurduğu problem
ÖA6	Bir tane büyük torbamız olsun, bir tane de kovamız olsun. Bu kovamız torbanın $\frac{1}{3}$ 'ü kadar olsun. Yani mesela biri 3 litre alıyorsa biri 9 litre alsın, $\frac{1}{3}$ 'ü oranında olsun. Bu kovamızın içine 4 gram şeker koyduğumuzda, 4 gram şeker alıyorsa bu kova, torbanın tamamı kaç gram şeker alır?
ÖA2	Bir torbanın üçte birinde 4 tane misketimiz vardır, torbanın tamamında kaç misket vardır?
ÖA4	-
ÖA3	Bir testin $\frac{1}{3}$ 'ünde 4 soru varsa hepsinde kaç soru vardır?
ÖA5	-
ÖA1	Bir grubun üçte biri gelmiş, 4 tane pastayı yemişler. Grubun tamamı ne kadar pasta yer?

ÖA4 ve ÖA5 verilen $4 \div \frac{1}{3}$ işleminin paylaştırma anlamı için problem kuramamışlardır (Tablo 4.39). ÖA5 öncelikle verilen işlemin bu anlamını “her bir gruptaki nesne sayısı” olarak ifade etmiştir ve şöyle açıklamıştır: “Şimdi her bir gruptaki kaç, her bir grupta

1/3'ün kaçı, yok, 1/3, dördün kaçı? Her 1/3, dörtte kaçtır? Oluyor bence çünkü 1/3, birde üçtü, dörtte de 12'dir demek anlamında oluyor bir gruptaki nesne sayısı. Yok, bu kaç grup anlamı. Gidemedim ben ona. Her 1/3'lük grupta, yok. Diyemiyorum bir şey." Burada ÖA5'in bölmenin gruptama ve paylaşırma anlamı arasında ikileme düştüğü görülmektedir. Bununla beraber $1/3$ kesrini "birde üç" şeklinde ifade ederek uygun olmayan bir matematiksel dil kullanmıştır. Bunun üzerine ÖA5'in verilen işlemi çarpma şeklinde yazması ve bunun üzerinden düşünmesi istenmiştir ama bunda da başarılı olamadığı görülmüştür. ÖA5 bu işlemi çarpma işlemi şeklinde yazmıştır ve başlangıçta kurduğu problemde $4 = X \cdot 1/3$ işlemini kullandığını belirtmiştir. Sonra $4 = 1/3 \cdot X$ işlemini "1/3 gruptan kaç tane olmalı ki 4 etsin?" şeklinde ifade etmiştir. Burada ÖA5 yine bölmenin iki anlamına ilişkin ikileme düşmüştür. Buna göre ÖA5'in bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaşırma anlamına ilişkin anlamasının henüz gelişmediği söylenebilir.

ÖA2 ve ÖA3'ün problemleri incelendiğinde verilen $4 \div 1/3$ işlemini ve bölmenin paylaşırma anlamını yansıtan eş grup yapısında birer problem oldukları görülmektedir (Tablo 4.39). ÖA2 bu işlem için model çizdikten sonra problem kurmuştur ve herhangi bir zorluk yaşamamıştır. Buna göre model çizmenin problem kurmasını kolaylaştırdığı söylenebilir. ÖA3 problem kurarken zorluk yaşamıştır ve bölmeyi çarpmanın tersi olarak ifade etmenin problem kurmasına yardımcı olduğu görülmüştür. ÖA3 öncelikle bu işlem için şöyle bir problem kurmuştur: "*Dört tane pizzam olsun, bu dört pizzayı üç kişi paylaşacak eşit bir şekilde. Her birine ne kadar pizza düşer?*" Burada ÖA3 bölmenin paylaşırma anlamını yansıtan bir problem kurmuştur ancak bu problem verilen işlem yerine $4 \div 3$ işlemini ifade etmektedir. ÖA3 bu problemde işlemdeki kesir yerine paydasına bölme hatasına düşmüştür. Bu problemin işlemini yazması istendiğinde ÖA3 bu problemin verilen işlemi karşılamadığını farketmiştir ve problemi "*4 tane pizzam var, her kişiye 1/3 dilim düşecek kadar kaç kişi yiyebilir?*" olarak düzeltmiştir ancak bunun da verilen işlemi ifade eden ama bölmenin gruptama anlamını yansıtan bir problem olduğunu hemen farketmiştir. Burada ÖA3'ün bölmenin paylaşırma ve gruptama anlamına ilişkin ikileme düştüğü görülmektedir. Bunun üzerine verilen işlemi X ile çarpma işlemi şeklinde yazması ve bunun üzerinden bölmenin iki anlamını tanımlaması istenmiştir. Buna göre 4'ün içinde kaç tane $1/3$ olduğunu bulmaya $X \cdot 1/3 = 4$ işleminin karşılık geldiğini, $1/3$ grupta 4 tane ise 1 grupta kaç tane olduğunu bulmaya $1/3 \cdot X = 4$ işleminin karşılık geldiğini doğru bir şekilde ifade etmiştir. ÖA3 verilen işlemi bu şekilde ifade ettikten sonra

bölmenin paylaştırma anlamını yansıtan ve eş grup yapısında şöyle bir problem kurmuştur: “Bir testin $1/3$ ’ünde 4 soru varsa hepsinde kaç soru vardır?” Buna göre bölme işlemini $1/3 \cdot X = 4$ şeklinde ifade etmenin ÖA3’ün problem kurmasını kolaylaştırdığı söylenebilir. Benzer şekilde ÖA1 ve ÖA6 da önce bölmenin grupta anlamını yansıtan birer problem kurarak bölmenin grupta ve paylaştırma anlamına ilişkin ikileme düşmüşlerdir sonra bölme işlemini çarpma işlemi üzerinden düşünerek verilen işlemi ve bölmenin paylaştırma anlamını yansıtan birer problem kurmuşlardır. Buna göre ÖA3, ÖA1 ve ÖA6’nın bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinin henüz zayıf olduğu ve ÖA2’nin problem kurma bilgisinin problem kurarken herhangi bir zorluk yaşamadığından diğer öğretmen adaylarına göre daha güçlü olduğu söylenebilir.

Öğretmen adaylarının öğretimden önce bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin grupta anlamı için problem kurma bilgisine de sahip olmadıkları ve bu durumun öğretim sürecine yansıdığı tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının bunun için problem kurarken bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamı için problem kurmaya göre daha çok zorluk yaşadıkları görülmüştür. Üçüncü derse paralel yapılan görüşmede (G4) verilen $5/7 \div 3$ işleminin grupta anlamı için ÖA6 ve ÖA2 hariç diğer öğretmen adayları problem kuramamıştır (Tablo 4.40). Buna göre ÖA3, ÖA4, ÖA5 ve ÖA1’in bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin grupta anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinin henüz gelişmediği söylenebilir.

Tablo 4.40.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $5/7 \div 3$ İşlemi İçin Kurdukları

Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen $5/7 \div 3$ işleminin grupta anlamı için kurduğu problem
ÖA6	Bir su şişesi 3 litreliktir. Benim elimde, bir bardakta $5/7$ litre su almaktadır. Boş şişeye bir bardak su koyarsam, şişenin ne kadarı dolmuş olur?
ÖA2	Elimizde 3 pasta vardır, Ahmet bir pastanın $5/7$ ’sini yemiştir. Tüm pastaların ne kadarını yemiştir?
ÖA4	-
ÖA3	-
ÖA5	-
ÖA1	-

ÖA6 ve ÖA2’nin kurdukları problemler incelendiğinde verilen işlemi ve bölmenin grupta anlamını yansıtan, eş grup yapısında birer problem oldukları görülmektedir (Tablo 4.40). Buna göre ÖA6 ve ÖA2’nin bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin grupta anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinin ön-testten dördüncü görüşmeye geliştiği söylenebilir. ÖA5 ve ÖA1’in bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin

gruplama anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinin beşinci görüşmede (G5) geliştiği görülmüştür. Bu görüşmede verilen $3/5 \div 4$ işlemi için her ikisi de bu işlemi ve bölmenin gruplama anlamını yansıtan birer problem kurmuşlardır (Tablo 4.41). ÖA5 ve ÖA1 burada her ne kadar işlemi yansıtan bir problem kursalar da bölmenin paylaşırma ve gruplama anlamına ilişkin bir ikilem yaşamışlardır. Bu ikilemden ÖA5 ve ÖA1 verilen işlemin gruplama anlamı için model çizerek ve işlemdeki $3/5$ ve 4 'ü çarpmanın tanımına göre ifade ederek çıkmışlardır. ÖA3 ve ÖA4 beşinci görüşmede de verilen işlemin gruplama anlamı için problem kuramamışlardır. Buna göre ÖA3 ve ÖA4'ün öğretim süresince bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinin gelişmediği söylenebilir.

Tablo 4.41.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $3/5 \div 4$ İşlemi İçin Kurdukları

Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen $3/5 \div 4$ işleminin gruplama anlamı için kurduğu problem
ÖA6	-
ÖA2	Bir torbada 4 kg pirinç vardır, $3/5$ kg pirinç torbanın ne kadarını doldurur?
ÖA4	-
ÖA3	-
ÖA5	Bir bardak var, 4 kg süt alabiliyor. $3/5$ kg sütü buna dökünce ne kadarı dolar?
ÖA1	Bir bisikletli 4 km yol alacak, $3/5$ km yol almış. Bütün yolun ne kadarını gitmiştir?

Öğretmen adaylarının dördüncü görüşmede (G4) bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaşırma anlamına ilişkin problem kurarken yaşadıkları zorlukların dördüncü derse paralel yapılan görüşmede (G5) oldukça azaldığı görülmüştür. Buna göre öğretmen adaylarının bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaşırma anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinin dördüncü görüşmeden beşinci görüşmeye geliştiği söylenebilir. Bu görüşmede (G5) verilen $3 \div 1/4$ işlemi için ÖA2 ve ÖA5 hariç diğer öğretmen adayları bu işlemi ve paylaşırma anlamını yansıtan birer problem kurmuşlardır (Tablo 4.42). ÖA6, ÖA3 ve ÖA1'in bir önceki görüşmede (G4) verilen $4 \div 1/3$ işleminin paylaşırma anlamı için problem kurarken bölmenin paylaşırma ve gruplama anlamına ilişkin ikileme düşerlerken burada herhangi bir zorluk yaşamadan problem kurdukları görülmüştür. Buna göre ÖA6, ÖA3 ve ÖA1'in bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaşırma anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinin dördüncü görüşmeden beşinci görüşmeye geliştiği söylenebilir. ÖA4 ve ÖA5 bir önceki görüşmede (G4) verilen işlem için problem kuramıyorken, ÖA4'ün burada her ne kadar bölmenin paylaşırma ve gruplama anlamına ilişkin ikilem yaşasa da verilen işlemi ve bölmenin paylaşırma anlamını yansıtan bir problem kurduğu ve ÖA5'in ise yine problem kuramadığı görülmektedir (Tablo 4.42).

Buna göre ÖA4'ün bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin problem kurma bilgisinin dördüncü görüşmeden beşinci görüşmeye az da olsa geliştiği, ÖA5'in bu bilgisinin henüz gelişmediği söylenebilir. Diğer taraftan ÖA2 bir önceki görüşmede (G4) verilen işlem için problem kuruyorken burada kuramamıştır. Buna göre ÖA2'nin bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin problem kurma bilgisinin derin olmadığı söylenebilir.

Tablo 4.42.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $3 \div 1/4$ İşlemi İçin Kurdukları

Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen $3 \div 1/4$ işleminin paylaştırma anlamı için kurduğu problem
ÖA6	Sepetimde bulunan elmaların $1/4$ 'ü 3 taneyse, sepetimde ne kadar elmam vardır, kaç tane elmam vardır?
ÖA2	-
ÖA4	Ahmet arazisinin $1/4$ 'ü ile iş yapmıştır, satmıştır. 3000 lira para almıştır, bütün arazisi kaç liradır?
ÖA3	Bir duvarın $1/4$ 'ünü boyamak için 3 kova boya gerekiyorsa, tamamını boyamam için kaç kova boya gerekir?
ÖA5	-
ÖA1	Bir pastanın $1/4$ 'ü 3 dilim oluyor. Bu pasta kaç dilimden oluşur?

ÖA4 verilen $3 \div 1/4$ işlemi için önce şöyle bir problem kurmuştur: “Ahmet havuzundaki suyun $1/4$ 'ü ile 3 şişe su doldurmuştur. Her bir şişede ne kadar litre su vardır?” ÖA4'ün bu problemi incelendiğinde $3 \div 1/4$ yerine $1/4 \div 3$ işlemini yansıtan bir problem olduğu görülmektedir. Bununla beraber problemde havuzdaki suyun kaç litre olduğu verilmezken “ne kadar litre” diye sormuştur ve “kaç” yerine “ne kadar” ifadesini kullanmıştır. ÖA4'e kurduğu bu problemin ifade ettiği işlemi ve bu işlemi yansıtır yansıtmadığı sorulmuştur. Buna ilişkin geçen diyalog aşağıdaki gibidir (G5, ÖA4, 29/04/2015, 367-380):

G: Bu problemin işlemi nasıl yazarsın?

ÖA4: $1/4$ su, ama o zaman X çarpı $1/4$ olur. Suyun çünkü $1/4$ 'ü.

G: Bu problemin 3 bölü $1/4$ işlemi yansıtır yansıtmadığına ilişkin ne düşünüyorsun?

ÖA4: Yok, yansıtmaz. Aslında 3 litre, 3 tane şişe var, her bir şişeyi $1/4$ litre su, şişe bölü su. Zaten ben neyi arıyorum, suyu arıyorum, olmaz, birbiri cinsinden olacak.

G: Aynı cinsten mi olacak?

ÖA4: Sonuçta su arıyorum. 3 litre suyum var, bu suyun $1/4$ 'ü ile şişeleyeceğim. Yani $1/4$ 'lük şekilde şişeleyeceğim. Kaç şişeye ihtiyacım olur?

G: Bu problemin işlemi nasıl ifade edersin?

ÖA4: $1/4$ çarpı X eşittir 3. $1/4$ tane şişe olmaz, olmaz.

G: Bu işlemi sözel olarak nasıl ifade edersin?

ÖA4: X 'in $1/4$ 'ü üçmüş. Ahmet arazisinin $1/4$ 'ü ile iş yapmıştır, satmıştır. 3000 lira para almıştır, bütün arazisi kaç liradır? Bu olur, evet oldu bu. Tamam, o zaman araziyi çizelim (dikdörtgensel modeli çizmeye başlıyor).

Burada ÖA4 problemin işlemi yansıtmadığını ifade etmiştir. Sonra 3 ile $1/4$ 'ün aynı cinsten olacaklarını belirterek yeniden bir problem kurmuştur: “3 litre suyum var, bu suyun $1/4$ 'ü ile şişeleyeceğim. Yani $1/4$ 'lük şekilde şişeleyeceğim. Kaç şişeye ihtiyacım olur?” Bu

problem $3 \div 1/4$ işlemini ifade etmiştir ancak bölmenin paylaştırma yerine gruptama anlamını yansıtan bir problem olmuştur. Daha sonra bu yeni problemin işlemini $1/4 \cdot X = 3$ olarak ifade etmiştir ancak bunu yansıtmadığını farketmiştir ve yeniden problem kurmuştur. Bu problem işlemin paylaştırma anlamını yansıtmaktadır ancak işlemi tam olarak yansıtmamaktadır (Tablo 4.42). Çünkü 3 bütün yerine 3000 bütün olarak bütün çokluk olarak ele almıştır. Sonuç olarak ÖA4'ün bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin anlamasının henüz gelişmediği ve zayıf olduğu söylenebilir. Bu yüzden önce işlemin tersi için problem kurarken, sonra gruptama anlamı ile karıştırmış ve en son bütün çokluk olarak almıştır.

ÖA5 hem dördüncü görüşmede (G4) hem de beşinci görüşmede (G5) verilen bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamı için problem kuramamıştır. Altıncı derste (D6) verilen alıştırmalarda (A9) yer alan kesir çubuğu modelinin ifade ettiği $3 \div 2/5$ işleminin paylaştırma anlamı için şöyle bir problem kurmuştur: *“Bir ölçü pastanın 2/5’ini yapmak için 3 kutu süt kullanıyor isek, 1 ölçü pasta yapmak için kaç şişe süt gerekir?”* ÖA5’in bu problemi incelendiğinde verilen işlemi ve bölmenin paylaştırma anlamını yansıtan, oran yapısında bir problem olduğu görülmektedir. Buna göre ÖA5’in bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin problem kurma bilgisinin dördüncü görüşmeden altıncı derse geliştiği söylenebilir.

4.2.3.3. Son Durum

Öğretmen adaylarının öğretim sürecinde bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin hem paylaştırma hem gruptama anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinin geliştiği görülmüştür. Bu durum ön-test ve son-testte kurdukları problemler karşılaştırıldığında da görülmektedir (Tablo 4.47). Ön-testte öğretmen adaylarından özellikle ÖA6’nın kesirlerle bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgisinin zayıf olduğu görülmüştür. Bununla beraber modelin verilmesi öğretmen adaylarının problem kurmalarını zorlaştırmıştır. Son-testte bu zorlukların verilen iki işlem için problem kurarken yaşanmadığı görülmektedir (Tablo 4.43). Burada verilen kesir çubuğu modeli için ÖA2 ve ÖA5 hariç diğer öğretmen adayları bölme yerine ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen çarpma işlemini ele almışlardır ve ona göre problem kurmuşlardır. Diğer taraftan ÖA6 burada verilen $1/2 \div 2$ işlemi için diğerlerinden farklı olarak hem paylaştırma hem de gruptama anlamı için model çizmiştir.

Tablo 4.43.

Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemi İçin Kurdukları Problemlere İlişkin Açıklamalar

Öğretmen Adayı	$5 \div 1/2$ (Sözel ifade)	$1/2 \div 2$	$2/7 \div 3$ (Kesir çubuğu modeli)
ÖA6	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı - Ekstra problem kurma (Paylaştırma anlamı)	Bölme yerine çarpma işlemini yansıtan problem ($1/3 \times 2/7$)
ÖA2	- İşlemi yansıtan problem - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Paylaştırma anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Paylaştırma anlamı
ÖA4	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Paylaştırma anlamı	Bölme yerine çarpma işlemini yansıtan problem ($2/6 \times 2/7$)
ÖA3	- İşlemi yansıtan problem - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Paylaştırma anlamı
ÖA5	- İşlemi yansıtan problem - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Paylaştırma anlamı	Bölme yerine çarpma işlemini yansıtan problem ($1/3 \times 2/7$)
ÖA1	- İşlemi yansıtan problem - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Paylaştırma anlamı	Bölme yerine çarpma işlemini yansıtan problem ($1/3 \times 2/7$)

Öğretmen adayları öğretimden sonra uygulanan KÇB son-testinde ikinci görevde verilen “5’in içinde kaç tane $1/2$ vardır?” ifadesine karşılık gelen işlemi doğru bir şekilde $5 \div 1/2$ olarak ifade etmişlerdir ve bu işlem için birer problem kurmuşlardır. Bu problemler incelendiğinde verilen işlemi ve bölmenin gruplama anlamını yansıtan birer problem oldukları görülmektedir (Tablo 4.44). Ön-testte en çok zorluk yaşayan ÖA6 son-testte şöyle bir problem kurmuştur: “1 pastanın $1/2$ 'si ile 1 servis çıkarılıyor. 5 pasta ile kaç servis çıkarabiliriz?” ÖA6’nın bu problemi incelendiğinde eş grup yapısında ve bölmenin gruplama anlamını yansıtan bir problem olduğu görülmektedir. Ön-testte bölmeden ziyade çarpmayı yansıtan bir problem kurarken son-testte bölmeyi ve gruplama anlamını yansıtan bir problem kurmuştur. Buna göre ÖA6’nın bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin problem kurma bilgisinin geliştiği söylenebilir.

Tablo 4.44.

Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Verilen Sözel İfadeye Karşılık Gelen $5 \div 1/2$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen sözel ifadeye karşılık gelen $5 \div 1/2$ işlemi için kurduğu problem
ÖA6	1 pastanın $1/2$ 'si ile 1 servis çıkarılıyor. 5 pasta ile kaç servis çıkarabiliriz?
ÖA2	5 m’lik kablomuz vardır. Her eve $1/2$ m lazımdır. Kaç eve yeter?
ÖA4	Ali 5 litrelik su bidonundaki suyu her bir şişesi $1/2$ litre su alan kaç şişeye doldurabilir?
ÖA3	Ayşe’nin 5 tane kurabiyesi vardır. Ayşe kurabiyelerini $1/2$ 'lik eş dilimlere ayırarak arkadaşlarına ikram etmek istiyor. Ayşe kaç arkadaşına kurabiye ikram edebilir?
ÖA5	Marketten 5 elma alıp çıkmışsam ve mahallede oynayan her çocuğa $1/2$ elma vereceksem kaç çocuğa elma verebilirim?
ÖA1	5 paket çikolatada kaç tane yarım ($1/2$) çikolata vardır?

Öğretmen adayları ön-testte olduğu gibi son-testte de altıncı görevde verilen $\frac{1}{2} \div 2$ işlemi için herhangi bir zorluk yaşamadan problem kurmuşlardır (Tablo 4.45). Öğretmen adaylarından ÖA6 ön-testte bu işlem yerine çarpma işlemini yansıtan bir problem kurarken burada bölmenin her iki anlamını yansıtan birer problem kurmuştur. ÖA3 ise diğerlerinden farklı olarak bölmenin grupta anlamını yansıtan bir problem kurmuştur. Bu anlamını tercih etmesini ÖA3 son-testte ilişkin yapılan görüşmede (G8) verilen işlemi “2’nin ne kadarı $\frac{1}{2}$ ” şeklinde ele alması ile açıklamıştır. ÖA3’ün bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin grupta anlamına ilişkin problem kurma bilgisi öğretim süresince gelişmemiştir ancak son-testte bu anlamı yansıtan bir problem kurabilmiştir. Buna göre ÖA3’ün bu bilgisinin öğretimin sonunda geliştiği söylenebilir.

Tablo 4.45.

Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Verilen $\frac{1}{2} \div 2$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen $\frac{1}{2} \div 2$ işlemi için kurduğu problem
ÖA6	Elimde bulunan 2 kg. şekerin ne kadarı $\frac{1}{2}$ kg. şeker eder? (Gruplama anlamı) 2 kutuda $\frac{1}{2}$ kg şeker varsa 1 kutu kaç kg şeker alır? (Paylaştırma anlamı)
ÖA2	Yarım pastayı iki kişi yiyecektir. Kişi başı ne kadar düşer?
ÖA4	Kamil Bey yemekhanede garsondur. Saat 12’de yemeğinin yarısını tüketmiş olup kalan yarısını da 2 farklı grup öğrenci topluluğuna dağıtacaktır. Bu 2 farklı grup öğrenciden herhangi birisine düşen yemek miktarı başlangıçtaki tüm yemeğinin kaçta kaçtır?
ÖA3	Merve’nin 2 kg alan bir sepeti vardır. Merve sepetine $\frac{1}{2}$ kg’lık elma koyuyor. Merve’nin sepetinin kaçta kaç dolmuştur?
ÖA5	$\frac{1}{2}$ kg sütü olan Büşra, sütü 1’er kg alan 2 şişeye paylaşmak istiyor. Şişelerin her biri kaç kg süt almış olur?
ÖA1	Yarım pastayı ($\frac{1}{2}$ ’si kalan) 2 arkadaş yiyecektir. Her biri pastanın ne kadarını yer?

ÖA6 verilen işlemin her iki anlamı için de problem kurmuştur (Tablo 4.45). Öncelikle bu işlemi $\frac{1}{2} = X \cdot 2$ olarak yazmıştır ve bölmenin grupta anlamı olduğunu belirtmiştir. Bu işlemin altına yazdığı şu açıklama ÖA6’nın bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin grupta anlamına ilişkin bilgisinin derinleştiğini ve kavramsal düzeyde olduğunu göstermektedir: “*Gruplama anlamında ‘1 kutuda 2 kg. şeker vardır. $\frac{1}{2}$ kg. kaç kutuda bulunur?’ şeklinde bir soru sorarsak $\frac{1}{2}$ kg. şeker bir kutudakinden daha az olduğundan kaç kutu şeklinde sormak akla uygun olmadığından bu soru için diğer anlamını düşünmek daha mantıklı olacaktır. Ya da farklı bir düşünce olarak ‘2’nin ne kadarı $\frac{1}{2}$ ’dir?’ şeklinde açıklarım.*” Burada işlemin sonucunun kesirli sayı olmasına dikkat çekerek yani parça-bütün ilişkisi kurarak kesirli sayıya doğal sayı anlamı yüklemekten kaçındığı görülmektedir. Bununla beraber “2’nin ne kadarı $\frac{1}{2}$ ’dir?” ifadesiyle çarpmanın operatör anlamına dikkat çekmektedir ve problemi bunun üzerine kurduğu görülmektedir. ÖA6’nın

bu problemi incelendiğinde eş grup yapısında olup bölmenin grupta anlamını yansıttığı görülmektedir. Sonra ÖA6 işlemi $1/2 = 2 \cdot X$ olarak yazmıştır ve paylaşırma anlamı olduğunu belirtmiştir. ÖA6'nın bu problemi incelendiğinde oran yapısında ve bölmenin paylaşırma anlamını yansıtan bir problem olduğu görülmektedir (Tablo 4.45). Öğretimden önce ÖA6 bu işlemin paylaşırma anlamı için problem kurarken “2 kişiye, tabağa, vs. paylaşırma” şeklinde ele alırken burada oran-orantı yoluyla problem kurması bölme işlemini çarpmanın tersi olarak ele alıp onun üzerinden açıklamaya sıkı sıkıya bağlı olması ile açıklanabilir. Buna kanıt olarak son-testte ilişkin yapılan görüşmede (G8) paylaşırma anlamına ilişkin başka nasıl problem kuracağı sorulduğunda şöyle bir problem kurması gösterilebilir: “İki arkadaş elma yiyeceklerdir, ikisine yarım elma düştüğüne göre biri bir elmanın ne kadarını yer?” ÖA6'nın yine bu problemde de “bir elmanın yarısı 2 arkadaşla paylaşılacak” şeklinde değil çarpma üzerinden düşünerek oran-orantı yoluyla problem kurduğu görülmektedir. Ön-testte verilen bu işlem için sadece paylaşırma anlamına ilişkin problem kurarken, son-testte her iki anlamı için de problem kurabilmiştir. Buna göre ÖA6'nın bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin her iki anlamına ilişkin anlamasının ve problem kurma bilgisinin geliştiği söylenebilir.

Öğretmen adayları ön-testte model verildiğinde zorluklar yaşamışlardır, son-testte ise neredeyse hiç zorlanmadan problem kurmuşlardır ancak bölme işlemi yerine ters çevir çarp algoritmasından gelen $1/3$ ile verilen işleme karşılık gelen çarpma işlemine yönelik problem kurmuşlardır (Tablo 4.46). Öğretimden sonra uygulanan KÇB son-testinde verilen on beşinci görevde yer alan modele karşılık gelen işlemi öğretmen adaylarından ÖA3, ÖA2 ve ÖA1 doğru bir şekilde $2/7 \div 3$ olarak ifade ederken diğer öğretmen adayları $1/3 \times 2/7$ olarak ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarının kurdukları problemler incelendiğinde sadece ÖA3 ve ÖA2'nin problemlerinin $2/7 \div 3$ işlemini ve bölmenin paylaşırma anlamını yansıttığı görülmektedir.

Tablo 4.46.

Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Verilen Kesir Çubuğu Modelinin İfade Ettiği $2/7 \div 3$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen kesir çubuğu modelinin ifade ettiği $2/7 \div 3$ işlemi için kurduğu problem
ÖA6	Duvarın $2/7$ 'sini beyaza boyayacağım. Daha sonra beyaza boyadığım kısmın $1/3$ 'üne kırmızı benekler yapacağım. Kırmızı benekler yaptığım kısım duvarın ne kadarıdır?
ÖA2	Bir çikolatanın $2/7$ 'sini 3 kişi paylaşırsa kişi başı ne kadar çikolata düşer?
ÖA4	Aslı kız isteme merasiminde kahve yapmaktadır. Yaptığı kahvenin $2/7$ 'lik kısmına tuz atıp damata içirecekken damata acıyıp $2/7$ 'lik kısmın 6 'da birine tuz atmaya karar vermiş. Tekrardan adete uyup bu kısmın 2 katına tuz atıp damata içirmiştir. Damatın içtiği tuzlu kahve bütün kahvenin kaçta kaçtır?
ÖA3	Emir'in $2/7$ kg pirinci vardır. Emir pirincini 3 ayrı kaba eşit bir şekilde paylaşmak istiyor. Emir paylaştırdığı kaplardan birine kaç kg pirinç koymuştur?
ÖA5	Bir grup tasonun $2/7$ 'si Ahmet'indir. Tasolarının $1/3$ 'ünü arkadaşına verirse arkadaşı taso kutusundan ne kadar taso almış olur?
ÖA1	Bir sınıfın $2/7$ 'si pikniğe gitmiştir, pikniğe gidenlerin de $1/3$ 'ü İstanbul'a gitmiştir. İstanbul'a gidenler sınıfın ne kadarıdır?

Ön-testte öğretmen adaylarından ÖA5 ve ÖA3 problem kuramamışlardır ve diğerleri de işlemi yansıtmayan problemler kurmuşlardır ve bütünü çokluk olarak ele almışlardır. Son-testte ise yazdıkları işlemleri yansıtan birer problem kurdukları görülmektedir. Buna göre öğretmen adaylarının bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaşırma anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinin geliştiği söylenebilir.

Öğretmen adaylarından ÖA6 verilen $2/7 \div 3$ işlemi için şöyle bir problem kurmuştur: *“Duvarın $2/7$ 'sini beyaza boyayacağım. Daha sonra beyaza boyadığım kısmın $1/3$ 'üne kırmızı benekler yapacağım. Kırmızı benekler yaptığım kısım duvarın ne kadarıdır?”* ÖA6'nın bu problemi incelendiğinde bölme işleminin herhangi bir anlamını yansıtmadığı, daha ziyade çarpma işlemine yönelik bir problem olduğu görülmektedir. ÖA6'nın burada ters çevir çarp algoritmasından gelen $1/3$ ile modelde görülen işlemi ifade ettiği ve bu işlem üzerinden problem kurduğu söylenebilir. Öğretim sürecinde yapılan görüşmede benzer bir işlem için dikdörtgensel alan modeli verildiğinde onu doğru bir şekilde bölme işlemi olarak açıklayıp bölme işlemini yansıtan bir problem kurarken burada çarpma işlemini ele alması model farklılığından ya da modelde parçalama şeklinin farklılığından kaynaklı olabilir.

Sonuç olarak öğretmen adaylarının bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir. Bu gelişme özellikle bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin gruptama anlamına ve bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaşırma anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinde görülmüştür. Bu gelişme Tablo 4.47'de verilmiştir. Bu tablo

öğretmen adaylarının ön-testte, öğretim sürecinde ve son-testte kurdukları problemlerin birarada verilmiş hali olarak sunulmuştur. Öğretimden önce öğretmen adayları bölme işleminin bu anlamlarına ilişkin anlamaya sahip değillerken öğretim sürecinde bu anlamayı kazanmışlardır ve son-testte bazı öğretmen adayları bu anlamlar için problem kurabilmişlerdir. KÇB testinde verilen $1/2 \div 2$ işlemi için öğretimden önce ÖA3 bu işlemin paylaştırma anlamını ifade eden problem kurarken ve ÖA6 bu işlemi yansıtan bir problem kuramazken, öğretimden sonra her iki öğretmen adayı da bu işlemin grupta anlamını ifade eden problem kurabilmişlerdir. Öğretmen adaylarından sadece ÖA3 ve ÖA4'ün öğretim süresince bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin grupta anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinin gelişmediği görülmüştür. ÖA3 son-testte verilen $1/2 \div 2$ işlemi için bölmenin grupta anlamını yansıtan bir problem kurmuştur. Buna göre ÖA3'ün bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin grupta anlamına ilişkin problem kurma bilgisinin son-testte geliştiği söylenebilir. ÖA4'ün ise son-testte de bu anlama ilişkin problem kuramadığı görülmüştür. Buna göre öğretmen adaylarından sadece ÖA4'ün bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin grupta anlamına ilişkin problem kurma bilgisinin ön-testten son-teste gelişmediği söylenebilir. Bu durum ÖA4'ün öğretim sırasında verilen alıştırmalarda ve öğretime paralel yapılan görüşmelerde görevleri yaparken çok istekli olmaması ile açıklanabilir. Bunu kayıt dışı sohbet sırasında bölmenin bu anlamını öğrenmenin çok fazla işine yaramayacağını söylemesi desteklemektedir.

Tablo 4.47.

Öğretmen Adaylarının Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemine İlişkin Problem Kurma Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo

Öğretmen Adayı	Ön-test/G1			Öğretim Süreci/G2-G7				Son-test/G8		
	5 ÷ 1/2 (Sözel ifade)	1/2 ÷ 2	2/7 ÷ 3 (Kesir çubuğu modeli) (Paylaştırma anlamı)	4 ÷ 1/3 (Paylaştırma anlamı)	5/7 ÷ 3 (Gruplama anlamı)	3 ÷ 1/4 (Paylaştırma anlamı)	3/5 ÷ 4 (Gruplama anlamı)	5 ÷ 1/2 (Sözel ifade)	1/2 ÷ 2	2/7 ÷ 3 (Kesir çubuğu modeli) (Paylaştırma anlamı)
ÖA6	• Bölme yerine çarpma işlemini yansıtan problem (5 = X · 1/2)	• İşlemi yansıtmayan problem (İşlemin sonucuna yönelik kurmuş)	• İşlemi yansıtmayan problem (İşlemin sonucuna yönelik kurmuş) • Bilgi ekleme	• İşlemi yansıtan problem • Çarpımsal karşılaştırma yapısında • Paylaştırma anlamı • Bölmenin gruplama ve paylaştırma anlamı ikilemi	• İşlemi yansıtan problem • Gruplama anlamı • Eş grup yapısında	• İşlemi yansıtan problem • Eş grup yapısında • Paylaştırma anlamı	• Problem yok	• İşlemi yansıtan problem • Eş grup yapısında • Gruplama anlamı	• İşlemi yansıtan problem • Eş grup yapısında • Gruplama anlamı • Ekstra problem kurma (Paylaştırma anlamı)	• Bölme yerine çarpma işlemini yansıtan problem (1/3 x 2/7)
ÖA2	• İşlemi yansıtan problem • Gruplama anlamı	• İşlemi yansıtan problem • Paylaştırma anlamı	• İşlemi yansıtmayan problem • Paylaştırma anlamı • Bütünü çokluk olarak alma • Bilgi ekleme	• İşlemi yansıtan problem • Eş grup yapısında • Paylaştırma anlamı	• İşlemi yansıtan problem • Gruplama anlamı • Eş grup yapısında	• Problem yok	• İşlemi yansıtan problem • Eş grup yapısında • Gruplama anlamı	• İşlemi yansıtan problem • Gruplama anlamı	• İşlemi yansıtan problem • Paylaştırma anlamı	• İşlemi yansıtan problem • Paylaştırma anlamı
ÖA4	• İşlemi yansıtan problem • Eş grup yapısında • Gruplama anlamı	• İşlemi yansıtan problem • Paylaştırma anlamı	• İşlemi yansıtmayan problem • Bilgi ekleme • Bütünü çokluk olarak alma	• Problem yok	• Problem yok	• İşlemi yansıtan problem • Eş grup yapısında • Paylaştırma anlamı • Bütünü	• Problem yok	• İşlemi yansıtan problem • Eş grup yapısında • Gruplama anlamı	• İşlemi yansıtan problem • Paylaştırma anlamı	• Bölme yerine çarpma işlemini yansıtan problem (2/6 x 2/7)

						çokluk olarak alma				
ÖA3	- İşlemi yansıtan problem - Gruplama anlamı Yetersiz bilgi	- İşlemi yansıtan model - Paylaştırma anlamı	Problem yok	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı Bölmenin gruplama ve paylaştırma anlamı ikilemi	Problem yok	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı	Problem yok	- İşlemi yansıtan problem - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Paylaştırma anlamı
ÖA5	- İşlemi yansıtan problem - Gruplama anlamı Yetersiz bilgi	- İşlemi yansıtan problem - Paylaştırma anlamı	Problem yok	Problem yok Bölmenin gruplama ve paylaştırma anlamı ikilemi	Problem yok	Problem yok	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Paylaştırma anlamı	Bölme yerine çarpma işlemini yansıtan problem (1/3 x 2/7)
ÖA1	- İşlemi yansıtan problem - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Paylaştırma anlamı	İşlemi yansıtmayan problem	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı Bölmenin gruplama ve paylaştırma anlamı ikilemi	Problem yok	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Paylaştırma anlamı	Bölme yerine çarpma işlemini yansıtan problem (1/3 x 2/7)

4.2.4. İki Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Problem Kurma Bilgisi

4.2.4.1. Başlangıç Durumu

Öğretmen adaylarının öğretimden önce iki kesrin bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinin bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemine göre oldukça zayıf olduğu görülmüştür (Tablo 4.48). Öğretmen adaylarından bazıları öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde verilen $1/7 \div 3/4$ işlemi için problem kuramazken bazıları da işlemi yansıtmayan problem kurmuşlardır (Tablo 4.50). Bu işlem için ÖA2 ve ÖA4 problem kurarken bütünü bir bütün yerine çokluk almışlardır, ÖA6 kesirlerin büyüklüklerini dikkate almayarak $1/7$ 'nin içinde $3/4$ 'ü aramaya yönelik bir problem kurmuştur ve ÖA3, ÖA5 ve ÖA1 ise problem kuramamıştır. ÖA3, ÖA1 ve ÖA6, KÇB ön-testinde verilen modelin ifade ettiği $2/3 \div 1/4$ işlemi için problem kurmuşlardır ancak bu problemler bu modeli ve işlemi yansıtmamaktadır (Tablo 4.49). ÖA4 modelin verildiği bu görev için problem kuramazken, ÖA2 bu görevde verilen modeli ve işlemi yansıtan bir problem kurmuştur. Buna göre ÖA2'nin diğer öğretmen adaylarına göre iki kesrin bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgisinin daha güçlü olduğu söylenebilir. ÖA5 ise KÇB ön-testinde verilen her iki görev için problem kuramamıştır. Buna göre ÖA5'in iki kesrin bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgisinin diğer öğretmen adaylarına göre daha zayıf olduğu söylenebilir.

Tablo 4.48.

Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde İki Kesrin Bölme İşlemi İçin Kurdukları

Problemlere İlişkin Açıklamalar

Öğretmen Adayı	$2/3 \div 1/4$ (Sayı doğrusu modeli)	$1/7 \div 3/4$
ÖA6	• İşlemi yansıtmayan problem	• İşlemi yansıtmayan problem • Gruplama anlamı • Parça-bütün ilişkisi kuramama • Referans alınan bütünü yanlış alma
ÖA2	• İşlemi yansıtan problem • Gruplama anlamı	• Bölme yerine çarpma işlemini yansıtan problem ($4/3 \times 1/7 \times 54$) • Bütünü çokluk olarak alma
ÖA4	• Problem yok	• İşlemi yansıtmayan problem • Gruplama anlamı • Parça-bütün ilişkisi kuramama • Referans alınan bütünü yanlış alma • Bütünü çokluk olarak alma
ÖA3	• İşlemi yansıtmayan problem • Toplamsal karşılaştırma yapısında	• Problem yok
ÖA5	• Problem yok	• Problem yok
ÖA1	• İşlemi yansıtmayan problem	• Problem yok

KÇB ön-testinde verilen yedinci görevde yer alan model (Şekil 4.73) için ÖA6'nın kurduğu problem (Tablo 4.49) incelendiğinde verilen modeli ve bölme işlemini

yansıtmadığı görülmektedir. Zira ÖA6 verilen modelin yansıttığı işlemi ifade edememiştir. Bunun yerine sayı doğrularının ifade ettiği $2/3$ ve $1/4$ kesirlerini ayrı ayrı ele alıp birinin 4, diğerinin 3 ile genişletilip $3/12$ 'ye bölündüklerini ifade etmiştir. Burada ÖA6'nın modelin her bir basamağındaki sayı doğrularını ayrı ayrı ele aldığı ve problemi de bunun üzerinden kurduğu görülmektedir.



Şekil 4.73. KÇB testinde 7. görevde verilen model

Buna kanıt olarak ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) ÖA6'nın şu ifadesi gösterilebilir: “ $3/12$ 'leri bir grup olarak aldığını düşündüğüm için, hani kaç tane $3/12$ 'den oluşur gibi.” Burada ÖA6'nın problem kurmada zorlanması iki kesrin bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgisinin zayıf olmasının yanı sıra model bilgisine sahip olmamasından da kaynaklanıyor olabilir. Çünkü verilen modelin ifade ettiği işlemi belirleyemeyerek uygun problem de kuramamıştır.

Tablo 4.49.

Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Verilen Sayı Doğrusu Modelinin İfade Ettiği $2/3 \div 1/4$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen sayı doğrusu modelinin ifade ettiği $2/3 \div 1/4$ işlemi için kurduğu problem
ÖA6	$2/3$ kesrini 4 ile genişletirsek içinde kaç tane $3/12$ vardır? $1/4$ kesrini 3 ile genişletirsek içinde kaç tane $3/12$ vardır?
ÖA2	Eşit uzunlukta 2 kablomuz vardır. 1. kablodan $2/3$ 'ünü keserek alalım ve 2. kablodan $1/4$ 'ünü keserek alalım. İlk keserek aldığımız kablodan kaç tane daha 2. keserek aldığımız kablo çıkar?
ÖA4	-
ÖA3	Ali ve Ulvi'nin birbirine eşit pastaları vardır. Ali pastasının $2/3$ 'ünü yerken, Ulvi $1/4$ 'ünü yemiştir. Ali, Ulvi'den ne kadar fazla pasta yemiştir?
ÖA5	-
ÖA1	12 lt'lik benzinle istediği yere gidebilen bir araba 8 lt'lik benzinle deponun ne kadarı doludur?

ÖA1'in kurduğu problem incelendiğinde işlemden ziyade $2/3$ 'ün genişletilmiş hali olan $8/12$ kesrine yönelik bir problem olduğu görülmektedir (Tablo 4.49). ÖA1 burada kesrin oran anlamını kullanarak bu problemi kurmuştur. Bu görüşü ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) kurduğu problemin bir kesirli sayı için olduğunu belirterek ve problemi nasıl kurduğunu şöyle açıklayarak desteklemektedir: “12 litrelik benzinle gidebilen yani

bunun paydası 12 olduğu için dedim, 8 litrelik benzinle deponun ne kadarını doldurur? Hani benim elimde 8 tane var, 12 de tamamıydı. 8'in 12'ye oranı olarak yazmışım."

ÖA3 verilen modeli iki kesrin genişletilmesi ve karşılaştırılması şeklinde ifade etmiştir. Burada ÖA3'ün bölme işlemi yerine iki kesrin çıkarma işlemini yansıtan bir problem kurduğu görülmektedir (Tablo 4.49). ÖA2 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak verilen modeli ve modelin ifade ettiği işlemi yansıtan bir problem kurmuştur (Tablo 4.49). Bu problem incelendiğinde bölmenin grupta anlamını yansıtan bir problem olduğu görülmektedir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) bu problemi $2/3$ 'ün içinde kaç tane $1/4$ olduğunu aramaya yönelik kurduğunu belirtmiştir. Burada ÖA2 bir bütünü "bir kablo" olarak ifade etmiştir ancak birim belirtmemiştir. Bu anlamda her ne kadar eksik bir problem olsa da ÖA2'nin öğretimden önce iki kesrin bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgisinin diğer öğretmen adaylarına göre daha güçlü olduğu söylenebilir.

KÇB ön-testinde verilen on altıncı görevde yer alan $1/7 \div 3/4$ işlemi için ÖA3, ÖA5 ve ÖA1 problem kuramazken ÖA6, ÖA2 ve ÖA4 problem kurmuşlardır ancak bu problemler işlemi yansıtmamaktadır (Tablo 4.50). ÖA6'nın problemi incelendiğinde bölmenin grupta anlamını yansıtan bir problem kurduğu görülmektedir (Tablo 4.50). Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) işlemi " $1/7$ 'nin içinde kaç tane $3/4$ var?" şeklinde ifade etmesi buna kanıt olarak gösterilebilir. ÖA6'nın burada $1/7$ kesrini " 1 parselin 7 kardeşe bölünmesi" şeklinde ifade ettiği görülmektedir. Buna göre ÖA6'nın kesrin bölme anlamını kullandığı söylenebilir. Bununla beraber problemde " $3/4$ parsellere bölerek" ifadesiyle işlemdeki $3/4$ 'ün $1/7$ 'den büyük olmasını göz ardı ettiği görülmektedir. Buna göre ÖA6'nın parça-bütün ilişkisi kuramadığı söylenebilir.

Tablo 4.50.

Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Verilen $1/7 \div 3/4$ İşlemi İçin Kurdukları

Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen $1/7 \div 3/4$ işlemi için kurduğu problem
ÖA6	Hakan 7 kardeşidir. Babasının 1 parsel olan tarlası kardeşleriyle kendine miras olarak kalmıştır. Hakan kendine düşen payı $3/4$ parsellere bölerek farklı sebzeler ekecektir. Hakan kaç farklı sebze ekebilir?
ÖA2	54 kişilik bir sınıfın $1/7$ 'si Selin Hoca'nın tezi için gönüllü olmuştur. Sonradan gönüllü kişilerin 3 'te biri daha gönüllü olunca kaç kişi gönüllü olmuş olur?
ÖA4	Terzi Sezen Hanım 56 metre kumaşı 7 eş parçaya bölmüştür. Ardından bu eş parçaların her birini $3/4$ 'er metrelik kumaşlar halinde kullanacaktır. Sezen Hanım'ın her bir parçasının ilk durumdaki kumaşa oranı nedir?
ÖA3	-
ÖA5	-
ÖA1	-

Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) ÖA6'ya problemde “3/4 parseller” ifadesiyle ne demek istediği sorulmuştur ve bunu “Hakan'a düşen parselin 3/4'ü” olarak ifade etmiştir. Buna göre ÖA6'nın problemi kurarken işlemi “1/7'lik parseli 1/7'nin 3/4'ü kadar parsellere ayırma” şeklinde ele aldığı ve 1/7'nin içinde 1/7'nin 3/4'ünden kaç tane olduğunu aradığı söylenebilir. Burada ÖA6'nın işlemdeki 3/4 için referans alınan bütünü yanlış aldığı görülmektedir.

ÖA2'nin verilen işlem yerine $4/3 \times 1/7 \times 54$ işlemini yansıtan bir problem kurduğu görülmektedir (Tablo 4.50). Buna göre ÖA2 bölme yerine ters çevir çarp algoritmasını kullanarak çarpma işlemini ifade eden bir problem kurmuştur. Bununla beraber bir bütün yerine çokluk üzerinden hareket etmiştir. Yani bir bütünün 1/7'si yerine 54 bütünün 1/7'sini ele almıştır. ÖA2 aynı testte model verildiğinde bölmenin grupta anlamını yansıtan bir problem kurarken burada kuramamıştır. Bu duruma bölenin bölünenden büyük veya küçük olmasının etkisi olduğu söylenebilir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) ÖA2'den kurduğu bu problemin ifade ettiği işlemi yazması istenmiştir ve ÖA2 burada 54 yerine önce 56, sonra 63 demek istediğini belirterek şöyle ifade etmiştir: *“Bunu 9 diyelim. Yani bölünmesi için 63 çarptı 1/7 eşittir 9. Bu 9 kişinin de üçte biri daha gönüllü olmuş, bir bölü üçü eşittir üç kişi. Dokuz üç daha toplarsak 12 kişi gönüllü olmuş olur. Bunun matematiksel işlemi.”* Burada ÖA2 işlemi yazmaktan ziyade adım adım çözümünü yapmıştır ancak yine bir bütün yerine çokluk üzerinden hareket etmiştir ve kurduğu problemin verilen bölme işlemini yansıtmadığını farketmemiştir.

ÖA4 aynı testte model verildiğinde iki kesrin bölme işlemi için problem kuramazken burada bu işlem verildiğinde bir problem kurmuştur ve bu problem incelendiğinde ÖA4'ün işlemde bulunmayan bir sayı ilave ederek bir bütün yerine çokluk üzerinden hareket ettiği görülmektedir (Tablo 4.50). Burada ÖA4 “3/4'er metrelik kumaşlar” ifadesiyle bir metrenin 3/4'üne işaret etmiştir ancak 1/7'yi 56 metrenin 1/7'si olarak ifade etmiştir. Buna göre ÖA4 işlemdeki 1/7 ve 3/4 için referans alınan bütünü yanlış almıştır. Bu durumda ÖA4 problemde 8 metrelik kumaşı 3/4'er metre şeklinde parçalara ayırmaya işaret etmiştir

ancak her bir parçanın ilk durumdaki kumaşa oranı diyerek problemin cevabı $\frac{3}{4}$ 56

olmaktadır. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) burada ne demek istediği sorulmuştur. ÖA4 problemde 8 metre kumaşın içinde 3/4 metrelik kaç parça var diye düşündüğünü ifade etmiştir ve işlemin sonucunun $32/3$ olduğunu belirtmiştir. Buna nasıl ulaştığını “56 bölü 7, 8 bölü 3/4 yani 32 bölü 3'tür. 3/4'erli parçalara ayırdığım için” şeklinde

açıklamıştır. Sonra ÖA4'e verilen işlemi sözel olarak nasıl ifade ettiği sorulduğunda ÖA4 "*1/7'lik bir bütünümlün içerisinde 3/4'lük kaç parça var?*" şeklinde ifade etmiştir. Burada ÖA4'ün parça-bütün ilişkisi kuramadığı söylenebilir. Çünkü 1/7'nin 3/4'ten küçük olduğunu göz ardı etmiştir. Buna göre ÖA4'ün öğretimden önce iki kesrin bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgisinin bölmenin gruptama anlamına dayandığı ancak oldukça zayıf ve işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir.

4.2.4.2. Öğretim Süreci

Beşinci (D5) ve altıncı derste (D6) iki kesrin bölme işlemine ilişkin bir öğretim gerçekleştirilmiştir. Öğretimden önce öğretmen adayları iki kesrin bölme işlemine ilişkin zayıf bir problem kurma bilgisine sahiplerken bu derslerde verilen alıştırmalarda ve bu derslere paralel yapılan görüşmelerde bölmenin gruptama ve paylaşırma anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinin geliştiği görülmüştür (Tablo 4.51). Öğretmen adayları öğretim sürecinde çeşitli zorluklar yaşamışlardır. En çok karşılaşılan zorluk problemde işlemin sonucuna doğal sayı anlamı yükleme olmuştur. Bunun yanı sıra bütünü çokluk olarak alma, parça-bütün ilişkisi kuramama ve birim kargaşası gibi zorluklar da yaşadıkları görülmüştür. Öğretmen adayları iki kesrin bölme işleminin paylaşırma anlamına ilişkin problem kurarken gruptama anlamına göre daha az zorlanmışlardır. Bununla beraber iki kesrin bölme işleminin paylaşırma anlamını yansıtan bir model verildiğinde problem kurmada zorluk yaşadıkları görülmüştür. Buna göre modelin verilmesinin problem kurmalarını zorlaştırdığı söylenebilir. Öğretmen adaylarından ÖA4, ÖA5 ve ÖA1'in öğretim sürecinde problem kurarken diğer öğretmen adaylarına göre daha çok zorlandıkları görülmektedir (Tablo 4.51). Bu durum öğretimden önce iki kesrin bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinin diğer öğretmen adaylarınıninkine göre oldukça zayıf olması ile açıklanabilir.

Tablo 4.51.

*Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde İki Kesrin Bölme İşlemi İçin Kurdukları**Problemlere İlişkin Açıklamalar*

Öğretmen Adayı	D5/A7 2/5 ÷ 3/7 (Paylaştırma anlamı)	D5/G6 3/5 ÷ 4/9 (Kesir çubuğu modeli) (Paylaştırma anlamı)	3/4 ÷ 5/7 (Gruplama anlamı)	1/3 ÷ 3/2 (Gruplama anlamı)	D6/G7 4/5 ÷ 3/2 (Gruplama anlamı)	4/5 ÷ 3/2 (Paylaştırma anlamı)
ÖA6	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı İşlemin sonucuna doğal sayı anlamı yükleme	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı
ÖA2	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı Birim kargaşası	- İşlemi yansıtan problem - Oran yapısında - Paylaştırma anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Oran yapısında - Paylaştırma anlamı
ÖA4	Problem yok	Problem yok	İşlemi yansıtmayan problem Bütünü çokluk olarak alma - Gruplama anlamı	İşlemi yansıtmayan problem Parça-bütün ilişkisi kuramama	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı
ÖA3	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı	Problem yok	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Oran yapısında - Paylaştırma anlamı
ÖA5	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı	İşlemin tersini yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı İşlemin sonucuna doğal sayı anlamı yükleme	- İşlemi yansıtan problem - Oran yapısında - Gruplama anlamı İşlemin sonucuna doğal sayı anlamı yükleme	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı
ÖA1	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı	Problem yok	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı İşlemin sonucuna doğal sayı anlamı yükleme Birim kargaşası	İşlemi yansıtmayan problem Parça-bütün ilişkisi kuramama İşlemin sonucuna doğal sayı anlamı yükleme Birim kargaşası	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı

ÖA4 hariç diğer öğretmen adayları beşinci derste (D5) verilen alıştırmalarda (A7) yer alan $2/5 \div 3/7$ işleminin paylaşırma anlamı için bu işlemi ve anlamı yansıtan birer problem kurmuşlardır (Tablo 4.52). Öğretimden önce iki kesrin bölme işlemine ilişkin problem kuramıyorlarken bu derste kurabilmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının ön-testten beşinci derse iki kesrin bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinin geliştiği söylenebilir.

Tablo 4.52.

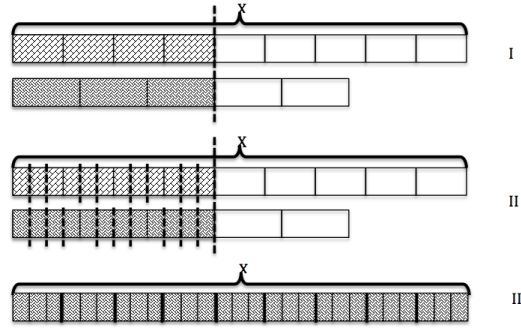
Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $2/5 \div 3/7$ İşlemi İçin Kurdukları

Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen $2/5 \div 3/7$ işleminin paylaşırma anlamı için kurduğu problem
ÖA6	Evimle okulum arasındaki yolun $3/7$ 'si $2/5$ km ise evimle okulum arasındaki mesafe kaç km'dir?
ÖA2	Bir kumun $2/5$ 'i bir kamyonun $3/7$ 'sini doldurmaktadır. Bir kamyon için bu kumun ne kadarı lazımdır?
ÖA4	-
ÖA3	Tablonun $3/7$ 'si için $2/5$ br boya kullanırsak 1 tablo için ne kadar br boya gerekir?
ÖA5	Bir şişenin $3/7$ 'sinde $2/5$ litre süt var. Şişenin tamamında kaç litre süt?
ÖA1	Bir şişenin $3/7$ 'si $2/5$ litredir. Bu şişenin tamamı?

ÖA6'nın verilen $2/5 \div 3/7$ işlemi için kurduğu problem incelendiğinde eş grup yapısında ve bölmenin paylaşırma anlamını yansıtan bir problem olduğu görülmektedir (Tablo 4.52). Benzer şekilde diğer öğretmen adayları da verilen işlemi ve bölmenin paylaşırma anlamını yansıtan birer problem kurmuşlardır (Tablo 4.52). ÖA4 ise bu işlem için problem kuramamıştır. Buna göre ÖA4'ün iki kesrin bölme işleminin paylaşırma anlamına ilişkin problem kurma bilgisinin henüz gelişmediği söylenebilir.

Öğretmen adayları beşinci derste (D5) verilen iki kesrin bölme işleminin paylaşırma anlamını yansıtan bir problem kurarken herhangi bir zorluk yaşamazlarken bu derse paralel yapılan görüşmede (G6) bölmenin paylaşırma anlamını yansıtan bir model (Şekil 4.74) verildiğinde bu modelin ifade ettiği $3/5 \div 4/9$ işlemi için problem kurarken zorlandıkları görülmüştür. Buna göre modelin verilmesinin öğretmen adaylarının problem kurmalarını zorlaştırdığı söylenebilir. Çünkü verilen modelin ifade ettiği işlemi belirlemede güçlük çekerek problem kurmada da zorlanmışlardır.



Şekil 4.74. Görüşme-6’da birinci görevde verilen model

ÖA4 ve ÖA1 verilen model için problem kuramamışlardır, ÖA6, ÖA2, ÖA3 ve ÖA5 ise birer problem kurmuşlardır (Tablo 4.53). ÖA1 modele karşılık gelen işlemi ifade ederken oldukça zorlanmıştır ve her ne kadar doğru bir şekilde ifade etse de bu işlem için problem kuramamıştır. ÖA4 ise modele karşılık gelen işlemi $3/5 \div 4/9$ yerine $4/9 \div 3/5$ olarak ifade etmiştir ve problem kuramamıştır. ÖA6, ÖA2, ÖA3 ve ÖA5 de ÖA1 ve ÖA4 gibi verilen modele karşılık gelen işlemi ifade etmekte oldukça fazla zorlanmışlardır ancak birer problem kurabilmişlerdir. Bu problemler incelendiğinde ÖA6, ÖA2 ve ÖA3’ün problemleri verilen modelin ifade ettiği işlemi ve bölmenin paylaştırma anlamını yansıtırken, ÖA5’in bu işlemin tersini yansıtan bir problem kurduğu görülmektedir (Tablo 4.53).

Tablo 4.53.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen Kesir Çubuğu Modelinin İfade Ettiği $3/5 \div 4/9$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen kesir çubuğu modelinin ifade ettiği $3/5 \div 4/9$ işleminin paylaştırma anlamı için kurduğu problem
ÖA6	X litrelik su şişesinin $4/9$ ’u $3/5$ litreyse bu şişe kaç litre su alır?
ÖA2	$4/9$ pasta yapmak için $3/5$ litre süt gerekiyorsa, bir pastanın tamamını yapmak için kaç litre süt gerekir?
ÖA4	-
ÖA3	Bir pasta yapabilmek için kullanmam gereken sütün $4/9$ ’u $3/5$ litredir. Bir pasta için ne kadar süt gerekir?
ÖA5	Bir pastanın $3/5$ ’inin yapımı için, $4/9$ litre yani bir litrenin $4/9$ ’u kadar süt gerekiyordur ama bir ölçü, bir tam pasta yapabilmek için bir litre sütün ne kadarı gerekir?
ÖA1	-

ÖA6’nın kesirlerle bölmeye ilişkin model çizerken olduğu gibi problem kurarken de bölme işlemini çarpmanın tersi olarak ifade etmeye sıkı sıkıya bağlı olduğu görülmektedir. Buna kanıt olarak kurduğu problemde “X litrelik su şişesi” ifadesini kullanması gösterilebilir. Benzer şekilde ÖA5 de model çizerken olduğu gibi problem kurmadan önce işlemi $3/5 = 4/9 \cdot X$ olarak ifade etmiştir ve bunun üzerinden problem kurmaya çalışmıştır ancak başarılı olamamıştır. ÖA5’in kurduğu problem incelendiğinde bu işlem yerine tersini yani $4/9 \div 3/5$ işlemini yansıtan bir problem olduğu ve bu problemi oran-orantı yoluyla

kurduğu görülmektedir (Tablo 4.53). ÖA5'in şu ifadesi bunu desteklemektedir: *"Bunun sağlamasını da hemen kafamdan ben oran-orantı ile yaptım az önce mesela, 3/5 için 4/9 ise X için hani ne kadar dediğimde, X'in yanında 4/9 oluyor. Yine 3/5, oradan X çıkıyor diye yaptım."* Burada ÖA5 kurduğu problemin verilen modele karşılık gelen işlemin tersini ifade ettiğini farkedememiştir. Buna göre ÖA5'in iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin problem kurma bilgisinin henüz derin olmadığı söylenebilir.

ÖA2 her ne kadar verilen modele karşılık gelen işlemi ve bölmenin paylaştırma anlamını yansıtan bir problem kurmuş olsa da bu problemi kurmadan önce diğer öğretmen adayları gibi verilen modele karşılık gelen işlemi ifade etmekte zorlanmıştır ve bu işlem yerine tersini yansıtan problemler kurmuştur. ÖA2 verilen modele karşılık gelen işlemi $4/9 \div 3/5$ olarak ifade etmiştir ve en son bu işlemi matematiksel olarak yazmaktansa sözel olarak *"Bunun 3/5'i bunun 4/9'uysa tamamı bunun ne kadarıdır?"* şeklinde ifade etmiştir. Sonra bunun üzerinden şöyle bir problem kurmuştur: *"3/5 litrelik sütle bir pastanın 4/9'u tamamlanıyorsa, tamamıyla ne kadarı tamamlanır?"* ÖA2 bu işlemi sözel olarak ifade ettiğinde modelin ifade ettiği işleme işaret etmiştir ancak kurduğu bu problem modelin ifade ettiği işlem yerine tersini yani $4/9 \div 3/5$ işlemini yansıtmaktadır. Bununla beraber bu problemi oran-orantı yoluyla kurduğu görülmektedir. Sonra bu problemi şu şekilde düzenlemiştir: *"4/9 litrelik sütle 3/5 pasta yapılıyor, pastanın tamamı için ne kadar süt gerekir?"*. ÖA2 burada yine oran-orantı yoluyla $4/9 \div 3/5$ işlemini yansıtan bir problem kurmuştur. ÖA2'ye kurduğu bu problemle X'e nasıl ulaşılabileceği sorulmuştur ancak ÖA2 kurduğu problemin uygun olmadığını farkedememiştir ve ikileme düşmüştür. Buna ilişkin geçen diyalog aşağıdaki gibidir (G6, ÖA2, 08/05/2015, 59-81):

G: Bu sütün ne kadarını kullanırsam şurayı bulacağım diyorsun, o zaman burayı buluyorsun (ikinci kesir çubuğunun tamamını gösteriyor), öyle değil mi?

ÖA2: Evet, tamamını buluyoruz (ikinci kesir çubuğunun tamamını gösteriyor).

G: Onu biliyoruz demiştin?

ÖA2: Yok, şimdi yine sütü sordum ben.

G: Nasıl sordun, anlamadım?

ÖA2: 4/9 litrelik sütle bir pastanın 3/5'i tamamlanıyorsa ne kadarlık sütle pastanın tamamı tamamlanır? Yine sorduğum soru X.

G: Peki nasıl çözersin bu problemi?

ÖA2: Böleriz, 20/27 ile tamamlanır da burada (modelin son basamağına işaret ediyor) niye 27/27 olmuş, bunu çözemedim hala. Şu sonuca uygun problem kurdum ben (yazdığı $4/9 \div 3/5$ işlemini gösteriyor). Yani şunu şey yapamadım, ya bu 20'de bitseydi.

G: Ona (modelin son basamağını gösteriyorum) 27/27 mi diyorsun?

ÖA2: Evet, çünkü tamamı taranmış.

G: Peki şu farklı tarama desenleri için ne söylüyorsun?

ÖA2: Bunun desenine göre taramışız (ikinci kesir çubuğunu gösteriyor). Haaa, bu bunun içinde ne kadar vardır (ikinci kesir çubuğunu birinci kesir çubuğu içinde aramaya işaret ediyor) o zaman.

G: Peki bu ifadene göre bütünler aynı mı farklı mı oluyor?

ÖA2: Bütünler farklı, bunun bütünü farklı bunun bütünü farklı sonuçta.

G: Peki bunun içinde bunu ararken bütünler farklı mı oluyor aynı mı?

ÖA2: Aynı olması lazım ama burada farklı (modeli gösteriyor). Demek ki o da yanlış. Hmm.

Burada ÖA2'nin verilen modele karşılık gelen işlemi ters yani $4/9 \div 3/5$ olarak ifade ettiği için bu işlemi ve bu işlemi yaparak bulduğu sonuç olan 20/27'yi göz önüne alarak bir problem kurduğu ve problemin çözümünü de buna göre açıklamaya çalıştığı görülmektedir ancak modelin son basamağını 27/27 olarak ifade ettiği için ikileme düşmüştür. Bununla beraber modeldeki tarama desenlerine dikkat çekilince bu sefer bölmenin gruptama ve paylaşırma anlamına ilişkin ikileme düşmüştür. Burada ÖA2 modeli gruptama anlamına göre ifade ettiğinde bütünlerin aynı olması gerektiğini belirterek ancak modelde bütünlerin farklı olduğunu görerek bu ikileme düşmüştür ve bu göreve ara verilip görüşmede (G6) diğer görevlere geçilmiştir ve en son tekrar dönmüştür. ÖA2 bu soruya tekrar döndüğünde ilk kurduğu probleme benzer bir problem kurmuştur: “*3/5 litreyle 4/9 pasta tamamlanırsa, bir litreyle ne kadar pasta tamamlanır?*”. Bu problem yine $4/9 \div 3/5$ işlemini yansıtmaktadır. ÖA2'ye bu problemin sonucuna nasıl ulaşacağı sorulmuştur ve en sonunda problemi modelin ifade ettiği işlemin tersine yönelik kurduğunu farkederek problemi yeniden kurmuştur. Buna ilişkin geçen diyalog aşağıdaki gibidir (G6, ÖA2, 08/05/2015, 617-625):

G: Bu problemin sonucuna nasıl ulaşırsın?

ÖA2: Bence şu kadar (ikinci kesir çubuğunun tamamına birinci kesir çubuğunda karşılık gelen kısmı gösteriyor).

G: Onu mu arıyorsun?

ÖA2: Evet.

G: Peki X ne ifade ediyor burada?

ÖA2: X, haaa, bütünün tamamı. Bir pasta için ne kadar süt gerekir? Hah oldu, tamam ya. İu, şimdi tekrar baştan başlıyorum. 4/9 pasta yapmak için 3/5 litre süt gerekiyorsa, bir pastanın tamamını yapmak için kaç litre süt gerekir?

Burada ÖA2'nin kurduğu bu son problem modelin ifade ettiği işlemi yansıtmaktadır ancak “4/9 pasta” ifadesi ile kesre doğal sayı anlamı yüklemektedir. Bu ifadeyle bir pastanın 4/9'unu kastetmiş olabilir ancak problemde belirtmemiştir. Bununla beraber problemi yine oran-orantı yoluyla kurmuştur.

Öğretmen adaylarının iki kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin problem kurarken paylaşırma anlamına göre daha çok zorlandıkları görülmüştür. Altıncı görüşmede (G6) verilen $3/4 \div 5/7$ işleminin gruptama anlamı için ÖA3 problem kuramamıştır, ÖA4 işlemi yansıtmayan bir problem kurmuştur ve ÖA6, ÖA5, ÖA1 ve ÖA2 işlemi ve bölmenin gruptama anlamını yansıtan birer problem kurmuşlardır ancak ÖA6, ÖA5 ve ÖA1 işlemin sonucuna doğal sayı anlamı yüklemişlerdir (Tablo 4.54). ÖA2'nin kurduğu problem incelendiğinde verilen işlemi ve bölmenin gruptama anlamını yansıtan bir problem olduğu görülmektedir (Tablo 4.54). Bununla beraber burada

“şişelerin ne kadarını doldurmuş oluruz” ifadesiyle işlemin sonucunun doğal sayı olmayacağını göz önüne aldığı görülmektedir. Bunu işlemin sonucunu “iki şişe kullanmış olacağız, birinin tamamı, birinin de 1/20’si kullanılacak” şeklinde ifade etmesi desteklemektedir.

Tablo 4.54.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $3/4 \div 5/7$ İşlemi İçin Kurdukları

Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen $3/4 \div 5/7$ işleminin grupta anlamı için kurduğu problem
ÖA6	Bir sürahiye $5/7$ litrelik bardaklarla su dolduruluyor. Bu sürahiye $3/4$ litre su koymak için kaç bardak lazım?
ÖA2	$3/4$ litrelik bir sütü $5/7$ litrelik şişelere koyarsak şişelerin ne kadarını doldurmuş oluruz?
ÖA4	28 litre meyve suyunun $3/4$ ’ü paketlenmek üzere kullanılacaktır. Bu meyve suyu $5/7$ litrelik kaç paketle paketlenir?
ÖA3	-
ÖA5	$3/4$ litre sütün içinde kaç tane $5/7$ litre süt vardır?
ÖA1	$3/4$ ’ü kalmış bir pasta $5/7$ ’lik dilimlere bölünecek. Kaç tane pasta dilimi çıkar?

ÖA3 beşinci derste (D5) verilen alıştırmalarda yer alan iki kesrin bölme işleminin grupta anlamı için problem kurarken burada kuramamıştır. Burada verilen işlemi sözel olarak “ $3/4$ ’ün içinde kaç tane $5/7$ var?” ve “ $5/7$ ’nin ne kadarı $3/4$ ’tür?” şeklinde ifade etmiştir. Sonra $X \cdot 5/7 = 3/4$ şeklinde yazarak bu işlemin grupta anlamını yansıtan bir model çizmiştir ancak problem kuramamıştır. ÖA3 modeli çizerken önce işlemdeki $5/7$ için referans alınan bütünü belirlemekte zorlanmıştır ve bölmeden ziyade “ $3/4$ ’ün $5/7$ ’si” anlamını yansıtan bir model çizmiştir ancak sonra doğru bir şekilde çizebilmiştir. ÖA3’ün model çizerken yaşadığı bu zorluk problem kurmasını da zorlaştırmış olabilir çünkü bu model üzerinden problem kurmaya çalışmıştır.

ÖA4 kesirlerle çarpma işleminde olduğu gibi iki kesrin bölme işleminde de işlemde yer almayan bir sayı ilave ederek bütünü çokluk olarak almıştır ve bunun üzerinden bir problem kurmuştur (Tablo 4.54). Bununla beraber “kaç paket” ifadesiyle işlemin sonucuna doğal sayı anlamı yüklemiştir. Bunun üzerine işlemdeki sayıları kullanarak yeniden problem kurması istenmiştir ve ÖA4 grupta anlamını yansıtan şöyle bir problem kurmuştur: “Bir pizzanın $3/4$ ’ü, $5/7$ ’lik kaç parçaya ayrılır?” Bu problemde $5/7$ ’lik derken bir pizzanın $5/7$ ’sini mi kastettiği açık değildir. Bununla beraber “kaç parçaya ayrılır” ifadesiyle yine işlemin sonucuna doğal sayı anlamı yüklemiştir. ÖA4 beşinci derste (D5) verilen alıştırmalarda yer alan işlemlerin grupta anlamı için problem kuramamıştır. Burada da ön-testtekinde benzer şekilde bir bütün yerine çokluk üzerinden hareket ederek bir problem kurmuştur. Buna göre ÖA4’ün ön-testten altıncı görüşmeye (G6) iki kesrin

bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin problem kurma bilgisinin henüz gelişmediği söylenebilir.

ÖA6, ÖA5 ve ÖA1'in verilen $3/4 \div 5/7$ işleminin gruptama anlamı için kurdukları problemler incelendiğinde bu işlemi ve anlamı yansıtan birer problem oldukları ancak işlemin sonucuna doğal sayı anlamı yükledikleri görülmektedir. Burada ÖA3 gibi ÖA6 ve ÖA5 de bu işlemi $3/4 = X \cdot 5/7$ şeklinde yazarak bunun üzerinden problem kurmuşlardır. Buna göre bölmeyi çarpmanın tersi olarak ifade etmenin model çizerken olduğu gibi problem kurmalarını da kolaylaştırdığı söylenebilir. ÖA6, ÖA5 ve ÖA1 ön-testte verilen işlemler için uygun problem kuramazken burada eksik de olsa problem kurmuşlardır. Buna göre ÖA6, ÖA5 ve ÖA1'in ön-testten altıncı görüşmeye (G6) iki kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinin geliştiği söylenebilir.

ÖA4 ve ÖA1 hariç diğer öğretmen adaylarının iki kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin problem kurmalarını bölenin bileşik kesir olmasının zorlaştırmadığı görülmüştür. Buna göre ÖA4 ve ÖA1'in iki kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinin diğerlerine göre zayıf olduğu söylenebilir. Zira ÖA4'ün iki kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin problem kurma bilgisinin ön-testten altıncı görüşmeye gelişmediği görülmüştür. Aynı görüşmede (G6) verilen $1/3 \div 3/2$ işleminin gruptama anlamı için ÖA4 ve ÖA1 hariç diğer öğretmen adayları bu işlemi ve anlamı yansıtan birer problem kurmuşlardır (Tablo 4.55). Bu öğretmen adaylarının problemleri incelendiğinde verilen işlemi ve bölmenin gruptama anlamını yansıtan birer problem kurdukları görülmektedir. ÖA6, ÖA2 ve ÖA3 eş grup yapısında problem kurarken ÖA5 oran yapısında bir problem kurmuştur. Bununla beraber ÖA5 aynı görüşmede (G6) verilen $3/4 \div 5/7$ işlemindeki gibi burada da problemde kullandığı “kaç pasta” ifadesiyle işlemin sonucuna doğal sayı anlamı yüklemiştir.

Tablo 4.55.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $1/3 \div 3/2$ İşlemi İçin Kurdukları

Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen $1/3 \div 3/2$ işleminin gruptama anlamı için kurduğu problem
ÖA6	Bir kutu $3/2$ kg un alıyorsa, $1/3$ kg un kutunun ne kadarını doldurmuş olur, kutunun kaçta kaç dolmuş olur?
ÖA2	$1/3$ litrelik sütümüz var, $3/2$ litrelik kabın ne kadarını doldurur?
ÖA4	Bir pizzanın $1/3$ 'ü $3/2$ 'lik parçalara ayrılacaktır....
ÖA3	$1/3$ litrelik bir sütüm var, bunu $1,5$ litre süt alan bir şişeye boşaltırsam şişenin kaçta kaç dolar?
ÖA5	Bir pasta yapılması için $3/2$ litre süt gerekiyorsa, kaç pasta yapılması için $1/3$ litre süt kullanınız?
ÖA1	Bir kekin $1/3$ 'ü kalmıştır ve bu kek $3/2$ 'lik dilimlere bölünecek. Kaç tane dilim olabilir?

ÖA4 öncelikle verilen $1/3 \div 3/2$ işlemini “ $1/3$ ’ün içerisindeki $3/2$ ’lik kaç kısım vardır?” şeklinde ifade etmiştir ve basit kesrin bileşik kesre bölündüğünü belirtmiştir. Sonra bu işleme yönelik şöyle bir problem kurmuştur: “*Bir pizzanın $1/3$ ’ü $3/2$ ’lik parçalara ayrılacaktır....*” ÖA4 burada $3/2$ ’nin $1/3$ ’ten daha büyük olduğu için problemin anlamlı olmayacağını farkına varmıştır ve “ *$3/2$ ’lik parça ne kadar saçma*” şeklinde ifade etmiştir ancak yeniden problem kuramamıştır. ÖA1 de ÖA4’ün kurduğu probleme benzer şekilde verilen işlemin grupta anlamını yansıtan bir problem kurmuştur (Tablo 4.55). Burada ÖA1 bölenin bölünenden büyük olduğunu dikkate almamıştır, bunun üzerine ÖA1’e “ $3/2$ ’lik dilimler” ile ne demek istediği sorulmuştur ve ÖA1 bunu şöyle açıklamıştır: “*Şimdi $1/3$ ’lik bir şey var, bunun $3/2$ ’si alınmış. Bu daha küçük, bu daha büyük. Pasta örneği buna çok şey olmuyor açıkçası.*” Bu şekilde açıkladıktan sonra problemi yeniden kurmaya çalışmıştır ama başarılı olamamıştır. Sonra bu problemlerin uygun olmadığını şöyle ifade etmiştir: “*Hani elimde bir X var, $X/3$ var. $1/3$ ’lük bir tam kısım var, bu $3/2$ ’lik parçalara ayrılmış. Bunu hep grup sayısı şeklinde değil de diğer şekilde yorumlayacak olursak nasıl olabilir? Çünkü bu daha küçük bir parçanın içinde büyük parçalar aranıyor.*” Burada ÖA1 bölenin bölünenden büyük olduğunu ifade etmiştir ve grupta anlamı yerine paylaşırma anlamının kullanılmasının daha uygun olacağına işaret etmiştir. ÖA1 aynı görüşmede verilen $3/4 \div 5/7$ işlemi için problem kurarken burada kurmakta zorlanmıştır. Buna göre bölenin bileşik kesir olmasının ÖA1’in iki kesrin bölme işleminin grupta anlamına ilişkin problem kurmasını zorlaştırdığı söylenebilir.

Öğretmen adaylarından ÖA4 ve ÖA1 hariç diğerlerinin iki kesrin bölme işleminin grupta anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinin her ne kadar zorluk yaşasalar da ön-testten altıncı görüşmeye geliştiği görülmüştür. ÖA4 ve ÖA1 ise altıncı derse paralel yapılan yedinci görüşmede (G7) uygun birer problem kurarak bu gelişimi göstermişlerdir. Bununla beraber diğer öğretmen adaylarının da problem kurarken yaşadıkları zorlukların ortadan kalktığı görülmüştür. Buna göre problem kurma bilgilerinin altıncı görüşmeden yedinci görüşmeye ilerlediği söylenebilir. Yedinci görüşmede (G7) verilen $4/5 \div 3/2$ işleminin grupta anlamı için öğretmen adaylarının kurdukları problemler incelendiğinde bu işlemi ve anlamı yansıtan eş grup yapısında birer problem oldukları görülmektedir (Tablo 4.56).

Tablo 4.56.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $4/5 \div 3/2$ İşleminin Gruplama Anlamı İçin Kurdukları Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen $4/5 \div 3/2$ işleminin gruplama anlamı için kurduğu problem
ÖA6	4/5 kilogram unumuz 3/2 kilogramlık poşete konulacak olursa bu poşetin ne kadarı dolmuş olur?
ÖA2	Şişelerimiz bir buçuk litre süt alıyor yani 3/2 litre süt alıyor. Bize 4/5 litre süt lazım, şişenin ne kadarını elde ederiz?
ÖA4	4/5 litre su, 3/2 litre su alan şişeye doldurulursa bir şişenin ne kadarı dolar?
ÖA3	Bir buçuk litre süt alabilen bir kabım var, 4/5 litre süt kabımın kaçta kaçını doldurur?
ÖA5	4/5 litre sütü 3/2 litre süt alan şişelere koyarsak bir şişenin ne kadarı dolar?
ÖA1	Elimde 4/5 kilogram un olsun, bu 3/2 kilogramlık paketlere konulacak. 3/2'nin ne kadarı 4/5 oluyor?

Öğretmen adaylarından yine ÖA4 hariç diğerlerinin iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinin ön-testten beşinci derse geliştiği görülmüştür. Bununla beraber bölmenin paylaştırma anlamını yansıtan bir model verildiğinde ÖA5 ve ÖA1'in problem kurarken zorluk yaşadıkları tespit edilmiştir. Yedinci görüşmede (G7) ÖA4'ün iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin problem kurma bilgisinin geliştiği ve ÖA5 ile ÖA1'in yaşadıkları zorlukların ortadan kalktığı görülmüştür. Bu görüşmede (G7) verilen $4/5 \div 3/2$ işleminin paylaştırma anlamı için öğretmen adaylarının kurdukları problemler incelendiğinde bu işlemi ve anlamı yansıtan eş grup ve oran yapısında birer problem kurdukları görülmektedir (Tablo 4.57). Öğretmen adayları bu problemleri kurarken $4/5 = 3/2 \cdot X$ işlemi üzerinden ve işlemdeki sayıları çarpmanın tanımına göre ifade ederek hareket etmişlerdir.

Tablo 4.57.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Verilen $4/5 \div 3/2$ İşleminin Paylaştırma Anlamı İçin Kurdukları Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen $4/5 \div 3/2$ işleminin paylaştırma anlamı için kurduğu problem
ÖA6	4/5 kilogram şekerimiz olsun, bu 3/2 kutuya paylaştırılacak. Bir kutunun tamamı ne kadar şeker alır?
ÖA2	Bir buçuk tabloyu boyamak için 4/5 litre boya gerekiyorsa, bir tabloyu boyamak için kaç litre boya gerekir?
ÖA4	Bir pastanın 3/2'si için 4/5 kilogram un gerekiyor. Pastanın tamamı için kaç kilogram un gerekir?
ÖA3	Bir buçuk sepette 4/5 kilogram pirinç varsa, bir sepette kaç kilogram pirinç vardır?
ÖA5	Bir çuvalın 3/2'si, 4/5 kilogram un ile doludur. Çuvalın tamamı kaç kilogram un ile doludur?
ÖA1	Elimde poşette bir miktar elma var, bu poşetteki elmaların 3/2'si 4/5 kilogrammış. Poşetteki elmalar kaç kilogramdır?

Öğretmen adaylarından ÖA1 bu probleme şu şekilde ulaşmıştır: “X'in 3/2'si 4/5'miş. Mesela bir miktar kalemin 3/2'si, kalem olmaz da, uu, mesela ne olsun, bir pastanın 3/2'si, o da olmuyor, 4/5 dilim olmuyor. Şey diyeyim o zaman, elimde bir miktar elma var, bu 3/2

kilogramı $4/5$ kilogram oluyormuş, X 'in $3/2$ 'si $4/5$ kilogrammış. *İu, o zaman X kaçtır gibisinden bir problem olabilir.*” Buna göre ÖA1'in iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin problem kurma bilgisinin kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir çünkü işlemdeki kesirli sayılara ve anlamlarına dikkat etmektedir. Bununla beraber bölmeyi çarpma üzerinden açıklamanın anlamlandırmasına yardımcı olduğu söylenebilir.

4.2.4.2. Son Durum

Öğretmen adaylarının öğretim sürecinde iki kesrin bölme işleminin hem paylaştırma hem de grupta anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinde görülen gelişim ön-test ile son-testte kurdukları problemler karşılaştırıldığında da görülmektedir (Tablo 4.61). Öğretmen adaylarından sadece ÖA4 her ne kadar öğretim sürecinde iki kesrin bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgisinde gelişim gösterse de son-testte verilen işlemleri yansıtmayan problemler kurmuştur. Bu durum ÖA4'ün bu çalışmaya karşı ilgisinin zayıf olması ile açıklanabilir. Diğer taraftan ÖA1 ön-testte verilen işlemler için problem kuramıyorken son-testte verilen işlemleri ve bölmenin anlamlarını yansıtan birer problem kurabilmiştir. Burada ÖA1 verilen $1/7 \div 3/4$ işlemi için bölmenin hem paylaştırma hem de grupta anlamı için problem kurmuştur.

Tablo 4.58.

Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde İki Kesrin Bölme İşlemi İçin Kurdukları Problemlere İlişkin Açıklamalar

Öğretmen Adayı	$2/3 \div 1/4$ (Sayı doğrusu modeli)	$1/7 \div 3/4$
ÖA6	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı
ÖA2	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı
ÖA4	İşlemi yansıtmayan problem	Bölme yerine çarpma işlemini yansıtan problem ($1/7 \times 3/4$)
ÖA3	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı
ÖA5	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı
ÖA1	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı - Ekstra problem kurma (Gruplama anlamı)

KÇB son-testinde yedinci görevde verilen modelin ifade ettiği işlemi ÖA4 hariç diğer öğretmen adayları doğru bir şekilde $2/3 \div 1/4$ olarak ifade etmiştir ve bu işlem için birer problem kurmuşlardır. Öğretmen adaylarının bu problemleri incelendiğinde eş grup yapısında ve bölmenin gruplama anlamını yansıtan birer problem oldukları görülmektedir (Tablo 4.59). Ön-testte işlemi yansıtmayan problem kurarlarken veya problem kuramıyorlarken burada işlemi ve bölmenin gruplama anlamını yansıtan birer problem kurmuşlardır. Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir. Burada ÖA2 ön-testte modelin ifade ettiği işlemi ve bölmenin gruplama anlamını yansıtan bir problem kurarak öğretim sürecine diğer öğretmen adaylarına göre daha güçlü bir şekilde başlamıştır ancak ön-testte birim kullanmazken son-testte birim kullanarak birim kargaşasını ortadan kaldırmıştır. Buna göre ÖA2'nin iki kesrin bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgisinde ilerleme olduğu söylenebilir. ÖA4 ön-testte de son-testte de verilen modelin ifade ettiği işlemi yansıtan bir problem kurmada başarılı olamamıştır. Buna göre ÖA4'ün iki kesrin bölme işlemine ilişkin anlamasının direnç gösterdiği söylenebilir.

Tablo 4.59.

Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Verilen Sayı Doğrusu Modelinin İfade Ettiği $2/3 \div 1/4$ İşlemi İçin Kurdukları Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen sayı doğrusu modelinin ifade ettiği $2/3 \div 1/4$ işlemi için kurduğu problem
ÖA6	Her şişeye $1/4$ litre süt koyduğum şişelerim vardır. Toplamda $2/3$ litre sütüm var ise şişelerin ne kadarı dolar?
ÖA2	$2/3$ kg unumuz vardır. $1/4$ kg'lık poşetlere koyarsak poşetlerin ne kadarı dolar?
ÖA4	Bir müteahhit bir arsanın $2/3$ 'lük kısmına bir yaşam merkezi ve $2/3$ 'lük kısmın $8'$ de $1'$ ine bahçe yapacakken vazgeçip $8'$ de $1'$ lik kısmın 3 katına bahçe yapıyor. Bahçe olarak yapılan kısım tüm arsanın kaçta kaçıdır?
ÖA3	Ali'nin 1 litrelik şişesinin $2/3$ 'ü süt ile doludur. Ali bu sütü $1/4$ litrelik şişelere aktarmak istiyor. Ali $1/4$ litrelik şişelerin ne kadarını doldurabilir?
ÖA5	$2/3$ litre suyu 1 litrelik şişelerin her birine $1/4$ litre koyacak şekilde paylaştırsak şişelerin ne kadarı dolar?
ÖA1	$2/3$ kg şeker vardır. $1/4$ kg'lık paketlere koyulacaktır. Paketlerin ne kadarı dolar?

ÖA4 verilen modele karşılık gelen işlemi $2/3 \div 1/4$ yerine $3 \times (2/3 \div 8)$ olarak ifade etmiştir ve bu işleme yönelik bir problem kurmuştur ancak bu problem modelin ifade ettiği işlemi ve bölmenin gruplama anlamını yansıtmamaktadır (Tablo 4.59). Bunun yerine $3/8 \times 2/3$ işlemini yansıtan bir problemdir. ÖA4 iki kesrin bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin problem kurma bilgisinde her ne kadar öğretimin sonuna doğru yedinci görüşmede (G7) gelişim gösterse de son-testte uygun bir problem kuramamıştır. Buna göre ÖA4'ün bu

bilgisinin derin olmadığı ve diğer öğretmen adaylarınıninkine göre daha zayıf olduğu söylenebilir.

KÇB son-testinde verilen on altıncı görevde yer alan $1/7 \div 3/4$ işlemi için ÖA4 hariç diğer öğretmen adayları bu işlemi ve bölmenin paylaşırma anlamını yansıtan birer problem kurmuşlardır (Tablo 4.60). Bununla beraber ÖA1 bu işlemin grupta anlamı için de bir problem kurmuştur. Bu problemleri kurarken ÖA2 hariç diğer öğretmen adaylarının bölmeyi çarpmanın tersi olarak yazmadan yararlandığı yani verilen işlemi $1/7 = 3/4 \cdot X$ şeklinde yazarak bunun üzerinden hareket ettikleri görülmektedir. Öğretmen adayları ön-testte bu işlem için uygun problem kuramıyorlarken veya işlemi yansıtmayan problem kuruyorlarken son-testte doğru bir şekilde problem kurabilmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin bölme işleminin paylaşırma anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinin ön-testten yedinci görüşmeye öğretim sürecinde geliştiği ve son-testte derinleştiği söylenebilir. Bununla beraber burada bölmenin grupta anlamı yerine paylaşırma anlamını tercih etmeleri grupta anlamına göre bu anlama ilişkin problem kurma bilgilerinin daha güçlü olduğuna kanıt olarak gösterilebilir. Zira öğretim sürecinde de paylaşırma anlamı için problem kurarken daha az zorluk yaşamışlardır.

Tablo 4.60.

Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Verilen $1/7 \div 3/4$ İşlemi İçin Kurdukları

Problemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen $1/7 \div 3/4$ işlemi için kurduğu problem
ÖA6	Evimle okulum arasındaki yolun $3/4$ 'ü $1/7$ km ise evimle okulum arasındaki yol ne kadardır?
ÖA2	Bir tablonun $3/4$ 'ünü çizmek için $1/7$ litre boya lazımdır. Tablonun tamamı için ne kadar boya lazımdır?
ÖA4	Ressam BOB bir tablo yapmak için $3/4$ litre boya kullanıyor. BOB amca tablosunun $1/7$ 'sini boyayabilmek için kaç litre boyaya ihtiyaç duyar?
ÖA3	Filiz okula varmak için gitmesi gereken yolun $3/4$ 'ünü yürümüştür. Yürüdüğü yol $1/7$ km ise, Filiz'in okul ile evi arasındaki yol kaç km'dir?
ÖA5	Bir çubuğun $3/4$ 'ü $1/7$ cm ise çubuğun uzunluğu kaç cm'dir?
ÖA1	Gideceği yolun $3/4$ 'ünü giden Ali, $1/7$ kilometre yol almıştır, tamamını gitseydi ne kadar yol alırdı?

ÖA4 her ne kadar yedinci görüşmede (G7) iki kesrin paylaşırma anlamına ilişkin problem kurma bilgisinde gelişim gösterse de son-testte verilen $1/7 \div 3/4$ işlemi için uygun bir problem kuramamıştır. ÖA4 öncelikle verilen işlemi çarpma işlemi üzerinden $A \times 3/4 = 1/7$ olarak ifade etmiştir. Böylece bölmenin grupta anlamını ele aldığına işaret etmek istemiş olabilir ancak ÖA4 burada bölme işlemi yerine $1/7 \times 3/4$ işlemini yansıtan bir problem kurmuştur (Tablo 4.60). Son-testte ilişkin yapılan görüşmede (G8) grupta anlamına yönelik bir problem kurmak istediğini belirtmesi bunu desteklemektedir. Ön-

testte işlemi yansıtan bir problem kuramamıştır ve bir bütün yerine çokluk üzerinden hareket etmiştir. Burada da bölme yerine çarpma işlemini yansıtan bir problem kurmuştur ancak ön-test ve son-test arasındaki zamanda gerçekleştirilen görüşmelerde paylaştırma anlamına ilişkin uygun problemler kurmuştur. Bu yüzden ÖA4'ün iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin anlamasının gelişmediği söylenemez. Son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) bu hatasını farketmesi ve problemi düzeltmesi de bunu desteklemektedir. ÖA4 bu hatasını kurduğu problemin işlemini matematiksel olarak ifade etmesi istendiğinde farketmiştir. Buna ilişkin geçen diyalog aşağıdaki gibidir (G7, ÖA4, 20/05/2015, 490-503):

G: Problemin işlemini matematiksel olarak nasıl ifade edersin?

ÖA4: Şimdi çocuk orantı bilmiyor ama emin olmak için, tam garanti olması için, 1 boyayabilmek için $3/4$ litreye ihtiyaç var, $1/7$ boyayabilmek için A litreye ihtiyaç var, zaten ben A 'yı arıyorum. (Gülüyor.) Naptım ben, naptım. Yanlış yaptım ($A = 1/7 \cdot 3/4$ yazıyor).

G: Peki işlemini bu yazdığın işleme yönelik mi kurmuştun (daha önce yazmış olduğu $A \times 3/4 = 1/7$ işlemini gösteriyorum)?

ÖA4: Evet.

G: Bölmenin hangi anlamını ele almıştın?

ÖA4: Graplama.

G: Problemini de graplama anlamına yönelik mi kurdun?

ÖA4: Evet. Aslında litre değil, burada parça anlamına göre kurmuşum, kaç litre diyor ya. Aslında tablonun $1/7$ 'si grup olur, noldu burada ya? Soru yanlış olmuş ondan eminim, peki soru nasıl düzeltilebilir? $1/7$ bölü $3/4$, bir tablo için $3/4$ litre boya, $1/7$ tablo için de, $1/7$ litrelik boya ile ne yapılır olacak. Tabi yaaa, $1/7$ litre boya olacak.

Burada ÖA4 problemdeki “tablonun $1/7$ 'si” ifadesini “ $1/7$ litre boya ile ne yapılır” şeklinde düzeltmiştir ve eksik de olsa graplama anlamını yansıtan bir problem kurmuştur. Bu problemin eksik olmasının nedeni “ne yapılır” ifadesi ile işlemin sonucunu karşılamaması ve ne demek istediğinin açık olmamasıdır. ÖA4 probleminin hatalı olmasını şöyle gerekçelendirmiştir: “Şimdi bu boya cinsi, bu tablo cinsi, ikisi farklı bütünler yani biri elmayken biri armut olmasın diye düşünmüştüm. Aslında oranlayabilmem için birinin elma, diğerinin de elma olması lazım. Elma ile armut kıyaslanabilir mi?” Burada ÖA4 bölmenin graplama anlamında referans alınan bütünlerin aynı olması gerektiğini göz önüne almıştır. Buna göre ÖA4'ün iki kesrin bölme işleminin graplama anlamına ilişkin problem kurma bilgisinin ön-testten son-teste geliştiği ancak diğer öğretmen adaylarınınkindi kadar güçlü olmadığı söylenebilir.

Sonuç olarak öğretmen adaylarının ön-testten son-teste iki kesrin bölme işleminin hem paylaştırma hem de graplama anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinin geliştiği ancak ÖA4'ün iki kesrin bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgisinin diğer öğretmen adaylarınınkindi kadar güçlü olmadığı söylenebilir. Bu gelişim Tablo 4.61'de verilmiştir. Bu tablo öğretmen adaylarının ön-testte, öğretim sürecinde ve son-testte kurdukları

problemlerin birarada verilmiş hali olarak sunulmuştur. Öğretmen adaylarının iki kesrin bölme işleminin paylaşırma anlamına ilişkin problem kurma bilgilerinin grupta anlamına göre daha güçlü olduğu söylenebilir. Buna kanıt olarak öğretim sürecinde verilen işlemlerin paylaşırma anlamı için problem kurarken daha az zorluk yaşamaları gösterilebilir. Bölme işlemini çarpmanın tersi olarak düşünmenin, işlemdeki sayılar için referans alınan bütünlerin aynı olup olmadığını belirlemenin ve işlemdeki sayıları çarpmanın tanımına göre ifade etmenin öğretmen adaylarının problem kurmalarında kolaylık sağladığı söylenebilir. Öğretmen adaylarının öğretim sürecinde kurdukları problemlerin çoğunluğunun eş grup yapısında olması bununla açıklanabilir.



Tablo 4.61.

Öğretmen Adaylarının İki Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Problem Kurma Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo

Öğretmen Adayı	Ön-test/G1		Öğretim Süreci/G6-G7						Son-test/G8		
	2/3 ÷ 1/4 (Sayı doğrusu modeli) (Gruplama anlamı)	1/7 ÷ 3/4	2/5 ÷ 3/7 (Paylaştırma anlamı)	3/5 ÷ 4/9 (Kesir çubuğu modeli) (Paylaştırma anlamı)	3/4 ÷ 5/7 (Gruplama anlamı)	1/3 ÷ 3/2 (Gruplama anlamı)	4/5 ÷ 3/2 (Gruplama anlamı)	4/5 ÷ 3/2 (Paylaştırma anlamı)	2/3 ÷ 1/4 (Sayı doğrusu modeli) (Gruplama anlamı)	1/7 ÷ 3/4	
ÖA6	İşlemi yansıtmayan problem	- İşlemi yansıtmayan problem - Gruplama anlamı - Parça-bütün ilişkisi kuramama - Referans alınan bütünü yanlış alma	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı - İşlemin sonucuna doğal sayı anlamı yükleme	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı
ÖA2	- İşlemi yansıtan problem - Gruplama anlamı	- Bölme yerine çarpma işlemini yansıtan problem (4/3 x 1/7 x 54) - Bütünü çokluk olarak alma	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı - Birim kargaşası	- İşlemi yansıtan problem - Oran yapısında - Paylaştırma anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Oran yapısında - Paylaştırma anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı
ÖA4	Problem yok	- İşlemi yansıtmayan problem - Gruplama anlamı - Parça-bütün ilişkisi kuramama - Referans alınan bütünü yanlış alma - Bütünü çokluk olarak alma	Problem yok	Problem yok	- İşlemi yansıtmayan problem - Bütünü çokluk olarak alma - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtmayan problem - Parça-bütün ilişkisi kuramama	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Gruplama anlamı	- İşlemi yansıtan problem - Eş grup yapısında - Paylaştırma anlamı	İşlemi yansıtmayan problem	Bölme yerine çarpma işlemini yansıtan problem (1/7 x 3/4)	
ÖA3	İşlemi yansıtmayan	Problem yok	İşlemi yansıtan	İşlemi yansıtan problem	Problem yok	İşlemi yansıtan	İşlemi yansıtan	İşlemi yansıtan	İşlemi yansıtan	İşlemi yansıtan problem	

	problem • Toplamsal karşılaştırma yapısında		problem • Eş grup yapısında • Paylaştırma anlamı	• Eş grup yapısında • Paylaştırma anlamı		problem • Eş grup yapısında • Graplama anlamı	problem • Eş grup yapısında • Graplama anlamı	problem • Oran yapısında • Paylaştırma anlamı	problem • Eş grup yapısında • Graplama anlamı	• Eş grup yapısında • Paylaştırma anlamı
ÖA5	• Problem yok	• Problem yok	• İşlemi yansıtan problem • Eş grup yapısında • Paylaştırma anlamı	• İşlemin tersini yansıtan problem • Eş grup yapısında • Paylaştırma anlamı	• İşlemi yansıtan problem • Eş grup yapısında • Graplama anlamı • İşlemin sonucuna doğal sayı anlamı yükleme	• İşlemi yansıtan problem • Oran yapısında • Graplama anlamı • İşlemin sonucuna doğal sayı anlamı yükleme	• İşlemi yansıtan problem • Eş grup yapısında • Graplama anlamı	• İşlemi yansıtan problem • Eş grup yapısında • Paylaştırma anlamı	• İşlemi yansıtan problem • Eş grup yapısında • Graplama anlamı	• İşlemi yansıtan problem • Eş grup yapısında • Paylaştırma anlamı
ÖA1	• İşlemi yansıtmayan problem	• Problem yok	• İşlemi yansıtan problem • Eş grup yapısında • Paylaştırma anlamı	• Problem yok	• İşlemi yansıtan problem • Eş grup yapısında • Graplama anlamı • İşlemin sonucuna doğal sayı anlamı yükleme • Birim kargaşası	• İşlemi yansıtmayan problem • Parça-bütün ilişkisi kuramama • İşlemin sonucuna doğal sayı anlamı yükleme • Birim kargaşası	• İşlemi yansıtan problem • Eş grup yapısında • Graplama anlamı	• İşlemi yansıtan problem • Eş grup yapısında • Paylaştırma anlamı	• İşlemi yansıtan problem • Eş grup yapısında • Graplama anlamı	• İşlemi yansıtan problem • Eş grup yapısında • Paylaştırma anlamı

4.3. Matematiksel İfade Yazma Bilgisi

4.3.1. Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Matematiksel İfade Yazma Bilgisi

4.3.1.1. Başlangıç Durumu

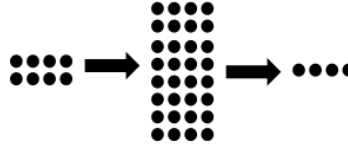
Öğretmen adaylarının öğretimden önce bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin verilen küme modelinin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazmakta zorlandıkları görülmüştür (Tablo 4.62). Bu duruma öğretmen adaylarının bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin model bilgilerinin zayıf olmasının ve küme modeline aşina olmamalarının etkisi olabilir. Bu anlamda KÇB testinde bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin başka tür bir model (alan modeli, vs.) ve bir problem verilerek model türünün ve problem bilgisinin matematiksel ifade yazmaya etkisi de incelenebilirdi ancak testteki soru sayısının fazla olmasından dolayı başka tür bir modelin ve problemin verildiği bir göreve yer verilememiştir. Burada modelin ifade ettiği işlem bütünü belirlemelerine göre değişse de öğretmen adaylarından $1/8 \times 4$ veya $1/2 \times 1$ veya $4/8 \times 1$ şeklinde ifade etmeleri beklenmiştir.

Tablo 4.62.

Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Çarpma İşlemine İlişkin Verilen Küme Modeli İçin Yazdıkları İşlemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen küme modeli için yazdığı işlem	Yazılan işlemin uygunluğu ve karşılaşılan zorluklar
ÖA6	$8 \times 4 = 32, 32/8 = 4$	• İşlem modeli tam olarak karşılamıyor (İşlemi iki basamak halinde yazıyor.)
ÖA2	“32’nin içinde 8, 4 keredir.”	• İşlem yok
ÖA4	$(8 + (8 \times 3)) \div 8$	• İşlem modeli tam olarak karşılamıyor (İşlemi iki basamak halinde yazıyor.)
ÖA3	$8 \times 4 = 32, 32 \div 8 = 4$	• İşlem modeli tam olarak karşılamıyor (İşlemi iki basamak halinde yazıyor.)
ÖA5	$8 \times 4 = 32, 32 \div 8 = 4$	• İşlem modeli tam olarak karşılamıyor (İşlemi iki basamak halinde yazıyor.)
ÖA1	$(1/2 \times 4) \div 8$	• İşlem modeli tam olarak karşılamıyor (İşlemi iki basamak halinde yazıyor.)

Öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde dördüncü görevde verilen küme modelinin (Şekil 4.75) ifade ettiği işlemi ÖA2 hariç diğer öğretmen adayları iki basamak halinde ifade etmişlerdir. Yani bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemi şeklinde ifade edememişlerdir. ÖA2 bu iki basamağın sadece ikinci kısmını sözel olarak ifade etmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının öğretimden önce bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin verilen modelin ifade ettiği işlemi yazmada zayıf oldukları söylenebilir.



Şekil 4.75. KÇB testinde 4. görevde verilen model

ÖA6 verilen modele karşılık gelen işlemi iki basamak halinde “ $8 \times 4 = 32$ ve $32/8 = 4$ ” olarak ifade etmiştir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) bu işlemleri nasıl yazdığına ilişkin aşağıdaki gibi bir diyalog geçmiştir (G1, ÖA6, 17/03/2015, 130-142):

- G: Şurada yuvarlak içine alarak ne demek istedin (modelin ikinci basamağını gösteriyorum)?
 ÖA6: Bunları 1 grup olarak hani mesela 8 tanesini 1 bütün olarak düşünmüşüm hani küme olarak.
 G: Dolayısıyla bu yuvarlaklar neyi ifade etmiş oldu?
 ÖA6: Bir kümeyi bir bütünü ifade etmiş oldu. Hani burada 8 tanesini 1 grup olarak düşünürsek 32'nin içinde kaç tane grup var gibi.
 G: Anladım.
 ÖA6: Ben galiba görsel olarak hani dört katı olduğunu açıkça görüyoruz ya o yüzden.
 G: Yani şu 32 tane, 4 tane, 8 tane diyerek o zaman neyi ifade etmiş oldun?
 ÖA6: 32, 8'in dört katı, 4 de 32'nin 8'e bölümü.
 G: Yani şu “8 tane” ifadesindeki tane ifadesiyle ne demek istedin?
 ÖA6: Her bir kümede kaç birim olduğu gibi düşünmüşüm aslında. Mesela bunu bir bütün olarak düşündüğümüzde her biri 1/8 olur ya hani 1/8'in 8 tanesi 1 bütün.

Burada ikinci basamakta yuvarlak içine alarak gösterdiği iki satırı yani 8 küçük daireyi “1 bütün”, “1 grup” ve “1 küme” olarak ifade etmiştir. Buna göre ÖA6'nın öğretimden önce grup kavramına ilişkin kavramsal anlamaya sahip olmadığı söylenebilir. Benzer şekilde ÖA4, ÖA3 ve ÖA5 de bir küçük daireyi “bir bütün” olarak hareket etmişlerdir ve aynı işlemleri yazmışlardır. ÖA4'ün diğerlerinden farklı olarak 8×4 işlemini çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanarak $8 \times (1 + 3)$ şeklinde yazdığı görülmektedir. ÖA4 ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) modelin birinci ve ikinci basamaklarını şu şekilde ifade etmiştir: “Burada sekiz tane top var, sekiz tane topu bir grup olarak düşünürsem, 4 tane grup olmuş.” Burada “grup” ifadesiyle çarpmanın tanımındaki grup kavramını kastediyor gibi görünse de sonra $8 + (8 \times 3)$ işlemini 8×4 olarak yazabileceğini belirterek henüz grup kavramına ilişkin kavramsal anlamaya sahip olmadığı görülmektedir. Bu görüşmede (G1) ön-testte yazdığı işlemi tek bir adımda nasıl ifade edeceği sorulduğunda önce $8 \times 4/8$, sonra $8 \times 1/2$ olarak ifade etmiştir. Bu işlemi nasıl yazdığı sorulduğunda şöyle açıklamıştır: “Zaten bu işlemin sonucunda en son basamak olarak yarıya düşmüş. Ya ikiye bölmek demek ya da 1/2'lik kısımlara ayırmam yani yarım kısımlara ayırmam demek o yüzden.” Burada ÖA4 bu işlemleri modelin birinci ve son basamağına bakarak ifade ettiğini, modelin ikinci basamağını da göz önüne alınca ön-testte yazdığı işlemi ifade ettiğini belirtmiştir. ÖA4'ün öğretimden önce bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin model bilgisinin diğer öğretmen adaylarına göre daha güçlü olduğu ancak çarpmanın anlamına ilişkin kavramsal anlamaya henüz sahip

olmadığı söylenebilir. Çünkü işlemleri ters yazmıştır yani 4×8 yerine 8×4 ve $4/8 \times 8$ yerine $8 \times 4/8$ yazmıştır. Benzer şekilde diğer öğretmen adayları da 4×8 yerine 8×4 olarak ifade etmişlerdir.

ÖA1 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak verilen modelin ilk basamağındaki 8 küçük daireyi “8 bütün” yerine “bir bütünün $1/2$ ’si” olarak almıştır ve verilen modele karşılık gelen işlemi $(1/2 \times 4) \div 8$ olarak ifade etmiştir. Burada ÖA1 işlemde $4 \times 1/2$ yerine $1/2 \times 4$ yazmıştır. Buna göre ÖA1’in diğer öğretmen adayları gibi öğretimden önce çarpmanın anlamına ilişkin kavramsal anlamaya sahip olmadığı söylenebilir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) modelin ifade ettiği işlemi tek bir adımda nasıl yazacağı sorulmuştur ve ÖA1 bunu şöyle açıklamıştır: “*Şu ikiye bir tam deseydik (modelin ilk basamağını gösteriyor), ondan sonra sekize şey derdik, yani sekizin sekizde biri hani böyle ilk dört çarpı bir bütün, onun da sekizde biri.*” Burada ÖA1 yine tek bir adımda ifade edememiştir ve bu durum sorulunca şöyle açıklamıştır: “*O zaman önce ortadan başlardım, şöyle sekize bir tam deyip (modelin ikinci basamağını gösteriyor), onun dörtte birinin yarısı gibi hani tek basamakla nasıl ifade edeceğimi açıkçası bilmiyorum.*” Buna göre ÖA1’in öğretimden önce bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin model bilgisinin zayıf olduğu söylenebilir.

4.3.1.2. Öğretim Süreci

Öğretmen adayları öğretimden önce bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin verilen modele karşılık gelen işlemi ifade etmekte zorlanırlarken bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işleminin verildiği ilk derste (D1) bu zorluğun ortadan kalktığı görülmüştür. Öğretim sürecinde öğretmen adayları ikinci görüşmede (G2) verilen $2/3 \times 2$ işlemini yansıtan dairesel alan modelinin ifade ettiği işlemi ifade etmenin dışında diğer görevlerde herhangi bir zorluk yaşamamışlardır (Tablo 4.63). Burada ÖA2 hariç diğer öğretmen adayları çarpmanın tekrarlı toplama ve operatör anlamına ilişkin ikilem yaşamışlardır. ÖA2 herhangi bir zorluk yaşamadan verilen dairesel alan modelinin ifade ettiği işlemi doğru bir şekilde $2/3 \times 2$ olarak ifade etmiştir. Bunun yansısı öğretim sürecinde sadece ÖA2 herhangi bir zorluk yaşamadan verilen modelin veya problemin ifade ettiği işlemi doğru bir şekilde ifade etmiştir. Bu durum ÖA2’nin öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin model bilgisinin ve problem kurma bilgisinin diğer öğretmen adaylarınıninkine göre güçlü olması ile açıklanabilir.

Tablo 4.63.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemine İlişkin Verilen Model ve Problemler İçin Yazdıkları İşlemler

Öğretmen Adayı	D1/A2 Küme modeli	Problem	D1/G2 Dairesel alan modeli	Problem	D2/A4 Sayı doğrusu modeli
ÖA6	• $3 \times (2/5 \times 1)$ • İşlem modeli karşılıyor	• $3 \times 2/7$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/3 \times 2$ • İşlem modeli karşılıyor • Çarpmanın tekrarlı toplama ve operatör anlamı ikilemi	• $3/7 \times 4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/3 \times 2$ • İşlem modeli karşılıyor
ÖA2	• $3 \times 2/5 \times 1$ • İşlem modeli karşılıyor	• $3 \times 2/7 \times 1$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/3 \times 2$ • İşlem modeli karşılıyor	• $3/7 \times 4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/3 \times 2$ • İşlem modeli karşılıyor
ÖA4	• $3 \times (2/5 \times 1)$ • İşlem modeli karşılıyor	• İşlem yok	• $2 \times 2/3$ • İşlemin tersini yazma • Çarpmanın tekrarlı toplama ve operatör anlamı ikilemi	• $3/7 \times 4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/3 \times 2$ • İşlem modeli karşılıyor
ÖA3	• $3 \times 2/5 \times 5$ • İşlem modeli tam olarak karşılamıyor • Bütünü çokluk olarak alma	• $3 \times 2/7$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/3 \times 2$ • İşlem modeli karşılıyor • Çarpmanın tekrarlı toplama ve operatör anlamı ikilemi	• $3/7 \times 4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/3 \times 2$ • İşlem modeli karşılıyor
ÖA5	• $3 \times (2 \times 1/5)$ • İşlem modeli karşılıyor	• $3 \times 2/7 \times 1$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/3 \times 2$ • İşlem modeli karşılıyor • Çarpmanın tekrarlı toplama ve operatör anlamı ikilemi	• $3/7 \times 4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/3 \times 2$ • İşlem modeli karşılıyor • Çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanma
ÖA1	• $3 \times 2/5 \times 1$ • İşlem modeli karşılıyor	• $3 \times 2/7$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/3 \times 2$ • İşlem modeli karşılıyor • Çarpmanın tekrarlı toplama operatör anlamı ikilemi	• $3/7 \times 4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/3 \times 2$ • İşlem modeli karşılıyor

İlk derste (D1) verilen alıştırmalarda (A2) yer alan küme modelinin (Şekil 4.67) ifade ettiği işlemi ÖA3 ve ÖA5 hariç diğer öğretmen adayları doğru bir şekilde $3 \times (2/5 \times 1)$ olarak ifade etmişlerdir. ÖA5 diğerlerinden farklı olarak işlemdeki $2/5$ 'i " $2 \times 1/5 \times 1$ " olarak ifade etmiştir ve ÖA3 de bir bütün yerine 5 bütün üzerinden hareket etmiştir. Öğretmen adayları

ön-testte verilen küme modelinin ifade ettiği işlemi ifade etmekte zorlanırlarken ve işlemi ters yazarlarken burada doğru bir şekilde yazdıkları görülmektedir. Buna göre öğretmen adaylarının ilk derste verilen modelin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazma bilgilerinin geliştiği söylenebilir.

Öğretmen adayları aynı alıştırılmalarda (A2) verilen “Partiden sonra 3 paket pizza kalmıştır ve her bir pakette bir pizzanın $\frac{2}{7}$ ’si vardır. Serap herkes gittikten sonra bu kalan pizzaların hepsini yemiştir. Serap bir pizzanın ne kadarını yemiştir?” probleminin ifade ettiği işlemi de doğru bir şekilde $3 \times \frac{2}{7}$ ve $3 \times \frac{2}{7} \times 1$ olarak ifade etmişlerdir. ÖA4 bu görevi cevaplamadığından ÖA4’ün durumu için bir şey söylenememektedir. Öğretmen adayları verilen modele karşılık gelen işlemi doğru bir şekilde ifade ettikleri gibi verilen probleme karşılık gelen işlemi de doğru bir şekilde ifade etmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının ilk dersin (D1) sonunda bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin verilen temsil türleri arasında herhangi bir zorluk yaşamadan geçiş yapabildikleri söylenebilir.

Öğretmen adayları her ne kadar ilk derste (D1) verilen model ve probleme karşılık gelen işlemleri doğru bir şekilde ifade etseler de ilk derse (D1) paralel yapılan görüşmede (G2) verilen dairesel alan modeline (Şekil 4.68) karşılık gelen işlemi ifade ederken çarpmanın tekrarlı toplama ve operatör anlamına ilişkin ikileme düştükleri görülmüştür. Buna göre öğretmen adaylarının çarpmanın anlamına ilişkin kavramsal anlamalarının henüz derin olmadığı söylenebilir. ÖA4 hariç diğer öğretmen adayları bu ikilemden çıkarken ÖA4 çıkamamıştır ve verilen modele karşılık gelen işlemin $2 \times \frac{2}{3}$ mü yoksa $\frac{2}{3} \times 2$ mi olduğunu tam olarak ifade edememiştir. Buna göre ÖA4’ün diğer öğretmen adaylarına göre temsiller arası geçişte daha zayıf olduğu söylenebilir.

ÖA6 bu görüşmede (G2) verilen modeli öncelikle şu şekilde açıklamıştır: “Burada sözel olarak baktığım zaman her bir bütünün $\frac{2}{3}$ ’ü alınmış. Hani mesela pasta cinsinden değerlendirirsek, iki pastamız var, $\frac{2}{3}$ ’ü yenmiştir her birinin. Hani sonuçta ne kadar pasta yenmiştir gibi bir soru şeklinde ifade edebiliriz gibi geliyor.” Burada ÖA6’nın çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğinden yararlanarak “2’nin $\frac{2}{3}$ ’ü” anlamına işaret ettiği söylenebilir. Sonra modele karşılık gelen işlemi “her bir bütünün $\frac{2}{3}$ ’ü yenmiştir, 2 tane bütünüümüz vardır.” şeklinde ifade edip $2 \times (\frac{2}{3} \times 1)$ olarak yazmıştır. Buna göre ÖA6’nın çarpmanın operatör ve tekrarlı toplama anlamına ilişkin ikileme düştüğü söylenebilir. Burada ÖA6’nın gözden kaçırdığı önemli nokta başlangıçta 1

bütün değil 2 bütünün olmasıdır. ÖA6 ile geçen aşağıdaki diyalog yaşadığı bu ikilemi daha net bir şekilde göstermektedir (G2, ÖA6, 24/03/2015, 12-40):

G: O halde $2 \times \frac{2}{3}$ mü diyorsun?

ÖA6: Evet.

G: Peki $\frac{2}{3} \times 2$ diyemez miyiz?

ÖA6: $\frac{2}{3} \times 2$, ama şimdi hani o 2 dediğimiz zaman, o zaman biz iki tanesini bir bütün olarak almış olacağız.

G: $\frac{2}{3} \times 2$ dersek mi?

ÖA6: Evet. Hani 2'nin $\frac{2}{3}$ 'ü olmuş olacak. Ama biz burada hani soruyu kurduğumuz şekilde 2 tane bütün olarak kabul ettik. Hani iki farklı bütün olarak kabul ettik.

G: Peki şu parantez içinde yazdığın kısımla ($2 \times (\frac{2}{3} \times 1)$) işlemini gösteriyorum) ne demek istedin, biraz daha açar mısın?

ÖA6: Bir bütünün $\frac{2}{3}$ 'ü.

G: Bu modelde görülüyor mu?

ÖA6: Evet, bir bütünün $\frac{2}{3}$ 'ü taranmış (Şekil 4.68'deki modelin ikinci basamağındaki ilk daireyi gösteriyor).

G: Peki başlangıç noktası 1 bütün mü 2 bütün mü?

ÖA6: Hmm, başlangıç noktası 2 bütün, her birinin $\frac{2}{3}$ 'ü taranmış, bu şekilde yazarsak bir bütün üzerinden gitmiş gibi mi görünüyor? O zaman biz başlangıcımızı bir bütün olarak aldığımız şekilde bu işlemi kuruyoruz. Hani mesela bir bütünümüz var, $\frac{2}{3}$ 'ü ifade ediyor, bundan 2 tane var.

G: Bu görülüyor mu modelde?

ÖA6: Yok, burada başlangıçta 2 bütün var.

G: O zaman işlem değişiyor mu?

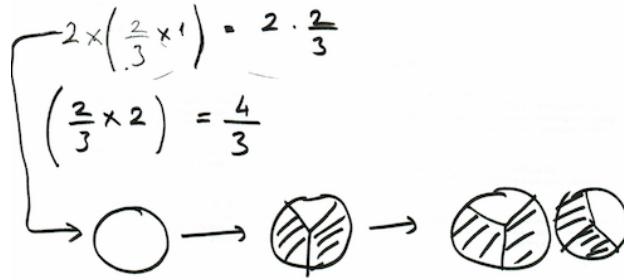
ÖA6: O zaman işlemimiz değişebilir.

G: Nasıl olur?

ÖA6: O zaman hani bu 2 kavramı yerine sadece $\frac{2}{3}$ 'ün 2, 2 bütünün $\frac{2}{3}$ 'ü şeklinde ifade ederiz ($\frac{2}{3} \times 2$ işlemini yazıyor).

G: Neden fikrin değişti?

ÖA6: Hani mesela şu şekilde yapmış olsa, şimdi bir bütün, bunun $\frac{2}{3}$ 'ü taranmış, daha sonra bu bütünden 2 tane alınmış (Şekil 4.76'daki modeli çiziyor). Benim ilk kurduğum işlem ($2 \times (\frac{2}{3} \times 1)$) işlemini kastediyor) daha çok bunu ifade etmeye yönelik (Şekil 4.68'i gösteriyor). Ama burada hani başta iki bütünümüz var, iki bütün üzerinden gidilmiş.



Şekil 4.76. Görüşme-2'de 1. görevde ÖA6'nın $2 \times \frac{2}{3}$ işlemi için çizdiği model

Bu diyaloga göre ÖA6 verilen modelin ilk basamağında iki bütünün 1 bütün olarak alındığını ifade edip bunu $\frac{2}{3} \times 1$ şeklinde yazmıştır. Burada 2 yerine 1 yazarak aslında yeni bütün kavramına işaret etmiştir ancak bu kavrama ilişkin anlamaya henüz sahip olmadığı için ifade etmekte zorlandığı söylenebilir. Sonra $\frac{2}{3} \times 1$ işlemini verilen modelin ikinci basamağında $\frac{2}{3}$ 'leri taralı olan iki daire olduğuna işaret ederek $2 \times (\frac{2}{3} \times 1)$ şeklinde yazması sonucu $\frac{2}{3} \times 2$ işlemini $2 \times \frac{2}{3}$ işlemi olarak yorumlamıştır ve ikileme düşmüştür. Burada aslında $2 \times \frac{2}{3}$ ile verilen modelin tamamından ziyade sadece ikinci

basamağını ifade etmektedir ancak bunun farkına varamamıştır. Bu diyalogun sonunda bu iki anlama ilişkin ikilemden başarıyla çıkmıştır ve bu iki anlamın farkını $2 \times \frac{2}{3}$ işleminde bir bütün üzerinden, $\frac{2}{3} \times 2$ işleminde 2 bütün üzerinden hareket edildiği şeklinde açıklamıştır. ÖA5, ÖA3 ve ÖA1 de benzer şekilde önce verilen modele karşılık gelen işlemi $2 \times \frac{2}{3}$ olarak ifade etmişlerdir sonra bu işlem için ÖA6'nınkine benzer şekilde dairesel alan modeli çizerek çarpmanın iki anlamına ilişkin ikilemden çıkmışlardır. Sonuç olarak öğretmen adaylarının verilen modelin ikinci basamağına bakarak çarpmanın iki anlamına ilişkin ikileme düştükleri ve bu ikilemden çıkmalarında işlemdeki 2 ve $\frac{2}{3}$ 'ü çarpmanın tanımına göre "grup sayısı" ve "her bir gruptaki nesne sayısı" olarak ifade etmenin ve her iki işlem için model çizmenin yardımcı olduğu görülmüştür.

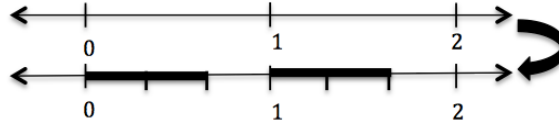
ÖA2 de diğer öğretmen adayları gibi önce verilen modele karşılık gelen işlemi $2 \times \frac{2}{3}$ olarak ifade etmiştir ancak sonra verilen modelin ilk basamağını göz önüne alarak hemen bu işlemi $\frac{2}{3} \times 2$ olarak düzeltmiştir. Bunu ÖA2 şu şekilde açıklamıştır: *"Şuna dikkat etmemiştim (verilen modelin ilk basamağını gösteriyor) yani bu bir tane olsaydı bir bütünün $\frac{2}{3}$ 'ünden 2 tane var diyecektik ama 2 bütün olduğu için 2 bütünün $\frac{2}{3}$ 'ü önce şöyle göstermiş daha rahat anlaşılırsın diye sonra bu parçaları birleştirdiğimizde bir bütün artı $\frac{1}{3}$ bütün şeklinde gözükeceğini bize göstermiş."* Buna göre ÖA2'nin bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin verilen modelin ifade ettiği işlemi yazmada diğer öğretmen adaylarına göre daha güçlü olduğu söylenebilir.

ÖA4 diğer öğretmen adayları gibi verilen modele karşılık gelen işlemi $2 \times \frac{2}{3}$ olarak ifade etmiştir ancak daha sonra $\frac{2}{3} \times 2$ işlemi için kendisi yeni bir model çizse de yine $2 \times \frac{2}{3}$ işlemi olduğunu belirtmiştir. Burada verilen model ile aynı modeli çizdiği halde verilen modelin $\frac{2}{3} \times 2$ işlemini ifade ettiğini farkedememiştir ve bunu $2 \times \frac{2}{3}$ ile $\frac{2}{3} \times 2$ işlemlerinin ifadelerinin farklı ama modellerinin aynı olması ile açıklamıştır. Bunun üzerine doğal sayılarla çarpma işlemi üzerinden model çizdirerek farketmesi sağlanmaya çalışılmıştır ancak verilen modele döndüğünde yine $2 \times \frac{2}{3}$ işlemini ifade ettiğini belirtmiştir. Diğer taraftan işlemdeki 2 ve $\frac{2}{3}$ 'ü çarpmanın tanımına göre ifade etmesi istendiğinde bütün/nesne ve grup ikilemine düşmüştür. ÖA4 öncelikle $2 \times \frac{2}{3}$ işleminde 2'yi grup sayısı, $\frac{2}{3}$ 'ü her bir gruptaki nesne sayısı olarak doğru bir şekilde ifade etmiştir. Model üzerinde göstermesi istendiğinde bir dairenin bir grup aynı zamanda bir bütün olduğunu belirtmiştir. Burada ÖA4'ün grup ve bütün kavramlarına ilişkin derin bir anlamaya sahip olmadığı söylenebilir. Çünkü bir grupta 2 bütün olduğunu ifade etmesi gerekirken 1 bütünü 1 grup olarak almıştır. Sonra *"İki grup, iki tane, bir ve ikincisi, her*

gruptan 2/3'lük nesneler alınmış, sonra bunlar tekrarlı toplama, zaten çarpma.” şeklinde ifade ederek modeli açıklamayı bitirmiştir. Burada *“her gruptan 2/3'lük nesneler alınmış”* ifadesiyle grup ve nesne/bütün kavramlarına ilişkin ikilem yaşadığı görülmektedir. Daha sonra $2/3 \times 2$ işleminde $2/3$ 'ü “grup sayısı” ve 2'yi “nesne sayısı” olarak, $2 \times 2/3$ işlemini *“2 tane gruptan 2/3'lük nesneler”* ve $2/3 \times 2$ işlemini *“2'nin 2/3'ü”* olarak ifade etmiştir. Buna göre ÖA4'ün tanım olarak çarpma işleminde ilk sayının grup sayısı ikincinin nesne sayısı olduğunu bildiği ama anlamına ilişkin kavramsal anlamaya henüz sahip olmadığı söylenebilir. Sonuç olarak ÖA4'ün bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin verilen modelin ifade ettiği işlemi yazmada diğer öğretmen adaylarına göre daha zayıf olduğu söylenebilir.

Öğretmen adayları burada çarpmanın tekrarlı toplama ve operatör anlamına ilişkin ikileme düşerlerken aynı görüşmede (G2) verilen probleme karşılık gelen işlemi ifade ederken öğretmen adaylarının herhangi bir zorluk yaşamadıkları görülmüştür. Bu durum öğretmen adaylarının bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin model bilgilerinin problem bilgilerine göre daha zayıf olması ile açıklanabilir. Şöyle ki çarpmanın iki anlamının modellerinin farklı olduğuna ilişkin kavramsal anlamalarının henüz zayıf olmasından dolayı model verildiğinde her iki işlemin de olabileceğini düşünerek ikileme düşmüşlerdir. Öğretmen adayları bu görüşmede (G2) verilen *“Bir terzi müşterilerinden birisi için bir pantolon dikecektir ve elinde 4 metre kumaş vardır. Terzi bu pantolon için bu kumaşın 3/7'sini kullanacaktır o halde bu pantolon kaç metre kumaştan dikilecektir?”* problemine karşılık gelen işlemi doğru bir şekilde $3/7 \times 4$ olarak ifade etmişlerdir. Burada problemin verilmiş olmasının öğretmen adaylarının işlemi yazmalarını kolaylaştırdığı söylenebilir. Çünkü öğretmen adayları verilen problemi sözel olarak “4 metrelik kumaşın 3/7'si” şeklinde ifade etmişlerdir ve bunu “4'ün 3/7'si” şeklinde düşünerek işlemi rahatlıkla matematiksel olarak yazmış olabilirler. Yani öğretmen adaylarının $3/7 \times 4$ işlemini “4'ün 3/7'si” olarak ifade etmeleri ve bu ifadenin problemde de benzer şekilde geçmesinin ikileme düşmemelerinde etken olduğu söylenebilir.

Öğretmen adaylarının verilen modele karşılık gelen işlemi ifade ederken yaşadıkları zorluğun ikinci derste (D2) ortadan kalktığı görülmüştür. Buna göre öğretmen adaylarının ilk dersten ikinci derse bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin anlamalarının ilerlediği söylenebilir. Öğretmen adayları bu derste verilen alıştırmalarda (A4) yer alan sayı doğrusu modeline (Şekil 4.77) karşılık gelen işlemi doğru bir şekilde $2/3 \times 2$ olarak ifade etmişlerdir.



Şekil 4.77. Alistirmalar-4'te 1. görevde verilen ikinci model

Öğretmen adaylarının ikinci görüşmede (G2) dairesel alan modeliyle verilen aynı işlemi yazarken zorlandıkları hatta çarpmanın operatör ve tekrarlı toplama anlamına ilişkin ikileme düştükleri görülürken burada herhangi bir zorluk yaşadıkları görülmemiştir. Bu duruma bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin anlamalarındaki ilerlemenin yanısıra verilen modelin türünün etkisinin de olduğu söylenebilir.

4.3.1.3. Son Durum

Öğretmen adaylarının öğretim sürecinde bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin verilen model ve problemin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazma bilgilerinde gelişme olduğu görülmüştür. Bu gelişim ön-test ve son-testte verilen model için yazdıkları işlemler incelendiğinde de bazı öğretmen adayları için görülmektedir. ÖA6, ÖA3 ve ÖA1 öğretimden sonra uygulanan KÇB son-testinde dördüncü görevde verilen modele karşılık gelen işlemi $1/8 \times 4$ olarak ifade ederlerken ÖA4 ve ÖA5 bu işlem yerine $4 \div 8$ olarak ifade etmişlerdir (Tablo 4.64). ÖA2 ise ön-testte ifade ettiği gibi aynı şekilde ifade etmiştir. Buna göre ÖA2'nin bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin verilen modelin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazma bilgisi öğretim sürecinde gelişim gösterse de küme modeli için çok fazla geliştiği söylenemez.

Tablo 4.64.

Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Çarpma İşlemine İlişkin Verilen Küme Modeli İçin Yazdıkları İşlemler

Öğretmen Adayı	Öğretmen adayının verilen küme modeli için yazdığı işlem	Yazılan işlemin uygunluğu ve karşılaşılan zorluklar
ÖA6	$1/8 \times 4$	• İşlem modeli karşılıyor
ÖA2	$32/8 = 4$	• İşlem modeli tam olarak karşılamıyor
ÖA4	$4 \div 8$	• İşlem modeli tam olarak karşılamıyor
ÖA3	$1/8 \times 4$ veya $1/2 \times 1$	• İşlem modeli karşılıyor
ÖA5	$4 \div 8$	• İşlem modeli tam olarak karşılamıyor
ÖA1	$1/8 \times 4$ veya $1/2 \times 1$	• İşlem modeli karşılıyor

ÖA6, ÖA3 ve ÖA1 ön-testte verilen modele karşılık gelen işlemi iki basamak halinde ifade ederken son-testte tek basamak halinde bir kesir ile bir doğal sayının çarpımı şeklinde ifade etmişlerdir. Son-testte ilişkin yapılan görüşmede (G8) bu işleme nasıl ulaştığı ve bu işlemin modelin tamamını yansıtıp yansıtmadığı sorulduğunda ÖA6 şu şekilde açıklamıştır: “Aslında ben buradaki şeklin verilme amacını başlarda tam anlamamıştım, hani 1’den 4’e

mesela şu şekilde. 1 bütün aldım 4 bütün var, 1 çarpı 4 bütün, önce bunu göstermeliyiz, daha sonra bunun $1/8$ 'ini ifade etmeliyiz ($1/8 \times (4 \times 1)$ yazıyor). Anlamı göstermek açısından bu şekilde yazabiliriz.” ÖA6’nın bu açıklamasında anlama vurgu yaparak modele karşılık gelen işlemi bu şekilde yeniden ifade etmesi kavramsal anlamının gelişimine işaret olarak düşünülebilir. Burada kavramsal anlamının geliştiğine ilişkin diğer bir kanıt olarak ön-testte verilen modeli doğal sayılarla çarpma ve bölme ile açıklıyorken burada bir doğal sayı ile bir kesrin çarpımı şeklinde ifade etmesi gösterilebilir. Bununla beraber ön-testte “birim, bütün, küme, grup” kavramlarının altında yatan anlama dikkat etmeksizin kullanırken son-testte anlamlarına dikkat ederek bu kavramları kullandığı görülmektedir. Örneğin, ön-testte her bir küçük daireyi “tane” olarak ifade ederken son-testte 8 küçük daireyi “bir bütün” ve bir küçük daireyi de “parça” şeklinde ifade ederek parça-bütün ilişkisi kurmaktadır. ÖA1 ve ÖA3 de $1/8 \times 4$ işlemine nasıl ulaştıklarını benzer şekilde açıklayarak ÖA6’dan farklı olarak bu modele karşılık gelen işlemi aynı zamanda $1/2 \times 1$ olarak da ifade etmişlerdir.

ÖA5 ve ÖA4 verilen modele karşılık gelen işlemi bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemi yerine iki doğal sayının bölme işlemi şeklinde ifade etmişlerdir. Son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) de başka şekilde ifade edememişlerdir. ÖA5 burada $4 \div 8$ işlemini nasıl yazdığını bu görüşmede (G8) şöyle açıklamıştır: “Şimdi modelde bir bütün görüyoruz, sonra 4 bütün olduğunu görüyoruz. Burası 1 bütün (verilen modelin birinci basamağını gösteriyor), burası da 4 bütün (verilen modelin ikinci basamağını gösteriyor) ve 4 eş parçaya ayrılmış ve bir bütünün yarısı kalmıştır sonuçta. Burada 4 bölü 8.” Buna göre ÖA5 ve ÖA4’ün bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin verilen küme modelinin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazma bilgisinin diğer öğretmen adaylarınınkinden kadar güçlü olmadığı söylenebilir.

ÖA2’nin diğer öğretmen adaylarından farklı olarak bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemi için verilen küme modeline ilişkin anlamasında çok fazla gelişme olduğu söylenemez. Çünkü ön-testte de son-testte de verilen modele karşılık gelen işlemi aynı şekilde $32/8$ olarak ifade etmiştir. Son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) bu işlemi nasıl yazdığını şöyle açıklamıştır: “Burada 8 tane vermiş, burada 32 tane. 32 tanenin içinde 8 tane kaç tanedir, 4 tanedir diye düşündüm ben (verilen modelin ikinci basamağının içinde ilk basamağını aramaya işaret ediyor).” Bu görüşmede ÖA2 bu işlemi yine bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemi şeklinde ifade edememiştir.

Sonuç olarak öğretmen adayları öğretim sürecine verilen model veya problemin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazma bilgisi zayıf bir şekilde başlamışlardır ancak öğretimin sonunda bu bilgilerinin geliştiği görülmüştür. Bu gelişim Tablo 4.65'te verilmiştir. Bu tablo öğretmen adaylarının ön-testte, öğretim sürecinde ve son-testte verilen model ve problemler için yazdıkları işlemlerin birarada verilmiş hali olarak sunulmuştur. Öğretmen adaylarının bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin bir model veya problem verildiğinde ifade ettikleri işlemleri yazarken zorluk yaşamazken, bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin model verildiğinde zorluk yaşadıkları görülmüştür (Tablo 4.65). Bu zorluğun model türüne göre değiştiği söylenebilir. Aynı işlem için dairesel alan modeli ve sayı doğrusu modeli verildiğinde dairesel alan modelinin ifade ettiği işlemi yazmakta zorlanırken ve çarpmanın iki anlamına ilişkin ikilem yaşarlarken sayı doğrusu modelinin ifade ettiği işlemi hiçbir zorluk yaşamadan yazmaları buna kanıt olarak gösterilebilir. Diğer taraftan bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin problem verildiğinde herhangi bir zorluk yaşamamışlardır. Buna göre sözel ifadenin işlemi yazmalarına yardımcı olduğu söylenebilir. Şöyle ki verilen problemin içinde “4 metre kumaşın $\frac{3}{7}$ 'si” ifadesi kullanılmaktadır ve öğretmen adayları $\frac{3}{7} \times 4$ işlemini “4'ün $\frac{3}{7}$ 'si” olarak ifade etmektedirler. Öğretmen adayları bu iki ifadeyi ilişkilendirerek verilen problemin ifade ettiği işlemi zorlanmadan yazmış olabilirler.

Tablo 4.65.

Öğretmen Adaylarının Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Çarpma İşlemine İlişkin Verilen Model ve Problemlerin İfade Ettikleri İşlemleri Matematiksel Olarak Yazma Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo

Öğretmen Adayı	Ön-test/G1 Küme modeli	Öğretim Süreci/G2-G7 Küme modeli	Problem	Dairesel alan modeli	Problem	Sayı doğrusu modeli	Son-test/G8 Küme modeli
ÖA6	• $8 \times 4 = 32$, $32 \div 8 = 4$ • İşlem modeli tam olarak karşılamıyor (İşlemi iki basamak halinde yazıyor.)	• $3 \times (2/5 \times 1)$ • İşlem modeli karşılıy or	• $3 \times 2/7$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/3 \times 2$ • İşlem modeli karşılıyor • Çarpmanın tekrarlı toplama ve operatör anlamı ikilemi	• $3/7 \times 4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/3 \times 2$ • İşlem modeli karşılıyor	• $1/8 \times 4$ • İşlem modeli karşılıyor
ÖA2	• “32’nin içinde 8, 4 keredir.” • İşlem yok	• $3 \times 2/5 \times 1$ • İşlem modeli karşılıy or	• $3 \times 2/7 \times 1$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/3 \times 2$ • İşlem modeli karşılıyor	• $3/7 \times 4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/3 \times 2$ • İşlem modeli karşılıyor	• $32/8 = 4$ • İşlem modeli tam olarak karşılamıy or
ÖA4	• $(8 + (8 \times 3)) \div 8$ • İşlem modeli tam olarak karşılamıyor (İşlemi iki basamak halinde yazıyor.)	• $3 \times (2/5 \times 1)$ • İşlem modeli karşılıy or	• İşlem yok	• $2 \times 2/3$ • İşlemin tersini yazma • Çarpmanın tekrarlı toplama ve operatör anlamı ikilemi	• $3/7 \times 4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/3 \times 2$ • İşlem modeli karşılıyor	• $4 \div 8$ • İşlem modeli tam olarak karşılamıy or
ÖA3	• $8 \times 4 = 32$, $32 \div 8 = 4$ • İşlem modeli tam olarak karşılamıyor (İşlemi iki basamak halinde yazıyor.)	• $3 \times 2/5 \times 5$ • İşlem modeli tam olarak karşılamıyor • Bütünün çokluk olarak alma	• $3 \times 2/7$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/3 \times 2$ • İşlem modeli karşılıyor • Çarpmanın tekrarlı toplama ve operatör anlamı ikilemi	• $3/7 \times 4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/3 \times 2$ • İşlem modeli karşılıyor	• $1/8 \times 4$ • İşlem modeli karşılıyor
ÖA5	• $8 \times 4 = 32$, $32 \div 8 = 4$ • İşlem modeli tam olarak karşılamıyor (İşlemi iki basamak halinde yazıyor.)	• $3 \times (2 \times 1/5)$ • İşlem modeli karşılıy or	• $3 \times 2/7 \times 1$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/3 \times 2$ • İşlem modeli karşılıyor • Çarpmanın tekrarlı toplama ve operatör anlamı ikilemi	• $3/7 \times 4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/3 \times 2$ • İşlem modeli karşılıyor • Çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılıma özelliğini kullanma	• $4 \div 8$ • İşlem modeli tam olarak karşılamıy or
ÖA1	• $(1/2 \times 4) \div 8$ • İşlem modeli tam olarak karşılamıyor (İşlemi iki basamak halinde yazıyor.)	• $3 \times 2/5 \times 1$ • İşlem modeli karşılıy or	• $3 \times 2/7$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/3 \times 2$ • İşlem modeli karşılıyor • Çarpmanın tekrarlı toplama operatör anlamı ikilemi	• $3/7 \times 4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/3 \times 2$ • İşlem modeli karşılıyor	• $1/8 \times 4$ • İşlem modeli karşılıyor

4.3.2. İki Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Matematiksel İfade Yazma Bilgisi

4.3.2.1. Başlangıç Durumu

Öğretmen adaylarının öğretimden önce iki kesrin çarpma işlemine ilişkin verilen sözel ifadenin veya problemin ifade ettiği işlemi ters yazdıkları görülmüştür (Tablo 4.66). Bu durum öğretmen adaylarının öğretimden önce iki kesrin çarpma işlemine ilişkin kavramsal anlamalarının zayıf olması ile açıklanabilir. Öğretmen adayları öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin model verildiğinde bu modelin ifade ettiği işlemi yazmakta zorluk yaşamışlardır. Bu anlamda öğretmen adaylarının öğretimden önceki durumunu görebilmek için KÇB testinde iki kesrin çarpma işlemine ilişkin model verilip modele karşılık gelen işlemi ifade edip edemediği incelenebilirdi ancak testteki soru sayısının fazla olmasından dolayı modelin verildiği bir göreve yer verilememiştir.

Tablo 4.66.

Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde İki Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Verilen Sözel İfade ve Problem İçin Yazdıkları İşlemler

Öğretmen Adayı	5/6'nın 1/3'ü	Problem
ÖA6	• $5/6 \times 1/3$ • İşlemin tersini yazma	• $3/5 \times 2/3$ • İşlemin tersini yazma
ÖA2	• $5/6 \times 1/3$ • İşlemin tersini yazma	• $3/5 \times 2/3$ • İşlemin tersini yazma
ÖA4	• $5/6 \times 1/3$ • İşlemin tersini yazma	• $3/5 \times 2/3$ • İşlemin tersini yazma
ÖA3	• $5/6 \times 1/3$ • İşlemin tersini yazma	• $3/5 \times 2/3$ • İşlemin tersini yazma
ÖA5	• $5/6 \times 1/3$ • İşlemin tersini yazma	• $3/5 \times 2/3$ • İşlemin tersini yazma
ÖA1	• $5/6 \times 1/3$ • İşlemin tersini yazma	• İşlem yok (İşlem yerine çözümü açıklıyor)

Öğretmen adayları öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde 12. görevde verilen “5/6'nın 1/3'ü” ifadesine karşılık gelen işlemi $1/3 \times 5/6$ yerine $5/6 \times 1/3$ olarak ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarına bu ifade için $1/3 \times 5/6$ işleminin de yazılıp yazılamayacağı sorulduğunda bu iki işlemin sonuçlarının aynı olduğunu, modellerinin ve problemlerinin farklı olduğunu belirtmişlerdir ancak yine işlemleri ters ifade etmişlerdir. Buna göre öğretimden önce öğretmen adaylarının çarpmanın tanımına yani hangisi grup sayısı hangisi her bir gruptaki nesne sayısı olduğuna ilişkin kavramsal anlamaya sahip olmadıkları söylenebilir. ÖA2 ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) verilen ifadeye karşılık gelen işlemin $1/3 \times 5/6$ olarak yazılıp yazılamayacağını şöyle açıklamıştır: “Yani dediğim gibi sonuç olarak değişmez ama ifade olarak değişir. Burada ne olurdu $1/3$ çarpı $5/6$ yapacak olursak, yine aynı bütünü 3'e bölmüş ve bu 3'ün, 3'te birin yani şu kısmın $5/6$ 'sını tekrar ayrı ayrı bölüp almak demek.” Burada ÖA2 modelin değiştiğini ifade

etmiştir ancak “5/6’nın 1/3’ü” yerine “1/3’ün 5/6’sı” anlamını yansıtan bir modele işaret etmiştir. Diğer taraftan öğretmen adaylarının bu işlemleri okunduğu şekilde soldan sağa doğru yazdıkları söylenebilir. Buna kanıt olarak ÖA3’ün ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) neden bu işlem olduğu sorulduğunda “5/6’yı ilk belirttiği için ilk 5/6’sını almam gerekiyor.” şeklinde ifade etmesi ve işlemin okunduğu gibi yazıldığını belirtmesi gösterilebilir. Bununla beraber öğretmen adayları “-nın” ifadesinin çarpma işlemini düşündürdüğünü belirtmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının öğretimden önce çarpmanın anlamına ilişkin anlamalarının işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir.

ÖA1 hariç diğer öğretmen adayları benzer şekilde KÇB ön-testinde on dördüncü görevde verilen “Bir sınıf geziye gidecektir. Öğrencilerin 3/5’i İzmir’e gitmek istiyor. İzmir’e gitmek isteyen öğrencilerin 2/3’ü Çeşme’ye gitmek istiyor. Çeşme’ye gitmek isteyen öğrenciler sınıftaki öğrencilerin kaçta kaçındır?” problemine karşılık gelen işlemi de $2/3 \times 3/5$ yerine $3/5 \times 2/3$ olarak ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarına bu problem için $2/3 \times 3/5$ işleminin de yazılıp yazılamayacağı sorulduğunda on ikinci görevde olduğu gibi burada da bu iki işlemin sonuçlarının aynı olduğunu ama problemin değişeceğini ifade etmişlerdir. ÖA4 ile ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) buna ilişkin geçen diyalog aşağıdaki gibidir (G1, ÖA4, 18/03/2015, 584-601):

G: 3/5 çarpı 2/3 demişsin. 2/3 çarpı 3/5 için ne dersin?

ÖA4: Aynı şey olduğunu zaten biliyoruz.

G: Yazabilir miydik peki burada?

ÖA4: Hayır yazamazdık.

G: Neden?

ÖA4: Çünkü bir işlem sırası var hani matematikte tamam kendi aralarında yer değiştirebilir ama.

G: Okuduğumuz gibi mi yazıyoruz o zaman? İşlem sırası derken ne demek istedin?

ÖA4: O anki duruma göre, yani mesela derki 3/5’inin 1 fazlasıyla 1 fazlasının 2/3’ü, bu sefer değiştirebilir miyim 2/3 ile 3/5’i? Değiştiremem.

G: Hmm, bunun üzerinden düşünelim.

ÖA4: Yani soru şöyle olsa mıydı? 2/3’ü İzmir’e gitmek istiyor, İzmir’e gitmek isteyenlerin de 3/5’i Çeşme’ye gitmek istiyor.

G: O zaman şöyle mi olması gerekirdi? 2/3 çarpı 3/5 olsaydı 2/3’ü İzmir’e, onların 3/5’i Çeşme’ye. Öyle mi olacaktı?

ÖA4: Evet. Ya sonuç değişmeyecek ama öğrenciler yanılgıya düşebilir bundan sonra.

G: O zaman şöyle diyebilir miyiz? Probleme okunuş sırası mı belirliyor?

ÖA4: Hani işlem adımı diyorlar yani işlem sırası.

Burada ÖA4’ün problemde 2/3 ile 3/5’in yerlerini değiştirdiği görülmektedir. Buna göre ÖA4’ün problemin ifade ettiği işlemi problemde bu kesirli sayıların görünüş sırasına göre ya da okunuş sırasına göre yazdığı söylenebilir yani “3/5’in 2/3’ü” şeklinde ifade edip buna göre $3/5 \times 2/3$ işlemini yazmıştır. Buna göre ÖA4’ün öğretimden önce çarpmanın tanımına ilişkin kavramsal anlamaya sahip olmadığı söylenebilir. Diğer taraftan on ikinci görevde olduğu gibi burada da öğretmen adaylarının verilen problemin ifade ettiği işlemin çarpma işlemi olmasını “-in” ifadesiyle açıkladıkları görülmüştür. ÖA5 ön-teste ilişkin

yapılan görüşmede (G1) bu işlemi nasıl yazdığını “-in, $3/5$ ’in. Sorunun gidişatında $3/5$ ’in $2/3$ ’ü dedi ya sonuç oradan gitmiş.” şeklinde ifade etmiştir. ÖA1 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak verilen probleme karşılık gelen işlemi matematiksel olarak ifade etmektense oran-orantı yoluyla problemin çözümünü göstermiştir. Burada sınıf mevcudunu $5k$ olarak ifade etmiştir ve bunun üzerinden hareket ederek $5k \times 3/5 = 3k$, $3k \times 2/3 = 2k$ ve $2k/5k = 2/5$ işlemlerini yazmıştır. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) verilen probleme karşılık gelen işlem sorulmuştur ve ÖA1 çarpma işlemi olduğunu şu şekilde ifade etmiştir: “ $5k \times 3/5$ olmuş oldu, bu $3k$ İzmir’e gidenler, ondan sonra aynı kalanın üzerinden, $3k \times 2/3$ ’den.” ÖA1 burada probleme karşılık gelen işlemi iki adımda ifade etmiştir. Bunun üzerine tek adımda nasıl ifade edeceği sorulmuştur ancak ÖA1 bu işlemi ifade edememiştir. Buna göre ÖA1’in iki kesrin çarpma işlemine ilişkin verilen probleme karşılık gelen işlemi matematiksel olarak yazma bilgisinin öğretimden önce diğer öğretmen adaylarına göre daha zayıf olduğu söylenebilir.

4.3.2.2. Öğretim Süreci

Öğretmen adayları öğretim sürecine verilen problemin ifade ettiği işlemi ters yazarak başlamışlardır. Öğretim sürecinde verilen modeller ve problemler için yazdıkları işlemler incelendiğinde bu durumun ortadan kalktığı ve işlemleri doğru bir şekilde yazdıkları görülmektedir (Tablo 4.67). Bu süreçte işlemdeki sayıları çarpmanın tanımına göre açıklarken bazı öğretmen adaylarının grup ve nesne/bütün ikilemine düştükleri görülmüştür. Öğretimin sonunda bu ikilem ortadan kalkmıştır ancak yedinci görüşmede (G7) bazı öğretmen adaylarının verilen modele karşılık gelen işlemi çarpma işlemi yerine bölme işlemi olarak ifade ettikleri ve işlemi yazmakta zorlandıkları görülmüştür. Bu durum kesirlerle bölme işlemine ilişkin öğretim gerçekleştirildikten sonra bu görüşmenin (G7) yapılmış olmasından kaynaklanmış olabilir.

Tablo 4.67.

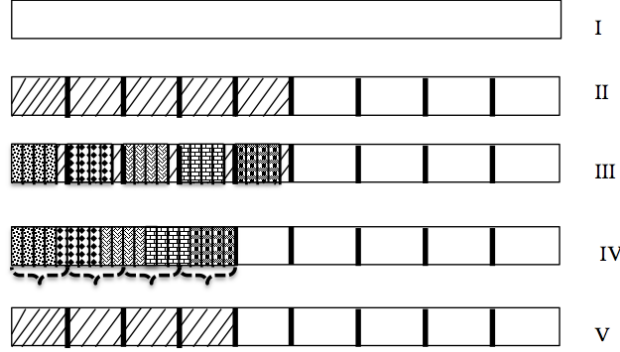
Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde İki Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Verilen Model ve Problemler İçin Yazdıkları İşlemler

Öğretmen Adayı	D2/A3	Problem	Küme modeli	D2/G3	Problem	D6/A9	D6/G7
	Dikdörtgensel alan modeli			Dikdörtgensel alan modeli		Dikdörtgensel alan modeli	Kesir çubuğu modeli
ÖA6	• $2/5 \times 5/7$ • İşlem modeli karşılıyor	• $3/4 \times 3/5$ • İşlem problemi karşılıyor	• $3/5 \times 3/8$ • İşlem modeli karşılıyor	• $2/7 \times 3/5$ • İşlem modeli karşılıyor	• $2/5 \times 3/4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/5 \times 3/8$ • İşlem modeli karşılıyor	• $4/5 \times 5/9$ • İşlem modeli karşılıyor
ÖA2	• $2/5 \times 5/7$ • İşlem modeli karşılıyor	• $3/4 \times 3/5$ • İşlem problemi karşılıyor	• $3/5 \times 3/8$ • İşlem modeli karşılıyor	• $2/7 \times 3/5$ • İşlem modeli karşılıyor	• $2/5 \times 3/4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/5 \times 3/8$ • İşlem modeli karşılıyor	• $4/5 \times 5/9$ • İşlem modeli karşılıyor
ÖA4	• $2/5 \times 5/7$ • İşlem modeli karşılıyor	• $3/4 \times 3/5$ • İşlem problemi karşılıyor	• $3/5 \times 3/8$ • İşlem modeli karşılıyor	• $2/7 \times 3/5$ • İşlem modeli karşılıyor	• $2/5 \times 3/4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/5 \times 3/8$ • İşlem modeli karşılıyor	• $4/5 \times 5/9$ • İşlem modeli karşılıyor
ÖA3	• $2/5 \times 5/7$ • İşlem modeli karşılıyor	• $3/4 \times 3/5$ • İşlem problemi karşılıyor	• $3/5 \times 3/8$ • İşlem modeli karşılıyor	• $2/7 \times 3/5$ • İşlem modeli karşılıyor	• $2/5 \times 3/4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/5 \times 3/8$ • İşlem modeli karşılıyor	• $4/5 \times 5/9$ • İşlem modeli karşılıyor
ÖA5	• $2/5 \times 5/7$ • İşlem modeli karşılıyor	• $3/4 \times 3/5$ • İşlem problemi karşılıyor	• $3/5 \times 3/8$ • İşlem modeli karşılıyor	• $2/7 \times 3/5$ • İşlem modeli karşılıyor	• $2/5 \times 3/4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/5 \times 3/8$ • İşlem modeli karşılıyor	• $4/5 \times 5/9$ • İşlem modeli karşılıyor
ÖA1	• $2/5 \times 5/7$ • İşlem modeli karşılıyor	• $3/4 \times 3/5$ • İşlem problemi karşılıyor	• $3/5 \times 3/8$ • İşlem modeli karşılıyor	• $2/7 \times 3/5$ • İşlem modeli karşılıyor	• $2/5 \times 3/4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/5 \times 3/8$ • İşlem modeli karşılıyor	• $4/5 \times 5/9$ • İşlem modeli karşılıyor • İşlemi yazmakta zorlanıyor (Çarpma yerine bölme işlemi yazıyor)

İkinci derste (D2) iki kesrin çarpma işlemine ilişkin öğretim gerçekleştirilmiştir ve bu derste verilen alıştırmalarda (A3) öğretmen adaylarının gelişim göstererek verilen modellerin ve problemin ifade ettikleri işlemleri doğru bir şekilde yazdıkları görülmüştür. Öğretmen adayları sonra ikinci derse paralel yapılan üçüncü görüşmede (G3) ve daha sonra altıncı derste (D6) verilen alıştırmalarda (A9) yer alan modeller ve problemlere karşılık gelen işlemleri herhangi bir zorluk yaşamadan doğru bir şekilde ifade etmişlerdir. Öğretmen adayları bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin verilen model ve problemlere karşılık gelen işlemleri yazarken zorluk yaşarlarken iki kesrin çarpma işlemine ilişkin verilen model ve problemlere karşılık gelen işlemleri yazarken herhangi bir zorluk yaşamamışlardır. Buna göre iki kesrin çarpma işlemine ilişkin anlamalarının daha güçlü olduğu söylenebilir.

Öğretmen adaylarının altıncı derse kadar iki kesrin çarpma işlemine ilişkin verilen model veya problemin ifade ettiği işlemi yazmada her ne kadar zorluk yaşadıkları görülmese de

son derse (D6) paralel yapılan görüşmede (G7) ÖA1 ve ÖA6'nın verilen kesir çubuğu modelinin (Şekil 4.78) ifade ettiği işlemi yazarken zorluk yaşadıkları görülmüştür. Diğer öğretmen adayları bu modele karşılık gelen işlemi herhangi bir zorluk yaşamadan doğru bir şekilde $4/5 \times 5/9$ olarak ifade etmişlerdir.



Şekil 4.78. Görüşme-7'de 1. görevde verilen kesir çubuğu modeli

ÖA6 verilen modelin ilk basamağını “bir bütün”, ikinci basamağını “ $5/9$ ” olarak doğru bir şekilde ifade etmiştir ancak üçüncü basamağı açıklarken “ $4/5$ ’leri aramış”, “ $4/5$ ’ini almış”, “ $4/5$ ’leri ifade etmiş” gibi ifadeler kullanarak bu basamağın ifade ettiği işlemi “ $5/9$ ’u $4/5$ ’lere bölmüş” olarak açıklamıştır. Burada bölme işlemi mi yoksa çarpma işlemi mi kastettiği tam olarak açık değildir. Bunun üzerine ÖA6 ile aşağıdaki gibi bir diyalog geçmiştir: (G7, ÖA6, 12/05/2015, 18-23):

G: $5/9$ ’u $4/5$ ’lere bölmüş derken ne demek istediğini biraz daha açar mısın?

ÖA6: Şu şekilde mesela, yani $5/9$ derken her birimi mesela bu birimin $4/5$ ’i, bütünün değil, orada bir yanlışlık olmasın. Hani bu $1/9$ ’un $4/5$ ’i, bunu ifade ettim.

G: O halde bu modelin ifade ettiği işlem ne olur?

ÖA6: Çarpma olur. $1/9$ ’un $4/5$ ’lerini ifade ettim. Ama neden sonra orada $5/5$ yani $1/9$ ’ları almış? Şu aradakileri yok etmiş, bunları birleştirmiş, sonuna koymuş herhalde.

Burada “ $5/9$ derken her birimi mesela bu birimin $4/5$ ’i, bütünün değil” ifadesiyle $5/9$ ve $4/5$ için referans alınan bütünlerin farklı olduğuna işaret ettiği söylenebilir. $1/9$ ’un birim olduğunu vurgulamıştır ve her bir $1/9$ ’un $4/5$ ’inin alındığını ancak neden bu alınan kısımların biraraya getirildiğini anlayamadığını belirtmiştir. Burada ÖA6’nın çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini yani $5/9$ ’un $4/5$ ’ini almak ile her bir $1/9$ ’un $4/5$ ’ini almanın aynı olduğunu gözardı ettiği söylenebilir. Modelin üçüncü basamağını doğru bir şekilde ifade ettikten sonra modele karşılık gelen işlemi “ $5/9$ ’un $4/5$ ’lerini almış” olarak ifade edip $4/5 \times 5/9$ şeklinde yazmıştır. ÖA6 burada önce “ $4/5$ ’leri aramış” ifadesini kullanarak bölme işlemi yani $5/9$ ’un içinde $4/5$ ’leri aramayı düşündürmüştür ancak sonra “ $5/9$ ’un $4/5$ ’lerini almış” şeklinde ifade ederek verilen modele karşılık gelen işlemi doğru bir şekilde $4/5 \times 5/9$ olarak ifade etmiştir.

ÖA1 ise bölme işlemine işaret etmenin yanısıra verilen modele karşılık gelen işlemi önce $5/9 \div 4/5$ olarak ifade etmiştir. ÖA1 modelin ilk basamağını “1 bütün” ve ikinci basamağını $5/9$ olarak ifade etmiştir. Sonra modelin üçüncü basamağını ÖA6 gibi ifade etmekte zorluk yaşamıştır. Buna ilişkin geçen diyalog aşağıdaki gibidir (G7, ÖA1, 13/05/2016, 5-20):

ÖA1: *Sonra bunları, her bir parçayı beşe bölmüş tekrar. 5/9 bölü 5 oluyor yani tekrar, 5/9 bölü 5 (modelin üçüncü basamağına işaret ediyor ve yanına $5/9 \div 5$ yazıyor). İı, ondan sonra şu 5 tanesini bir bütün olarak almış, bir, iki, üç, dört tane bütün var (modelin dördüncü basamağına işaret ediyor ve süslü parantezle gösterilen parçaları sayıyor).*

G: *Bunu nasıl yazdın ($5/9 \div 5$ işlemi gösteriyorum)?*

ÖA1: *Burası 5/9'du, her birini beşe bölmüş o yüzden 5/9 bölü 5 dedim hani her birisini beşe böldüğü için.*

G: *Sadece beşe mi bölünüyor orada peki?*

ÖA1: *Şu farklı farklı taramaların neyi ifade ettiğini anlayamadım. Şurası dört, hıı, 4/5'ini almış, 4/5'e bölmüş ($5/9 \div 4/5$ yazıyor).*

G: *4/5'e mi bölmüş?*

ÖA1: *Önce beşe bölmüş dördünü almış bu durumda 4/5'e bölmüş oluyor.*

G: *Beşe bölmüş dördünü almış ifadesi 4/5'e bölmek mi oluyor?*

ÖA1: *Çarpma ama burada hepsini bölmediği için (kesir çubuğunun diğer parçalarının bölünmediğine işaret ediyor). Öyle düşünersek şey oluyor, 5/9'u almış, her birisini beşe bölmüş, 5/9'un 4/5'i olmuş oluyor o zaman, şöyle, 5/9'un 4/5'i ($4/5 \times 5/9$ yazıyor).*

Burada ÖA1'in sadece taralı parçaların bölünmesinden dolayı çarpma ve bölme işlemi arasında ikilem yaşadığı söylenebilir ancak daha sonra doğru bir şekilde çarpma işlemi olarak ifade etmiştir. ÖA1'e işlemi neden değiştirdiği sorulmuştur ve ÖA1 bunu şöyle açıklamıştır: “Çünkü bu bölme işlemi değil, çarpma işlemi oluyor. Burada her birisini beşe bölmüş dördünü almış o yüzden çarpma işlemi oluyor. Hatta 5/9'un 4/5'i olmuş oluyor.” Daha sonra modelin dördüncü ve beşinci basamağında $4/9$ 'un görüldüğünü, bunun da işlemin sonucu olduğunu ifade etmiştir ve bütüne göre bu taralı 4 parçanın ifade edildiğini belirtmiştir. Son olarak modelin bütün basamakları göz önüne alındığında modele karşılık gelen işlemi ÖA1 şöyle ifade etmiştir: “ $4/5$ çarpı $5/9$ eşittir X olmuş oluyor. Önce $5/9$ 'unu almış, sonra onun $4/5$ 'ini almış, orasını da tüm dokuz üzerinde göstermiş, $4/9$ olmuş oluyor bu durumda.” Sonuç olarak ÖA1 her ne kadar bölme ve çarpma işlemi arasında ikileme düşse de verilen modele karşılık gelen işlemi doğru bir şekilde ifade etmiştir.

4.3.2.3. Son Durum

Öğretmen adayları ön-testte iki kesrin çarpma işlemine ilişkin verilen problemlerin ifade ettikleri işlemleri ters yazarken öğretim sürecinde doğru bir şekilde yazdıkları görülmüştür. Bununla beraber iki kesrin çarpma işlemine ilişkin model verildiğinde bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işleminde olduğu gibi herhangi bir zorluk yaşamamışlardır. Öğretmen adaylarının öğretimden sonra uygulanan KÇB son-testinde verilen problemlerin

ifade ettikleri işlemleri de doğru bir şekilde yazdıkları görülmüştür (Tablo 4.68). Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin çarpma işlemine ilişkin verilen model ve problemin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazma bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir.

Tablo 4.68.

Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde İki Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Verilen Sözel İfade ve Problem İçin Yazdıkları İşlemler

Öğretmen Adayı	5/6'nın 1/3'ü	Problem
ÖA6	• $1/3 \times 5/6$ • İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	• $2/3 \times 3/5$ • İşlem problemi karşılıyor
ÖA2	• $1/3 \times 5/6$ • İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	• $2/3 \times 3/5$ • İşlem problemi karşılıyor
ÖA4	• $1/3 \times 5/6$ • İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	• $2/3 \times 3/5$ • İşlem problemi karşılıyor
ÖA3	• $1/3 \times 5/6$ • İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	• $2/3 \times 3/5$ • İşlem problemi karşılıyor
ÖA5	• $1/3 \times 5/6$ • İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	• $2/3 \times 3/5$ • İşlem problemi karşılıyor
ÖA1	• $1/3 \times 5/6$ • İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	• $2/3 \times 3/5$ • İşlem problemi karşılıyor

Öğretmen adaylarının öğretimden sonra uygulanan KÇB son-testinde on ikinci görevde verilen “5/6'nın 1/3'ü” ifadesine karşılık gelen işlemi doğru bir şekilde $1/3 \times 5/6$ olarak ve on dördüncü görevde verilen problemin ifade ettiği işlemi doğru bir şekilde $2/3 \times 3/5$ olarak ifade etmişlerdir. Ön-testte bu işlemleri $5/6 \times 1/3$ ve $3/5 \times 2/3$ olarak yazarlarken son-testte doğru bir şekilde yazmışlardır. Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin çarpma işlemine ilişkin anlamalarının ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir.

Sonuç olarak öğretmen adayları öğretim sürecine verilen model veya problemin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazma bilgisi zayıf bir şekilde başlamışlardır ancak öğretimin sonunda bu bilgilerinin geliştiği görülmüştür. Bu gelişim Tablo 4.69'da verilmiştir. Bu tablo öğretmen adaylarının ön-testte, öğretim sürecinde ve son-testte verilen model ve problemler için yazdıkları işlemlerin birarada verilmiş hali olarak sunulmuştur. Öğretmen adayları bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin model verildiğinde bu modelin ifade ettiği işlemi yazmada iki kesrin çarpma işlemine göre daha çok zorlanmışlardır.

Tablo 4.69.

Öğretmen Adaylarının İki Kesrin Çarpma İşlemine İlişkin Verilen Model ve Problemlerin İfade Ettikleri İşlemleri Matematiksel Olarak Yazma Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo

Öğretmen Adayı	Ön-test/G1		Öğretim Süreci/G3-G7							Son-test/G8	
	5/6'nın 1/3'ü	Problem	Dikdörtgensel alan modeli	Problem	Küme modeli	Dikdörtgensel alan modeli	Problem	Dikdörtgensel alan modeli	Kesir çubuğu modeli	5/6'nın 1/3'ü	Problem
ÖA6	5/6 x 1/3 - İşlemin tersini yazma	3/5 x 2/3 - İşlemin tersini yazma	2/5 x 5/7 - İşlem modeli karşılıyor	3/4 x 3/5 - İşlem problemi karşılıyor	3/5 x 3/8 - İşlem modeli karşılıyor	2/7 x 3/5 - İşlem modeli karşılıyor	2/5 x 3/4 - İşlem problemi karşılıyor	2/5 x 3/8 - İşlem modeli karşılıyor	4/5 x 5/9 - İşlem modeli karşılıyor	1/3 x 5/6 - İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	2/3 x 3/5 - İşlem problemi karşılıyor
ÖA2	5/6 x 1/3 - İşlemin tersini yazma	3/5 x 2/3 - İşlemin tersini yazma	2/5 x 5/7 - İşlem modeli karşılıyor	3/4 x 3/5 - İşlem problemi karşılıyor	3/5 x 3/8 - İşlem modeli karşılıyor	2/7 x 3/5 - İşlem modeli karşılıyor	2/5 x 3/4 - İşlem problemi karşılıyor	2/5 x 3/8 - İşlem modeli karşılıyor	4/5 x 5/9 - İşlem modeli karşılıyor	1/3 x 5/6 - İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	2/3 x 3/5 - İşlem problemi karşılıyor
ÖA4	5/6 x 1/3 - İşlemin tersini yazma	3/5 x 2/3 - İşlemin tersini yazma	2/5 x 5/7 - İşlem modeli karşılıyor	3/4 x 3/5 - İşlem problemi karşılıyor	3/5 x 3/8 - İşlem modeli karşılıyor	2/7 x 3/5 - İşlem modeli karşılıyor	2/5 x 3/4 - İşlem problemi karşılıyor	2/5 x 3/8 - İşlem modeli karşılıyor	4/5 x 5/9 - İşlem modeli karşılıyor	1/3 x 5/6 - İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	2/3 x 3/5 - İşlem problemi karşılıyor
ÖA3	5/6 x 1/3 - İşlemin tersini yazma	3/5 x 2/3 - İşlemin tersini yazma	2/5 x 5/7 - İşlem modeli karşılıyor	3/4 x 3/5 - İşlem problemi karşılıyor	3/5 x 3/8 - İşlem modeli karşılıyor	2/7 x 3/5 - İşlem modeli karşılıyor	2/5 x 3/4 - İşlem problemi karşılıyor	2/5 x 3/8 - İşlem modeli karşılıyor	4/5 x 5/9 - İşlem modeli karşılıyor	1/3 x 5/6 - İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	2/3 x 3/5 - İşlem problemi karşılıyor
ÖA5	5/6 x 1/3 - İşlemin tersini yazma	3/5 x 2/3 - İşlemin tersini yazma	2/5 x 5/7 - İşlem modeli karşılıyor	3/4 x 3/5 - İşlem problemi karşılıyor	3/5 x 3/8 - İşlem modeli karşılıyor	2/7 x 3/5 - İşlem modeli karşılıyor	2/5 x 3/4 - İşlem problemi karşılıyor	2/5 x 3/8 - İşlem modeli karşılıyor	4/5 x 5/9 - İşlem modeli karşılıyor	1/3 x 5/6 - İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	2/3 x 3/5 - İşlem problemi karşılıyor
ÖA1	5/6 x 1/3 - İşlemin tersini yazma	İşlem yok (İşlem yerine çözümü açıklıyor)	2/5 x 5/7 - İşlem modeli karşılıyor	3/4 x 3/5 - İşlem problemi karşılıyor	3/5 x 3/8 - İşlem modeli karşılıyor	2/7 x 3/5 - İşlem modeli karşılıyor	2/5 x 3/4 - İşlem problemi karşılıyor	2/5 x 3/8 - İşlem modeli karşılıyor	4/5 x 5/9 - İşlem modeli karşılıyor - İşlemi yazmakta zorlanıyor (Çarpma yerine bölme işlemi yazıyor)	1/3 x 5/6 - İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	2/3 x 3/5 - İşlem problemi karşılıyor

4.3.3. Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Matematiksel İfade Yazma Bilgisi

4.3.3.1. Başlangıç Durumu

Öğretmen adaylarının öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin verilen problemlerin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazma bilgilerinin zayıf olmadığı görülmüştür (Tablo 4.70). Bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işleminde olduğu gibi bölme işleminde de model verildiğinde bu modele karşılık gelen işlemi ifade etmekte zorlandıkları görülmüştür.

Tablo 4.70.

Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemine İlişkin Verilen Model ve Problemler İçin Yazdıkları İşlemler

Öğretmen Adayı	“5’in içinde kaç tane 1/2 vardır?”	Kesir çubuğu modeli	Problem
ÖA6	• $5 \div 1/2$ • İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	• $(2/7 \div 6) \times 2$ • İşlem modeli tam olarak karşılamıyor (Görüşmede $2/7 \div 3$ işlemini yazıyor)	• $2/5 \div 3$ • İşlem problemi karşılıyor
ÖA2	• $5 \div 1/2$ • İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	• $2/7 \div 3 = 6/21 \div 3 = 2/21$ • İşlem modeli karşılıyor	• $2/5 \times 1/3$ • İşlem problemi tam olarak karşılamıyor (Görüşmede düzeltiyor)
ÖA4	• $5 \div 1/2$ • İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	• $(2/7 \div 6) \times 2$ • İşlem modeli tam olarak karşılamıyor (Görüşmede $2/7 \div 3$ işlemini yazıyor)	• $2/5 \div 3$ • İşlem problemi karşılıyor
ÖA3	• $5 \div 1/2$ • İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	• $2/7 \times 1/3$ veya $2/7 \div 3$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2/5 \div 3$ • İşlem problemi karşılıyor
ÖA5	• $5 \div 1/2$ • İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	• $2/7 \times 1/3$ • İşlem modeli tam olarak karşılamıyor	• $2/5 \div 3$ • İşlem problemi karşılıyor
ÖA1	• $5 \div 1/2$ • İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	• $1/7 \times 1/3 + 1/7 \times 1/3$ • İşlem modeli tam olarak karşılamıyor	• $2/5 \div 3$ veya $2/5 \times 1/3$ • İşlem problemi karşılıyor

Öğretmen adayları öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde ikinci görevde verilen “5’in içinde kaç tane 1/2 vardır?” ifadesine karşılık gelen işlemi doğru bir şekilde $5 \div 1/2$ olarak ifade etmişlerdir. KÇB ön-testinde on beşinci görevde verilen kesir çubuğu modeline (Şekil 4.72) karşılık gelen işlemi ÖA6 ve ÖA4 iki basamak halinde $(2/7 \div 6) \cdot 2$ olarak, ÖA3, ÖA5 ve ÖA1 çarpma işlemi şeklinde $2/7 \times 1/3$ olarak ve ÖA2 de $2/7 \div 3$ olarak ifade etmişlerdir. Burada ÖA6 ve ÖA4’ün $1/3$ kesrini $2/6$ olarak aldıkları ve bu kesrin operatör anlamını kullandıkları söylenebilir. Buna göre $2/6$ kesri $2/7$ kesri üzerinde operatör görevi görmüştür. ÖA6’nın bu işleme sonuca bakarak ulaşmaya çalıştığı söylenebilir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmedeki (G1) şu ifadeleri buna kanıt olarak gösterilebilir: “Burada taralı olan kısmımız, her birini 3 parçaya ayırmışız, 3 kere 7, 21.

21’de 2 bizim buraya ulaşmamız lazım. Aslında bunu direk 3’e bölsek 2/7’yi.” Görüşme esnasında bu şekilde işlem üzerinden düşünerek $2/7 \div 3$ bölme işlemi olarak ifade edilebileceğine ulaşmıştır. Bu anlamda ÖA6’nın öğretimden önce bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin modeline ilişkin anlamasının işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir. Benzer şekilde ÖA4 de verilen modelin ifade ettiği işlemi yazarken işlemin sonucunu göz önüne almıştır ve görüşme (G1) esnasında tek bir basamak halinde $2/7 \div 3$ olarak ifade etmiştir.

ÖA3, ÖA5 ve ÖA1 verilen modele karşılık gelen işlemi bölme yerine çarpma işlemi olarak ifade etmişlerdir ancak bölmenin paylaştırma anlamına karşılık gelen $1/3 \times 2/7$ yerine $2/7 \times 1/3$ olarak yazmışlardır. Buna göre öğretmen adaylarının çarpmanın tanımına ilişkin anlamaya sahip olmadıkları söylenebilir. ÖA3 burada ÖA5 ve ÖA1’den farklı olarak $2/7 \div 3$ bölme işlemi olarak da ifade etmiştir. ÖA5 ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) modelin ilk basamağını $2/7$ olarak ifade etmiştir. Sonra işlemin sonucunu $2/21$ olarak ifade edip buradan modele karşılık gelen işlemi $2/7$ ’nin $1/3$ ’ü olarak ifade etmiştir. Burada ÖA5 işlem yaparak matematiksel ifadeye ulaşmıştır. ÖA5’e modelden bu işleme nasıl ulaşacağı sorulmuştur ve ÖA5 bunu şöyle açıklamıştır: “Ama şimdi de anlayamadım. Buradan $1/3$ ’ünü almış bunun ama şu iki taneyi niye buralara almış. Tamam şimdi oldu burada çizgilere ayırarak iki tanesini seçtiğini göstermiş. Yani 6’dan 2 tanesi. Yani 3 taneden 1 tanesi, $1/3$ ’ü, bundan da $1/3$ ’ü. Elimizde $2/7$ vardı, $2/7$ ’nin $1/3$ ’ü.” Burada ÖA5 her ne kadar sözel olarak “ $2/7$ ’nin $1/3$ ’ü” şeklinde doğru ifade etse de işlemi ters yazmaktadır. Buna göre öğretimden önce çarpmanın tanımına ilişkin kavramsal anlamaya sahip olmadığı söylenebilir. ÖA1 de benzer şekilde verilen modele karşılık gelen işlemi işlemin sonucuna göre ifade etmiştir ve çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanarak $1/7 \times 1/3 + 1/7 \times 1/3$ olarak ifade etmiştir.

KÇB ön-testinde yirminci görevde verilen “Leyla Hanım, altın günü için gelen misafirlerlerine dikdörtgen şeklindeki bir kekten ikram etmiştir ve kekin $\frac{2}{5}$ ’i kalmıştır.

Misafirler gittikten sonra Leyla Hanım’ın 3 çocuğu kekin kalanını eşit olarak paylaşmışlardır o halde çocukların her biri kekin ne kadarını yemiştir?” problemine karşılık gelen işlemi ÖA2 hariç diğer öğretmen adayları doğru bir şekilde $2/5 \div 3$ olarak yazmışlardır. ÖA2 ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) verilen problemde “çocukların her biri” denildiği için $2/5 \div 3$ işleminin daha uygun olduğunu belirtmiştir. Daha sonra bu görüşmede (G1) öğretmen adaylarına birçok kişinin bu problem için $1/3 \times 2/5$ işlemini

söyledikleri, buna ilişkin ne düşündükleri sorulmuştur. ÖA6 bunu şöyle açıklamıştır: “Ya öyle de yazılabilirdi de şimdi burada 3 çocuk eşit olarak paylaşmış ya şimdi oradan gitsek daha mantıklı olur, durduk yere niye $1/3$ ile çarpıyoruz ki? Hani pastanın, mesela biz zaten öğrencilere anlatacağız, hani bu biraz kafa karıştırıcı olabilir. Ama 3’e bölüp oradan gitmek biraz daha mantıklı gibi. 3 çocuk geliyor, pastayı 3’e bölüyoruz. Problemlerle tam olarak örtüşmüyor.” Burada her iki işlemin de ifade edilebileceğini ancak problemin bölme işlemine uygun olduğunu, bölme işleminin daha sonra çarpma işlemi şeklinde yazılabileceğini açıklamıştır. ÖA5 de benzer şekilde şöyle ifade etmiştir: “ $2/5$ kalmış, paylaşacakları şey o, 3’e bölecek, bölme işlemi direk zaten bu. $1/3$ ile çarpmak demek tamam zaten onu da ters çevirince $1/3$ oluyor da 3’e bölmek demektir burada zaten asıl bunu yazması bence gerekir çocuğun da.” Diğer öğretmen adayları da ÖA6 ve ÖA5 gibi verilen problemin bölme işlemine daha uygun olduğunu belirtmişlerdir.

4.3.3.2. Öğretim Süreci

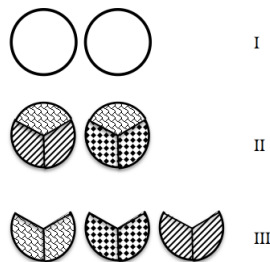
Öğretmen adaylarının öğretim sürecine başlamadan önce bir kesir ile bir doğal sayının ve bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemine ilişkin verilen problemlerin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazma bilgilerinin zayıf olmadığı ancak verilen model için bu bilginin zayıf olduğu görülmüştür (Tablo 4.71). Bu durumun öğretim sürecine de yansıdığı görülmektedir. Öğretmen adaylarından sadece ÖA4’ün dairesel alan modeli verildiğinde ve ÖA1’in de dikdörtgensel alan modeli verildiğinde bu modellere karşılık gelen işlemleri ifade ederken zorluk yaşadıkları görülmektedir (Tablo 4.71). Öğretim sürecinde verilen bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin model veya probleme karşılık gelen işlemi ifade ederken bölmeyi çarpma işlemi şeklinde yazıp işlemdeki sayıları çarpmanın tanımına göre ifade etmenin yardımcı olduğu görülmüştür. Öğretmen adayları öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin paylaşma anlamına ilişkin verilen model veya probleme karşılık gelen işlemi matematiksel olarak yazma bilgisine sahip değilken öğretim sürecinde hem model hem de problem verildiğinde işlemi yazarken herhangi bir zorluk yaşamamışlardır. Bunda bölmeyi çarpmanın tersi olarak ifade etmenin etkisi olduğu söylenebilir.

Tablo 4.71.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemine İlişkin Verilen Model ve Problemler İçin Yazdıkları İşlemler

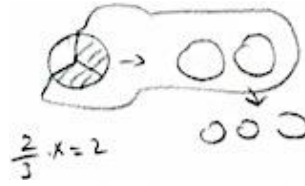
Öğretmen Adayı	D3/A5	D3/G4	D4/G5		D6/A9		D6/G7
	Dairesel alan modeli (Gruplama anlamı)	Dikdörtgensel alan modeli (Paylaştırma anlamı)	Problem (Paylaştırma anlamı)	Problem (Gruplama anlamı)	Sayı doğrusu modeli (Gruplama anlamı)	Kesir çubuğu modeli (Paylaştırma anlamı)	Küme modeli (Gruplama anlamı)
ÖA6	• $2 \div 2/3$ • İşlem modeli karşılıyo r	• $5/7 \div 3$ • İşlem modeli karşılıyor	• $12 \div 4/5$ • İşlem problemi karşılıyor	• $3 \div 1/4$ • İşlem problemi karşılıyo r	• $6 \div 3/4$ • İşlem modeli karşılıyo r	• $3 \div 2/5$ • İşlem modeli karşılıyor	• $4 \div 2/5$ • İşlem modeli karşılıyo r
ÖA2	• $2 \div 2/3$ • İşlem modeli karşılıyo r	• $1/3 \times 5/7$ ve $5/7 \div 3$ • İşlem modeli karşılıyor	• $12 \div 4/5$ • İşlem problemi karşılıyor	• $3 \div 1/4$ • İşlem problemi karşılıyo r	• $6 \div 3/4$ • İşlem modeli karşılıyo r	• $3 \div 2/5$ • İşlem modeli karşılıyor	• $4 \div 2/5$ • İşlem modeli karşılıyo r
ÖA4	• $2/3 \div 2$ • İşlemin tersini yazma	• $1/3 \times 5/7$ ve $5/7 \div 3$ • İşlem modeli karşılıyor	• $12 \div 4/5$ • İşlem problemi karşılıyor	• $3 \div 1/4$ • İşlem problemi karşılıyo r	• $6 \div 3/4$ • İşlem modeli karşılıyo r	• $3 \div 2/5$ • İşlem modeli karşılıyor	• $4 \div 2/5$ • İşlem modeli karşılıyo r
ÖA3	• $2 \div 2/3$ • İşlem modeli karşılıyo r	• $5/7 \div 3$ • İşlem modeli karşılıyor	• $12 \div 4/5$ • İşlem problemi karşılıyor	• $3 \div 1/4$ • İşlem problemi karşılıyo r	• $6 \div 3/4$ • İşlem modeli karşılıyo r	• $3 \div 2/5$ • İşlem modeli karşılıyor	• $4 \div 2/5$ • İşlem modeli karşılıyo r
ÖA5	• $2 \div 2/3$ • İşlem modeli karşılıyo r	• $5/7 \div 3$ • İşlem modeli karşılıyor	• $12 \div 4/5$ • İşlem problemi karşılıyor	• $3 \div 1/4$ • İşlem problemi karşılıyo r	• $6 \div 3/4$ • İşlem modeli karşılıyo r	• $3 \div 2/5$ • İşlem modeli karşılıyor	• $4 \div 2/5$ • İşlem modeli karşılıyo r
ÖA1	• $2 \div 2/3$ • İşlem modeli karşılıyo r	• $5/7 \div 3$ • İşlem modeli karşılıyor • İşlemi yazmada zorlanma	• $12 \div 4/5$ • İşlem problemi karşılıyor	• $3 \div 1/4$ • İşlem problemi karşılıyo r	• $6 \div 3/4$ • İşlem modeli karşılıyo r	• $3 \div 2/5$ • İşlem modeli karşılıyor	• $4 \div 2/5$ • İşlem modeli karşılıyo r

Üçüncü ve dördüncü derste bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir doğal sayı ile bir birim kesrin bölme işlemine ilişkin bir öğretim gerçekleştirilmiştir. Üçüncü derste (D3) verilen alıştırmalarda (A5) yer alan bir modele (Şekil 4.79) karşılık gelen işlemi ÖA4 hariç diğer öğretmen adayları doğru bir şekilde $2 \div 2/3$ olarak ifade etmişlerdir.



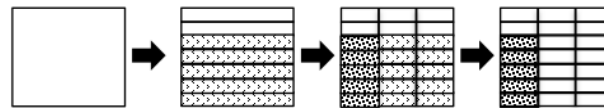
Şekil 4.79. Alıştırmalar-5'te birinci görevde verilen dairesel alan modeli

ÖA4 bu modele karşılık gelen işlemi bu işlem yerine $2/3 \div 2$ olarak ifade etmiştir. Bunda ÖA4'ün bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin model bilgisinin bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına göre daha zayıf olmasının etkisi olabilir. Zira üçüncü derse paralel yapılan görüşmede (G4) $3 \div 5/7$ işleminin gruptama anlamına ilişkin model çizerken zorluk yaşamıştır. Bununla beraber burada $2 \div 2/3$ işleminin paylaştırma anlamı için model çizmesi (Şekil 4.80) bunu desteklemektedir.



Şekil 4.80. Alıştırmalar-5'te birinci görevde ÖA4'ün paylaştırma anlamı için çizdiği model ÖA4 daha sonra altıncı derste (D6) verilen alıştırmalarda (A9) yer alan bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin verilen sayı doğrusu modeline karşılık gelen işlemi ifade ederken herhangi bir zorluk yaşamamıştır. Buna göre ÖA4'ün bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin kavramsal anlamasının geliştiği söylenebilir.

Üçüncü derse paralel yapılan görüşmede (G4) verilen dikdörtgensel alan modeline (Şekil 4.81) karşılık gelen işlemi ÖA1 hariç diğer öğretmen adayları doğru bir şekilde $5/7 \div 3$ olarak ifade etmişlerdir. Öğretmen adayları ön-testte bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin verilen kesir çubuğu modeline karşılık gelen işlemi ifade ederken zorluk yaşarken burada herhangi bir zorluk yaşamamışlardır. Bunda öğretmen adaylarının bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin model bilgilerinin ön-testten dördüncü görüşmeye gelişmiş olmasının etkisi olabilir.



Şekil 4.81. Görüşme-4'te verilen bir model

ÖA1 önce verilen modelin ilk basamağını “bir bütün” olarak ifade etmiştir. Sonra modelin ikinci basamağını “1 bütünün $5/7$ 'si” olarak ifade edip $1 \times 5/7$ işlemini yazmıştır. Modelin üçüncü basamağını “ $5/7$ 'nin $1/3$ 'i” olarak ifade etmiştir ve “üç bölünmüş, üçte birlik kısmı alınmış” diyerek $(1 \times 5/7) \div 1/3$ işlemini yazmıştır. Burada önce çarpma işlemi olarak ifade etmiştir ancak sonra bölme işlemi olarak yazıp bir ikileme düştüğü

görülmüştür. Bunun üzerine işlemin son kısmını nasıl yazdığına ilişkin sorular sorulmuştur. Buna ilişkin geçen diyalog aşağıdaki gibidir (G4, ÖA1, 15/04/2015, 8-27):

G: Hmm, $1/3$ 'e mi bölünmüş?

ÖA1: Üçe bölünmüş birlik kısmı alınmış.

G: Peki bunu $1/3$ 'e bölmek ile mi ifade ettin?

ÖA1: Bir dakika, şimdi şunda da aynı şekilde yedi parçaya bölünmüş beşi alınmış, bunda da üç parçaya bölünmüş, tekrar biri alınmış, üçte birlik kısmı alınmış diye düşündüm.

G: Neden bölme işlemi?

ÖA1: Şimdi bir bütünün parçaları alınmış hani, nasıl desem, daha küçültüyor desek o da çok da doğru bir şey değil ama, hani nasıl desem, bir bütünden daha küçük bir parçası alındığı için diyebilirim. Bir bütünden yola çıkarak hani, belli bir kısmı alınmış, onun üzerinden işlemler yapılmış. O yüzden bölme.

G: Peki çarpma işleminde bir bütünden yola çıkılmıyor mu?

ÖA1: Çarpmada çıkıyoruz ama onun hani mesela, atıyorum $3/5$ 'i alınacak desek, ıı, aynısından, önündeki grup sayısı kadar hani, yapıp böyle, veya da tekrar küçük parçalara bölüyoruz, sadece bütünümler şu olmuş oluyor o durumda, öteki durumlarda (verilen modelin ikinci adımındaki dikdörtgenin taralı kısmını gösteriyor).

G: Peki burada şu $1/3$ 'e bölmeyi nasıl ifade ettin?

ÖA1: Hani aynı şekilde düşünerek şey yaptım ama yani şurası yedi parçada beşi alınmış, burada da tekrar üçe bölünmüş, onun biri alınmış.

G: Peki bu ifade ettiklerini karşılıyor mu bu yazdığın işlem?

ÖA1: Yoksa bölü 3 mü diyeceğiz ama 3 desek tamamı, hmm.

Burada ÖA1 üçe bölüp birini almayı yani $1/3$ 'ini almayı çarpma yerine bölme işlemi ile ifade etmiştir. Diğer bir ifadeyle 3 ile bölme yerine $1/3$ ile bölme şeklinde ifade etmiştir. Sonra ÖA1'e bir bütünün $5/7$ 'sinin alınmasını matematiksel olarak nasıl $1 \times 5/7$ şeklinde ifade ettiği sorulmuştur ve ÖA1 çarpma işareti yerine bölme işareti yazmıştır. Burada işlemi neden bölmeye değiştirdiği sorulmuştur ve ÖA1 bunu “yedi parçaya bölüp beşini aldığım için dedim.” şeklinde ifade etmiştir.

ÖA1'den verilen modelin ifade ettiği işlemi belirlemesi sağlanabileceği düşünülerek $1/3 \times 5/7$ işlemi için dikdörtgensel alan modeli çizmesi istenmiştir. Modelinde önce bir dikdörtgen çizmiştir ve bunu yatay olarak 7 eş parçaya bölüp 5 parçasını taramıştır. Sonra aynı dikdörtgeni tekrar çizmiştir ve bu sefer dikey olarak 3 eş parçaya bölüp taralı olan parçaların bir sütununu tekrar taramıştır. Buradan işlemin sonucunu çift taralı kısma ve dikdörtgenin tamamındaki parçalara işaret ederek $5/21$ olarak ifade etmiştir. ÖA1 bu modeli çizdikten sonra verilen modele geri dönmüştür ve yazdığı işlemi yeniden $(1/3 \times 5/7 \times 1)$ olarak yazmıştır. Bu modelde bölme işleminin de görülüp görülmediği sorulduğunda ÖA1 bu sefer de işlemi $(5/7 \times 1) \div 3$ olarak yazmıştır. Daha sonra üçte birlik kısmını alma deyince $1/3 \times 5/7$ olduğunu ama üçe bölüp birlik kısmını alma deyince $5/7 \div 3$ olduğunu şu şekilde ifade etmiştir: “Nasıl desem, mesela biz şöyle gittiğimizde (verilen modelde birinci basamaktan son basamağa doğru ilerlemeye işaret ediyor) üçte birlik kısmını almışız dediğimizde çarpma olmuş oluyor, ıı, bunu hani üçte birlik değil de üçe bölüp birlik kısmını aldığımızda diyeyim hani bölme olmuş oluyor. Tam olarak

söyleyemedim ama, mesela şuraya çarpma dediğimizde, üçte birlik kısmını aldığımızda çarpma olmuş oluyor. Hani üçe bölüp diye ifade ettiğimizde de nasıl desem ya hani üçte birlik değil de sadece şurayı (verilen modelin üçüncü basamağındaki çift taraflı olan kısmı gösteriyor) sorduğu zaman bölü 3 olmuş oluyor.” Burada ÖA1 verilen modele karşılık gelen işlemi hem bölme hem de çarpma işlemi olarak ifade etmiştir ancak bölme ve çarpma işlemi arasında ikileme düştüğü görülmüştür. Buna göre ÖA1’in ters çevir çarp algoritmasına ve bölmenin paylaştırma anlamına ilişkin kavramsal anlamasının gelişmekte ve henüz zayıf olduğu söylenebilir. Çünkü bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaştırma anlamına ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen çarpma işleminin bu işlem olduğunu açıklayamamıştır. Buna göre ÖA1’in diğer öğretmen adaylarına göre bir kesir ile bir doğal sayının paylaştırma anlamına ilişkin anlamasının daha zayıf olduğu söylenebilir. Bu durumun daha sonra son-testte bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin verilen kesir çubuğu modeline karşılık gelen işlemi ifade ederken de devam ettiği görülmüştür.

Öğretmen adaylarının öğretim sürecinde daha sonra karşılaştıkları görevlerde verilen problem ve modellere karşılık gelen işlemleri ifade ederken herhangi bir zorluk yaşamadıkları görülmüştür. Bu görevlerde bölmeyi çarpmanın tersi olarak ifade etmenin kolaylık sağladığı görülmüştür. Buna kanıt olarak dördüncü görüşmede (G4) verilen “Murat’a babası oyuncak tren almış ve Murat da oyuncak treni için rayları kurmak istiyor. Murat’ın kurduğu kısım tren için gerekli rayların $\frac{4}{5}$ ’i yani 12 santimetre raydır. Tren için gerekli olan rayın tamamı kaç santimetredir?” problemine karşılık gelen işlemin $12 \div \frac{4}{5}$ olduğuna ÖA6’nın problemi okuduktan sonra şu şekilde ifade ederek ulaşması gösterilebilir: “Şimdi $\frac{4}{5}$ ’lik kısmı on ikiymiş, $\frac{4}{5}$ ’lik grubumuz on ikiymiş. Burada 12’yi $\frac{4}{5}$ ’e bölsen.” Burada bölme işlemini çarpma işlemi yani $\frac{4}{5} \cdot X = 12$ üzerinden açıklayarak ifade etmiştir. Bununla beraber çarpmanın tanımını kullanarak $\frac{4}{5}$ ’i “grup sayısı” ve 12’yi “ $\frac{4}{5}$ gruptaki nesne sayısı” olarak ele almıştır.

4.3.3.3. Son Durum

Öğretmen adaylarının öğretim sürecine başlarken bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin verilen problemin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazma bilgilerinin zayıf olmadığı ancak verilen model için bu bilginin zayıf olduğu görülmüştür. Öğretim sürecinde de bu durumun etkisi görülmüştür. Önceleri verilen modelin ifade ettiği işlemi yazarken zorlanmışlardır ancak öğretimin sonunda

herhangi bir zorluk yaşamadıkları görülmüştür. Öğretimin sonunda uygulanan KÇB son-testinde de öğretmen adaylarının işlemleri zorlanmadan yazdıkları görülmüştür (Tablo 4.72). Buna göre öğretmen adaylarının ön-testten son-teste bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin gruptama ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin verilen model ve problemlerin ifade ettikleri işlemleri matematiksel olarak yazma bilgilerinde çok fazla bir gelişim olduğu söylenemez. Sadece bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin verilen kesir çubuğu modelinde ön-testte bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemi olarak yazamayan öğretmen adaylarının son-testte bu şekilde veya iki kesrin çarpma işlemi şeklinde yazdıkları görülmüştür. Bununla beraber öğretim sürecinde bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin verilen model ve problemin ifade ettikleri işlemleri öğretimden önce bölme işleminin bu anlamına ilişkin bir anlamaya sahip olmadıkları halde herhangi bir zorluk yaşamadan ifade etmişlerdir.

Öğretmen adaylarından ÖA2, ÖA4 ve ÖA3 hariç diğer öğretmen adayları KÇB son-testinde on beşinci görevde verilen kesir çubuğu modeline karşılık gelen işlemi $2/7 \div 3$ yerine $1/3 \times 2/7$ olarak ifade etmişlerdir. Burada ÖA6, ÖA5 ve ÖA1'in verilen modele karşılık gelen işlemi ters çevir çarp algoritmasından gelen $1/3$ ile çarpma işlemi şeklinde ifade ettikleri söylenebilir. Ön-testte de çarpma işleminden yararlanmışlardır ama burada modelin yansıttığı paylaştırma anlamına uygun bir şekilde yazmışlardır. Son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) öğretmen adaylarına verilen modele karşılık gelen işlemi başka nasıl ifade edebilecekleri sorulduğunda $2/7 \div 3$ bölme işleminin de yazılabileceğini belirtmişlerdir. Bu görüşmede öğretmen adayları verilen modelde parçalama şeklinin farklılığından kaynaklı olarak modelin çarpma işlemini gösterdiğine işaret etmişlerdir.

Tablo 4.72.

Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemine İlişkin Verilen Model ve Problemler İçin Yazdıkları İşlemler

Öğretmen Adayı	“5’in içinde kaç tane 1/2 vardır?”	Kesir çubuğu modeli	Problem
ÖA6	• $5 \div 1/2$ • İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	• $1/3 \times 2/7$ • İşlem modeli tam olarak karşılamıyor (Bölme yerine ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen çarpma işlemini yazıyor)	• $2/5 \div 3$ • İşlem problemi karşılıyor
ÖA2	• $5 \div 1/2$ • İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	• $1/3 \times 2/7$ veya $2/7 \div 3$ • İşlem modeli karşılıyor	• $2/5 \div 3$ • İşlem problemi karşılıyor
ÖA4	• $5 \div 1/2$ • İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	• $2/7 \div 3$ • İşlem modeli karşılıyor	• $2/5 \div 3$ • İşlem problemi karşılıyor
ÖA3	• $5 \div 1/2$ • İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	• $2/7 \div 3$ • İşlem modeli karşılıyor	• $2/5 \div 3$ • İşlem problemi karşılıyor
ÖA5	• $5 \div 1/2$ • İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	• $1/3 \times 2/7$ • İşlem modeli tam olarak karşılamıyor (Bölme yerine ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen çarpma işlemini yazıyor)	• $2/5 \div 3$ • İşlem problemi karşılıyor
ÖA1	• $5 \div 1/2$ • İşlem sözel ifadeyi karşılıyor	• $1/3 \times 2/7$ • İşlem modeli tam olarak karşılamıyor (Bölme yerine ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen çarpma işlemini yazıyor)	• $2/5 \div 3$ • İşlem problemi karşılıyor

ÖA6 son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) KÇB son-testinde 15. görevde verilen kesir çubuğu modelinden ayrı bir model çizmiştir ve bu model gibi olsa daha açık olabileceğini ifade etmiştir. Bu modelde $2/7$ 'nin her bir parçasını 3 eş parçaya bölüp ikiye küçük parça şeklinde gruplayarak bölmeye işaret etmiştir. ÖA6 verilen modelde her parçadan birer küçük parça olarak gösterildiği için bunun bölmeden ziyade çarpma işlemini gösterdiğini belirtmiştir. ÖA5 de bunu bu görüşmede (G8) şöyle ifade etmiştir: “ $2/7$ 'yi direk üçe bölebilirdik, $1/7$ 'yi değil de. $2/7$ 'yi üçe bölünce, birini alacağız yine iki parça görecektik yine 21'de 2 tanemiz olacaktı.” Buna göre bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin verilen modelde parçalama şeklinin öğretmen adaylarının modele karşılık gelen işlemi ifade etmelerini zorlaştırdığı söylenebilir.

Sonuç olarak öğretmen adaylarının bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin verilen problem ve modellerin ifade ettikleri işlemleri matematiksel olarak yazma bilgilerinin ön-testten son-teste öğretim süresince geliştiği söylenebilir. Bu gelişim Tablo 4.73'te verilmiştir. Bu tablo öğretmen adaylarının ön-testte, öğretim sürecinde ve son-testte verilen model ve problemler için yazdıkları işlemlerin birarada verilmiş hali olarak sunulmuştur.

Tablo 4.73.

Öğretmen Adaylarının Bir Doğal Sayı ile Bir Kesrin ve Bir Kesir ile Bir Doğal Sayının Bölme İşlemine İlişkin Verilen Model ve Problemlerin İfade Ettikleri İşlemleri Matematiksel Olarak Yazma Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo

Öğretmen Adayı	Ön-test/G1	Öğretim süreci/G4-G5									Son-test/G8		
	“5’in içinde kaç tane $\frac{1}{2}$ vardır?”	Kesir çubuğu modeli	Problem	Dairesel alan modeli (Gruplama anlamı)	Dikdörtgensel alan modeli (Paylaştırma anlamı)	Problem (Paylaştırma anlamı)	Problem (Gruplama anlamı)	Sayı doğrusu modeli (Gruplama anlamı)	Kesir çubuğu modeli (Paylaştırma anlamı)	Küme modeli (Gruplama anlamı)	“5’in içinde kaç tane $\frac{1}{2}$ vardır?”	Kesir çubuğu modeli	Problem
ÖA6	• $5 \div \frac{1}{2}$ • İşlem sözel ifadeyi karşılı yor	• $(\frac{2}{7} \div 6) \times 2$ • İşlem modeli tam olarak karşılamı yor (Görüşmed e $\frac{2}{7} \div 3$ işlemini yazıyor)	• $\frac{2}{5} \div 3$ • İşlem problemi karşılıyor	• $2 \div \frac{2}{3}$ • İşlem modeli karşılı y or	• $\frac{5}{7} \div 3$ • İşlem modeli karşılıyor	• $\frac{12}{5} \div \frac{4}{5}$ • İşlem problemi karşılıyor	• $3 \div \frac{1}{4}$ • İşlem problem i karşılı y or	• $6 \div \frac{3}{4}$ • İşlem modeli karşılı y or	• $3 \div \frac{2}{5}$ • İşlem modeli karşılıyor	• $4 \div \frac{2}{5}$ • İşlem modeli karşılı y or	• $5 \div \frac{1}{2}$ • İşlem sözel ifadeyi karşılı y or	• $\frac{1}{3} \times \frac{2}{7}$ • İşlem modeli tam olarak karşılamı yor (Bölme yerine ters çevir çarp algoritmasında n karşılık gelen çarpma işlemini yazıyor)	• $\frac{2}{5} \div 3$ • İşlem proble mi karşılı y or
ÖA2	• $5 \div \frac{1}{2}$ • İşlem sözel ifadeyi karşılı y or	• $\frac{2}{7} \div 3 = \frac{6}{21} \div 3 = \frac{2}{21}$ • İşlem modeli karşılıyor	• $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$ • İşlem problemi tam olarak karşılamı y or (Görüşmed e düzeltiyor)	• $2 \div \frac{2}{3}$ • İşlem modeli karşılı y or	• $\frac{1}{3} \times \frac{5}{7}$ ve $\frac{5}{7} \div 3$ • İşlem modeli karşılıyor	• $\frac{12}{5} \div \frac{4}{5}$ • İşlem problemi karşılıyor	• $3 \div \frac{1}{4}$ • İşlem problem i karşılı y or	• $6 \div \frac{3}{4}$ • İşlem modeli karşılı y or	• $3 \div \frac{2}{5}$ • İşlem modeli karşılıyor	• $4 \div \frac{2}{5}$ • İşlem modeli karşılı y or	• $5 \div \frac{1}{2}$ • İşlem sözel ifadeyi karşılı y or	• $\frac{1}{3} \times \frac{2}{7}$ veya $\frac{2}{7} \div 3$ • İşlem modeli karşılıyor	• $\frac{2}{5} \div 3$ • İşlem proble mi karşılı y or
ÖA4	• $5 \div \frac{1}{2}$ • İşlem sözel ifadeyi karşılı y or	• $(\frac{2}{7} \div 6) \times 2$ • İşlem modeli tam olarak karşılamı y or (Görüşmed e $\frac{2}{7} \div 3$ işlemini yazıyor)	• $\frac{2}{5} \div 3$ • İşlem problemi karşılıyor	• $\frac{2}{3} \div 2$ • İşlemin tersini yazma	• $\frac{1}{3} \times \frac{5}{7}$ ve $\frac{5}{7} \div 3$ • İşlem modeli karşılıyor	• $\frac{12}{5} \div \frac{4}{5}$ • İşlem problemi karşılıyor	• $3 \div \frac{1}{4}$ • İşlem problem i karşılı y or	• $6 \div \frac{3}{4}$ • İşlem modeli karşılı y or	• $3 \div \frac{2}{5}$ • İşlem modeli karşılıyor	• $4 \div \frac{2}{5}$ • İşlem modeli karşılı y or	• $5 \div \frac{1}{2}$ • İşlem sözel ifadeyi karşılı y or	• $\frac{2}{7} \div 3$ • İşlem modeli karşılıyor	• $\frac{2}{5} \div 3$ • İşlem proble mi karşılı y or
ÖA3	• $5 \div \frac{1}{2}$	• $\frac{2}{7} \times \frac{1}{3}$ veya $\frac{2}{7} \div$	• $\frac{2}{5} \div 3$ • İşlem	• $2 \div \frac{2}{3}$ • İşlem	• $\frac{5}{7} \div 3$ • İşlem	• $\frac{12}{5} \div \frac{4}{5}$ • İşlem	• $3 \div \frac{1}{4}$ • İşlem	• $6 \div \frac{3}{4}$ • İşlem	• $3 \div \frac{2}{5}$ • İşlem	• $4 \div \frac{2}{5}$ • İşlem	• $5 \div \frac{1}{2}$	• $\frac{2}{7} \div 3$ • İşlem modeli	• $\frac{2}{5} \div 3$

	İşlem sözel ifadeyi karşılı yor	3 - İşlem problemi karşılıyor	problemi karşılıyor	modeli karşılıy or	modeli karşılıyor	problemi karşılıyor	problem i karşılıy or	modeli karşılıy or	modeli karşılıyor	modeli karşılıy or	İşlem sözel ifadeyi karşılı yor	karşılıyor	İşlem proble mi karşılı yor
ÖA5	$5 \div 1/2$ - İşlem sözel ifadeyi karşılı yor	$2/7 \times 1/3$ İşlem modeli tam olarak karşılamıy or	$2/5 \div 3$ - İşlem problemi karşılıyor	$2 \div 2/3$ - İşlem modeli karşılıy or	$5/7 \div 3$ - İşlem modeli karşılıyor	$12 \div 4/5$ - İşlem problemi karşılıyor	$3 \div 1/4$ - İşlem problem i karşılıy or	$6 \div 3/4$ - İşlem modeli karşılıy or	$3 \div 2/5$ - İşlem modeli karşılıyor	$4 \div 2/5$ - İşlem modeli karşılıy or	$5 \div 1/2$ - İşlem sözel ifadeyi karşılı yor	$1/3 \times 2/7$ İşlem modeli tam olarak karşılamıyor (Bölme yerine ters çevir çarp algoritmasında n karşılık gelen çarpma işlemini yazıyor)	$2/5 \div 3$ - İşlem proble mi karşılı yor
ÖA1	$5 \div 1/2$ - İşlem sözel ifadeyi karşılı yor	$1/7 \times 1/3 + 1/7 \times 1/3$ İşlem modeli tam olarak karşılamıy or	$2/5 \div 3$ veya $2/5 \times 1/3$ - İşlem problemi karşılıyor	$2 \div 2/3$ - İşlem modeli karşılıy or	$5/7 \div 3$ - İşlem modeli karşılıyor İşlemi yazmada zorlanma	$12 \div 4/5$ - İşlem problemi karşılıyor	$3 \div 1/4$ - İşlem problem i karşılıy or	$6 \div 3/4$ - İşlem modeli karşılıy or	$3 \div 2/5$ - İşlem modeli karşılıyor	$4 \div 2/5$ - İşlem modeli karşılıy or	$5 \div 1/2$ - İşlem sözel ifadeyi karşılı yor	$1/3 \times 2/7$ İşlem modeli tam olarak karşılamıyor (Bölme yerine ters çevir çarp algoritmasında n karşılık gelen çarpma işlemini yazıyor)	$2/5 \div 3$ - İşlem proble mi karşılı yor

4.3.4. İki Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Matematiksel İfade Yazma Bilgisi

4.3.4.1. Başlangıç Durumu

Öğretmen adaylarının öğretimden önce iki kesrin bölme işlemine ilişkin verilen modelin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazma bilgilerinin bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine göre daha zayıf olduğu görülmüştür (Tablo 4.74). ÖA2 hariç diğer öğretmen adayları öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde yedinci görevde iki kesrin bölme işleminin grupta anlamına ilişkin verilen sayı doğrusu modeline (Şekil 4.73) karşılık gelen işlemi ifade edememişlerdir. Bu durum öğretmen adaylarının öğretimden önce iki kesrin bölme işlemine ilişkin kavramsal anlamalarının zayıf olması ile açıklanabilir.

Tablo 4.74.

Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde İki Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Verilen Model İçin Yazdıkları İşlemler

Öğretmen Adayı	Sayı doğrusu modeli (Gruplama anlamı)
ÖA6	• $2/3 \times 4/4 = 8/12 \Rightarrow 8/12 \div 3/12 \Rightarrow 8/3 = 2 \frac{2}{3}$, $1/4 \times 3/3 = 3/12 \Rightarrow 3/12 \div 3/12 = 1$ • İşlem modeli karşılamıyor
ÖA2	• $2/3 \div 1/4$ • İşlem modeli karşılıyor
ÖA4	• İşlem yok • Kesirleri genişletme
ÖA3	• İşlem yok • Payda eşitleme, kesirleri karşılaştırma
ÖA5	• $2/3 + 1/4 \Rightarrow 8/12 + 3/12$ • İşlem modeli karşılamıyor
ÖA1	• İşlem yok • Kesirleri genişletme

Öğretmen adaylarından ÖA4 ve ÖA1 verilen modele karşılık gelen işlem yerine modelin basamaklarındaki kesirli sayıları ifade etmişlerdir. Modelin ilk basamağında $2/3$ ve $1/4$, ikinci ve üçüncü basamağında $8/12$ ve $3/12$ olduğunu ifade etmişlerdir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) modelin ifade ettiği işlem sorulmuştur ve ÖA1 bölme işlemi olduğunu belirtip şöyle açıklamıştır: “Çünkü 1 tam 3 parçaya bölünmüş, ondan sonra $1/3$, $1/3$, $1/3$ ’lük parçalar var. Şurada (modelin ikinci basamağında $2/3$ kesrini gösteriyor) da aynı kesir tekrar parçalara bölünmüş, hani bütün diyeyim hatta. Ondan sonra ama daha küçük parçalara bölünmüş, oysa ki şununla şu aynı. Ama şey olmuş daha küçük parçalara bölündüğü için sanki çocuk şunun daha fazla olduğunu düşünebilir. Şu ($1/4$ kesrini gösteriyor) da aynı.” Burada ÖA1 iki kesrin bölme işleminden ziyade parçalamaları ifade etmiştir. Bunu şu ifadesi desteklemektedir: “Yani şu bir bütünü, sıfırla bir arasını kaç parçaya bölmüşüm hani o paydayı gösteriyordu.” ÖA1 burada iki kesrin bölme işleminden

ziyade 1 bütünün 4 eş parçaya ve 3 eş parçaya bölünmesine işaret etmiştir yani kesrin bölme anlamını kullanmıştır. Burada ÖA4 ve ÖA1'in verilen modele karşılık gelen işlemi ifade edememelerinde öğretimden önce iki kesrin bölme işlemine ilişkin model bilgisine sahip olmamalarının etkisi olduğu söylenebilir. Bunu ÖA4'ün görüşmede (G1) verilen modelden bir şey anlamadığını belirtmesi desteklemektedir.

ÖA3 verilen modelin ifade ettiği işlemi yazamamıştır ve ÖA4 ile ÖA1 gibi iki kesrin genişletilmesinin verildiğini ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) şu şekilde açıklamıştır: *“Paydalarını eşitlemiş. Yani her iki sayı doğrusunda da 12'ye eşit bölüm yapmış. Mesela bu 3'e bölünmüş, bu dörde bölünmüş. Bunların ortak katları 12. Daha iyi ifade edebilmem için ikisi için de 12'ye bölünmüş şeklinde. Birinci kesrim için baktığımda burada bunu dört ile genişletmiş gibi düşünebilirim. Bunu da aynı zamanda üç ile genişletmiş. Birbiri cinsinden daha iyi görebilmem için. 2/3'ü 4 ile genişletmişti, 8/12. Diğeri de 3 ile genişletmişti, 3/12. Bu ikinci basamak.”* ÖA3 burada modelin ikinci basamağını açıklamıştır. Bunun üzerine üçüncü basamakta ne yapıldığı sorulduğunda üçe bölündüğünü, karşılaştırma yapıldığını şöyle açıklamıştır: *“Şöyle bu 3/12 ya bu mesela 3/12 bir tane daha 3/12 var bir de bu 3/12'nin 2/3'lük kısmı tekrardan. Sanki ikisinde de aynı anda karşılaştırmaya başlamış ama birisi bitmiş diğeri devam ediyor, ne kadar fazla olduğunu gösteriyor gibi.”* ÖA3'e modelin tamamını düşündüğünde bu ifade ettiklerini işlem olarak nasıl yazacağı sorulduğunda aklına bir şey gelmediğini belirtmiştir.

ÖA5 verilen modele karşılık gelen işlemi iki kesrin toplama işlemi şeklinde ifade etmiştir. Modelin ilk basamağını $2/3 + 1/4$, ikinci basamağını $8/12 + 3/12$ ve üçüncü basamağını $8/12 + 3/12$ olarak ifade etmiştir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) modelin ifade ettiği işlemi nasıl yazdığını şöyle açıklamıştır: *“Ben bunu toplama sandım zaten bir, iki, üç hani sonuçlar kaç çıkar. İkisi de ayrı sayı doğrusu, birinde 2/3, birinde 1/4, onların toplamıdır hani bu bir işlemi diye ben öyle düşünmüştüm.”* Bunun üzerine ÖA5'e neden toplama işlemi olduğu sorulduğunda ÖA5 *“Bilmiyorum ki o benim sadece yanlış anlamam. Toplama işlemi, çıkarma işlemi bir sayı doğrusu üzerinde yapılırdı şimdi hatırladım.”* şeklinde ifade etmiştir. Buna göre ÖA5'in sayı doğrusu modelini öğretimden önce çarpma ve bölme işleminden ziyade toplama ve çıkarma işlemleri için kullanılan bir model olarak gördüğü söylenebilir.

ÖA6 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak verilen modele karşılık gelen işlem yerine modelin basamaklarındaki sayı doğrularını ayrı ayrı ele alıp bu sayı doğrularına karşılık gelen işlemleri ifade etmiştir. Burada modelin ilk basamağında sayı doğrularını $2/3$ ve $1/4$

olarak ifade etmiştir, ikinci basamağında bunların genişletildiğini belirterek $8/12$ ve $3/12$ olarak ifade etmiştir ve son basamağında her birinin ayrı ayrı $3/12$ 'ye bölündüğünü ifade etmiştir. Buna göre ÖA6 sayı doğrularını ayrı ayrı işlem olarak ele alsa da bölmenin gruptama anlamına ilişkin anlamaya sahip olduğu söylenebilir. Bunu ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) işlemleri nasıl yazdığına ilişkin yaptığı şu açıklama desteklemektedir: *“Bize burada 2 tane $3/12$ bir de $2/3$ tane $3/12$ olduğunu göstermiş ya şekil olarak hani buraya gitmek açısından yapmışım galiba. Aslında $8/12$ 'yi $3/12$ 'ye bölmüş. Kaç tane $3/12$ vardır der gibi algıladım soruyu.”* Ön-testte $2/3$ ve $1/4$ kesirlerini ayrı ayrı ele alırken, ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) modelin ifade ettiği işlemin $2/3 \div 1/4$ olduğuna işaret etmiştir.

Öğretmen adaylarından sadece ÖA2 verilen modele karşılık gelen işlemi doğru bir şekilde $2/3 \div 1/4$ olarak ifade etmiştir. Buna göre ÖA2'nin öğretim sürecine iki kesrin bölme işlemine ilişkin verilen modele karşılık gelen işlemi matematiksel olarak yazma bilgisi diğer öğretmen adaylarına göre daha güçlü bir şekilde başladığı söylenebilir. ÖA2 ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) modelin ilk basamağındaki ilk sayı doğrusunu $2/3$, ikinci sayı doğrusunu $1/4$ olarak ifade etmiştir. Modelin ikinci basamağında payda eşitlemenin yapıldığını belirtmiştir ve ilk sayı doğrusunu $8/12$ ve ikinci sayı doğrusunu $3/12$ olarak ifade etmiştir. Burada $8/12$ 'nin içerisinde ne kadar $3/12$ yani $2/3$ 'ün içerisinde ne kadar $1/4$ olduğunun gösterildiğini ifade etmiştir. Buradan modele karşılık gelen işlemi sözel olarak *“ $2/3$ 'ün içinde kaç tane $1/4$ vardır işlemi modellenmiş”* şeklinde ifade etmiştir ve matematiksel olarak $2/3 \div 1/4$ şeklinde yazmıştır. Buradan modelin son basamağını *“ $2/3$ 'ün içinde kaç tane var”* şeklinde ifade edip işlemin sonucunu *“bir, iki, artı $2/3$ ”* olarak ifade etmiştir. Buna göre ÖA2'nin öğretimden önce yeni bütün ve işlemin sonucu için referans alınan bütüne ilişkin kavramsal anlamaya sahip olduğu söylenebilir. Çünkü işlemin sonucunu model üzerinden doğru bir şekilde ifade etmiştir.

4.3.4.2. Öğretim Süreci

Öğretim sürecine ÖA2 hariç diğer öğretmen adayları iki kesrin bölme işlemine ilişkin verilen modele karşılık gelen işlemi matematiksel olarak yazma bilgileri zayıf bir şekilde başlamışlardır. Öğretim sürecinde iki kesrin bölme işleminin verildiği ilk dersten (D5) itibaren bu bilgilerin ilerleme görülmüştür (Tablo 4.75). Öğretmen adayları bu süreçte sadece iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamını yansıtan bir kesir çubuğu modeli ve gösterimi diğerlerinden farklı olan bir dikdörtgensel alan modeli verildiğinde bu

modellerin ifade ettikleri işlemleri yazarken zorluk yaşadıkları görülmüştür. Burada öğretmen adayları verilen kesir çubuğu modelinin ifade ettiği işlemi yazarken zorluk yaşadıklarında diğer görevlere geçilmiştir ve verilen işlem için bu modele benzer model çizdikleri görülmüştür. Öğretmen adayları bir yandan verilen modelin işlemini ifade etmede zorlanırken diğer yandan verilen işlem için bu modeli çizmeleri birinde küçük sayı büyük sayıya bölünüyorken diğerinde büyük sayının küçük sayıya bölünüyor olması ile açıklanabilir. Diğer taraftan sadece bu iki modelde öğretmen adaylarının zorluk yaşamaları paylaşırma anlamı için verilen modelin ifade ettiği işlemde bölünenin bölenden büyük olması ve grupta anlamı için verilen modelde bölünenin bölenden küçük olması ile de açıklanabilir. Çünkü öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminde olduğu gibi iki kesrin bölme işleminde de bunlara ilişkin anlamaya sahip değillerdir.

Beşinci ve altıncı derste iki kesrin bölme işlemine ilişkin öğretim gerçekleştirilmiştir. Beşinci derste (D5) verilen alıştırılarda (A7, A8) öğretmen adaylarının iki kesrin bölme işleminin grupta anlamına ilişkin verilen modellerin ve paylaşırma anlamına ilişkin verilen probleme karşılık gelen işlemleri ifade ederken herhangi bir zorluk yaşamadan doğru bir şekilde ifade ettikleri görülmüştür. Bu işlemleri yazarken özellikle ÖA6 ve ÖA5 olmak üzere öğretmen adaylarının bölmeyi çarpmanın tersi olarak ifade etmeyi kullandıkları görülmüştür. Buna göre bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminde olduğu gibi iki kesrin bölme işlemine ilişkin model veya problem verildiğinde bu şekilde ifade etmenin öğretmen adaylarına kolaylık sağladığı söylenebilir. ÖA6 ve ÖA5'in bölmeyi çarpmanın tersi olarak ifade etmeye hem kesirlerle çarpma hem kesirlerle bölmede kullandıkları ve model çizme ile problem kurmada olduğu gibi matematiksel ifade yazmada da buna sıkı sıkıya bağlı oldukları görülmektedir.

Tablo 4.75.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde İki Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Verilen Model ve Problemler İçin Yazdıkları İşlemler

Öğretmen Adayı	D5/A7 Kesir çubuğu modeli (Gruplama anlamı)	D5/A8 Dikdörtgensel alan modeli (Gruplama anlamı)	Problem (Paylaştırma anlamı)	D5/G6 Kesir çubuğu modeli (Paylaştırma anlamı)	Dikdörtgensel alan modeli (Gruplama anlamı)	Problem (Paylaştırma anlamı)
ÖA6	• $4/5 \div 5/6$ • İşlem modeli karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi	• $3/5 \div 1/3$ • İşlem modeli karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi	• $2/5 \div 3/4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $3/5 \div 4/9$ • İşlem modeli karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi	• $3/4 \div 2/3$ • İşlemin tersini yazma	• $2/5 \div 3/4$ • İşlem problemi karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi
ÖA2	• $4/5 \div 5/6$ • İşlem modeli karşılıyor	• $3/5 \div 1/3$ • İşlem modeli karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi	• $2/5 \div 3/4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $3/5 \div 4/9$ • İşlem modeli karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi • İşlemin tersini yazma • İşlemi yazmada zorlanma	• $3/4 \div 2/3$ • İşlemin tersini yazma	• $2/5 \div 3/4$ • İşlem problemi karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi
ÖA4	• $4/5 \div 5/6$ • İşlem modeli karşılıyor	• $3/5 \div 1/3$ • İşlem modeli karşılıyor	• $2/5 \div 3/4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $3/5 \div X = 4/9$ • İşlem modeli tam olarak karışlamıyor	• $2/3 \div 3/4$ • İşlem modeli karşılıyor	• $2/5 \div 3/4$ • İşlem problemi karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi
ÖA3	• $4/5 \div 5/6$ • İşlem modeli karşılıyor	• $3/5 \div 1/3$ • İşlem modeli karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi	• $2/5 \div 3/4$ • İşlem problemi karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi	• $3/5 \div 4/9$ • İşlem modeli karşılıyor • İşlemi yazmada zorlanma	• $3/4 \div 2/3$ • İşlemin tersini yazma	• $2/5 \div 3/4$ • İşlem problemi karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi
ÖA5	• $4/5 \div 5/6$ • İşlem modeli karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi	• $3/5 \div 1/3$ • İşlem modeli karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi	• $2/5 \div 3/4$ • İşlem problemi karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi	• $3/5 \div 4/9$ • İşlem modeli karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi • İşlemin tersini yazma • İşlemi yazmada zorlanma	• $3/4 \div 2/3$ • İşlemin tersini yazma	• $2/5 \div 3/4$ • İşlem problemi karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi
ÖA1	• $4/5 \div 5/6$ • İşlem modeli karşılıyor	• $3/5 \div 1/3$ • İşlem modeli karşılıyor	• $2/5 \div 3/4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $3/5 \div 4/9$ • İşlem modeli karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi • İşlemi yazmada zorlanma	• $3/4 \div 2/3$ • İşlemin tersini yazma	• $2/5 \div 3/4$ • İşlem problemi karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi

Beşinci derse (D5) paralel yapılan görüşmede (G6) iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin bir kesir çubuğu modeli verilmiştir (Şekil 4.74). ÖA4 hariç diğer öğretmen adaylarının bu modele karşılık gelen işlemi doğru bir şekilde $3/5 \div 4/9$ olarak ifade ettikleri, bununla beraber ÖA6 hariç diğer öğretmen adaylarının bu modelin ifade ettiği işlemi yazarken zorlandıkları görülmüştür. Öğretmen adaylarının bu modele karşılık gelen işlemi yazarken bölmeyi çarpmanın tersi olarak ifade etmeden yararlandıkları görülmüştür.

ÖA6 verilen modele karşılık gelen işleme ulaşmadan önce modelin basamaklarını ifade etmiştir. Modelin ilk basamağını “*X nesneminin 4/9’u bir bütünün 3/5’ine denk geliyormuş.*” şeklinde açıklayıp çarpma işlemi şeklinde $4/9 \cdot X = 3/5$ olarak yazmıştır. Modelin ikinci basamağını “*Aynı birim üzerinden konuşmak için alttaki parçayı dörde, üsttekinin her birimini üç parçaya paylaştırmıştır.*” şeklinde açıklamıştır. Burada “*aynı birim üzerinden konuşmak*” ifadesiyle bütünlerin farklı olduğunu gözardı etmiştir ancak bu basamaktaki kesir çubuklarının birer küçük parçasını ifade ederken bütünlerin farklı olduğuna işaret etmiştir. Buna göre ilk kesir çubuğunun bir küçük parçasını “*X nesnenin 1/27’si*” ve ikinci kesir çubuğunun bir küçük parçasını “*bir bütünün 1/20’si*” olarak ifade etmiştir. Modelin son basamağını “*Bunun üzerinden hani X’in tamamını oluşturmuş ve 27 parça her birine denk geliyor ya 27/20’ye eşit olduğunu göstermiş en sonda da.*” şeklinde açıklayarak doğru bir şekilde “*27/20*” olarak ifade etmiştir. ÖA6’ya verilen modelin tamamı göz önüne alındığında hangi işlemin görüldüğü sorulduğunda ÖA6 doğru bir şekilde $3/5 \div 4/9$ olarak ifade etmiştir.

ÖA3 verilen modelin ilk iki basamağını ÖA6 gibi ifade etmiştir ancak çarpma işlemi şeklinde yazmamıştır, modelin üçüncü basamağını ifade edememiştir ve görüşmede diğer görevlere geçip buna en son tekrar dönmüştür. Bu göreve dönmeden hemen önceki görevde bölmenin paylaştırma anlamına ilişkin bir problem verilmiştir ve bu problemin ifade ettiği işlemi yazmakta zorlanmamıştır ve bu işlem için bu görevdekine benzer bir şekilde model çizmiştir. Bu görevde verilen modelin ifade ettiği işlemi yazmakta zorlanırken verilen problem için benzer modeli zorlanmadan çizmiştir. Bu iki durum arasındaki fark birinde küçük sayı büyük sayıya bölünüyorken diğerinde büyük sayının küçük sayıya bölünüyor olması şeklinde açıklanabilir. ÖA3’e son görevde çizdiği model ile bu görevde verilen modelin benzer olup olmadığı sorulduğunda şöyle ifade etmiştir: “*Huu, evet. O zaman bunun 4/9’u 3/5’lik bir şeye eşitmiş. O zaman bir küçük birimindekini bulup tamamını buluruz.*” Sonra modelin ikinci basamağında ilk kesir çubuğunun bir

küçük parçasını $1/27$ ve ikinci kesir çubuğunun bir küçük parçasını $1/20$ olarak ifade etmiştir. Modelin son basamağında ilk kesir çubuğunun bir birimi yani $1/9$ 'unda ikinci kesir çubuğunun bir küçük parçasından 3 tane olduğunu, bunun da $3/20$ olduğunu ve bundan 9 tane olduğu için 9 ile çarparak $27/20$ 'nin modellendiğini ifade etmiştir. Modelin bütün basamakları dikkate alındığında ifade ettiği işlem sorulmuştur ve ÖA3 doğru bir şekilde $3/5 \div 4/9$ işlemi olarak ifade etmiştir.

ÖA2, ÖA5 ve ÖA1'in de ÖA3 gibi verilen modelin ifade ettiği işlemi yazmada zorlandıkları ancak görevin sonunda bu işlemi doğru bir şekilde yazdıkları görülmüştür. ÖA2, ÖA5 ve ÖA1 modelin basamaklarını doğru bir şekilde ifade ettikten sonra modele karşılık gelen işlemi $4/9 \div 3/5$ olarak ifade etmişlerdir. Buradan modelin son basamağından işlemin sonucunu $27/20$ olarak ifade etmişlerdir ancak yazdıkları işlemi yaparak bulduklarında sonuç $20/27$ olmaktadır. Bu iki sonucun farklı çıkması üzerine ÖA1 ve ÖA2 modelin ilk basamağına geri dönmüşlerdir ve "X'in $4/9$ 'u $3/5$ olan sayı" ifadesini göz önüne alarak $4/9 \cdot X = 3/5$ işlemini yazmışlardır, bunun paylaştırma anlamı olduğunu ifade etmişlerdir ve buradan modelin $3/5 \div 4/9$ işlemini ifade ettiğini belirtmişlerdir. Burada bölmeyi çarpmanın tersi olarak yazma ÖA2 ve ÖA1'e modele karşılık gelen işlemi doğru bir şekilde ifade etmelerine yardımcı olmuştur. ÖA5 sonuçlar farklı çıktığında ÖA2 ve ÖA1'den farklı olarak bunu şöyle açıklamıştır: *"Evet, neyi yanlış yaptım? Yok ben o zaman hangisini yanlış yapıyorum ki. $3/5$ bölü $4/9$ olur o zaman. Buradan yorumladığıma göre de o çıkar. İşlemin sonucuna baktığımda $3/5$ bölü $4/9$ 'u görüyorum ve işlem de bu galiba."* Burada ÖA5 bu işlemi modelin son basamağından ifade ettiği sonuca göre hareket ederek modelin diğer basamaklarını dikkate almadan sadece başlangıçta yazdığı işlemdeki sayıların yerini değiştirerek ifade etmiştir. Buna göre ÖA5'in iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin anlamasının işlemsel düzeyde ve diğer öğretmen adaylarınıninkine göre zayıf olduğu söylenebilir.

ÖA4 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak verilen modele karşılık gelen işlemi $3/5 \div X = 4/9$ olarak ifade etmiştir. ÖA4 öncelikle ilk basamaktaki ikinci kesir çubuğunu $3/5$, ilk kesir çubuğunu " $4/9$ 'u alınmış" olarak ifade etmiştir. Sonra $3/5$ 'in bir sayıya bölündüğünü ve $4/9$ elde edildiğini belirterek $3/5 \div X = 4/9$ işlemini yazmıştır. Buna nasıl ulaştığı sorulduğunda ÖA4 şöyle açıklamıştır: *" $3/5$ 'lik kısım burası, en son kısım da $4/9$ 'luk kısmı. Ama bölme işlemi nerede değil mi? Birinci işlem burası gördüm, hani alttan başladım (işlemi yazarken ikinci kesir çubuğundan başladığına işaret ediyor). Sonuçta X sorulan kısım."* Sonra modelin ikinci basamağında ikinci kesir çubuğunun $3/5$ 'lik kısmının 12

parçaya bölündüğünü ifade etmiştir ve $3/5 \div 12$ işlemini yazmıştır. Bunu “*3/5’lik kısım yeni bütünüm olsun, yeni bütünüm de 12 parçaya bölünmüş.*” şeklinde açıklayarak $3/5$ ’i yeni bütün olarak ifade etmiştir. Bu basamakta ilk kesir çubuğunda da $4/9$ ’luk kısmın 12 parçaya bölündüğünü ve iki kesir çubuğunda oluşan birer parçanın eş olduğunu belirtmiştir. Modelin üçüncü basamağını şöyle ifade etmiştir: “*Yani burada çok diyebileceğim bir şey yok. Bir bütün, kendi içinde 9 parçaya, 9 parça da yani bir bütün 9 parçaya bölünmüş. Bu tekrardan üç parçaya bölünmüş, evet her biri de üç parçaya bölünmüş. Yeni bütünüm yani $1/9$ ’luk kısmın her biri de üç parçaya bölünmüş $((1 \div 9) \div 3$ yazıyor).*” Burada ÖA4 ilk kesir çubuğunu 1 bütün olarak alıp bir küçük parçayı $1/20$ yerine $1/27$ olarak ifade etmiştir. Devamında da bu basamakta 27 tane parçanın olduğunu belirtmiştir. ÖA4’e neden bu bir küçük parçanın $1/27$ ’yi ifade ettiği sorulmuştur ve ilk kesir çubuğunun tamamını 1 bütün olarak düşündüğünü ifade etmiştir. Buna ilişkin geçen diyalog şöyledir (G6, ÖA4, 06/05/2015, 47-57):

G: Neden $1/27$?

ÖA4: Tamamını bir bütün düşünürsem (birinci kesir çubuğunun tamamını gösteriyor) bunların her biri $1/27$.

G: Peki tamamı 1 bütün mü oluyor?

ÖA4: Evet, şu kısmı 1 bütün düşünürsem (birinci kesir çubuğunun tamamını gösteriyor).

G: Peki X ne ifade ediyor senin için?

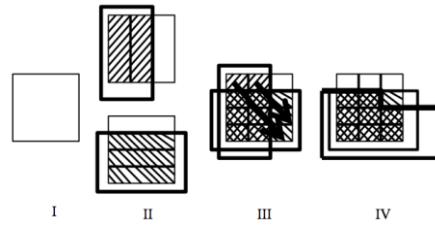
ÖA4: Hepsinde bütünün aynı olduğunu göstermeye çalışmış.

G: Peki o $3/5$ ne ifade ediyor?

ÖA4: Ya bu $3/5$, şu iki işlem de parçalanmış ve bunların eşit olduğunu göstermiş. Yani şöyle söyleyeyim, mesela 10 kilogramlık bir şeyin $3/5$ ’i ile 15’in $4/9$ ’u aynıdır. Ama sadece bütünleri farklıdır. Buradan bu sonucu çıkarıyorum.

Burada bütünlerin farklı olduğunu ÖA4 doğru bir şekilde açıklamıştır ancak ilk kesir çubuğunu 1 bütün alarak bir küçük parçayı yanlış ifade etmiştir. Daha sonra başlangıçta yazdığı işlemi düzeltmemiştir. Buna göre ÖA4’ün iki kesrin bölme işlemine ilişkin verilen modelin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazma bilgisinin diğer öğretmen adaylarına göre daha zayıf olduğu söylenebilir.

ÖA4 hariç diğer öğretmen adayları aynı görüşmede (G6) iki kesrin bölme işleminin grupta anlamına ilişkin verilen dikdörtgensel alan modelinin (Şekil 4.82) ifade ettiği işlemi ters olarak yazmışlardır. Bu durumun verilen modelin gösteriminin karşılaştıkları diğer dikdörtgensel alan modellerinden farklı olmasından kaynaklandığı söylenebilir.



Şekil 4.82. Görüşme-6'da verilen ikinci model

ÖA6 modelin ilk iki basamağını ifade ettikten sonra üçüncü basamağını aynı şekilde yeniden çizmiştir ve şöyle açıklamıştır: “Şurası $3/4$ 'ü (dikdörtgenin 3 satırını tarıyor), şurası da $2/3$ 'ü (dikdörtgenin 2 sütunu tarıyor). Şu kalan iki birimi de taşımış, şu şekilde buraya taşımış, bunu da buraya taşımış (iki sütundaki iki küçük parçayı taralı 3 satırın içine ok ile taşımaya işaret ediyor).” Burada neden böyle bir taşımanın yapıldığı sorulduğunda $3/4$ 'ün içinde $2/3$ 'ün arandığını ifade etmiştir ve $3/4 \div 2/3$ işlemini yazmıştır. ÖA6 neden bu işlem olduğu sorulduğunda $3/4$ 'ten $2/3$ 'e doğru bir taşıma olsaydı $2/3 \div 3/4$ diyebileceğini, son basamaktaki çift taralı kısmı göstererek buranın gösterilmek istendiğini ve $3/4$ 'lük kısmın bütün olarak alındığını ifade etmiştir. ÖA6 burada $2/3 \div 3/4$ işlemi yerine $3/4 \div 2/3$ işlemini ifade etmiştir. Modele bakıldığında $2/3 \div 3/4$ işleminin gruplama anlamı ve $3/4 \div 2/3$ işleminin gruplama anlamı görülebilmektedir ancak $3/4 \div 2/3$ işlemi olsaydı $2/3$ 'lük kısımların daire içine alınarak belirtileceğini ÖA6 gözardı etmektedir. Her ne kadar dikdörtgensel alan modeline aşına olsa da iki kesrin bölme işleminin bu şekilde gösterimine aşına olmamasının burada modelin ifade ettiği işlemi belirlemesinde zorluk yaşamasına sebep olduğu söylenebilir. ÖA6 işlemin sonucuna model üzerinden son basamakta bir küçük parçayı $1/12$ olarak ifade edip $2/3$ 'lük kısmı “8 tane $1/12$ ” ve $3/4$ 'lük kısmı “9 tane $1/12$ ” olarak belirttikten sonra $3/4$ 'ün içinde $2/3$ 'ün arandığına dikkate çekerek $9/8$ 'e ulaşmıştır. Burada modele karşılık gelen işlemi ters ifade ettiği için işlemin sonucunu da $8/9$ yerine $9/8$ olarak ifade etmiştir. ÖA5 ve ÖA1 de benzer şekilde $3/4$ 'ün içinde $2/3$ 'ün arandığını belirterek işlemin sonucunu model üzerinden $9/8$ olarak ifade etmişlerdir. ÖA2 ve ÖA3 işlemin sonucunu diğer öğretmen adayları gibi doğrudan 9 parçayı 8 parçaya oranlayarak bulmak yerine bu 9 parçayı 8 parçaya göre açıklayarak model üzerinden ifade etmişlerdir. ÖA3 burada $3/4$ 'ün bütün olacağını ve içinde $2/3$ 'ten 1 tane olduğunu ve kalan bir küçük parçanın $2/3$ 'ü gösteren 8 küçük parçanın $1/8$ 'i olduğunu, böylece sonucun $1 + 1/8$ 'den $9/8$ olduğunu ifade etmiştir. ÖA2 burada kalan bir parçayı model üzerinden ifade etmekte önce zorluk yaşasa da sonra doğru bir şekilde ifade etmiştir. Buna ilişkin ÖA2 ile geçen diyalog aşağıdaki gibidir (G6, ÖA2, 08/05/2015, 378-393):

G: Bir daha açıklar mısın?

ÖA2: Şimdi bunu bunun içine koyduğumuzda bir tanesi dışarıda kalıyor ya, uı, 1/9'u dışarıda kalıyor, bunun da bunun da aynısı. Yani bunun 1/8'i (2/3'ü gösteriyor) dışarıda kalıyor.

G: Neden 1/8 de 1/12 değil?

ÖA2: Çünkü bütün olarak bunu almışız (2/3'ü gösteriyor), bunun miktarını soruyor bize. Şimdi bunun kaçta kaç önemli bizim için. Şimdi bunu 8 parçaya böldük (2/3'ü gösteriyor), bunu da 9 parçaya böldük (3/4'ü gösteriyor). Yani kısacası bütünleri 12 parçaya böldük. Bunun bir parçası bunun bir parçasına eşit şu an (ilk dikdörtgenin bir küçük parçasının ikinci dikdörtgenin bir küçük parçasına eşit olduğuna işaret ediyor). Bu 8 parça, bu 9 parça. Şimdi bunu bunun içine koyduğumuzda bu bunun 8/9'u (2/3'ün 3/4'ün 8/9'u olduğuna işaret ediyor). Bize bunun, bunun ne kadarı olduğu soruluyor (2/3'ün 3/4'ün ne kadarı olduğuna işaret ediyor). Bunun içindeki 2/3 miktarı soruluyor. Onun için bunun içinde bir tane 2/3 var artı bu 2/3'ün bir karesi daha var, bu kare (bir küçük parçayı kastediyor) de bunun ne kadarı ediyor, bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz, 1/8'i. Yani 1 tam, 2/3'ün tamamı yani 1 artı 1/8 (1 + 1/8 yazıyor).

ÖA4 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak verilen modele karşılık gelen işlemi doğru bir şekilde $2/3 \div 3/4$ olarak ifade etmiştir ve neden bu işlem olduğunu şöyle açıklamıştır:

“Şimdi 2/3'lük kısım bu, 3/4'lük kısım bu. Bunla bu üst üste konmuş (modelin üçüncü basamağına işaret ediyor). Ortak kesişimi aranmış. Aslında ortak kesişim değil de hani şunlar ortak da, şu kısımlar ortak değil. İki parça burada kalmış, iki parça burada kalmış. İki tane de buraya yazmışlar hani karalamışlar ya (modelin üçüncü basamağında ok ile iki taralı parçanın taşınmasına işaret ediyor).” Burada ÖA4 verilen modelin ifade ettiği işlemin neden bu işlem olduğunu tam olarak açıklayamamıştır. Buna göre ÖA4'ün iki kesrin bölme işlemine ilişkin verilen modelin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazma bilgisinin derin olmadığı söylenebilir.

Öğretmen adayları iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin kesir çubuğu modeli verildiğinde modele karşılık gelen işlemi ifade etmede zorluk yaşarlarken aynı görüşmede (G6) iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin verilen

“Meryem'in köpeğinin bir ayda yediği köpek mamasının $\frac{3}{4}$ 'ü $\frac{2}{5}$ kilogramdır. Meryem'in

köpeği bir ayda kaç kg mama yer?” problemine karşılık gelen işlemi doğru bir şekilde $2/5 \div 3/4$ olarak ifade etmişlerdir. Bu işleme öğretmen adayları $3/4 \cdot X = 2/5$ şeklinde yazarak ulaşmışlardır. Öğretmen adayları bölme işlemini önce çarpmanın tersi olarak yazmışlardır ve problemin bölmenin paylaştırma anlamını yansıttığını belirtmişlerdir. Sonra bu işlemi “Grubumda X nesnelerim var, bunun 3/4'ü 2/5'i ifade ediyor.” şeklinde ifade etmişlerdir ve doğru bir şekilde bölme işlemi olarak yazmışlardır.

4.3.4.3. Son Durum

Öğretmen adaylarının öğretim sürecinde iki kesrin bölme işlemine ilişkin verilen modelin ve problemin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazma bilgilerinin geliştiği

görülmüştür. Bu gelişim öğretmen adaylarının ön-testte ve son-testte yazdıkları işlemler karşılaştırıldığında da görülmektedir (Tablo 4.77). KÇB ön-testinde ÖA2 hariç diğer öğretmen adayları iki kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin verilen sayı doğrusu modelinin ifade ettiği işlemi ifade edemezlerken öğretimden sonra uygulanan son-testte öğretmen adaylarının hepsi doğru bir şekilde ifade etmişlerdir (Tablo 4.76).

Tablo 4.76.

Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde İki Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Verilen Model İçin Yazdıkları İşlemler

Öğretmen Adayı	Sayı doğrusu modeli (Gruplama anlamı)
ÖA6	• $2/3 \div 1/4$ • İşlem modeli karşılıyor
ÖA2	• $2/3 \div 1/4$ • İşlem modeli karşılıyor
ÖA4	• $2/3 \div 1/4$ • İşlem modeli karşılıyor
ÖA3	• $2/3 \div 1/4$ • İşlem modeli karşılıyor
ÖA5	• $2/3 \div 1/4$ • İşlem modeli karşılıyor
ÖA1	• $2/3 \div 1/4$ • İşlem modeli karşılıyor

KÇB son-testinde yedinci görevde verilen kesir çubuğu modeline karşılık gelen işlemi öğretmen adayları doğru bir şekilde $2/3 \div 1/4$ olarak ifade etmişlerdir. Öğretmen adayları verilen modelin ilk basamağında sayı doğrularını $2/3$ ve $1/4$ olarak, ikinci basamağında sayı doğrularını 8 tane $1/12$ ve 3 tane $1/12$ olarak doğru bir şekilde ifade etmişlerdir. Son-testte ilişkin yapılan görüşmede (G8) ikinci basamakta bütünlerin aynı olmasından dolayı aynı birim üzerinden konuşmak için $2/3$ kesrinin her bir biriminin 4 parçaya, $1/4$ kesrinin her bir biriminin 3 parçaya ayrıldığını açıklamışlardır. Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin bölme işleminin gruptama anlamında ortak payda almaya ilişkin anlamalarının kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. Modelin son basamağını “ $2/3$ ’ün içinde $1/4$ ’ler aranmış” olarak ifade etmişlerdir ve 2 tane $1/4$ ile $1/4$ ’ün $2/3$ ’ü olduğunu belirterek işlemin sonucunu $2\frac{2}{3}$ olarak ifade etmişlerdir. Ön-testte bu modele karşılık gelen işlemi ifade edemezlerken burada bütün basamaklarını, işlemi ve işlemin sonucunu doğru bir şekilde açıklamışlardır. Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin bölme işlemi için verilen modelin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazma bilgilerinde ön-testten son-teste gelişme olduğu söylenebilir. Bu gelişme Tablo 4.77’de verilmiştir. Bu tablo öğretmen adaylarının ön-testte, öğretim sürecinde ve son-testte iki kesrin bölme işlemine ilişkin verilen model ve problemler için yazdıkları işlemlerin birarada verilmiş hali olarak sunulmuştur.

Öğretmen adaylarının ön-testten son-teste kadar olan süreçte karşılaştıkları iki kesrin bölme işlemine ilişkin model ve problemlerin ifade ettikleri işlemleri yazarken bölmeyi çarpmanın tersi olarak ifade etmeden yararlandıkları ve bunun yazmalarını kolaylaştırdığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının iki kesrin bölme işlemine ilişkin verilen model ve problemlerin ifade ettikleri işlemleri yazarken bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine göre daha çok zorlandıkları görülmektedir. Bu durum öğretmen adaylarının öğretim sürecine iki kesrin bölme işlemine ilişkin verilen modelin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazmaları bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemine göre daha zayıf bir şekilde başlamaları ile açıklanabilir.

Öğretmen adaylarının öğretim sürecinde sadece bölmenin paylaştırma anlamına ilişkin kesir çubuğu modeli ve gösterim şekli farklı olan graplama anlamını yansıtan dikdörtgensel alan modeli verildiğinde zorluk yaşadıkları görülmüştür. Bu zorluklar verilen modellerin ifade ettikleri işlem yerine tersini yazmaları şeklindedir. Burada öğretmen adaylarının zorlanmaları bu modellerin ifade ettikleri işlemlerde bölünenin bölenden büyük veya küçük olması ile ilgili olduğu söylenebilir. Yani öğretmen adaylarının paylaştırma anlamını yansıtan modelin ifade ettiği işlemde bölünenin bölenden büyük olması ve graplama anlamını yansıtan modelin ifade ettiği işlemde bölünenin bölenden küçük olması durumlarına ilişkin anlamaları derin değildir. Bu yüzden işlemlerin terslerini yazdıkları söylenebilir. Diğer taraftan verilen dikdörtgensel alan modelinin alışık olmadıkları şekilde gösterimi de zorlanmalarına neden olmuş olabilir. Burada verilen modelin bölme işlemini ifade ettiğini belirtmişlerdir ancak işlemi ters yazmışlardır. Öğretmen adaylarından sadece ÖA4 bu modele karşılık gelen işlemi doğru bir şekilde ifade etmiştir.

Tablo 4.77.

Öğretmen Adaylarının İki Kesrin Bölme İşlemine İlişkin Verilen Model ve Problemlerin İfade Ettikleri İşlemleri Matematiksel Olarak Yazma Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo

Öğretmen Adayı	Ön-test/G1	Öğretim süreci/G6-G7						Son-test/G8
	Sayı doğrusu modeli (Gruplama anlamı)	Kesir çubuğu modeli (Gruplama anlamı)	Dikdörtgensel alan modeli (Gruplama anlamı)	Problem (Paylaştırma anlamı)	Kesir çubuğu modeli (Paylaştırma anlamı)	Dikdörtgensel alan modeli (Gruplama anlamı)	Problem (Paylaştırma anlamı)	Sayı doğrusu modeli (Gruplama anlamı)
ÖA6	$2/3 \times 4/4 = 8/12 \Rightarrow 8/12 \div 3/12 \Rightarrow 8/3 = 2 \ 2/3$, $1/4 \times 3/3 = 3/12 \Rightarrow 3/12 \div 3/12 = 1$ İşlem modeli karşılımlıyor	$4/5 \div 5/6$ - İşlem modeli karşılımlıyor - Bölme çarpmanın tersi	$3/5 \div 1/3$ - İşlem modeli karşılımlıyor - Bölme çarpmanın tersi	$2/5 \div 3/4$ - İşlem problemi karşılımlıyor	$3/5 \div 4/9$ - İşlem modeli karşılımlıyor - Bölme çarpmanın tersi	$3/4 \div 2/3$ İşlemin tersini yazma	$2/5 \div 3/4$ - İşlem problemi karşılımlıyor - Bölme çarpmanın tersi	$2/3 \div 1/4$ - İşlem modeli karşılımlıyor
ÖA2	$2/3 \div 1/4$ - İşlem modeli karşılımlıyor	$4/5 \div 5/6$ - İşlem modeli karşılımlıyor	$3/5 \div 1/3$ - İşlem modeli karşılımlıyor - Bölme çarpmanın tersi	$2/5 \div 3/4$ - İşlem problemi karşılımlıyor	$3/5 \div 4/9$ - İşlem modeli karşılımlıyor - Bölme çarpmanın tersi İşlemin tersini yazma İşlemi yazmada zorlanma	$3/4 \div 2/3$ İşlemin tersini yazma	$2/5 \div 3/4$ - İşlem problemi karşılımlıyor - Bölme çarpmanın tersi	$2/3 \div 1/4$ - İşlem modeli karşılımlıyor
ÖA4	İşlem yok Kesirleri genişletme	$4/5 \div 5/6$ - İşlem modeli karşılımlıyor	$3/5 \div 1/3$ - İşlem modeli karşılımlıyor	$2/5 \div 3/4$ - İşlem problemi karşılımlıyor	$3/5 \div X = 4/9$ İşlem modeli tam olarak karşılımlıyor	$2/3 \div 3/4$ - İşlem modeli karşılımlıyor	$2/5 \div 3/4$ - İşlem problemi karşılımlıyor - Bölme çarpmanın tersi	$2/3 \div 1/4$ - İşlem modeli karşılımlıyor
ÖA3	İşlem yok Payda eşitleme, kesirleri karşılaştırma	$4/5 \div 5/6$ - İşlem modeli karşılımlıyor	$3/5 \div 1/3$ - İşlem modeli karşılımlıyor - Bölme çarpmanın tersi	$2/5 \div 3/4$ - İşlem problemi karşılımlıyor - Bölme çarpmanın	$3/5 \div 4/9$ - İşlem modeli karşılımlıyor İşlemi yazmada zorlanma	$3/4 \div 2/3$ İşlemin tersini yazma	$2/5 \div 3/4$ - İşlem problemi karşılımlıyor - Bölme çarpmanın	$2/3 \div 1/4$ - İşlem modeli karşılımlıyor

ÖA5	• $2/3 + 1/4 \Rightarrow 8/12 + 3/12$ • İşlem modeli karşılamıyor	• $4/5 \div 5/6$ • İşlem modeli karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi	• $3/5 \div 1/3$ • İşlem modeli karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi	tersi • $2/5 \div 3/4$ • İşlem problemi karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi	• $3/5 \div 4/9$ • İşlem modeli karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi • İşlemin tersini yazma • İşlemi yazmada zorlanma	• $3/4 \div 2/3$ • İşlemin tersini yazma	tersi • $2/5 \div 3/4$ • İşlem problemi karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi	• $2/3 \div 1/4$ • İşlem modeli karşılıyor
ÖA1	• İşlem yok • Kesirleri genişletme	• $4/5 \div 5/6$ • İşlem modeli karşılıyor	• $3/5 \div 1/3$ • İşlem modeli karşılıyor	• $2/5 \div 3/4$ • İşlem problemi karşılıyor	• $3/5 \div 4/9$ • İşlem modeli karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi • İşlemi yazmada zorlanma	• $3/4 \div 2/3$ • İşlemin tersini yazma	• $2/5 \div 3/4$ • İşlem problemi karşılıyor • Bölme çarpmanın tersi	• $2/3 \div 1/4$ • İşlem modeli karşılıyor

4.4. Gerekçelendirme Bilgisi

4.4.1. Kesirlerle Çarpma İşlemine İlişkin Gerekçelendirme Bilgisi

4.4.1.1. Başlangıç Durumu

Öğretmen adaylarının öğretimden önce verilen bir modelin veya bir işlemin sonucunun neden doğru veya yanlış olduğuna ve verilen modelin veya problemin neden o işlemi ifade ettiğine ilişkin gerekçelendirme bilgilerinin zayıf ve işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir. Öğretmen adayları öğretime bu zayıf gerekçelendirme bilgisiyle başlamışlardır (Tablo 4.78). Öğretmen adaylarının öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin verilen model ve cevabın doğruluğuna ilişkin birer uygun gerekçelendirme yaptıkları ancak bu gerekçelendirmelerin eksik olduğu görülmüştür. Burada ÖA2 ve ÖA5 hariç diğer öğretmen adayları işlemin sonucu için referans alınan bütünün yanlış alındığından bahsetmemişlerdir, bunun yerine verilen işlemi kesirlerle toplama işlemi şeklinde ele alıp bu işlemde payların yanısıra paydaların da toplandığını ifade etmişlerdir. Öğretmen adayları burada verilen $5/7 \times 2$ işlemini “2’nin $5/7$ ’si” yerine “2 tane $5/7$ ” olarak ifade etmişlerdir ve bu anlam üzerinden gerekçelendirmişlerdir. Öğretmen adayları aynı testte iki kesrin çarpma işlemine ilişkin verilen model ve cevabın doğruluğuna ilişkin birer uygun gerekçelendirme yapmışlardır ve referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etmişlerdir ancak açık bir şekilde ifade edememişlerdir (Tablo 4.78). Diğer taraftan bu testte iki kesrin çarpma işlemine ilişkin verilen problemin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirmede zorlandıkları ve gerekçelendiremedikleri görülmüştür.

Tablo 4.78.

Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Kesirlerle Çarpmaya İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Gerekçelendirmelere İlişkin Açıklamalar

Öğretmen Adayı	5/7 x 2 işlemi için verilen model ve cevabın doğruluğu	1/3 x 5/6 işlemi için verilen model ve cevabın doğruluğu	Verilen problemin neden 2/3 x 3/5 işlemi ifade ettiği
ÖA6	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Çarpmanın tekrarlı toplama anlamını kullanarak gerekçelendirme • Paydaları toplama hatasının yapıldığını ifade etmiştir.	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etmiştir.	• Uygun olmayan gerekçelendirme
ÖA2	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etmiştir.	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etmiştir.	• Uygun olmayan gerekçelendirme
ÖA4	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme • İşlemin sonucunun verilen modeldeki taralı parçaların sayısının pay ve bütün parçaların sayısının payda şeklinde alarak yanlış yazıldığını ifade etmiştir.	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etmiştir. • Ortak kesişim yapıldığını ifade etmiştir.	• Uygun olmayan gerekçelendirme
ÖA3	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Çarpmanın tekrarlı toplama anlamını kullanarak gerekçelendirme • Paydaları toplama hatasının yapıldığını ifade etmiştir.	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Kendi açıklaması şeklinde gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etmiştir.	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Kendi açıklaması şeklinde gerekçelendirme
ÖA5	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Çarpmanın tekrarlı toplama anlamını kullanarak gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etmiştir.	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etmiştir.	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Kesrin tanımı yoluyla gerekçelendirme • Kesir sayısına doğal sayı anlamı yükleme
ÖA1	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Çarpmanın tekrarlı toplama anlamını kullanarak gerekçelendirme • Paydaları toplama hatasının yapıldığını ifade etmiştir.	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etmiştir.	• Uygun olmayan gerekçelendirme

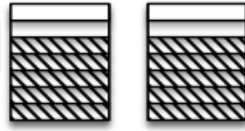
Öğretmen adayları öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde 9. görevde verilen “Metin

$\frac{5}{7} \times 2$ işleminin sonucunu bulmak için “dikdörtgensel alan modeli” (Şekil 4.83) çizmiş ve

cevabın $\frac{10}{14}$ olduğunu ifade etmiştir. Metin’in modeli ve cevabı hakkında ne

düşünüyorsunuz? Neden?” sorusunu eksik bir şekilde gerekçelendirmişlerdir. ÖA6, ÖA3 ve ÖA1 verilen işlemi $5/7 + 5/7$ şeklinde çarpmanın tekrarlı toplama anlamı ile ele almışlardır ve burada cevabın neden yanlış olduğunu kesirlerle toplama işleminde paydaların toplanması hatasının yapıldığını ifade etmişlerdir. ÖA2 ve ÖA5 burada işlemin sonucu için referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etmişlerdir. ÖA4 ise parça-bütün ilişkisi kurarak burada işlemin sonucu ifade edilirken modelde taralı parçaların pay, bütün parçaların payda olarak alındığını belirtmiştir.

ÖA6’nın gerekçelendirmesi şu şekildedir: “ $5/7 \times 2$ işlemini $5/7 + 5/7$ şeklinde düşünmüştür. Fakat paydaları da toplamıştır. Burada hatası olmuştur. Metin $\frac{5+5}{7+7}$ olarak düşünüp $10/14$ cevabını vermiştir.”



Şekil 4.83. KÇB testinde 9. görevde verilen dikdörtgensel alan modeli

Burada ÖA6’nın verilen işlemin cevabının yanlış olduğunu çarpmanın tekrarlı toplama anlamını kullanarak gerekçelendirdiği görülmektedir. Buna göre verilen işlemi çarpmanın tekrarlı toplama anlamı ile iki kesrin toplamı şeklinde ifade etmiştir ve bu iki kesrin toplamında paydaların da toplandığı için cevabın yanlış olduğunu öne sürmüştür. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) modeline ilişkin fikri sorulduğunda şöyle açıklamıştır: “Modeli dediğim gibi farklı, bu işleme göre şunun modeli gibi duruyor ($2 \times 5/7$ işlemini gösteriyor) ama bu şekilde yapması daha doğru olurdu (modelde taralı kısımları biraraya getirmeyi kastediyor). Hani burada her birinde 7 parça var ya tüm olarak düşündüğünde 14 parçadan 10’unu almış hani bunun ikisini de ayrı ayrı düşünmüş.” Burada verilen modelin tam olarak işlemi yansıtmadığını hatta $2 \times 5/7$ işlemini gösterdiğini, taralı kısımlar biraraya getirilirse $5/7 \times 2$ işlemini daha çok yansıtacağını ifade etmiştir. Burada işlemin sonucu için referans alınan bütünden bahsetmesi beklenmiştir ancak ÖA6 bunun yerine verilen işlemi kesirlerle toplama işlemi şeklinde ele almıştır. ÖA3, ÖA5 ve ÖA1 de benzer şekilde verilen işlemi kesirlerle toplama işlemi şeklinde ele alıp paydaların toplanması ile işlemin sonucunun yanlış olduğunu gerekçelendirmişlerdir. ÖA5 diğerlerinden farklı olarak kesirlerle toplama işleminde paydaları toplama hatasının yapıldığını ifade etmenin yanı sıra referans alınan bütüne işaret etmiştir. ÖA5’in verilen işlemin cevabının yanlış olduğuna ilişkin gerekçelendirmesi şu şekildedir: “ $10/14$ olsaydı bu bütün olarak 14’e bölünmüş onun 10 tanesi alınmış olurdu. $5/7$ ’den iki tane var, toplayınca $10/7$ olur,

çarpınca 10/7 olur. İşlemi kullandım.” Burada ÖA5 işlemin sonucu 10/14 olduğunda bir bütünün 14 parçaya bölünüp 10 parçasının alınacağını bunun yerine bir bütünün 5/7’sinden 2 tane olduğunu ifade etmiştir.

ÖA2 diğerlerinden farklı olarak kesirlerle toplama işlemi şeklinde ele alıp paydaların toplanmasından bahsetmemiştir, bunun yerine işlemin sonucu için referans alınan bütüne vurgu yapmıştır. Buna göre ÖA2’nin öğretimden önce bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin verilen model ve cevabın doğru olup olmadığını gerekçelendirme bilgisinin diğer öğretmen adaylarına göre daha güçlü ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. ÖA2 işlemin sonucunun neden yanlış olduğunu *“Bir bütünü 14’e bölüp 10 parçasını almış ve yanlış yapmıştır. Burada bir bütünü yediye bölmüş, bu doğru ama sonucu eğer 10/14 bulduysa bunu 14 parçaya bölüp bunun yine on parçasını almış. Yani ikinci parçaya geçmemiş. Eğer bunu toplarsak ikisini (verilen modelde taralı kısımları biraraya getirmeye işaret ediyor) bir bütünden fazla edecektir. Bir bütünden fazla etmek zorunda olduğu için de 10/7 gibi bir değer çıkacaktır.”* şeklinde gerekçelendirmiştir. ÖA2’nin burada taralı parçaları biraraya getirerek modelde verilen bir dikdörtgenin bir bütün olduğuna ve işlemin sonucunun bir bütünden fazla olduğuna işaret ettiği söylenebilir ancak bunu açık bir şekilde ifade etmemiştir.

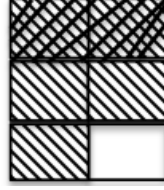
ÖA4 ne işlemin sonucu için referans alınan bütünden ne de kesirlerle toplama işleminde paydaların toplanmasından bahsetmemiştir, bunun yerine işlemin sonucunu ele almıştır ve bu sonucun yanlış ifade edildiğini kesrin parça-bütün anlamını kullanarak belirtmiştir. ÖA4 verilen modelin ve işlemin sonucunun yanlış olduğunu şöyle gerekçelendirmiştir: *“Metin modellemeyi de sonucu da yanlış bulmuştur. 5/7’yi iki defa modellemiş ve taralıları toplayıp pay yerine yazmış, bütün böldüklerini paydaya yazarak yanlış yapmıştır.”* Burada ÖA4 işlemin sonucunun nasıl yazıldığını ifade etmiştir ancak neden yanlış olduğunu tam olarak açıklayamamıştır. Buna göre ÖA4’ün öğretimden önce bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin verilen modelin ve cevabın doğru olup olmadığını gerekçelendirme bilgisinin diğer öğretmen adaylarına göre daha zayıf olduğu söylenebilir.

KÇB ön-testinde 12. görevde verilen “Cihan $\frac{5}{6}$ ’nın $\frac{1}{3}$ ’ünü “dikdörtgensel alan modeli”

(Şekil 4.84) çizerek göstermiş ve bu modele bakarak işlemin sonucunun $\frac{2}{6}$ olduğunu ifade

etmiştir. Cihan’ın modeli ve cevabı hakkında ne düşünüyorsunuz? Neden?” sorusuna

ilişkin yaptıkları gerekçelendirmelerde öğretmen adaylarının hepsi işlemdeki $1/3$ için referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etmişlerdir.



Şekil 4.84. KÇB testinde 12. görevde verilen dikdörtgensel alan modeli

ÖA6 bunu şu şekilde gerekçelendirmiştir: “Cihan $5/6$ kesrini doğru modellemiştir. Devamında $5/6$ ’nın $1/3$ ’ünü modellerken yanlış modellemiştir. Çünkü Cihan $5/6$ ’nın $2/5$ ’ini göstermiştir.” Burada ÖA6, Cihan’ın modelinin yanlış olduğunu çünkü $5/6$ ’nın $1/3$ ’ü yerine $5/6$ ’nın $2/5$ ’ini gösterdiğini ifade etmiştir. Bunu Cihan’ın işlemin sonucu olan $2/6$ ’ya göre ifade ettiğini ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) şöyle açıklamıştır: “Açıkcası burada sonuç altıda ikisini göstermiş olacak ya hani oraya ulaşmak için $5/6$ ’nın $2/5$ ’ini göstermiş olmalı ki $2/6$ etsin. Burada bütün, aldığımız şeye göre değişiyor. Normalde hepsini, tamamını bir bütün alıp tek taralı kısma $1/6$ diyoruz ama bu $5/6$ ’yı bütün alıp o çift taralı kısmı düşündüğümüz zaman iş değişiyor. $5/6$ ’nın beşte biri oluyor o zaman.” Burada ÖA6’nın işlemdeki $1/3$ için referans alınan bütünün yanlış alındığından bahsetmesi beklenmiştir ancak ÖA6 bunun yerine modelde bir küçük parçanın hem $1/6$ hem de $1/5$ ’i nasıl ifade ettiğini açıklamıştır ve $5/6$ ’nın $1/3$ ’ü yerine 1 bütünün $1/3$ ’ünün alındığından bahsetmemiştir. ÖA2 ise “Cihan direkt olarak bütünün $1/3$ ’ünü almış ve yanlış yapmıştır.” şeklinde ifade ederek referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etmiştir. Bu da ÖA2’nin öğretimden önce kesirlerle çarpma işlemine ilişkin verilen modelin ve cevabın doğruluğunu gerekçelendirme bilgisinin kavramsal düzeyde olduğunu desteklemektedir. ÖA3 de ÖA2 gibi referans alınan bütüne işaret etmiştir ancak uygun olmayan bir matematiksel dil kullanmıştır. ÖA3’ün gerekçelendirmesi şu şekildedir: “Cihan, 6’ya bölünen kutunun $1/3$ ’ünü almış, bu yüzden cevabı $2/6$ bulmuş. $5/6$ ’yı dikkate almamış.” Burada ÖA3 işlemdeki $1/3$ için referans alınan bütünün $5/6$ yerine 1 bütün alındığına işaret etmiştir ancak “bütün” yerine “kutu” ifadesini kullanmıştır. ÖA5, ÖA4 ve ÖA1 gerekçelendirmelerinde ÖA2 ve ÖA3’e göre biraz daha açık bir şekilde referans alınan bütüne işaret etmişlerdir. ÖA5’in gerekçelendirmesi şu şekildedir: “Cihan’ın $5/6$ ’yı taraması doğrudur. $5/6$ ’nın $1/3$ ’ünü taraması gerekirken bütünün $1/3$ ’ünü taramıştır. Burada $5/6$ ’yı taramasının bir anlamı kalmamıştır. Yani Cihan cevabı $2/6 = 1/3$ bulmuştur. Yanlıştır.” ÖA4 gerekçelendirmesinde diğer öğretmen adaylarından farklı olarak ortak kesişim alındığını ifade etmiştir. Burada önce $5/6$ ’lık kısmın tarandığını, sonra yine aynı

bütünün $\frac{1}{3}$ 'ünün alınarak tarandığını ve bu iki taralı kısmın ortak kısmının işlemin sonucu olarak ifade edildiğini belirtmiştir.

KÇB ön-testinde 14. görevde verilen “Bir sınıf geziye gidecektir. Öğrencilerin $\frac{3}{5}$ 'i İzmir’e gitmek istiyor. İzmir’e gitmek isteyen öğrencilerin $\frac{2}{3}$ ’ü Çeşme’ye gitmek istiyor.

Çeşme’ye gitmek isteyen öğrenciler sınıftaki öğrencilerin kaçta kaçıdır?” probleminin ifade ettiği işlemi bütün öğretmen adayları $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$ yerine $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$ olarak ifade etmişlerdir. Bu problemin neden $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$ işlemi ifade ettiğini ÖA5 ve ÖA3 hariç diğer öğretmen adayları gerekçelendirememişlerdir. ÖA6 bunu “ $\frac{3}{5}$ kesrinin $\frac{2}{3}$ ’ünü sorduğunu algıladım ve bu işlemle açıkladım.” şeklinde ifade etmiştir. Burada ÖA6 verilen problemin neden $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$ işlemi ifade ettiğinden bahsetmemiştir. ÖA3 bunu şu şekilde gerekçelendirmiştir: “Sınıfı 5’e böldüğümüzü düşünürsek bu 5 gruptan 3’ü İzmir’e gitmek istiyormuş. İzmir’e gitmek isteyenlerden de $\frac{2}{3}$ ’ü Çeşme’ye gitmek istediğine göre bu grubu da 3’e bölüp 2’sini alırız. Bu iki grubun da Çeşme’ye gitmek istediği söylenmiş.” Burada ÖA3’ün kesrin operatör anlamını kullanarak yani önce $\frac{3}{5}$ kesrini bütünü 5’e bölme ve 3 ile çarpma sonra $\frac{2}{3}$ kesrini 3 grubu 3’e bölme ve 2 ile çarpma şeklinde ele alarak ifade ettiği söylenebilir ancak neden çarpma işlemi olduğunu tam olarak ifade etmemiştir. ÖA5 ise kesrin tanımını kullanarak şöyle gerekçelendirmiştir: “Çünkü Çeşme’ye gitmek isteyenler tüm sınıfın $\frac{2}{3}$ ’ü olsaydı $1 \times \frac{2}{3}$ olurdu. Bu sebeple $\frac{3}{5}$ kişinin $\frac{2}{3}$ ’ü olacağı için $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$ olarak yazılır.” Burada ÖA5, $\frac{2}{3} \times 1$ yerine $1 \times \frac{2}{3}$ yazmıştır ve “ $\frac{3}{5}$ kişinin” ifadesiyle kesir sayısına doğal sayı anlamı yüklemiştir. Diğer taraftan $\frac{3}{5}$ ’in yeni bütün olduğuna işaret ettiği söylenebilir. Çünkü önce “tüm sınıfın” diyerek bir bütünün $\frac{2}{3}$ ’ünü $1 \times \frac{2}{3}$ olarak ifade ederken, sonra “ $\frac{3}{5}$ kişinin” diyerek bir bütünün $\frac{3}{5}$ ’inin $\frac{2}{3}$ ’ünü $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$ olarak ifade etmiştir.

4.4.1.2. Öğretim Süreci

Öğretmen adayları öğretim sürecine kesirlerle çarpma işlemine ilişkin verilen problemin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgileri kesirlerle çarpma işlemine ilişkin verilen modelin ve cevabın doğruluğunu gerekçelendirme bilgilerine göre daha zayıf bir şekilde başlamışlardır. Öğretim sürecinde kesirlerle çarpmaya ilişkin verilen problemlerin ve modellerin neden o işlemleri ifade ettiklerini gerekçelendirmeleri istenmiştir ve ÖA6 hariç diğer öğretmen adaylarının çoğunlukla gerekçelendirme yapamadıkları görülmektedir (Tablo 4.79). Bununla beraber ÖA5 hariç diğer öğretmen adaylarının öğretim sürecinde

kesirlerle çarpma işlemine ilişkin verilen model veya problemin neden o işlemi ifade ettiğine ilişkin gerekçelendirme bilgilerinin geliştiği görülmektedir.

Tablo 4.79.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Kesirlerle Çarpmaya İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Gerekçelendirmelere İlişkin Açıklamalar

Öğretmen Adayı	D1/A2 Verilen problemin neden 3 x 2/7 işlemi ifade ettiği	D1/G2 Verilen problemin neden 3/7 x 4 işlemi ifade ettiği	D2/A4 Verilen modelin neden 2/3 x 2 işlemi ifade ettiği	D2/A3 Verilen modelin neden 2/5 x 5/7 işlemi ifade ettiği	D2/A4 Verilen modelin neden 3/5 x 3/8 işlemi ifade ettiği	D2/G3 Verilen problemin neden 2/5 x 3/4 işlemi ifade ettiği
ÖA6	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın tanımı yoluyla gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme • Yeni bütün kavramını kullanma	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Resim çizerek gerekçelendirme
ÖA2	• Yok	• Yok	• Yok	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Resim çizerek gerekçelendirme
ÖA4	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın tanımı yoluyla gerekçelendirme	• Yok	• Yok	• Yok	• Yok	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme • Yeni bütün kavramını kullanma
ÖA3	• Yok	• Uygun gerekçelendirme • Problem yoluyla gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Yok	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme
ÖA5	• Yok	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Çarpmanın tanımı yoluyla gerekçelendirme • “-in” ifadesinin kullanılması	• Yok	• Yok	• Yok	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Çarpmanın tanımı yoluyla gerekçelendirme • “-ün” ifadesinin kullanılması
ÖA1	• Yok	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme • Yeni bütün kavramını kullanma	• Yok	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme • Resim çizerek gerekçelendirme

Öğretmen adayları öğretim sürecinin başında verilen modellerin ve problemlerin neden o işlemi ifade ettiğini çarpmanın tanımı yoluyla veya çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirirlerken veya gerekçelendiremiyorlarken öğretimin sonuna doğru bunların yanısıra yeni bütün kavramını kullanarak ve resim çizerek gerekçelendirmişlerdir (Tablo 4.79). Öğretmen adaylarından ÖA6 öğretim sürecinde karşılaştığı her durumu gerekçelendirirken diğer öğretmen adayları verilen her problemin veya modelin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirememişlerdir. Diğer taraftan öğretmen adaylarından ÖA5'in öğretim sürecinde verilen problemlerin neden o işlemleri ifade ettiklerini “-ın, -ün” ifadesinin kullanılması ile gerekçelendirdiği görülmektedir (Tablo 4.79). Buna göre ÖA5'in bir kesir ile bir doğal sayının ve iki kesrin bölme işlemine ilişkin verilen problemlerin neden o işlemleri ifade ettiklerini gerekçelendirme bilgisinin işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir.

İlk derse paralel yapılan görüşmede (G2) verilen “Bir terzi müşterilerinden birisi için bir pantolon dikecektir ve elinde 4 metre kumaş vardır. Terzi bu pantolon için bu kumaşın $3/7$ 'sini kullanacaktır o halde bu pantolon kaç metre kumaştan dikilecektir?” probleminin ifade ettiği işlemi öğretmen adayları doğru bir şekilde $3/7 \times 4$ olarak ifade etmişlerdir ve neden bu işlem olduğunu ÖA2 ve ÖA4 hariç diğer öğretmen adayları gerekçelendirmişlerdir. ÖA6 ve ÖA1 çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirirken, ÖA3 problem yoluyla ve ÖA5 de çarpmanın tanımı yoluyla gerekçelendirmiştir. ÖA6'nın gerekçelendirmesi şu şekildedir: “Çünkü burada hani bütünümüz 4, 4 metre kumaş. $4 \times 3/7$ desek $3/7$ 'miz bütününün $3/7$ 'sinden 4 taneyi ifade eder ama burada bütünümüz 4 metre kumaş ve hani bu pantolon için bu kumaşın, 4 metrelik kumaşın $3/7$ 'sini kullanacağını söylediği için.” ÖA6 burada çarpmanın anlamını kullanarak yani “4'ün $3/7$ 'si” anlamını kullanarak gerekçelendirme yapmıştır. ÖA1 de benzer şekilde gerekçelendirmiştir. Burada ÖA6 işlemlerin yazılışına göre anlamlarının değişeceğine işaret etmiştir. Buna göre ÖA6 ve ÖA1'in bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemi için verilen problemin neden o işlemi ifade ettiğine ilişkin gerekçelendirme bilgilerinde ön-testten ikinci görüşmeye ilerleme olduğu söylenebilir. Çünkü her iki öğretmen adayı da öğretimden önce verilen problemin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendiremiyorlarken burada uygun bir şekilde gerekçelendirmişlerdir.

ÖA3 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak problem kurmuştur ve verilen problemin neden o işlemi ifade ettiğini problem yoluyla gerekçelendirmiştir. ÖA3 önce verilen problemin neden $3/7 \times 4$ işlemini ifade ettiğini “4'ün $3/7$ 'sini alıyorum.” şeklinde

gerekçelendirmiştir. Sonra verilen problemin ifade ettiği işlemin $4 \times \frac{3}{7}$ işlemi olması durumunda problemin farklı olacağını belirtmiştir ve şöyle bir problem kurmuştur: “4 farklı kumaşım var, bir pantolon dikmek için bu kumaşlardan kullanacağım ve her biri $\frac{3}{7}$ metre kumaş.” Burada ÖA3 bu problemi kurduktan sonra bir pantolon dikmek için $4 \times \frac{3}{7}$ metre kumaş kullanılacağını belirtmiştir. ÖA4 öğretimden önce verilen problemin ifade ettiği işlemi gerekçelendiremezken burada uygun bir şekilde gerekçelendirmiştir. Buna göre ÖA4’ün gerekçelendirme bilgisinin ön-testten ikinci görüşmeye (G2) geliştiği söylenebilir.

ÖA5 verilen problemin neden $\frac{3}{7} \times 4$ işlemini ifade ettiğini “Çünkü bu kumaşın, -ın, -in eki. 4’ün $\frac{3}{7}$ ’si.” şeklinde gerekçelendirmiştir. Buna göre problemde kullanılan “4 metre kumaşın $\frac{3}{7}$ ’si” ifadesindeki “-ın” ekinin çarpma işlemi olduğunu belirlemeye ilişkin kolaylık sağladığı söylenebilir. Bunda $\frac{3}{7} \times 4$ işlemini “4’ün $\frac{3}{7}$ ’si” şeklinde sözel olarak ifade ederken problemde de benzer şekilde kullanılmasının etkisi olabilir. ÖA5’in gerekçelendirmesi de bunu desteklemektedir. ÖA5 öğretimden önce verilen problemin ifade ettiği işlemi de benzer şekilde gerekçelendirmiştir ancak işlemi ters yazmıştır, burada ise doğru bir şekilde yazmıştır. Buna göre ÖA5’in gerekçelendirme bilgisinin çok fazla geliştiği söylenemez. Bununla beraber bu bilginin işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir. Çünkü çarpmanın anlamından bahsetmemiştir, bunun yerine sözel ifadelerin benzerliğinden hareket ederek ifade etmiştir.

İkinci derste (D2) verilen alıştırmalarda (A3) yer alan dikdörtgensel alan modelinin (Şekil 4.69) ifade ettiği işlemi öğretmen adayları doğru bir şekilde $\frac{2}{5} \times \frac{5}{7}$ olarak ifade etmişlerdir ve ÖA4, ÖA3 ve ÖA5 hariç diğer öğretmen adayları bu modelin neden bu işlemi ifade ettiğini açıklamışlardır. ÖA6 ve ÖA1 çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirirken ÖA2 işlemsel tanım şeklinde gerekçelendirmiştir. ÖA6 bu modelin neden bu işlemi ifade ettiğini şöyle gerekçelendirmiştir: “Bir bütünün $\frac{5}{7}$ ’sini almışız. Daha sonra oluşan yeni bütünümüzün $\frac{2}{5}$ ’sini aldık. Baştaki bütünümüzü düşündüğümüzde $\frac{2}{7}$ ’sini almış olduk.” Burada ÖA6 yeni bütün kavramını kullanmıştır. Bununla beraber işlemin sonucu için referans alınan bütünün başlangıçtaki bütün olduğuna işaret etmiştir. Buna göre ÖA6 burada “ $\frac{5}{7}$ ’nin $\frac{2}{5}$ ’i” anlamını yani çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme yapmıştır. ÖA1 de benzer şekilde gerekçelendirmiştir ve yeni bütün kavramını kullanmıştır. Buna göre ÖA6 ve ÖA1’in gerekçelendirme bilgilerinin kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

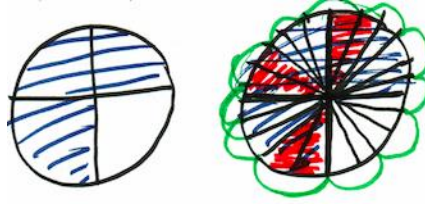
ÖA2 ön-testten sonra ilk defa burada verilen modelin ifade ettiği işlemin neden $2/5 \times 5/7$ işlemi olduğunu eksik de olsa gerekçelendirmiştir (Tablo 4.79). ÖA2'nin gerekçelendirmesi şöyledir: *“Bir bütünün 7 parçaya bölünüp 5 parçasını almışız ve aldığımız kısmın da $2/5$ 'ini alırken zaten 5 parça olduğu için 2 parçasını alırsak direk sonuca ulaşırız. Bir de $2/5 \times 5/7 = \frac{2 \times 5}{5 \times 7}$ olduğunu göstererek daha iyi açıklarız.”* Burada

ÖA2 modelin neden bu işlemi ifade ettiğini tam olarak açıklayamamıştır. Diğer taraftan ÖA2 öğretimden önce verilen problemin ifade ettiği işlemin neden o işlem olduğunu gerekçelendiremiyorken burada eksik de olsa gerekçelendirmiştir. Buna göre ÖA2'nin kesirlerle çarpma işlemine ilişkin verilen modelin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgisinin ön-testten ikinci derse geliştiği söylenebilir.

İkinci derse (D2) paralel yapılan görüşmede (G3) verilen “Mira'nın doğumgünü partisi vardı ve parti bittikten sonra doğumgünü pastasının $\frac{3}{4}$ 'ü kalmıştır. Bu pastanın kalanının

$\frac{2}{5}$ 'i partiye gelemeyen kardeşine götürmesi için Suzan'a verilmiştir. Suzan'ın aldığı pasta

bütün pastanın ne kadarıdır?” probleminin ifade ettiği işlemi öğretmen adayları doğru bir şekilde $2/5 \times 3/4$ olarak ifade etmişlerdir. Bu problemin neden bu işlemi ifade ettiğini ÖA6, ÖA2 ve ÖA1 resim çizerek gerekçelendirirken, ÖA3 ve ÖA4 çarpmanın anlamını kullanarak ve ÖA5 de ikinci görüşmede (G2) olduğu gibi problemde geçen “-nın” ifadesiyle gerekçelendirmiştir. ÖA6 verilen problemin neden bu işlemi ifade ettiğini şöyle gerekçelendirmiştir: *“Bir pastanın $3/4$ 'ü kalmış, daha sonra bunun $2/5$ 'ini kardeşine götürmüş. (İlk basamakta bir daire çiziyor, 4 eş parçaya bölüyor ve üç parçasını tarıyor. İkinci basamakta yine aynı daireyi çiziyor.) Şu şekildeydi kalan pastamız, daha sonra bu her bir dilimin $2/5$ 'ini alsak şu şekilde (ikinci basamakta her bir parçayı beş eş parçaya bölüyor, taralı olan kısımların ikişer parçasını yine tarıyor). Mesela toplamda bir pastadaki dilim sayımız 20 oldu, biz bunun altısını aldık ($6/20$ yazıyor). Bu şekilde ifade edebiliriz.”* Burada ÖA6'nın resim çizerek gerekçelendirme yaptığı görülmektedir. ÖA6 çarpmanın operatör anlamını kullanarak “ $3/4$ 'ün $2/5$ 'i” anlamını yansıtan bir dairesel alan modeli çizmiştir (Şekil 4.85).



Şekil 4.85. Görüşme-3'te verilen problemin neden $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ işlemini ifade ettiğini gerekçelendirirken ÖA6'nın çizdiği dairesel alan modeli

ÖA2 ve ÖA1 de dikdörtgensel alan modeli çizerek benzer şekilde gerekçelendirmişlerdir. Buna göre ÖA6, ÖA2 ve ÖA1'in iki kesrin çarpma işlemi için verilen problemin neden o işlemi ifade ettiğine ilişkin gerekçelendirme bilgilerinin ilk derse (D1) göre daha ilerlediği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. ÖA4 verilen problemin neden $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ işlemi olduğunu şöyle gerekçelendirmiştir: *"Bütünün 3/4'ü, bu kalanın da, 3/4'ü kalmış ya. Bunu yeni bütün olarak düşünürsek 2/5'ini de Suzan'a verdi."* Burada ÖA4 yeni bütün kavramını kullanmıştır ve *"3/4'ün 2/5'i"* anlamını yani çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirmiştir. ÖA3 de benzer şekilde çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirmiştir. Buna göre ÖA4 ve ÖA3'ün iki kesrin çarpma işlemine ilişkin verilen problemin neden bu işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgilerinin ilk dersten (D1) üçüncü görüşmeye çok fazla geliştiği söylenemez.

ÖA5 ikinci görüşmede (G2) olduğu gibi burada da verilen problemin neden bu işlemi ifade ettiğini problemde geçen *"kalanının 2/5'i"* ifadesindeki *"-nın"* eki üzerinden hareket ederek gerekçelendirmiştir. ÖA5'in gerekçelendirmesi şu şekildedir: *"Ben bunu işte ezbere biliyorum şu anda da. Hani bir türlü, başka bir şey söyleyemem hani. "-ünün", dördünün, ikinin ya da 3/4'ün dediği zaman o ilk sayıyı sağda yazacak hani. Başka bir şey gelmiyor aklıma hani."* Buna göre ÖA5'in gerekçelendirme bilgisinin ikinci görüşmeden üçüncü görüşmeye çok fazla geliştiği söylenemez. Bununla beraber bu bilginin halen işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir.

4.4.1.3. Son Durum

Öğretmen adayları öğretim sürecine kesirlerle çarpmaya ilişkin verilen modelin ve cevabın doğruluğunu ve verilen problemin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgileri zayıf bir şekilde başlamışlardır. Öğretim sürecinde bu bilgilerinin geliştiği görülmüştür ve ön-test ile son-testte yaptıkları gerekçelendirmeler karşılaştırıldığında da bu gelişme görülmektedir (Tablo 4.81). Öğretimin sonunda öğretmen adaylarının verilen modelin ve cevabın doğruluğunu gerekçelendirme bilgilerinin verilen problem veya modelin neden o

işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgilerine göre daha güçlü olduğu görülmüştür. Öğretmen adaylarından sadece ÖA5'in verilen problem veya modelin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgisinin ön-testten son-teste çok fazla gelişmediği ve işlemsel düzeyde kaldığı söylenebilir. Çünkü öğretimin başından sonuna karşılaştığı görevlerde verilen problemin neden o işlemi ifade ettiğini çarpmanın anlamından veya tanımından ziyade problemde geçen “-nın/-in” gibi ekler üzerinden hareket ederek gerekçelendirmiştir ve verilen modellerin neden o işlemleri ifade ettiklerini gerekçelendirememiştir (Tablo 4.81).

Öğretmen adayları öğretim sonra uygulanan KÇB son-testinde 9. görevde verilen modelin (Şekil 4.83) ve cevabın doğruluğunu verilen modelde yapılanları tanımlayarak ve referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade ederek gerekçelendirmişlerdir (Tablo 4.80). Öğretimden önce ÖA2 ve ÖA5 hariç diğer öğretmen adayları verilen işlemi kesirlerle toplama işlemi şeklinde ele almışlardır ve paydaların toplanması hatası yapılması ile gerekçelendirmişlerdir, ÖA2 ve ÖA5 eksik de olsa referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret ederek gerekçelendirmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma işlemine ilişkin verilen modelin ve cevabın doğruluğunu gerekçelendirme bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir. Öğretmen adaylarının gerekçelendirmeleri incelendiğinde benzer şekilde referans alınan bütünü vurguladıkları görülmektedir.

Tablo 4.80.

Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Kesirlerle Çarpmaya İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Gerekçelendirmelere İlişkin Açıklamalar

Öğretmen Adayı	5/7 x 2 işlemi için verilen model ve cevabın doğruluğu	1/3 x 5/6 işlemi için verilen model ve cevabın doğruluğu	Verilen problemin neden 2/3 x 3/5 işlemini ifade ettiği
ÖA6	• Uygun gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir.	• Uygun gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir. • Ortak kesişim yapıldığını ifade etmiştir.	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme
ÖA2	• Uygun gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir.	• Uygun gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir.	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme
ÖA4	• Uygun gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir.	• Uygun gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir. • Yeni bütün kavramını kullanma	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme
ÖA3	• Uygun gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir.	• Uygun gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir.	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme
ÖA5	• Uygun gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir.	• Uygun gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir.	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme
ÖA1	• Uygun gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir.	• Uygun gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir.	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme

ÖA1'in son-testte yaptığı gerekçelendirmesi şu şekildedir: “Çocuk modele bakarak 14 parçadan 10 tanesi taranmış bu yüzden genellemiş ve 10/14 olarak cevap vermiştir.” ÖA1 verilen işlemin sonucunun neden yanlış olduğunu model üzerinden taralı parçalar ve bütün parçalar olarak aldığı şeklinde açıklamıştır. Bunu son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) biraz daha açması istenmiştir ve işlemin sonucu için referans alınan bütünün bir dikdörtgen

yerine iki dikdörtgen alındığını ifade etmiştir. Buna ilişkin geçen diyalog şöyledir (G8, ÖA1, 20/05/2015, 150-160):

G: Modeli için ne düşünüyorsun?

ÖA1: Modeli 5/7'yi vermiş, şurası 5/7, 2 tane 5/7 almış. Bu sanki 2 çarpı 5/7 gibi düşünmüş yani modellemesini öyle yapmış.

G: Peki 5/7 çarpı 2 işlemi için uygun mu bu model?

ÖA1: İkisini bir bütün olarak düşündüğümüzde taranacak olan yerler yine buralar ama şey yanlış, paydaları da toplamış, yani şunların hepsini bir bütün üzerinden ifade etmemiş.

G: Bir bütün dediğin yer neresi?

ÖA1: Şurası (bir dikdörtgenin tamamını gösteriyor). Diğeri de şurası, yeni bütünüme 2 olmuş oluyor. Ondan sonra bunun 5/7'si burası, 5/7 de burası, yeni bütünüme 10 tane var (taralı parçaları kastediyor), ama sonucu ilk bütünüme göre söyleyeceğim, 10/7 olmuş oluyor. O yüzden sonucu yanlış bulmuş, şu ikisini bir bütün gibi düşünmüş.

Burada ÖA1 bir bütünün verilen modeldeki bir dikdörtgen olduğunu, işlemin sonucunu ifade ederken iki dikdörtgeni bir bütün alarak bunun üzerinden hareket edildiğini ama bu iki dikdörtgenin yeni bütün olduğunu ve işlemin sonucunun başlangıçtaki bütün yani bir dikdörtgene göre ifade edilmesi gerektiğini ifade etmiştir. Diğer öğretmen adayları da benzer şekilde gerekçelendirmişlerdir.

KÇB son-testinde 12. görevde verilen modelin (Şekil 4.84) ve cevabın doğruluğunu bütün öğretmen adayları dokuzuncu görevde olduğu gibi verilen modelde yapılanları tanımlayarak ve referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade ederek gerekçelendirmişlerdir. Ön-testte referans alınan bütüne işaret etmişlerdir ama açık bir şekilde ifade etmemişlerdir, burada ise açık bir şekilde ifade etmişlerdir. Bu da kesirlerle çarpma işlemine ilişkin verilen modelin ve cevabın doğruluğunu gerekçelendirme bilgilerinde gelişim olduğunu desteklemektedir. Öğretmen adaylarından ÖA4'ün son-testte yaptığı gerekçelendirme şu şekildedir: “Cihan yanlış yapmış çünkü yeni bütünüme 5/6'dır. Cihan yeni bütün kavramını anlamamış, varolan bütün üzerinden düşünmüş. Şimdi demiş ki 5/6'lık kısım bu, tamam doğru. Sonra demiş ki 5/6'nın 1/3'ü değil de, varolan baştaki 1'in 1/3'ünü almış. Bu yüzden yanlış yapmıştır.” ÖA4 burada işlemdeki 1/3 için referans alınan bütünün yeni bütün olan 5/6 yerine başlangıçtaki bütün olan 1 bütün alındığını ve yeni bütün kavramının anlaşılmadığını ifade etmiştir. Benzer şekilde diğer öğretmen adayları da işlemdeki 1/3 için referans alınan bütünün 1 bütünün 5/6'sı yerine 1 bütün alındığını ifade ederek gerekçelendirmişlerdir.

KÇB son-testinde 14. görevde verilen problemin neden $2/3 \times 3/5$ işlemini ifade ettiğini öğretmen adayları çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirmişlerdir. Ön-testte uygun bir gerekçelendirme yapamıyorken burada uygun bir şekilde gerekçelendirmişlerdir. Buna göre kesirlerle çarpma işlemine ilişkin verilen problemin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği ancak bu bilgilerinin verilen

model ve cevabın doğruluğunu gerekçelendirme bilgileri kadar güçlü olmadığı söylenebilir. ÖA3'ün son-testte yaptığı gerekçelendirme şöyledir: *“Sınıfın 3/5’i İzmir’e gitmek istiyormuş. 1’in 3/5’ini ifade eder ($3/5 \times 1$). Bu 3/5’lik kısmın ise 2/3’ü Çeşme’ye gitmek istiyormuş ($2/3 \times 3/5$). 3/5’in 2/3’üdür.”* ÖA3 burada “3/5’in 2/3’ü” anlamı yani çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme yapmıştır. Diğer öğretmen adayları da benzer şekilde gerekçelendirmişlerdir.

Sonuç olarak öğretmen adaylarının bir doğal sayı ile bir kesrin, bir kesir ile bir doğal sayının ve iki kesrin çarpma işlemine ilişkin verilen modelin ve cevabın doğru olup olmadığını ve verilen problemin veya modelin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgilerinin ön-testten son-teste öğretim süresince geliştiği söylenebilir. Bu gelişim Tablo 4.81’de verilmiştir. Bu tablo öğretmen adaylarının ön-testte, öğretim sürecinde ve son-testte bir doğal sayı ile bir kesrin, bir kesir ile bir doğal sayının ve iki kesrin çarpma işlemine ilişkin verilen durumlar için yaptıkları gerekçelendirmelerin birarada verilmiş hali olarak sunulmuştur. Öğretmen adaylarından sadece ÖA5’in verilen problem veya modelin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgisinin ön-testten son-teste çok fazla gelişmediği ve işlemsel düzeyde kaldığı söylenebilir.

Öğretmen adaylarının verilen modelin ve cevabın doğru olup olmadığını gerekçelendirme bilgilerinin verilen problem veya modelin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgisine göre daha güçlü olduğu söylenebilir. Öğretmen adayları son-testte verilen modellerin ve cevapların neden doğru veya yanlış olduğunu gerekçelendirirken çarpmanın tanımını ve anlamını kullanmanın yanı sıra referans alınan bütünün yanlış alındığını da ifade etmişlerdir. Öğretmen adayları ön-testte de referans alınan bütüne işaret etmişlerdir ancak son-testte açık bir şekilde ifade etmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının bir kesir ile bir doğal sayının ve iki kesrin çarpma işlemine ilişkin verilen modellerin ve cevapların doğru olup olmadığını gerekçelendirme bilgilerinin ön-testten son-teste az da olsa geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

Öğretmen adayları öğretimden önce iki kesrin çarpma işlemine ilişkin verilen problemin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendiremiyorlarken, öğretimden sonra çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirmenin yanı sıra resim çizerek de gerekçelendirmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin çarpma işlemine ilişkin verilen problemin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

Tablo 4.81.

Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Çarpma İşlemine İlişkin Verilen Model ile Cevabın Doğruluğunu ve Verilen Problemin veya Modelin Neden O İşlemi İfade Ettiğini Gerekçelendirme Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo

Öğretmen Adayı	Ön-test/G1			Öğretim Süreci/G2-G7						Son-test/G8		
	5/7 x 2 işlemi için verilen model ve cevabın doğruluğu	1/3 x 5/6 işlemi için verilen model ve cevabın doğruluğu	Verilen problemin neden 2/3 x 3/5 işlemini ifade ettiği	Verilen problemin neden 3 x 2/7 işlemini ifade ettiği	Verilen problemin neden 3/7 x 4 işlemini ifade ettiği	Verilen modelin neden 2/3 x 2 işlemini ifade ettiği	Verilen modelin neden 2/5 x 5/7 işlemini ifade ettiği	Verilen modelin neden 3/5 x 3/8 işlemini ifade ettiği	Verilen problemin neden 2/5 x 3/4 işlemini ifade ettiği	5/7 x 2 işlemi için verilen model ve cevabın doğruluğu	1/3 x 5/6 işlemi için verilen model ve cevabın doğruluğu	Verilen problemin neden 2/3 x 3/5 işlemini ifade ettiği
ÖA6	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Çarpmanın tekrarlı toplama anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Paydaları toplama hatasının yapıldığını ifade etmiştir.	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etmiştir.	• Uygun olmayan gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın tanımlı yoluyla gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Yeni bütün kavramını kullanma	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Resim çizerek gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir.	• Uygun gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir. • Ortak kesişim yapıldığını ifade etmiştir.	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme
ÖA2	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme • Referans alınan bütünün yanlış	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına	• Uygun olmayan gerekçelen dirme	• Yok	• Yok	• Yok	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Resim çizerek gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını	• Uygun gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme

	alındığına işaret etmiştir.	işaret etmiştir.									ifade etmiştir.	ifade etmiştir.
ÖA4	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme • İşlemin sonucunun verilen modeldeki taraflı parçaların sayısının pay ve bütün parçaların sayısının payda şeklinde yanlış yazıldığını ifade etmiştir.	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etmiştir. • Ortak kesişim yapıldığını ifade etmiştir.	• Uygun olmayan gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın tanımlanması yoluyla gerekçelen dirme	• Yok	• Yok	• Yok	• Yok	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Yeni bütün kavramını kullanma	• Uygun gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir.	• Uygun gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir. • Yeni bütün kavramını kullanma	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme
ÖA3	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Çarpmanın tekrarlı toplama anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Paydaları toplama hatasının yapıldığını ifade etmiştir.	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Kendi açıklaması şeklinde gerekçelen dirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etmiştir.	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Kendi açıklaması şeklinde gerekçelen dirme	• Yok	• Uygun gerekçelen dirme • Problem yoluyla gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Yok	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir.	• Uygun gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir.	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme

ÖA5	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Çarpmanın tekrarlı toplama anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etmiştir.	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etmiştir.	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Kesrin tanımı yoluyla gerekçelen dirme • Kesir sayısına doğal sayı anlamı yükleme	• Yok	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Çarpmanın tanımı yoluyla gerekçelen dirme • “-ın” ifadesinin kullanılması	• Yok	• Yok	• Yok	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Çarpmanın tanımı yoluyla gerekçelen dirme • “-ün” ifadesinin kullanılması	• Uygun gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir.	• Uygun gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir.	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme
ÖA1	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Çarpmanın tekrarlı toplama anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Paydaları toplama hatasının yapıldığını ifade etmiştir.	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etmiştir.	• Uygun olmayan gerekçelen dirme	• Yok	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Yeni bütün kavramını kullanma	• Yok	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Resim çizerek gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir.	• Uygun gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir.	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme

4.4.2. Kesirlerle Bölme İşlemine İlişkin Gerekçelendirme Bilgisi

4.4.2.1. Başlangıç Durumu

ÖA2 hariç diğer öğretmen adaylarının öğretimden önce kesirlerle bölme işlemine ilişkin verilen model ile cevabın doğruluğunu ve verilen problem veya modelin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgilerinin oldukça zayıf olduğu görülmektedir (Tablo 4.82). Öğretmen adaylarının özellikle iki kesrin bölme işlemine ilişkin verilen modelin neden o işlemi ifade ettiğini ve verilen model ile cevabın doğruluğunu gerekçelendirmede zorlandıkları ve gerekçelendiremedikleri görülmektedir. Bu durum öğretmen adaylarının öğretimden önce iki kesrin bölme işlemine ilişkin model bilgilerinin zayıf olması ile açıklanabilir. ÖA2'nin kesirlerle bölme işlemine ilişkin verilen model veya problemlerin neden o işlemi ifade ettiğini ve verilen model ile cevabın doğruluğunu gerekçelendirme bilgisi öğretimden önce diğer öğretmen adaylarına göre daha güçlüdür ancak yaptığı gerekçelendirmeler incelendiğinde bu bilgisinin bölmenin paylaşırma anlamına göre grupta anlamı için daha güçlü olduğu görülmektedir (Tablo 4.82). Diğer taraftan öğretimden önce öğretmen adayları içinde ÖA1'in iki kesrin bölme işlemine ilişkin verilen model veya problemin neden o işlemi ifade ettiğini ve verilen model ile cevabın doğruluğunu gerekçelendirme bilgisi en zayıf kişi olduğu hatta bu bilgiye sahip olmadığı söylenebilir. Çünkü öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde verilen görevlerin hiçbirinde uygun bir gerekçelendirme yapamamıştır.

Öğretmen adayları öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde ikinci görevde verilen “5'in içinde kaç tane $1/2$ vardır?” ifadesine karşılık gelen işlemi doğru bir şekilde $5 \div 1/2$ olarak ifade etmişlerdir ancak neden bu işlemi ifade ettiğini ÖA1 hariç diğer öğretmen adayları gerekçelendirmişlerdir. Buna göre ÖA1'in öğretimden önce kesirlerle bölme işlemine ilişkin verilen sözel ifadenin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgisinin diğer öğretmen adaylarına göre daha zayıf olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının gerekçelendirmeleri incelendiğinde ÖA2 hariç diğer öğretmen adaylarınınkinin eksik olduğu görülmektedir (Tablo 4.82). ÖA6, ÖA4 ve ÖA5 yarım ve bütün kavramlarını kullanarak gerekçelendirirken, ÖA3 resim çizerek ve ÖA2 de problem yoluyla gerekçelendirmişlerdir. ÖA6'nın gerekçelendirmesi şu şekildedir: “Çünkü 5'in 5 bütünü ifade ettiğini biliyoruz. $1/2$ 'nin yarımı ifade ettiğini biliyoruz. Yani biz bu soruyu “5 bütünde kaç yarım vardır?” şeklinde düşünüp hareket ettiğimizde $5 \div 1/2$ matematiksel işlemi kullanmamız gerektiğini anlarız.” ÖA6'nın bu gerekçelendirmesi incelendiğinde bölmenin anlamına ilişkin herhangi bir şey içermediği görülmektedir. Burada sadece bütün

ve yarım kavramalarını kullanmıştır ancak verilen ifadenin neden bölme işlemini ifade ettiğini açıklayamamıştır. ÖA4 ve ÖA5 de benzer şekilde gerekçelendirmişlerdir.

Tablo 4.82.

Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Kesirlerle Bölmeye İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Gerekçelendirmelere İlişkin Açıklamalar

Öğretmen Adayı	Verilen sözel ifadenin neden $5 \div 1/2$ işlemini ifade ettiği (Gruplama anlamı)	Verilen modelin neden $2/7 \div 3$ işlemini ifade ettiği (Paylaştırma anlamı)	Verilen problemin neden $2/5 \div 3$ işlemini ifade ettiği (Paylaştırma anlamı)	Verilen modelin neden $2/3 \div 1/4$ işlemini ifade ettiği (Gruplama anlamı)	$7/8 \div 1/4$ işlemi için verilen model ve cevabın doğruluğu (Gruplama anlamı)
ÖA6	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Kendi açıklaması şeklinde gerekçelendirme • Yarım ve bütün kavramlarını kullanma	• Uygun olmayan gerekçelendirme • Modelin ifade ettiği işlemi tam olarak yazamıyor	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun olmayan gerekçelendirme • Modelin ifade ettiği işlemi yazamıyor	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme
ÖA2	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme • Problem yoluyla gerekçelendirme • Doğal sayılarla bölme işleminden yararlanma	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme
ÖA4	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme • Yarım ve bütün kavramlarını kullanma	• Uygun olmayan gerekçelendirme • Modelin ifade ettiği işlemi tam olarak yazamıyor	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Yok	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme • Sadece cevabın doğruluğunu gerekçelendiriyor • Ters çevir çarp algoritmasını kullanma
ÖA3	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme • Resim çizerek gerekçelendirme • Doğal sayılarla bölme işleminden yararlanma	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun olmayan gerekçelendirme • Modelin ifade ettiği işlemi yazamıyor	• Yok
ÖA5	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Kendi açıklaması şeklinde gerekçelendirme • Yarım ve bütün kavramlarını kullanma	• Yok • Modelin ifade ettiği işlemi tam olarak yazamıyor	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun olmayan gerekçelendirme • Modelin ifade ettiği işlemi yazamıyor	• Yok
ÖA1	• Uygun olmayan gerekçelendirme • İşlemden ziyade işlemin sonucunu ifade ediyor	• Uygun olmayan gerekçelendirme • Modelin ifade ettiği işlemi tam olarak yazamıyor	• Yok	• Uygun olmayan gerekçelendirme • Modelin ifade ettiği işlemi yazamıyor	• Uygun olmayan gerekçelendirme

ÖA3 verilen sözel ifadenin neden $5 \div 1/2$ işlemini ifade ettiğini şöyle gerekçelendirmiştir: *“Örneğin, 6’nın içinde kaç tane 2 olduğunu bulmak için $6 \div 2 = 3$ işlemini uyguluyoruz. Bu şekilde 6’nın içinde 3 tane 2 olduğunu bulmuş oluruz.”* ÖA3 burada kesilerle bölmeye göre daha basit olan doğal sayılarla bölme işleminden yararlanarak açıklamaya çalışmıştır ancak bu, verilen sözel ifadenin neden bölme işlemi olduğunu açıklamak için yeterli değildir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) bunu biraz daha açması istendiğinde ÖA3 şu şekilde çizmeden model üzerinden açıklamaya işaret etmiştir: *“Evet yani baktığımda mesela 5 tane yuvarlak veya 5 tane bir nesne çizsem, hepsini $1/2$, $1/2$, $1/2$ ayırsam zaten o zaman 10 tane $1/2$ olduğunu göreceğim.”* Bu açıklama neden bölme işlemi olduğundan ziyade işlemin sonucunun 10 olduğunu açıklama şeklindedir. Bunun neden bölme işlemi olduğu sorulduğunda şöyle ifade etmiştir: *“Çünkü bir bütünü bölüyorum, bana verilen kesri. Yani $1/2$ ya 2 ’ye bölüyorum. Yani $1/2$ ’sini almam için 2 ’ye bölmem gerekiyor.”* Burada da $1/2$ ile bölme yerine $1/2$ ile çarpmayı karıştırmaktadır ve 2 ile bölmeyi açıklamaktadır. Buna göre ÖA3’ün verilen sözel ifadenin neden o işlemi ifade ettiğini tam olarak gerekçelendiremediği söylenebilir. ÖA2 ise verilen sözel ifadenin neden $5 \div 1/2$ işlemini ifade ettiğini şöyle gerekçelendirmiştir: *“Mesela 10’un içinde kaç tane 2 vardır dediğimizde 10’u, 2 ’ye bölmekteyiz. Aynı şekilde kesirlerde de aynısını yapabiliriz.”* ÖA2 burada ÖA3 gibi doğal sayılarla bölme işlemi ile ilişkilendirerek açıklamıştır ancak bu açıklama yeterli değildir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) bu açıklamasını biraz daha açması istenmiştir ve ÖA2 bunu şöyle açıklamıştır: *“Aslında burada örnekle vermişim, 10 metre bir kablomuz vardır, 2 metrelik kabloları ayırırsak o 10 metrelik kablomun içinde 2 metrelik kablo 5 tanedir. Yani 10 bölü 2, 5 oluyor yine aynı şekilde 2’lik parçalara 5 tane olarak ayırıyoruz.”* Burada ÖA2 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak bölmenin gruplama anlamını kullanarak problem yoluyla gerekçelendirmiştir.

KÇB ön-testinde on beşinci görevde bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin verilen kesir çubuğu modelinin (Şekil 4.72) ifade ettiği işlemi sadece ÖA2 ve ÖA3 doğru bir şekilde $2/7 \div 3$ olarak ifade etmişlerdir ve verilen modelin neden bu işlemi ifade ettiğini eksik de olsa gerekçelendirmişlerdir. Diğer öğretmen adayları verilen modelin ifade ettiği işlemi farklı şekillerde yazmışlardır ve bu işlemleri gerekçelendirmeye çalışmışlardır ancak başarılı olamamışlardır (Tablo 4.82). ÖA2’nin gerekçelendirmesi şu şekildedir: *“Şimdi burada her parçayı tekrar üçe bölmüşüz, yani parçaları ayrı ayrı üçe bölmüşüz. Üçe böldüğümüz parçalardan da birinciden bir, ikinciden bir parça almışız gibi. Aslında bu altı parça, bu altı parçanın üçte birini almışız.”* Burada ÖA2 verilen

modelde yapılanları ifade etmiştir ancak bölmenin paylaştırma anlamından bahsetmemiştir. ÖA3 de benzer şekilde verilen modelin basamaklarını açıklayarak gerekçelendirmiştir. ÖA2 ve ÖA3'ün verilen sözel ifadenin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgilerinin verilen modelin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgisine göre daha güçlü olduğu görülmektedir. Buna öğretimden önce kesirlerle bölme işlemine ilişkin model bilgilerinin zayıf olmasının etkisi olmuş olabilir, bununla beraber bölmenin paylaştırma anlamına göre gruplama anlamına ilişkin daha güçlü bir anlamaya sahip olmalarının da etkisi olduğu söylenebilir.

KÇB ön-testinde yirminci görevde verilen “Leyla Hanım, altın günü için gelen misafirlerlerine dikdörtgen şeklindeki bir kekten ikram etmiştir ve kekin $\frac{2}{5}$ 'i kalmıştır.

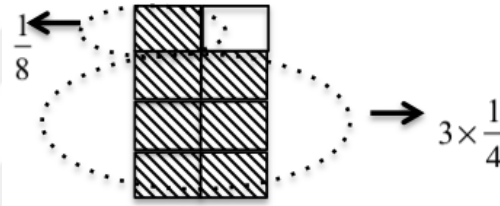
Misafirler gittikten sonra Leyla Hanım'ın 3 çocuğu kekin kalanını eşit olarak paylaşmışlardır o halde çocukların her biri kekin ne kadarını yemiştir?” probleminin ifade ettiği işlemi öğretmen adaylarının hepsi doğru bir şekilde $\frac{2}{5} \div 3$ olarak ifade etmişlerdir ve ÖA1 hariç diğer öğretmen adayları bu problemin neden bu işlemi ifade ettiğini gerekçelendirmişlerdir (Tablo 4.82). Öğretmen adaylarının gerekçelendirmeleri incelendiğinde benzer şekilde bölmenin paylaştırma anlamını kullandıkları görülmektedir ancak bu anlamı tam olarak açık bir şekilde ifade etmemişlerdir. ÖA5'in gerekçelendirmesi şu şekildedir: “Çocukların paylaşacağı toplam pastanın $\frac{2}{5}$ 'idir. Bu yüzden $\frac{2}{5}$ 'i 3'e böleriz.” Diğer öğretmen adayları da benzer şekilde gerekçelendirmişlerdir.

KÇB ön-testinde yedinci görevde verilen modelin (Şekil 4.73) ifade ettiği işlemi ÖA2 hariç diğer öğretmen adayları farklı şekilde yazmışlardır ve bu işlemleri gerekçelendirmeye çalışmışlardır ancak başarılı olamamışlardır. ÖA2 verilen modelin neden $\frac{2}{3} \div \frac{1}{4}$ işlemini ifade ettiğini şöyle gerekçelendirmiştir: “I. işlemde $\frac{2}{3}$ ve $\frac{1}{4}$ kesirlerinin, II. işlemde birinci kesiri 4 ile genişletip (yani 4 parçaya daha ayırıp) $\frac{8}{12}$ ve ikinci kesri 3 ile genişletip (yani 3 parçaya daha ayırıp) $\frac{3}{12}$ bularak payda eşitleme işlemi yapılmıştır. Son işlemde ise $\frac{8}{12}$ 'nin içinde kaç tane $\frac{3}{12}$ daha doğrusu $\frac{2}{3}$ 'ün içinde kaç tane $\frac{1}{4}$ olduğunu açıklar.” Burada ÖA2 verilen modelde yapılanları ifade ederek ve bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirmiştir. Bu da ÖA2'nin öğretimden önce kesirlerle bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin verilen modelin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgisinin paylaştırma anlamına göre daha güçlü olduğunu desteklemektedir. Çünkü KÇB ön-testinde on beşinci görevde kesirlerle

bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin verilen modelin neden o işlemi ifade ettiğini eksik bir şekilde gerekçelendirirken burada eksiksiz olarak gerekçelendirmiştir.

KÇB ön-testinde on sekizinci görevde “Melda $7/8 \div 1/4$ işlemini çözmek için “dikdörtgensel alan modeli” çizmiş ve bu modele (Şekil 4.86) bakarak işlemin sonucunun $3\frac{1}{8}$ olduğunu ifade etmiştir. Melda’nın modeli ve cevabı hakkında ne düşünüyorsunuz?

Neden?” sorusu verilmiştir. Öğretmen adaylarından ÖA6, ÖA4 ve ÖA2 burada verilen model ve cevabın doğruluğunu gerekçelendirirken, ÖA3, ÖA5 ve ÖA1 gerekçelendirememişlerdir (Tablo 4.82). ÖA4 ters çevir çarp algoritmasını kullanarak işlemi yapıp verilen işlemin cevabının yanlış olduğunu gerekçelendirirken, modelin doğruluğundan bahsetmemiştir. ÖA6 ve ÖA2 benzer şekilde bölmenin gruptama anlamını kullanarak gerekçelendirmişlerdir ancak ÖA6 verilen işlemin cevabının neden yanlış olduğunu tam olarak ifade edememiştir.



Şekil 4.86. KÇB testinde 18. görevde verilen dikdörtgensel alan modeli

ÖA6 ön-testte verilen model ve cevap için herhangi bir şey söylememiştir ancak ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) şöyle ifade etmiştir: “Şimdi düşündüm, $7/8$ 'i $1/4$ 'e bölmüş daha sonra cevabın 3 tam $1/8$ olduğunu ifade etmiştir. Şimdi bu her biri $1/8$ 'i ifade ediyor, taralı kısım $7/8$ zaten. Burada 3 ile $1/4$ 'ü neden çarpmış ben onu anlamadım. Mesela buraya $1/8$ demiş, tamam orası doğru. Ama burada neden 3 ile $1/4$ 'ü çarpmış? Hani mesela $1/4$ dediğimiz aslında şu iki kısım $1/4$, üç tane şu şekilde düşünürsek 3 tane $1/4$ 'ü ifade etmiş. Bu da $1/8$ demiş. Aslında bize $1/4$ 'lere bölecektik de bütünüün içinde kaç tane $1/4$ vardır diyecektik ya şimdi zaten burada kendi $1/4$ olarak almış, bu da 3 tane $1/4$ 'ün yani $3 \times 1/4$ 'ün buna eşit olduğunu göstermiş. Burada da $1/8$ kaldığı için 3 tam $1/8$ demiş olabilir mi acaba şimdi düşündüm bunu.” Burada ÖA6 modelde $7/8$ 'in içinde $1/4$ 'ün arandığına işaret etmiştir ama $1/8$ 'in yanlış ifade edildiğinden bahsetmemiştir. Bununla beraber işlemin sonucu için bir hata olabileceğini belirtmiştir ama açıklamamıştır. ÖA2 ise verilen modelin ve cevabın doğruluğunu eksiksiz olarak şu şekilde gerekçelendirmiştir: “Melda bir bütünüün 8 parçasından 7 parçasını ayırarak doğru yapmış ama sonrasında

yanlış yapmıştır. Melda ne cevap vermiş $3\frac{1}{8}$ ifade etmiş, onun hatası şurayı doğru yapmış yani 3 tane $1/4$ 'ün olduğunu ifade etmiş, doğru. Şuranın da $1/8$ olduğunu kabul etmiş. Aslında hatası-üç buçuk tane olacak-burada bu bütünün içindeki $1/8$ bu, oysa ki biz $1/4$ 'ü bütün kabul ettik sonradan. Yani içinde kaç tane $1/4$ 'ü soruyoruz. Bu $1/8$ 'i direk yazmış yani bu aslında $1/4$ 'ün $1/2$ 'sidir.” Burada ÖA2 bölmenin gruptama anlamını kullanarak gerekçelendirmiştir ve işlemin sonucu için referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmiştir. Buna göre ÖA2'nin öğretimden önce iki kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin verilen model ve cevabın doğruluğunu gerekçelendirme bilgisinin diğer öğretmen adaylarınıninkine göre güçlü olduğu söylenebilir.

4.4.2.2. Öğretim Süreci

Öğretmen adayları öğretim sürecine kesirlerle bölme işlemine ilişkin verilen problem veya modelin neden o işlemi ifade ettiğini ve verilen model ile cevabın doğruluğunu gerekçelendirme bilgileri zayıf bir şekilde başlamışlardır. Sadece ÖA2 diğer öğretmen adaylarına göre özellikle bölmenin gruptama anlamı için verilen problem veya modelin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgisi daha güçlü bir şekilde başlamıştır. Öğretim sürecinde öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işleminin paylaşırma anlamına ilişkin verilen model ve problemin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgilerinin ön-teste göre geliştiği görülmektedir (Tablo 4.83). Öğretmen adaylarının bu gerekçelendirmeleri yaparken bölme işlemini çarpmanın tersi olarak ifade etmeyi ve çarpmanın tanımını kullandıkları görülmüştür. Buna göre çarpmanın tanımını kullanmanın kesirlerle bölme işlemine ilişkin verilen problem veya modelin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirmelerini kolaylaştırdığı söylenebilir.

Tablo 4.83.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Kesirlerle Bölmeye İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Gerekçelendirmeler

Öğretmen Adayı	D3/G4	
	Verilen modelin neden $5/7 \div 3$ işlemini ifade ettiği (Paylaştırma anlamı)	Verilen problemin neden $12 \div 4/5$ işlemini ifade ettiği (Paylaştırma anlamı)
ÖA6	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın tanımı yoluyla gerekçelendirme
ÖA2	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın tanımı yoluyla gerekçelendirme
ÖA4	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın tanımı yoluyla gerekçelendirme
ÖA3	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın tanımı yoluyla gerekçelendirme
ÖA5	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın tanımı yoluyla gerekçelendirme
ÖA1	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Çarpmanın tanımı yoluyla gerekçelendirme

Üçüncü derse paralel yapılan görüşmede (G4) bir kesir ile bir doğal sayının paylaştırma anlamına ilişkin verilen bir modelin (Şekil 3.6) ifade ettiği işlemin neden $5/7 \div 3$ işlemi olduğunu ÖA5 ve ÖA1 eksiksiz bir şekilde gerekçelendirirken, diğer öğretmen adayları bölme işlemi yerine ters çevir çarp algoritmasından bu işlemin bu anlamına karşılık gelen $1/3 \times 5/7$ işlemini ele alarak gerekçelendirmişlerdir (Tablo 4.83). ÖA6 bunu şöyle gerekçelendirmiştir: “Çünkü ilk baktığım zaman hani bir karenin $5/7$ ’lik kısmını almış (modelin birinci ve ikinci basamağına işaret ediyor) ve burada üçte birini almış (modelin üçüncü basamağına işaret ediyor). Yani üçe bölüp bir parçasını almış.” Burada ÖA6’nın “ $5/7$ ’nin $1/3$ ’ü” yani çarpmanın operatör anlamını kullanarak gerekçelendirme yaptığı görülmektedir. ÖA6 verilen modele karşılık gelen işlemi bölme işlemi olarak ifade etmiştir ancak gerekçelendirmesini çarpma işlemi üzerinden yapmıştır. ÖA4, ÖA3 ve ÖA2 de benzer şekilde verilen modeli bölme işlemi olarak ifade edip çarpma işlemi üzerinden gerekçelendirmişlerdir. ÖA5 ve ÖA1 verilen modelin neden o işlemi ifade ettiğini bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelendirmişlerdir. ÖA5’in gerekçelendirmesi şu şekildedir: “Şimdi direk sonuca bakıp öyle bir yorum getirmek istiyorum (modelin son basamağına işaret ediyor). Yedi kere üç yirmi bir, yirmi birde beş. O zaman $5/7$ bölü 3 olacak.” Burada ÖA5 verilen modelin neden o işlemi ifade ettiğini işlemsel tanım şeklinde gerekçelendirmiştir. Sonra bu işlemi model üzerinden de şöyle

gerekçelendirmiştir: “Şimdi $5/7$ var, $5/7$ üçe bölünmüş deyince aslında oradan da gidebilirim sonuca da. Emin olmak için bir baktım yine de hani ($5/7 \div 3$ yazıyor).” Daha sonra burada bölmenin paylaştırma anlamının kullanıldığını şöyle gerekçelendirmiştir: “ $5/7$ pasta, bir pastanın $5/7$ ’si vardır elimizde, üç kişi paylaşacaktır. Her birine düşen, bir gruptaki nesne sayısı o zaman bu.” şeklinde ifade etmiştir. Burada ÖA5 çarpmanın tanımını kullanarak işlemin sonucunun her bir gruptaki nesne sayısı olduğunu ifade etmiştir ve bu şekilde bölmenin paylaştırma anlamının kullanıldığını belirtmiştir. ÖA1 de benzer şekilde bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelendirmiştir.

Aynı görüşmede (G4) verilen “Murat’a babası oyuncak tren almış ve Murat da oyuncak treni için rayları kurmak istiyor. Murat’ın kurduğu kısım tren için gerekli rayların $4/5$ ’i yani 12 santimetre raydır. Tren için gerekli olan rayın tamamı kaç santimetredir?” problemine karşılık gelen işlemin neden $12 \div 4/5$ olduğunu bütün öğretmen adayları çarpmanın tanımını kullanarak eksiksiz bir şekilde gerekçelendirmişlerdir. ÖA6 verilen problemin neden bu işlemi ifade ettiğini şöyle gerekçelendirmiştir: “Şimdi bu hani $4/5$ ’lik grup sayımız, 12 bu grup başına, bu gruba düşen santimetre sayımız. Biz bu $4/5$ ’e böldüğümüz zaman hani aynı zamanda şurada görünmez $5/4$ demiştik ($12 \div 4/5$ işleminin sağına $\times 5/4$ yazarak $12 \div (4/5 \times 5/4)$ işlemine işaret ediyor). Aslında bu hani bir bütünüümüzü ifade etmiyor ama şimdi toparlayacağım. Şimdi ben bunu bölme amacım hani bu $4/5$ ’lik gruba 12 santimetre düşüyse bizim amacımız bir gruba yani rayın tamamı için ne kadar gerektiğini bulmaktı. Şimdi burada zaten 12 bölü $4/5$ dediğim zaman, hani bir de bunu ters çevirip çarpıyoruz bölmeden dolayı. Aynı şeyi vermiş oluyor yani diye düşündüm.” ÖA6 burada çarpmanın tanımını ve bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelendirmiştir. ÖA6 çarpmanın tanımını kullanarak doğru bir şekilde $4/5$ ’i “grup sayısı” ve 12’yi “ $4/5$ gruptaki nesne sayısı” olarak ifade etmiştir ve bölmenin paylaştırma anlamına işaret etmiştir. ÖA6 verilen problemin ifade ettiği işlemi önce $12 = 4/5 \cdot X$ şeklinde yazmıştır ve bunun üzerinden çarpmanın tanımını kullanarak $12 \div 4/5$ bölme işlemini ve bölmenin paylaştırma anlamını ifade ettiğini açıklamıştır.

ÖA2 de diğer öğretmen adayları gibi verilen problemin neden $12 \div 4/5$ işlemini ifade ettiğini çarpmanın tanımını kullanarak gerekçelendirmiştir ancak diğerlerinden farklı olarak bölme işlemini çarpmanın tersi olarak yazmamıştır. ÖA2’nin gerekçelendirmesi şu şekildedir: “Şimdi bu grup sayımız ($4/5$ ’i gösteriyor), bu toplam nesne sayımız (12’yi gösteriyor). Bu nesne sayımız 12 dersek, grup sayımız da $4/5$ ise, bunu buna böldüğümüz zaman her bir gruptaki nesne sayımızı bulabiliriz. O da böldüğümüz zaman, ıı, üç çarpı

beş, on beş santimetre eder.” Burada ÖA2 çarpmanın tanımına göre işlemdeki $4/5$ ve 12 ’yi ifade etmiştir ve bunun üzerinden gerekçelendirmiştir. ÖA2 öğretimden önce bölmenin paylaştırma anlamına ilişkin verilen model veya prolemin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirmede zorluk yaşarken burada uygun bir şekilde gerekçelendirdiği görülmektedir. Buna göre ÖA2’nin ön-testten üçüncü görüşmeye (G3) gerekçelendirme bilgisinin geliştiği söylenebilir.

4.4.2.3. Son Durum

Öğretmen adayları öğretim sürecine kesirlerle bölme işlemine ilişkin verilen problem ve modellerin neden o işlemi ifade ettiklerini ve verilen model ile cevabın doğruluğunu gerekçelendirme bilgileri zayıf bir şekilde başlamışlardır ve öğretim sürecinde bu bilgileri gelişim göstermiştir. Öğretmen adaylarının ön-testte yaptıkları gerekçelendirmeler ile son-testte yaptıkları karşılaştırıldığında da bu gelişim görülmektedir (Tablo 4.85). Öğretmen adayları öğretimden önce özellikle iki kesrin bölme işlemine ilişkin verilen modelin neden o işlemi ifade ettiğini ve verilen model ile cevabın doğruluğunu gerekçelendirme bilgileri oldukça zayıftır ve ön-testte verilen bu iki durumun yer aldığı görevleri ÖA2 ve ÖA6 hariç diğer öğretmen adayları gerekçelendirememişlerdir. Son-testte ise ÖA4 hariç diğer öğretmen adaylarının bu iki görevi uygun ve eksiksiz bir şekilde gerekçelendirdikleri görülmektedir (Tablo 4.84). Öğretmen adaylarının kesirlerle bölmeye ilişkin gerekçelendirme bilgilerinin geliştiği en net bir şekilde bu iki görevde görülmektedir. Burada ÖA4 iki kesrin bölme işleminin grupta anlamına ilişkin verilen modelin neden $2/3 \div 1/4$ işlemini ifade ettiğini hem ön-testte hem son-testte gerekçelendirememiştir. Bu durum ÖA4’ün iki kesrin bölme işlemine ilişkin model bilgisinin derin olmaması ve verilen modelin türüne göre modelin ifade ettiği işlemi yazmada zorlanması ile açıklanabilir. Çünkü iki kesrin bölme işleminin grupta anlamına ilişkin dikdörtgensel alan modelinin verildiği diğer görevde modelin ve cevabın doğruluğunu gerekçelendirmede herhangi bir zorluk yaşamamıştır. Bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemine ilişkin verilen görevlerde yer alan model ve problemlerin neden o işlemleri ifade ettiklerine ilişkin yaptıkları gerekçelendirmeler incelendiğinde ön-testten son-teste bazı öğretmen adaylarının gelişim gösterdiği bazılarında değişim olmadığı görülmektedir (Tablo 4.85). Özellikle bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin verilen modelin neden $2/7 \div 3$ işlemini ifade ettiğini son-testte ÖA2 ve ÖA3 hariç diğer öğretmen adaylarının halen tam olarak gerekçelendiremedikleri görülmektedir (Tablo

4.84). Burada öğretmen adayları verilen modelin neden bu işlemi ifade ettiğini bu işlemin bu anlamı için ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen $1/3 \times 2/7$ işlemini ele alarak gerekçelendirmişlerdir. Yine de ön-testte işlemi yazamayıp gerekçelendiremiyorlarken burada eksik de olsa gerekçelendirmeleri öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işlemine ilişkin verilen modelin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgilerinde gelişim olduğunu göstermektedir. Aynı şekilde ÖA2 ve ÖA3'ün gerekçelendirme bilgilerinde de diğerlerinininki kadar belirgin olmasa da gelişim olduğu söylenebilir çünkü ön-testte eksik bir şekilde gerekçelendirirken, son-testte eksiksiz bir şekilde ve bölmenin paylaşırma anlamını kullanarak gerekçelendirmişlerdir.

Öğretmen adayları öğretimden sonra uygulanan KÇB son-testinde ikinci görevde verilen “5’in içinde kaç tane $1/2$ vardır?” ifadesine karşılık gelen işlemin neden $5 \div 1/2$ olduğunu bölmenin gruptama anlamını kullanarak gerekçelendirmişlerdir (Tablo 4.84). Diğerlerinden farklı olarak ÖA3 yeni bütün kavramını kullanmıştır ve ÖA2 de ön-testteki gibi doğal sayılarla bölme işleminden yararlanmıştır. ÖA3'ün gerekçelendirmesi şu şekildedir: *“Bölmenin gruptama yani “kaç tane” anlamını ifade eder. 5 bütünümlün her birini $1/2$ 'lik parçalara ayırıyorum. Elde ettiğim yeni bütünlerimin ($1/2$) kaç tane olduğunu sayarak cevabı bulurum.”* Burada ÖA3 işlemdeki $1/2$ 'nin “yeni bütün” olduğunu ifade ederek işlemin sonucu için referans alınan bütünün $1/2$ olduğuna işaret ettiği söylenebilir. Buna göre ÖA3'ün kesirlerle bölme işlemine ilişkin anlamasının kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

Tablo 4.84.

Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Kesirlerle Bölmeye İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Gerekçelendirmelere İlişkin Açıklamalar

Öğretmen Adayı	Verilen sözel ifadenin neden 5 ÷ 1/2 işlemini ifade ettiği (Gruplama anlamı)	Verilen modelin neden 2/7 ÷ 3 işlemini ifade ettiği (Paylaştırma anlamı)	Verilen problemin neden 2/5 ÷ 3 işlemini ifade ettiği (Paylaştırma anlamı)	Verilen modelin neden 2/3 ÷ 1/4 işlemini ifade ettiği (Gruplama anlamı)	7/8 ÷ 1/4 işlemi için verilen model ve cevabın doğruluğu (Gruplama anlamı)
ÖA6	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme • Bütünlerin aynı olduğunu ifade etme • Ortak payda alındığını ifade etme	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etme
ÖA2	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme • Doğal sayılarla bölme işleminden yararlanma • Yarım kavramını kullanma	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme • Hem bölme hem çarpma işlemini ifade etme	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme • Bütünlerin aynı olduğunu ifade etme • Ortak payda alındığını ifade etme	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etme
ÖA4	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Yok	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etme
ÖA3	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme • Yeni bütün kavramını kullanma	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme • Ortak payda alındığını ifade etme	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etme
ÖA5	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme • Bütünlerin aynı olduğunu ifade etme • Ortak payda alındığını ifade etme	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etme
ÖA1	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun ama eksik gerekçelendirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelendirme • İşlemsel atanım şeklinde gerekçelendirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelendirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etme

ÖA6, ÖA4, ÖA5 ve ÖA1 de benzer şekilde ÖA3 gibi bölmenin gruptama anlamını kullanarak gerekçelendirmişlerdir. ÖA2 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak verilen sözel ifadenin neden $5 \div 1/2$ işlemini ifade ettiğini şöyle gerekçelendirmiştir: “5’in içindeki yarımların miktarı 5’i yarıma bölerek elde edilir. 5’in içindeki 2 dediğimiz zaman nasıl $5 \div 2$ yapıyorsak bunda da aynıdır.” Burada ÖA2 ön-testteki gibi doğal sayılarla bölme işlemi ile ilişkilendirerek gerekçelendirmiştir. Buna göre ÖA2’nin bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin verilen sözel ifadenin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgisinin ön-testten son-teste çok fazla geliştiği söylenemez.

KÇB son-testinde on beşinci görevde verilen modelin (Şekil 4.72) neden $2/7 \div 3$ işlemini ifade ettiğini ÖA2 ve ÖA3 hariç diğer öğretmen adayları bu işlemi ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen $1/3 \times 2/7$ işlemi olarak ele alıp çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirmişlerdir. ÖA2 ve ÖA3 bölmenin paylaşma anlamını kullanarak gerekçelendirmişlerdir. ÖA2, ÖA3’ten farklı olarak bu modelin ifade ettiği işlemi diğer öğretmen adayları gibi ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen $1/3 \times 2/7$ işlemi olarak ele alıp çarpmanın anlamını kullanarak da gerekçelendirmiştir. ÖA2’nin gerekçelendirmesi şu şekildedir: “Şimdi $2/7$ ’dir şu direk (verilen modelin ilk basamağını gösteriyor), $2/7$ ’nin de şuraya bakarsak, her birinin $1/3$ ’ünü almışız (verilen modelin ikinci basamağını gösteriyor). Aslında bu şudur ya, $2/7$ bölü 3’tür. Çünkü 3 parçaya bölmüşüz, üç parçaya bölmüşüz yani bu 6 parça, bunu 3 gruba ayırmışız. Üç gruba ayırmak da bölü 3’ten gelir.” Sonra ÖA2 bu modelin $1/3 \times 2/7$ işlemini de ifade ettiğini şu şekilde gerekçelendirmiştir: “Bu $1/3$ ’ini seçmek yani direk şunu seçmek algılıyorum (verilen modelde taralı iki küçük parçayı gösteriyor). Böyle 3 parçaya ayırmak ayrı gibi geliyor, direk bunu seçmek ayrı gibi geliyor bana. Bölü 3, üç parçaya ayırmak, $1/3$ ile çarpmak da direk üçe ayırıp bir parçasını aldık yani şu kadarını aldık direk. Aslında üçüncü basamakta da direk sonucu vermiş ama şunu algılarken (verilen modelin ikinci basamağında nokta nokta çizgilerle ayırmaya işaret ediyor) $2/7$ bölü 3 algılıyorum ben daha çok. Sonuca bakarsak şunu da algılıyorum, bunu da (hem $2/7 \div 3$ hem de $1/3 \times 2/7$ işlemini gösteriyor).” ÖA2 burada verilen modelin her iki işlemi de ifade ettiğini gerekçelendirmiştir. ÖA6, ÖA4, ÖA5 ve ÖA1 verilen modelin $1/3 \times 2/7$ işlemini ifade ettiğini belirtmişlerdir ve neden bu işlemi ifade ettiğini çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirmişlerdir. ÖA5’in gerekçelendirmesi şu şekildedir: “Birinci basamakta $2/7$ ’yi görüyoruz. İkinci basamakta $1/7$ ’yi 3’e bölüp 1’ini almış. Yine diğer $1/7$ ’yi 3’e bölüp 1’ini almış. Böylece son

basamakta 2 parçayı biraraya toplayıp 2/7'nin 1/3'ü alınmış oldu. Sonuç olarak 2/21'i görüyoruz.” ÖA6, ÖA4 ve ÖA1 de benzer şekilde “2/7'nin 1/3'ü” anlamını yani çarpmanın operatör anlamını kullanarak gerekçelendirmişlerdir. Bu öğretmen adayları ön-testte bu modelin ifade ettiği işlemi yazamamışlardır ya da yazsalar da $2/7 \times 1/3$ olarak yazmışlardır ve gerekçelendirememişlerdir, burada ise ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen işlem olarak ele alıp çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirse de kesirlerle bölme işlemine ilişkin verilen modelin neden o işlemi ifade ettiğine ilişkin gerekçelendirme bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir.

KÇB son-testinde yirminci görevde verilen problemin neden $2/5 \div 3$ işlemini ifade ettiğini bütün öğretmen adayları bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelendirmişlerdir (Tablo 4.84). ÖA1 hariç diğer öğretmen adayları ön-testte eksik de olsa verilen problemin neden bu işlemi ifade ettiğini gerekçelendirmişlerdir. Buna göre ÖA1'in bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin verilen problemin neden bu işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgisinin ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir. ÖA1'in öğretim sürecinde bölmenin paylaştırma anlamına ilişkin verilen model ve problemin neden o işlemleri ifade ettiklerini uygun bir şekilde gerekçelendirmesi de bu gelişimi desteklemektedir. Diğer öğretmen adaylarının bu bilgilerinde çok fazla gelişim olduğu söylenemez. ÖA1'in gerekçelendirmesi şu şekildedir: “*2/5 elimizdeki toplam pastadır ve 3 kişi bunu paylaşacaktır. Her biri pastanın ne kadarını yer deyince bölmenin paylaştırma anlamından dolayı bu işlem uygundur.*” Diğer öğretmen adayları da benzer şekilde bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelendirmişlerdir.

KÇB son-testinde yedinci görevde verilen modelin (Şekil 4.73) neden $2/3 \div 1/4$ işlemini ifade ettiğini ÖA4 hariç diğer öğretmen adayları bölmenin gruptama anlamını kullanarak gerekçelendirmişlerdir. ÖA6, ÖA2 ve ÖA5 diğerlerinden farklı olarak bütünlerin aynı olduğunu ve ortak payda alındığını ifade etmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin anlamalarının kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. ÖA6 verilen modelin neden $2/3 \div 1/4$ işlemini ifade ettiğini şöyle gerekçelendirmiştir: “*Şeklin yanına adım adım açıkladığım gibi 2/3'ün içinde 1/4'ler aranmıştır. Yani bu bölmenin gruptama anlamıdır. Niçin paylaştırma anlamı değil dersek de şekilden gördüğümüz üzere bütünleri aynıdır ve şeklin devamında da aynı birimlerden konuşmak için ortak payda alınmıştır.*” ÖA6'nın bu gerekçelendirmesi incelendiğinde bölmenin gruptama anlamını kullanarak gerekçelendirdiği görülmektedir. Modelde bütünlerin aynı olmasını ve ortak payda alınmasını göstererek bölmenin gruptama

anlamıyla ilişkilendirmiştir. Ön-testte ÖA6 verilen modele karşılık gelen işlemi ifade edemediği gibi aynı zamanda gerekçelendirememiştir. Burada ise hem verilen modele karşılık gelen işlemi doğru bir şekilde ifade etmiştir hem de bölmenin gruptama anlamını kullanarak verilen modelin neden bu işlem olduğunu gerekçelendirmiştir. Benzer şekilde ÖA4 hariç diğer öğretmen adayları da bölmenin gruptama anlamını kullanarak gerekçelendirmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin verilen modelin neden bu işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgilerinin geliştiği söylenebilir.

KÇB son-testinde on sekizinci görevde verilen modelin (Şekil 4.86) ve cevabın doğru olup olmadığını öğretmen adaylarının hepsi eksiksiz bir şekilde gerekçelendirmişlerdir. Ön-testte ÖA6, ÖA2 ve ÖA4 hariç diğer öğretmen adayları gerekçelendiremiyorken burada uygun bir şekilde gerekçelendirmişlerdir. ÖA6 ve ÖA4 ön-testte eksik bir şekilde gerekçelendirirken burada eksiksiz bir şekilde gerekçelendirmişlerdir. ÖA2 hem ön-testte hem son-testte benzer şekilde eksiksiz olarak gerekçelendirmiştir. Buna göre ÖA2 hariç diğer öğretmen adaylarının iki kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin verilen model ile cevabın doğruluğunu gerekçelendirme bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir. ÖA2'nin bu bilgisinin çok fazla geliştiği söylenemez. ÖA3'ün gerekçelendirmesi şu şekildedir: *“Melda 7/8'in içinde kaç tane 1/4 olduğunu aramış. 3 tane 1/4 olduğunu bulmuş buraya kadar doğru fakat geriye kalan 1 bütünün 1/8'lik kısmını 1 bütüne göre değil 1/4'ün kaçta kaç olduğunu yazması gerekirdi. Çünkü 1/4 bir sonraki bütünümlü oldu.”* Burada ÖA3 işlemin sonucu için referans alınan bütünün 1/4 yerine 1 bütün alındığını ifade etmiştir. Bununla beraber *“1/4 bir sonraki bütünümlü oldu”* diyerek 1/4'ün yeni bütün olduğuna işaret etmiştir. Bunu son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) şu açıklamasıyla desteklemektedir: *“3 tane 1/4 olduğunu bulmuş ama şu fazlalık kısmı direk bir bütünün 1/8'i ya o şekilde yazmış ama normalde ikinci bütünümlü yani aradığım şey 1/4 olduğu için 1/4'ün ne kadarına denk geldiğini ifade etmesi gerekiyordu. Yani 1/2 demesi gerekiyordu. O yüzden yani 3 tane vardı, 3 artı 1/2 demesi gerekirken 3 artı 1/8 demiş. Hatası bu.”* Burada modelde 1/8 olarak ifade edilen kısmın 1/4'ün 1/2'sine denk geldiği için 1/8 yerine 1/2 denilmesi gerektiğini belirtmiştir ve yeni bütün kavramını “ikinci bütün” olarak ifade etmiştir. Benzer şekilde diğer öğretmen adayları da bölmenin gruptama anlamını kullanarak ve referans alınan bütünün yanlış alındığını belirterek gerekçelendirmişlerdir. ÖA1 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak önce verilen işlemi yaparak bunun üzerinden şöyle gerekçelendirmiştir: *“7/8 x 4/1 = 28/8 = 3 4/8 = 3 1/2*

olması gerekiyor cevabın. Çocuk bir bütünü 8 parçaya ayırmış 7'sini almıştır. Sonra bir bütünün 1/4'i bulup 3 tane 1/4 vardır demiş. 2 parça 1/4 ise 1 parça 1/8'dir demiş.” Sonra son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) modelin doğru olduğunu ancak modelde kalan bir parçanın 1/8 olarak yanlış ifade edildiğini belirtmiştir ve bunu şöyle gerekçelendirmiştir: *“Model doğru bence, çünkü sekize bölmüş yedisini almış, 7/8'in içinde 1/4'leri arıyor. Şimdi 3/4, şurası doğruydu ama şurayı ifade etme şekli yanlış (1/8'i gösteriyor). Çünkü şunun tamamına ben bir bütün demiştim (verilen dikdörtgenin bir satırını gösteriyor), şurasına, bir bütün, bir bütün, bir bütün, 4 tane bütün ilk baştaki bütünü oluşturuyor.”* Burada dikdörtgenin iki küçük parçasının yani 1/4'lük kısmın bütün olduğunu belirterek yeni bütüne işaret etmiştir.

Sonuç olarak öğretmen adaylarının bir doğal sayı ile bir kesrin, bir kesir ile bir doğal sayının ve iki kesrin bölme işlemine ilişkin verilen problemlerin ve modellerin neden o işlemleri ifade ettiklerini ve verilen model ile cevabın doğruluğunu gerekçelendirme bilgilerinin ön-testten son-teste öğretim süresince geliştiği söylenebilir. Bu gelişim Tablo 4.85'de verilmiştir. Bu tablo öğretmen adaylarının ön-testte, öğretim sürecinde ve son-testte karşılaştıkları durumlara ilişkin gerekçelendirmelerinin birarada verilmiş hali olarak sunulmuştur.

Öğretmen adaylarından ÖA2 öğretim sürecine kesirlerle bölme işlemine ilişkin verilen problemlerin ve modellerin neden o işlemi ifade ettikleri ve verilen model ile cevabın doğruluğunu gerekçelendirme bilgisi diğer öğretmen adaylarına göre daha güçlü bir şekilde başlamıştır ancak ÖA2'nin kesirlerle bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin verilen model ve problemin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgisi gruplama anlamına göre daha zayıftır (Tablo 4.85). ÖA2'nin özellikle bu bilgisinde öğretim sürecinde ve son-testte gelişme görülmüştür. Diğer öğretmen adaylarının her iki anlam için gerekçelendirme bilgileri zayıf bir şekilde başlamışlardır ancak öğretim sürecinde ve son-testte bu bilgilerinde gelişme göstermişlerdir.

Diğer taraftan öğretmen adaylarından ÖA1 öğretim sürecine kesirlerle bölme işlemine ilişkin verilen problemlerin ve modellerin neden o işlemi ifade ettikleri ve verilen model ile cevabın doğruluğunu gerekçelendirme bilgisi diğer öğretmen adaylarına göre oldukça zayıf bir şekilde başlamıştır (Tablo 4.85). ÖA1'in bu bilgisinin öğretim sürecinde ve son-testte geliştiği görülmektedir. Buna göre ÖA1'in bu bilgisindeki gelişimin diğer öğretmen adaylarınıninkine göre daha fazla olduğu söylenebilir.

Tablo 4.85.

Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Bölme İşlemine İlişkin Verilen Model ile Cevabın Doğruluğunu ve Verilen Problemin veya Modelin Neden O İşlemi İfade Ettiğini Gerekçelendirme Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo

Öğretmen Adayı	Ön-test/G1					Öğretim Süreci/G2-G7		Son-test/G8				
	Verilen sözel ifadenin neden $5 \div 1/2$ işlemini ifade ettiği (Gruplama anlamı)	Verilen modelin neden $2/7 \div 3$ işlemini ifade ettiği (Paylaştırma anlamı)	Verilen problemin neden $2/5 \div 3$ işlemini ifade ettiği (Paylaştırma anlamı)	Verilen modelin neden $2/3 \div 1/4$ işlemini ifade ettiği (Gruplama anlamı)	$7/8 \div 1/4$ işlemi için verilen model ve cevabın doğruluğu (Gruplama anlamı)	Verilen modelin neden $5/7 \div 3$ işlemini ifade ettiği (Paylaştırma anlamı)	Verilen problemin neden $12 \div 4/5$ işlemini ifade ettiği (Paylaştırma anlamı)	Verilen sözel ifadenin neden $5 \div 1/2$ işlemini ifade ettiği (Gruplama anlamı)	Verilen modelin neden $2/7 \div 3$ işlemini ifade ettiği (Paylaştırma anlamı)	Verilen problemin neden $2/5 \div 3$ işlemini ifade ettiği (Paylaştırma anlamı)	Verilen modelin neden $2/3 \div 1/4$ işlemini ifade ettiği (Gruplama anlamı)	$7/8 \div 1/4$ işlemi için verilen model ve cevabın doğruluğu (Gruplama anlamı)
ÖA6	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Kendi açıklaması şeklinde gerekçelen dirme • Yarım ve bütün kavramlarını kullanma	• Uygun olmayan gerekçelen dirme • Modelin ifade ettiği işlemi tam olarak yazamıyor	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun olmayan gerekçelen dirme • Modelin ifade ettiği işlemi yazamıyor	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın tanımlı yoluyla gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Bütünlerin aynı olduğunu ifade etme • Ortak payda bulunduğunu ifade etme	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Referans alınan bütünü yanlış alındığına işaret etme
ÖA2	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Problem yoluyla gerekçelen dirme • Doğal	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirme	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın tanımlı yoluyla gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Doğal sayılarla bölme işleminde	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Bütünlerin aynı olduğunu ifade etme • Ortak	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Referans alınan bütünü yanlış alındığına

	sayılarla bölme işleminden yararlanma				ndirme			yararlanma	• Hem bölme hem çarpma işlemini ifade etme		payda alındığını ifade etme	işaret etme
ÖA4	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Bölmenin grupta anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Yarım ve bütün kavramlarını kullanma	• Uygun olmayan gerekçelen dirme • Modelin ifade ettiği işlemi tam olarak yazamıyor	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Bölmenin paylaşırma anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Yok	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme • Sadece cevabın doğruluğunu gerekçelen diriyor • Ters çevir çarpma algoritması kullanma	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın tanımlı yoluyla gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin grupta anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin paylaşırma anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Yok	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin grupta anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Referans alınan bütünü yanlış alındığına işaret etme
ÖA3	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Bölmenin grupta anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Resim çizerek gerekçelen dirme • Doğal sayılarla bölme işleminden yararlanma	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • İşlemsel tanım şeklinde gerekçelen dirme	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Bölmenin paylaşırma anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun olmayan gerekçelen dirme • Modelin ifade ettiği işlemi yazamıyor	• Yok	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanın tanımlı yoluyla gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin grupta anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Yeni bütün kavramını kullanma	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin paylaşırma anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin paylaşırma anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin grupta anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Ortak payda alındığını ifade etme	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin grupta anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Referans alınan bütünü yanlış alındığına işaret etme

ÖA5	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Kendi açıklaması şeklinde gerekçelen dirme • Yarım ve bütün kavramları nı kullanma	• Yok • Modelin ifade ettiği işlemi tam olarak yazamıyor	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun olmayan gerekçelen dirme • Modelin ifade ettiği işlemi yazamıyor	• Yok	• Uygun gerekçelendir me • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelendir me	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanı n tanımı yoluyla gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin paylaştırm a anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Bütünlerin aynı olduğunu ifade etme • Ortak payda alındığını ifade etme	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etme
ÖA1	• Uygun olmayan gerekçelen dirme • İşlemden ziyade işlemin sonucunu ifade ediyor	• Uygun olmayan gerekçelen dirme • Modelin ifade ettiği işlemi tam olarak yazamıyor	• Yok	• Uygun olmayan gerekçelen dirme • Modelin ifade ettiği işlemi yazamıyor	• Uygun olmayan gerekçel endirme	• Uygun gerekçelendir me • Bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak gerekçelendir me	• Uygun gerekçelen dirme • Çarpmanı n tanımı yoluyla gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun ama eksik gerekçelen dirme • Çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin paylaştırm a anlamını kullanarak gerekçelen dirme	• Uygun gerekçelen dirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Bölmenin gruplama anlamını kullanarak gerekçelen dirme • Referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret etme	

4.5. Açıklama Bilgisi

4.5.1. Kesirlerle Çarpma İşlemine İlişkin Açıklama Bilgisi

4.5.1.1. Başlangıç Durumu

Öğretmen adaylarının öğretimden önce kesirlerle çarpma işlemine ilişkin verilen durumları açıklama bilgilerinin zayıf ve işlemsel düzeyde olduğu görülmüştür (Tablo 4.86). Öğretmen adaylarından ÖA5 ve ÖA3'ün kesirlerle çarpma işlemine ilişkin verilen durumları açıklama bilgileri diğer öğretmen adaylarına göre daha zayıf bir şekilde öğretim sürecine başladıkları söylenebilir. Öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde kesirlerle çarpma işlemine ilişkin durumlar verilmiştir ve öğretmen adaylarından bu durumları açıklamaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının yaptıkları açıklamalar incelendiğinde uygulama temelli açıklamayı (UTA) daha çok kullandıkları görülmektedir (Tablo 4.86). Bu testte öğretmen adaylarından işlemler verilip çözümlerini açıklamaları istenmiştir ve öğretmen adaylarının yaptıkları bu açıklamalar incelendiğinde verilen işlemler yerine tersini açıkladıkları ve bu açıklamaların eksik olduğu görülmektedir. Bununla beraber iki kesrin çarpma işleminin çözümüne ilişkin yaptıkları açıklamaları bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işleminin çözümüne ilişkin yaptıkları açıklamalara göre daha güçlüdür. KÇB ön-testinde öğretmen adaylarından çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini ve pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını açıklamaları da istenmiştir ancak bunlara ilişkin yaptıkları açıklamaların işlemlerin çözümlerine ilişkin yaptıkları açıklamalara göre daha zayıf olduğu görülmüştür. Burada çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini basit kesirle çarpma ile açıklarken, pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını işlemin sonucunu modelde göstererek açıkladıkları görülmektedir (Tablo 4.86).

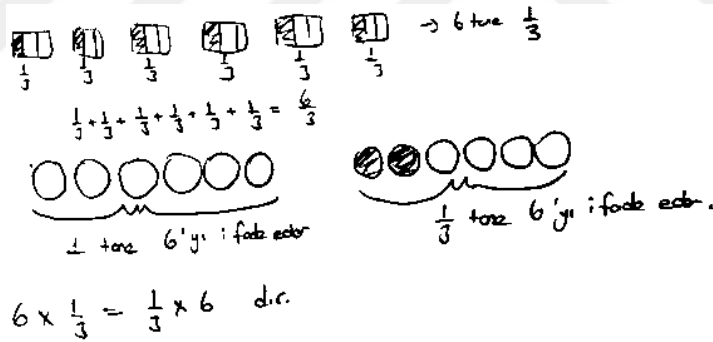
Tablo 4.86.

Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Kesirlerle Çarpmaya İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Açıklamalar

Öğretmen Adayı	6 x 1/3 ve 1/3 x 6 işleminin aynı olup olmadığını	5/7 x 2 işleminin çözümünü	Çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini (3/5 x 2/7)	Pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını (2/5 x 3/4)	“5/6’nın 1/3’ü” ifadesine karşılık gelen işlemin çözümünü
ÖA6	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Sonuçları aynı, sözel ifadeleri ve modelleri farklı • Her iki işlem için model çizme (Eksik) • Her iki işlemi sözel olarak açıklama (Eksik)	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Verilen modeli çizip biraraya getirme • İşlemin sonucunu kesrin ölçme anlamı ile ifade etme “10 tane 1/7”	• Uygun ama eksik açıklama • MTA • Basit kesirle çarpma	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Modelde taralı kısımla işlemin sonucunu ilişkilendirme (Eksik)	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Verilen modeli çizip farklı parçalama ve işlemin sonucunu gösterme

	• 6 x 1/3 işlemini tekrarlı toplama şeklinde yazma				
ÖA2	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Her iki işlem için model çizme • Her iki işlemi sözel olarak açıklama (Eksik)	• Uygun ama eksik açıklama • MTA • $5/7 + 5/7$ ve $5/7 \times 2$ işlemlerinde paydanın işleme katılmayacağına işaret etme	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Tekrarlı toplama anlamını kullanma • Bütünün parçasına işaret etme (Eksik)	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Modelde taralı kısımla işlemin sonucunu ilişkilendirme (Eksik)	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Verilen modeli çizip farklı parçalama ve işlemin sonucunu gösterme
ÖA4	• Uygun ama eksik açıklama • MTA • Sonuçları aynı • Çarpmanın değişme özelliğine göre işlemlerin aynı olduğunu ifade etme (Örnekler vererek gösterme) • 1/3 x 6 işlemini tam olarak ifade edemiyor.	• Uygun ama eksik açıklama • MTA • $5/7 \times 2 = 5/7 + 5/7 = 10/7$ işlemlerinde paydanın işleme katılmayacağına işaret etme	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • “Kağıt” örneği verme • Bütünü çokluk olarak alma • Örnek üzerinden işlemin sonucunu $2/7$ ve $3/5$ ile karşılaştırma • Basit kesirle çarpma	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Modelde taralı kısımla işlemin sonucunu ilişkilendirme • Bütünü çokluk olarak alma	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • “Kağıt” örneği verme • Kağıt üzerinde $5/6$’lık kısmı ve $1/3$’lük kısmı taratırarak işlemin sonucunu gösterme
ÖA3	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Sonuçları aynı ve anlamları farklı • Her iki işlemi sözel olarak açıklama (Eksik) • $1/3 \times 6$ işlemi için model çizme • 6 x 1/3 işlemini tekrarlı toplama şeklinde yazma	• Uygun ama eksik açıklama • MTA • $5/7 \times 2 = 5/7 + 5/7 = 10/7$ işlemlerinde paydanın işleme katılmayacağına işaret etme	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Basit kesirle çarpma • Basit kesirle çarpmaya örnek verme ve bu örnek için model çizme • Çarpmanın operatör anlamı (Bir sayı ile çarpma ve daha büyük bir sayıya bölme)	• Yok	• Yok
ÖA5	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Her iki işlemi sözel olarak açıklama (Eksik) • 1/3 x 6 işlemini tam olarak ifade edemiyor. • Çarpmanın değişme özelliğine göre işlemlerin aynı olduğunu ifade etme • 6 x 1/3 işlemi için model çizme • (Eksik)	• Yok	• Yok	• Yok	• Uygun açıklama • UTA • Verilen modeli çizip farklı parçalama ve işlemin sonucunu gösterme • Modelin bütün basamaklarını çizme
ÖA1	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Her iki işlemi sözel olarak açıklama (Eksik) • Sonuçları aynı, sözel ifadeleri farklı • Çarpma yerine gruplama bölme • $1/3 \times 6$ işlemi için model çizme • (Eksik)	• Uygun ama eksik açıklama • MTA • $5/7 \times 2 = 5/7 + 5/7 = 10/7$ işlemlerinde paydanın işleme katılmayacağına işaret etme	• Uygun ama eksik açıklama • MTA • Basit kesirle çarpma • 1’den küçük sayı ile çarpma • Basit kesirle çarpma örnekler verme	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Modelde taralı kısımla işlemin sonucunu ilişkilendirme (Eksik)	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Verilen modeli çizip farklı parçalama ve işlemin sonucunu gösterme

Öğretmen adayları öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde 8. görevde verilen “Mert $6 \times \frac{1}{3}$ ve $\frac{1}{3} \times 6$ işlemlerinin aynı anlamı ifade ettiğini söylemektedir. Mert’e bu işlemlerin aynı olup olmadığını nasıl açıklarsınız?” sorusuna ilişkin ÖA4 hariç diğer öğretmen adayları UTA yaparken, ÖA4 matematiksel temelli açıklama (MTA) yapmıştır (Tablo 4.86). Öğretmen adayları bu iki işlemin sonuçlarının aynı olduğunu ifade etmişlerdir, bununla beraber bazıları sözel ifadelerinin, bazıları modellerinin ve bazıları anlamlarının farklı olduğunu belirtmişlerdir. Öğretmen adaylarından bazıları çarpmada değişme özelliğini kullanarak bu iki işlemin aynı olduğunu ifade etmişlerdir, bazıları da bu iki işlemi model çizerek göstermişlerdir. ÖA6 verilen bu iki işlemi model çizerek göstermiştir (Şekil 4.87). ÖA6’nın $6 \times \frac{1}{3}$ işlemi için çizdiği kesir çubuğu modeli incelendiğinde diğer basamakları çizmediği için modelin $6 \times \frac{1}{3}$ işlemini mi yoksa $\frac{1}{3} \times 6$ işlemini ifade ettiği açık değildir. Diğer taraftan modelin altına işlemi tekrarlı toplama şeklinde yazmıştır ve “6 tane $\frac{1}{3}$ ” olarak ifade etmiştir. ÖA6’nın $\frac{1}{3} \times 6$ işlemi için çizdiği dairesel alan modeli incelendiğinde “6 bütünün $\frac{1}{3}$ ’ü” anlamını yani çarpmanın operatör anlamını yansıtan bir model olduğu görülmektedir.

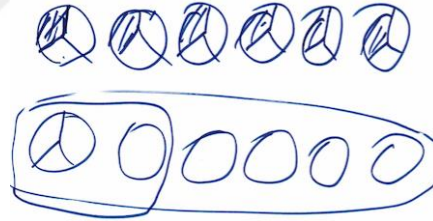


Şekil 4.87. KÇB ön-testinde verilen sekizinci görevde ÖA6’nın yaptığı UTA

Burada ÖA6 bu işlemi önce “ $\frac{1}{3}$ tane 6” olarak ifade etmiştir, sonra ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) bu ifadeden rahatsızlığını belirterek “6’nın $\frac{1}{3}$ ’ü” olarak ifade etmiştir. ÖA6 her iki işlemi model çizerek göstermiştir ve sözel olarak ifade etmiştir ancak bu işlemlerin aynı olup olmadığından bahsetmemiştir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) bu işlemlerin aynı olup olmadığına ilişkin ne söyleyebileceği sorulduğunda sonuçlarının aynı olduğunu, sözel olarak ifadelerinin ve modellerinin farklı olduğunu şu şekilde açıklamıştır: “Aslında aynı şey üzerinde anlatsak daha şey olurmuş. Aslında mesela şu şekilde düşündüğüm zaman bu $\frac{1}{3}$ ’lerden birleştirdiğimiz zaman 2 bütün elde ediyoruz ya (kesir çubuğu modelinde taralı kısımları biraraya getirmeye işaret ediyor) hani mesela burada da 6 tamdan ikisini almışız (daireesel alan modelini gösteriyor). Bu

şekilde düşünürsek aynı olduğunu söyleyebiliriz.” Bu açıklamasında modelleri aynı çizmenin bu iki işlem arasındaki farkı görmek açısından daha uygun olacağına işaret etmiştir ancak model çizerek göstermemiştir. Burada “bütün” yerine “tam” ifadesini kullanarak uygun olmayan bir matematiksel dile başvurmuştur. Sonuç olarak ÖA6 bu iki işlemin aynı olup olmadığını tam olarak açıklayamamıştır. Bu duruma öğretimden önce çarpmanın tekrarlı toplama ve operatör anlamına ilişkin kavramsal anlamasının zayıf olmasının etkisinin olduğu söylenebilir.

ÖA2, ÖA6 gibi bu iki işlemi hem sözel olarak ifade etmiştir hem de model çizerek göstermiştir ancak ÖA6’dan farklı olarak bu iki işlemi aynı model türünü kullanarak göstermiştir. ÖA2 ön-testte bu iki işlemi sözel olarak şöyle ifade etmiştir: “İlk işlem $(6 \times 1/3)$ bir pastanın $1/3$ ’ünün 6 tane olması, ikinci işlem $(1/3 \times 6)$ ise 6 pastanın $1/3$ ’ü şeklinde açıklanabilir.” Burada $6 \times 1/3$ işlemini “bir pastanın $1/3$ ’ünün 6 tane olması” ve $1/3 \times 6$ işlemini “6 pastanın $1/3$ ’ü” olarak ifade etmiştir. Buna göre ÖA2’nin öğretimden önce çarpmanın tekrarlı toplama ve operatör anlamına ilişkin kavramsal anlamaya sahip olduğu söylenebilir. Ön-testte ilişkin yapılan görüşmede (G1) her iki işlemi dairesel alan modeli çizerek doğru bir şekilde göstermesi bunu desteklemektedir (Şekil 4.88).



Şekil 4.88. KÇB ön-testinde verilen sekizinci görevde ÖA2’nin yaptığı UTA

ÖA2 önce $6 \times 1/3$ işlemi için 6 daire çizmiştir ve dairelerin her birini 3 eş parçaya bölüp birer parçasını taramıştır ve “ $1/3$ pastadan 6 tane almak” olarak ifade etmiştir. Sonra $1/3 \times 6$ işlemi için 6 daire çizmiştir ve 2 daireyi yuvarlak içine alarak şöyle ifade etmiştir: “6 pastamız var. Bunu (6 dairenin hepsini gösteriyor) bir bütün olarak kabul ettiğimizde bunun $1/3$ ’ü. Yani iki tanesi (iki daireyi yuvarlak içine alıyor).” Daha sonra ÖA2 verilen iki işlemin sonuç olarak aynı ama düşünme olarak farklı olduğunu belirtmiştir. Sonuç olarak ÖA2 her iki işlemi sözel olarak doğru bir şekilde ifade etmiştir ve eksik de olsa model çizerek doğru bir şekilde göstermiştir. Bu iki durumda da çarpmanın tekrarlı toplama ve operatör anlamını kullanmıştır. Buna göre ÖA2’nin öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin açıklama bilgisinin kavramsal düzeyde ve ÖA6’ninkine göre daha güçlü olduğu söylenebilir.

ÖA3 burada ÖA2 ve ÖA6 gibi her iki işlemi sözel olarak ifade etmiştir ancak sadece $1/3 \times 6$ işlemini model çizerek göstermiştir. ÖA3, $6 \times 1/3$ işlemini çarpmanın tekrarlı toplama anlamını kullanarak, $1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3 = 6/3 = 2$ şeklinde yazarak ifade etmiştir. ÖA3, $1/3 \times 6$ işlemini ÖA6 gibi dairesel alan modelini kullanıp aynı şekilde çizerek göstermiştir. ÖA3, $6 \times 1/3$ işlemini “6 tane $1/3$ ” ve $1/3 \times 6$ işlemini “ $1/3$ tane 6” olarak ifade etmiştir. ÖA3 açıklamasında bu iki işlemin sonuçlarının 2 yani aynı olduğuna işaret etmiştir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) bu işlemlerin aynı olup olmadığına ilişkin ne düşündüğü sorulduğunda sonuç olarak aynı ama anlamlarının farklı olduğunu belirtmiştir. Bu farklılığı $6 \times 1/3$ işleminin “6 tane $1/3$ ” ve $1/3 \times 6$ ’yı “6’nın $1/3$ ’ü” olarak ifade edilmesiyle açıklamıştır. Açıklamasında $1/3 \times 6$ işlemini hem “ $1/3$ tane 6” hem de “6 bilyenin $1/3$ ’ü” olarak ifade etmesini $1/3$ tane 6’nın çocuk için açıklayıcı olmaması ve 6 bilyenin $1/3$ ’ünün mantıklı olması ile açıklamıştır. Buna göre ÖA3’ün öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemini açıklaması bilgisinin ÖA2’ninki gibi kavramsal düzeyde olduğu ancak ÖA6 ve ÖA2’ninki kadar güçlü olmadığı söylenebilir.

ÖA5 çarpmanın değişme özelliğini kullanarak verilen iki işlemin aynı olduğunu şöyle ifade etmiştir: *“Aynıdır zaten çarpma işleminde değişme özelliği. Mesela $6 \times 1/3$ ’ü kolay açıklarım da 6 tane mesela $1/3$ ’lük ama $1/3$ tane 6 onu açıklayamazdım hani. Sırayla gitsek 6 tane desem $1/3$ ’lük bölge varsa (bir kesir çubuğu çiziyor ve bunu üç eş parçaya bölüp 1 parçasını tarıyor), bundan 6 tane $1/3$ (çizdiği kesir çubuğundan 6 tane olacağına işaret ediyor). Bunu anlatırken, $1/3 \times 6$ ’yı.”* Burada $6 \times 1/3$ işlemini “6 tane $1/3$ ” ve $1/3 \times 6$ işlemini “ $1/3$ tane 6” olarak ifade etmiştir. Sonra $1/3 \times 6$ işlemini bu şekilde ifade etmesine ilişkin endişesini *“ $1/3$ taneyi nasıl anlar çocuk hani, $1/3$ tane. Kafası karışır, daha anlaşılır bir şey vardır da ben bilmiyorum işte.”* şeklinde belirtmiştir. ÖA5 burada ÖA2 ve ÖA3 gibi $1/3 \times 6$ işlemini o şekilde ifade etmeden rahatsızlığını belirtmiştir ancak onlar gibi “6’nın $1/3$ ’ü” olarak ifade edememiştir. Buna göre ÖA5’in öğretimden önce bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işleminin operatör anlamına ilişkin kavramsal anlamaya sahip olmadığı söylenebilir. Sonuç olarak ÖA5’in öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemini açıklama bilgisinin ÖA6, ÖA2 ve ÖA3’ünki gibi güçlü olmadığı ve işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir. Çünkü $6 \times 1/3$ işlemini “6 tane $1/3$ ” olarak ifade etmiştir ve kesir çubuğuyla göstermeye çalışmıştır ancak $1/3 \times 6$ işlemini “ $1/3$ tane 6” olarak ifade etmiştir ve açıklayamamıştır. Bununla beraber bu iki işlemin aynı olduğunu belirtmiştir ve bunu çarpmanın değişme özelliğiyle

gerekçelendirmiştir ancak anlamlarının veya modellerinin farklı olduğundan bahsetmemiştir.

ÖA1'in öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemini açıklama bilgisi en zayıf kişi olduğu söylenebilir (Tablo 4.86). Çünkü verilen bu iki işlemi sözel olarak uygun olmayan bir şekilde ifade etmiştir ve model çizerek uygun olmayan bir şekilde göstermiştir. ÖA1 verilen iki işlemi önce ön-testte şu şekilde açıklamıştır: *"6 elma 1/3'lük kaç parçaya ayrılır? 1/3'lük 6 parça birleştirilirse sonuç kaç tam olur? Sonuç aynıdır ancak görüldüğü gibi ifade ettiği şeyler bakış açısına göre değişir."* Burada ÖA1 verilen işlemlerin sonuçlarının aynı, ifadelerinin farklı olduğunu ifade etmiştir ancak ilk ifade çarpma işleminden ziyade bölme işlemi, ikinci ifade de $1/3 \times 6$ işlemi yerine $6 \times 1/3$ işlemi yansıtmaktadır. Bununla beraber işlemin sonucunu "kaç tam" şeklinde ifade ederek uygun olmayan bir matematiksel dil kullanmıştır. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) ilk ifadesinin $6 \times 1/3$ işlemi karşılayıp karşılamadığı sorulmuştur ve ÖA1 bunu şöyle açıklamıştır: *"Bence oldu. Çünkü hani 6 elma 1/3'lük hani bir anda 6 elmayı 1/3'lük şeklinde olmuyor da hani her bir elmayı 1/3'lük 1/3'lük ondan sonra onların ıı elma burada biraz sıkıntı yaratabilir mesela bir altı pasta desek, gerçi aynı şey olmuş oluyor ya evet aynı şey."* Burada ÖA1 bu ifadenin çarpmadan ziyade bölme işlemi yansıttığını farketmemiştir. Bunun üzerine ÖA1'e *"6 elma 1/3'lük kaç parçaya ayrılır?"* ifadesini matematiksel olarak nasıl ifade edeceği sorulmuştur ve ÖA1 önce $6 \times 1/3$, sonra $1/3 \times 6$ işlemi dairesel alan modeli çizerek göstermeye çalışmıştır ancak başarılı olamamıştır (Şekil 4.89). Buna ilişkin geçen diyalog şöyledir (G1, ÖA1, 18/03/2015, 258-274):

G: Peki şunu (yazdığı *"6 elma 1/3'lük kaç parçaya ayrılır"* ifadesini gösteriyorum) işlemi dönecek olsak ne dersin?

ÖA1: Yani şöyle diyeyim, (6 tane daire çiziyor) 6 tane, bunların 1/3'ünü almam gerekiyor. 6'nın 1/3'ü olacak şekilde şöyle bir, iki parçaya ayrılmış oldu. İki tane hani 1/3'lük öyle değil mi?

G: Bu $6 \times 1/3$ mü?

ÖA1: Bir dakika, şunun tamamı, şu, bir bölü ıı, 6 tane elmam var, 1/3'lük kaç parçaya ayrılır? Şimdi şöyle desem bir tanesi, 1/3, hmm, normalde 1/3'lük ıı burada bence seçtiğim şey biraz yanlış gibi geldi bana hani 6 elmanın 1/3'ü, yani öyle. Diğerini açıklayayım isterseniz ben size.

G: Tamam.

ÖA1: 1/3'lük 6 parça birleştirilirse kaç olur diyor şimdi hani 3 tane ben ıı 1/3'lük 6 parça. Şunların her birisinin (çizdiği her bir daireyi gösteriyor) 1/3 olduğunu farzederek 6 tanesini düşündüğümüzde 6 çarpı 1/3'ten şey olmuş oluyor, 2 tane tam olmuş oluyor (üçer daireyi altına çizgi çizerek gösteriyor).

G: O zaman bütünü ne oluyor?

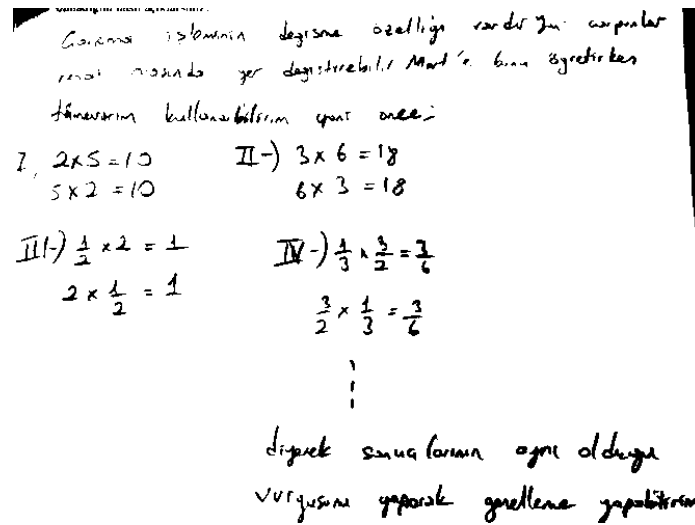
ÖA1: Bütünü 6 parça yani 2 bütün olmuş oluyor yani tamamı (3 daireyi gösteriyor) 1 bütün oluyor, ıı, bunu pek ifade edemedim ama.



Şekil 4.89. KÇB ön-testinde verilen sekizinci görevde ÖA1'in yaptığı UTA

ÖA1 burada $6 \times \frac{1}{3}$ işlemini göstermek için 6 daire çizmiştir, önce bir daireyi 3 eş parçaya bölmüştür ancak sonra 3'er daire şeklinde ayırmıştır. Buna göre ÖA1'in $6 \times \frac{1}{3}$ işlemini $6 \div 3$ işlemi olarak ve bölmenin gruptama anlamı ile ele aldığı söylenebilir. Daha sonra bu açıklamasının yanlış olduğunu belirtmiştir ve $\frac{1}{3} \times 6$ işlemini açıklamak istemiştir. Bu açıklamasında bütünü 3 daire almıştır ve bir dairenin $\frac{1}{3}$ olduğunu, bunun 6 tanesinin 2 bütünü oluşturduğunu belirtmiştir. Burada ise ÖA1'in $\frac{1}{3} \times 6$ yerine $6 \times \frac{1}{3}$ işlemini gösterdiği söylenebilir. Sonuç olarak ÖA1'in öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemini açıklama bilgisinin oldukça zayıf ve işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir. Çünkü bu işlemleri sözel olarak doğru bir şekilde ifade edememiştir ve model üzerinde gösterememiştir. Çarpmanın tekrarlı toplama anlamı yerine bölme işleminin gruptama anlamını ve çarpmanın operatör anlamı yerine de çarpmanın tekrarlı toplama anlamını kullanmıştır.

ÖA4 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak verilen iki işlem için MTA yapmıştır. ÖA4 verilen iki işlemin sonuçlarının aynı olduğunu ÖA5 gibi çarpmanın değişme özelliği ile açıklamıştır ve örnekler vererek göstermiştir (Şekil 4.90).



Şekil 4.90. KÇB ön-testinde verilen sekizinci görevde ÖA4'ün yaptığı MTA

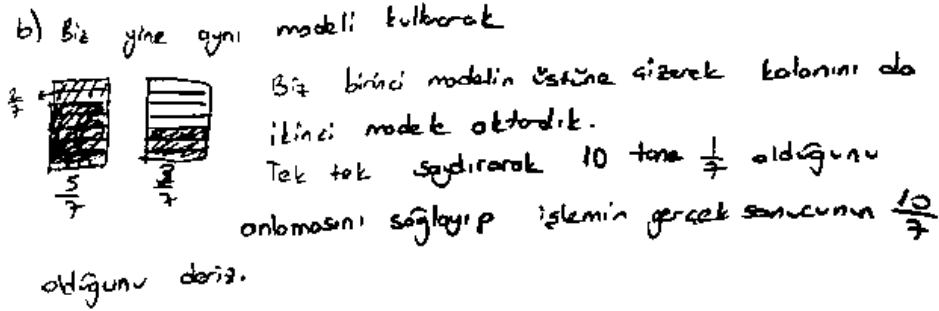
Burada önce iki doğal sayının, sonra bir doğal sayı ile bir kesrin ve en son iki kesrin çarpma işlemine yönelik örnekler vermiştir. ÖA4 açıklamasında verilen iki işlemin

anlamalarının aynı olup olmadığından bahsetmemiştir. Buna göre ÖA4'ün öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemini açıklama bilgisinin işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) bu işlemlerin ne ifade ettiği sorulmuştur ve ÖA4 önce $6 \times \frac{1}{3}$ işlemini “ $\frac{1}{3}$ 'ü 6 kere toplama” olarak ifade etmiştir. Sonra $\frac{1}{3} \times 6$ işlemini şöyle açıklamıştır: “ $\frac{1}{3}$ de kendi arasında toplanır aslında 6 defa da, hani aynı şeyi demek istiyorum da zannedersem şöyle bir şey vardı matematik eğitimi psikolojisi dersinde görmüştük de. Bunlar işlem olarak aynı da birinci çarpanda tekrara vurgu yapılıyor, ikincide de bölümlerine vurgu yapılıyordu sanki öyle bir şeyler hatırlıyorum. $\frac{1}{3}$ keredir aslında, $\frac{1}{3}$ 'lük kısımlarla 6'yı toplamaktır, 6'nın $\frac{1}{3}$ 'lük kısımlarını toplamadır. Şöyle söyleyeyim, 6 bilyemin $\frac{1}{3}$ 'lük kısımlarında iki, iki, ikidir. Bunların toplamıdır aslında $\frac{1}{3}$ çarpı 6. Peki 6 çarpı $\frac{1}{3}$ nedir? Yine aynı şey aslında.” Burada çarpmanın tanımına göre ilk sayının ve ikinci sayının ifade ettiklerinin farklı olduğuna ve bundan az da olsa haberdar olduğuna işaret etmiştir ancak işlemleri tam olarak açıklayamamıştır. Sonuç olarak ÖA4'ün öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemini açıklama bilgisinin ÖA1'inki gibi diğer öğretmen adaylarına göre daha zayıf ve işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir.

KÇB ön-testinde 9. görevde verilen “Metin $\frac{5}{7} \times 2$ işleminin sonucunu bulmak için

“dikdörtgensel alan modeli” (Şekil 4.83) çizmiş ve cevabın $\frac{10}{14}$ olduğunu ifade etmiştir.

Metin'e bu işlemin çözümünü nasıl açıklarsınız?” sorusuna ilişkin ÖA6 ve ÖA5 hariç diğer öğretmen adayları MTA yapmıştır, ÖA5 herhangi bir açıklama yapmamıştır ve ÖA6 da UTA yapmıştır (Tablo 4.86). ÖA6 işlemin sonucunu verilen modeli çizerek onun üzerinden gösterirken ÖA2, ÖA4, ÖA3 ve ÖA1 verilen işlemi tekrarlı toplama şeklinde yazarak işlemin sonucunu ifade ederken paydaların işleme katılmayacağına işaret etmişlerdir. ÖA6 verilen işlemin çözümünü görevde verilen modelle aynı modeli yani dikdörtgensel alan modeli çizerek açıklamıştır (Şekil 4.91).



Şekil 4.91. KÇB ön-testinde 9. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı UTA

ÖA6'nın bu modelinde işlemde ziyade sonucun verildiği tek bir basamak mevcuttur ve çarpmanın hangi anlamını yansıttığı açık değildir. Burada işlemin çözümünden ziyade sonucunu açıkladığı görülmektedir. Modelin yanına yaptığı şu açıklama bunu desteklemektedir: “Tek tek saydırarak 10 tane $\frac{1}{7}$ olduğunu anlamasını sağlayıp işlemin gerçek sonucunun $\frac{10}{7}$ olduğunu deriz.” Bu açıklamasında ÖA6 işlemin sonucu olan $\frac{10}{7}$ 'yi kesrin ölçme anlamını kullanarak ifade etmiştir.

ÖA1 verilen işlemi tekrarlı toplama anlamı ile şöyle açıklamıştır: “Kesirlerle toplama işlemi yapılırken paydalarının toplanmadığını $\frac{5}{7} \times 2$ 'nin 2 tane $\frac{5}{7}$ 'nin toplamı olduğunu gösteririm.” ÖA3, ÖA4 ve ÖA2 de benzer şekilde açıklamışlardır. Burada ÖA1'in bu işlemi $\frac{5}{7} + \frac{5}{7}$ şeklinde ele aldığı söylenebilir. Bunu burada kullandığı “2 tane $\frac{5}{7}$ 'nin toplamı olduğunu gösteririm” ifadesi ve ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) kullandığı “Bu işlem 2 tane $\frac{5}{7}$ olmuş oldu. $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{7}$, ikisini topladığımızda $\frac{10}{7}$ etmiş oluyor. Yani 2 tane $\frac{5}{7}$ 'nin toplamı olduğunu gösteririm.” ifadesi desteklemektedir. ÖA1'in bu açıklaması işlemi açıklamak için yeterli değildir. Bununla beraber operatör anlamı yerine tekrarlı toplama anlamını ifade etmiştir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) $2 \times \frac{5}{7}$ işlemini “ $\frac{5}{7}$ 'lik 2 tane birimin birleşmesi” olarak ve $\frac{5}{7} \times 2$ işlemini “2'nin içinde kaç tane $\frac{5}{7}$ var” şeklinde ifade etmiştir. ÖA1'in KÇB ön-testinde sekizinci görevde olduğu gibi burada da ikinci ifadesi çarpma işlemi yerine bölmenin grupta anlamını yansıtmaktadır.

KÇB ön-testinde 5. görevde verilen “Sevil $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}$ işleminin sonucunu bulmuştur ancak bulduğu sonucun doğru olmadığını çünkü çarpma işleminin sayıyı büyültmesi gerektiğini ifade etmiştir. Bu durumu Sevil'e nasıl açıklarsınız?” sorusuna ilişkin ÖA4, ÖA3 ve ÖA2 UTA yaparken, ÖA6 ve ÖA1 MTA yapmışlardır (Tablo 4.86). ÖA5 ise KÇB ön-testinde dokuzuncu görevde olduğu gibi burada da açıklama yapamamıştır. ÖA6, ÖA4, ÖA3 ve ÖA1 verilen durumu basit kesirle çarpma ile açıklarken, ÖA2 bütünün parçasının alındığına işaret etmiştir (Tablo 4.86).

ÖA4 burada verilen bu durumu kavram yanlışlığı olarak ifade etmiştir ve bu yanlışlığı gidermek için kağıt kullanarak açıklanabileceğini şu şekilde açıklamıştır: *“Öncelikle Sevil’de bir kavram yanlışlığı vardır. Bu kavram yanlışlığını aksi bir örnekle düzeltebiliriz. Örneğin, Sevil’e 35 cm en ve 10 cm boyundaki bir kağıdın 3/5’inin 2/7’si sorulup o kısmını kesmesi istenebilir. Çıkan kağıdı, var olan kağıdın 3/5 ve 2/7’si ile karşılaştırılabilir ve kavram yanlışlığının önüne geçilmiş olur.”* Burada ÖA4 kağıdın kenar uzunluklarını vermiştir ve alan üzerinden hareket ederek bu kağıdın 3/5’inin 2/7’sinin bulunmasını istemiştir ancak bütünü çokluk olarak almıştır ve böylece 1 bütünün 3/5’inin 2/7’si yerine 35’in 3/5’inin 2/7’sini ifade etmiştir. Bu şekilde bulunan kağıdın alanı ile başlangıçtaki kağıdın alanı karşılaştırılarak küçüldüğünün görüleceğine işaret etmiştir ancak işlemin sonucunun neden büyümeyip küçüldüğünü açıklamamıştır. Bununla beraber işlemi “2/7’nin 3/5’i” yerine “3/5’in 2/7’si” olarak ifade etmiştir. Bu açıklaması ile ne demek istediğini ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) şöyle açıklamıştır: *“Öncelikle 3/5’lik kısmını istedim. 3/5’in 2/7’siyle aslında çarpma işleminin problem durumunda neyi ifade ettiğini göreceğim. Şimdi 3/5’lik kısmını kesti. Şöyle bir kısım oldu düşündüğü. Yani bunun şurası kaç santim oldu, 7, 21 santime 10 santim oldu. Şimdi bu sefer de bunun 2/7’sini istemiş. Yine aynı kağıdı 21, yediye bölünür. Yedi tane parçası var, bunun iki tanesini istiyorum. O zaman burası 6’ya 10’dur. Yani aslında ilk baştaki kağıdımın kaçta kaçdır bu? 35, şey, 6 bölü 35.”* Burada ÖA4 yine işlemin sonucunu problem üzerinden açıklamıştır ve işlemin sonucunun neden küçüldüğünü ifade etmemiştir. Bunun üzerine ÖA4’e bu açıklaması ile işlemin sonucunun neden küçüldüğünü nasıl açıkladığı sorulmuştur ve ÖA4 bunu şöyle açıklamıştır: *“Kesirlerle çarptığımda basit kesir zaten, 3/5 ve 2/7. Hani çarptığında küçüleceğini Sevil bilmiyor. O yüzden bir kavram yanlışlığı var. Ben de bu kavram yanlışlığının önüne geçebilmek için kağıdı parçalara ayırdım, ayırtırdım aslında Sevil’e ki bütünden daha küçük çarpma işlemi ile daha küçük elde etim. Bu durumda her çarpma işleminin büyültmediğini kendi gördü.”* Burada ÖA4 işlemdeki kesirli sayılar basit kesir olduğu için sonucun küçüleceğini belirtmiştir ve kağıdı parçalattırarak bu durumu öğrencinin anlayabileceğini ifade etmiştir.

ÖA1, ÖA3 ve ÖA6 da ÖA4’ün açıklamasına benzer şekilde çarpma işlemindeki sayıların basit veya bileşik kesir olmasına göre işlemin sonucunun değişeceğini örnekler vererek açıklamışlardır. ÖA3’ün açıklaması şu şekildedir: *“Öncelikle 4’ü 1/2 ile çarpmasını isterim. $4 \times 1/2 = 2$ olur. Bunu görsel bir şekilde gösterelim (Şekil 4.98). Sevil bunu anladıktan sonra ona “Eğer elindeki sayıyla çarptığın kesir basit kesirse-yani payı*

paydasından küçük kesir-elde ettiğin sonuç daha büyük çıkmaz. Ama bileşik kesir ile çarparsan daha büyük bir sayı elde edersin” diye açıklayarak bu konudaki yanlışlığını gidermeye çalışırım.” Burada ÖA3 önce bir doğal sayı ile bir basit kesrin çarpma işlemine örnek olarak $4 \times 1/2$ işlemini vermiştir ve bu işlemi dairesel alan modeli çizerek göstermiştir (Şekil 4.92). Bu model $4 \times 1/2$ işleminden ziyade $1/2 \times 4$ işlemini yansıtmaktadır. Sonra bir doğal sayı ile bir bileşik kesrin çarpma işlemine örnek olarak $4 \times 3/2$ işlemini vermiştir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) burada bu şekilde model çizerek ve örnek vererek ne anlatmak istediği sorulduğunda şu şekilde açıklamıştır: “Dördü $1/2$ ile çarpmak dördü ikiye bölmenin ya ikisi de aynı şey ya işlemsel olarak. Dördü yarıya bölüp aslında onun azaldığını göstermek istedim. Hani bir algısı var ya çarpma işlemi sayıyı büyültür gibi. O algıyı daha basit bir işlemle yanlış olduğunu göstermek istedim. Mesela dördü $1/2$ ile çarptığımda azalıyor artmıyor da azalıyor. Dört ile ikinin hani azlık veya çokluk bakımından karşılaştırması daha kolay. Bunu anlattıktan sonra da çarptığı kesir basit kesirse eğer bu işlem şey yapabilir sayıyı küçültebilir. Eğer bileşik kesir olsaydı sayıyı büyültürdü.”

Öncelikle 4'ü $\frac{1}{2}$ ile çarpmanın isterim. (Örn.)
 $4 \times \frac{1}{2} = 2$ olur. Bunu görsel bir şekilde göstereyim.
 4'ün yarısı

Şekil 4.92. KÇB ön-testinde 5. görevde ÖA3'ün çizdiği model

Bu görüşmede (G1) ÖA3'e neden basit kesir ile çarpmanın işlemin sonucunu küçülttüğü sorulduğunda “Çünkü çarptığım ifade böldüğüm ifadeden daha küçük. Yani daha büyük bir şeye bölerken daha küçük bir şeyle çarpıyorum bu yüzden küçülüyor sayı.” şeklinde ifade etmiştir. Burada ÖA3 kesri operatör anlamı ile ele almaktadır yani $1/2$ kesrini 2 ile bölme ve 1 ile çarpma şeklinde ifade etmiştir. ÖA6 da benzer şekilde kesrin operatör anlamını kullanarak şöyle ifade etmiştir: “Bir sayıyı basit kesirle çarparsak basit kesirde payda, paydan büyük olduğundan işlemin paydası payından daha çok büyüyeceği için işlemimizden sonra sayı küçülmüş olur.” ÖA1 basit kesirle çarpınca işlemin sonucunun neden küçüldüğünü veya bileşik kesirle çarpınca neden büyüdüğünü ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) şu şekilde açıklamıştır: “Çünkü şu 1'den daha büyük bir parça, aslında onu açıklamak daha mantıklı olurmuş, şurası 1'den daha büyük bir sayıyla çarptığımda sayı daha büyür ama 1'den daha küçük bir parçayla çarptığımda sayı küçülmüş olur.” Sonuç olarak öğretmen adayları her ne kadar model çizerek, problem kurarak veya örnekler vererek açıklama yapsalar da verilen durumu basit veya bileşik

kesirle çarpma, 1'den büyük veya küçük sayı ile çarpma ve kesrin operatör anlamını kullanarak pay ile çarpma ve daha büyük olan paydaya bölme şeklinde açıklamışlardır ama iki kesrin çarpma işleminde parçanın parçasının alınmasına veya işlemin anlamına değinmemişlerdir. Bunun yerine işlemin sonucunun küçüldüğünü göstermişlerdir ve neden küçüldüğünü tam olarak açıklamamışlardır. Buna göre ÖA3, ÖA4, ÖA6 ve ÖA1'in öğretimden önce kesirlerle çarpma işleminde işlemin sonucunun her zaman büyümediğine ilişkin açıklama bilgilerinin işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir.

ÖA2 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak çarpma işleminin işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini şu şekilde çarpmanın tekrarlı toplama anlamıyla açıklamaya çalışmıştır: *“Çarpma işlemini açıklarken 2×3 gibi ifadelerde 2 tane 3 kaç eder gibi cümleler kullanıp açıklamaktayız. Aynı şekilde kesirli ifadelerde de $2 \times 3/5$ dediğimiz zaman 2 tane $3/5$ veya $3/5$ tane 2 şeklinde açıklayabiliriz. 2 sayımız da kesirli sayıysa da $3/5$ tane $2/7$ diyerek adım adım çarpma işleminin aslında sayıyı büyültmediğini anlatabiliriz.”* Bu açıklama verilen işlemin sonucunun neden küçüldüğünü tam olarak karşılamamaktadır. Burada önce tam sayılarla çarpma işlemi, sonra bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemi ve en son iki kesrin çarpma işlemini tekrarlı toplama anlamı ile ifade etmiştir. ÖA2 “ $3/5$ tane 2” ve “ $3/5$ tane $2/7$ ” ifadelerini kullanarak çarpmanın operatör anlamını gözardı etmiştir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) bu açıklamasıyla sonucun neden büyümediğini açıklayıp açıklamadığı sorulmuştur ve ÖA2 bunu şöyle açıklamıştır: *“Sonucun büyümeyip küçülmesinin sebebini buradan adım adım anlatıyoruz, burada da bir bütünün $3/5$ 'inden $2/7$ tane vardır şeklinde veya bir bütünün $2/7$ 'sinden örnek çizecek olursak yine, bu uygun bir örnek değil aslında daireye. Şimdi şöyle bir kablo alırsak, yediye bölersek, iki, üç, dört, beş, altı, yedi (bir sayı doğrusu çizip 7 eş parçaya bölüyor ve iki parçasını koyu çiziyor). Şöyle yedi parçamız var bunun iki parçasından bizim $3/5$ tane şeklinde ama bu çok açıklayıcı olmadı şu an. Yani dediğim gibi 2 tane bir bütünün $3/5$ 'i dediğimiz gibi burada da $2/7$ tane $3/5$.”* Bu açıklaması yine çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini karşılamamaktadır, burada sadece işlemi ifade etmiştir ve model çizerek göstermiştir. Daha sonra tekrar sorulmuştur ve bu sefer şöyle açıklamıştır: *“Yani çarpmanın aslında tam sayılarla görürsek çarpma tabiki bir sayıyı büyültür ama kesirli ifadelerde parçalarını aldığımız için, basit kesirle çarpmayla bir bütünün parçalarını aldığımız için büyütmeyeceğini söylerim yani.”* Burada ÖA2 bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işleminde bütünün parçasının alındığına işaret etmiştir ancak iki kesrin çarpma işlemini açıklamamıştır. Sonuç olarak eksik de olsa ÖA2 model çizerek

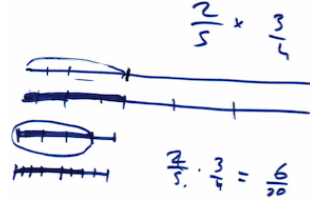
ve problem yoluyla çarpmanın anlamını kullanarak ve bütünün parçasının alındığına işaret ederek kesirlerle çarpmada çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini açıklamıştır. Buna göre ÖA2'nin öğretimden önce çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini açıklama bilgisinin kavramsal düzeyde ancak çok güçlü olmadığı söylenebilir.

KÇB ön-testinde 10. görevde verilen “Cenk ve Eren $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ işlemini çözmeye çalışıyorlar.

Cenk hemen “pay ile pay çarpılır paya yazılır, payda ile payda çarpılır paydaya yazılır” diye cevap veriyor. Eren, Cenk’e neden böyle yapıldığını sorduğunda Cenk bunu açıklayamamıştır. Peki siz bunu Eren’e nasıl açıklarsınız?” sorusuna ilişkin ÖA3 ve ÖA5 açıklama yapamazken diğer öğretmen adayları UTA yapmışlardır (Tablo 4.86). Öğretmen adaylarının bu açıklamaları incelendiğinde ÖA2'nin sayı doğrusu, ÖA6, ÖA4 ve ÖA1'in dikdörtgensel alan modeli çizerek $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ yerine $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$ işlemini gösterdikleri ve işlemin sonucunu model üzerinde göstererek işlemdeki kesirli sayıların paylarının ve paydalarının ayrı ayrı çarpımının bu sonucu verdiğini açıkladıkları görülmektedir. Buna göre her ne kadar modellerini eksik çizse de ÖA6, ÖA4, ÖA1 ve ÖA2'nin öğretimden önce pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını açıklama bilgilerinin kavramsal düzeyde olduğu ancak ÖA3 ve ÖA5'in bu bilgiye sahip olmadıkları söylenebilir.

ÖA2 pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını önce KÇB ön-testinde çarpmanın tekrarlı toplama anlamı ve operatör anlamı ile şu şekilde açıklamaya çalışmıştır ancak başarılı olamamıştır: “Elimizde 2 var ve “ $2 \times \frac{3}{4}$ ” 2 tane $\frac{3}{4}$ olarak anlatılır veya “ $\frac{3}{4} \times 2$ ” 2'nin $\frac{3}{4}$ 'ü diye açıklanır. Tam sayılarla anlatıldıktan sonra bunu $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ işleminde de aynı olduğunu açıklarız.” Burada bu algoritmayı açıklamaktan ziyade işlemi sözel olarak ifade etmiştir. Sonra ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) ÖA2 bu algoritmanın işlemin sonucunu nasıl verdiğini şöyle açıklamıştır: “Yani bunu aslında şuradaki ifade çok açıklayamamış ama bunu daha iyi açıklayabilecek olursak, şu başlangıçtaki dediğim gibi 2 çarpı $\frac{3}{4}$ yaptığımızda 2'nin $\frac{3}{4}$ 'ü olarak açıklıyorsak, burada da $\frac{2}{5}$ çarpı $\frac{3}{4}$ yaptığımızda da $\frac{2}{5}$ 'in $\frac{3}{4}$ 'ü olarak açıklarız. Yani burada da yine örnek çizersek (bir sayı doğrusu çiziyor), $\frac{2}{5}$ yani 5'te 2, bir, iki, üç, dört, beş. Yine burada $\frac{2}{5}$ 'in şu kısmın, bunu ayrı bir yere şöyle aynı boyutta yazayım, $\frac{2}{5}$ 'in $\frac{3}{4}$ 'ü. Bunu da dört parçaya bölelim, yani bütünüümüzü bu kabul ediyoruz artık, $\frac{2}{5}$. Bunu da dört parçaya böldükten sonra üç parçasını alıyoruz, bir parçasını almıyoruz ve şu kısım da $\frac{2}{5}$ 'in $\frac{3}{4}$ 'ü olduğundan $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ eşittir $\frac{6}{20}$. Bunun neden pay ile pay, payda ile paydayı çarptığımızı açıklayacak

olursak, bunun tamamını 20'ye böldüğümüzde ilk şeyin, tamamın.” Burada ÖA2 verilen işlem yerine $3/4 \times 2/5$ işlemini sayı doğrusu modeli çizerek göstermiştir (Şekil 4.93).

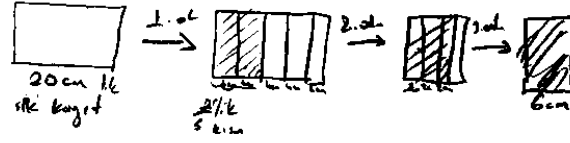


Şekil 4.93. KÇB ön-testine ilişkin yapılan görüşmede (G1) 10. görevde ÖA2'nin çizdiği model

ÖA2 modelinde önce bir sayı doğrusu çizmiştir, bunu 5 eş parçaya böldüğünü varsayarak 2 parçasının $2/5$ 'i gösterdiğine işaret etmiştir. Sonra aynı sayı doğrusunu çizmiştir ve iki parçayı doğrudan 4 parçaya bölmüştür. Daha sonra sadece bu iki parçayı çizmiştir ve 3 parçasını koyu çizerek $2/5$ 'in $3/4$ 'ü olduğunu ifade etmiştir. Burada “bütünü mü bu kabul ediyoruz artık, $2/5$ ” ifadesiyle yeni bütüne işaret ettiği söylenebilir. Daha sonra ÖA2'ye çizdiği modelde $2/5$ 'in $3/4$ 'ünün görülüp görülmediği sorulmuştur ve ÖA2 çizdiği son basamaktaki iki parçayı tekrar çizmiştir, her bir parçasını 4 eş parçaya bölmüştür ve oluşan küçük parçaların altısını koyu çizmiştir. Burada ÖA2 bu koyu çizdiği kısmın bütünün $6/20$ 'si olduğunun görülmeyeceğini şu şekilde ifade etmiştir: “Bunu burada gösterdiğiniz zaman bu bütünün acaba $6/20$ 'si mi diye göremeyeceği için üst tarafa çıktığımızda bunu 20 parçaya ayırıp $2/5$ 'ini gösterip sonra $2/5$ 'in de $3/4$ 'ünü yani dörtte üçünü aldığımızı da gösterebilecek gibi düşündüm.” ÖA2 çizdiği ilk sayı doğrusunu 20 parçaya bölerek işlemin sonucunun gösterilebileceğine işaret etmiştir. Bu şekilde en son basamaktaki koyu çizilen kısmın işlemin sonucunun payını ve ilk sayı doğrusundaki toplam parça sayısının işlemin sonucunun paydasını verdiğini ifade etmiştir. Bunu da $2/5$ ile $3/4$ 'ün payların çarpımının ve paydalarının çarpımının verdiğine işaret etmiştir. Benzer şekilde ÖA6 ve ÖA1 de dikdörtgensel alan modeli çizerek model üzerinden işlemin sonucunu göstermişlerdir ve bunu işlemdeki kesirli sayıların paylarının ve paydalarının ayrı ayrı çarpımlarının verdiğini ifade etmişlerdir.

ÖA4 diğerlerinden farklı olarak bütünü çokluk olarak almıştır ve bir bütün yerine 20 bütün üzerinden hareket ederek problem kurmuştur ve model çizmiştir (Şekil 4.94). Bu algoritmayı ÖA4 bu problem ve model üzerinden hareket ederek şöyle açıklamıştır: “Bu tip bir problemi genel olarak modelleyerek örnek verip ardından genellerim. Öncelikle öğrenciye 20 cm uzunluğundaki bir kağıdın $2/5$ 'ini kesip, kesilenin $3/4$ 'lük kısmının tekrardan kesilmesini isterim. En son kalan kısım ilk kağıdımın kaçta kaçtır diye sorarım.

Alacağım cevap $6/20$ 'sidir. Buradan tümevararak pay ile payların payda ile paydanın çarpılacağı sonucu genellenir.”



Şekil 4.94. KÇB ön-testinde 10. görevde ÖA4'ün çizdiği model

Burada ÖA4 verilen işlem yerine $3/4 \times 2/5 \times 20$ işlemini yansıtan bir problem kurmuştur ve model çizmiştir. ÖA4 model üzerinden işlemin sonucunu ifade etmiştir ve bu sonuca bu algoritma ile ulaşılabileceğini belirtmiştir ancak yeterince açık değildir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) ÖA4'e bir bütün yerine neden 20 gibi bir çokluk aldığı sorulmuştur ve ÖA4 bunu şöyle açıklamıştır: “Evet onu neden öyle yapıyorum? Şimdi bütün kişiden kişiye göre değişir, aslında bu da kavram yanlışlığının temelinde bütün nedir, neye bütün denir? Mesela ben buna bütün derken o buna diyebilir. O yüzden 20 santimetre diyerek, kabul edilir yani herkes tarafından bilinen çokluğa bütün diyorum. Ha buradan gitmek daha kolay benim için.” Daha sonra bu görüşmede (G1) bu probleminin ve modelinin devamında pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasına nasıl ulaştığı sorulduğunda şöyle açıklamıştır: “Kesrin oran olduğunu biliyorum. Parçam 6, bütünüüm yirmiydi, bu 6 bölü 20'dir. Şimdi ben öğrenciye dedim ki paylar çarpılır paydalar da çarpılır ama bu örneği öğrenciye verdikten sonra vermeden önce yanlış olur. Öğrenci de dedi ki nasıl böyle oldu? Dedim ki $2/5$ çarpı $3/4$, bak bakayım aynı sonuç mu? $6/20$ oldu.” ÖA4 burada modelden bulunan sonuç ile işlemde bulunan sonucun aynı olduğunu ifade etmiştir. Buna göre işlemde paylardaki 2 ile 3'ün çarpımının 6, paydalardaki 5 ile 4'ün 20'yi verdiğine işaret etmiştir.

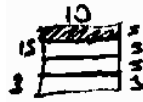
KÇB ön-testinde verilen 12. görevde “Cihan $\frac{5}{6}$ 'nın $\frac{1}{3}$ 'ünü “dikdörtgensel alan modeli”

(Şekil 4.84) çizerek göstermiş ve bu modele bakarak işlemin sonucunun $\frac{2}{6}$ olduğunu ifade

etmiştir. Cihan'a bu işlemin çözümünü nasıl açıklarsınız?” sorusuna ilişkin ÖA3 açıklama yapamazken, diğer öğretmen adayları UTA yapmışlardır (Tablo 4.86). Öğretmen adaylarının açıklamaları incelendiğinde ÖA4 hariç diğerlerinin görevde verilen modeli kullanarak dikdörtgensel alan modeli çizdikleri ancak farklı şekilde parçalayarak işlemin sonucunu gösterdikleri görülmektedir. ÖA4 ise gerçek yaşamdan kağıt örneği vererek ve verilen modelden farklı bir şekilde dikdörtgensel alan modeli çizerek işlemi açıklamıştır. Diğer taraftan ÖA4 hariç diğer öğretmen adayları “ $5/6$ 'nın $1/3$ 'ü” anlamını yansıtan

modeller çizseler de verilen sözel ifadeye karşılık gelen işlemi $1/3 \times 5/6$ yerine $5/6 \times 1/3$ işlemi olarak yazmışlardır. Buna göre ÖA4 hariç diğer öğretmen adaylarının öğretimden önce iki kesrin çarpma işleminin çözümünü açıklama bilgilerinin zayıf ve kavramsal düzeyde, ÖA4'ün açıklama bilgisinin ise işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir. Çünkü ÖA4 kurduğu problemde ve çizdiği modelde bir bütün yerine çokluk üzerinden hareket etmiştir ve modelde parçalayarak işlemin sonucunu göstermektense işlem yaparak model üzerinde işlemin sonucunu göstermiştir.

ÖA4 verilen işlemi kareli bir kağıt kullanarak şöyle açıklamıştır: *“Cihan’a kareli kağıttan 2 tane 18 kare eninde 10 kare boyunda bir kısmını kesmesini isterim. Ardından ilkinin $5/6$ ’sını taramasını, geri kalanını yırtmasını, kalanın $1/3$ ’ünü tekrardan boyamasını isterim. Diğer kağıtla da yaptığı ilk modellemenin aynısını yapıp yanlışını kendisinin bulmasını sağlarım. Benim eğitim anlayışım daha çok problem çözme tabanlı olduğu için bireysel ilgilenme ön plandadır.”* Burada ÖA4'ün kareli kağıttaki kare sayısını vererek bir bütünü çokluk olarak aldığı söylenebilir yani bir bütünün $5/6$ ’sının $1/3$ ’ü yerine 18 bütünün $5/6$ ’sının $1/3$ ’ünü ifade etmiştir. Sonra ÖA4 verilen işlemi bir dikdörtgensel alan modeli çizerek üzerinde göstermiştir ancak işlemin kendinden ziyade işlemin sonucunun gösterildiği bir model olduğu görülmektedir (Şekil 4.95).



Şekil 4.95. KÇB ön-testinde 12. görevde ÖA4'ün çizdiği model

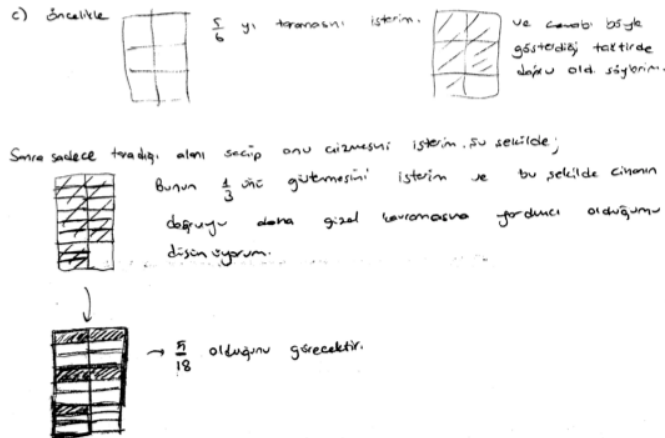
Burada ÖA4 dikdörtgeni yatay olarak 4 eş parçaya bölmüştür, üç satırın her birine 5, kalan bir satıra 3 ve dikdörtgenin diğer kenarına 10 yazmıştır ve bir satırını taramıştır. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) modelde ne yaptığını ÖA4 şu şekilde açıklamıştır: *“18’in $5/6$ ’sı 15’dir. Her birini 18 parçaya ayırırsam şurası 15’lik kısmı. Bu 15’lik kısmın da $1/3$ ’ünü soruyor (ön-testte çizdiği modeli gösteriyor).”* Burada neden 18 parça aldığı sorulmuştur ve ÖA4 iki kesrin paydalarındaki 6 ve 3’ü kastederek “okekleri” şeklinde ifade etmiştir. Bu görüşmede (G1) buradan işlemin sonucuna nasıl ulaşacağı sorulduğunda ÖA4 bunu şöyle açıklamıştır: *“Sonuca buradaki mesafeyi, bilmediğim mesafeyi şöyle söyleyeyim, bunu varsayalım ki 18 santim, o zaman burası 15 santime 3 santim olur uzunluğunda (bir dikdörtgensel alan modeli çiziyor (Şekil 4.96)). Peki ben 15 aldım o zaman burası 5 santim olur. Benim bütünüme neydi 5 santimdi, şey parçam 5 santim bütünüme ne 18 santim. 5 bölü 18’dir. Böyle bir genelleme yapabilirim.”*



Şekil 4.96. KÇB ön-testine ilişkin yapılan görüşmede (G1) 12. görevde ÖA4'ün çizdiği model

Buna göre ön-testte ve ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) çizdiği modellerde herhangi bir farklılık görülmemiştir. Bununla beraber bütün modellerinde 18'in 5/6'sını 18 ile 5/6'yı çarparak göstermiştir yani 6 eş parçaya bölüp 5 parçasını tarayarak göstermemiştir. Sonuç olarak ÖA4'ün açıklaması ve modelleri dikkate alındığında işlemin anlamına ilişkin herhangi bir şey görülmemektedir, bununla beraber modeli de işlem yaparak işlemden ziyade sonucunu göstermeye yöneliktir. Buna göre ÖA4'ün öğretimden önce iki kesrin çarpma işleminin çözümüne ilişkin açıklama bilgisinin işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir.

ÖA5, ÖA6, ÖA2 ve ÖA1 verilen ifadeye karşılık gelen işlemi ters yazsalar da çizdikleri modeller $1/3 \times 5/6$ işlemini yansıtmaktadır. Öğretmen adayları burada verilen model gibi dikdörtgensel alan modelini kullanmışlardır. ÖA5'in modeli incelendiğinde modelin ilk basamağında bir dikdörtgen çizmiştir ve bunu 6 eş parçaya bölmüştür (Şekil 4.97). Modelin ikinci basamağında aynı dikdörtgeni tekrar çizmiştir ve 5 parçasını tarayarak 5/6'yı göstermiştir. Modelin üçüncü basamağında aynı dikdörtgeni tekrar çizmiştir ve sadece taralı parçaların her birini 3 eş parçaya bölüp birer parçasını taramıştır. Modelin dördüncü basamağında aynı dikdörtgeni tekrar çizmiştir, her bir parçasını 3 eş parçaya bölmüştür ve 5 parçanın birer parçasını tarayarak işlemin sonucu olan 5/18'i göstermiştir.



Şekil 4.97. KÇB ön-testinde 12. görevde ÖA5'in çizdiği model

ÖA6, ÖA2 ve ÖA1 modellerinde ÖA5 gibi diğer basamakları çizmemişlerdir, sadece son basamağı çizerek göstermişlerdir.

4.5.1.2. Öğretim Süreci

Öğretmen adayları öğretim sürecine kesirlerle çarpma işleminde çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmeyeceğini açıklama bilgileri zayıf bir şekilde başlamışlardır ve bu durumu öğretimden önce basit kesirle çarpma ile açıklamışlardır. Öğretim sürecinde kesirlerle çarpmaya ilişkin öğretimin yapıldığı ilk derse paralel yapılan görüşmede (G2) çok fazla gelişim olduğu görülmezken ikinci derse paralel yapılan görüşmede (G3) ön-testten bu görüşmeye bir gelişme olduğu görülmüştür (Tablo 4.87). Bu görüşmede verilen bu durum için yaptıkları açıklamalarda basit kesirle çarpmanın yanısıra parçanın parçasının alındığına işaret etmişlerdir. Bununla beraber öğretimden önce bu durumu açıklamak için UTA'yı daha çok kullanırken, öğretim sürecinde MTA'yı daha çok kullanmışlardır. Diğer taraftan öğretimden önce ÖA3 ve ÖA5 pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını açıklama bilgisine sahip değilken, öğretim sürecinde bu bilgilerinin geliştiği görülmüştür. ÖA3 ikinci derse paralel yapılan görüşmede (G3), ÖA5 altıncı derse paralel yapılan görüşmede (G7) verilen bu durumu uygun bir şekilde açıklamışlardır.

Tablo 4.87.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Kesirlerle Çarpmaya İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Açıklamalar

Öğretmen Adayı	D1/G2	D2/G3
	Çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini ($1/2 \times 5$)	Çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini ($1/2 \times 5/6$)
ÖA6	• Uygun ama eksik açıklama • MTA • Basit kesirle çarpma • Çarpmanın operatör anlamı (Bir sayı ile çarpma ve daha büyük bir sayıya bölme)	• Uygun açıklama • MTA • Basit kesirle çarpma • Çarpmanın operatör anlamı (Bir sayı ile çarpma ve daha büyük bir sayıya bölme) • Parçanın parçasına işaret etme
ÖA2	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • “Pide” örneği verme • Çarpmanın operatör anlamı (Bir sayı ile çarpma ve daha büyük bir sayıya bölme)	• Uygun açıklama • MTA • Yeni bütün kavramını kullanma • Parçanın parçasına işaret etme
ÖA4	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Basit kesirle çarpma • Çarpmanın operatör anlamı (Bir sayı ile çarpma ve daha büyük bir sayıya bölme) • “Elma” örneği verme	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • “İp” örneği verme • Bütünü çokluk olarak alma • Basit kesirle çarpma
ÖA3	• Yok	• Uygun açıklama • MTA • 1'den küçük bir sayıyla çarpma • Parçanın parçasına işaret etme
ÖA5	• Uygun ama eksik açıklama • MTA • 1'den küçük bir sayıyla çarpma	• Uygun açıklama • MTA • 1'den küçük bir sayıyla çarpma • Parçanın parçasına işaret etme
ÖA1	• Yok	• Uygun açıklama • UTA • Basit kesirle çarpma • Parçanın parçasına işaret etme

Birinci derse (D1) paralel yapılan görüşmede (G2) verilen $1/2 \times 5$ işlemi için sorulan “İşlemin sonucu 5’ten küçük bir sayı oluyor ve öğrencilerden birisi de çarpma, işlemin sonucunu büyülttü burada neden küçülttü diye soruyor. Bu durumu öğrenciye nasıl açıklarsın?” sorusuna ilişkin ÖA3 ve ÖA1 hariç diğer öğretmen adayları açıklama yapmışlardır (Tablo 4.87). ÖA3 ve ÖA1’e bu durum görüşme sırasında sorulmamıştır. ÖA6 ve ÖA5 bu duruma ilişkin MTA yaparken, ÖA2 ve ÖA4 UTA yapmışlardır. ÖA5 öğretimden önce bu durumu açıklamayamazken burada eksik de olsa açıklamıştır. Buna göre ÖA5’in kesirlerle çarpma işleminde çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini açıklama bilgisinin geliştiği söylenebilir. ÖA6, ÖA2 ve ÖA4 için ön-testten bu görüşmeye (G2) çok fazla gelişim olduğu söylenemez. ÖA6 öğretimden önce çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğine ilişkin MTA yaparken, burada da aynı şekilde MTA yapmıştır, ÖA2 ve ÖA4 öğretimden önce UTA yaparlarken burada da UTA yapmışlardır.

ÖA6 ikinci görüşmede (G2) verilen görevde çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini ön-testte olduğu gibi burada da basit kesirle çarpma ile açıklamıştır. ÖA6 ile görüşmecisi arasında buna ilişkin şöyle bir diyalog geçmiştir (G2, ÖA6, 24/03/2015, 199-213):

ÖA6: Bir sayıyı basit kesirle çarptığımız zaman küçülür. Hani çarpma her zaman büyültmek anlamında değildir. Hani bu öğrencilerin genel bir algısı oluyor, çarpma büyültüyor, bölme küçültüyor gibi düşünüyorlar ama hani bu şekilde çarpmanın da küçülttüğünü görebilirler. Basit kesirle çarpma küçültür.

G: Neden küçültür?

ÖA6: Mesela burada $5 \times 1/2$ dedik ya, biz direk hani payı payla, paydayı paydayla çarpıyoruz. 5

çarpı 1, bölü 2 oluyor ($\frac{5 \times 1}{2}$ işlemi yazıyor). Hani bu 5 tanenin yarılarını alıp yarımalar

oluşturuyoruz gibi.

G: 5 tanenin yarılarını mı alıyoruz?

ÖA6: Yani yok bunun için olmadı da o. Burada bir şey oldu hocam. 5 çarpı $1/2$, 5’i 1 ile çarpıp 2’ye bölmek anlamında da söyleyip ya da 5’i 2’ye bölüp 1 ile çarpmayı ifade ettiği için hani 5 ile 1’i çarptığımız zaman zaten sayı değişmez, ama o sayıyı başka bir şeye böldüğümüz zaman hani doğal sayı olarak böldüğümüz zaman küçülür. Hani bu şekilde ifade edebiliriz.

G: Tamam.

Burada ÖA6 bu durumu basit kesirle çarpma ile açıklamıştır ve çarpmanın operatör anlamını kullanmıştır. Buna göre basit kesirle çarpmanın işlemin sonucunu küçülteceğini doğal sayıyı bu kesrin payı ile çarpıp paydasına bölme şeklinde ifade ederek bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemini iki doğal sayının bölme işlemine dönüştürmüştür. Burada işlemdeki 5 ile sonuç olan $5/2$ ’nin anlamlarına veya her biri için referans alınan bütünlere değinmemiştir. Bunun yanı sıra basit kesirle çarpmanın işlemin sonucunu küçültmesini 1’den küçük olması ile ilişkilendirmemiştir. ÖA6 verilen durumu öğretimden önce de

benzer şekilde açıklamıştır. Buna göre ÖA6'nın bu duruma ilişkin açıklama bilgisinde henüz bir gelişme olduğu söylenemez.

ÖA2 ve ÖA4 de bu durumu ÖA6 gibi basit kesirle çarpmayla ve çarpmanın operatör anlamını kullanarak açıklamışlardır, bunlara ilaveten gerçek yaşamdan örnek vermişlerdir. ÖA4 bu durumu şu şekilde örneklendirmiştir: *“5'in yarısını soruyor, 5'ten daha küçüktür. Bütününden daha küçüktür yarısı. 5 kalemin yarısı, kalem olmaz da 5 kg elmanın yarısı. Daha da küçük.”* ÖA2 ise bu durumu şu şekilde örneklendirmiştir: *“Şimdi 5 pidemiz var, 5 pidenin 1/2'sini yani yarısını alalım diyor. 5 pidenin 1/2'sini alırsak yani yarısını alırsak 5 pideyi hatta çizeyim (5 ekmek çiziyor). Yarısını ortadan ikiye kestiğimizde şu parçaların iki buçuk pideye denk olduğunu görürüz (çizdiği ekmeklerin tamamını beraber iki eş parçaya bölüyor).”*

ÖA5 öğretimden önce çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini açıklayamıyorken burada şu şekilde açıklamıştır: *“Bir tam sayıyı kesirle çarpmak ya da 1/2 ile çarpmak her zaman büyültmez. Büyültmediğini görmeleri lazım artık. Bir tam sayıyı 0 ile 1 arasındaki bir sayı ile çarparsak sayı küçülür. Buraya varıyoruz ama sonuçta çocuk görür zaten $5 \times 1/2$, sonucuna baktığında yarısı, aaa yarısıymış her zaman büyültmüyormuş yorumunu yapmaz mı bu modeli gördüğünde ($1/2 \times 5$ işlemi için çizdiği modeli gösteriyor). Burada model önemli, ben bile anlamlandırıyorum.”* Burada ÖA5 bu durumu çarpılan sayının 1'den küçük olması ile açıklamıştır ancak yeni bütünle veya çarpmanın anlamıyla ilişkilendirmemiştir. Buna göre ÖA5'in çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini açıklama bilgisinin ön-testten ikinci görüşmeye geliştiği ancak işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir.

İkinci derse paralel yapılan görüşmede (G3) verilen $1/2 \times 5/6$ işlemi için sorulan “İşlemin sonucu hem $1/2$ 'den hem de $5/6$ 'dan küçük bir sayı oluyor ve öğrencilerden birisi de çarpma, işlemin sonucunu büyülttü burada neden küçülttü diye soruyor. Bu durumu öğrenciye nasıl açıklarsın?” sorusuna ilişkin öğretmen adaylarının hepsi açıklama yapmışlardır. ÖA4 ve ÖA1 bu duruma ilişkin UTA yaparken diğer öğretmen adayları MTA yapmışlardır (Tablo 4.87). ÖA1 bu görüşmede (G3) verilen görevde çarpma işleminin sonucu her zaman büyültmediğini önce basit kesirle ve doğal sayılarla çarpma işlemi ile açıklamıştır ancak sonra verilen işlem için çizdiği model üzerinden parçanın parçasının alındığına işaret etmiştir. Buna ilişkin geçen diyalog aşağıdaki gibidir (G3, ÖA1, 01/04/2015, 220-249):

ÖA1: Çarpma sadece tam sayıları, tam sayılarla çarptığımızda hani hatta pozitif olanlar hani o kurallarda geçerliği yoksa çarpma her zaman büyültür ya da küçültür diye bir mantık yok hani. Basit kesirle çarparsak o küçülür.

G: Basit kesirle çarpınca neden küçülüyor?

ÖA1: Çünkü biz onu nasıl desem, $1/2$ 'lik kısmını aldığımızda ikiye bölmüş gibi oluyoruz yani.

G: $1/2$ değil de $2/3$ olsaydı?

ÖA1: O da yine olmuş olur, $2/3$ 'lük kısmını almış olurdum yani uu , nasıl desem, hani burası basit kesir olduğu sürece, bu bunun değerini küçültür, büyültmez yani. Çünkü onun nasıl desem, belli bir kısmını almış oluyorum, bir bütünün, $2/3$ 'lük kısmını almış oluyoruz o zaman da.

G: Biraz daha açar mısın? Hani dedin ya bir bütünün $2/3$ 'ünü alıyoruz, o bütün ne mesela?

ÖA1: Şimdi biz bir bütün aldığımızda mesela şunu ele alalım ($1/2 \times 5/6$ işlemi çizdiği dikdörtgensel alan modelindeki dikdörtgene işaret ediyor). Bu bir tümdü, onun $1/2$ 'sini aldık, onun üzerinden $5/6$ 'sına gittik. Mesela 2×1 olsaydı, bir bütünden 2 tane almış oluyorduk ama elimizde şimdi 1 çarpı $5/6$ var, 1'in üzerinden gidiyoruz ya da $1/2$ dersek $1/2$ 'lik üzerinden gidiyoruz.

G: Yani orada ne demek istediğini biraz daha açar mısın?

ÖA1: Yani bizim elimizde aldığımız parça, grup yani eğer tam bir şeyse o zaman sayısını artırır, bir bütünden büyükse. Ondan sonra eğer bir bütünün bir kısmıysa yani herhangi bir kesirle gösterilmiş şekliyse basit kesirle o zaman küçültür.

G: Biraz daha açar mısın?

ÖA1: Şimdi ben bir bütünle uğraşıyorum, bir bütünle değil de yarısıyla uğraşmış oluyorum bu durumda.

G: İşte ne oluyor o zaman?

ÖA1: Bütünü iki parçaya bölmüş oluyorum. Onun da birlik kısmını almış oluyorum o yüzden küçülüyor.

G: Sonra $5/6$ ile çarpınca?

ÖA1: Altı parçaya bölüp beşini aldığım için küçülüyor hani bir, uu , zaten bir üzerinden gitmiştim, ikide birini almıştım, onu da tekrar altıya bölüp altıda beşini alıyorum, bu yüzden gitgide küçülttü sayıyı. Önce $1/2$ ile küçülttü, sonra $1/6$ ile.

Burada ÖA1 önce bir bütünün $1/2$ 'sinin alındığını, 2 eş parçaya bölüp bir parçası alınarak küçüldüğünü, sonra bu bir parçanın $5/6$ 'sının alındığını yani altı parçaya bölüp beşi alındığı için daha da küçüldüğünü ifade etmiştir. Böylece ÖA1 bir bütünün parçasının parçasının alındığına, bu yüzden sonucun küçüldüğüne işaret etmiştir.

ÖA4 gerçek yaşamdan ip örneği vererek şöyle açıklamıştır: “Çarpma her zaman büyültmez. Eline bir ip veririz, derim ki ipin $5/6$ 'sını kes, 30 santimlik ya da 60 santimlik bir ip. Bunun $5/6$ 'sını bul derdim, bu $5/6$ 'nın yarısıdır ya da $5/6$ 'nın $1/2$ 'sidir derim, kaç santim bulunur? Orada küçüldüğünü görür, aynı modelde olduğu gibi.” Burada “30 santim veya 60 santimlik bir ip” diyerek ÖA4'ün bir bütünü çokluk olarak aldığı söylenebilir yani bu açıklaması 1 bütünün $5/6$ 'sının $1/2$ 'si yerine 30 veya 60 bütünün $1/2$ 'sinin $5/6$ 'sını yansıtmaktadır. Bununla beraber işlemin sonucunun neden küçüldüğünü tam olarak açıklamamaktadır. Bu durum ÖA4'e sorulduğunda “basit kesirle çarptığı için küçülüyor” şeklinde ifade etmiştir. Bunun üzerine basit kesirle çarpınca neden küçüldüğü sorulmuştur ve ÖA4 bunu şu şekilde açıklamıştır: “Çünkü pay ile payı çarpıyoruz ya payda ile de paydayı. Haliyle payda daha büyük basit kesirde, payda daha çok böyle parçalara ayrıldığı için küçülür, daha çok parçalara ayrıldığı için.” Burada ÖA4 daha önceki açıklamalarında olduğu gibi yine örnek vererek ve basit kesirle çarpma ile açıklamıştır ancak işlemin anlamından veya parçanın parçasının alınmasından

bahsetmemiştir. Buna göre ÖA4'ün ön-testten üçüncü görüşmeye çarpmanın her zaman büyültmediğini açıklama bilgisinin halen işlemsel düzeyde olduğu ve çok fazla gelişmediği söylenebilir.

ÖA6, ÖA2, ÖA3 ve ÖA5 bu görüşmede (G3) çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini ÖA1 gibi parçanın parçasının alındığına işaret ederek açıklamışlardır. ÖA6 ile bu görüşmede geçen diyalog aşağıdaki gibidir (G3, ÖA6, 31/03/2015, 188-201):

G: Tamam. Burada şöyle bir durum var. Sonuç olan $5/12$ hem $5/6$ 'den hem de $1/2$ 'den daha küçük bir sayı. Öğrencilerden birisi de çarpma büyülttü burada neden küçülttü derse nasıl açıklarsın?

ÖA6: $1/2$ ile çarptığımız için basit kesirle çarptığımız için büyültmez.

G: Basit kesirle çarpınca neden büyültmez?

ÖA6: Düşündüğümüz zaman hani kesrin paydası bir bütünün ya da hani bir parçanın ayrıldığı kısım payı da ondan seçtiğimiz kısımdı ya şimdi baktığımız zaman payda daha çok parçaya ayrılmış, payda daha da büyümüş. Zaten hani 5 parçasını almıştık, yine bir parçasını almış olduk yani yine o 5'lik kısmı yine aynı kalmış oldu, 5 parçasını almış olduk.

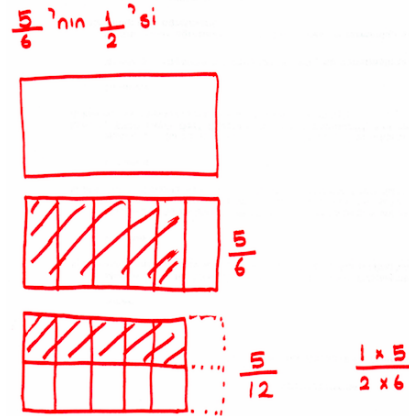
G: Başka nasıl açıklarsın?

ÖA6: Mesela şey olabilir, hani bir nesnenin önce bir katını hani iki katını, iki tane, üç tane hani o çoğaltır çoğaltır çoğaltır. Ama hani bir bütünün yarısını almak anlamına geliyor ya $1/2$, önce o bütünün yarısını alırız. Hani daha sonra onun da yarısını alırız, hani gitgide küçüldüğünü görürüz. Bir tarafta arttığını bir tarafta küçüldüğünü görürüz.

Burada ÖA6 önce daha önceki açıklamalarına benzer şekilde basit kesirle çarpmanın küçülteceğini belirtmiştir ve bunu da çarpmanın operatör anlamını kullanarak açıklamıştır. Sonra bütünün parçası ve parçanın parçasını almaya işaret etmiştir. ÖA5 de benzer şekilde şöyle ifade etmiştir: “Bir bütünün $5/6$ 'sını, $4/8$ 'ini alıyoruz mesela, küçültmüş oluyoruz. Yine onun içinden de $1/2$ ya da $1/3$, yine bir kesir aldığımızda kesirli sayı ile çarpmak oluyor. Böyle olunca gitgide küçültmüş oluyoruz diye açıklayabilirim.” ÖA3 bu durumu ÖA6 ve ÖA5'in açıklamasına ilaveten işlemdeki kesirli sayıların 1'den küçük olduğunu da belirterek şöyle açıklamıştır: “Bir kere çarptığım iki kesir de 1'den küçük kesir, zaten 1'den küçük olduğunda artırmıyordu azaltıyordu. Bunu nasıl açıklayayım? Bir bütünümün üzerinden hareket ediyorum aslında yani bir tane bütünüm var, bunu ben parçalara ayırıyorum. Daha sonra alıyorum ve tekrar ayırıyorum filan böyle bir ayırma işlemi olduğu için aslında küçülüyor yani büyüme söz konusu değil.” ÖA2 ise “yeni bütün” kavramını kullanarak verilen işlemde parçanın parçasının alındığını şöyle ifade etmiştir: “ $1/2$ ile çarpınca da o yeni bütünümüzün yani bir bütünün altında beşinin, o beşlik kısmın yarısını aldığımızı, yani iki parçadan birisini aldığımızı söyleriz.” Sonuç olarak ÖA6, ÖA2, ÖA3 ve ÖA1 çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini öğretimden önce basit kesirle çarpma ile, ÖA5 de ikinci görüşmede 1'den küçük sayıyla çarpma ile açıklıyorken burada bunlara ilaveten parçanın parçasının alındığına da işaret ederek açıklamışlardır. Buna göre ÖA6, Ö11, ÖA3 ve ÖA1'in ön-testten üçüncü görüşmeye ve

ÖA5'in ikinci görüşmeden üçüncü görüşmeye çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini açıklama bilgilerinin geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

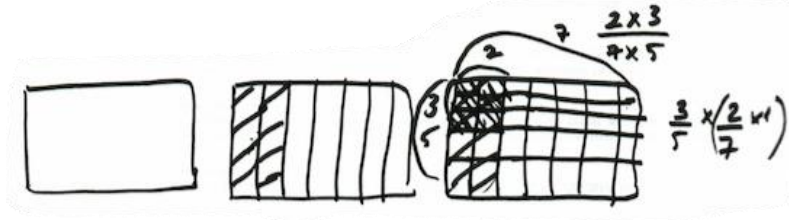
Öğretim sürecinde çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini açıklama bilgilerinin yanısıra özellikle ÖA3 ve ÖA5'in pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını açıklama bilgilerinde de gelişim olduğu görülmüştür. ÖA3 ve ÖA5 öğretimden önce bu algoritmayı açıklayamıyorlarken, öğretim sürecinde uygun bir şekilde açıklamışlardır. ÖA3 ikinci derse paralel yapılan görüşmede (G3) verilen $1/2 \times 5/6$ işlemi için dikdörtgensel alan modeli çizmiştir (Şekil 4.98) ve bu model üzerinden pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını şöyle açıklamıştır: *“İlk bütünüme buydu (modeldeki dikdörtgenin tamamını gösteriyor), ikinci bütünüme de bu (modeldeki dikdörtgenin 5/6'lık kısmını gösteriyor). Burada 5 tane 1/6 var, daha sonra bu 5 tane 1/6'nın her birini ikiye bölüyorum. İkiye ayırdığımda 12 tane, hayır yani 5 tanesini alırsam 10 tane parçam oluyor, ben bu on tane parçadan beşini alıyorum, yarısı olacağı için. Aldığım kısım beş, toplamda ilk bütünüme döndüğümde, ilk bütünüme kaç eşit parçaya ayrıldı, 12 eşit parçaya ayrıldı o da benim paydam oluyor.”* Burada ÖA3 *“ikinci bütünüme”* ifadesiyle yeni bütün kavramına işaret etmiştir ve işlemin sonucu olan $5/12$ 'yi parça-bütün ilişkisi kurarak taralı parçaların bütün parçalara oranı şeklinde ifade etmiştir. Buradan işlemdeki kesirli sayıların paylarının ve paydalarının ayrı ayrı çarpımının bu sonucu verdiğini belirtmiştir.



Şekil 4.98. Görüşme-3'te verilen $1/2 \times 5/6$ işlemi için ÖA3'ün çizdiği dikdörtgensel alan modeli

ÖA5 altıncı derse paralel yapılan görüşmede (G7) verilen $3/5 \times 2/7$ işlemi için dikdörtgensel alan modeli çizerek pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını şöyle açıklamıştır: *“Burada alandan bulmak hani kolay oluyordu ya, alanda mesela şurada (çizdiği modeli gösteriyor (Şekil 4.99)). Burada 2 çarpı 3, sonra buranın tamamı 7, buranın tamamı 5 yine sırayla yazarsak 7 çarpı 5, buradan görecektir ($\frac{2 \times 3}{7 \times 5}$ işlemini*

yazıyor). Hatta burada yer değiştirmeyi de görebilir çünkü ben burada $3/5 \times 2/7$ işlemini modellemiştim, işlemi yazarken yer değiştirmiş oldum.”



Şekil 4.99. Görüşme-7’de verilen $3/5 \times 2/7$ işlemi için ÖA5’in çizdiği dikdörtgensel alan modeli

Burada ÖA5 alan modelini kullanarak çift taralı alanın işlemdeki kesirli sayıların paylarının çarpımını ve dikdörtgenin tamamının alanının paydalarının çarpımını verdiğini göstermiştir. ÖA5 değişme özelliğini “yer değiştirme” olarak ifade edip bu özelliğin bu modelden görülebileceğini ifade etmiştir. Buna göre örneğin modeldeki çift taralı alanı bulurken 2×3 veya 3×2 şeklinde yazılabileceğine işaret etmektedir yani doğal sayılarla çarpmadan yararlanmaktadır. Sonuç olarak ÖA3 ve ÖA5 ön-testte bu algoritmayı açıklayamıyorlarken burada doğru bir şekilde açıklamışlardır. Buna göre ÖA3 ve ÖA5’in pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını açıklama bilgilerinin ön-testten öğretim sürecinin sonuna doğru geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

4.5.1.3. Son Durum

Öğretmen adayları öğretim sürecine kesirlerle işlemlerin çözümlerini, çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini ve pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını açıklama bilgileri zayıf bir şekilde başlamışlardır ve öğretim sürecinde çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini ve pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını açıklama bilgilerinin geliştiği görülmüştür. Bu gelişim ön-testte ve son-testte yaptıkları açıklamalar karşılaştırıldığında da görülmektedir (Tablo 4.89). Öğretmen adaylarının öğretimden sonra uygulanan son-testte, ön-testte olduğu gibi uygulama temelli açıklamayı daha çok kullandıkları görülmektedir (Tablo 4.88). Bununla beraber ön-testten farklı olarak son-testte hem matematiksel hem uygulama temelli açıklama (MUTA) kullananlar da bulunmaktadır. Öğretmen adaylarının öğretimden sonra kesirlerle çarpmaya ilişkin verilen durumları açıklama bilgilerinin güçlü ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

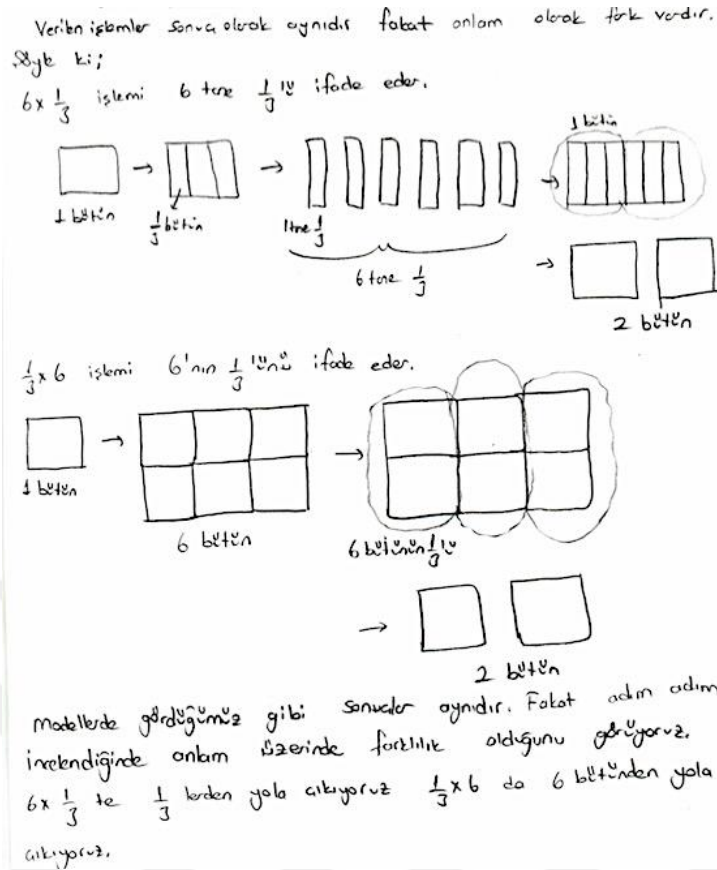
Tablo 4.88.

Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Kesirlerle Çarpmaya İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Açıklamalar

Öğretmen Adayı	6 x 1/3 ve 1/3 x 6 işleminin aynı olup olmadığını	5/7 x 2 işleminin çözümünü	Çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini (3/5 x 2/7)	Pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını (2/5 x 3/4)	“5/6’nın 1/3’ü” ifadesine karşılık gelen işlemin çözümünü
ÖA6	• Uygun açıklama • UTA • Her iki işlem için model çizme • Her iki işlemi sözel olarak açıklama • Sonuçları aynı, sözel ifadeleri ve modelleri farklı • Referans alınan bütünü vurgulama	• Uygun açıklama • UTA • Verilen modeli çizip taralı kısımları biraraya getirme • Referans alınan bütünü vurgulama	• Uygun açıklama • UTA • Model çizme ve işlemin sonucunun küçüldüğünü taralı kısımlarla gösterme • Parçanın parçasına işaret etme • Yeni bütün kavramını kullanma	• Uygun açıklama • MUTA • Tanım ve özelliklerden yararlanma • Dikdörtgensel alan modeli çizme ve taralı kısmın alanı ile gösterme	• Uygun açıklama • UTA • Verilen modeli çizip farklı parçalama ve işlemin sonucunu gösterme • Yeni bütün kavramını kullanma
ÖA2	• Uygun açıklama • UTA • Her iki işlem için model çizme • Her iki işlemi sözel olarak açıklama • Sonuçları aynı, sözel ifadeleri ve modelleri farklı	• Uygun açıklama • MTA • 5/7 + 5/7 = 10/7 olduğuna işaret etme • Referans alınan bütünü vurgulama	• Uygun açıklama • UTA • Model çizme ve işlemin sonucunun küçüldüğünü taralı kısımlarla gösterme • Parçanın parçasına işaret etme	• Uygun açıklama • UTA • Dikdörtgensel alan modeli çizme ve taralı kısmın alanı ile gösterme	• Uygun açıklama • UTA • Verilen modeli çizip farklı parçalama ve işlemin sonucunu gösterme • 1/3 için referans alınan bütünün 5/6’lık kısmı olduğunu vurgulama
ÖA4	• Uygun açıklama • MUTA • Her iki işlemi sözel olarak açıklama • 1/3 x 6 işlemi için model çizme • Sonuçları aynı, sözel ifadeleri ve modelleri farklı	• Uygun açıklama • UTA • Verilen modeli çizip taralı kısımları biraraya getirme • Referans alınan bütünü vurgulama	• Uygun açıklama • UTA • Model çizme ve işlemin sonucunun küçüldüğünü taralı kısımlarla gösterme • Parçanın parçasına işaret etme	• Uygun açıklama • UTA • Dikdörtgensel alan modeli çizme ve taralı kısmın alanı ile gösterme	• Uygun açıklama • UTA • Verilen modeli çizip farklı parçalama ve işlemin sonucunu gösterme
ÖA3	• Uygun açıklama • UTA • Her iki işlem için model çizme • Her iki	• Uygun açıklama • UTA • Verilen modeli çizip taralı kısımları biraraya	• Uygun açıklama • MUTA • Basit kesirle çarpma • 1’den küçük bir sayıyla çarpma • Parçanın parçasına işaret etme	• Uygun açıklama • UTA • Dikdörtgensel alan modeli çizme ve taralı kısmın alanı ile gösterme	• Uygun açıklama • UTA • Verilen modeli çizip farklı parçalama ve işlemin sonucunu

	işlemi sözel olarak açıklama • Sonuçları aynı, sözel ifadeleri ve modelleri farklı	getirme • Referans alınan bütünü vurgulama	• “Elma” örneği verme		gösterme
ÖA5	• Uygun açıklama • MUTA • Her iki işlem için problem kurma • Her iki işlemi sözel olarak açıklama • Sonuçları aynı ve sözel ifadeleri farklı	• Uygun açıklama • UTA • Verilen modeli çizip taralı kısımları biraraya getirme • Referans alınan bütünü vurgulama	• Uygun açıklama • MTA • 1’den küçük bir sayıyla çarpma • Parçanın parçasına işaret etme	• Uygun açıklama • UTA • Dikdörtgensel alan modeli çizme ve taralı kısmın alanı ile gösterme	• Uygun açıklama • UTA • Verilen modeli çizip farklı parçalama ve işlemin sonucunu gösterme
ÖA1	• Uygun açıklama • MTA • Her iki işlemi sözel olarak açıklama • Sonuçları aynı ve sözel ifadeleri farklı	• Uygun açıklama • MTA • Referans alınan bütünü vurgulama	• Uygun açıklama • MTA • Basit kesirle çarpma • Parçanın parçasına işaret etme • Basit kesirle çarpmaya örnekler verme	• Uygun açıklama • MUTA • Tanım ve özelliklerden yararlanma • Dikdörtgensel alan modeli çizme ve taralı kısmın alanı ile gösterme	• Uygun açıklama • UTA • Verilen modeli çizip farklı parçalama ve işlemin sonucunu gösterme • 1/3 için referans alınan bütünün 5/6’lık kısmı olduğunu vurgulama

Öğretimden sonra uygulanan KÇB son-testinde 8. görevde verilen $6 \times \frac{1}{3}$ ve $\frac{1}{3} \times 6$ işlemlerinin aynı olup olmadığına ilişkin ÖA1 MTA, ÖA4 ve ÖA5 MUTA ve ÖA6, ÖA2 ve ÖA3 de UTA yapmışlardır (Tablo 4.88). Öğretmen adayları bu iki işlemi model çizerek, problem kurarak ve sözel olarak açıklamışlardır ve sonuçlarının aynı, sözel ifadelerinin ve modellerinin farklı olduğunu belirtmişlerdir. Öğretmen adaylarının öğretimden önce bu iki işleme ilişkin sözel ifadeleri ve modelleri eksiktir, öğretimden sonra ise eksiksiz bir şekilde sözel olarak ifade etmişlerdir ve modellerini çizmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemini açıklama bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir. ÖA6 bu işlemlerin sonuçlarının aynı ama anlamlarının farklı olduğunu ifade etmiştir ve model çizerek bu işlemleri göstermiştir (Şekil 4.100). Burada önce $6 \times \frac{1}{3}$ işlemi için “6 tane $\frac{1}{3}$ ” anlamı yani çarpmanın tekrarlı toplama anlamını yansıtan bir dikdörtgensel alan modeli çizmiştir. Sonra $\frac{1}{3} \times 6$ işlemi için “6’nın $\frac{1}{3}$ ’ü” anlamı yani çarpmanın operatör anlamını yansıtan bir dikdörtgensel alan modeli çizmiştir.



Şekil 4.100. KÇB son-testinde 8. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı UTA

ÖA6'nın modelleri incelendiğinde her iki modelde de bir bütünü göstererek başlaması işlemin sonucu için referans alınan bütünü vurgulamak istediği şeklinde yorumlanabilir. Bunu işlemleri model çizerek gösterdikten sonra bu iki işlemin farkını şu şekilde ifade ederek desteklemektedir: “Modellerde gördüğümüz gibi sonuçlar aynıdır fakat adım adım incelendiğinde anlam üzerinde farklılık olduğunu görüyoruz. $6 \times \frac{1}{3}$ 'te $\frac{1}{3}$ 'lerden yola çıkıyoruz, $\frac{1}{3} \times 6$ 'da 6 bütünden yola çıkıyoruz.” ÖA6 ön-testte de benzer şekilde sözel olarak ve model çizerek açıklamıştır ama her iki işlem için aynı tür model kullanmamıştır ve yeterli açıklama mevcut değildir. Burada ise modellerin bütün basamaklarını eksiksiz bir şekilde çizmiştir ve detaylı olarak açıklamıştır. Bununla beraber $\frac{1}{3} \times 6$ işlemini ön-testte “ $\frac{1}{3}$ tane 6” olarak ifade ederken burada “6'nın $\frac{1}{3}$ 'ü” olarak ifade etmiştir. Benzer şekilde ÖA2 ve ÖA3 de her iki işlemi sözel olarak ifade etmişlerdir ve her iki işlem için ÖA2 dairesel alan modeli, ÖA3 kesir çubuğu modeli çizmiştir ve sonuçlarının aynı ama modellerinin farklı olduğunu ifade etmişlerdir. Buna göre ÖA6, ÖA2 ve ÖA3'ün bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin açıklama bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

ÖA4 de diğer öğretmen adayları gibi önce verilen işlemlerin sonuçlarının aynı ama ifadelerinin farklı olduğunu belirtmiştir ve $6 \times \frac{1}{3}$ işlemini “6 tane $\frac{1}{3}$ ”, $\frac{1}{3} \times 6$ işlemini

“6’nın $\frac{1}{3}$ ’ü” olarak doğru bir şekilde ifade etmiştir. Sonra $6 \times \frac{1}{3}$ işlemini $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ şeklinde yazarak gösterirken, $\frac{1}{3} \times 6$ işlemini dikdörtgensel alan modeli çizerek göstermiştir (Şekil 4.101). Ön-testte ÖA4 sadece değişme özelliğinden bahsedip sonuçlarının aynı olduğunu örnekler vererek açıklarken burada bu işlemlerin anlamlarını açıklamıştır. Buna göre ÖA4’ün de bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin açıklama bilgisinin ön-testten son-teste geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

İşlemlerin sonuçları aynıdır fakat çarpmanın anlamı
gerekli ifadeleri farklıdır.

2. 6'nın $\frac{1}{3}$ 'ü nedir?

4. 6 tane $\frac{1}{3}$ 'ün toplamı nedir?

I. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$

II.  $\Rightarrow \frac{6}{3} = 2$

Şekil 4.101. KÇB son-testinde 8. Göreve ilişkin ÖA2’nin yaptığı MUTA

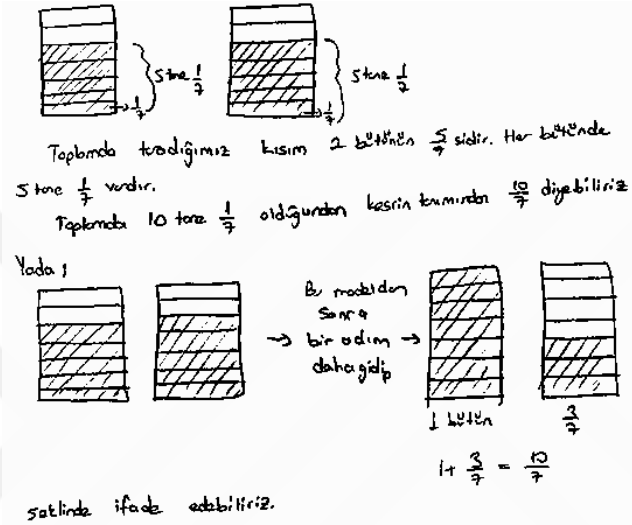
ÖA5 verilen iki işlemi önce anlamlarına işaret ederek sözel olarak şöyle açıklamıştır: “ $6 \times \frac{1}{3}$ ’ün anlamını söylerim. Şu şekilde; 6 tane $\frac{1}{3}$ olduğu. Başlangıçta $\frac{1}{3}$ bütünümüz vardır derim. Bundan 6 tane oluşur derim. $\frac{1}{3} \times 6$ ’nın anlamını söylerim. Şu şekilde; 6 bütünü $\frac{1}{3}$ ’ü olduğunu. Başlangıçta 6 bütün vardır derim. Bunun $\frac{1}{3}$ ’ünü alacağız derim. İkisi için problem kurarım.” Burada önce $6 \times \frac{1}{3}$ işlemini çarpmanın tekrarlı toplama anlamını kullanarak “6 tane $\frac{1}{3}$ ” olarak ifade edip bu anlamı yansıtan şöyle bir problem kurmuştur: “Bir kutu süt $\frac{1}{3}$ litredir. 6 kişi 1’er kutu süt içecekse toplam kaç litre süt içilmiş olur?” Sonra $\frac{1}{3} \times 6$ işlemini çarpmanın operatör anlamını kullanarak “6’nın $\frac{1}{3}$ ’ü” olarak ifade edip bu anlamı yansıtan şöyle bir problem kurmuştur: “6 litre süt vardır. Bir grup insan bunun $\frac{1}{3}$ ’ünü içecektir. Toplam kaç litre süt içilmiş olur?” ÖA5 bu iki işlem arasındaki farkı $6 \times \frac{1}{3}$ işleminde başlangıçta bir bütünü $\frac{1}{3}$ ’ünün olması ve $\frac{1}{3} \times 6$ işleminde başlangıçta 6 bütünüün olması ile açıklamıştır. Son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) ÖA5 bu iki işlemin sonuçlarının aynı ama anlamlarının, neyi ifade ettiklerinin farklı olduğunu belirtmiştir. Ön-testte sadece $6 \times \frac{1}{3}$ işlemini tekrarlı toplama anlamı ile ifade etmiştir ve eksik de olsa model çizerek göstermiştir, $\frac{1}{3} \times 6$ işlemini açıklayamamıştır. Burada ise her iki işlemi anlamlarıyla açıklamıştır ve bu anlamları yansıtan birer problem kurmuştur. Buna göre ÖA5’in bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine açıklama bilgisinin ön-testten son-teste geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

ÖA1 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak $6 \times \frac{1}{3}$ ve $\frac{1}{3} \times 6$ işlemlerini çarpmanın tanımından yararlanarak şöyle açıklamıştır: “ $6 \times \frac{1}{3}$ için 6 grubum var ve her bir grupta $\frac{1}{3}$ nesne var, 6 tanesinde $6 \times \frac{1}{3}$ tanedir. $\frac{1}{3} \times 6$ için her bir grubumda 6 nesne var, grubun $\frac{1}{3}$ ’lük kısmında kaç nesne var olduğunu verir.” Son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) bu iki işlemin farkını şu şekilde ifade etmiştir: “ 6 çarpı $\frac{1}{3}$ ve $\frac{1}{3}$ çarpı 6 işlemlerinin sonuçları aynıdır ama ifadeleri yani anlamları farklıdır. 6 çarpı $\frac{1}{3}$, 6 tane $\frac{1}{3}$ demektir. $\frac{1}{3}$ çarpı 6 da 6 ’nın $\frac{1}{3}$ ’üdür.” Ön-testte bu işlemleri ÖA1 sözel olarak açıklamıştır ancak çarpmanın operatör anlamı yerine tekrarlı toplama ve tekrarlı toplama yerine gruptama bölme anlamını kullanmıştır. Burada ise işlemleri anlamlarını doğru bir şekilde kullanarak açıklamıştır. Bu işlemlerin aynı olup olmadığını çarpmanın tanımını kullanarak açıklamıştır ve anlamlarının farklı ama işlemlerin sonuçlarının aynı olduğunu ifade etmiştir. Buna göre ÖA1’in bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemini açıklama bilgisinin ön-testten son-teste geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

KÇB son-testinde 9. görevde verilen $\frac{5}{7} \times 2$ işleminin çözümüne ilişkin ÖA2 ve ÖA1 MTA yaparken diğer öğretmen adayları UTA yapmışlardır (Tablo 4.88). Öğretmen adayları bu işlemin çözümünü görevde verilen modeli çizip taralı kısımları biraraya getirerek ve referans alınan bütünü vurgulayarak açıklamışlardır. ÖA2 ve ÖA1 model çizmemişlerdir, işlemin sonucu için referans alınan bütünü vurgulayarak işlemin sonucunu verilen model üzerinde taralı kısımları biraraya getirmeye işaret ederek ifade etmişlerdir. ÖA2 ve ÖA1 verilen işlemi açıklamaktansa sonucunu açıklamışlardır. Bunu ÖA1 referans alınan bütüne işaret ederek şöyle açıklamıştır: “Bulduğumuz taralı alanları 1 bütünümüz üzerinden ifade etmemiz gerekir. Bütünümüz $\frac{7}{7}$ ’dir. 10 tane $\frac{1}{7}$ taranmış. Bu yüzden $\frac{10}{7}$ sonucuna ulaşılır.” ÖA2 de benzer şekilde açıklamıştır. Burada ÖA2 ve ÖA1 işlemin sonucu için referans alınan bütünün 1 bütün olduğunu belirtmişlerdir ve bunu $\frac{7}{7}$ olarak ifade etmişlerdir. Sonra verilen model üzerinden hareket ederek taralı parçaları $\frac{10}{7}$ olarak ifade etmişlerdir. Ön-testte ÖA2 ve ÖA1 verilen işlemi tekrarlı toplama anlamı ile ele alıp kesirlerle toplama işleminde paydaların toplanmaması gerektiğini belirterek işlem üzerinden açıklamışlardır. Burada verilen modeli kullanarak bunun üzerinden işlemin sonucu için referans alınan bütünü vurgulayarak açıklamışlardır. Buna göre ÖA2 ve ÖA1’in bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemini açıklama bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

ÖA6 verilen işlemi sözel olarak “2 bütünün $\frac{5}{7}$ ’si” şeklinde ifade etmiştir ve görevde verilen modeli yani dikdörtgensel alan modeli çizerek göstermiştir ancak modelde tüm

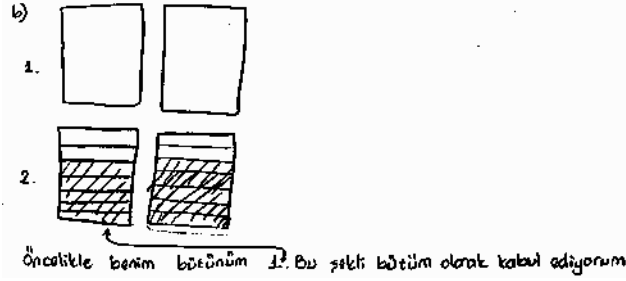
basamakları çizmediği için çarpmanın hangi anlamını yansıttığı açık değildir (Şekil 4.102). Bununla beraber ÖA6'nın işlemde ziyade işlemin sonucunu gösteren bir model çizdiği ve işlemin sonucunu bulmaya ilişkin açıklama yaptığı görülmektedir. İşlemin sonucunu model üzerinden iki farklı şekilde ifade etmiştir; ilkinde birime odaklanarak ve kesrin ölçme anlamından yararlanarak (10 tane $\frac{1}{7}$), ikincisinde bütüne odaklanarak ve tam sayılı kesirden yararlanarak ($1\frac{3}{7}$).



Şekil 4.102. KÇB son-testinde 9. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı UTA

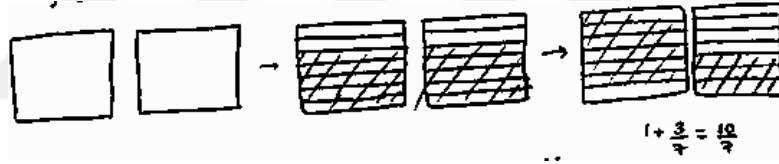
Ön-testte de son-testte de ÖA6 işlemi görevde verilen modeli kullanarak açıklamıştır ancak işlemde ziyade işlemin sonucunu göstermiştir. Ön-testte de son-testte de işlemin sonucunu ifade etmek için kesrin ölçme anlamını kullanmıştır. Son-testte buna ilaveten kesrin tanımından yararlanmıştır. Buna göre ÖA6'nın bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemini açıklama bilgisinin ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir. ÖA3 ve ÖA4 de ÖA6 gibi modelin diğer basamaklarını tam olarak çizmemişlerdir. ÖA3'ün modeli incelendiğinde işlemin sonucunu gösteren modelin son basamağını çizmediği görülmektedir (Şekil 4.103). Son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) ÖA3 bu basamağı sözel olarak şöyle ifade etmiştir: *"İki tane bütünü var, bunların ikisinin de ayrı ayrı 5/7'sini aldım ama tek bir bütünü bu (bir dikdörtgeni gösteriyor). Hani ikisi bu şekilde bütün olsalardı, farklı olurdu. Bu tek bir bütünü, bu da onun ikincisi. Yani bunu aslında en sonda gösteriyorum ya, ikisini bir şeyde toplayıp, taşıyıp ikisinin aslında bir bütün üzerinden konuştuğumu ifade edebilirim. Buradan sonuç işte 10/7 oluyor. Yani yedi benim tek bir bütün üzerinden konuştuğum için bütünümlün paydası, 10 da toplamda işte toplamdaki taradığım kısım, payım."* Burada ÖA3 işlemin sonucu için referans alınan bütünün bir dikdörtgen yani bir bütün olduğunu vurgulamıştır. ÖA4 de verilen işlemi

benzer şekilde açıklamıştır. Ön-testte ÖA4 ve ÖA3 bu işlemi tekrarlı toplama üzerinden açıklarken burada bütünü vurgulayarak eksik de olsa model üzerinden operatör anlamını kullanarak açıklamışlardır. Buna göre ÖA4 ve ÖA3'ün bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemini açıklama bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir.



Şekil 4.103. KÇB son-testinde 9. göreve ilişkin ÖA3'ün yaptığı UTA

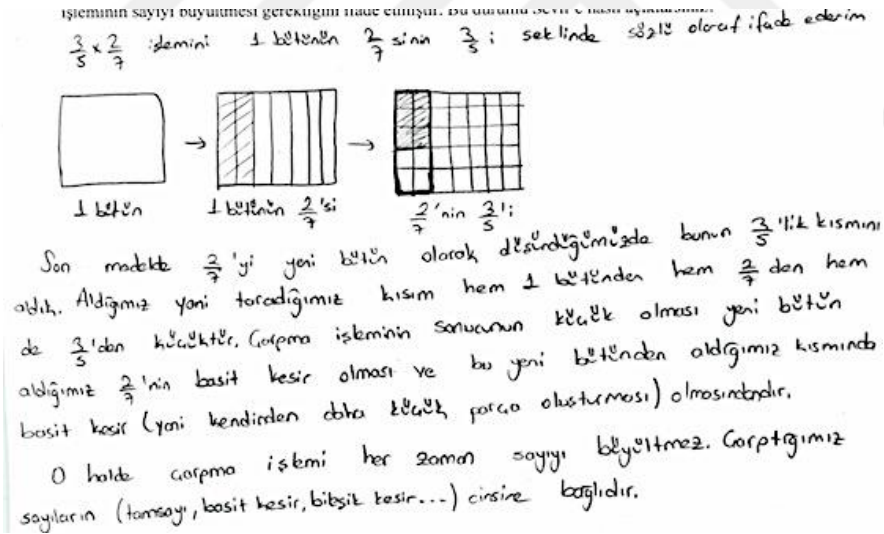
ÖA5 verilen işlemi “Metin’e bunu bütün kavramı üzerinde durarak açıklarım. Aslında kendisi $5/7$ ’yi modellemiştir, doğru şekilde. Ama neyin bütün olduğunu karıştırmıştır. Bütünümlüğün $5/7$ ’nin bütünü olduğunu ona hatırlattıktan sonra tekrar düşünmesini söylerim ve ilk basamağı ayırıp şöyle modellerse daha kolay görebileceğini söylerim.” şeklinde açıklayarak bu işlem için bir dikdörtgensel alan modeli çizmiştir (Şekil 4.104).



Şekil 4.104. KÇB son-testinde 9. görevde ÖA5’in çizdiği model

ÖA5 modelin ilk basamağında iki dikdörtgen çizmiştir, ikinci basamağında aynı dikdörtgenleri çizmiştir ve her birini yatay olarak 7 eş parçaya bölüp beş parçasını taramıştır. Modelin son basamağında aynı dikdörtgenleri çizmiştir, ikinci basamaktaki taralı parçaları biraraya getirerek işlemin sonucunun $10/7$ olduğunu göstermiştir ve bunu $1 + 3/7 = 10/7$ olarak ifade etmiştir. Burada ÖA5 sözel açıklama kısmında işlemin sonucu için referans alınan bütünün başlangıçtaki bütün olduğuna işaret etmiştir. Bunu son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) modele ilişkin yaptığı şu açıklama desteklemektedir: “Başlangıçta iki bütün var, onların $5/7$ ’si alınıyor dedikten sonra hatta son basamakta da birleştirerek $10/7$ olduğunu gösteririm (çizdiği modeli gösteriyor). Çünkü iki bütünümlü var, bir tanesi yediye bölünmüştür.” Ön-testte ÖA5 verilen işlemi açıklayamazken burada uygun bir şekilde açıklamıştır ve diğer öğretmen adaylarından farklı olarak modelin bütün basamaklarını doğru bir şekilde çizmiştir. Buna göre ÖA5’in bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemini açıklama bilgisinin ön-testten son-teste geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

KÇB son-testinde 5. görevde verilen $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}$ işlemi için çarpmanın, işlemin sonucunu her zaman büyültmediğine ilişkin ÖA3 MUTA yaparken, ÖA5 ve ÖA1 MTA ve ÖA6, ÖA2 ve ÖA4 UTA yapmışlardır (Tablo 4.88). Öğretmen adayları bu durumu model çizip model üzerinde işlemin sonucunun küçüldüğünü göstererek, 1'den küçük sayıyla çarpma ve basit kesirle çarpma ile açıklamışlardır. Bununla beraber parçanın parçasının alındığına da işaret etmişlerdir. ÖA6, ÖA2 ve ÖA4 verilen bu işlemin sonucunun neden küçüldüğünü açıklamak için bu işlemi ve “ $\frac{2}{7}$ 'nin $\frac{3}{5}$ 'i” anlamını yansıtan bir dikdörtgensel alan modeli çizmişlerdir. ÖA6'nın modeli incelendiğinde çizdiği bu modelde 1 bütünü, $\frac{2}{7}$ 'yi, $\frac{3}{5}$ 'i ve işlemin sonucunu göstererek işlemin sonucunun küçüldüğünün görsel olarak görülmesini istediği söylenebilir (Şekil 4.105). Buna kanıt olarak şu ifadesi gösterilebilir: “...taradığımız kısım hem 1 bütünden hem $\frac{2}{7}$ 'den hem de $\frac{3}{5}$ 'den küçüktür.” ÖA6 burada modele ilişkin yaptığı şu açıklamasıyla parçanın parçasının alındığına işaret etmiştir: “Çarpma işleminin sonucunun küçük olması yeni bütün aldığımız $\frac{2}{7}$ 'nin basit kesir olması ve bu yeni bütünden aldığımız kısmın da basit kesir (yani kendinden daha küçük parça oluşturmaları) olmasındandır.” ÖA2 ve ÖA4 de benzer şekilde açıklamışlardır.



Şekil 4.105. KÇB son-testinde 5. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı UTA

ÖA6, ÖA2 ve ÖA4'ün ön-testteki açıklamalarına göre son-testteki açıklamalarının geliştiği görülmektedir. Ön-testte sadece örnekler vererek basit kesirle çarpmanın küçülteceği şeklinde açıklarlarken burada hem yeni bütün kavramından bahsetmişlerdir hem de model çizerek göstermişlerdir. Bununla beraber parçanın parçasının alındığına işaret etmişlerdir. Bu gelişim ÖA6 ve ÖA2 için öğretim sürecinde de görülürken, ÖA4'ün çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini açıklama bilgisinde öğretim sürecinde herhangi bir gelişme görülmemiştir. Buna göre ÖA4'ün bu bilgisinde son-testte gelişme olduğu söylenebilir. Sonuç olarak ÖA6, ÖA2 ve ÖA4'ün öğretimden sonra kesirlerle çarpma

işleminde çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini açıklama bilgilerinin geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

ÖA3 çarpma işleminin sonucunun her zaman büyümediğini basit kesirle ve 1'den küçük sayıyla çarpma ile şöyle açıklamıştır: *“Sevil’e basit bir kesri 1’den küçük bir sayıyla çarptığında işlemin sonucunun daha küçük bir ifade çıkacağını anlatırım. 2/7’nin 3/5’i anlamını gösteriyor bu işlem. İlk olarak $3 \times 2/7$ işlemini modellemesini isterim. Burada sonuca bakarak yine küçülme olduğunu görecektir (3’e göre). Daha sonra $3 \times 3/2$ işlemi ile sayının büyüdüğünü gösteririm. Bir sayıyı basit bir kesirle çarpmak sayının değerini küçültür. Çünkü o sayıyı o kesrin ifade ettiği parçalara ayırmak anlamına gelir bu. Örneğin, $1 \times 2/7$, bir bütünün 2/7’sini almak anlamına geldiği için değer küçülecektir.”*

Burada ÖA3’ün parçanın parçasına işaret ettiği de söylenebilir. Buna kanıt olarak şu ifadesi gösterilebilir: *“Bir sayıyı basit bir kesirle çarpmak sayının değerini küçültür. Çünkü o sayıyı o kesrin ifade ettiği parçalara ayırmak anlamına gelir bu.”* Son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) bu ifadeyle ne demek istediğini şu şekilde açıklamıştır: *“Hmm, mesela 3 çarpı 2/7 gerçi bu 3 tane 2/7 anlamına geliyor ama 2/7 çarpı 3 diye 3’ün 2/7’si. Yani 3’ü ben 7 parçaya ayırıp ikisini alıyorum, bu sefer ilk başta bir bütünüm vardı, bundan 3 tane vardı, bu sefer bütünlerim küçülüyor. Parçalara küçülüyor, sayı büyüyor. Ben de sayıya baktığım için, yok, hayır, bölüyorum ama mesela şey, parçalar yine küçülüyor ama mesela aldığım miktar da küçük oluyor, iki tanesini alıyorum ya. O yüzden küçülmüş oluyor.”* ÖA3 burada sözel olarak matematiksel temellere dayalı açıklama yapmıştır. ÖA3 son-testte en son örnek olarak verdiği $1 \times 2/7$ işlemini ters yazdığını son-testte ilişkin yapılan görüşmede (G8) şu şekilde açıklamıştır: *“Ya mesela bir elma var, elmayı yedi parçaya bölüp 2 dilimini alıyorum. Bu şekilde bir elmadan daha az elmam oluyor. Bu şekilde küçüldüğünü görebilir.”* Buna göre ÖA3 bu görüşmede (G8) elma örneği vererek açıklamasını uygulama temellerine de dayandırmıştır. Ön-testte basit kesirle çarpma ile ve kesrin operatör anlamını ele alarak açıklarken burada 1’den küçük sayıyla çarpma ve parçanın parçasını alma ile açıklamıştır. Buna göre ÖA3’ün kesirlerle çarpma işleminde çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini açıklama bilgisinin ön-testten öğretim sürecine ve öğretim sürecinden son-teste geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

ÖA1 çarpma işleminin sonucu her zaman büyültmediğini doğal sayılarla çarpma ve bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemine ilişkin örnekler vererek bunun üzerinden açıklamıştır. Burada farklı doğal sayıları aynı kesir ile çarparak işlemin sonucunun

küçüldüğünü göstermiştir ve bunu basit kesirle çarpmanın küçültmesi ile açıklamıştır (Şekil 4.106). ÖA5 de benzer şekilde çarpılan sayının 1'den büyük veya küçük olması ile sonucun büyüyeceğini veya küçüleceğini ifade etmiştir.

Örnekle daha iyi bilgi (sayma sayıları üzerindeki) çarpma örnekleri verim.

$$\left. \begin{array}{l} 1 \cdot 2 = 2 \\ 2 \cdot 2 = 4 \\ 3 \cdot 2 = 6 \end{array} \right\} \text{ sayı büyüyor.}$$

Sonra basit kesirleri kullanarak kesirlerle çarpma örnekleri veririm.

$$\left. \begin{array}{l} ① \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{sayı } \frac{1}{2} \text{ ile çarpıldığında küçeldi. Yani bir bir sayıyı basit kesirle} \\ \text{çarparak sayının değeri küçeldi. Çarpma yukarıda gördüğümüz} \\ \text{gibi her zaman sayının değerini küçültmez.} \end{array}$$

Şekil 4.106. KÇB son-testinde 5. göreve ilişkin ÖA1'in yaptığı MTA

Son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) ÖA1'e verdiği örneklerle verilen işlemi nasıl ilişkilendirdiği sorulmuştur ve ÖA1 bunu şöyle açıklamıştır: “Bunu da aynı şekilde düşündüğümüzde mesela şurada $3/5$ çarpı 1 yazabilirdim, onu gözardı etmişim herhalde. $3/5$ çarpı 1 yine $3/5$, $3/5$ çarpı $1/2$, ne olur, $3/10$ olur. Gittikçe küçüldü. Hani bu işlemin anlamı $2/7$ 'nin $3/5$ 'i olmuş oluyor. Mesela $2/7$ 'nin $1/5$ 'ini alabilirdik, ondan sonra $2/5$ 'sini alıp açıklayabilirdik. Önce $2/7$ 'yi bulup $1/5$ 'lik kısmını taradığımızda ikisinin kesişen yeri bizim ne olmuş oluyor, $6/35$ olmuş oluyor. Gittikçe ne oldu, o tüm taralı kısımdan bir kısmını aldım, şu kısmı tüm hepsine oranladığımızda daha küçük bir sayı elde etmiş oldum. O yüzden sayı daha da küçüldü.” Burada ÖA1 parçanın parçasının alındığına işaret etmiştir. ÖA5 de benzer şekilde işlemin sonucunun gitgide küçüldüğünü ifade etmiştir. ÖA5 ön-testte bu durumu açıklayamıyorken öğretim sürecinde üçüncü görüşmede (G3) 1'den küçük sayıyla çarpma ile ve parçanın parçasının alındığına işaret ederek açıklamıştır, son-testte de benzer şekilde açıklamıştır. ÖA1 ön-testte bu durumu basit kesirle ve 1'den küçük sayıyla çarpma ile açıklarken, öğretim sürecinde üçüncü görüşmede (G3) parçanın parçasının alındığına işaret etmiştir ve son-testte de benzer şekilde açıklamıştır. Buna göre ÖA5 ve ÖA1'in kesirlerle çarpma işleminde çarpmanın işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini açıklama bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

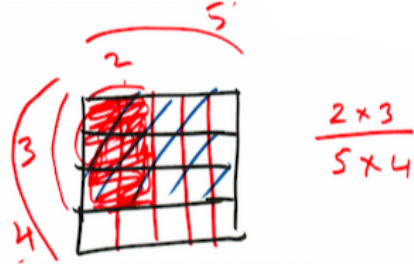
KÇB son-testinde 10. görevde verilen $2/5 \times 3/4$ işlemi için pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasının nasıl bu işlemin sonucunu verdiğine ilişkin ÖA6 ve ÖA1 MUTA, diğer öğretmen adayları UTA yapmışlardır (Tablo 4.88). Öğretmen adaylarının açıklamaları incelendiğinde dikdörtgensel alan modelini çizerek alan ile bu algoritmayı

açıkladıkları görülmektedir. ÖA6 ve ÖA1 bununla beraber tanım ve özelliklerden yararlanarak da bu algoritmayı matematiksel temelli olarak açıklamışlardır. ÖA3 ve ÖA5 hariç diğer öğretmen adayları ön-testte bu algoritmayı eksik de olsa açıklarken burada tam olarak açıklamışlardır. ÖA3 ve ÖA5 ise ön-testte bu algoritmayı açıklayamıyorlarken, öğretim sürecinde karşılaştıkları işlemler için bu algoritmayı eksik de olsa açıklamışlardır ve son-testte bunu tam olarak açıkladıkları görülmektedir. Buna göre öğretmen adaylarının pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını açıklama bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği, ÖA6 ve ÖA1'in bu bilgilerinin hem işlemsel hem kavramsal düzeyde, diğer öğretmen adaylarının kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. ÖA6 önce pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını işlemsel olarak tanım ve özelliklerden yararlanarak doğru bir şekilde açıklamıştır (Şekil 4.107). Burada kesrin tanımını, çarpmanın değişme özelliğini ve çarpmaya göre tersi özelliğini kullanarak bu algoritmayı açıkladığı görülmektedir. ÖA1 de benzer şekilde bu özelliklerden yararlanarak açıklamıştır.

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} \text{ kesrini kesrin tanımından } 2 \text{ tane } \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} \text{ kesrini kesrin tanımından } 3 \text{ tane } \frac{1}{4} \end{array} \right\} \text{ okrol ifade edebiliriz.} \\
 & \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = 2 \times \frac{1}{3} \times 3 \times \frac{1}{4} \\
 & = (2 \times 3) \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Çarpmanın değişme özelliğinden} \\ \text{Çarpmaya göre tersi özelliğinden} \end{array} \right. \\
 & = (2 \times 3) \times \left(\frac{1}{5 \times 4} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \right) \times (3 \times 4) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \right) \times 5 \times 4 = 1 \\ \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \right) \text{ in çarpmaya göre tersi } \frac{1}{5 \times 4} \text{ tir.} \end{array} \right. \\
 & = \frac{2 \times 3}{5 \times 4} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{kesrin tanımından} \\ (2 \times 3 \text{ tane } \frac{1}{5 \times 4} \text{ vardır.}) \end{array} \right. \\
 & \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{5 \times 4} \quad \text{olduğundan pay ve pay, payda ile payda çarpılır deriz.}
 \end{aligned}$$

Şekil 4.107. KÇB son-testinde 10. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı MTA

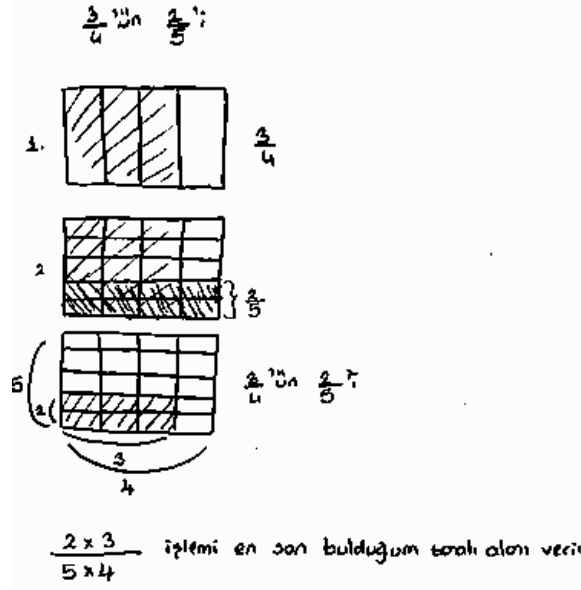
Sonra son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) ÖA6'ya bu algoritmayı başka nasıl açıklayabileceği sorulduğunda dikdörtgensel alan modeli çizerek (Şekil 4.108) doğru bir şekilde şöyle açıklamıştır: “Şey, alan modelinden, bu 3/4'ün 2/5'i, şimdi burası 3/4'ü (bir dikdörtgen çiziyor, yatay olarak 4 eş parçaya bölüyor ve 3 parçasını tarıyor). Bunun da 2/5'ini almam lazım (aynı dikdörtgeni dikey olarak 5 eş parçaya bölüyor ve taralı kısmın 2 sütununu tarıyor), bu şekilde. Şimdi burası 2 birim, tamamı 5 birim, burası 3 birim, şunun tamamı da 4 birim (çift taralı kısmın kenarları ile dikdörtgenin tamamının kenarlarını gösteriyor). Şimdi alan modelinden şu küçük olanın büyüğe göre alanını bulduğumuz için 2 çarpı 3 bölü 5 çarpı 4 ($\frac{2 \times 3}{5 \times 4}$ işlemini yazıyor).”



Şekil 4.108. Görüşme-8’de KÇB son-testinde verilen 10. göreve ilişkin ÖA6’nın yaptığı UTA

ÖA1 benzer şekilde ancak ÖA6’dan farklı olarak son-testte ilişkin yapılan görüşmede (G8) değil son-testte matematiksel temelli açıklamasının yanısıra modelin diğer basamaklarını da çizerek uygulama temelli açıklama yapmıştır. ÖA6 ve ÖA1 ön-testte bu algoritmayı sadece model çizerek ancak eksik bir şekilde açıklamışlardır, burada ise hem matematiksel olarak hem de model çizerek eksiksiz bir şekilde açıklamışlardır. Buna göre ÖA1 ve ÖA6’nın pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını açıklama bilgilerinin ön-testten son-testte geliştiği ve hem işlemsel hem kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

ÖA3, ÖA5, ÖA2 ve ÖA4 bu algoritmayı sadece dikdörtgensel alan modeli çizerek açıklamışlardır. Öncelikle bu işlemi “ $\frac{3}{4}$ ’ün $\frac{2}{5}$ ’i” olarak ifade etmişlerdir, sonra bunu yansıtan birer model çizmişlerdir. ÖA3’ün modeli incelendiğinde ilk basamağında bir dikdörtgen çizip $\frac{3}{4}$ ’ü gösterdiği, ikinci basamağında aynı dikdörtgeni çizip $\frac{3}{4}$ ’lük kısmın değil 1 bütünün $\frac{2}{5}$ ’ini gösterdiği ve üçüncü basamağında $\frac{3}{4}$ ’lük kısmın $\frac{2}{5}$ ’ini gösterdiği görülmektedir (Şekil 4.109). ÖA3 bu son basamakta taralı kısmın işlemin sonucunu verdiğini ifade etmiştir. Bu sonuca taralı kısmın alanını dikdörtgenin tamamının alanına bölerek yani taralı kısmın kenar uzunlukları çarpımının dikdörtgenin kenar uzunlukları çarpımına bölerek ulaşılabileceğini göstermiştir.

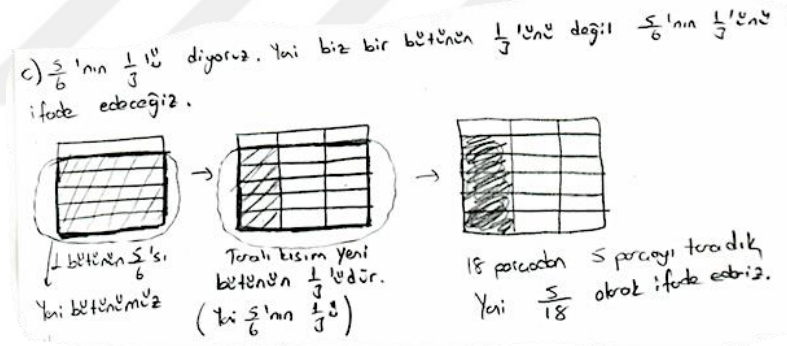


Şekil 4.109. KÇB son-testinde 10. göreve ilişkin ÖA3'ün yaptığı UTA

Bu modeli son-testte nasıl çizdiğini ve algoritmayı nasıl açıkladığını ÖA3 son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) şu şekilde açıklamıştır: “ $3/4$ 'ün $2/5$ 'i anlamına geliyor işlemim. O yüzden ilk olarak $3/4$ 'ü çizdim (çizdiği modelin ilk basamağına işaret ediyor). $3/4$ 'ün daha sonra $2/5$ 'ini aldım (çizdiği modelin ikinci basamağına işaret ediyor). Ortak taradığım kısım da payımı ifade eden kısım olacak. Burada da işte 3 çarpı 2 bölü 4 çarpı 5 demiştik (çizdiği modelin son basamağı olan üçüncü basamakta kenarların çarpımının işlemin sonucunu vereceğine işaret ediyor). İşte bu şekilde açıklıyoruz.” ÖA2, ÖA4 ve ÖA5 de benzer şekilde modeli çizmişlerdir ve alanı kullanarak bu algoritmayı açıklamışlardır. Ön-testte ÖA3 ve ÖA5 bu algoritmayı açıklayamazlarken, ÖA2 ve ÖA4 eksik bir şekilde model çizerek açıklamışlardır. Bununla beraber ÖA4 bir bütün yerine çokluk üzerinden hareket etmiştir. ÖA3 ve ÖA5 öğretim sürecinde karşılaştıkları işlemler için bu algoritmayı eksik de olsa açıklamışlardır ve bu algoritmaya ilişkin açıklama bilgilerinin ön-testten öğretim sürecinin sonuna doğru geliştiği görülmüştür. Son-testte bu öğretmen adayları bu algoritmayı eksiksiz bir şekilde alan modelini kullanarak açıklamışlardır. Buna göre ÖA4, ÖA2, ÖA3 ve ÖA5'in pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını açıklama bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

KÇB son-testinde 12. görevde verilen “ $5/6$ 'nın $1/3$ 'ü” ifadesine karşılık gelen işlemin çözümüne ilişkin bütün öğretmen adayları UTA yapmışlardır (Tablo 4.88). Öğretmen adaylarının son-testte de ön-testte olduğu gibi model çizdikleri görülmektedir ancak ön-testte ÖA3 bu işlemin çözümünü açıklayamıyorken, ÖA4 de model çizmek yerine gerçek nesne olarak kağıt kullanıp onun üzerinden tarattırarak ve kesim yaptırarak açıklıyorken ve

ÖA5 hariç diğer öğretmen adayları bu modelleri diğer basamaklar olmadan sadece son basamağı çiziyorlarken burada ise eksiksiz bir şekilde bütün basamaklarını çizerek, işlemdeki $\frac{1}{3}$ için referans alınan bütünün yeni bütün yani 1 bütünün $\frac{5}{6}$ 'sı olduğunu vurgulayarak açıklamışlardır. Buna göre ÖA5 hariç diğer öğretmen adaylarının iki kesrin çarpma işleminin çözümünü açıklama bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. ÖA5'in bu bilgisinin çok fazla geliştiği söylenemez çünkü ön-testte de son-testte de aynı şekilde eksiksiz olarak açıklamıştır. Öğretmen adaylarının son-testte verilen ifadeye ilişkin yaptıkları açıklamalarındaki modeller incelendiğinde benzer şekilde çizdikleri görülmektedir. ÖA6 diğerlerinininkine ilaveten bir bütünün $\frac{5}{6}$ 'sının yeni bütün olduğunu ve ÖA2 ve ÖA1 de işlemdeki $\frac{1}{3}$ için bu $\frac{5}{6}$ 'lık kısmın bütün olarak referans alınacağını vurgulamışlardır. ÖA6'nın çizdiği model incelendiğinde “ $\frac{5}{6}$ 'nın $\frac{1}{3}$ 'ü” anlamını yansıtan bir model olduğu görülmektedir (Şekil 4.110). Burada ÖA6 gibi diğer öğretmen adayları da işlemin sonucunu model üzerinden parça-bütün ilişkisi kurarak taralı parçaların sayısının bütün parçaların sayısına oranı şeklinde ifade etmişlerdir.



Şekil 4.110. KÇB son-testinde verilen 12. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı UTA

Sonuç olarak öğretmen adaylarının bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işleminin aynı olup olmadığını, bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işleminin çözümünü, çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini ve pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını açıklama bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir. Bu gelişim Tablo 4.89'da verilmiştir. Bu tablo öğretmen adaylarının ön-testte, öğretim sürecinde ve son-testte kesirlerle çarpma işlemine ilişkin verilen durumlar için yaptıkları açıklamaların birarada verilmiş hali olarak sunulmuştur.

Tablo 4.89.

Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Çarpma İşlemine İlişkin Verilen Durumları Açıklama Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo

Öğretmen Adayı	Ön-test/G1		Öğretim Süreci/G2-G7		Son-test/G8		Son-test/G8		Son-test/G8		Son-test/G8	
	6 x 1/3 ve 1/3 x 6 işleminin aynı olup olmadığını	5/7 x 2 işleminin çözümünü	Çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini (3/5 x 2/7)	Pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını (2/5 x 3/4)	“5/6’nın 1/3’ü” ifadesine karşılık gelen işlemin çözümünü	Çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini (1/2 x 5)	Çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini (1/2 x 5/6)	6 x 1/3 ve 1/3 x 6 işleminin aynı olup olmadığını	5/7 x 2 işleminin çözümünü	Çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini (3/5 x 2/7)	Pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını (2/5 x 3/4)	“5/6’nın 1/3’ü” ifadesine karşılık gelen işlemin çözümünü
ÖA6	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Sonuçları aynı, sözel ifadeleri ve modelleri farklı • Her iki işlem için model çizme (Eksik) • Her iki işlemi sözel olarak açıklama (Eksik) • 6 x 1/3 işlemini tekrarlı toplama şeklinde yazma	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Verilen modeli çizip taralı kısımları biraraya getirme • İşlemin sonucunu kesrin ölçme anlamı ile ifade etme “10 tane 1/7”	• Uygun ama eksik açıklama • MTA • Basit kesirle çarpma	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Modelde taralı kısımla işlemin sonucunu ilişkilendirme (Eksik)	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Verilen modeli çizip farklı parçalama ve işlemin sonucunu gösterme	• Uygun ama eksik açıklama • MTA • Basit kesirle çarpma • Çarpmanın operatör anlamı (Bir sayı ile çarpma ve daha büyük bir sayıya bölme) • Parçanın parçasına işaret etme	• Uygun açıklama • MTA • Basit kesirle çarpma • Çarpmanın operatör anlamı (Bir sayı ile çarpma ve daha büyük bir sayıya bölme) • Parçanın parçasına işaret etme	• Uygun açıklama • UTA • Her iki işlem için model çizme • Her iki işlemi sözel olarak açıklama • Sonuçları aynı, sözel ifadeleri ve modelleri farklı • Referans alınan bütünü vurgulamak	• Uygun açıklama • UTA • Verilen modeli çizip taralı kısımları getirme • Referans alınan bütünü vurgulamak	• Uygun açıklama • UTA • Model çizme ve işlemin sonucunun küçüldüğünü taralı kısımlarla gösterme • Parçanın parçasına işaret etme • Yeni bütün kavramını kullanma	• Uygun açıklama • MTA • Tanım ve özelliklerden yararlanma • Dikdörtgen sel alan modeli çizme ve taralı kısmın alanı ile gösterme	• Uygun açıklama • UTA • Verilen modeli çizip farklı parçalama ve işlemin sonucunu gösterme • Yeni bütün kavramını kullanma
ÖA2	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Her iki işlem için model çizme (Eksik) • Her iki işlemi sözel olarak açıklama (Eksik)	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • MTA • 5/7 + 5/7 ve 5/7 x 2 işlemleri	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Tekrarlı toplama anlamını kullanma • Bütünün parçasına	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Modelde taralı kısımla işlemin	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Verilen modeli çizip farklı	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • “Pide” örneği verme • Çarpmanın operatör anlamı (Bir	• Uygun açıklama • MTA • Yeni bütün kavramını kullanma • Parçanın parçasına işaret etme	• Uygun açıklama • UTA • Her iki işlem için model çizme • Her iki işlemi sözel	• Uygun açıklama • UTA • MTA • 5/7 + 10/7 olduğuna işaret etme	• Uygun açıklama • UTA • Model çizme ve işlemin sonucunun küçüldüğünü	• Uygun açıklama • UTA • Dikdörtgen sel alan modeli çizme ve taralı kısmın alanı ile	• Uygun açıklama • UTA • Verilen modeli çizip farklı parçalama ve işlemin sonucunu gösterme

	nde paydanın işleme katılmayacağına işaret etme	işaret etme (Eksik)	sonucun u ilişkilendirme (Eksik)	parçalam a ve işlemin sonucun u gösterme	sayı ile çarpma ve daha büyük bir sayıya bölme)	olarak açıklama	Referans alınan bütünü vurgulama	taralı kısımlar l a gösterme	gösterme	1/3 için referans alınan bütünün 5/6'lık kısm olduğunu vurgulama	
ÖA4	• Uygun ama eksik açıklama • MTA • Sonuçları aynı • Çarpmanın değişime özelliğine göre işlemlerin aynı olduğunu ifade etme (Örnekler vererek gösterme) • 1/3 x 6 işlemini tam olarak ifade edemiyor.	• Uygun ama eksik açıklama • MTA • 5/7 x 2 = 5/7 + 5/7 = 10/7 işlemleri nde paydanın işleme katılmayacağına işaret etme	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • “Kağıt” örneği verme • Bütünü çokluk olarak alma • Örnek üzerinden işlemin sonucunu 2/7 ve 3/5 ile karşılaştırma • Basit kesirle çarpma	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Modelde taralı kısımla işlemin sonucun u ilişkilendirme • Bütünü çokluk olarak alma	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • “Kağıt” örneği verme • Kağıt üzerinde 5/6'lık kısmı ve 1/3'lük kısmı tarattırarak işlemin sonucun u gösterme	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Basit kesirle çarpma • Çarpmanın operatör anlamı (Bir sayı ile çarpma ve daha büyük bir sayıya bölme) • “Elma” örneği verme	• Uygun açıklama • MUTA • Her iki işlemi sözle olarak açıklama • 1/3 x 6 işlemi için model çizme • Sonuçları aynı, sözel ifadeleri ve modelleri farklı	• Uygun açıklama • UTA • Verilen modeli çizip taralı kısımları biraraya getirme • Referans alınan bütünü vurgulama	• Uygun açıklama • UTA • Model çizme ve işlemin sonucun un küçüldüğ ünü taralı kısımlar l a gösterme • Parçanın parçasın a işaret etme	• Uygun açıklama • UTA • Dikdörtgen sel alan modeli çizme ve taralı kısmın alanı ile gösterme	• Uygun açıklama • UTA • Verilen modeli çizip farklı parçalama ve işlemin sonucunu gösterme
ÖA3	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Sonuçları aynı ve anlamları farklı • Her iki işlemi sözel olarak açıklama (Eksik) • 1/3 x 6 işlemi için model çizme • 6 x 1/3 işlemini tekrarlı toplama şeklinde yazma	• Uygun ama eksik açıklama • MTA • 5/7 x 2 = 5/7 + 5/7 = 10/7 işlemleri nde paydanın işleme katılmayacağına işaret etme	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Basit kesirle çarpma • Basit kesirle çarpmaya örnek verme ve bu örnek için model çizme • Çarpmanın operatör anlamı (Bir sayı ile	• Yok	• Yok	• Yok	• Uygun açıklama • MTA • 1'den küçük bir sayıyla çarpma • Parçanın parçasına işaret etme	• Uygun açıklama • UTA • Her iki işlem için model çizme • Her iki işlemi sözel olarak açıklama • Sonuçları aynı, sözel ifadeleri	• Uygun açıklama • MUTA • Basit kesirle çarpma • 1'den küçük bir sayıyla çarpma • Parçanın parçasın a işaret etme • “Elma”	• Uygun açıklama • UTA • Dikdörtgen sel alan modeli çizme ve taralı kısmın alanı ile gösterme	• Uygun açıklama • UTA • Verilen modeli çizip farklı parçalama ve işlemin sonucunu gösterme

			çarpma ve daha büyük bir sayıya bölme)					ve modelleri farklı		örneği verme		
ÖA5	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Her iki işlemi sözel olarak açıklama (Eksik) • 1/3 x 6 işlemi tam olarak ifade edemiyor. • Çarpmanın değişme özelliğine göre işlemlerin aynı olduğunu ifade etme • 6 x 1/3 işlemi için model çizme (Eksik)	• Yok	• Yok	• Yok	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Verilen modeli çizip farklı parçalam a ve işlemin sonucun u gösterme	• Uygun ama eksik açıklama • MTA • 1'den küçük bir sayıyla çarpma	• Uygun açıklama • MTA • 1'den küçük bir sayıyla çarpma • Parçanın parçasına işaret etme	• Uygun açıklama • MUTA • Her iki işlem için problem kurma • Her iki işlemi sözel olarak açıklama • Sonuçları aynı ve sözel ifadeleri farklı	• Uygun açıklama • UTA • Verilen modeli çizip taralı kısımları biraraya getirme • Referans alınan bütünü vurgulama	• Uygun açıklama • MTA • 1'den küçük bir sayıyla çarpma • Parçanın parçasın a işaret etme	• Uygun açıklama • UTA • Dikdörtgen sel alan modeli çizme ve taralı kısmın alanı ile gösterme	• Uygun açıklama • UTA • Verilen modeli çizip farklı parçalama ve işlemin sonucunu gösterme
ÖA1	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Her iki işlemi sözel olarak açıklama (Eksik) • Sonuçları aynı, sözel ifadeleri farklı • Çarpma yerine grupta bölme • 1/3 x 6 işlemi için model çizme (Eksik)	• Uygun ama eksik açıklama • MTA • 5/7 x 2 = 5/7 + 5/7 = 10/7 işlemleri nde paydanın işleme katılmayacağına işaret etme	• Uygun ama eksik açıklama • MTA • Basit kesirle çarpma • 1'den küçük sayı ile çarpma • Basit kesirle çarpmaya örnekler verme	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Modelde taralı kısımla işlemin sonucun u ilişkilendirme (Eksik)	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Verilen modeli çizip farklı parçalam a ve işlemin sonucun u gösterme	• Yok	• Uygun açıklama • UTA • Basit kesirle çarpma • Parçanın parçasına işaret etme	• Uygun açıklama • MTA • Her iki işlemi sözel olarak açıklama • Sonuçları aynı ve sözel ifadeleri farklı	• Uygun açıklama • MTA • Referans alınan bütünü vurgulama	• Uygun açıklama • MTA • Tanım ve özelliklerd en yararlanma • Dikdörtgen sel alan modeli çizme ve taralı kısmın alanı ile gösterme	• Uygun açıklama • UTA • Verilen modeli çizip farklı parçalama ve işlemin sonucunu gösterme • 1/3 için referans alınan bütünün 5/6'lık kısm olduğunu vurgulama	

4.5.2. Kesirlerle Bölme İşlemine İlişkin Açıklama Bilgisi

4.5.2.1. Başlangıç Durumu

Öğretmen adaylarının öğretimden önce kesirlerle bölme işlemine ilişkin verilen durumları açıklama bilgilerinin kesirlerle çarpma işlemine göre daha zayıf ve işlemsel düzeyde olduğu görülmüştür. Öğretmen adaylarından ÖA5 ve ÖA3'ün kesirlerle çarpma işleminde olduğu gibi kesirlerle bölme işlemine ilişkin verilen durumları açıklama bilgileri de diğer öğretmen adaylarına göre daha zayıf bir şekilde öğretim sürecine başladıkları söylenebilir (Tablo 4.90). Öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde kesirlerle bölme işlemine ilişkin durumlar verilmiştir ve öğretmen adaylarından bu durumları açıklamaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının yaptıkları açıklamalar incelendiğinde UTA'yı daha çok kullandıkları görülmektedir (Tablo 4.90). Bu testte öğretmen adaylarından bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemi ve bu işlemin gruplama anlamı için ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen çarpma işlemi verilip bu işlemlerin aynı olup olmadığını açıklamaları istenmiştir ancak hiçbir öğretmen adayı açıklamalarında bu anlamdan bahsetmemiştir. Bununla beraber bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini, bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya bölünebildiğini, ters çevir çarp algoritmasını ve iki kesrin bölme işleminin çözümünü açıklamaları da istenmiştir. Öğretmen adaylarının en çok ters çevir çarp algoritmasını ve iki kesrin bölme işleminin çözümünü açıklamakta zorlandıkları ve açıklayamadıkları görülmüştür. İki kesrin bölme işleminin çözümünü sadece ÖA2 bölmenin gruplama anlamını kullanarak ve model çizerek uygun bir şekilde açıklamıştır. Buna göre ÖA2'nin öğretimden önce iki kesrin bölme işleminin çözümünü açıklama bilgisinin diğer öğretmen adaylarına göre daha güçlü ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. Burada öğretmen adayları bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini basit kesirle bölme ile açıklarken, ters çevir çarp algoritmasını gerçek yaşamdan örnekler vererek açıkladıkları görülmektedir (Tablo 4.90). Diğer taraftan ilginç bir şekilde ters çevir çarp algoritmasını sadece öğretim sürecine başlangıç düzeyi düşük olarak belirlenen gruptan ÖA1 “paydayı 1 yapma” ile doğru bir şekilde açıklamıştır. Bu durum ÖA1'in özel ders veriyor olması ile açıklanabilir. ÖA1 ön-teste ilişkin yapılan görüşme (G1) sırasında özel derse hazırlanırken bunu öğrendiğini belirtmiştir. Buna göre ÖA1'in öğretimden önce ters çevir çarp algoritmasını açıklama bilgisinin diğer öğretmen adaylarına göre daha güçlü ve işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir.

Tablo 4.90.

Öğretmen Adaylarının KÇB Ön-testinde Kesirlerle Bölmeye İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Açıklamalar

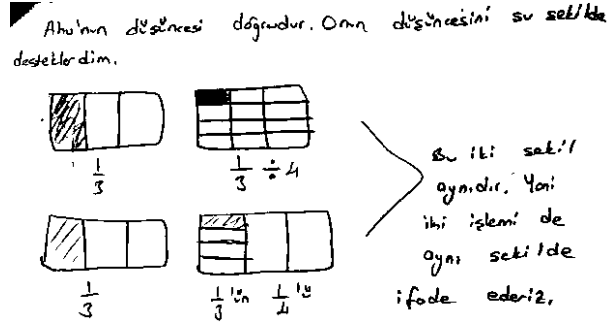
Öğretmen Adayı	1/3 ÷ 4 ve 1/3 x 1/4 işlemlerinin aynı olup olmadığını	Bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini (4 ÷ 1/3)	Kendinden daha büyük bir sayıya bölünebilme (2/3 ÷ 4)	Ters çevir çarp algoritmasını (2/3 ÷ 1/5)	7/8 ÷ 1/4 işleminin çözümünü
ÖA6	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Her iki işlem için model çizme ve sonuçlarının aynı olduğunu gösterme • Anlamdan bahsetmeme	• Uygun açıklama • UTA • Graplama anlamını kullanma • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme • Bölmenin basit kesir olması	• Uygun açıklama • UTA • Referans alınan bütüne işaret etme • 4'ü vurgulama • "Masa" örneği verme	• Uygun olmayan açıklama • UTA • Graplama anlamını kullanma (Eksik) • Model çizme ama 2/3'ün içinde 1/3'ün 1/5'inden kaç tane olduğunu gösterme • Referans alınan bütünü yanlış alma	• Yok
ÖA2	• Uygun ama eksik açıklama • MUTA • Her iki işlem için model çizme ve sonuçlarının aynı olduğunu gösterme • Her iki işlem için problem kurma • Anlamdan bahsetmeme	• Uygun ama eksik açıklama • MUTA • Graplama anlamını kullanma • Graplama anlamı için model çizme	• Uygun açıklama • UTA • Paylaştırma anlamını kullanma • "Pasta" örneği verme • Paylaştırma anlamı için model çizme • "Bütünü parçalama" olarak ifade etme	• Uygun olmayan açıklama • UTA • Bölmenin, çarpmaya göre tersi ile çarpma olduğunu ifade etme (Eksik) • Graplama anlamını kullanma (Eksik) • Model çizme ama 2/3'ün içinde 1/3'ün 1/5'inden kaç tane olduğunu gösterme • Referans alınan bütünü yanlış alma	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Graplama anlamını kullanma • Verilen modeli çizme ve üzerinden işlemin sonucunu ifade etme
ÖA4	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Her iki işlem için "kağıt" örneği verme • Her iki işlemin sonuçlarının aynı olduğunu ifade etme • Anlamdan bahsetmeme	• Uygun açıklama • UTA • Graplama anlamını kullanma • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme • "Pizza" örneği verme	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Paylaştırma anlamını kullanma • Paylaştırma anlamı için problem kurma • Bütünü çokluk olarak alma	• Uygun olmayan açıklama • UTA • Graplama anlamını kullanma • Graplama anlamı için problem kurma • Bütünü çokluk olarak alma • Referans alınan bütünü yanlış alma	• Uygun olmayan açıklama • UTA • Graplama anlamını kullanma • Graplama anlamı için problem kurma • Bütünü çokluk olarak alma • Referans alınan bütünü yanlış alma
ÖA3	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Her iki işlemi sözel olarak ifade etme • Her iki işlem için model çizme • Sonuçları ve modelleri aynı, sözel ifadeleri farklı • Anlamdan bahsetmeme	• Uygun açıklama • UTA • Graplama anlamını kullanma • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme • "Pasta" örneği verme	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Paylaştırma anlamını kullanma • Paylaştırma anlamı için model çizme • Sadece işlemi açıklıyor	• Uygun olmayan açıklama • Sadece işlemi sözel olarak ifade ediyor	• Yok
ÖA5	• Yok	• Uygun ama eksik açıklama • MTA • Bölmenin basit kesir olması • Doğal sayılarla bölme örnekleri verme	• Uygun olmayan açıklama • MTA • "Parçayı parçalama" olarak ifade etme	• Yok	• Yok

ÖA1	• Uygun ama eksik açıklama • MTA • Her iki işlemi sözel olarak ifade etme • Sonuçları aynı, sözel ifadeleri farklı • Anlamdan bahsetmeme	• Uygun açıklama • MTA • Graplama anlamını kullanma • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme • Doğal sayılarla bölme örnekleri verme • Bölmenin basit kesir olması	• Uygun açıklama • UTA • Paylaştırma anlamını kullanma • “Elma” örneği verme • “Bütünü parçalama” olarak ifade etme	• Uygun açıklama • MTA • Paydayı 1 yapma • Graplama anlamını kullanma	• Uygun olmayan açıklama • UTA • Graplama anlamını kullanma • Referans alınan bütünü yanlış alma

Öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde on üçüncü görevde verilen “Ahu $\frac{1}{3} \div 4$ ve

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ işlemlerinin aynı anlamı ifade ettiğini söylemektedir. Ahu’ya bu işlemlerin aynı olup olmadığını nasıl açıklarsınız?” sorusuna ilişkin ÖA5 hariç diğer öğretmen adayları açıklama yapmıştır. ÖA6, ÖA4 ve ÖA3 UTA yaparken, ÖA1 MTA ve ÖA2 MTA yapmıştır (Tablo 4.90). Öğretmen adaylarının açıklamaları incelendiğinde verilen her iki işlem için model çizerek işlemlerin sonuçlarının aynı olduğunu gösterdikleri (ÖA6, ÖA2, ÖA3), her iki işlemi sözel olarak ifade ettikleri (ÖA3, ÖA1, ÖA2), gerçek yaşamdan kağıt örneği ile açıkladıkları (ÖA4) ve her iki işlem için problem kurdukları (ÖA2) görülmektedir. Öğretmen adaylarının hiçbirisi verilen bölme işleminin graplama anlamına bu çarpma işleminin karşılık geldiğinden bahsetmemiştir. Buna göre öğretmen adaylarının öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemi ile ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen çarpma işleminin aynı olup olmadığını açıklama bilgilerinin zayıf ve işlemsel düzeyde olduğu ve ÖA5’in bu bilgiye sahip olmadığı söylenebilir.

ÖA6 verilen iki işlemin model çizerek aynı olduklarını açıklamıştır (Şekil 4.111). ÖA6’nın bu açıklaması incelendiğinde verilen bölme işleminin paylaştırma anlamını ele aldığı ve her iki işlem için dikdörtgensel alan modeli çizdiği görülmektedir. ÖA6’nın $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ işlemi için çizdiği model $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$ işlemini yansıtmaktadır. Burada ÖA6 iki işlemin sonuçlarının aynı olduğunu model üzerinde göstererek aynı anlamı ifade ettiklerini belirtmiştir ancak $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ işleminin $\frac{1}{3} \div 4$ işleminin graplama anlamına karşılık geldiğini gözardı etmiştir. Bu durum ÖA6’nın bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin graplama anlamına ilişkin anlamaya öğretimden önce sahip olmaması ile açıklanabilir.



Şekil 4.111. KÇB ön-testinde 13. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı UTA

ÖA3 ve ÖA2 de benzer şekilde ÖA6 gibi bu işlemleri model çizerek açıklamışlardır. Bu öğretmen adayları ÖA6'dan farklı olarak bu işlemleri sözel olarak da ifade etmişlerdir. ÖA2'nin açıklaması şu şekildedir: *"İki işlemin de aynı olduğunu bir bütünün 3'e bölünerek 1 parçanın alınması $1/3$ 'tür deriz ve o bir parçayı 4'e bölersek ($1/3 \div 4$) veya 4'te birini alırsak ($1/3 \times 1/4$) aynı sonucun olduğunu söyleriz."* ÖA2 bu açıklamasına ilaveten daha sonra bu iki işlemin anlamının farklı olduğunu her iki işlem için ayrı ayrı problem kurarak açıklamıştır. Önce $1/3 \div 4$ işlemi için şu problemi kurmuştur: *"Pastanın üçte birini mesela misafirlere ikram edeceğiz. Dört tane misafir gelmiş, kaç böleriz bu pastayı gibi."* Sonra $1/3 \times 1/4$ işlemi için şu problemi kurmuştur: *"Pastanın üçte birini misafirlere vereceğiz, dört kişi gelmiş, kişi başı kaç pasta düşer?"* ÖA2 bu iki işlem arasındaki farkı bu problem üzerinden şöyle açıklamıştır: *"... şey dört misafirimiz geldi, pastanın üçte birini ikram edeceğiz, burada da bir misafire bu pastanın tamamının kaçta kaç düşer? Aslında çok iyi anlatamadım ya. Şu an anladım da anlatamadım gibi."* Buna göre ÖA2'nin öğretimden önce bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin kavramsal anlamaya sahip olmadığı söylenebilir. Çünkü verilen bölme işlemine gruplama anlamı için bu çarpma işleminin karşılık geldiğini ifade edememiştir.

ÖA1 de ÖA2 ve ÖA3 gibi verilen işlemleri sözel olarak şöyle açıklamıştır: *"I'de $1/3$ 'ü 4 eşit parçaya bölmemiz istenmiş. II'de $1/3$ tane $1/4$ 'ün ne olduğunu bulmamızı istemiştir. Sonuçları $1/12$ ikisinin de aynı, ama ifade şekilleri, şu $1/3$ dört parçaya bölünmüş oluyor, şu da $1/3$ 'ü sıfır nokta yirmibeşlik parçalardan kaç tane olduğunu söylüyor. Hani o da 12 sonucu, hani kaç tane deyince direk sonuç oluyor da nasıl desem hani o zaman kaç tane olduğunu göstermiş oluyor. 12 bulduğu zaman çocuk sonuç $1/12$ olmuş oluyor aslında ama biz burada direk 12'yi buldurmuş oluyoruz. Hani kaç parçaya bölündüğünü, bölme işlemi olduğunu çocuk anlaması gerekiyor."* Burada ÖA1 işlemlerin sonuçlarının aynı ama sözel ifadelerinin farklı olduğunu belirtmiştir, bölme işleminin anlamından ve bu çarpma işleminin hangi anlamı için karşılık geldiğinden bahsetmemiştir. Bununla beraber bu iki

işlemi sadece sözel olarak açıklamıştır. Buna göre diğer öğretmen adayları gibi ÖA1'in de öğretimden önce bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemi ile ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen çarpma işleminin aynı olup olmadığını açıklama bilgisinin zayıf ve işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir.

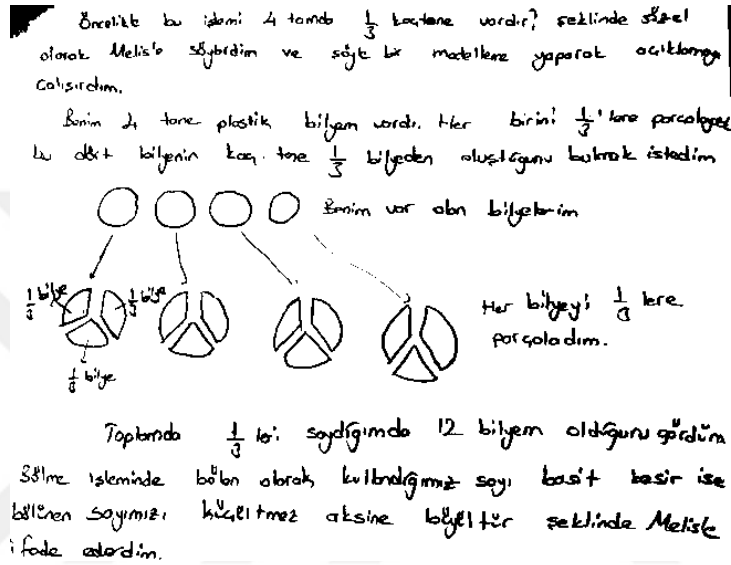
ÖA4 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak bu iki işlemi gerçek yaşamdan kağıt örneği vererek şöyle açıklamıştır: *“Bu ikisi de aynıdır. Yine aynı modelleme kurarım. 12 kare boy ve 10 kare eninde 2 tane kağıdın 1.sinin 1/3'ünü kesip 4 eşit parçaya bölmelerini ardından her bir parçanın ilk durumdaki kağıda oranını, 2.kağıtta da önce kağıdın 3'te birini kesmelerini ardından herhangi parçanın 4'te 1'ini bulmalarını isterim. Her iki parçanın eşit olup olduğu aşikar.”* ÖA4 burada bir kağıt örneği vererek onun üzerinden açıklama yapmıştır ancak bu iki işlemin sadece sonucuna ilişkin bir açıklama olmuştur. ÖA4 bu bölme işleminin grupta anlamı için bu çarpma işleminin karşılık geldiğini belirtmemiştir. Buna göre ÖA4'ün öğretimden önce bölmenin grupta anlamına ilişkin kavramsal anlamaya sahip olmadığı söylenebilir.

KÇB ön-testinde on birinci görevde verilen $4 \div \frac{1}{3}$ işleminin sonucunu bulmuştur.

Ancak bulduğu sonucun doğru olmadığını çünkü bölme işleminin sayıyı küçültmesi gerektiğini ifade etmiştir. Bu durumu Melis'e nasıl açıklarsınız?" sorusuna ilişkin ÖA5 ve ÖA1 MTA, ÖA2 MTA ve ÖA6, ÖA4 ve ÖA3 UTA yapmışlardır (Tablo 4.90). Öğretmen adaylarının açıklamaları incelendiğinde öğretimden önce kesirlerle bölme işlemine ilişkin verilen diğer durumlara göre bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini açıklama bilgilerinin daha güçlü olduğu görülmektedir. ÖA5 hariç diğer öğretmen adayları bu durumu bölmenin grupta anlamını kullanarak açıklamışlardır ve işlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etmişlerdir. Bununla beraber bölmenin basit kesir olması ile (ÖA6, ÖA5, ÖA1), doğal sayılarla bölme işlemi örnekleri vererek (ÖA5, ÖA1), gerçek yaşamdan örnek vererek (ÖA4, ÖA3) ve grupta anlamı için model çizerek (ÖA2) de açıklamışlardır.

ÖA6 verilen bu durumu bölmenin grupta anlamını ele alıp model çizerek ve problem kurarak açıklamıştır. ÖA6 öncelikle verilen bu işlemi *“4 tamda 1/3 kaç tane vardır?”* şeklinde sözel olarak ifade etmiştir. Burada “bütün” yerine “tam” ifadesini kullanarak uygun olmayan bir matematiksel dile başvurmuştur. Sonra bu işlem için şöyle bir problem kurmuştur: *“Benim 4 tane plastik bilyem vardır. Her birini 1/3'lere parçalayarak bu dört bilyenin kaç tane 1/3 bilyeden oluştuğunu bulmak istedim.”* ÖA6'nın kurduğu bu problem

işlemi ve bölmenin gruplama anlamını yansıtmaktadır ancak problemde “plastik bilye” ifadesini kullanarak $\frac{1}{3}$ kesirli sayısı için uygun olmayan bir birim kullanmıştır ve bu $\frac{1}{3}$ kesirli sayısına doğal sayı gibi davranmıştır. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) neden bu birimi kullandığını şu şekilde ifade etmiştir: “*Hani bu cam bilyeler var ya onun plastiği, parçalanması, kesilmesi için. Aslında o an aklıma başka bir şey gelmedi de o yüzden.*” ÖA6’nın bu işlem için dairesel alan modelini kullandığı görülmektedir (Şekil 4.112).



Şekil 4.112. KÇB ön-testinde 11. göreve ilişkin ÖA6’nın yaptığı UTA

Modeli incelediğinde işlemi ve bölmenin gruplama anlamını yansıtan bir model olduğu söylenebilir. Diğer yandan verilen durumu bölmenin basit kesir olması ile de açıklamıştır. Buna göre bölün sayı basit kesir olduğu zaman işlemin sonucunun büyüyeceğini ifade etmiştir ancak basit kesre bölmenin neden büyüteceğini açıklamamıştır. Burada bölme işleminin gruplama anlamı için problem kurarak ve model çizerek işlemin sonucu olan 12’nin $\frac{1}{3}$ ’lük parçaların sayısı olduğunu vurgulamak istediği söylenebilir. ÖA6’nın bu açıklamasında gruplama anlamını kullanarak ve $\frac{1}{3}$ ’ün basit kesir olmasını ele alarak parça sayısına vurgu yaptığını ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) geçen şu diyalog desteklemektedir (ÖA6, G1, 17/03/2015, 365-372):

G: Burada açıklamanı istediğim nokta bölmenin neden her zaman küçültmediydi, sen basit kesir olduğundan demişsin. Peki neden basit kesirse küçültmez?

ÖA6: Mesela $\frac{1}{3}$ basit kesir ya 3 tane, 1’den 3 tane oldu. 1 bilyemizden üç parça oldu, ama mesela biz bunun $\frac{4}{3}$ ’ünü alacak olsak, hani bir tane bunu alacağız bir de bunun bir kısmını alacağız. O zaman bir buçuktan daha az yani iki bilyeden biraz almış olup kullanmış olacağız o zaman parça sayımız azalmış olacak elde ettiğimiz.

G: 12 o zaman parça sayısı mı?

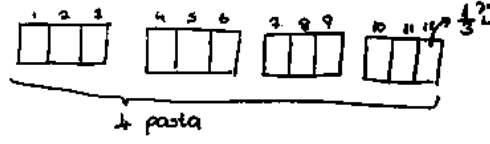
ÖA6: Evet, 12 tane $\frac{1}{3}$ çünkü.

Bu diyalogda ÖA6 ters çevir çarp’tan gelen 3’e işaret etmiştir. Bunun üzerine 3’ün ne ifade ettiği sorulmuştur ve ÖA6 doğru bir şekilde “bir bütünde kaç tane $\frac{1}{3}$ olduğu” olarak

ifade etmiştir ve modelde 4×3 işleminin görüldüğünü doğru bir şekilde belirtmiştir. Burada ilginç olan nokta 3'ü bu şekilde o an düşünerek ifade ettiğini *“Bunu ilk defa düşündüm.”* ifadesiyle belirtmesidir. Buna göre ÖA6'nın öğretimden önce bölme işleminin sonucunu her zaman küçültmediğini açıklama bilgisinin kavramsal düzeyde ve güçlü olduğu söylenebilir.

ÖA4 ve ÖA3 verilen durumu bölmenin gruptama anlamını ele alıp gerçek yaşamdan örnekler vererek açıklamışlardır ve işlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etmişlerdir. ÖA4 bir pizza örneği vererek şöyle açıklamıştır: *“Bir pasta düşünelim ya da pizza düşünelim. 4 tane pizza var diyelim, 4 pizza ve pizzalar üçe bölünmüş şekilde geliyormuş. Üçe bölünmüş şekilde düşünelim. Bölümlerin her birine bir parça diyelim, bir parça, bir parça, bir parça. O zaman her pizzada üç parça olur. Şimdi diyorum ki dört pizzada kaç parça var? Bu şu mudur, dört pizzanın içerisinde $1/3$ 'lük kaç yani şimdi onu ifade edeceğim. Dört pizzanın içerisinde 12 tane olduğunu bir kere biliyorum.”* Burada ÖA4 işlemin sonucu olan 12'nin $1/3$ 'lük parçadan 12 tane olduğunu belirtmiştir. ÖA4'ün bu şekilde 12 tane $1/3$ olduğuna vurgu yaparak grup sayısına işaret ettiği söylenebilir. Böylece sonucun küçülmediğini çünkü işlemin sonucu olan 12 ile 4'ün aynı şeyleri ifade etmediğine dikkat çekmek istemiş olabilir. Bunu ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) yaptığı şu açıklaması desteklemektedir: *“Şimdi diyor ya bana hep sayılar küçülür, 4 mü küçük 12 mi küçük diye sorduğumda 4 diyecek. Ama parça sayısı olduğu için daha büyük. Mesela şöyle diyecek pizza daha büyük değil mi? Ama biz şu an sayısal değerlerden konuştuğumuz için onun genellemesi şuydu bölme her zaman küçültür ama ben de diyorum ki bölme her zaman küçültmez bazen büyütmedebilir.”* ÖA4 bu açıklamasında işlemdeki 4 ve 12'nin aynı şeyi ifade etmediğine işaret etmiştir. Buna göre ÖA4'ün öğretimden önce bölme işleminin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini açıklama bilgisinin kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. Benzer şekilde ÖA3 de pasta örneği vererek işlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etmiştir. Bununla beraber ÖA6 gibi model çizerek (Şekil 4.113) model üzerinden şu şekilde açıklamıştır: *“Neden büyüdü çünkü 4 tane bütünü vardı, bunları böldüm. Böldüğümde parçalarım küçüldü, bu sefer dilimlerimin sayısı arttı. Bu yüzden büyümüş oldu aslında miktar artmadı ama dilimlerin sayısı arttı. Yani öbürünü 4 dilim gibi düşünürsem şimdi 12 dilimim var. Aslında 4 pastaydı şimdi 12 dilim.”* Bu açıklaması ile ÖA3'ün öğretimden önce gruptama anlamına ilişkin anlamasının kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. Burada parçaların büyüklüğü ile grubun büyüklüğüne ve dilim sayısı ile grup sayısına işaret etmiştir ve *“4 pastaydı*

şimdi 12 dilim” ifadesiyle bu ikisinin farkını ortaya koyarak neden büyüdüğünü çok açık bir şekilde ortaya koymuştur.



Şekil 4.113. KÇB ön-testinde 11. göreve ilişkin ÖA3’ün yaptığı UTA

ÖA5 ve ÖA1 bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini doğal sayılarla bölme işlemi örnekleri vererek açıklamışlardır. Burada bölünen doğal sayı veya kesirli sayı (basit veya bileşik kesir) olmasına göre işlemin sonucunun değişeceğini ifade etmişlerdir. ÖA5 verilen durumu şu şekilde açıklamıştır: “ $4 \div 4 = 1$, $4 \div 2 = 2$, $4 \div 1 = 4$. Bölme işleminin sayıyı küçültmesi için bir tam sayıya bölmek gerekir. Görüldüğü üzere böldüğümüz sayıyı 1’e yaklaştırdıkça çıkan sayı 4’ün kendisine yaklaştı. Hatta 1’e böldüğümüzde 4’ü bulduk. Bunun devamında $4 \div 1/2$ olursa cevap 8 çıkar. Yani tam sayılara bölme işleminin sonucunda cevap bölünenden küçük çıkacaktır. Kesirli sayılara bölme sonucunda bölünenden büyük çıkacaktır.” Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) ÖA5 bu açıklamasında “kesirli sayılara bölme” ile ne demek istediğini “Kesirli sayılara bölmede de artık 1’den küçük sayıları ben orada şey yaptım.” şeklinde açıklamıştır ve burada “1’den küçük sayılar” ile 0 ile 1 arasındaki sayıları kastettiğini belirtmiştir. Burada ÖA5 bölmenin grupta anlamından ve işlemin sonucunun grup sayısı olduğundan bahsetmemiştir. Buna göre ÖA5’in öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemi için bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini açıklama bilgisinin işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir. ÖA1, ÖA5’ten farklı olarak doğal sayılarla bölme işlemi örnekleri vermenin yanı sıra bölmenin grupta anlamını kullanarak işlemin sonucunun grup sayısı olduğuna da işaret etmiştir. ÖA1 verilen durumu şöyle açıklamıştır: “Önce aynı sayıyı herhangi bir tam sayıya bölmesini isterim. Daha sonra çocuğun basit kesir ve bileşik kesir bilgilerini kontrol edip karıştırmaması için ilk örneklerde aynı sayı üzerinde işlemi gösteririm. Örneğin, $100 \div 5 = 20$, $100 \div 5/2 = 40$, $100 \div 1/2 = 200$ gördüğümüz gibi böldüğümüz sayının basit ya da bileşik kesir olmasına göre değişiyor. Ya da şöyle de anlatılabilir:

- 4’ün içinde 2 kaç tane? Cevap 2 verilir.
- 4’ün içinde 1 kaç tane? Cevap 4
- 4’ün içinde $1/2$ kaç tane? Cevap 8 vermesi beklenir.
- 4’ün içinde $1/3$ kaç tane? Cevap 12.

Yukarıda gördüğümüz gibi bölme işlemi, istenen ifadenin kaç tane olduğunu gösterir. Eğer parçamız çok küçülürse adet (miktar) artacaktır.” Buna göre ÖA1’in öğretimden önce bölme işleminin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini açıklama bilgisinin kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

ÖA2 verilen durumu açıklarken her ne kadar bölmenin gruplama anlamını kullanarak işlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etse de bu açıklamasının ÖA6, ÖA4 ve ÖA3’ünkü kadar güçlü olmadığı görülmektedir. ÖA2 verilen durumu şöyle açıklamıştır: “Bölme işlemi bölen sayının bölünen sayı içerisinde kaç kere olduğunu gösteren bir işlemdir. 4’ün içerisinde 3’te 1 parça kaç tane vardır dersek anlayacağını düşünüyorum.” Burada verilen işlemi 4’ün içinde $\frac{1}{3}$ ’ü arama olarak ifade etmiştir ancak bu açıklama bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini tam olarak açıklamamaktadır. Yani işlemin sonucu olan 12’nin grup sayısı olduğunu ve 12 ile 4 ve $\frac{1}{3}$ ’ün bütünlerinin aynı olmadığını belirtmemiştir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) yazdığı bu açıklamayı biraz daha açması istenmiştir ve ÖA2 kesir çubuğu modeli çizmiştir (Şekil 4.114).

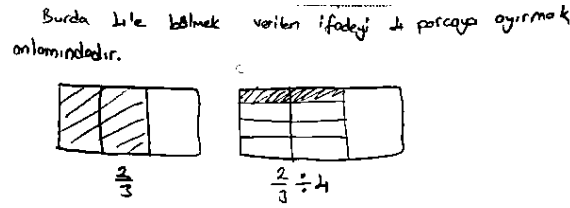


Şekil 4.114. Görüşme-1’de KÇB ön-testinde verilen 11. görev için ÖA2’nin çizdiği model Modelinde ÖA2 önce bir kesir çubuğu çizmiştir, bunu 4 eş parçaya bölmüştür ve “4 bütün” olarak ifade etmiştir. Sonra bu kesir çubuğunun üzerine bir parçası kadar bir kesir çubuğu çizmiştir, bunu 3 eş parçaya bölüp 1 parçasını taramıştır ve “bir bütünün $\frac{1}{3}$ ’ü” olarak ifade etmiştir. Daha sonra verilen işlemin 4 bütünün içinde bu $\frac{1}{3}$ parçadan kaç tane olduğunu ifade ettiğini belirtmiştir. Burada model üzerinden işlemin sonucunu 12 olarak ifade etmiştir. Sonuç olarak ÖA2’nin öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin kavramsal anlamaya sahip olduğu ancak bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini açıklama bilgisinin zayıf olduğu söylenebilir.

KÇB ön-testinde on dokuzuncu görevde verilen “Salih $\frac{2}{3} \div 4$ işleminin yapılamayacağını çünkü bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya bölünemeyeceğini ifade etmiştir. Bu durumu Salih’e nasıl açıklarsınız?” sorusuna ilişkin ÖA5 hariç diğer öğretmen adayları UTA ve ÖA5 MTA yapmıştır. Öğretmen adaylarının bu durumu açıklarken bölmenin paylaşılma anlamını kullandıkları (ÖA2, ÖA4, ÖA3, ÖA1) ve bu anlam için model çizdikleri (ÖA2, ÖA3) ve problem kurdukları (ÖA4) görülmektedir. Bununla beraber gerçek yaşamdan örnek verdikleri (ÖA6, ÖA2, ÖA1) ve işlemdeki 4’ü vurguladıkları

(ÖA6) görülmektedir (Tablo 4.90). Diğer taraftan ÖA3 sadece verilen işlemi açıklamıştır, bir sayının nasıl kendinden büyük bir sayıya bölünebildiğini açıklamamıştır.

ÖA6 verilen işlemi sözel olarak ifade etmiştir ve paylaştırma anlamını yansıtan bir dikdörtgensel alan modeli çizmiştir (Şekil 4.115) ancak bu açıklama işlemi açıklamaktan öteye geçememiştir.



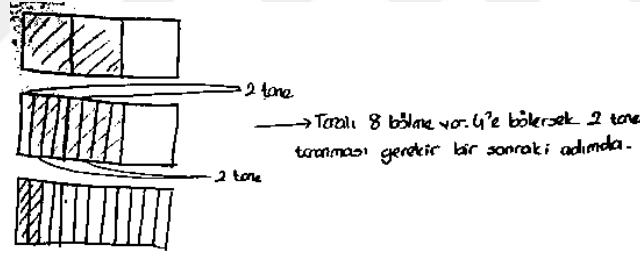
Şekil 4.115. KÇB ön-testinde 19. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı UTA

Burada önemli olan nokta bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya bölünebilmesini açıklamaktır ama ÖA6 bundan bahsetmemiştir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) bu açıklamasına şöyle bir ilavede bulunmuştur: “Şimdi ben şu şekilde söyledim, hani burada dörde bölmek demek mesela bizim elimizde bulunan $\frac{2}{3}$ sayısını daha büyük bir şeye parçalamak değil. Onu düşünüp onu dörde bölmek, dört parçaya ayırmak.” Burada 4’e vurgu yaparak $\frac{2}{3}$ ile 4 için referans alınan bütünlerin farklı olduğuna işaret etmektedir. Bunu bu görüşmede (G1) yaptığı şu açıklama da desteklemektedir: “Hani bu büyük sayı kendisinden daha büyük parçalara değil de o elimizde bulunanı, ya mesela bu masayı ikiye böleriz, dörde böleriz ama bir masa vardır elimizde.” Burada 4’ün $\frac{2}{3}$ için referans alınan bütünden 4 tane olduğu anlamına gelmediğini ifade etmiştir ve gerçek yaşamdan “masa” örneği ile somutlaştırmıştır. Benzer şekilde ÖA2 “pasta” ve ÖA1 de “elma” örneği vererek ve bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak verilen durumu açıklamışlardır. Buna göre ÖA6, ÖA2 ve ÖA1’in öğretimden önce bir sayının kendinden büyük bir sayıya bölünebileceğine ilişkin açıklama bilgilerinin güçlü olduğu ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin anlamalarının kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

ÖA4 bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya bölünebileceğini bir problem üzerinden şöyle açıklamıştır: “Salih kavram yanlışlığına sahiptir. Bu sorunun çözümüne benzer bir soru daha önce yapılmıştır. Yani yine bir problem durumu bulup bu problem üzerinden genelleme yapılır. 12 metre yüksekliğindeki bir evin $\frac{2}{3}$ uzunluğundaki kısmı farklı renkte boyalarla boyayacaktır. Bu $\frac{2}{3}$ ’lük kısmı 4 renk boya kullanılacaktır. Her bir boya için kaç metre yükseklik kullanılır? Bir sayının kendinden büyük bir sayıya bölünemeyeceği ifadesinin yanlış olduğu çıkarılabilir.” Burada ÖA4 bir bütün yerine 12 bütün üzerinden

hareket etmiştir yani 1'in $\frac{2}{3}$ 'ü değil 12'nin $\frac{2}{3}$ 'ü 4 eş parçaya bölünmektedir. Bunu ön-teste ilişkin yapılan görüşmedeki (G1) şu ifadesi de desteklemektedir: “Dört eşit parçaya ayıracağım, duvarım 12 metreydi, 12 metrenin $\frac{2}{3}$ 'ü 8'di. Her biri 2'şer metre gelir.” Burada ÖA4 bir sayının kendinden büyük bir sayıya bölünebileceğini tam olarak açıklayamamıştır. Buna göre ÖA4'ün öğretimden önce bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya bölünebileceğini açıklama bilgisinin zayıf ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

ÖA3 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak sadece verilen işlemi model çizerek (Şekil 4.116) şöyle açıklamıştır: “İlk $\frac{2}{3}$ 'ü çizmişim, daha sonra $\frac{2}{3}$ 'ün parçalarını dörde bölmüşüm. Birinci parçaları ve ikinci parçaları almışım, normalde ben bunu bilmiyordum da az önceki soruda bu tarz bir şey vardı, oradan çıkarım yaptım. Bilmiyordum yani. Oradan çıkarım yaptım.” Burada bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya nasıl bölünebildiğinden bahsetmemiştir. Buna göre ÖA3'ün öğretimden önce bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya bölüneceğini açıklama bilgisinin zayıf ve işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir.



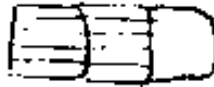
Şekil 4.116. KÇB ön-testinde 19. göreve ilişkin ÖA3'ün yaptığı UTA

ÖA5'in öğretmen adayları arasında verilen duruma ilişkin yaptığı açıklaması en zayıf olan kişi olduğu söylenebilir. ÖA5'in açıklaması şu şekildedir: “Bir sayı elbette kendinden büyük bir sayıya bölünebilir Salih. O sayıyı 4 eşit parçaya böleceksin. Her sayı mutlaka parçalara ayrılır ve kendinden büyük olması bölünemeyeceği anlamına gelmez.” Burada bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya nasıl bölünebileceğini açıklayamamıştır yani bu açıklama herhangi bir matematiksel kavrama veya bölmenin anlamına dayanmamaktadır. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) bu açıklamasını model çizmeye işaret ederek şu şekilde biraz daha açmıştır: “ $\frac{2}{3}$ bizim üzerinde işlem yapacağımız bölge, yine çizerek belki gösteririm. $\frac{2}{3}$, o $\frac{2}{3}$ 'lük kısımda taradığımız $\frac{2}{3}$ 'ü aldığımızda onu 4 eşit parçaya bölüp yine bir tanelik kısım olacak aslında.” Burada verilen bölme işlemini açıklamıştır ama neden bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya bölünebileceğini tam olarak açıklayamamıştır. Buna göre ÖA5'in öğretimden önce bir kesir ile bir doğal sayının bölme

işlemi için bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini açıklama bilgisinin oldukça zayıf ve işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir.

KÇB ön-testinde üçüncü görevde verilen “Ebru ve Tuğba $\frac{2}{3} \div \frac{1}{5}$ işleminin sonucunu bulmaya çalışıyorlar. Ebru hemen “ikinci kesir ters çevrilir, birinci kesir aynen bırakılır ve bölme işlemi çarpma işlemine değiştirilir yani kısaca ters çevir çarp” diye cevap veriyor. Tuğba, Ebru’ya neden böyle yapıldığını sorduğunda Ebru bunu açıklayamamıştır. Peki siz bunu Tuğba’ya nasıl açıklarsınız?” sorusuna ilişkin ÖA1 MTA yaparken ÖA6, ÖA2 ve ÖA4 UTA yapmışlardır (Tablo 4.90). ÖA3 sadece işlemi sözel olarak ifade ederken ÖA5 ise verilen duruma ilişkin açıklama yapamamıştır. Öğretmen adaylarının açıklamaları incelendiğinde grupta anlamını kullandıkları (ÖA6, ÖA2, ÖA4, ÖA1), verilen işlem için model çizdikleri (ÖA6, ÖA2) ve paydayı 1 yapmayı kullandıkları (ÖA1) görülmektedir. Diğer taraftan ÖA6, ÖA2 ve ÖA4’ün açıklamalarında işlemdeki $1/5$ için yanlış bütünü referans aldıkları görülmektedir. Sonuç olarak ÖA1 hariç diğer öğretmen adaylarının öğretimden önce ters çevir çarp algoritmasını açıklama bilgilerinin zayıf olduğu söylenebilir.

ÖA6 öncelikle verilen işlemi “ $2/3$ kesrinin içinde $1/5$ ’ten kaç tane vardır?” şeklinde sözel olarak ifade etmiştir ve model çizerek göstermiştir (Şekil 4.117). ÖA6 bu model üzerinden verilen işlemi $2/3 \times 5$ işlemine dönüştürerek şu şekilde açıklamıştır: “Bu şekilde $2/3$ dilimi $1/5$ küçük parçalarına ayırırız. Her $1/3$ kesrini bir tam düşünüp 5 tane $1/5$ olacağını görürüz. $1/3$ kesrinde 5 tane $1/5$ varsa, $2/3$ kesrinde kaç beş olduğunu $2/3 \times 5 = 10/3$ şeklinde işleme dökeriz.”



Şekil 4.117. KÇB ön-testinde 3. görevde ÖA6’nın çizdiği model

Burada $1/5$ için referans alınan bütünü 1 bütün yerine 1 bütünün $1/3$ ’ünü almıştır. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) yaptığı şu açıklama bunu desteklemektedir: “ $1/5$, $1/3$ ’ün beşe ayırdığımız her küçük parçası, bu $1/3$ kesrini beş küçük parçaya böldük, $1/5$ kesrini oluşturduk her küçük parçayla.” Aynı şekilde ÖA2 ve ÖA4 de bölmenin grupta anlamını kullanarak model çizmişlerdir ve işlemdeki $1/5$ için referans alınan bütünü yanlış olarak $2/5$ ’in içinde $1/5$ ’in $1/3$ ’ünden kaç tane olduğunu açıklamışlardır. ÖA4 bununla beraber bir bütün yerine çokluk üzerinden hareket ederek şöyle açıklamıştır: “Bu sorunun çözümünü muhtemelen modelleyerek anlatırdım. Yani derdim ki 30 litrelik damacanamın

2/3 kısmını 0,2 litrelik pet şişelere koymam gerekiyor. Bu iş için kaç pet şişeye ihtiyacım olur? gibisinden bir soru sordum ve Ebru'dan yanıtı beklerim.” Burada ÖA4 işlemdeki 2/3 için referans alınan bütünü 30 litre alırken, 1/5 için 1 litre almaktadır. Bu açıklamaları dikkate alındığında ÖA2, ÖA4 ve ÖA6'nın öğretimden önce ters çevir çarp algoritmasını açıklama bilgilerinin işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir.

ÖA3 verilen işlemin sonucunu neden ters çevir çarp algoritmasının verdiğini açıklayamamıştır. Burada sadece işlemi sözel olarak *“2/3'ün içinde 1/5 kaç tane var?”* şeklinde ifade etmiştir. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) ÖA3 işlemi sözel olarak ifade etmesini şöyle açıklamıştır: *“2'nin içinde kaç tane 1/2 var derken hani bölüyoruz ya burada da aynı şekilde 2/3'ün içinde kaç tane 1/5 var diye düşündüm ama ikisi de kesir olduğu için işin içinden çıkamadım.”* ÖA3 bu görüşmede algoritmaya ilişkin herhangi bir ilave açıklamada bulunmamıştır. Benzer şekilde ÖA5 de verilen algoritmayı açıklayamamıştır. Buna göre ÖA5 ve ÖA3'ün öğretimden önce ters çevir çarp algoritmasına ilişkin kavramsal anlamaya henüz sahip olmadıkları söylenebilir.

ÖA1 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak verilen algoritmayı paydayı 1 yapma ile şöyle açıklamıştır: *“Birinci kesrin içinde ne kadar ikinci kesir olduğunu bulmam için bölünecek parçanın yani paydanın tam (1) olması gerekir. Bunun için payı ve paydayı*

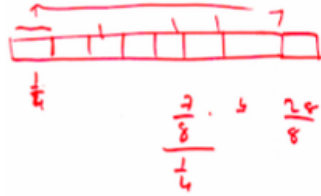
paydanın çarpma işlemine göre tersiyle çarpılır.
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{1} = \frac{10}{3} = \frac{10}{3} \text{ olur.}”$$
 Burada ÖA1

“birinci kesrin içinde ne kadar ikinci kesir olduğunu” ifadesi ile grupta anlamına işaret etmiştir. ÖA1 ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) ters çevir algoritmasını bu şekilde paydayı 1 yapma ile açıklamayı verdiği özel dersten dolayı bildiğini şöyle açıklamıştır: *“Bunu bir tane çocuğa ders veriyordum, altıncı sınıftı o da, onlara gitmeden önce kazanımlara bakmıştım oradan biliyorum.”* Buna göre ÖA1'in öğretimden önce ters çevir çarp algoritmasını açıklama bilgisinin diğer öğretmen adaylarına göre daha güçlü ve işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir.

KÇB ön-testinde on sekizinci görevde verilen $\frac{7}{8} \div \frac{1}{4}$ işleminin çözümüne ilişkin ÖA2, ÖA4 ve ÖA1 UTA yaparken ÖA6, ÖA3 ve ÖA5 açıklama yapamamışlardır (Tablo 4.90). Öğretmen adayları bu işlemi açıklarken bölmenin grupta anlamını kullanmışlardır ancak ÖA4 ve ÖA1 işlemdeki 1/4 için referans alınan bütünü yanlış almışlardır. Diğer taraftan ÖA2 bu işlem için model çizmiştir ve bu model üzerinden işlemin sonucunu doğru bir

şekilde ifade etmiştir. Buna göre ÖA6, ÖA3 ve ÖA5'in öğretimden önce iki kesrin bölme işlemine ilişkin kavramsal anlamaya sahip olmadıkları, ÖA4 ve ÖA1'in işlemsel anlamaya sahip oldukları söylenebilir. ÖA2'nin ise iki kesrin bölme işleminin çözümünü açıklama bilgisinin diğer öğretmen adaylarına göre daha güçlü ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. Bununla beraber ÖA2'nin açıklamasına iki kesrin paydalarının birbirine bölünebilir olmasının yardımcı olduğu söylenebilir çünkü paydaları birbirine bölünemeyen iki kesrin bölme işlemi verildiğinde referans alınan bütünü yanlış almıştır ve açıklamada başarılı olamamıştır.

ÖA1 verilen işlemi açıklamamıştır sadece sözel olarak $1/4$ ile bölmeyi şöyle ifade etmiştir: *"Ayırdığım 7 parçayı $1/4$ 'lük parçalara ayırmamız gerektiğini söylerim."* Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) bu açıklamasını biraz daha açması istenmiştir, ÖA1 bir kesir çubuğu çizip 8 eş parçaya bölmüştür (Şekil 4.118) ve tamamını "1 bütün" olarak ifade etmiştir. Burada $1/4$ 'lük parçalara ayırmayı nasıl göstereceği sorulmuştur ve ÖA1 bunu şöyle açıklamıştır: *"Şimdi burayı $1/4$ 'lük parçalara ayırmam lazım, yediyle $1/4$ 'ü ortak nasıl yapabilirim, 28 parçaya ayırırsam hani daha net görürüm, yoksa şöyle göz kararı da hani dört parçaya ayırıyorum şöyle, öyle onu demeye çalıştım. Hani yediye $1/4$ 'lük parçalara ayırmamız gerektiğini, kaç tane $1/4$ 'lük parça olduğunu bulmaya çalışırım."*



Şekil 4.118. Görüşme-1'de KÇB ön-testinde 8. görevde verilen işlem için ÖA1'in çizdiği model

Burada ÖA1 kesir çubuğunun 7 parçasının tamamını tahmini olarak 4 parçaya bölmeyi göstermiştir. ÖA1 böyle yaparak $7/8$ 'in $1/4$ 'ünü almaya işaret etmiştir. Bunu işlemdeki $1/4$ 'ün $7/8$ 'in $1/4$ 'ü olduğunu ifade etmesi desteklemektedir. Buna göre ÖA1 işlemdeki $1/4$ için referans alınan bütünü yanlış almıştır. Buradan işlemin sonucuna nasıl ulaşacağı sorulmuştur ve ÖA1 bunu şöyle açıklamıştır: *"Şunun tamamına 8 birim dedik, 7 birimliğini aldık, onun içinde kaç tane $1/4$ olacağını bulacağım. Önce 1 tanesinin içindekini bulayım dedim de ama 7 tanesini bulmak daha mantıklı. Hani 7 tanesini alır, onun içerisindeki $1/4$ 'lük kısımları yani $28/8$ olmuş oluyor hani 28 tanesini taramış olurum ben burada. O da tamamı mı olmuş oluyor zaten, yok tamamı olmuyor. Hani $7/8$ 'in içinde kaç tane $1/4$ var? Hani bunu bulmuş oldum burada, $28/8$ olmuş oluyor."* Burada ÖA1 işlemin sonucunu model üzerinden ifade edememiştir, bunun yerine işlemi yaparak ifade

etmiştir. Sonuç olarak ÖA1'in öğretimden önce iki kesrin bölme işleminin grupta anlamına ilişkin anlamasının işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir. Çünkü her ne kadar model çizerek göstermeye çalışsa da işlemi modelde gösterememiştir ve işlemin sonucuna işlemi yaparak ulaşmıştır.

ÖA4 verilen işlemi bir problem üzerinden şöyle açıklamıştır: *"280 TL burs alan Ali, bu parasının 7/8'ini 1/4'li şekilde zarflayacaktır. Her bir zarfta kaç TL para vardır. Bu şekilde Melda'yla bu problem üzerinden konuşabilirim."* Burada ÖA4 bir bütün yerine çokluk üzerinden hareket etmiştir. Bununla beraber "1/4'li şekilde" ifadesiyle ne demek istediği açık değildir. Burada sadece problemi kurmuştur ama çözümüne ilişkin bir açıklamada bulunmamıştır. Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) "1/4'li şekilde" ifadesiyle 280 liranın 7/8'inin 1/4'ünü kastettiğini belirtmiştir. Burada bunun bölme işlemini karşılayıp karşılamadığı sorulmuştur, ÖA4 çarpma olduğunu ifade etmiştir ve 1/4'ü açıklamakta zorlanmıştır. Buna ilişkin geçen diyalog şöyledir (ÖA4, G1, 18/03/2015, 747-756):

G: O zaman çarpma mı böme mi?

ÖA4: Çarpma olur. Aslında soru doğru da ben yanlış ifade ettim.

G: 280 liranın 7/8'i var şimdi o ne oluyor?

ÖA4: 7/8'i bir miktar, şuraya A miktar diyelim. Bunu 1/4'lük kaç zarfa dağıtırm?

G: 1/4 neyin 1/4'ü?

ÖA4: Bu 7/8'lik kısmının 1/4'ü. Şimdi 7/8'in içerisindeki 1/4 sayısını arıyorum.

G: 1/4 ne işte?

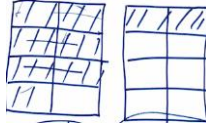
ÖA4: Zarf sayısı.

G: Zarf sayısı mı 1/4?

ÖA4: Hmm yok zarf sayısı değil.

Burada ÖA4 işlemdeki 1/4'ü açıklayamamıştır ve problemi düzeltmemiştir. Buna göre ÖA4'ün iki kesrin bölme işlemini açıklama bilgisinin işlemsel düzeyde ve zayıf olduğu söylenebilir.

ÖA2 verilen işlemi bölmenin grupta anlamını ele alarak şöyle açıklamıştır: *"Bir bütünü 8'e bölüp 7 parçasını aldığımızda yani 7/8'ini aldığımızda, bütünü 4'e bölüp 1 parçasını aldığımızda, 7/8'in içinde 1/4'ü kaç keredir diyerek açıklarız."* Ön-teste ilişkin yapılan görüşmede (G1) ÖA2 bu açıklamaya model çizerek (Şekil 4.119) şöyle ilavede bulunmuştur: *"Sekize bölersek şu şekilde, sekize böldüm. Bunun 7/8'ini alalım diyor ilk başta, şu en alt parça hariç hepsini aldım (2b). Bunun 7/8'ini aldım bunun bir de 1/4'ünü alacağım. Aynı şekil, aynı bütün. Bunun da 1/4'ü bu kadardır. Yani direk 1/4'ü yapabilirdim de aynı, benzer görünsün diye şimdi bu 7/8'in içinde kaç tane bu 1/4'ten vardır bu sorunun cevabı yani bunu soruyor bize. Burada da şimdi baktığımız zaman bundan bir tane var, iki tane var, üç tane var bir de yarım var. Üç buçuk tane bu 1/4'ten vardır diye açıklama yaptım."*



Şekil 4.119. Görüşme-1’de KÇB ön-testinde 8. görevde verilen işlem için ÖA2’nin çizdiği model

Burada ÖA2’nin öğretimden önce referans alınan bütün ve yeni bütün kavramlarına ilişkin kavramsal anlamaya sahip olduğu görülmektedir. Çünkü verilen işlemi model çizerek doğru bir şekilde göstermiştir ve işlemin sonucunu model üzerinden doğru bir şekilde ifade etmiştir. Sonuç olarak ÖA2’nin öğretimden önce iki kesrin bölme işleminin çözümünü açıklama bilgisinin diğer öğretmen adaylarına göre daha güçlü ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

4.5.2.2. Öğretim Süreci

Öğretmen adayları öğretim sürecine özellikle ters çevir çarp algoritmasını ve iki kesrin bölme işleminin çözümünü açıklama bilgileri zayıf bir şekilde başlamışlardır. Öğretmen adayları öğretim sürecinde kesirlerle bölme işlemine ilişkin karşılaştıkları durumları açıklarken UTA’yı daha çok kullandıkları görülmektedir (Tablo 4.91). Öğretim sürecinde öğretmen adaylarından bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini ve bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya bölünebilmesini açıklamaları istenmiştir. Öğretimden önce bu durumları tam olarak açıklayamıyorlarken burada uygun bir şekilde açıklamışlardır. Buna göre öğretmen adaylarının ön-testten öğretim sürecinin sonuna doğru bu durumları açıklama bilgilerinin geliştiği söylenebilir.

Üçüncü derse paralel yapılan görüşmede (G4) verilen “ $4 \div 1/3$ işleminin sonucu hem 4’ten hem de $1/3$ ’ten büyüktür. Öğrencilerden birisi bölme işleminin küçültmesi gerektiğini ama burada neden büyüttüğünü soruyor. Bunu öğrenciye nasıl açıklarsın?” sorusuna ilişkin ÖA6 UTA ve diğer öğretmen adayları MTA yapmışlardır (Tablo 4.91). Öğretmen adaylarının açıklamaları incelendiğinde bölmenin grupta anlamını ele aldıkları ve işlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret ettikleri görülmektedir. ÖA6 verilen durumu bu işlemin grupta anlamı için kurduğu problem üzerinden sözel olarak şöyle açıklamıştır: “Bölme küçültür ama hani burada biz şey düşündüğümüz için, sonuçta bir pastayı üç parçaya ayırıyoruz. Hani bir pastadan üç kişi yiyebilecek şekilde oluyor. Hani burada aslında şeyleri farklı, bu bir pasta ama bunu üç kişi yiyor. Kişi ve pasta farklı, bütünleri farklı. Aslında bu daha mantıklıymış, bütünleri farklı olunca küçültür ya da büyültür diyemeyiz. Bunu vermek lazım bence.” Bu açıklamasında ÖA6 bölmenin işlemin

sonucunu her zaman küçültmeyeceğini “*kişi ve pasta farklı, bütünleri farklı*” ifadesiyle işlemdeki 4 ve işlemin sonucu olan 12 için referans alınan bütünlerin farklı olduğunu vurgulayarak belirtmiştir. Burada ÖA6’nın bölme işleminin işlemin sonucunu her zaman küçültmeyeceğini bölmenin grupta anlamından yararlanarak ve referans alınan bütünlerin farklı olduğuna vurgu yaparak açıklaması bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemine ilişkin anlamasının kavramsal düzeyde olduğunu göstermektedir. Ön-testte de aynı soru sorulmuştur ve burada da orada yaptığı açıklamaya benzer bir açıklama yapmıştır. Ön-testtekinden farklı olarak basit kesirle ilişkilendirmektense referans alınan bütünlerin farklı olmasından bahsetmiştir. Buna göre ÖA6’nın ön-testten dördüncü görüşmeye bölme işleminin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini açıklama bilgisinin geliştiği söylenebilir.

Tablo 4.91.

Öğretmen Adaylarının Öğretim Sürecinde Kesirlerle Bölmeye İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Açıklamalar

Öğretmen Adayı	D3/G4	D3/G4	D4/G5
	Bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini ($4 \div 1/3$)	Kendinden daha büyük bir sayıya bölünebilme ($5/7 \div 3$)	Bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini ($3 \div 1/4$)
ÖA6	• Uygun açıklama • UTA • Gruplama anlamını kullanma • Referans alınan bütüne işaret etme • Grup sayısını vurgulama • “Pasta” örneği verme	• Uygun açıklama • UTA • Paylaştırma anlamını kullanma • Referans alınan bütüne işaret etme • 3’ü vurgulama • “Elma” örneği verme	• Uygun açıklama • UTA • Gruplama anlamını kullanma • Grup sayısını vurgulama • “Elma” örneği verme
ÖA2	• Uygun açıklama • MTA • Gruplama anlamını kullanma • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme	• Uygun açıklama • UTA • Paylaştırma anlamını kullanma • “Kablo” örneği verme • Yeni bütün kavramını kullanma • “Bütünü parçalama” olarak ifade etme	• Uygun açıklama • UTA • Gruplama anlamını kullanma • Gruplama anlamı için model çizme • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme
ÖA4	• Uygun açıklama • MTA • Gruplama anlamını kullanma • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme	• Uygun açıklama • UTA • Paylaştırma anlamını kullanma • “Parçayı parçalama” olarak ifade etme	• Uygun açıklama • UTA • Gruplama anlamını kullanma • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme • “İp” örneği verme
ÖA3	• Uygun açıklama • MTA • Gruplama anlamını kullanma • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme	• Uygun açıklama • UTA • Paylaştırma anlamını kullanma • “Pasta” örneği verme • Referans alınan bütüne işaret etme • 3’ü vurgulama • “Parçayı parçalama” olarak ifade etme	• Uygun açıklama • MTA • Gruplama anlamını kullanma • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme • Bölmenin basit kesir olması
ÖA5	• Uygun açıklama • MTA • Gruplama anlamını kullanma • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme	• Yok	• Uygun açıklama • UTA • Gruplama anlamını kullanma • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme • “Portakal” örneği verme
ÖA1	• Uygun açıklama • MTA • Gruplama anlamını kullanma • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme	• Yok	• Uygun açıklama • MTA • Gruplama anlamını kullanma • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme • Bölmenin basit kesir olması

ÖA2 de verilen durumu bölmenin grupta anlamını ele alarak şöyle açıklamıştır: “İşte dediğim gibi, *uu*, burada 1’den küçük bir sayıya bölmüşüz, 1’den küçük bir sayıya da bölmek demek, *uu*, grup sayısını artırmak demek. Yani dediğim gibi şurada bir bütünün $1/3$ ’ini almışız, o $1/3$ ’ten bir bütünde kaç tane vardır dersek mesela, üç tane vardır. Dört bütünde kaç tane vardır dersek 4 bölü $1/3$ ’tür, o da 12 tane vardır yani. Böyle açıklarım, başka türlü nasıl açıklarım bilemiyorum.” Burada ÖA2 işlemin sonucunun grup sayısı olduğunu ifade etmiştir. Benzer şekilde diğer öğretmen adayları da bölmenin grupta anlamını ele almışlardır ve işlemin sonucunun grup sayısı olduğunu ifade etmişlerdir. ÖA2 ve ÖA5 ön-testte bu durumu tam olarak açıklayamazlarken burada uygun bir şekilde açıklamışlardır. Diğer öğretmen adayları bu durumu ön-testte açıklamışlardır ancak burada işlemin sonucunun grup sayısı olduğunu ve işlemdeki 4 ile işlemin sonucu olan 12 için referans alınan bütünlerin farklı olduğunu açık bir şekilde ifade etmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının bölme işleminin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini açıklama bilgilerinin ön-testten dördüncü görüşmeye geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

Aynı görüşmede (G4) verilen “ $5/7 \div 3$ işleminde 3, $5/7$ ’den daha büyük bir sayıdır. Öğrencilerden birisi de bir sayı kendinden daha büyük bir sayıya nasıl bölünebilir diye soruyor. Bunu öğrenciye nasıl açıklarsın?” sorusuna ilişkin ÖA5 ve ÖA1 hariç diğer öğretmen adayları UTA yapmışlardır (Tablo 4.91). ÖA5 ve ÖA1’e görüşme sırasında bu durum verilmemiştir. Öğretmen adayları bu durumu açıklarken bölmenin paylaşırma anlamını kullanmışlardır, referans alınan bütüne işaret etmişlerdir ve işlemdeki 3’ü vurgulamışlardır. ÖA3 bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya bölünebileceğini bölme işleminin paylaşırma anlamı üzerinden şöyle açıklamıştır: “Şimdi bölme işleminde, burada zaten parçalama anlamını kullandığımız için sayının büyük olması çok da bir şey ifade etmiyor. Mesela $5/7$, burada da 5’i 7’ye bölmüşüm. Hani kaç parçaya ayırma, parçalama olarak düşündüğümüzde onu biraz daha anlayabilir galiba.” Bu açıklamasını biraz daha açması istendiğinde “Mesela bir pastayı da ben beşe bölebiliyorum, daha büyük bir sayı veya $1/2$, kesir kullanacak olursam, yarım bir pastayı beş dilime ayırabiliyorum.” şeklinde ifade etmiştir. Burada $5/7$ ile 3’ün farklı şeyleri ifade ettiğine işaret ettiği söylenebilir. Bunu da verdiği pasta örneği desteklemektedir. Bu örnekte $1/2 \div 5$ işlemini ele almıştır ve farklı birimler kullanarak $1/2$ ’yi “yarım pasta” olarak ifade ederken 5’i “5 dilim” olarak ifade etmiştir. ÖA4 de benzer şekilde bölmenin paylaşırma anlamını kullanarak işlemdeki $5/7$ ile 3’ün aynı şeyi ifade etmediğini ifade etmiştir ve 3’ün grup

sayısı olduğunu vurgulamıştır. Ön-testte ÖA3 ve ÖA4 bu durumu açıklayamıyorlarken burada bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak açıklamışlardır. Buna göre ÖA4 ve ÖA3'ün bu anlamalarının ön-testten dördüncü görüşmeye geliştiği söylenebilir.

ÖA6 verilen durumu şu şekilde açıklamıştır: *“Aslında burada bölmek yerine hani bu 5/7 bir nesnemiz, hani bu 5/7'yi basit bir kesir değil de bir elma gibi de düşünülebilir. Hani bir elmanın bir kısmı, onu üç parçaya ayırıyoruz, paylaştırıyoruz. Zaten hani bunu günlük hayatta da çok gördükleri için daha kolay anlayabilirler.”* Burada ÖA6'nın bölmenin paylaştırma anlamını kullandığı ve gerçek yaşamdan bir örnek olan “elmayı paylaşma” ile açıkladığı görülmektedir. Sonra görevde verilen model üzerinden şöyle açıklayarak 5/7 ve 3 için referans alınan bütünlerin farklı olduğuna işaret etmiştir: *“Modelde de bir bütünün üç parçaya ayrıldığını görebiliyoruz (modelin üçüncü basamağını gösteriyor). Ama bütünüümüze vurgulamamız lazım, hani bir kare ya da bir tarla üzerinden gittiğimizi. Mesela 3 tarlamız yok sonuçta bizim, 1 tarlamız var. Burada 5/7 tarlanın bir kısmını ifade ediyor ama 3, üç kişiye yani üç farklı yola ayrıldığını ya da üç paylaşım olduğunu ifade ediyor.”* Ön-testte de benzer bir işlem için bu durum sorulmuştur ve benzer şekilde açıklamıştır. Buna göre ÖA6'nın bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya bölünebilmesine ilişkin açıklama bilgisinde çok fazla gelişme olduğu söylenemez, zira öğretime güçlü bir açıklama bilgisiyle başlamıştır.

ÖA2 de ÖA6 gibi gerçek yaşamdan “kablo” örneği vererek ve bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak verilen durumu açıklamıştır ancak diğerlerinin açıklamasından farklı olarak yeni bütün kavramını kullanmıştır. ÖA2'nin açıklaması şu şekildedir: *“Yani kendinden daha büyük bir sayıya, 11, böleriz derken burada şunu kastedebiliriz. Bir bütünü yani 1 metrelik kabloyu aldığımızda mesela, bunu kendinden daha büyük mesela 3, 1'den daha büyük. 1 metrelik kabloyu üçe böldüğümüz zaman 33,3 santimetrelik parçalara ayırdığımızı yani bunun artık bir bütün değil de 11, bütünün parçaları şeklinde yani grubun içindeki nesne sayısı olduğunu açıklayabiliriz yani. Bu da aynı şekilde, bu da yeni bütünüümüzdür aslında (5/7'yi gösteriyor). Yani tam sayıyı bölme üzerinden anlattıktan sonra 5/7'de mesela aynı şekilde yine kablo örneğinden veririz. 5/7 metrelik bir kablomuz vardır, yani kablonun tamamını değil de bir kısmını almışız. Bu aldığımız kısmı da yine üç parçaya, eşit parçaya böldüğümüzde ne kadarlık kablolar ortaya çıkar bir metreye göre şeklinde açıklayabiliriz.”* Burada ÖA2 işlemdeki 5/7 kesrini yeni bütün olarak bütün parçalama şeklinde yani bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak açıklamıştır. ÖA2 verilen durumu ön-testte de burada da benzer şekilde açıklamıştır. Buna göre ÖA2'nin bir

sayının kendinden daha büyük bir sayıya bölünebildiğini açıklama bilgisinin ön-testten dördüncü görüşmeye çok fazla geliştiği söylenemez zira ÖA2 de ÖA6 gibi öğretim sürecine bu bilgisi diğer öğretmen adaylarına göre daha güçlü bir şekilde başlamıştır.

Dördüncü derse paralel yapılan görüşmede (G5) verilen “ $3 \div 1/4$ işleminin sonucu hem 3’ten hem de $1/4$ ’ten büyüktür. Öğrencilerden birisi bölme işleminin küçültmesi gerektiğini ama burada neden büyüttüğünü soruyor. Bunu öğrenciye nasıl açıklarsın?” sorusuna ilişkin ÖA3 ve ÖA1 MTA, diğer öğretmen adayları UTA yapmışlardır (Tablo 4.91). Öğretmen adayları verilen durumu açıklarken bölmenin grupta anlamını kullanmışlardır ve grup sayısına işaret etmişlerdir. Bununla beraber bölmenin basit kesir olmasıyla (ÖA3, ÖA1) ve gerçek yaşamdan örnekler vererek (ÖA6, ÖA4, ÖA5) açıklamışlardır.

ÖA2 bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini şöyle açıklamıştır: “*Bunu nasıl açılarım yani dediğim gibi, uı, 3’ün içerisinde kaç tane $1/4$ ’lük parçalardan vardır diyerek yani şu modelle gösterilebilir (paylaştırma anlamı için çizdiği dikdörtgensel alan modelini gösteriyor). Şimdi bu modelle değil de şu modelle ben daha rahat anlatırım (küme modelini gösteriyor). Yine şunu bir bütün kabul edelim (4 küçük daireyi gösteriyor), şöyle şu şekilde, şimdi bu bir bütün, bunun içindeki $1/4$ ’lük parçalar şunlar (bir küçük daireyi gösteriyor), hepsi $1/4$ ’ü ifade eder. Bunun, bir tane bütünün içerisinde $1/4$ ’lük parçalardan kaç tane vardır derim, 4 tane olduğunu bu şekilde gösterdikten sonra 3’ün içinde $1/4$ ’lük parçalardan kaç tane olduğunu sordüğümüzde, 3 bölü $1/4$ ’ün, 3 çarpı 4 yani ters çevir çarp olduğunu anlar.*” Burada ÖA2 bölmenin grupta anlamını kullanmıştır ve model üzerinden bu durumu açıklamıştır. ÖA2’nin bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemi için sonucun her zaman büyümediğini açıklamaya ilişkin anlamasının derinleşmekte olduğu söylenebilir. Buna kanıt olarak işlemin sonucunu açıklamak için referans alınan bütüne işaret ettiği şu ifadeler gösterilebilir: “*Bundan üç tane alacağım, ilk önce bunu göstereceğim, sonra bir, iki, üç, yine $1/4$ ’lük parçaları gösteririm. Böylece 12 parça olduğunu görebilir. Burada bütünün değiştiğini de söyleyebiliriz.*”

ÖA6 verilen durumu bu işlemin grupta anlamı üzerinden sözel olarak şöyle açıklamıştır: “*Şimdi mesela bir elmayı dörde böldüğümüz zaman oluşan parçaların sayısını düşünüyoruz. Biz elmanın küçülüp büyüdüğünü değil de kaç tane mesela çeyrek elmam oluşur diye düşündüğümüz zaman o sayının büyümesi doğaldır zaten.*” Burada ÖA6 “parça sayısı”, “kaç tane çeyrek elma oluşur” şeklinde ifade ederek işlemin sonucunun grup sayısı olduğunu vurgulamaktadır. ÖA6 açıklamasında gerçek yaşamdan

elma örneği verirken, ÖA5 portakal örneği ve ÖA4 de kablo örneği vererek verilen durumu açıklamışlardır. ÖA4'ün açıklaması şu şekildedir: *“Bak şimdi derim, elinde 3 tane şişe var derim, ya da elinde 3 metre ip var derim. Her biri 25'er santim derim, 25 santim nedir, 1'in 1/4'üdür yani 1 metrenin derim. Şöyle 3 metreden oluşan bir ipim var, her biri eş parçalara ayrılır. 25'er santimlik kısımlara ayır derim, kısımlara böl. Kaç tane parça olacak? Diyecek ki bana 12 tane parça olacak diyecek. Ben de diyeceğim ki hani küçülecekti, bak büyüdü. Yani böldüğünün cinsine göre değişir bu. Hani bütünü ne, parçam ne? Böyle açıklardım.”* ÖA5'in açıklaması da şu şekildedir: *“Bu 0 ile 1 arasında olunca, yani küçültmüyor. Çünkü onun içinde daha küçük bir şey aradığımız için, tabiki çoktur diyoruz. Bir grubun içinde ya da bir çok grubun içinde, o grubun içinde 12 kişi varsa, nasıl diyeceğim, çok basit bir şey aslında da, hah, bir grubun içinde daha küçük, uı, gruplar seçiyorsam, sonuç tabiki büyüyecektir hani. Sınıf 30 kişiliktir, 5 gruba ayırmak istiyorsundur, her bir grupta, yok yok, sınıfla olmadı. Portakalla çok güzel olmuştu aslında bu da. İşte bana sorduklarında portakal örneğini veririm ben de. Derim 3 portakal var, 3 portakalı 3 kişiden daha fazla kişi yemek istiyor, yok, 3 portakal var, 12 kişi var, 12 kişiye bunları her bir portakalı dörde bölerek verirsin. Yani 1/4'e bölerek, 12 kişiye veriyorsun hani, küçük bir sayıya bölerek, çok fazla insana verebiliyoruz diyerek anlatabilirim.”* ÖA6, ÖA4 ve ÖA5'in açıklamaları bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemine ilişkin kavramsal anlamalarının derin olduğunu göstermektedir. Ön-test, G4 ve buradaki açıklamalarının ortak noktası bölmenin grupta anlamını kullanarak işlemin sonucunun grup sayısı olduğunu vurgulamalarıdır.

ÖA3 ve ÖA1 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak verilen durumu bölmenin grupta anlamını kullanarak açıklamanın yanısıra bölenin basit kesir olmasıyla da açıklamışlardır. ÖA3'ün açıklaması şu şekildedir: *“Burada basit kesire böldüm yani aslında mesela, uı, zaten, kaç tane 1/4 var deyince, orada üçü bir 1/4'e bölüyorum, hani kaç tane, grubu buluyorum. Yani birimim küçülüyor o yüzden grup sayım arttığı için, uı, sonucum da artıyor.”* ÖA3 bölme işleminin sonucunun her iki sayıdan daha büyük çıkmasını bölen kesrin bileşik veya basit kesir olması ile açıklamıştır. Bileşik kesir ile bölünce 1'den büyük bir ifadeye bölündüğü için küçüleceğini, basit kesirle bölünce grup sayısının arttığını bu yüzden sonucun büyüyeceğini ifade etmiştir. Burada işlemin grupta anlamını da ele almıştır. “Birimim küçülüyor” ifadesiyle grubun büyüklüğüne ve “grup sayım artıyor” ifadesiyle grup sayısına işaret ettiği söylenebilir.

Diğer taraftan ÖA1 hariç diğer öğretmen adayları öğretim sürecine ters çevir çarp algoritmasını açıklama bilgileri oldukça zayıf bir şekilde başlamışlardır. Öğretim sürecinde öğretmen adaylarının bu bilgilerin geliştiği görülmüştür. Beşinci derse paralel yapılan görüşmede (G6) verilen $3/8 \div 2/3$ işlemi için ters çevir çarp algoritmasının işlemin sonucunu nasıl verdiği sorulduğunda ÖA6 bunu matematiksel temelli olarak açıklamıştır. Buna ilişkin geçen diyalog şöyledir (ÖA6, G6, 05/05/2015, 212-229):

G: Burada ters çevir çarp algoritmasının işlemin sonucunu verdiğini nasıl açıklarsın?

ÖA6: $(3/8 \div 2/3 \times 3/2)$ yazıyor.) Bence hani şöyle yani kendi fikrimce $2/3$ 'e bölüyoruz ya, hani bir bütünün $2/3$ 'ü diyoruz. Mesela ters çevirdiğimiz zaman bir bütünde $2/3$ 'ten kaç tane var şeklinde hani bu şekilde yazdığımız zaman $(3/8 \div 2/3 \times 3/2)$ işlemine işaret ediyor) hani çarpmanın zaten şey, değişmeli, yani $3/2 \times 2/3$ 'ün de aynı anlama geldiğini biliyor mu acaba? Hani onu bildiklerini varsayarak ama o zaman burası da, burada biraz karışıklık oldu.

G: Şuraya bunu yazarak ne demek istedin (parantez içinde $(\times 3/2)$ yazmasına işaret ediyorum)?

ÖA6: Yani bir bütünde $2/3$ 'ün $3/2$ tane olduğunu. Hani mesela bunu matematiksel olarak şu şekilde ifade edebiliriz de, daha kolay bir yaklaşım olabilir mi diye düşünmüştüm de, hani paydaları bire eşitlemek, mesela $3/2$ ile çarpmamız lazım paydayı 1'e eşitlemesi için, üstü de $3/2$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 3 \\ \cdot \\ 8 \quad 2 \\ \hline 2 \quad 3 \\ \cdot \\ 3 \quad 2 \end{array}$$

ile çarparsın $(\frac{8}{2} \cdot \frac{2}{3})$ yazıyor).

G: Burada da bunu mu anlatmak istemiştin $(3/8 \div 2/3 \times 3/2)$ işlemini gösteriyorum)?

ÖA6: Evet yani burayı da $3/2$ ile çarpsaydık aynı şeye denk gelecekti $(3/8$ 'i de $3/2$ ile çarpmaya işaret ediyor). Ama onu $(3/2$ 'yi gösteriyor) hani bu tarafa bir geçiremedim.

G: Tamam.

$$\begin{array}{r} 3 \quad 3 \\ \cdot \\ 8 \quad 2 \\ \hline 2 \quad 3 \\ \cdot \\ 3 \quad 2 \end{array}$$

ÖA6: Şimdi zaten altının 1 olduğunu görüyoruz $(\frac{8}{2} \cdot \frac{2}{3})$ işleminin paydasına işaret ediyor). $3/8$

$$\text{çarpı } 3/2 \text{'den de } 3 \text{ çarpı } 3 \text{ bölü } 8 \text{ çarpı } 2 \text{ şeklinde } (\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 2}) \text{ yazıyor).}$$

G: Başka nasıl açıklarsın?

ÖA6: Yani hani şu şekilde birimlerini eşitlediğimiz zaman desem, mesela bunu 3 ile çarptığım zaman $9/24$ bölü, bunu 8 ile çarptığım zaman $16/24$ ya, hani X'i veriyormuş. Bu 9 tane, kesrin anlamından, 9 tane $1/24$, bu da 16 tane $1/24$ ya, şimdi zaten bunların, aynı sayının aynı sayıya bölümü 1 olduğundan 9 bölü 16 olarak da ifade edebilirim $(9/24 \div 16/24 = X, 9 \times 1/24 \div 16 \times 1/24 = X, 9 \div 16 = X \text{ yazıyor})$. Ama burada ters çevir çarpı göremedik. Aslında burada da payı paya paydayı da paydaya bölüyoruz birimlerini eşitleyip. Yani dün görmüştük (dersten bahsediyor), diğer bir yol da buydu.

Burada ÖA6 önce bölmenin gruptama anlamını kullanarak “bir bütünde $3/2$ tane $2/3$ varsa $3/8$ 'de $3/8 \times 3/2$ ” olduğuna işaret etmiştir ancak tam olarak açıklayamamıştır. Sonra ÖA6'nın “paydayı 1 yapma” ile ters çevir çarp algoritmasını doğru bir şekilde açıkladığı görülmektedir. Bununla beraber ikinci bir yol olarak kesrin tanımından yararlanarak ve $9/24$ 'ü $16/24$ 'e oranlayarak işlemin sonucuna ortak payda algoritmasını kullanarak ulaştığı söylenebilir. Burada $3/8$ ve $2/3$ kesirlerini “9 tane $1/24$ ” ve “16 tane $1/24$ ” olarak ifade etmesini “kesrin anlamından” diyerek açıklamıştır ve kesrin gruptama anlamına işaret etmiştir. Buna göre ÖA6'nın ön-testten öğretimin sonuna doğru ters çevir çarp

algoritmasına ilişkin açıklama bilgisinin geliştiği söylenebilir. Bu öğretimin ÖA6'ya ters çevir çarp algoritmasına ilişkin alternatif yollar kazandırdığı görülmektedir. ÖA6 öğretimden önce bu algoritmayı açıklamakta zorlanırken öğretimden sonra bölmenin paylaştırma anlamı, bölmenin grupta anlamı, paydayı 1 yapma ve ortak payda algoritması ile açıkladığı görülmektedir.

ÖA3'e de altıncı görüşmede (G6) verilen $3/8 \div 2/3$ işlemi için bu işlemin sonucunu ters çevir çarp algoritmasının verdiğini nasıl açıklayacağı sorulmuştur ve ÖA3 bunu paydayı 1 yapma ile şöyle açıklamıştır: *"Payda mı eşitliyorduk sanki, bir yapıyorduk filan ya da ikisini de mesela birinin çarpmaya göre tersi ile mi çarpıyorduk, mesela 3/2 ile bunu da 3/2 ile? Bilemiyorum."* Burada ÖA3'ün bu algoritmayı paydayı 1 yapma ile açıklamaya çalıştığı ancak bunu tam olarak ifade edemediği görülmektedir. ÖA3 öğretimden önce bu algoritmayı açıklayamazken burada eksik de olsa açıklamıştır. Buna göre ÖA3'ün bu algoritmayı açıklama bilgisinin ön-testten altıncı görüşmeye diğer öğretmen adaylarınınki kadar güçlü olmasa da geliştiği söylenebilir.

ÖA1 altıncı görüşmede (G6) verilen $3/4 \div 5/7$ işlemi için ters çevir çarp algoritmasını

önce payda eşitleme ile şöyle açıklamıştır: $\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{21}{28} \div \frac{20}{28} = \frac{21}{20}$. Sonra bunu paydayı 1

yapma ile de şöyle açıklamıştır: $\frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 7}{1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5}$. ÖA1 öğretimden önce bu algoritmayı

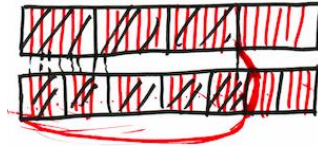
sadece paydayı 1 yapma ile açıklarken burada buna ilaveten ortak payda algoritması ile de açıklamıştır. Buna göre ÖA1'in ters çevir çarp algoritmasını açıklama bilgisinin ön-testten altıncı görüşmeye biraz daha ilerlediği söylenebilir.

ÖA5'e de altıncı görüşmede (G6) verilen $3/4 \div 5/7$ işlemi için ters çevir çarp algoritmasının işlemin sonucunu verdiğini nasıl açıklayacağı sorulmuştur ve ÖA5 bunu açıklayamayacağını belirtmiştir. ÖA5 öğretimden önce bu algoritmayı açıklayamıyorken burada da açıklayamamıştır. Buna göre ÖA5'in ters çevir çarp algoritmasını açıklama bilgisinin ön-testten altıncı görüşmeye henüz gelişmediği söylenebilir. ÖA4 de ÖA5 gibi bu algoritmayı öğretimden önce de bu görüşmede (G6) de açıklayamamıştır. ÖA4 bu görüşmede (G6) bu işlem için kurduğu problemten hareket ederek bunu şöyle açıklamıştır: *"Şimdi 56 metre ip var, bunun 3/4'ü nedir, önce 3/4'ünü bulacak. Sonra bu 3/4'ü 5/7'lik parçalara ayıracak. Kaç parça elde eder? Muhtemelen 56'dan daha fazla bir sayı çıkacak."*

56'nın $3/4$ 'ü, 42 metre. Bunu da $5/7$ 'lik kaç parçaya ayırır ($\frac{42}{5/7}$ yazıyor)? Yani 42 çarpı

$7/5$ oldu.” Sonrasında ÖA4 bu açıklamanın devamını getirememiştir. Burada bir bütün yerine çokluk üzerinden hareket etmiştir ve ters çevir çarp algoritmasını açıklayamamıştır. Buna göre ÖA4'ün ters çevir çarp algoritmasını açıklama bilgisinin ön-testten altıncı görüşmeye henüz gelişmediği söylenebilir.

ÖA2 altıncı görüşmede (G6) verilen $3/4 \div 5/7$ işlemi için ters çevir çarp algoritmasını açıklamak için bir model (Şekil 4.120) çizmiştir ancak modeli çizdikten sonra bununla bu algoritmayı ilişkilendirmemiştir. Bunun üzerine ÖA2'ye bu algoritmayı nasıl açıklayacağı sorulmuştur ve ÖA2 bunu şöyle açıklamıştır: “Burada 5 ile 4'ün çarpılması, şu şekilde ters çevirip çarptığımızda 5 ile 4'ün çarpılması aslında paydayı veriyor. Burada da bütünümüzün kaç bölündüğüne zaten o şekilde karar verdik. Yani 20 parçaya böldük, bu paydayı veriyor. İu, üst tarafın da 21 parça olması zaten o da aynı şekilde 21 parça bulduk. Yani sonucu gösteririm, ters çevir çarpı tam olarak nasıl ifade eder bilmiyorum ama yani yirmiye böldüğümüzü bir bütünü şurada da yimiye böldük. Yirmiye böldüğümüzü bu şekilde anlatırım. Burada 21'e böldük (ikinci kesir çubuğunu gösteriyor), haaa, tamam, şimdi, uı, bizden istenen süt miktarı. Ne kadar gerekmiş? 21 parça. İu, ne kadara bölmüşüz? Normalde bir bütünü, bir litreyi 20 parçaya bölmüşüz, 20 parça payda, istenen de 21 parça bu şekilde anlatırım.”



Şekil 4.120. Görüşme-6'da verilen $3/4 \div 5/7$ işlemi için ÖA2'nin çizdiği model

Burada ÖA2 bu algoritmayı bölmenin gruplama anlamını kullanarak ve model çizerek açıklamıştır ancak burada bu algoritmadan $7/5$ 'in nasıl geldiğini açıklayamamıştır. ÖA2 öğretimden önce bu algoritmayı açıklayamazken burada eksik de olsa açıklamıştır. Buna göre ÖA2'nin ters çevir çarp algoritmasını açıklama bilgisinin ön-testten altıncı görüşmeye diğer öğretmen adaylarınınki kadar güçlü olmasa da geliştiği söylenebilir.

4.5.2.3. Son Durum

Öğretmen adayları öğretim sürecine özellikle ters çevir çarp algoritmasını ve iki kesrin bölme işlemini açıklama bilgileri zayıf bir şekilde başlamışlardır. Öğretim sürecinde ÖA4 ve ÖA5 hariç diğer öğretmen adaylarının ters çevir çarp algoritmasını açıklama bilgilerinin

geliştiği görölmüştür. Son-testte ÖA4 ve ÖA5 ters çevir çarp algoritmasını uygun bir şekilde açıklamışlardır. Diğer taraftan öğretmen adaylarının öğretimden önce bölme işleminin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini ve bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya bölünebilmesini açıklama bilgileri zayıfken bu bilginin öğretim sürecinde geliştiği ve son-testte de derinleştiği söylenebilir. Öğretmen adaylarının ön-testte ve son-testte yaptıkları açıklamalar karşılaştırıldığında kesirlerle bölme işlemine ilişkin verilen durumları açıklama bilgilerinin geliştiği görölmektedir (Tablo 4.93). Öğretmen adaylarının son-testte yaptıkları açıklamaları incelendiğinde daha çok UTA'yı kullandıkları görölmektedir (Tablo 4.92). Öğretmen adayları öğretimden önce uygulanan KÇB ön-testinde verilen bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemi ve bu işlemin grupta anlamı için ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen çarpma işleminin aynı olup olmadığını açıklarken bu anlamdan bahsetmiyorlarken öğretimden sonra uygulanan KÇB son-testinde bahsetmişlerdir. Bununla beraber öğretmen adaylarının öğretimden önce en çok ters çevir çarp algoritmasını ve iki kesrin bölme işleminin çözümünü açıklamakta zorlanıyorlarken öğretimden sonra bu zorluğun ortadan kalktığı görölmektedir. Öğretimden önce iki kesrin bölme işleminin çözümünü sadece ÖA2 bölmenin grupta anlamını kullanarak ve model çizerek açıklarken öğretimden sonra bütün öğretmen adayları bölmenin anlamlarını kullanarak ve işlemin sonucu için referans alınan bütüne işaret ederek açıklamışlardır. Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin bölme işleminin çözümünü ve ters çevir çarp algoritmasını açıklama bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. Burada öğretmen adayları öğretimden önce bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini basit kesirle bölme ile açıklarlarken, öğretimden sonra bölmenin grupta anlamını kullanarak, bu anlamı yansıtan model çizerek ve işlemin sonucunun grup sayısı olduğuına işaret ederek açıklamışlardır.

Tablo 4.92.

Öğretmen Adaylarının KÇB Son-testinde Kesirlerle Bölmeye İlişkin Verilen Durumlar İçin Yaptıkları Açıklamalar

Öğretmen Adayı	$1/3 \div 4$ ve $1/3 \times 1/4$ işlemlerinin aynı olup olmadığını	Bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini ($4 \div 1/3$)	Kendinden daha büyük bir sayıya bölünebilme ($2/3 \div 4$)	Ters çevir çarp algoritmasını ($2/3 \div 1/5$)	$7/8 \div 1/4$ işleminin çözümünü
ÖA6	• Uygun açıklama • MUTA • Grupta anlamını kullanma • Bölme işlemi için model çizme • Her iki işlemi sözel olarak açıklama • Model üzerinden bu bölme işlemine bu	• Uygun açıklama • UTA • Hem paylaştırma hem grupta anlamını kullanma • Her iki anlam için model çizme • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuına işaret etme	• Uygun açıklama • UTA • Hem paylaştırma hem grupta anlamını kullanma • Her iki anlam için model çizme • “Elma” örneği verme	• Uygun açıklama • MUTA • Grupta anlamını kullanma • Grupta anlamı için model çizme	• Uygun açıklama • UTA • Verilen modeli çizip onun üzerinden gösterme • Grupta anlamını kullanma • Referans alınan bütüne işaret etme (İşlemin sonucu)

	anlam için bu çarpma işleminin karşılık geldiğini gösterme	- Referans alınan bütüne işaret etme - Yeni bütün kavramını kullanma	- Referans alınan bütüne işaret etme 4'ü vurgulama		için 1/4 olduğunu vurgulama)
ÖA2	- Uygun açıklama - UTA - Paylaştırma anlamını kullanma - Her iki işlem için model çizme - Model üzerinden farklı işlemler olduğunu ifade etme	- Uygun açıklama - UTA - Gruplama anlamını kullanma - Gruplama anlamı için problem kurma - Gruplama anlamı için model çizme - İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme	- Uygun açıklama - UTA - Paylaştırma anlamını kullanma - Paylaştırma anlamı için model çizme "Pasta" örneği verme "Bütünü parçalama" olarak ifade etme	- Uygun açıklama - UTA - Gruplama anlamını kullanma - Gruplama anlamı için model çizme	- Uygun açıklama - MTA - Gruplama anlamını kullanma - Referans alınan bütüne işaret etme (İşlemin sonucu için 1/4 olduğunu vurgulama)
ÖA4	- Uygun açıklama - MUTA - Gruplama anlamını kullanma - Her iki işlem için model çizme - Her iki işlemi sözel olarak açıklama - Her iki işlem için "ip" örneği verme - Sonuçları aynı ve sözel ifadeleri farklı - Model üzerinden bu bölme işlemine bu anlam için bu çarpma işleminin karşılık geldiğini gösterme	- Uygun açıklama - UTA - Gruplama anlamını kullanma - Gruplama anlamı için problem kurma - Gruplama anlamı için model çizme - İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme - Bölenin basit kesir olması - Çarpmanın operatör anlamı (Bir sayı ile çarpma ve daha büyük bir sayıya bölme)	- Uygun açıklama - UTA - Paylaştırma anlamını kullanma - Paylaştırma anlamı için model çizme - Paylaştırma anlamı için problem kurma - Referans alınan bütüne işaret etme	- Uygun açıklama - UTA - Paylaştırma anlamını kullanma - Paylaştırma anlamı için model çizme	- Uygun açıklama - UTA - Paylaştırma anlamını kullanma - Paylaştırma anlamı için model çizme - Referans alınan bütüne işaret etme (İşlemin sonucu için 1/4 olduğunu vurgulama)
ÖA3	- Uygun açıklama - UTA - Gruplama anlamını kullanma - Her iki işlem için model çizme - Her iki işlemi sözel olarak açıklama - Model üzerinden bu bölme işlemine bu anlam için bu çarpma işleminin karşılık geldiğini gösterme	- Uygun açıklama - UTA - Gruplama anlamını kullanma - Gruplama anlamı için model çizme - İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme - Referans alınan bütüne işaret etme	- Uygun açıklama - MTA - Gruplama anlamını kullanma "4'ün ne kadarı 2/3'tür?"	- Uygun açıklama - MTA - Ortak payda algoritması	- Uygun açıklama - MTA - Gruplama anlamını kullanma - Referans alınan bütüne işaret etme (İşlemin sonucu için 1/4 olduğunu vurgulama)
ÖA5	- Uygun açıklama - UTA - Paylaştırma anlamını kullanma - Her iki işlem için model çizme - Model üzerinden farklı işlemler olduğunu ifade etme - Sonuçlar aynı ve anlamları farklı	- Uygun açıklama - UTA - Gruplama anlamını kullanma - Gruplama anlamı için model çizme - İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme - Referans alınan bütüne işaret etme	- Uygun açıklama - UTA - Paylaştırma anlamını kullanma "Elma" örneği verme	- Uygun açıklama - UTA - Gruplama anlamını kullanma - Gruplama anlamı için model çizme	- Uygun açıklama - UTA - Gruplama anlamını kullanma - Gruplama anlamı için model çizme - Referans alınan bütüne işaret etme (İşlemin sonucu için 1/4 olduğunu vurgulama)
ÖA1	- Uygun açıklama - UTA - Gruplama anlamını kullanma - Her iki işlem için model çizme - Her iki işlemi sözel olarak açıklama - Model üzerinden bu bölme işlemine bu anlam için bu çarpma işleminin karşılık geldiğini gösterme	- Uygun açıklama - MUTA - Gruplama anlamını kullanma - Gruplama anlamı için model çizme - İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme	- Uygun açıklama - MTA - Gruplama anlamını kullanma "4'ün ne kadarı 2/3'tür?" - Gruplama anlamı için doğal sayılarla bölme örnekleri verme	- Uygun açıklama - MTA - Ortak payda algoritması - Paydayı 1 yapma - Gruplama anlamını kullanma	- Uygun açıklama - UTA - Paylaştırma anlamını kullanma - Paylaştırma anlamı için model çizme

Öğretmen adayları öğretimden sonra uygulanan KÇB son-testinde on üçüncü görevde verilen $\frac{1}{3} \div 4$ ve $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ işlemlerinin aynı olup olmadığına ilişkin ÖA6 ve ÖA4 MUTA yaparken diğer öğretmen adayları UTA yapmışlardır. Öğretmen adaylarının açıklamaları incelendiğinde bu iki işlemi bölmenin gruptama (ÖA6, ÖA3, ÖA1, ÖA4) ve paylaşırma anlamını (ÖA2, ÖA5) kullanarak, her iki işlem için model çizerek (ÖA6, ÖA2, ÖA4, ÖA3, ÖA5, ÖA1), model üzerinden bu işlemin karşılık geldiğini göstererek (ÖA6, ÖA3, ÖA1), model üzerinden farklı işlemler olduğunu ifade ederek (ÖA2, ÖA4, ÖA5) ve işlemleri sözel olarak açıkladıkları görülmektedir (Tablo 4.93).

Öğretmen adayları öğretimden önce her iki işlem için model çizip işlemlerin sonuçlarının aynı olduğunu ifade ederek bu iki işlemin aynı olduğunu belirtirken ve bölmenin anlamından bahsetmiyorken öğretimden sonra bölmenin anlamlarını ele alarak verilen iki işlemin aynı olup olmadığını açıklamışlardır. Buna göre öğretmen adaylarının bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemi ve bu işlemin gruptama anlamı için ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen çarpma işleminin aynı olup olmadığını açıklama bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir.

ÖA6 bu iki işlemi önce son-testte bölmenin gruptama anlamını kullanarak ve bölme işleminin çarpmanın tersi olarak ifade edip çarpmanın tanımına göre ifade ederek matematiksel temelli olarak açıklamıştır (Şekil 4.121), sonra son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) model çizerek (Şekil 4.122) uygulama temelli olarak açıklamıştır.

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{3} \div 4 = ? \quad \downarrow \text{bölünem} \quad 4 \text{ nesneden oluşuyor.} \\
 &\quad \quad \quad \frac{1}{3} \text{ nesnem} \quad \text{bölünem} \text{in ne kadarı olur.} \\
 &\downarrow \text{bölünem} \text{in} \quad \frac{1}{4} \text{ 'u} \quad 1 \text{ nesnem olur} = \frac{1}{4} \times 1 \\
 &\frac{1}{3} \text{ nesnem de} \quad 1 \text{ nesnem in} \quad \frac{1}{3} \text{ 'üdür} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4} \times 1\right) \\
 &\quad \quad \quad = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \\
 &\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \downarrow \text{bölünem} \quad \frac{1}{4} \text{ 'u} = \frac{1}{4} \times 1 \\
 &\quad \quad \quad \downarrow \text{bölünem} \quad \frac{1}{4} \text{ 'u} \text{ 'u} \quad \frac{1}{3} \text{ 'u} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4} \times 1\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \\
 &\text{Görüldüğü gibi bu işlemler aynıdır. Ahu'ya bu şekilde açıkladım.}
 \end{aligned}$$

Şekil 4.121. KÇB son-testinde 13. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı MTA

ÖA6 burada $\frac{1}{3} \div 4$ işleminin gruptama anlamını ele almış ve bunun üzerinden $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ işlemi ile aynı anlamı ifade ettiklerini doğru bir şekilde açıklamıştır. ÖA6'nın bu açıklaması incelendiğinde bölmeyi çarpmanın tersi olarak ifade ettiği ve çarpmanın tanımını kullanarak grup ve nesne ile açıkladığı söylenebilir. Burada “1 grup” yerine “1 bütün” ifadesini kullanmıştır. Son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) burada bölme

işlemi için hangi anlamını kullandığı sorulduğunda grupta anlamı olduğunu açıklarken “bütün” ifadesini “grup” olarak şu şekilde açıklama yaparak düzeltmiştir: “Aslında ben işleme daha kolay gitmek için öyle bir şey yapmışım da. Yani her bir grubumda 4 nesnem vardır, şu şekilde diyecek olursak ($1/3 = X \cdot 4$ işlemini yazıyor ve gösteriyor), her bir grubumda 4 nesnem vardır, X grubumda $1/3$ nesnem varsa, buradaki grup sayım kaçtır şeklinde. Böyle düşünecek olursak grupta anlamı.” Bu açıklaması ÖA6’nın son-testte bölmeyi çarpmanın tersi olarak ifade ettiğini desteklemektedir. ÖA6 son-testte matematiksel olarak işlem üzerinden açıklama yaparken son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) model çizerek (Şekil 4.122) grupta anlamını daha ayrıntılı olarak şöyle açıklamıştır: “Şimdi bir grubumda 4 nesnem vardır (yan yana ayrı olarak 4 daire çiziyor), $1/3$ nesnem grubumun ne kadarına denk gelmektedir? Yani bu, grubumun ne kadarına denk gelmektedir (altına bir daire çiziyor, 3 eş parçaya bölüyor ve 1 parçasını tarıyor)? Ne kadar grup yazayım da. Baktığım zaman her birini bu şekilde yapacak olursam, yani $1/3$ ’lük parçalara ayıracak olursam grubumun ne kadarına denk geldiği bulunur. 1 grubun $1/4$ ’ü bu (bir daireyi gösteriyor), onun da $1/3$ ’ü $1/3$ nesnem oluyor (dairenin taralı olan bir parçayı gösteriyor).” Burada ÖA6 model üzerinden bu bölme işlemine bu çarpma işleminin karşılık geldiğini ifade etmiştir.



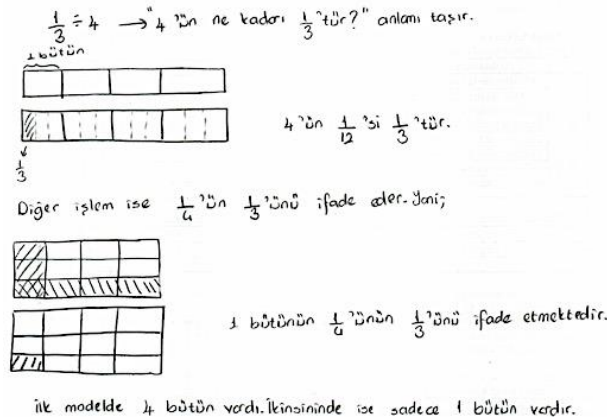
Şekil 4.122. Görüşme-8’de KÇB son-testinde 13. görev için ÖA6’nın çizdiği model

Bu açıklamalarına göre ÖA6’nın bölmenin grupta anlamına ilişkin kavramsal anlamasının derinleştiği söylenebilir. Sonuç olarak ÖA6 verilen iki işlemin aynı olup olmadığını hem matematiksel hem uygulama temelli olarak açıklamıştır. $1/3 \times 1/4$ işlemini sadece “1 bütünün $1/4$ ’ünün $1/3$ ’ü” şeklinde sözel olarak ifade edip adım adım yazmıştır ve $1/3 \div 4$ işleminin grupta anlamına karşılık geldiğine işaret etmiştir. Ön-testte bu işlemi bölmenin paylaşma anlamı ile ilişkilendirirken burada grupta anlamıyla açıklaması bir kesri bir doğal sayıya bölme işleminin grupta anlamına ilişkin kavramsal anlamasının geliştiğini göstermektedir.

ÖA4 verilen bu iki işlemi ÖA6 gibi bölmenin grupta anlamını kullanarak ve bölmeyi çarpmanın tersi şeklinde ifade ederek benzer şekilde sözel olarak ve model çizerek açıklamıştır. Bunlara ilaveten gerçek yaşamdan ip örneği vererek şöyle problem yoluyla da ifade etmiştir: “60 cm ipin $1/3$ ’ünü 4 eş parçaya ayırıp her bir parçanın uzunluğunu

sorabilirdim. Yine benzer şekilde 60 cm ipin $1/4$ 'ünün $1/3$ 'ünü sorup iki cevap arası ve işlemlerdeki benzerlikleri sorardım.” ÖA4 de ÖA6 gibi model üzerinden verilen bölme işleminin grupta anlamı için bu çarpma işleminin karşılık geldiğini ifade etmiştir. ÖA4 öğretimden önce yine gerçek yaşamdan örnek vermiştir ancak sadece verilen bu iki işlemin sonuçlarının aynı olduğunu ifade etmiştir, bölmenin anlamından bahsetmemiştir. Burada ise bölmenin grupta anlamını ele alarak verilen bölme işlemine bu çarpma işleminin karşılık geldiğini model üzerinden ve sözel olarak açıklamıştır. Buna göre ÖA4'ün bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin grupta anlamına ilişkin kavramsal anlamasının geliştiği söylenebilir.

ÖA3 ve ÖA1 de ÖA6 ve ÖA4 gibi verilen işlemleri bölmenin grupta anlamını kullanıp model çizerek açıklamışlardır. Her iki öğretmen adayı öğretimden önce bu iki işlemi sadece sözel olarak ifade edip sonuçlarının aynı ama sözel ifadelerinin farklı olduğunu belirtirken ve bölmenin anlamından bahsetmiyorken burada bölmenin grupta anlamını kullanarak açıklamışlardır. Buna göre ÖA3 ve ÖA1'in bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin grupta anlamına ilişkin kavramsal anlamalarının geliştiği söylenebilir. ÖA3 öncelikle $1/3 \div 4$ işlemini “4'ün ne kadarı $1/3$ 'tür?” olarak ifade etmiştir ve bu işlemi kesir çubuğu modeli çizerek göstermiştir (Şekil 4.123). İlk kesir çubuğunda bir parçayı “bir bütün” olarak 4 bütünü göstermiştir ve ikinci kesir çubuğunda $1/3$ 'ün 4'ün $1/12$ 'si olduğunu ifade etmiştir. Sonra $1/3 \times 1/4$ işlemini “ $1/4$ 'ün $1/3$ 'ü” olarak ifade etmiştir ve bu işlemi dikdörtgensel alan modeli çizerek göstermiştir (Şekil 4.123).

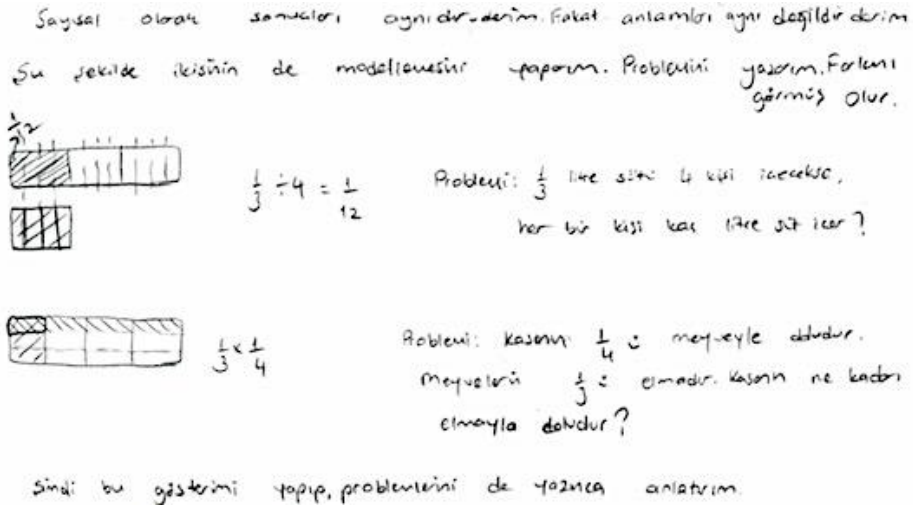


Şekil 4.123. KÇB son-testinde 13. göreve ilişkin ÖA3'ün yaptığı UTA

ÖA3 modelin ilk basamağında dikdörtgeni “bir bütün” olarak almıştır, önce $1/4$ 'ünü, sonra aynı dikdörtgenin $1/3$ 'ünü göstermiştir ve ikinci basamağında bu ikisinin kesişiminin 1 bütünü $1/4$ 'ünün $1/3$ 'ü olduğunu ifade etmiştir. Bu şekilde parçalama yaptığını son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) modeli açıklarken şu şekilde belirtmiştir: “İlk başta $1/4$ çiziyorum (çizdiği ikinci modelin birinci basamağını gösteriyor). Bunu ayrı ayrı

göstermemişim ama ilk başta şunu çiziyorum, dört, daha sonra bunun 1/3'ünü alıyorum, bu ikisinin kesiştiği kısım benim cevabım oluyor.” ÖA3 iki model arasındaki farkı $1/3 \div 4$ işleminde 4 bütün, $1/3 \times 1/4$ işleminde 1 bütün olması ile açıklamıştır. Burada $1/3 \div 4$ işlemine bölme işleminin gruptama anlamı için çarpma işlemi olarak $1/3 \times 1/4$ işlemi karşılık geldiği için bu anlamı ele almış olabilir. Bu durumu aydınlatmak adına son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) neden paylaşırma anlamı yerine gruptama anlamını tercih ettiği sorulmuştur ve bu anlamı öğrenince daha anlamlı geldiğini ifade etmiştir. ÖA1 de benzer şekilde her iki işlemi sözel olarak ifade edip model çizerek göstermiştir.

ÖA2 ve ÖA5 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak verilen iki işlemi bölmenin paylaşırma anlamını ele alıp model çizerek göstermişlerdir ve bu model üzerinden bu iki işlemin farklı olduğunu açıklamışlardır. ÖA5 ön-testte bu iki işlemin aynı olup olmadığını açıklayamıyorken ve ÖA2 de problem kurup model çizerek sadece işlemlerin sonuçlarının aynı olduğunu ifade edip bölmenin anlamından bahsetmiyorken burada bölmenin paylaşırma anlamını ele alarak açıklamışlardır. Buna göre her ne kadar burada verilen bölme işlemine gruptama anlamı için bu çarpma işleminin karşılık geldiğinden bahsetmeseler de paylaşırma anlamına göre açıklayıp farklı olduklarını ifade ederek ön-testten son-teste bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaşırma anlamına ilişkin kavramsal anlamalarının geliştiği söylenebilir. ÖA5 son-testte önce verilen iki işlemin sonucunun aynı olduğunu ancak anlamlarının farklı olduğunu belirtmiştir, sonra her bir işlem için model çizerek (Şekil 4.124) ve problem kurarak şöyle açıklamıştır: *“Sayısal olarak sonuçları aynıdır derim. Fakat anlamları aynı değildir derim. Şu şekilde ikisinin de modellemesini yaparım. Problemini yazarım. Farkını görmüş olur. ‘1/3 litre sütü 4 kişi içecekse, her bir kişi kaç litre süt içer?’, ‘Kasanın 1/4’ü meyveyle doludur. Meyvelerin 1/3’ü elmadır. Kasanın ne kadarı elmayla doludur?’ Şimdi bu gösterimi yapıp, problemlerini de yazınca anlatırım.”* Burada ÖA5 modelin yanısıra her iki işlem için problem de kurmuştur. ÖA2 de açıklamasında ÖA5 gibi model çizmiştir ancak problem kurmamıştır. Her iki öğretmen adayı bu modeller üzerinden verilen bu iki işlemin bölmenin paylaşırma anlamı için farklı olduğunu açıklamışlardır.

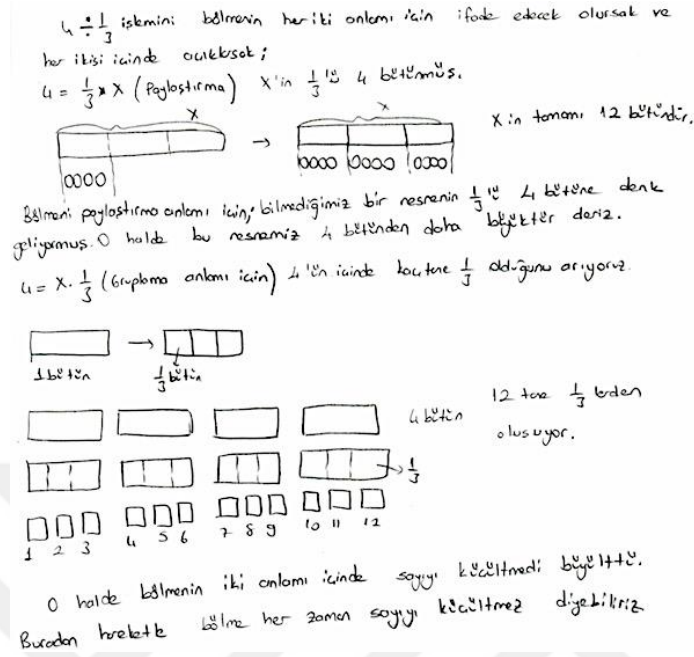


Şekil 4.124. KÇB son-testinde 13. göreve ilişkin ÖA5'in yaptığı UTA

KÇB son-testinde on birinci görevde verilen $4 \div \frac{1}{3}$ işleminin sonucunun neden küçülmediğine ilişkin ÖA1 MUTA yaparken, diğerleri UTA yapmışlardır (Tablo 4.92). Öğretmen adayları verilen bu durumu son-testte bölmenin gruptama anlamını kullanarak, bu anlam için model çizerek ve işlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret ederek açıklamışlardır. Öğretimden önce ÖA5 hariç diğer öğretmen adaylarının bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini açıklama bilgilerinin zayıf olmadığı görülmüştür. ÖA5 bu durumu bölen kesrin basit kesir olması ile açıklarken diğer öğretmen adayları bölmenin gruptama anlamını kullanarak ve işlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret ederek açıklamışlardır. Öğretim sürecinde ÖA5'in bu durumu uygun bir şekilde bölmenin gruptama anlamını kullanarak ve işlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret ederek açıkladığı görülmüştür. Bu durumu bu şekilde açıklamanın bütün öğretmen adayları için son-testteki açıklamaları incelendiğinde devam ettiği görülmektedir. Buna göre ÖA5'in ön-testten öğretimin sonuna doğru bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini açıklama bilgisinin geliştiği ve bu bilginin diğer öğretmen adaylarınıninkiyle birlikte son-testte derinleştiği söylenebilir.

ÖA6 son-testte verilen durumu açıklarken diğer öğretmen adaylarından farklı olarak bölmenin gruptama anlamının yanı sıra paylaşırma anlamı için de model çizmiştir. ÖA6 öncelikle verilen işlemi $4 = \frac{1}{3} \cdot X$ olarak yazıp paylaşırma anlamı için bir model çizmiştir (Şekil 4.125). Burada "1 grup" yerine "1 nesne" kavramını kullanmıştır. Modeli incelendiğinde işlemi ve paylaşırma anlamını yansıtan bir model olduğu söylenebilir. Burada 1 küçük daireyi "1 bütün" olarak ifade etmiştir, işlemin sonucu olan 12'nin de bu

küçük dairelerden 12 tane olacağını ve 12 bütünü ifade edeceğini vurgulayarak sonucun daha büyük olduğunu açıklamıştır.



Şekil 4.125. KÇB son-testinde 11. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı UTA

ÖA6 ön-test/G1, G4 ve G5'teki açıklamalarından farklı olarak bölmenin paylaştırma anlamı için de açıklama yapmıştır. Buna göre bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin gruplama anlamının yanısıra paylaştırma anlamına ilişkin anlamasının da geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. Sonra ÖA6 verilen işlemi $4 = X \cdot 1/3$ olarak yazıp bölmenin gruplama anlamı için bir model çizmiştir. Bu işlemi "4'ün içinde kaç tane $1/3$ olduğunu arıyoruz." şeklinde sözel olarak ifade etmiştir. Modeli incelendiğinde işlemi ve gruplama anlamını yansıtan bir model olduğu söylenebilir. Burada bir kesir çubuğunu "1 bütün", üç eş parçaya böldükten sonra oluşan bir parçayı " $1/3$ bütün" olarak ifade etmiştir ve 4 bütünün 12 tane $1/3$ 'lerden oluştuğunu açıklamıştır. Son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) gruplama anlamını kullanarak işlemin sonucunun neden küçülmeyip büyüdüğünü nasıl açıkladığı sorulduğunda "yeni bütün" kavramını ele alarak şu şekilde açıklamıştır: "Şimdi biz 4 bütün elde ediyoruz ya, ikinci basamakta $1/3$ 'leri sorgularken bizim yeni bir bütünümüz oluyor. Biz buradaki bütünlerin büyüklüğüne bakmıyoruz mesela buradaki parçalar eşit, mesela 4 bütünü parçaladık yine aynı ama burada $1/3$ 'ten 12 tane var, yeni bütünümden 12 tane var, eski bütünümden 4 tane var. Hani buradaki bütünlerin büyüklüğünün önemi değil, sayıların, 4 ve 12'nin büyüklüğü önemli. O şekilde ifade edebilirim." Burada grubun büyüklüğünün değil grup sayısının büyüklüğüne dikkat çekmiştir ve işlemin sonucu olan 12 grup sayısı olduğu için işlemin sonucunun büyüdüğünü belirtmiştir. Bu açıklamalarına göre ÖA6'nın öğretimden önce bir doğal sayı

ile bir kesrin bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin varolan kavramsal anlamasının son-testte derinleştiği söylenebilir. Buna kanıt olarak özellikle şu ifadeleri gösterilebilir: *“...yeni bütünümden 12 tane var, eski bütünümden 4 tane var. Hani buradaki bütünlerin büyüklüğünün önemi değil, sayıların, 4 ve 12’nin büyüklüğü önemli.”* Ön-testte de referans alınan bütünlerin farklı olmasına işaret etmiştir ancak burada “yeni bütün” ve “eski bütün” kavramlarını kullanarak daha ayrıntılı ve açık bir şekilde belirtmiştir. Benzer şekilde ÖA3 ve ÖA5 de verilen durumu verilen işlemin gruplama anlamını ele alıp model çizerek açıklamışlardır, işlemdeki 4 ile işlemin sonucu olan 12 için referans alınan bütünlerin farklı olduğunu ve işlemin sonucunun grup sayısı olduğunu belirtmişlerdir. ÖA5 bu durumu öğretimden önce bölmenin basit kesir olması ile açıklıyorken öğretim sürecinde ve son-testte bölmenin gruplama anlamını kullanarak ve işlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret ederek açıklamıştır. Buna göre ÖA5’in bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin kavramsal anlamasının geliştiği söylenebilir. Diğer taraftan ÖA3 öğretimden önce bu kavramsal anlamaya sahiptir ve son-testte bu anlamasının derinleştiği söylenebilir. Buna kanıt olarak şu açıklaması gösterilebilir: *“İlk baştaki bütünü 1 iken, sonda 1/3’lerin kaç tane olduğunu sayıyorum. İşlemin sonucu küçülecek diye bir şey yok. Mesela burada bütünü 1 iken 1/3 oldu yani küçüldü. Bütünlerim küçüldüğü için ise sayıları arttı. Yani 1 daha büyük ve başta 4 tane birim vardı. Elimde aynı miktar nesnem varken bütünü 1/3 olur, 1/3’lerin sayısı artar ve benim burada aradığım “kaç grup” anlamı olduğu için sonuç da artar.”* ÖA3 ön-testte de referans alınan bütünlerin farklı olduğuna işaret etmiştir ancak burada ÖA3 grup ve nesne kavramlarını kullanarak grubun büyüklüğü ile grup sayısını vurgulamıştır.

ÖA4 ve ÖA2 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak verilen durumu açıklarken bölmenin gruplama anlamı için model çizmenin yanısıra problem de kurmuşlardır. ÖA2 verilen işlem için *“4 m’nin içindeki 1/3 m’lik kabloların 12 tane olduğunu göstererek açıklarız.”* şeklinde problem kurarken, ÖA4 bu işlem için *“Kerem 4 lira parasını günde 1/3 lira harcayacak şekilde kaç güne yayabilir?”* şeklinde bir problem kurmuştur. ÖA4, ÖA2’den farklı olarak model üzerinden işlemin sonucunun grup sayısı olduğunu açıkladıktan sonra verilen durumu bölmenin basit kesir olması ile de açıklamıştır. ÖA4’ün buna ilişkin açıklaması şu şekildedir: *“Yani ters çevir çarp çünkü basit kesrin payı paydadadan daha küçük, ters çevirince sayı ile mesela burada 4 ile 3 çarpılıyor, 3/1 (4 x 3/1 = 12 yazıyor). Bu yüzden büyüdü.”* Burada ÖA4 ters çevir çarp algoritması üzerinden hareket etmiştir ve kesrin operatör anlamını kullanarak pay ile çarpma ve paydaya bölme

şeklinde ifade etmiştir. Sonra bunu yine basit kesir üzerinden şöyle açıklamıştır: “Şimdi 4’ün içinde $1/3$ ’ten kaç tane olduğunu arıyoruz. Yani mesela A ’nın $1/3$ ’ü eşittir 4’müş yani A tane $1/3$, 4’müş ($A \times 1/3 = 4$ yazıyor). A tane $1/3$, 4 ise eğer A burada neden büyüdü yani ikisinden de büyük çünkü basit kesirle bölüyoruz haliyle daha büyümeyecek mi?” Burada basit kesire bölmeyi 1’den küçük bir sayıya bölme ile ilişkilendirmemiştir. Bunun yerine payının paydasından küçük olması ve ters çevir çarp algoritmasını uygulayınca payda ile çarpma ve paya bölme şeklinde ifade etmiştir.

ÖA2 ön-testte işlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etmiyorken burada açık bir şekilde ifade etmiştir. Buna göre ÖA2’nin bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini açıklama bilgisinin ön-testten son-teste geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. Diğer taraftan ÖA4 ön-testte bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini bölmenin gruplama anlamını kullanarak ve işlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret ederek açıklarken burada bununla beraber bölenin basit kesir olmasıyla ve ters çevir çarp algoritmasıyla da açıklamıştır. Buna göre ÖA4’ün öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin kavramsal anlamaya sahipken öğretimin sonunda hem işlemsel hem kavramsal anlamaya sahip olduğu söylenebilir.

ÖA1 ön-testte sadece bölmenin gruplama anlamını kullanarak ve doğal sayılarla bölme örnekleri vererek sözel bir şekilde açıklarken ve işlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret ederken son-testte hem model çizerek hem de sözel olarak ve grup sayısı ile grubun büyüklüğünü açık bir şekilde belirterek açıklamıştır (Şekil 4.126). Buna göre ÖA1’in ön-testten son-teste bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminin gruplama anlamına ilişkin anlamasının geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. ÖA1’in son-testte yaptığı açıklama şu şekildedir: “Öncelikle aşağıdaki soruları sorarak başladım. 1’in içinde kaç tane $1/2$ var? 1’in içinde kaç tane $1/3$ var? $1 \div 1/3 = 3$ tane diyecektir. Yukarıda da gördüğümüz gibi bir bütünün içinde kaç tane daha küçük parça aranıyor. Bu durumda aradığımız parça (bölen) ne kadar küçükse sonuç o kadar büyüyecektir. Bir bütünün içinde küçük parça mı çok olur yoksa büyük parça mı diye sorabiliriz. Bütündeki parça sayısı $4 \div 1/3 = 12$ bütünden fazladır. Dolayısıyla bölme her zaman sayıyı küçültmez. Eğer bütünden küçük birimler arıyorsak bölme sayıyı büyültür.”

Öncelikle aşağıdaki soruları sorarak başladım.

1'in içinde kaç tane $\frac{1}{2}$ var? $\square \Rightarrow \square \Rightarrow 2$ tane $\frac{1}{2}$ var.

1'in içinde kaç tane $\frac{1}{3}$ var? $1 : \frac{1}{3} = 3$ tane diyecekti.

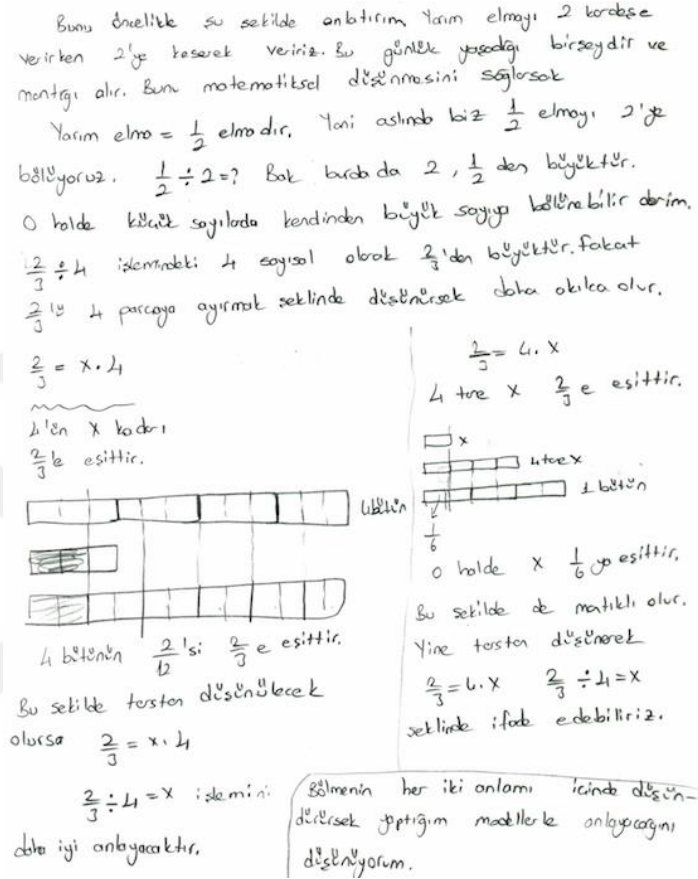
Yukarıda da gördüğümüz gibi bir bölünen içinde kaç tane bölme
 küçük parça arıyoruz. Bu durumda aradığımız parça (bölme) ne kadar
 küçükse sonuç o kadar büyüyecektir. Bir bölünen içinde küçük parça
 mı yoksa büyük parça mı diye sorabiliriz. Bölündeki
 parça sayısı $4 : \frac{1}{3} = 12$ bölünen fazladır. Dolayısıyla bölme
 her zaman sayıyı küçültmez. Eğer bölünen küçük birimler arıyorsa
 bölme sayısı büyütür.

Şekil 4.126. KÇB son-testinde 11. göreve ilişkin ÖA1'in yaptığı MUTA

KÇB son-testinde on dokuzuncu görevde verilen $\frac{2}{3} \div 4$ işlemi için bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya bölünebileceğine ilişkin ÖA3 ve ÖA1 MTA yaparken, diğer öğretmen adayları UTA yapmışlardır (Tablo 4.92). Öğretmen adayları verilen durumu bölmenin paylaşırma anlamını kullanarak (ÖA6, ÖA2, ÖA4, ÖA5), grupta anlamını kullanarak (ÖA6, ÖA3, ÖA1), model çizerek (ÖA6, ÖA2, ÖA4) ve gerçek yaşamdan örnek vererek (ÖA6, ÖA2, ÖA5) açıklamışlardır. Öğretimden önce ÖA4 ve ÖA3 bu durumu tam olarak açıklayamıyorlarken, ÖA5 uygun bir açıklama yapamıyorken diğer öğretmen adayları uygun bir şekilde açıklamışlardır. Öğretim sürecinde ve öğretimden sonra son-testte öğretmen adaylarının hepsinin bu durumu uygun bir şekilde açıkladıkları görülmektedir. Buna göre ÖA4, ÖA3 ve ÖA5'in bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya bölünebilmesini açıklama bilgisinin ön-testten son-teste geliştiği, diğer öğretmen adaylarının bu bilgisinin derinleştiği söylenebilir.

Öğretmen adaylarından ÖA6, ÖA3 ve ÖA1 verilen durumu ön-testte bölmenin paylaşırma anlamı ile açıklıyorlarken son-testte bölmenin grupta anlamını kullanarak açıklamışlardır. Öğretimden önce bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin grupta anlamına ilişkin anlamaya sahip değilken burada bu anlamı kullanmaları öğretimin sonunda bu anlama ilişkin kavramsal anlamlarının geliştiğini göstermektedir. ÖA6 burada ÖA3 ve ÖA1'den farklı olarak hem paylaşırma hem de grupta anlamı için model çizerek verilen durumu açıklamıştır. ÖA6 öncelikle verilen durumu günlük yaşamdan "elma" örneği vererek bunun üzerinden şöyle açıklamıştır: "Yarım elmayı 2 kardeşe verirken 2'ye keserek veririz. Yarım elma, $1/2$ elmadır. Yani aslında biz $1/2$ elmayı 2'ye bölüyoruz. Burada 2, $1/2$ 'den büyüktür. O halde küçük sayılar kendinden büyük sayıya bölünebilir derim." Burada 2'ye bölmeyi "2 parçaya ayırmak" olarak bölmenin

paylaştırma anlamını kullanarak açıklamıştır. Sonra 4'ün de $\frac{2}{3}$ 'ten büyük bir sayı olduğunu ama "4 parçaya ayırmak" şeklinde düşünülmesini ifade ederek yine bölmenin paylaştırma anlamı ile açıklamasına devam etmiştir. Daha sonra işlemin her iki anlamı için model çizmiştir (Şekil 4.127).



Şekil 4.127. KÇB son-testinde 19. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı UTA

Burada ÖA6 bu iki anlamı model çizerek vermesinin amacını son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) şöyle açıklamıştır: "Aslında burada 4 bütün, $\frac{2}{3}$ hani burada bölmede $\frac{2}{3}$ daha küçük filan ya. Hani bunu anlam üzerinden göstererek bunların büyüklüğünün küçüklüğünün bir önemi olmadığını, büyük sayının da küçük sayıya bölünebileceğini, aslında ne ifade ettiğini vurgulamak istedim. Yani o şekilde, modellersek sayıya takılmıyoruz, sayının bir önemi olmuyor o zaman." Buna göre 4'ün ne ifade ettiğini modelde 4'ü göstererek anlamını vurgulamak için bu modelleri çizdiği söylenebilir. Modelleri incelendiğinde bölmeyi çarpma üzerinden açıkladığı ve buna göre model çizdiği görülmektedir. İlk modeli bölmenin gruptama anlamını, ikinci model paylaştırma anlamını yansıtmaktadır. İlk modelinde işlemi "4 bütününe ne kadar $\frac{2}{3}$ 'tür" şeklinde ifade etmiştir. İkinci modelinde 4 eş parçaya ayırmak yerine çarpmanın tekrarlı toplama anlamından yararlanarak işlemi "4 tane x, $\frac{2}{3}$ 'e eşittir" şeklinde ifade etmiştir. ÖA6'nın verilen işlemi bu şekilde anlamlarını vurgulayarak ve günlük hayattan örnek vererek açıklaması bir kesir

bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin kavramsal anlamasının ön-teste göre derinleştini göstermektedir. Çünkü ön-testte sadece paylaştırma anlamı için buradakine benzer şekilde model çizip, işlemdeki 4 ile $2/3$ için referans alınan bütünlerin farklı olduğuna işaret edip gerçek yaşamdan “masa” örneği ile açıklarken burada bunların yanısıra bölmenin grupta anlamı ile de açıklamıştır ve modelleri ve açıklamaları ön-testte göre daha detaylı ve açıktır.

ÖA3 ve ÖA1 verilen durumu ÖA6 gibi bölmenin grupta anlamını kullanarak ancak model çizmeden matematiksel temelli olarak açıklamışlardır. ÖA1 bu durumu şöyle açıklamıştır: “ $2/3 = X \cdot 4$

4’ün ne kadarı $2/3$ ’tür?

1’in ne kadarı $1/2$ ’dir? (Yarısı yani $1/2$ ’si diyecektir.) $1/2 \div 1$

2’nin ne kadarı 1’dir? (Yarısı yani $1/2$ ’si diyecektir.) $1 \div 2$

10’un ne kadarı 2’dir? ($1/5$ ’i demesini bekleriz.) $2 \div 10$

4’ün ne kadarı $2/3$ ’tür?

Yukarıda örneklerde de gösterildiği gibi $2/3$ ’ün ne kadarı diye sorduğumuzda ($2/3$ ’ün içinde kaç tane 4 var?” küçük bir bütünün büyük parçası, birim arıyoruz. Sayı daha da küçülecektir. Bu bölünemeyeceği anlamına gelmez. $1/2$ ’nin içinde 1 kaç tanedir?” Burada ÖA1 verilen işlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etmiştir ve grubun büyüklüğü arttıkça grup sayısının küçüleceğini ifade etmiştir. ÖA1 ön-testte bu durumu gerçek yaşamdan elma örneği vererek bütünü parçalama şeklinde açıklarken burada bölmenin grupta anlamını ele alarak ve grup sayısı ile grubun büyüklüğüne işaret ederek açıklamıştır. ÖA3 de ön-testte bölmenin paylaştırma anlamını ele alarak sadece işlemi açıklayıp neden bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya bölünebildiğini açıklayamıyorken son-testte bölmenin grupta anlamını ele alarak ÖA1’in açıklamasına benzer şekilde açıklamıştır. Buna göre ÖA1 ve ÖA3’ün bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin grupta anlamına ilişkin kavramsal anlamlarının ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir.

ÖA2, ÖA4 ve ÖA5 verilen durumu bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak ve gerçek yaşamdan örnek vererek açıklamışlardır. ÖA2 ve ÖA4 açıklamasında verilen işlem için model çizerken ÖA5 model çizmek yerine somut nesne kullanacağını belirtmiştir. ÖA5 öğretimden önce bu durumu açıklayamıyorken ve ÖA4 de bir bütün yerine çokluk üzerinden hareket ediyorken burada uygun bir şekilde açıkladıkları görülmektedir. Buna göre ÖA5 ve ÖA4’ün bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya bölünebildiğini

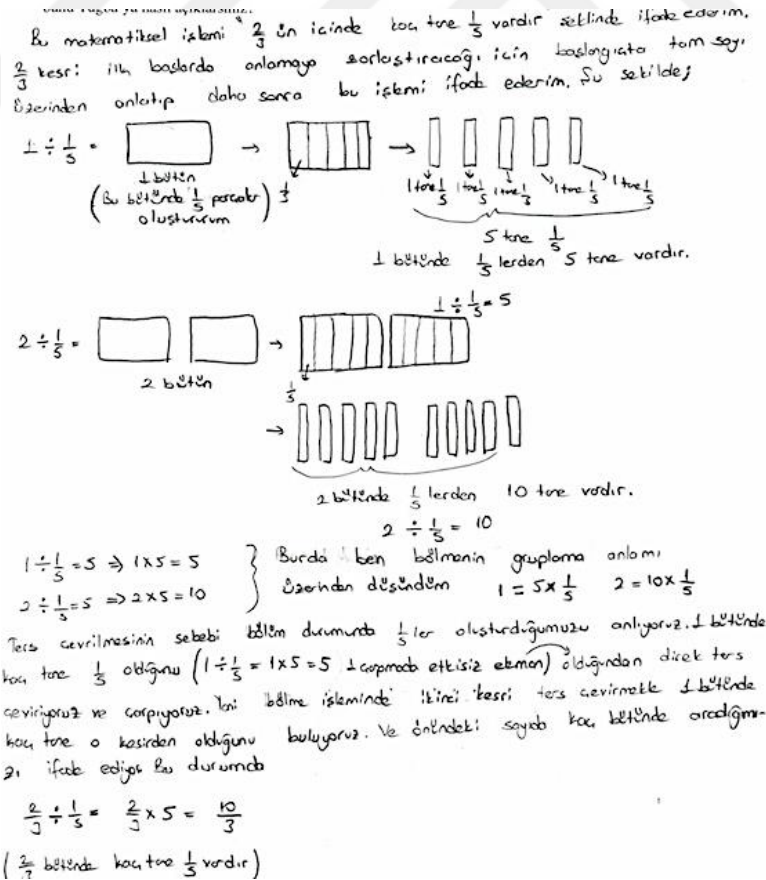
açıklama bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir. ÖA2'nin ise bu bilgisinde ön-testten son-teste çok fazla gelişme olduğu söylenemez çünkü her iki testte de bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak uygun bir şekilde açıklamıştır. ÖA5'in verilen duruma ilişkin açıklaması şu şekildedir: *“Bu durumu bir örnekle açıklayım. Salih'e derim ki senin 2/3 elman var. 4 arkadaşın bunu istiyor. 4'e bölmez misin? Yoksa 2/3, 4'e bölünmez der ve kendin mi yersin diye esprili bir yaklaşım kullanırım. Burada Salih'e bölmenin paylaştırma anlamı olduğunu yani 2/3 elmasını 4 kişiye bölüştürdüğünde her bir arkadaşına bir elmanın ne kadarı düştüğünü göreceğini anlatırım. Bunu modelle göstermek yerine sınıfa elma getirebilirim.”* Burada ÖA5 bir elmanın 2/3'ünü 4 kişiye paylaşmayı ele alarak 4'ü vurguladığı ve işlemdeki 2/3 ile 4'ün farklı şeyleri ifade ettiğine işaret ettiği söylenebilir. Ön-testte ÖA5 bu durumu açıklayamazken burada bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak açıklamıştır. Buna göre ÖA5'in bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaştırma anlamına ilişkin anlamasının geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

KÇB son-testinde üçüncü görevde verilen $\frac{2}{3} \div \frac{1}{5}$ işlemi için ters çevir çarp algoritmasına ilişkin ÖA1 ve ÖA3 MTA, ÖA6 MUTA yaparken ÖA2, ÖA4 ve ÖA5 UTA yapmışlardır (Tablo 4.92). Öğretmen adaylarının bu açıklamaları incelendiğinde bu algoritmayı bölmenin gruptama anlamını kullanarak (ÖA6, ÖA2, ÖA5, ÖA1), paylaştırma anlamını kullanarak (ÖA4), model çizerek (ÖA6, ÖA2, ÖA5, ÖA4) açıkladıkları görülmektedir. Bununla beraber ortak payda algoritması (ÖA3, ÖA1) ve paydayı 1 yapma (ÖA1) ile de açıklamışlardır. Öğretimden önce ön-testte ÖA1 hariç diğer öğretmen adayları bu algoritmayı açıklayamıyorlarken öğretim sürecinde ÖA4 ve ÖA5 hariç diğer öğretmen adayları bu algoritmayı açıklayarak gelişim göstermişlerdir. ÖA4 ve ÖA5 ise son-testte bu algoritmayı uygun bir şekilde açıklamışlardır. Buna göre öğretmen adaylarının ters çevir çarp algoritmasını açıklama bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

ÖA6 öncelikle verilen işlemi “2/3'ün içinde kaç tane 1/5 vardır?” şeklinde sözel olarak ifade etmiştir ve model çizerek ters çevir çarp algoritmasını bölmenin gruptama anlamı üzerinden açıklamıştır (Şekil 4.128). ÖA6 burada bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemine ilişkin modeller çizerek gösterdikten sonra iki kesrin bölme işlemini ifade etmiştir. Sonra bu modeller üzerinden elde ettiği sonuçları matematiksel olarak göstermiştir ve birbirleriyle ilişkilendirmiştir. Bunu sözel olarak şu şekilde açıklamıştır:

“Ters çevrilmesinin sebebi bölüm durumunda $1/5$ 'ler oluşturduğumuzu anlıyoruz. 1 bütünde kaç tane $1/5$ olduğunu ($1 \div 1/5 = 1 \times 5 = 5$), 1 çarpmada etkisiz eleman olduğundan direk ters çeviriyoruz ve çarpıyoruz. Yani bölme işleminde ikinci kesri ters çevirmekle 1 bütünde kaç tane o kesirden olduğunu buluyoruz. Ve önündeki sayı da kaç bütünde aradığımızı ifade ediyor. Bu durumda $2/3 \div 1/5 = 2/3 \times 5 = 10/3$ ($2/3$ bütünde kaç tane $1/5$ vardır)” Burada ÖA6 bölmenin gruplama anlamından yararlanmıştır ve ters çevrilen sayının içinde aranan sayıdan kaç tane olduğunu gösterdiğini vurgulayarak grup sayısına işaret etmiştir.

ÖA6 ön-testte model çizip bölmenin paylaştırma anlamı üzerinden açıklamaya çalışmıştır ama başarılı olamamıştır, modeli ve açıklamaları işlemi ve paylaştırma anlamını yansıtmamıştır. Burada ise bölmenin gruplama anlamını kullanmıştır, hem modeli hem de açıklamaları işlemi ve bu anlamı yansıtmıştır. Bununla beraber ters çevir çarp algoritmasının işlemin sonucunu nasıl verdiğini tam olarak açıklamıştır. Buna göre ÖA6'nın ters çevir çarp algoritmasını açıklama bilgisinin ön-testten son-teste geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.



ÖA3 verilen işlemin sonucunu neden ters çevir çarp algoritmasının verdiğini ortak payda algoritmasını kullanarak şöyle açıklamıştır: $\frac{2}{3} \div \frac{1}{5} = \frac{10 \div 3}{15 \div 15} = \frac{10 \div 3}{1} = \frac{10}{3}$. Ön-testte ÖA3

bunu açıklayamazken öğretim sürecinde ve son-testte doğru bir şekilde açıklamıştır. Buna göre ÖA3'ün bu algoritmayı açıklama bilgisinin ön-testten son-teste geliştiği ve işlemsel düzeyde olduğu söylenebilir. ÖA1 ön-testte bu algoritmayı paydayı 1 yapma ile açıklıyorken son-testte bununla beraber ortak payda algoritmasıyla ve bölmenin gruptama anlamı ile de açıklamıştır (Şekil 4.129). ÖA1 ters çevir çarp algoritmasını önce ortak payda alma ile, sonra paydayı 1 yapma ile göstermiştir. En son bölmenin gruptama anlamından yararlanarak $2/3$ 'ün içinde $1/5$ 'in kaç tane olduğunu $1/5$ 'i ters çevirip çarparak bulunacağını göstermiştir.

$\frac{2}{3} : \frac{1}{5}$

Ortak payda yaparak yapabiliriz. $\frac{2}{3} : \frac{1}{5} = \frac{10 \div 3}{15 \div 15} = \frac{10}{3}$

paydayı 1 bölünmüş gibi düşünürsek
yani paydayı 1 yapıp 1 bölünmüşten
(işlemleri aynı cinsten yapabilmek için) de

$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 1} = \frac{10}{3}$

Ya da başka bir yol olarak şöyle de:

2' 1'in içinde $\frac{1}{2}$ kaç tane? $1 : \frac{1}{2} = 2$ $\Rightarrow$ 2'nin içinde $\frac{1}{2}$ kaç tane? $2 : \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 4$

3' 1'in içinde $\frac{1}{3}$ kaç tane? $1 : \frac{1}{3} = 3$ $\Rightarrow$ 2'nin içinde $\frac{1}{3}$ kaç tane?

2'nin içinde $\frac{1}{3}$ kaç tane? $2 : \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6$

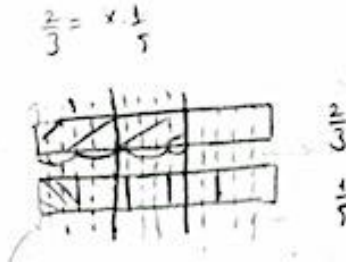
Bu şekilde bildiği basit olan sorulardan genel bir sonuca ulaşmasını yani "birinci kesri aynen alıp 2. kesri ters çevirip çarpacağım sonuca ulaşırım" demesini bekleriz.

Şekil 4.129. KÇB son-testinde 3. göreve ilişkin ÖA1'in yaptığı MTA

Son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) ÖA1'e ters çevir çarp algoritmasını neden birden çok yolla açıkladığı sorulmuştur ve ÖA1 bunu şöyle açıklamıştır: "Çünkü hani birçok yol öğrendik, tek bir yola bağımlı kalmayalım. Mesela şundan hep giderse toplama, çıkarma işlemi ile belki karıştırabilir (ortak payda algoritmasını gösteriyor). Bu da hani işlemleri biraz daha uzatıyor (paydayı 1 yapmayı gösteriyor). Hepsini en azından göstermek daha mantıklı geldi bana. 1'in içinde $1/2$ kaç tane, bu da hani ters çevir çarp'ın başka bir anlamı." ÖA1 bu algortmayı ön-testte sadece paydayı 1 yapma ile açıklıyorken burada ortak payda algoritması ve gruptama bölme anlamı ile de açıklamıştır. Buna göre ÖA1'in

ters çevir çarp algoritmasını açıklama bilgisinin ön-testten son-teste geliştiği ve hem işlemsel hem kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

ÖA2 ve ÖA5 ters çevir çarp algoritmasını bölmenin gruptama anlamını kullanarak açıklamışlardır. Her iki öğretmen adayı da ön-testte bu algoritmayı açıklayamıyorlarken, öğretim sürecinde ÖA2 bunu açıklayarak gelişim göstermiştir ama ÖA5 öğretim sürecinde de açıklayamamıştır. ÖA5'in bu algoritmayı son-testte açıkladığı görülmektedir. Buna göre ÖA2 ve ÖA5'in ters çevir çarp algoritmasını açıklama bilgilerinin ön-testte son-teste geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. ÖA5 bu algoritmayı model çizerek şu şekilde açıklamıştır: “ $2/3 = X \cdot 1/5$. $2/3$ 'ün içinde kaç tane $1/5$ vardır sorusunun modellemesini yapalım beraber derim ve çizerim yandaki gibi (Şekil 4.130). Sonuca da şöyle diyerek ulaşıyoruz. $2/3 \div 1/5$ işleminde sorulan $2/3$ 'ün içinde kaç tane $1/5$ vardır. İki bütünü de 15 eş parçaya ayırdıktan sonra bakarız derim. 3 tane $1/5$ vardır. Bunu göstermesi gayet kolay olur. Sonra $1/15$ 'lik bir parça kalır onu da $1/5$ 'in $1/3$ 'ü diyerek sonucu şöyle ifade ederim. $3 + 1/3$ tane $1/5$ vardır ve ters çevir çarp anlamına bundan sonra gelirim. $1/5$ 'in bütünü 5'e böleriz. Her biri yeni bir bütün olur. Elimizde 5 bütün vardır. Bunun $2/3$ 'ünü gösterirsek de sonuca ulaştığımızı gösteririm.”



Şekil 4.130. KÇB son-testinde 3. görevde ÖA5'in çizdiği kesir çubuğu modeli

ÖA5 öncelikle verilen işlemi çarpma üzerinden $2/3 = X \cdot 1/5$ şeklinde yazmıştır ve sözel olarak “ $2/3$ 'ün içinde kaç tane $1/5$ vardır” şeklinde ifade etmiştir. Burada ÖA5'in bölmenin gruptama anlamını kullandığı görülmektedir. Sonra bu işlemi ve gruptama anlamını yansıtan bir kesir çubuğu modeli çizmiştir. Modelinde önce iki kesir çubuğu çizmiştir, ilkinin 3 eş parçaya bölüp 2 parçasını taramıştır ve ikincisini 5 eş parçaya bölüp bir parçasını taramıştır. Sonra ilk kesir çubuğunun her bir parçasını 5 ve ikinci kesir çubuğunun her bir parçasını 3 eş parçaya bölerek gruptama anlamında ortak payda algoritmasını kullanmıştır. Buradan işlemin sonucunu $3 + 1/3$ olarak ifade etmiştir. Daha sonra ters çevir çarp algoritmasını açıklarken bir bütünün $1/5$ 'ini yeni bütün olarak ifade etmiştir ve 5 tane $1/5$ 'in bir bütünü oluşturduğuna, buradan bu bütünün $2/3$ 'ünü alarak işlemin sonucuna ulaşılacağına yani $2/3 \times 5$ ($\times 1/5$) işlemine işaret ettiği söylenebilir. Bunu

son-teste ilişkin yapılan görüşmedeki (G8) şu açıklaması desteklemektedir: “Bir bütünü beş parçaya bölünce 1/5 oluyor, artık diyorum ki 1/5’i bütün olarak görelim, elimizde beş tane bütün oldu o zaman diyorum. Bunun 2/3’ünü gösterince sonuca ulaştığımızı görüyoruz. Oradan da 5’in 2/3’ü oluyor yani 2/3 çarpı 5’i oradan görüyoruz.” ÖA2 de ÖA5 gibi bölmenin gruptama anlamını ele alarak sayı doğrusu modeli çizmiştir ve bu model üzerinden ters çevir çarp algoritmasını benzer şekilde açıklamıştır.

ÖA4 ters çevir çarp algoritmasını ÖA5 gibi hem ön-testte hem de öğretim sürecinde açıklayamamıştır. ÖA4’ün son-testte bu algoritmayı açıkladığı görülmektedir. ÖA4 bu algoritmayı açıklamak için diğer öğretmen adaylarından farklı olarak bölmenin paylaşırma anlamını ele almıştır ve bu anlamı yansıtan bir kesir çubuğu modeli çizerek bunun üzerinden doğru bir şekilde açıklamıştır (Şekil 4.131). ÖA4 her ne kadar verilen bölme işlemini $A \times 1/5 = 2/3$ şeklinde yazsa da modelinde bölmenin paylaşırma anlamını kullandığı görülmektedir. Buna göre ÖA4’ün bölmenin iki anlamına ilişkin ikilem yaşadığı söylenebilir. Bu ikilem son-teste ilişkin yapılan görüşmede (G8) de devam etmiştir. ÖA4 önce yazdığı bu işleme bakarak gruptama anlamını kullandığını belirtmiştir ama sonra “A’nın 1/5’i” şeklinde ifade ederek $1/5 \times A = 2/3$ işlemini yazmıştır ve paylaşırma anlamını kullandığını belirtmiştir. Buna ilişkin geçen diyalog şöyledir (G8, ÖA4, 20/05/2015, 44-65):

G: Burada bölmenin hangi anlamını ele alıyorsun?

ÖA4: Gruptama.

G: Tamam, modelini nasıl çizdin?

ÖA4: A’nın 1/5’i hani şu A olsun, şunun tamamı aslında A, şuraya kadar gibi görünüyor ama tamamı A (çizdiği ilk kesir çubuğunu gösteriyor ve tamamına işaret ediyor). A’nın 1/5’lik kısmı buna tekabül ediyor, şu kısma tekabül ediyor (çizdiği ikinci kesir çubuğunu gösteriyor ve taralı kısma işaret ediyor).

G: Peki ifadenle modelin birbirini karşılıyor mu?

ÖA4: Ne yazmışım ona bakayım, A’nın 1/5’ine 2/3’lük kısım karşılık gelir. Bu durumda A’nın tamamına 10/3’lük kısım karşılık gelir.

G: Peki $A \times 1/5 = 2/3$ işlemi bu modelini karşılar mı?

ÖA4: A’nın 1/5’i 2/3’tür yani 1/5’in A kadarı 2/3’tür.

G: 1/5 nerede?

ÖA4: İşte A’nın 1/5’i burası (ilk kesir çubuğunun taralı kısmını gösteriyor).

G: A’nın 1/5’i ifadesini matematiksel olarak nasıl ifade edersin?

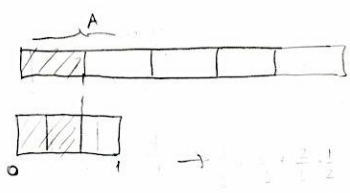
ÖA4: $(1/5 \times A)$ yazıyor.) A’nın 1/5’i.

G: Bununla daha önce yazdığım işlem aynı mı farklı mı?

ÖA4: Aynı değil.

G: Burada gruptama anlamını ele aldım demiştin. Peki modelinde bölmenin hangi anlamı var?

ÖA4: Gruptama anlamı değil, paylaşırma anlamı var. A’nın 1/5’i eşittir 2/3 $(1/5 \times A = 2/3)$ yazıyor) yani burada yanlış demişim.

$A \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

 $A'nın \frac{1}{3}'üne \frac{2}{3} lük kısım eklenmiştir.$
 $Bu\ durumda\ A'nın\ tamamıdır.$
 $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$
 $5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

Şekil 4.131. KÇB son-testinde 3. göreve ilişkin ÖA4'ün yaptığı UTA

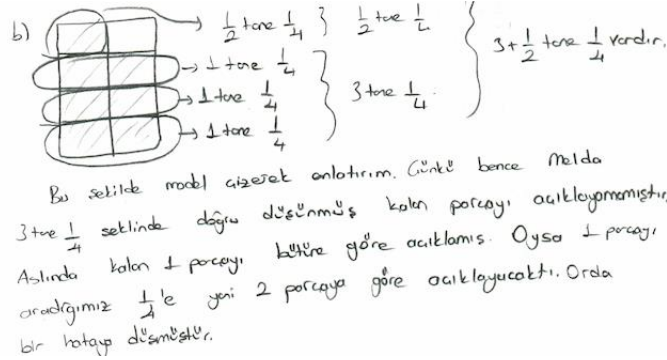
ÖA4 ters çevir çarp algoritmasını ön-testte bir problem üzerinden açıklamıştır ancak bu açıklama bu algoritmayı tam olarak karşılayamamıştır çünkü bir bütün yerine çokluk üzerinden hareket etmiştir ve işlemi tam olarak ifade edememiştir. Son-testte ÖA4 işlemi ve paylaşırma anlamını yansıtan bir model çizerek onun üzerinden işlemin sonucuna ulaşmıştır. Buna göre ÖA4'ün ters çevir çarp algoritmasını açıklama bilgisinin ön-testten son-teste geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

KÇB son-testinde on sekizinci görevde verilen $\frac{7}{8} \div \frac{1}{4}$ işleminin çözümüne ilişkin ÖA2 ve

ÖA3 MTA yaparken, diğer öğretmen adayları UTA yapmışlardır (Tablo 4.92). Öğretmen adayları verilen işlemin çözümünü bölmenin gruptama anlamını kullanarak (ÖA6, ÖA2, ÖA3, ÖA5), paylaşırma anlamını kullanarak (ÖA4, ÖA1), model çizerek (ÖA4, ÖA1, ÖA5) ve işlemin sonucu için referans alınan bütüne işaret ederek (ÖA6, ÖA2, ÖA4, ÖA3, ÖA5) açıklamışlardır. Öğretimden önce ön-testte ÖA2 hariç diğer öğretmen adayları iki kesrin bölme işleminin çözümünü açıklayamıyorlarken son-testte bütün öğretmen adayları uygun bir şekilde açıklamışlardır. Buna göre öğretmen adaylarının iki kesrin bölme işleminin çözümünü açıklama bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

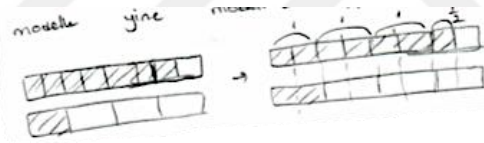
ÖA6 verilen işlemi görevde verilen modeli çizerek bu model üzerinden açıklamıştır (Şekil 4.132). Modelde 3 tane $\frac{1}{4}$ 'ün doğru gösterildiğini, kalan 1 parçayı bütüne göre açıkladığını ifade etmiştir. Bu bir parçanın $\frac{1}{4}$ 'e göre yani 2 parçaya göre açıklanacağını belirtmiştir. ÖA6 çizdiği model üzerinde her iki küçük parçayı “1 tane $\frac{1}{4}$ ” olarak, kalan bir parçayı da “ $\frac{1}{2}$ tane $\frac{1}{4}$ ” olarak gösterip işlemin sonucunu “ $3 + \frac{1}{2}$ tane $\frac{1}{4}$ vardır.” şeklinde ifade etmiştir. Ön-testte bu işleme ilişkin hiçbir açıklama yapmamıştır, son-testte ise bölmenin gruptama anlamını kullanarak ve model çizerek açıklamıştır. Buna göre

ÖA6'nın iki kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ve referans alınan bütüne ilişkin kavramsal anlamasının ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir.



Şekil 4.132. KÇB son-testinde 18. göreve ilişkin ÖA6'nın yaptığı UTA

ÖA5 verilen işlemin çözümünü ÖA6 gibi bölmenin gruptama anlamını kullanarak ve bu anlam için model çizerek bu model üzerinden şöyle açıklamıştır: “7/8'in içinde 1/4'ü aramaya başlamıştır ve ararken 3 tane 1/4 bulmuştur. Bunu ifade ederken 3 tane 1 demeliydi ve kalan 1/8'lik parçayı 1/4 cinsinden ifade etmesi yani yeni bütün olan 1/4'ün yarısı diyerek yani 1/2 diyerek ifade etmeliydi. Bunu ona yeni bütün kavramı üzerinde durarak başka bir modelle yine modelleme yaptırırdım (Şekil 4.133).”



Şekil 4.133. KÇB son-testinde 18. görevde ÖA5'in çizdiği kesir çubuğu modeli

Burada ÖA5 verilen cevabın neden yanlış olduğunu işlemin sonucu için referans alınan bütünü yeni bütün olan 1/4 alınmaması ile açıklamıştır ve 1/8 yerine “1/4'ün yarısı, 1/2” olarak ifade edilmesi gerektiğini belirtmiştir. Sonra bu işlemi kesir çubuğu modeli çizerek göstermiştir. Modelinde önce iki kesir çubuğu çizmiştir, ilkinin 8 eş parçaya bölüp 7 parçasını taramıştır ve ikincisini 4 eş parçaya bölüp 1 parçasını taramıştır. Sonra bu kesir çubuklarını tekrar çizmiştir, ikinci kesir çubuğunun her bir parçasını 2 eş parçaya bölerek gruptama anlamında ortak payda algoritmasını kullanmıştır. Daha sonra ilk kesir çubuğunun taralı kısmındaki parçaları ikiye bölerek gruptamıştır yani ikinci kesir çubuğunda 1/4'e iki küçük parça karşılık geldiği için 7/8'lik kısımda bu iki parçadan kaç tane olduğunu ilk kesir çubuğunun üzerine 1, 1, 1 ve 1/2 yazarak göstermiştir ve işlemin sonucunun $3\frac{1}{2}$ olduğuna işaret etmiştir. Burada yeni bütün kavramını ifade etmesi ve işlemi doğru bir şekilde model çizerek göstermesi ÖA5'in iki kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin anlamasının kavramsal düzeyde olduğunu göstermektedir. Ön-

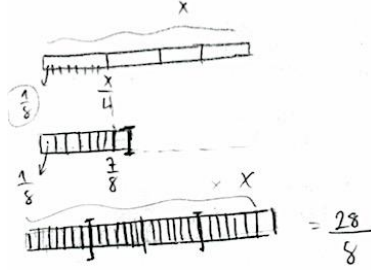
testte ÖA5 bu soruyu cevaplayamamıştır, burada ise verilen işlemi doğru bir şekilde ifade etmiştir ve model çizerek açıklamıştır. Buna göre ÖA5'in iki kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin kavramsal anlamasının ve model bilgisinin ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir.

ÖA2 ön-testte bu işlemin çözümünü uygun bir şekilde açıklayan tek öğretmen adaydır ve son-testte de ön-testteki açıklamasına benzer şekilde bölmenin gruptama anlamını kullanarak verilen işlemin çözümünü verilen model üzerinden şu şekilde açıklamıştır: *“7/8'in içerisindeki 1/4'ler kaç tanedir dersek 3 tane olduğunu Melda gibi hemen görürüz ve yeni bütünümüzün 1/4 olduğunu 1/8'in ise 1/4'ün yarısı yani yarım tane olduğunu, 3 tam 1 yarım olduğunu açıklarız.”* ÖA2 ön-testte verilen işlemi gruptama anlamını yansıtan bir model çizerek onun üzerinden açıklamıştır. Burada da benzer şekilde açıklamıştır ancak model çizmek yerine verilen model üzerinden açıklamıştır. Buna göre ÖA2'nin iki kesrin bölme işleminin çözümünü açıklama bilgisinde ön-testten son-teste çok fazla gelişme olduğu söylenemez.

ÖA3 de ÖA2'nin açıklamasına benzer şekilde verilen işlemin çözümünü verilen model üzerinden sözel olarak şöyle açıklamıştır: *“Melda'nın düşüncesi başta doğru fakat son kısımda hatası var bunu ona açıklarım. İlk başta 1 bütünün 7/8'ini aldım fakat bu 7/8'in içinde artık 1/4 arıyorum. İkinci bütünüm 1/4. 3 tane 1/4 var. Geriye kalan kısım ise 1/4'lük sonraki bütünümün 1/2'si olduğundan 1/8 değil 1/2 demem gerekir.”* diye açıklarım.” Burada ÖA3 bölmenin gruptama anlamını ve yeni bütün kavramını kullanmıştır ancak yeni bütün ifadesi yerine “ikinci bütün” ve “sonraki bütün” ifadelerini kullanmıştır. Ön-testte bu işlemi açıklayamazken burada doğru bir şekilde açıklamıştır. Buna göre ÖA3'ün iki kesrin bölme işleminin gruptama anlamına ilişkin kavramsal anlamasının ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir.

ÖA4 ve ÖA1 diğer öğretmen adaylarından farklı olarak verilen işlemin çözümünü bölmenin paylaşırma anlamını kullanarak ve bu anlam için model çizerek bu model üzerinden açıklamışlardır. Her iki öğretmen adayı da kesir çubuğu modeli çizmiştir ve modeli çizerken bölmeyi çarpmanın tersi şeklinde yazarak hareket etmişlerdir yani verilen işlemi öncelikle çarpma işlemi ile $7/8 = 1/4 \cdot X$ olarak ifade etmişlerdir. Sonra paylaşırma anlamını yansıtan birer kesir çubuğu modeli çizmişlerdir (Şekil 4.134). Burada görevde verilen modelin yansıttığı anlam olan gruptama anlamı yerine paylaşırma anlamını kullanmışlardır. ÖA1'in çizdiği model incelendiğinde modelin ilk basamağında alt alta iki kesir çubuğu çizmiştir, ilkinin X olarak ifade edip 4 eş parçaya bölmüştür, ikincisini 8 eş

parçaya bölmüştür ve 7 parçasının ilkinin bir parçasına karşılık geldiğini göstermiştir. Sonra ilk kesir çubuğunun bir parçasını 7 eş parçaya bölmeye işaret etmiştir, ikinci kesir çubuğunun bir parçasının $1/8$ olduğunu ve buna karşılık gelecek ilk kesir çubuğunun bir küçük parçasının da $1/8$ olduğunu ifade etmiştir.



Şekil 4.134. KÇB son-testinde 18. görevde ÖA1'in çizdiği kesir çubuğu modeli

Modelin ikinci basamağında ilk kesir çubuğunu tekrar çizmiştir, her parçasını 7 eş parçaya bölmüştür ve tamamını yani X 'i $28/8$ olarak ifade etmiştir. Bu sonuca nasıl ulaştığını son-testte ilişkin yapılan görüşmede (G8) şöyle açıklamıştır: “Şimdi şurası $X/4$ 'lük kısım olsun, X 'in $1/4$ 'ü $7/8$ 'miş, şimdi $X/4$ 'lük kısımda $7/8$ var, şurası 8 parça ya hani bir bütünü, şunun her birisi $1/8$ olmuş oldu, burada 7 tane var, o yüzden $7/8$, şunun içinde 7 tane var, şunun içinde 7 tane var, burada da 7, burada da 7, 28 tane $1/8$ var. O yüzden X 'im $28/8$ olur.” Ön-testte her iki öğretmen adayı da bu işlemi açıklayamamışlardır, ÖA4 bir problem kurarak bunun üzerinden açıklamaya çalışmıştır ancak bir bütün yerine çokluk üzerinden hareket etmiştir; ÖA1 ön-testte ilişkin yapılan görüşmede (G1) model çizerek açıklamaya çalışmıştır ancak başarılı olamamıştır ve işlemin sonucunu $28/8$ olarak ifade etmiştir ama nasıl olduğunu açıklayamamıştır. Burada ise model çizerek ve bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak işlemi açıklamışlardır ve işlemin sonucunun nasıl $28/8$ olduğunu göstermişlerdir. Buna göre ÖA4 ve ÖA1'in iki kesrin bölme işleminin çözümüne ilişkin açıklama bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği ve bölmenin paylaştırma anlamına ilişkin anlamalarının ve model bilgilerinin kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

Sonuç olarak öğretmen adaylarının bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin grupta anlamı için ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen çarpma işleminin aynı olup olmadığını, bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini, bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya bölünebildiğini, ters çevir çarp algoritmasını ve iki kesrin bölme işleminin çözümünü açıklama bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği söylenebilir. Bu gelişim Tablo 4.93'te verilmiştir. Bu tablo öğretmen adaylarının ön-testte, öğretim sürecinde ve son-testte kesirlerle bölme işlemine ilişkin karşılaştıkları durumlar için yaptıkları açıklamaların birarada verilmiş hali olarak sunulmuştur.

Tablo 4.93.

Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Bölmeye İlişkin Verilen Durumları Açıklama Bilgilerinin Gelişimini Gösteren Tablo

Öğretmen Adayı	Ön-test/G1					Öğretim süreci/G2-G8			Son-test/G8				
	1/3 ÷ 4 ve 1/3 x 1/4 işlemlerin aynı olup olmadığını	Bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini (4 ÷ 1/3)	Kendinde n daha büyük bir sayıya bölünebilir (2/3 ÷ 4)	Ters çevir çarp algoritması (2/3 ÷ 1/5)	7/8 ÷ 1/4 işleminin çözümünü	Bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini (4 ÷ 1/3)	Kendinde n daha büyük bir sayıya bölünebilir (5/7 ÷ 3)	Bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini (3 ÷ 1/4)	1/3 ÷ 4 ve 1/3 x 1/4 işlemlerini aynı olup olmadığını	Bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini (4 ÷ 1/3)	Kendinde n daha büyük bir sayıya bölünebilir (2/3 ÷ 4)	Ters çevir çarp algoritmasını (2/3 ÷ 1/5)	7/8 ÷ 1/4 işleminin çözümünü
ÖA6	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Her iki işlem için model çizme ve sonuçlarının aynı olduğunu gösterme • Anlamdan bahsetmemesi	• Uygun açıklama • UTA • Gruplama anlamını kullanma • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme • Bölmenin basit kesir olması	• Uygun açıklama • UTA • Referans alınan bütüne işaret etme • 4'ü vurgulama • "Masa" örneği verme	• Uygun olmaya açıklama • UTA • Gruplama anlamını kullanma • Referans alınan bütüne işaret etme • Model çizme • 2/3'ün içinde 1/3'ün 1/5'inde kaç tane olduğu nu göstermesi • Referans	• Yok	• Uygun açıklama • UTA • Gruplama anlamını kullanma • Referans alınan bütüne işaret etme • Grup sayısını vurgulama • "Pasta" örneği verme	• Uygun açıklama • UTA • Paylaştırma anlamını kullanma • Referans alınan bütüne işaret etme • 3'ü vurgulama • "Elma" örneği verme	• Uygun açıklama • UTA • Gruplama anlamını kullanma • Grup sayısını vurgulama • "Elma" örneği verme	• Uygun açıklama • MUTA • Gruplama anlamını kullanma • Bölme işlemi için model çizme • Her iki işlemi sözel olarak açıklama • Model üzerinde bu bölme işlemine bu anlam için bu	• Uygun açıklama • UTA • Hem paylaştırma hem gruplama anlamını kullanma • Her iki anlam için model çizme • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme • Referans alınan bütüne işaret etme • Yeni bütün	• Uygun açıklama • UTA • Hem paylaştırma hem gruplama anlamını kullanma • Her iki anlam için model çizme • "Elma" örneği verme • Referans alınan bütüne işaret etme • 4'ü vurgulama	• Uygun açıklama • MUTA • Gruplama anlamını kullanma • Gruplama anlamı için model çizme	• Uygun açıklama • UTA • Verilen modeli çizip onun üzerinde gösterme • Gruplama anlamını kullanma • Referans alınan bütüne işaret etme (İşlemin sonucu için 1/4 olduğunu vurgulama

	alınan bütünü yanlış alma					çarpma işlemini karşılık geldiğini gösterme	kavramın kullanma							(ma)
ÖA2	• Uygun ama eksik açıklama • MUTA • Her iki işlem için model çizme ve sonuçlarının aynı olduğunu gösterme • Her iki işlem için problem kurma • Anlamdan bahsetmeme	• Uygun ama eksik açıklama • MUTA • Gruplama anlamını kullanma • Gruplama anlamı için model çizme	• Uygun açıklama • UTA • Paylaştırma anlamını kullanma • “Pasta” örneği verme • Paylaştırma anlamı için model çizme • “Bütünü parçalaması” olarak ifade etme	• Uygun olmaya n açıklama • UTA • Bölmenin, çarpma ya göre tersi ile çarpma olduğunu ifade etme (Eksik) • Gruplama anlamını kullanma (Eksik) • Model çizme ama 2/3’ün içinde 1/3’ün 1/5’inden kaç tane	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Gruplama anlamını kullanma • İşlemin sonucun grup sayısı olduğuna işaret etme	• Uygun açıklama • UTA • Paylaştırma anlamını kullanma • “Kablo” örneği verme • Yeni bütün kavramını kullanma • “Bütünü parçalaması” olarak ifade etme	• Uygun açıklama • UTA • Gruplama anlamını kullanma • Gruplama anlamı için model çizme • İşlemin sonucun grup sayısı olduğuna işaret etme	• Uygun açıklama • UTA • Paylaştırma anlamını kullanma • Her iki işlem için model çizme • Model üzerinde n farklı işlemler olduğunu ifade etme	• Uygun açıklama • UTA • Gruplama anlamını kullanma • Gruplama anlamı için problem kurma • Gruplama anlamı için model çizme • İşlemin sonucun grup sayısı olduğuna işaret etme	• Uygun açıklama • UTA • Paylaştırma anlamını kullanma • Paylaştırma anlamı için model çizme • “Pasta” örneği verme • “Bütünü parçalaması” olarak ifade etme	• Uygun açıklama • UTA • Gruplama anlamını kullanma • Gruplama anlamı için model çizme	• Uygun açıklama • MTA • Gruplama anlamını kullanma • Referans alınan bütüne işaret etme (İşlemin sonucu için 1/4 olduğunu vurgulama)		

				olduğu nu göster me									
				• Referans alınan bütünü yanlış alma									
ÖA4	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Her iki işlem için “kağıt” örneği verme • Her iki işlemin sonuçlarının aynı olduğunu ifade etme • Anlamdan bahsetmeme	• Uygun açıklama • UTA • Gruplama anlamını kullanma • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme • “Pizza” örneği verme	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Paylaştırma anlamını kullanma • Paylaştırma anlamı için problem kurma • Bütünü çokluk olarak alma	• Uygun olmaya n açıklama • UTA • Gruplama anlamını kullanma • Gruplama anlamı için problem kurma • Bütünü çokluk olarak alma • Referans alınan bütünü yanlış alma	• Uygun olmay an açıklama • UTA • Gruplama anlamını kullanma • Gruplama anlamı için problem kurma • Bütünü çokluk olarak alma • Referans alınan bütünü yanlış alma	• Uygun açıklama • MTA • Gruplama anlamını kullanma • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme	• Uygun açıklama • UTA • Paylaştırma anlamını kullanma • “Parçayı parçalamak” olarak ifade etme	• Uygun açıklama • UTA • Gruplama anlamını kullanma • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme • “İp” örneği verme	• Uygun açıklama • MUTA • Gruplama anlamını kullanma • Her iki işlem için model çizme • Her iki işlemi sözel olarak açıklama • Her iki işlem için “ip” örneği verme • Sonuçları aynı ve sözel ifadeleri farklı • Model	• Uygun açıklama • UTA • Gruplama anlamını kullanma • Gruplama anlamı için problem kurma • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme • Bölmenin basit kesir olması • Çarpmanın operatör	• Uygun açıklama • UTA • Paylaştırma anlamını kullanma • Paylaştırma anlamı için model çizme • Paylaştırma anlamı için problem kurma • Referans alınan bütüne işaret etme	• Uygun açıklama • UTA • Paylaştırma anlamını kullanma • Paylaştırma anlamı için model çizme • Referans alınan bütüne işaret etme • İşlemin sonucu için 1/4 olduğunu vurgulama	• Uygun açıklama • UTA • Paylaştırma anlamını kullanma • Paylaştırma anlamı için model çizme • Referans alınan bütüne işaret etme • İşlemin sonucu için 1/4 olduğunu vurgulama

										üzerinde n bu bölme işlemine bu anlam için bu çarpma işlemini n karşılık geldiğin i gösterm e	anlamı (Bir sayı ile çarpma ve daha büyük bir sayıya bölme)			
ÖA3	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Her iki işlemi sözel olarak ifade etme • Her iki işlem için model çizme • Sonuçları ve modelleri aynı, sözel ifadeleri farklı • Anlam dan	• Uygun açıklama • UTA • Gruplama anlamını kullanma • İşlemin sonucun un grup sayısına işaret etme • “Pasta” örneği verme	• Uygun ama eksik açıklama • UTA • Paylaştırma anlamını kullanma • Paylaştırma anlamı için model çizme • Sadece işlemi açıklıyor	• Uygun olmayan açıklama • Sadece işlemi sözel olarak ifade ediyor	• Yok	• Uygun açıklama • MTA • Gruplama anlamını kullanma • İşlemin sonucun un grup sayısına işaret etme	• Uygun açıklama • UTA • Paylaştırma anlamını kullanma • “Pasta” örneği verme • Referans alınan bütüne işaret etme • 3’ü vurgulama • “Parçayı parçalamama” olarak ifade etm	• Uygun açıklama • MTA • Gruplama anlamını kullanma • İşlemin sonucun un grup sayısına işaret etme • Bölenin basit kesir olması	• Uygun açıklama • UTA • Gruplama anlamını kullanma • Her iki işlem için model çizme • Her iki işlemi sözel olarak açıklama • Model üzerinde n bu bölme işlemine bu	• Uygun açıklama • UTA • Gruplama anlamını kullanma • Gruplama anlamı için model çizme • İşlemin sonucun un grup sayısına işaret etme • Referans alınan bütüne işaret etme	• Uygun açıklama • MTA • Gruplama anlamını kullanma • “4’ün ne kadarı 2/3’tür?”	• Uygun açıklama • MTA • Ortak payda algoritması	• Uygun açıklama • MTA • Gruplama anlamını kullanma • Referans alınan bütüne işaret etme (İşlemin sonucu için 1/4 olduğunu vurgulama)	

bahsetme								anlam için bu çarpma işleminin karşılık geldiğini gösterme						
ÖA5	• Yok	• Uygun ama eksik açıklama	• Uygun olmayan açıklama	• Yok	• Yok	• Uygun açıklama	• Yok	• Uygun açıklama	• Uygun açıklama	• Uygun açıklama	• Uygun açıklama	• Uygun açıklama	• Uygun açıklama	
		• MTA	• MTA			• MTA		• UTA	• UTA	• UTA	• UTA	• UTA	• UTA	
		• Bölünün basit kesir olması	• “Parçayı parçalamak” olarak ifade etme			• İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme		• Gruplama anlamını kullanma	• Paylaştırma anlamını kullanma	• Gruplama anlamını kullanma	• Paylaştırma anlamını kullanma	• Gruplama anlamını kullanma	• Gruplama anlamını kullanma	
		• Doğal sayılarla bölme örnekleri verme						• İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme	• Her iki işlem için model çizme	• İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme	• “Elma” örneği verme	• Gruplama anlamı için model çizme	• Gruplama anlamı için model çizme	
								• “Portakal” örneği verme	• Model üzerindeki farklı işlemler olduğunu ifade etme	• Referans alınan bütüne işaret etme			• Referans alınan bütüne işaret etme (İşlemin sonucu için 1/4 olduğunu vurgulama)	
ÖA1	• Uygun ama eksik açıklama	• Uygun açıklama	• Uygun açıklama	• Uygun açıklama	• Uygun olmayan açıklama	• Uygun açıklama	• Yok	• Uygun açıklama	• Uygun açıklama	• Uygun açıklama	• Uygun açıklama	• Uygun açıklama	• Uygun açıklama	
		• MTA	• MTA	• MTA	• MTA	• MTA		• MTA	• MTA	• MTA	• MTA	• MTA	• MTA	
		• Gruplama	• UTA	• UTA	• UTA	• Gruplama		• Gruplama	• UTA	• Gruplama	• MTA	• MTA	• UTA	

a • MTA • Her iki işlemi sözel olarak ifade etme • Sonuçları aynı, sözel ifadeleri farklı • Anlam dan bahset meme	a anlamını kullanma • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme • Doğal sayılarla bölme örnekleri verme • Bölenin basit kesir olması	• Paylaştırma anlamını kullanma • “Elma” örneği verme • “Bütünü parçalamak” olarak ifade etme	• Payday 11 • Gruplama anlamını kullanma	ma • UTA • Gruplama anlamını kullanma • Referans alınan bütün ü yanlış alma	a anlamını kullanma • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme	a anlamını kullanma • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme • Bölenin basit kesir olması	• Gruplama anlamını kullanma • Her iki işlem için model çizme • Her iki işlemi sözel olarak açıklamak • Model üzerinde bu bölme işlemine bu anlam için bu çarpma işleminin karşılık geldiğini göstermek	a anlamını kullanma • Gruplama anlamı için model çizme • İşlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etme	• Gruplama anlamını kullanma • “4’ün ne kadarı 2/3’tür?” • Gruplama anlamı için doğal sayılarla bölme örnekleri verme	• Ortak payda algoritması • Payday 1 yapma • Gruplama anlamını kullanma	• Paylaştırma anlamını kullanma • Paylaştırma anlamı için model çizme

BÖLÜM 5

TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin özelleştirilmiş alan bilgilerinin (ÖAB) gelişimi incelenmiştir. Çalışmada elde edilen bulgulara göre varılan sonuçlar, ilgili literatürdeki çalışmalarla beraber tartışılarak bu bölümde açıklanmaktadır. Ayrıca çalışmanın sonuçlarından yola çıkılarak yapılan öneriler sunulmaktadır.

5.1. Tartışma ve Sonuçlar

Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kavramsal anlamalarının zayıf olduğu ve öğrencilerine kesirlerle çarpma ve bölmeyi kazandırabilmek için kavramsal anlamayı kazanmalarına ihtiyaç olduğu ilgili literatürden görülmüştür (Ball, 1990a, 1990b; Borko vd., 1992; Chen, 2010; Graeber vd., 1989; Ma, 1999). Rayner (2007)'in çalışmasında kavramsal veya hem işlemsel hem kavramsal bilgiye dayalı kesirlerle bölme içerik odaklı öğretimin öğretmen adaylarının kesirlerle bölmeye ilişkin özelleştirilmiş alan bilgilerine pozitif etkisi olduğu görülmüştür. Bu ihtiyaç ve sonuç gözönüne alınarak bu çalışmada öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kavramsal anlamalarının gelişimine odaklanılmıştır. Kavramsal anlamının gelişimi ön-testten son-teste öğretim süreci boyunca incelenmiştir. Bu incelemede öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin ÖAB'lerinin alt boyutları olan temsil (problem kurma, model çizme, matematiksel ifade yazma), gerekçelendirme ve açıklama bilgilerinin gelişimine odaklanılmıştır. Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin kavramsal anlamalarını model çizme veya problem kurma deneyimleri yaşamanın geliştirdiğini gösteren çalışmalar bulunmaktadır (Baek vd., 2017; Flores vd., 2005; Leung ve Carbone, 2013; Toluk-Uçar, 2009). Silver vd. (1996) yaptıkları çalışmanın sonucunda ortaokul ve lise matematik öğretmenlerinin en az bir matematiksel problem kurduklarını ancak problemlerin çoğunun kötü ve zayıf bir şekilde kurulduğunu belirtmişlerdir. Bunun

için öğretmen eğitiminde öğretmen adaylarının çok sayıda problem kurmaları sağlanarak problem kurma deneyimini yaşamaları gerektiğini ifade etmişlerdir. Bu çalışmada öğretmen adayları öğretim sürecinde bunların yanısıra matematiksel ifade yazma, gerekçelendirme ve açıklama deneyimleri de yaşamışlardır.

Öğretimden önce uygulanan ön-testte ve ön-teste ilişkin yapılan görüşmede öğretmen adaylarından kesirlerle çarpma ve bölme işlemine ilişkin verilen model ve problemlerin ifade ettikleri işlemleri matematiksel olarak yazmaları, verilen model ve işlemler için problem kurmaları, verilen problem ve işlemler için model çizmeleri, verilen durumları gerekçelendirmeleri ve açıklamaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar incelendiğinde kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin anlamalarının öğretimden önce zayıf ve işlemsel düzeyde olduğu tespit edilmiştir. Bu sonuç daha önce yapılan diğer çalışmaların sonuçları ile benzerlik göstermektedir (Ball, 1990a; Borko vd., 1992; Forrester ve Chinnappan, 2010; Ma, 1999). Bununla beraber öğretimden önce kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin deneyimi olan (özel ders verme, daha önce lisans derslerinde görme, vs.) öğretmen adaylarının problem kurarken, model çizerken veya verilen durumu açıklarken diğer öğretmen adaylarına göre daha güçlü bir anlamaya sahip oldukları görülmüştür.

Öğretmen adaylarının öğretimden önce uygulanan ön-testte ve yapılan görüşmede kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kurdukları problemlerde; *bütünü çokluk olarak alma, parça-bütün ilişkisi kuramama, referans alınan bütünü yanlış alma, işleme bir basamak daha ekleme, bölme yerine çıkarma işlemini yansıtan problem kurma* hatalarını yaptıkları görülmüştür. Bu hataları yapmalarından ve zorlukları yaşamalarından öğretmen adaylarının öğretimden önce kesirlerle çarpma ve bölme işlemine ilişkin problem kurma bilgilerinin zayıf olduğu anlaşılmaktadır. Bu sonuç diğer çalışmaların sonuçlarını desteklemektedir (Chen, 2010; Luo, 2009; Tsay ve Hauk, 2009). *Bütünü çokluk olarak alma* hatası özellikle kesirlerle bölme işleminde sıklıkla karşılaşılan bir hata türü olarak tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının bütünü çokluk olarak almasının bir sayının kendinden büyük bir sayıya bölünemeyeceği sezgisel hatasından kaynaklandığı söylenebilir (Tirosh, 2000). Bu sonuç Graeber vd. (1989)'nin çalışmasının sonucunu desteklemektedir. Bu çalışmada Fischbein vd. (1985)'nin öğrenciler için ortaya koyduğu sezgisel kısıtlamaların ilköğretim öğretmen adaylarında da görülüp görülmediği incelenmiştir ve öğretmen adaylarının bölen bölünenden küçük olmalıdır yanılışına düşerek bölenle bölünenin yerini değiştirdikleri görülmüştür.

Öğretmen adaylarının öğretimden önce uygulanan ön-testte ve yapılan görüşmede kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin çizdikleri modellerde; *verilen işlem yerine tersini yansıtan model* (örneğin, $6 \times \frac{2}{3}$ yerine $\frac{2}{3} \times 6$ işlemini yansıtan model çizme), *bölme yerine ters çevir çarp algoritmasının uygulanması sonucu ortaya çıkan çarpma işlemini yansıtan model* (örneğin, $\frac{2}{3} \div \frac{1}{4}$ yerine $\frac{2}{3} \times 4$ işlemini yansıtan model çizme), *bölme yerine çarpma işlemini yansıtan model* (örneğin, $\frac{1}{7} \div \frac{3}{4}$ yerine $\frac{1}{7} \times \frac{3}{4}$ işlemini yansıtan model çizme) çizdikleri, yeni bütünü parçalamadan bir bütün olarak gösterdikleri ve parçaları bütün üzerinden göstermedikleri tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının öğretimden önce kesirlerle çarpma ve bölme işlemine ilişkin verilen işlem ve problem için model çizerken zorlanmaları, çizerken böyle hatalara düşmeleri ve hatta çizememeleri daha önce yapılan çalışmaların sonuçlarını desteklemektedir (Armstrong ve Bezuk, 1995; Ball, 1990a; Lamberg ve Wiest, 2015; Ma, 1999; Simon, 1993; Tuna vd., 2013).

Öğretmen adaylarının öğretimden önce tespit edilen yeni bütünü parçalamadan göstermeyi öğretim sürecinde de devam ettirdikleri görülmüştür. Yeni bütünü bu şekilde göstermeye bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemi için kesrin paydasının doğal sayıya bölünebiliyor olmasının (örneğin, $\frac{2}{3} \times 6$ işlemi için modelde 6'yı parçalamadan gösterip doğrudan 3 eş parçaya bölme) veya iki kesrin çarpma işleminde ilk kesrin paydasının ikinci kesrin payına bölünebiliyor olmasının (örneğin, $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$ işlemi için modelde $\frac{3}{5}$ 'lik kısmı parçalamadan gösterip doğrudan 3 eş parçaya bölme) veya bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işleminde paylaştırma anlamı için kesrin payının doğal sayıya bölünebiliyor olmasının (örneğin, $12 \div \frac{4}{5}$ işleminin paylaştırma anlamı için modelde $\frac{4}{5}$ 'lik kısmı gösterip doğrudan 12 eş parçaya bölme, 12 yerine 9 verildiğinde model çizememe) etkisi olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının bölünemeyen durumlarda modeli çizmede ve modelden işlemin sonucunu ifade etmede zorlandıkları görülmüştür.

Öğretmen adaylarının öğretimden önce kesirlerle bölmeye ilişkin anlamalarının daha çok gruplama anlamına dayandığı tespit edilmiştir. Bu sonuç öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işlemine ilişkin problem kurarken veya açıklama yaparken daha çok gruplama anlamını tercih ettikleri gösteren çalışmalarla benzerlik gösterirken (Ball, 1990b; Lo ve Luo, 2012; Ma, 1999), gruplamadan ziyade paylaştırma anlamını tercih ettiklerini gösteren çalışmalarla farklılık göstermektedir (Ball, 1990a; Fischbein vd., 1985; Graeber vd., 1989; Simon, 1993). Öğretmen adaylarının bu çalışmada öğretimden önce sadece verilen bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemi için paylaştırma anlamını yansıtan model çizerken ve problem kurarken özellikle iki kesrin bölme işlemi için problem kurarken ve model

çizerken bölünenin bölenden büyük olduğuna dikkat etmeksizin grupta anlamını kullandıkları ve hataya düştükleri görülmüştür. Diğer taraftan öğretmen adaylarının öğretimden önce bölünenin bölenden büyük olduğu bölme işlemine ilişkin model çizerken veya problem kurarken bölmenin paylaşırma anlamını kullanmamaları ders kitaplarında bu işlemlerin bu anlam için verilmemesi ile açıklanabilir. Bu sonuç Lo ve Luo (2012)'nin çalışmasının sonucunu desteklemektedir. Bu çalışmada bir doğal sayının bir kesre bölüldüğü işlem verildiğinde öğretmen adaylarının çoğu problem kurarken paylaşırma anlamını kullanmamışlardır. Lo ve Luo (2012) Tayvan'daki ders kitaplarına bakıldığında bu tür işlem için önce grupta anlamı sonra paylaşırma anlamının verildiğini ve bu durumun bu kitapların etkisi olarak görülebileceğini belirtmişlerdir. Ülkemizdeki ders kitapları incelendiğinde de bu tür işlemlerin paylaşırma anlamı için verilmediği görülmektedir (Aydın ve Gündoğdu, 2014; Bağcı, 2015; M. Çebi ve Çebi, 2013). Bu yüzden bu çalışmadaki öğretmen adaylarının bölünenin bölenden büyük olduğu bölme işleminin paylaşırma ve bölünenin bölenden küçük olduğu bölme işleminin grupta anlamı için problem kurma veya model çizme bilgilerine sahip olmadığı düşünülmektedir.

Öğretmen adaylarının öğretim sürecine kesirlerle çarpmaya ilişkin anlamaları tekrarlı toplama ile sınırlı bir şekilde başladıkları tespit edilmiştir. Öğretimden önce verilen kesirlerle çarpma işlemlerini “tane” ile ifade etmişlerdir (örneğin, $1/3 \times 6$ işlemini “1/3 tane 6” olarak ifade etme). Diğer taraftan öğretmen adayları öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin ve iki kesrin çarpma işlemini okunduğu gibi soldan sağa doğru yazdıkları ve bu sırayı dikkate alarak model çizdikleri görülmüştür (örneğin, 6'nın $2/3$ 'ünü $6 \times 2/3$, $3/5$ 'in $2/3$ 'ünü $3/5 \times 2/3$ olarak yazma ve işlemde soldan sağa doğru ilerleyerek model çizme). Benzer şekilde öğretmen adaylarının öğretimden önce iki kesrin çarpma işlemine ilişkin problem verildiğinde de işlemi okunduğu gibi soldan sağa doğru yazdıkları ve işlemin tersini yazdıkları görülmüştür. Elde edilen sonuçlar öğretmen adaylarının öğretimden önce çarpmanın tanımına ilişkin kavramsal anlamaya sahip olmadıklarına işaret etmektedir.

Öğretim sürecinde çarpmanın tanımını kullanarak verilen işlemleri “yeni bütün”, “grup” ve “nesne” kavramlarıyla ifade etmenin öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kavramsal anlamalarının gelişimine yardımcı olduğu tespit edilmiştir. Her ne kadar kavramsal anlamının gelişimine yardımcı olsa da öğretim sürecinin başlarında öğretmen adaylarının “grup” kavramını anlamlandırmakta zorlandıkları ve bu nesne/bütün ve grup kavramlarına ilişkin ikilem yaşadıkları görülmüştür. Burada bütün yerine grup, grup yerine

bütün kavramlarını kullandıkları gibi bütün ile nesnenin aynı şeyi ifade ettiğini de farkedememişlerdir. Azim (1995) öğretmen adaylarının grup kavramını anlamlandırmada zorlanmalarını “-nın” ifadesinin çarpmayı ifade ettiğini ezber yoluyla öğrenmeleri ile açıklamıştır. Bunu bu çalışmada bir öğretmen adayının “-nın” ifadesinin çarpma işlemini düşündürdüğünü belirtmesi ve bir diğerinin de örneğin $5/6$ 'nın $1/3$ 'ü için $5/6$ 'nın ilk belirtildiğini bu yüzden önce $5/6$ 'sını alması gerektiğini belirtmesi desteklemektedir.

Öğretmen adaylarının öğretim sürecinde bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin verilen modelin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazarken çarpmanın “tekrarlı toplama” ve “bir doğal sayının verilen kesir kadarını bulma” anlamı arasında ikilem yaşadıkları görülmüştür. Örneğin, $2/3 \times 2$ işlemi için verilen dairesel alan modelinin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazarken öğretmen adaylarından birisi bu modelin sadece ikinci basamağını gözönüne alınca $2 \times 2/3$ ve $2/3 \times 2$ işlemleri arasında ikileme düşmüştür. Burada bu basamak her iki işlem için ortak olan bir basamaktır ve sadece bu basamağı gözönüne alınca başlangıçta birinde bir bütün, diğerinde iki bütün ile başladığını ve bu basamakta çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini gözardı ettikleri görülmüştür. Bununla beraber çarpmanın değişme özelliğinin işlemin sonucunu değiştirmezken işlemlerin anlamının değiştiğini de gözardı ettikleri söylenebilir. Sonra bunları gözönüne almanın, her iki işlem için model çizmenin ve işlemdeki sayıları çarpmanın tanımına göre “grup sayısı” ve “her bir gruptaki nesne sayısı” olarak ifade etmenin bu ikilemden çıkmalarına yardımcı olduğu görülmüştür.

Öğretmen adaylarının öğretim sürecinde kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin model çizerken veya problem kurarken çeşitli zorluklar yaşadıkları tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpmaya ilişkin model çizerken yaşadıkları zorluklar; *çarpma işlemi yerine paylaştırma bölme anlamını yansıtan model çizme, işlemin sonucunu gösteren basamağı çizmeme, yeni bütünü parçalamadan bir bütün olarak gösterme, çarpmanın iki anlamına ilişkin ikilem yaşama ve bütünü çokluk olarak almadır*. Burada görülen çarpma işlemi yerine paylaştırma bölme hatası Luo (2009)'nun çalışmasının sonucuyla benzerlik göstermiştir. Bu çalışmada öğretmen adayları $1/2 \times 1/3$ işlemi için “bir kesri adil paylaştırma” anlamını yansıtan problemleri daha çok kurmuşlardır. Öğretim sürecinde öğretmen adaylarının kesirlerle çarpmaya ilişkin kurdukları problemlerde; *bütünü çokluk olarak alma, bilgi ekleme, birim kargaşası, kesir sayısına doğal sayı anlamı yükleme, yetersiz bilgi ve bilinmeyen olmaması* hatalarını yaptıkları tespit edilmiştir. Öğretim sürecinde kesirlerle çarpma işlemine ilişkin verilen işlem için model çizerken ve problem

kurarken en çok karşılaşılan zorluk işlemde yer almayan bir sayı ilave ederek bütünü *bir bütün yerine çokluk olarak alma* olmuştur (örneğin, $2/3 \times 3/5$ yerine $2/3 \times 3/5 \times 5$ işlemini yansıtan bir model çizme ve problem kurma). Öğretimin sonunda bu zorlukların hiçbirisiyle karşılaşılmamıştır. Elde edilen bu sonuç öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma işlemine ilişkin model çizme ve problem kurma bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiğine işaret etmektedir.

Kesirlerle çarpma işleminde olduğu gibi kesirlerle bölme işleminde de öğretmen adaylarının öğretim sürecinde model çizerken ve problem kurarken en çok *bütünü çokluk olarak alma* hatasını yaptıkları görülmüştür. Bununla beraber kesirlerle bölme işlemlerine ilişkin model çizerken *ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen çarpma işlemini modelde ifade etmede, modelde ortak pay almada ve işlemin sonucunu modelde göstermede* zorluk yaşadıkları tespit edilmiştir. Diğer taraftan öğretmen adaylarının bölünenin bölenden büyük olduğu bölme işleminin paylaştırma anlamı için model çizerken *bölmenin paylaştırma ve gruptama anlamına ilişkin ikilem* yaşadıkları tespit edilmiştir. Burada modelde *ortak pay yerine ortak payda almayı* gerçekleştirerek bütünlerin farklı olduğunu gözardı ettikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işlemine ilişkin kurdukları problemlerde *bütünü çokluk olarak alma, parça-bütün ilişkisi kuramama, birim kargaşası, kesir sayısına doğal sayı anlamı yükleme ve bölen kesrin paydasına bölme* hatalarını sergiledikleri tespit edilmiştir. Öğretimin sonunda bütün bu zorlukların ve hataların ortadan kalktığı görülmüştür. Buna göre öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işlemine ilişkin model çizme ve problem kurma bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği anlaşılmaktadır.

Öğretmen adaylarının öğretim sürecinde kesirlerle bölme işlemine ilişkin çizdikleri modeller ve problemler incelendiğinde bölünenin bölenden büyük olduğu bölme işleminde paylaştırma ve bölünenin bölenden küçük olduğu bölme işleminde gruptama anlamı için model çizerken veya problem kurarken bölmeyi çarpmanın tersi olarak yazmanın (örneğin, $4 \div 1/3$ işlemini $4 = X \cdot 1/3$ ve $4 = 1/3 \cdot X$ şeklinde yazma) ve işlemdeki sayıları çarpmanın tanımına göre ifade etmenin (örneğin, $4 = X \cdot 1/3$ işleminde 4 “toplam nesne sayısı”, $1/3$ “her bir gruptaki nesne sayısı” ve $4 = 1/3 \cdot X$ işleminde 4 “toplam nesne sayısı”, $1/3$ “grup sayısı” olarak ifade etme) problem kurmalarını ve model çizmelerini kolaylaştırdığı sonucuna ulaşılmıştır. Öğretmen adaylarından ÖA6 ve ÖA5’in işlemi bu şekilde yazmaya sıkı sıkıya bağlandığı görülmüştür öyle ki öğretim süreci boyunca ve öğretimden sonra işlemi bu şekilde yazmadan model çizmemişlerdir ve problem

kurmamışlardır. Bununla beraber verilen problem veya modelin ifade ettiği işlemi belirlerken de bundan yararlanmışlardır ve bunu bölmenin diğer iki anlamı için model çizmeye ve problem kurmaya da taşımışlardır.

Öğretim sürecinde elde edilen bulgulara göre öğretmen adayları iki kesrin bölme işlemine ilişkin problem kurmada kesirlerle çarpma işlemine ve bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine göre daha çok zorluk yaşamışlardır. Burada en çok karşılaşılan zorluk kesirli sayı olan *işlemin sonucuna doğal sayı anlamı yükleme* olmuştur. Öğretmen adayları kesirlerle çarpma işleminde de kesirlerle bölme işleminde de problem kurarken parça-bütün ilişkisi kuramamışlardır ve kesirli sayıya doğal sayı anlamı yüklemişlerdir. Öğretimden sonra öğretmen adaylarının buna dikkat ettikleri ve bu hataya düşmedikleri görülmüştür.

Sonuç olarak öğretim sürecinde kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin model çizerken en çok *“bütünü çokluk olarak alma”* ve problem kurarken en çok *“bütünü çokluk olarak alma”*, *“birim kargaşası”*, *“kesir sayısına doğal sayı anlamı yükleme”*, *“parça-bütün ilişkisi kuramama”* ve *“bilinmeyen olmaması”* zorluklarının yaşandığı tespit edilmiştir. Bu hatalar daha önce yapılan çalışmalarda ortaya çıkan zorluklar ve hatalarla benzerlik göstermektedir (Armstrong ve Bezuk, 1995; Işık ve Kar, 2012a). Öğretim sürecinde elde edilen bulgular öğretmen adaylarının özellikle bölünenin bölenden küçük olduğu bölme işlemlerinde grupta anlamı ve bölünenin bölenden büyük olduğu bölme işlemlerinde paylaştırma anlamı için zorluk yaşadıklarını göstermiştir. Buna göre verilen işlem için problem kurmada veya model çizmede zorlanmışlardır ve çizememişlerdir. Öğretmen adayları öğretimden önce bölünenin bölenden büyük olduğu bölme işleminde grupta, bölünenin bölenden küçük olduğu bölme işleminde paylaştırma anlamını yansıtan bir model çizerlerken ve problem kurarlarken (Lee, 2010; Rayner, 2007), öğretimden sonra her iki durum için bölmenin her iki anlamını yansıtan birer model çizmişlerdir ve problem kurmuşlardır. Öğretimden sonra öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin problem kurarken ve model çizerken herhangi bir zorluk yaşamadıkları ve bu hataların herhangi birine düşmedikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarının problem kurmalarına ve model çizmelerine bölme işlemini çarpmanın tersi olarak düşünmenin, işlemdeki sayılar için referans alınan bütünlerin aynı olup olmadığını belirlemenin, işlemdeki sayıları çarpmanın tanımına göre ifade etmenin, modelde ortak pay mı ortak payda mı alındığını belirlemenin yardımcı olduğu tespit edilmiştir.

Bu çalışmada problem kurma ve model çizme deneyimlerini yaşamayan öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kavramsal anlamalarının gelişimini sağladığı sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamalarının gelişiminde problem kurmanın ve model çizmenin önemli olduğunu gösteren çalışmaları desteklemektedir (Baek vd., 2017; Flores vd., 2005; Leung ve Carbone, 2013; Toluk-Uçar, 2009). Leung ve Carbone (2013)'un çalışmasında Hong Konglu 72 öğretmen adayından $2\frac{1}{2} \div \frac{1}{2}$ işlemini ifade eden gerçek yaşam problemi kurmaları istenerek kesirlerle bölmeye ilişkin kavramsal anlamaları incelenmiştir. Ön-testte öğretmen adaylarının kurdukları problemler incelendiğinde öğretmen adayları problemlerini ölçme bölme yerine paylaşırma bölme olarak yanlış bir şekilde yorumlamışlardır. Bununla beraber ön-testten son-teste ölçme bölmeye ilişkin doğru kullanımda artış olduğu görülmüştür. Sonuç olarak bu çalışma problem kurmanın kavramsal anlamayı ölçmede kullanılabileceğini ve kısa öğretim müdahalesinin öğretmen adaylarının kavramsal anlamasında artış olduğunu göstermiştir. Benzer şekilde bu çalışmada da öğretimden önce problem kurmada ve model çizmede çeşitli zorluklar yaşarlarken öğretimden sonra herhangi bir zorluk yaşamadan problem kurdukları ve model çizdikleri görülmüştür.

Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemine ilişkin model çizmeden önce problem kurdukları ve problemde kullandıkları hikayeye göre model tercih ettikleri tespit edilmiştir. Örneğin, “elma, ekmek” deyince gerçek nesne modeli, “adım, ip, kablo” deyince sayı doğrusu modeli, “pasta, pizza” deyince dairesel alan modeli, “kutu süt, rulo pasta” deyince kesir çubuğu ve “arsa” deyince dikdörtgensel alan modeli çizimleri. Benzer şekilde problem kurarken de verilen modelin türünün problemin bağlamını etkilediği tespit edilmiştir. Örneğin, dairesel alan modeli verildiğinde “pasta” veya “pizza” hikayelerini kullanmaları, X’ler dikdörtgeni verildiğinde X’lerin sayısını ele alarak “15 kişi” veya “15 elma” şeklinde ifade etmeleri, dikdörtgensel alan modeli verildiğinde “paket süt, test kitabı, tarla”, kesir çubuğu modeli verildiğinde “tahta, kablo, meyve kasası” hikayelerini kullanmaları.

Öğretmen adaylarından sadece ÖA3 ve ÖA4’ün modelden bağımsız olarak problem kurduğu görülmüştür. Burada ÖA4 günlük yaşamında çoğu durumu problem kurarak açıkladığını, problem kurmaya ayrı bir ilgisinin olduğunu ve özel ders verdiğini belirtmesiyle problem kurmaya ilişkin deneyiminin diğer öğretmen adaylarına göre daha

fazla olduğunu ve bu durumun bundan ileri geldiğini göstermiştir. Diğer taraftan ÖA3 öğretim sürecinde iki kesrin çarpma işlemine ilişkin kurduğu neredeyse bütün problemlerinde “cevaplanan sorular” ve “cevaplanan soruların doğru veya yanlış olan kısmı” şeklinde problemler oluşturmuştur. Buna göre ÖA3’ün iki kesrin çarpma işlemi için problem kurmaya ilişkin anlamasını bu problem hikayesi üzerinden geliştirdiği anlaşılmaktadır. Öğretimden sonra diğer öğretmen adaylarının da modelden bağımsız problem kurdukları ve problemden bağımsız model çizdikleri görülmüştür.

Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kavramsal anlamalarının gelişiminde model türünün önemli olduğu, her modelin her durum için uygun olmadığı ve bir öğretmen adayının anlamlandırmasına yardımcı olan model türünün diğer öğretmen adayına yardımcı olmayabileceği sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuçlar daha önce yapılmış öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamalarını inceleyen çalışmaları desteklemektedir (Baek vd., 2017; Lee vd., 2011; Toluk-Uçar, 2009;). Van de Walle vd. (2012) aynı işlemi farklı modellerle göstermenin farklı öğrenme olanakları sağladığını ve öğretmen adaylarının kesirlere ilişkin anlamalarını geliştirdiğini ifade etmiştir. Bununla beraber bazı içeriklerin bir modelle verilip diğeriyle verilemediğini ve bazı öğretmen adaylarının bir modeli anlamlandırdığını, diğeri anlamlandıramadığını belirtmiştir. Benzer durumlar bu çalışmada da tespit edilmiştir.

Modellerden özellikle dikdörtgensel alan modelinin iki kesrin çarpma işlemini anlamlandırmalarına yardımcı olduğu görülmüştür. Öğretmen adayları öğretim sürecinde iki kesrin çarpma işlemi için alan modelini kullanmaları sonucu daha az zorluk yaşamışlardır. Bu sonuç Toluk-Uçar (2009)’ın çalışmasının sonucu ile benzerlik göstermektedir. Bu çalışmada öğretmen adaylarının çoğu diğer modellere göre alan modelini yoğun bir şekilde kullanmışlardır. Kesirlerle bölme ise kesir çubuğu modeli daha çok yardımcı olmuştur. Öğretmen adaylarının öğretim sürecinde bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemini çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini ve farklı model türlerini kullanarak anlamlandırdıkları tespit edilmiştir. Öğretmen adayları verilen bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemi için önce kesir çubuğu modeli çizmişlerdir ve yeni bütünü bir bütün olarak gösterip modelden işlemin sonucuna ulaşamamışlardır, sonra bazıları küme modelini bazıları da dikdörtgensel alan modelini kullanarak yeniden model çizmişlerdir ve işlemin sonucunu model üzerinden doğru bir şekilde ifade ettikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarının burada zorlanmalarının kullandıkları model türünün yanı sıra çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini gözardı etmelerinden yani

her bir bütünün verilen kesir kadarını bulma ile yeni bütünün verilen kesir kadarını bulmanın aynı olduğunu modelde göstermeye ilişkin kavramsal anlamaya sahip olmamalarından kaynaklandığı tespit edilmiştir. Bu özelliğe ilişkin kavramsal anlamaya sahip kişiler işlemi modelde göstermişlerdir ve matematiksel olarak ifade etmişlerdir (örneğin, $3/7 \times 4$ işlemini $3/7 \times (1 + 1 + 1 + 1)$ şeklinde yazma ve modelde gösterme).

Model türünün verilen işlem veya problem için model çizmede olduğu gibi verilen modelin ifade ettiği işlemi yazmada da verilen model için problem kurmada da çok önemli olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemine ilişkin verilen model için problem kurarken ve verilen modelin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazarken zorlanmalarının model türüne ve modelin çarpmanın veya bölmenin hangi anlamını yansıttığına göre değiştiği tespit edilmiştir. Öğretmen adayları küme modelinde zorlanırlarken kesir çubuğu ve dikdörtgensel alan modelinde çok fazla zorlanmamışlardır. Bu durum bu modelleri daha çok kullanıyor ve aşına olmaları ile açıklanabilir (Orrill vd., 2008). Buna göre öğretmen adayları aşına oldukları modeller için daha rahat problem kurarken ve işlemi yazarken, diğerlerinde çok zorlanmışlardır. Özel (2013) çalışmasında kesirlerle bölmeye ilişkin kavramsal anlamayı öğretmen adaylarına kazandırmak için uzunluk, alan ve küme modellerini içeren farklı modellerin kullanılması gerektiğini belirtmiştir. Bu çalışmada da bu model türleri verilmiştir ve her ne kadar başlangıçta zorlansalar da daha sonra herhangi bir zorluk yaşamadan model çizdikleri görülmüştür. Küme modelinde en çok karşılaşılan zorluk bütünü çokluk olarak alma olmuştur. Öğretmen adaylarının küme modelinde bütünün nesneler topluluğundan oluştuğunu gözardı ettikleri ve modelin ilk basamağında kaç tane verildiyse o nesnelerin sayısını probleme ekledikleri görülmüştür. Bu sonuç daha önce yapılmış öğretmen adaylarının kesirlerle çarpmaya ilişkin anlamalarını inceleyen çalışmaların sonuçlarıyla benzerlik göstermektedir (Baek vd., 2017).

Öğretim sürecinde verilen modellerin türlerinin yanısıra verilen modeldeki parçalama şeklinin de önemli olduğu görülmüştür. Bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminin paylaşırma anlamını yansıtan bir kesir çubuğu modeli verildiğinde modele karşılık gelen işlemi ifade ederken zorlanan öğretmen adayları olduğu belirlenmiştir. Burada öğretmen adaylarının aşına oldukları bir model verildiği halde modele karşılık gelen işlemi yazmakta zorlanmalarında modelde aşına olmadıkları bir şekilde parçalamanın verilmiş olmasının etkisi olduğu tespit edilmiştir. Buna göre aynı model türünün alternatif gösterimlerinin öğretmen adaylarının verilen modelin ifade ettiği işlemi yazmalarını ve bu model için

problem kurmalarını zorlaştırdığı söylenebilir. Bu sonuç daha önce yapılan çalışmaların sonuçları ile benzerlik göstermektedir (Lee vd., 2011; Orrill vd., 2008). Lee vd. (2011)'nin çalışmasında $\frac{3}{4}$ 'ün $\frac{1}{3}$ 'ünün gösterildiği iki modelin birinde parçanın parçası, diğerinde ortak kesişim kullanılmıştır ancak öğretmenler ders kitaplarından ortak kesişim şeklinde gösterilen modele daha aşina oldukları için diğer modeli yorumlarken zorlanmışlardır.

Öğretmen adaylarının model çizmelerini model türünün kolaylaştırdığı gibi problemin verilmesinin de kesirlerle çarpma ve bölme işlemleri için model çizmelerine yardımcı olduğu tespit edilmiştir. Bu durum özellikle bölünenin bölenden büyük olduğu bölme işleminin paylaşırma anlamına ve bölünenin bölenden küçük olduğu bölme işleminin grupta anlamına ilişkin model çizerken görülmüştür. Problemden yer alan sayıların ifade edilişlerine göre aynı veya farklı cins olduğunu farkedip bütünlerin aynı veya farklı olmasına karar verdiklerini belirtmişlerdir. Böylece problemin verilmesinin bölmenin hangi anlamına uygun olduğunu belirlemelerine ve uygun birimi seçmelerine yardımcı olduğu söylenebilir. Çünkü grupta anlamında bütünler aynı, paylaşırma anlamında bütünler farklı alınmaktadır. Bununla beraber bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin verilen problem için işlem yazarken model verildiğindeki gibi zorlanmadıkları görülmüştür. Problemin verilmesinin bu problemin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazmayı kolaylaştırdığı söylenebilir. Örneğin, öğretmen adayları $\frac{3}{7} \times 4$ işlemine ilişkin verilen problem için model çizmede oldukça fazla zorlanırlarken, bu problemi sözel olarak “4 metrelik kumaşın $\frac{3}{7}$ 'si” şeklinde ifade etmişlerdir ve bunu “4'ün $\frac{3}{7}$ 'si” şeklinde düşünerek probleme karşılık gelen işlemi zorlanmadan matematiksel olarak yazdıkları görülmüştür. Buna göre öğretim sürecinin başında verilen problemin ifade ettiği işlemi yazmada verilen modelin ifade ettiği işlemi yazmaya göre daha başarılı olmuşlardır. Bu durumun öğretim sonunda her iki durum için aynı olduğu görülmüştür. Yani hem model verildiğinde hem de problem verildiğinde ifade ettikleri işlemleri doğru bir şekilde ve zorlanmadan matematiksel olarak yazmışlardır.

Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemine ilişkin kavramsal anlamalarının gelişiminde diğer önemli bir nokta referans alınan bütündür. Lee vd. (2011)'nin çalışmasında öğretmenlerin referans alınan bütünü doğru şekilde belirlemelerinin ve esnek bir şekilde kullanabilmelerinin modelleri anlamalarında önemli bir rol oynadığı sonucuna ulaşılmıştır. Bu çalışmada model çizmenin yanısıra problem kurarken, matematiksel ifade yazarken, gerekçelendirme ve açıklama yaparken de önemli olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adayları öğretimden önce ve öğretim sürecinin başlarında özellikle kesirlerle

bölme işleminde referans alınan bütünü belirlemede oldukça fazla zorlanmışlardır. Bu sonuç daha önce yapılan çalışmaların sonuçları ile benzerlik göstermektedir (Armstrong ve Bezuk, 1995; Azim, 1995; Lamberg ve Wiest, 2015; Orrill vd., 2010). Örneğin, öğretimden önce verilen $1/7 \div 3/4$ işleminin grupta anlamı için bir öğretmen adayı model çizerken $3/4$ için 1 bütün yerine 1 bütünün $1/7$ 'sini referans almıştır. Öğretimden önce referans alınan bütüne ilişkin yaşanan bu zorlukların öğretim sürecinin başında da devam ettiği görülmüştür. Örneğin, $3/4 \div 5/7$ işleminin grupta anlamı için bir öğretmen adayı model çizerken $5/7$ için bir bütün yerine bir bütünün $1/4$ 'ünü referans almıştır. Bu iki işlem için bütünlerin aynı olması gerektiğini bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemi verilince farketmişlerdir. Bir başka öğretmen adayı öğretim sürecinde verilen $3/4 \div 2/3$ işleminin sonucunu grupta anlamı için çizdiği model üzerinden “bir” olarak ifade edip kalan parçayı ifade etmekte zorlanmıştır. Bu durumun işlemin sonucu için referans alınan bütüne ilişkin kavramsal anlamasının öğretim sürecinin başında zayıf olmasından kaynaklandığı söylenebilir. Öğretimden sonra öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemine ilişkin model çizerken, problem kurarken veya verilen durumu açıklarken referans alınan bütünü doğru bir şekilde belirledikleri ve bunu açıklamalarında vurguladıkları görülmüştür.

Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemine ilişkin verilen modelin veya problemin ifade ettiği işlemi yazarken, verilen işlem için model çizerken veya problem kurarken matematiksel dil boyutunda da zorluklar yaşadıkları tespit edilmiştir. Örneğin, $4/5 \times 5/9$ işlemini yanstan bir model verildiğinde bu modelin ifade ettiği işlemi açıklarken bir öğretmen adayı “ $4/5$ ’leri aramış”, “ $5/9$ ’u $4/5$ ’lere bölmüş” ifadelerini kullanmıştır. Bu ifadeler öğrencilere bölme işlemi düşündürtebilmektedir. Öğretmen adayı bu ifadelerini daha sonra “ $5/9$ ’un $4/5$ ’lerini almış” şeklinde düzeltmiştir. Öğretimden önce ve öğretim sürecinde zaman zaman öğretmen adaylarının “bütün” yerine “tam” ifadesini kullanarak uygun olmayan bir matematiksel dile başvurdukları görülmüştür. Örneğin, “4 bütün var” yerine “4 tam var” şeklinde ifade etme. Diğer taraftan öğretmen adaylarının “ne kadar” ve kaç” ifadelerini birbirinin yerine kullanarak kurdukları problemlerde hata yaptıkları görülmüştür. Burada “ne kadar” yerine “oranı” ve “kaçta kaç” ifadelerini de kullanarak verilen işlem yerine başka bir işlemi yansıtan problem kurmuşlardır.

Öğretmen adaylarının öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin verilen problemin ifade ettiği işlemi yazmada kesirlerle çarpmada olduğu gibi zorlanmadıkları görülmüştür. Model verildiğinde ise çarpma

işleminde olduğu gibi bölme işleminde de yazmakta zorlanmışlardır. Öğretmen adaylarının modelin ifade ettiği işlemi belirlerken modelin ilk basamağı ve sonucu gösteren son basamağına bakıp buna göre hareket ettikleri yani işlemin sonucunu gözönüne aldıkları tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının model verildiğinde ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazmaya ilişkin yaşadıkları zorlukların öğretim sürecinde de bazı öğretmen adaylarında devam ettiği ancak öğretimin sonunda bu zorlukların ortadan kalktığı görülmüştür. Buna bölme işlemini çarpma işlemi şeklinde yazma ve işlemdeki sayıları çarpmanın tanımına göre ifade etmenin yardımcı olduğu görülmüştür. Öğretmen adayları öğretimin başında bir doğal sayı ile bir kesrin veya bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine ilişkin verilen modele karşılık gelen işlemi ifade ederken bölme ve çarpma işlemi arasında ikilem yaşamışlardır. Bu durum bölmenin paylaştırma ve gruptama anlamına ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen çarpma işleminin ne olduğuna ilişkin kavramsal anlamaya henüz sahip olmamaları ile açıklanabilir.

Öğretmen adaylarının öğretimden önce iki kesrin bölme işlemine ilişkin verilen modelin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazmada bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemine göre daha zayıf oldukları görülmüştür. Öğretmen adaylarından sadece ÖA2 işlemi doğru bir şekilde ifade etmiştir. Bu farkın ÖA2'nin öğretimden önce yeni bütün ve işlemin sonucu için referans alınan bütüne ilişkin kavramsal anlamaya sahip olmasından kaynaklandığı söylenebilir. Öğretim sürecinde bu zorlukların başlangıçta devam ettiği ancak öğretimin sonuna doğru ortadan kalktığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının bu süreçte sadece iki kesrin bölme işleminin paylaştırma anlamını yansıtan bir kesir çubuğu modeli ve gösterimi diğerlerinden farklı olan iki kesrin bölme işleminin gruptama anlamını yansıtan bir dikdörtgensel alan modeli verildiğinde bu modellerin ifade ettikleri işlemleri yazarken zorluk yaşadıkları tespit edilmiştir. Öğretmen adayları verilen dikdörtgensel alan modelinin ifade ettiği işlem yerine tersini yazmışlardır. Burada öğretmen adayları verilen kesir çubuğu modelinin ifade ettiği işlemi yazarken zorluk yaşadıklarında diğer görevlere geçilmiştir ve ilginç bir şekilde verilen işlem için bu modele benzer model çizdikleri görülmüştür. Öğretmen adayları bir yandan verilen modelin işlemini ifade etmede zorlanırken diğer yandan verilen işlem için bu modeli çizmeleri birinde küçük sayı büyük sayıya bölünüyorken diğerinde büyük sayının küçük sayıya bölünüyor olması ile açıklanabilir. Diğer taraftan sadece bu iki modelde öğretmen adaylarının zorluk yaşamalarının paylaştırma anlamı için verilen modelin ifade ettiği işlemde bölünenin bölenden büyük olması ve gruptama anlamı için verilen modelde bölünenin bölenden

küçük olmasından kaynaklandığı da söylenebilir. Çünkü öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminde olduğu gibi iki kesrin bölme işleminde de bunlara ilişkin anlamaya sahip değillerdir. Öğretimin sonunda bu zorlukların ortadan kalktığı görülmüştür. Buna bir doğal sayı ile bir kesrin ve bir kesir ile bir doğal sayının bölme işleminde olduğu gibi burada da bölme işlemini çarpmanın tersi olarak yazmanın ve çarpmanın tanımına göre ifade etmenin yardımcı olduğu görülmüştür.

Öğretmen adaylarının öğretimden önce kesirlerle çarpma işlemine ilişkin verilen modelin veya problemin neden o işlemi ifade ettiğine ilişkin gerekçelendirme bilgilerinin zayıf ve işlemsel düzeyde olduğu tespit edilmiştir. Bu sonuç daha önce yapılan diğer çalışmaların sonuçları ile benzerlik göstermektedir (Goodson-Espy, 2009; Ochefu, 2013). Ochefu (2013)'nin çalışmasında öğrenciler kesirlerle çarpmayı içeren problemleri doğru çözmüşlerdir (%70) ancak doğru cevap veren öğrencilerin çoğu (%80) neden bu cevap olduğunu açıklayamamıştır. Öğretmen adaylarının öğretimden önce verilen bir modelin veya bir işlemin sonucunun neden doğru veya yanlış olduğuna ilişkin gerekçelendirme bilgilerinin çok zayıf olmadığı ancak işlemsel düzeyde olduğu tespit edilmiştir. Örneğin, öğretmen adaylarının verilen $5/7 \times 2$ işleminin sonucunun $10/14$ olarak ifade edilmesinin yanlış olduğunu çoğunlukla kesirlerle toplama işleminde paydaların da toplanması ($5/7 + 5/7 = 10/14$) ile gerekçelendirdikleri ve işlemin sonucu için referans alınan bütünden bahsetmedikleri görülmüştür. Diğer taraftan iki kesrin çarpma işlemine ilişkin verilen model ve işlemin sonucunun doğru olup olmadığını referans alınan bütüne işaret ederek gerekçelendirdikleri ancak açık bir şekilde ifade etmedikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarının çoğunlukla çarpmanın tekrarlı toplama anlamını kullanarak ve işlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme yaptıkları belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının öğretimden önce verilen model veya problemin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgilerinin diğer durumları gerekçelendirmelerine göre oldukça zayıf olduğu ve bu durumun öğretim sürecinde de devam ettiği görülmüştür. Öğretimin sonunda çarpmanın tanımı yoluyla ve çarpmanın anlamını kullanarak gerekçelendirmenin yanısıra yeni bütün kavramını kullanarak, problem kurarak ve resim çizerek de gerekçelendirmişlerdir. Öğretmen adaylarından sadece ÖA5'in öğretim sürecinin başından sonuna kadar bir kesir ile bir doğal sayının ve iki kesrin çarpma işlemine ilişkin verilen problemlerin neden o işlemleri ifade ettiklerini “-ın, -ün” ifadelerinin kullanılması ile gerekçelendirdiği ve anlamdan bahsetmediği görülmüştür. Buradan ÖA5'in kesirlerle çarpma işlemine ilişkin verilen

problemlerin neden o işlemleri ifade ettiğini gerekçelendirme bilgisinin işlemsel düzeyde kaldığı ve ön-testten son-teste çok fazla gelişmediği anlaşılmaktadır.

Öğretmen adaylarından birisinin bir kesir ile bir doğal sayının çarpma işlemine ilişkin verilen problemin neden o işlemi ifade ettiğini bu işlemin tersi için problemin değişeceğini belirterek ve bunun için problem kurarak gerekçelendirdiği görülmüştür. Öğretimin sonunda öğretmen adaylarının verilen modelin ve cevabın doğruluğunu gerekçelendirme bilgilerinin verilen problem veya modelin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgilerine göre daha güçlü olduğu tespit edilmiştir. Bu sonuç Toluk-Uçar (2009)'ın çalışmasında elde edilen sonuç ile benzerlik göstermektedir. Bu çalışmada öğretimden sonra deney grubundaki öğretmen adaylarının sembolik ifadeyi sözel probleme dönüştürebildikleri halde bazılarının sözel problemi uygun bir grafiksel temsile dönüştürmekte zorlandıkları ve buna bağlı olarak temsilleri için kavramsal olarak doğru gerekçelendirmeler sağlayamadıkları görülmüştür. Öğretmen adaylarının verilen model ve cevabın doğruluğunu gerekçelendirirken öğretimden önce referans alınan bütünün yanlış alındığına işaret ederken öğretimden sonra bunu açık bir şekilde ifade ettikleri ve yeni bütün kavramını da kullandıkları görülmüştür. Bununla beraber verilen problemin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendiremiyorlarken öğretimden sonra çarpmanın anlamını kullanarak ve resim çizerek gerekçelendirmişlerdir. Bütün bunlardan öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma işlemine ilişkin verilen durumları gerekçelendirme bilgilerinin işlemselden kavramsal düzeye geldiği anlaşılmaktadır.

Öğretimden önce kesirlerle bölme işlemine ilişkin verilen model ile cevabın doğruluğu ve verilen problem veya modelin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirme bilgilerinin ÖA2 hariç diğer öğretmen adaylarının özellikle iki kesrin bölme işlemi için oldukça zayıf olduğu tespit edilmiştir. Bu durum öğretimden önce iki kesrin bölme işlemine ilişkin problem kurma ve model çizme bilgilerinin oldukça zayıf olması ile açıklanabilir. ÖA2'nin gerekçelendirme bilgisinin paylaşırma anlamına göre grupta anlamı için daha güçlü olduğu görülmüştür. ÖA2 bölmenin grupta anlamını kullanarak problem kurup bunun üzerinden gerekçelendirmiştir. Bununla beraber paylaşırma anlamı için verilen modelin neden o işlemi ifade ettiğini eksik bir şekilde gerekçelendirirken grupta anlamı için verilen model için eksiksiz bir gerekçelendirme yapmıştır. Diğer taraftan ÖA1'in kesirlerle bölme işlemine ilişkin verilen durumları gerekçelendirme bilgisi öğretimden önce en zayıf kişi olduğu görülmüştür. ÖA1 neredeyse verilen hiçbir durumu gerekçelendirememiştir. Öğretmen adaylarının öğretimden önce kesirlerle bölme işlemine ilişkin verilen durumlar

için daha çok bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak, işlemsel tanım şeklinde ve bölmenin grupta anlamını kullanarak gerekçelendirme yaptıkları tespit edilmiştir. Kesirlerle çarpma işleminde işlemi kullandığı gibi kesirlerle bölme de verilen model ile cevabın doğruluğunu ters çevir çarp algoritmasını kullanarak gerekçelendirdikleri görülmüştür. Bununla beraber kesirlerle bölme işleminde de çarpma işleminde olduğu gibi verilen modelin neden o işlemi ifade ettiğini gerekçelendirmede verilen model ile cevabın doğruluğunu gerekçelendirmeye göre daha zayıf oldukları görülmüştür. Bu da öğretimden önce kesirlerle bölme işlemine ilişkin model bilgilerinin zayıf olması ile açıklanabilir. Öğretim sürecinde öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işlemine ilişkin verilen durumları gerekçelendirme bilgilerinin geliştiği görülmüştür. Burada bölmeyi çarpmanın tersi olarak yazmanın ve çarpmanın tanımına göre ifade etmenin gerekçelendirmelerine yardımcı olduğu görülmüştür.

Öğretimden sonra ilk durumlarına göre bakıldığında bazı öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işlemine ilişkin verilen durumları gerekçelendirme bilgilerinin geliştiği bazılarınının ise çok fazla gelişmediği tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarından ÖA1 gerekçelendirme bilgisi en zayıf başlayan kişi olup en çok gelişen kişinin de o olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının iki kesrin bölme işleminin grupta anlamına ilişkin verilen modelin neden o işlemi ifade ettiğini öğretimden sonra bütünlerin aynı olduğunu ve ortak payda alındığını belirtip bölmenin grupta anlamını kullanarak gerekçelendirdikleri görülmüştür. Bununla beraber iki kesrin bölme işlemine ilişkin verilen modelin doğruluğunu gerekçelendirirken işlemin sonucu için referans alınan bütünün yanlış alındığını ifade etmişlerdir ve yeni bütün kavramını kullanmışlardır. Bütün bunlar öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işlemine ilişkin gerekçelendirme bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiğine ve kavramsal düzeyde olduğuna işaret etmektedir.

Öğretmen adaylarının öğretimden önce kesirlerle çarpma işlemine ilişkin verilen durumları açıklama bilgilerinin zayıf olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarından kesirlerle çarpma işlemleri verilirken çözümlerini açıklamaları istenmiştir. Öğretmen adayları verilen işlem yerine tersini açıklamışlardır. Diğer taraftan çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini ve pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını açıklama bilgilerinin işlemlerin çözümünü açıklamaya göre daha zayıf olduğu görülmüştür. Öğretmen adayları öğretimden önce daha çok uygulama temelli açıklama (UTA) kullanmışlardır. Bu sonuç Ho ve Lai (2012)'nin çalışmasından elde edilen sonuç ile benzerlik göstermektedir. Bu çalışmada öğretmen adaylarına $1/3 \times 3/4$ işlemini ifade eden bir problem verilmiştir ve

öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun bu problemin çözümü için tam bir açıklama yapamadıkları ve çoğunluğunun UTA kullandıkları görülmüştür. Öğretmenlerin kullandığı açıklama türlerinin alan bilgilerine göre değiştiğini gösteren birçok çalışma vardır (Ball, 1990b; Ma, 1999). Ma (1999)'nın çalışmasında işlemsel bilgiye sahip Amerikalı öğretmenler sadece işlemi somutlaştırmak için manipulatifler kullanırken, kavramsal bilgiye sahip Çinli öğretmenler sınıf içi diyalogları desteklemek için manipulatifleri kullanmışlardır. Bu çalışmada da öğretimden önce verilen durumu açıklamaktan ziyade model çizerek, problem kurarak veya örnek vererek sadece işlemi açıklamaya çalıştıkları görülmüştür. Buradan öğretmen adaylarının öğretimden önce kesirlerle çarpma ile ilişkili açıklama bilgilerinin işlemsel düzeyde olduğu anlaşılmaktadır.

Öğretmen adaylarının öğretimden önce çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini basit kesirle çarpma ile açıklarken, pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını işlemin sonucunu modelde göstererek açıkladıkları görülmüştür. Öğretmen adayları öğretimden önce $6 \times \frac{1}{3}$ ve $\frac{1}{3} \times 6$ işlemlerinin aynı olup olmadığını işlemlerin sonuçlarının aynı olduğunu ifade ederek, bunu model çizip göstererek ve değişme özelliğini kullanarak açıklamışlardır. Burada ÖA6, ÖA2 ve ÖA3 hariç diğer öğretmen adayları anlamdan hiç bahsetmemişlerdir. Bu da işlemleri açıklama bilgilerinin işlemsel düzeyde olduğunu göstermiştir. ÖA6, ÖA3 ve ÖA2'nin çarpmanın her iki anlamını kullandıklarından bu işlemleri açıklama bilgilerinin kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir.

Öğretmen adaylarının öğretimden önce bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemini çarpmanın tekrarlı toplama anlamını kullanarak işlem üzerinden açıklarken, iki kesrin çarpma işlemini model çizerek açıkladıkları görülmüştür. Bu sonuç öğretmen adaylarının iki kesrin çarpma işleminin çözümünü açıklama bilgilerinin bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işleminin çözümüne göre daha güçlü ve kavramsal düzeyde olduğuna işaret etmektedir. Çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini öğretimden önce öğretmen adaylarının çoğunun basit kesirle çarpma ile açıklarken bir öğretmen adayının bütünün parçasının alındığına işaret ettiği görülmüştür. Burada basit kesirle çarpmanın neden işlemin sonucunu küçülttüğünü bazı öğretmen adayları basit kesirde payın paydadan küçük olduğunu belirterek ve kesrin operatör anlamını kullanarak *payda bölme ve pay ile çarpma* ile, bazıları *1'den küçük olması* ile açıklamışlardır. Öğretmen adayları pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını eksik de olsa model çizerek ve modelden

ulaştıkları sonucu verilen işlemdeki sayıların paylarının ve paydalarının ayrı ayrı çarpımlarının verdiğini göstererek açıklamışlardır.

Öğretmen adaylarının öğretim sürecinde kesirlerle çarpma işlemine ilişkin verilen durumları açıklama bilgilerinin geliştiği görülmüştür. Çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini açıklarken basit kesirle çarpmanın yanısıra parçanın parçasının alınmasına işaret ettikleri belirlenmiştir. Buradan öğretmen adaylarının çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini açıklama bilgilerinin geliştiği anlaşılmaktadır. Bu sonuç Ochefu (2013)'nın çalışmasının sonucuyla benzerlik göstermektedir. Bu çalışmada öğrenciler parçalama kavramını kullanarak kesirlerle çarpma etkinliklerini gerçekleştirdikten sonra yaşadıkları zorlukları aşmışlardır ve iki veya daha fazla kesrin çarpımının sonucunun neden işlemdeki kesirlerden küçük olduğunu gerekçelendirmişlerdir. Öğretimden önce pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını açıklayamayanların öğretim sürecinde uygun bir şekilde açıkladıkları görülmüştür. Bu algoritmayı model çizerek açıkladıkları ve açıklamalarında yeni bütün kavramını kullandıkları tespit edilmiştir. Öğretimden önce modelden ulaşılan sonucu payların ve paydaların ayrı ayrı çarpımının verdiğini ifade ederken burada kenar uzunluklarını dikkate alarak alanların birbirine oranı şeklinde ifade etmişlerdir. Burada alan modelini kullanarak modelde çift taraflı alanın işlemdeki kesirli sayıların paylarının çarpımını ve dikdörtgenin tamamının alanının paydalarının çarpımını verdiğini göstermişlerdir.

Öğretimden sonra kesirlerle çarpma işlemine ilişkin verilen durumlar için yaptıkları açıklamalar incelendiğinde öğretmen adaylarından hem matematiksel hem uygulama temelli açıklama (MUTA) kullananların da olduğu tespit edilmiştir. Örneğin, $6 \times \frac{1}{3}$ ve $\frac{1}{3} \times 6$ işlemini hem sözel olarak ifade etmişlerdir, hem de model çizerek ve problem kurarak açıklamışlardır. Burada sözel ifadelerin ve modellerin farklı olduğunu doğru bir şekilde belirtmişlerdir. Bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işleminin çözümünü model çizerek ve işlemin sonucu için referans alınan bütüne işaret ederek açıklamışlardır. Öğretmen adaylarının çarpmanın işlemin sonucunu her zaman büyültmediğini basit kesirle çarpma ve 1'den küçük sayıyla çarpma ile açıklamayı öğretimden sonra da sürdürdükleri görülmüştür. Bunlara ilaveten model çizmişlerdir, parçanın parçasının alındığına işaret etmişlerdir ve yeni bütün kavramını kullanmışlardır. Öğretmen adayları öğretimden önce ve öğretim sürecinde pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasını model çizerek açıklıyorlarken öğretimden sonra bununla beraber bazı öğretmen adaylarının (ÖA6 ve ÖA1) matematiksel

olarak tanım ve özelliklerden yararlanarak da açıkladıkları görülmüştür. Burada kesrin tanımını, çarpmanın değişme özelliğini ve çarpmaya göre tersi özelliğini kullanarak bu algoritmayı açıklamışlardır. Bu şekilde matematiksel olarak açıklamayı daha önce yapamıyorlarken öğretimden sonra yapmaları öğretmen adaylarının bu anlamayı gerçekleştirilen öğretimden kazandıklarına işaret etmektedir. Bu öğretmen adaylarının pay ile pay, payda ile payda çarpma algoritmasına ilişkin açıklama bilgilerinin hem işlemsel hem de kavramsal düzeyde olduğu söylenebilir. Son olarak kesirlerle çarpma işlemine ilişkin verilen durumları açıklama bilgilerinde ön-testten son-teste şöyle bir gelişim de görülmüştür: Öğretmen adayları iki kesrin çarpma işleminin çözümünü açıklarken öğretim öncesi yaptıkları açıklamalardan farklı olarak referans alınan bütünün yeni bütün olduğunu ($1/3 \times 5/6$ işleminde $1/3$ için yeni bütün olan $5/6$ 'nın referans alınması) vurgulamışlardır.

Öğretmen adaylarının öğretimden önce kesirlerle bölme işlemine ilişkin verilen durumları açıklama bilgilerinin kesirlerle çarpma işlemine göre daha zayıf ve işlemsel düzeyde olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adayları kesirlerle çarpmada olduğu gibi bölmede de daha çok UTA kullanmışlardır. Öğretmen adaylarından öğretimden önce uygulanan ön-testte bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemi ve bu işlemin grupta anlamı için ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen çarpma işlemi verilip bu işlemlerin aynı olup olmadığını açıklamaları istenmiştir. Ancak hiçbir öğretmen adayının açıklamalarında bu anlamdan bahsetmediği görülmüştür. Öğretmen adayları model çizerek, problem kurarak, verilen işlemleri sözel olarak açıklayarak veya gerçek yaşamdan örnekler vererek bu iki işlemin sonuçlarının aynı olduğunu gösterip işlemlerin aynı olduğunu ifade etmişlerdir ancak bölmenin anlamından bahsetmemişlerdir. Bununla beraber öğretimden önce uygulanan bu testte öğretmen adaylarından bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini, bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya bölünebildiğini, ters çevir çarp algoritmasını ve verilen iki kesrin bölme işleminin çözümünü açıklamaları da istenmiştir. Öğretmen adaylarının en çok ters çevir çarp algoritmasını ve verilen iki kesrin bölme işleminin çözümünü açıklamakta zorlandıkları ve açıklayamadıkları görülmüştür. Bu sonuçlar daha önce yapılan diğer çalışmaların sonuçlarını desteklemektedir (Borko vd., 1992; Tiros, 2000).

Öğretmen adaylarının bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini açıklama bilgilerinin öğretimden önce diğer durumlara göre daha güçlü olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının bu durumu daha çok bölenin basit kesir olması ile açıkladıkları, bununla beraber doğal sayılarla bölme işlemi örnekleri, gerçek yaşamdan örnekler vererek

ve gruplama anlamı için model çizerek ve problem kurarak açıkladıkları görülmüştür. ÖA5 hariç diğer öğretmen adayları bölmenin gruplama anlamını kullanarak işlemin sonucunun grup sayısı olduğuna işaret etmişlerdir. Bazı öğretmen adayları önce doğal sayılarla bölme işlemi örnekleri vermişlerdir, sonra bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemi örneği vererek bölen 1'den küçük kesirli bir sayı olduğunda işlemin sonucunun büyüdüğünü ve 1'den büyük olduğunda küçüldüğünü belirtmişlerdir. Öğretmen adaylarının bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya bölünebildiğini bölmenin paylaştırma anlamı için model çizerek ve problem kurarak, gerçek yaşamdan örnekler vererek ve bölmeni vurgulayarak açıkladıkları görülmüştür. Örneğin, bir öğretmen adayı pasta örneği vererek bir pastanın 2 kişiye de 4 kişiye de bölünebileceğini ifade etmiştir. İki kesrin bölme işleminin çözümünü sadece ÖA2'nin bölmenin gruplama anlamını kullanarak ve model çizerek uygun bir şekilde açıkladığı görülmüştür. Bu da ÖA2'nin öğretimden önce iki kesrin bölme işlemine ilişkin anlamasının diğerlerine göre daha güçlü olması ile açıklanabilir.

Öğretmen adaylarının öğretimden önce ters çevir çarp algoritmasını açıklamak için model çizdikleri ancak bu algorithmadan ziyade verilen işlemi göstermeye çalıştıkları ve referans alınan bütünü yanlış alarak başarılı olamadıkları görülmüştür. Örneğin, öğretmen adaylarından birisi $2/3 \div 1/5$ işlemi için bu algorithmayı açıklarken işlemin gruplama anlamını ele almıştır ve model çizmiştir. Ancak işlemdeki $1/5$ için referans alınan bütünü yanlış almıştır yani $2/3$ için alınan bütün ile aynı bütünü alması gerekirken bir bütünün $1/3$ 'ünü almıştır. Buna göre modelde $2/3$ 'ün içinde $1/3$ 'ün $1/5$ 'inden kaç tane olduğunu göstermiştir. Diğer taraftan ters çevir çarp algoritmasını sadece öğretim sürecine başlangıç düzeyi düşük olarak belirlenen gruptan ÖA1'in "paydayı 1 yapma" ile doğru bir şekilde açıkladığı görülmüştür. Bu durum ÖA1'in özel ders veriyor olması ile açıklanabilir çünkü özel derse hazırlanırken bunu öğrendiğini belirtmiştir.

Öğretmen adaylarının öğretim sürecinde kesirlerle bölmeye ilişkin verilen durumlara ilişkin yaptıkları açıklamalar incelendiğinde öğretimden önce olduğu gibi UTA'yı daha çok kullandıkları tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının öğretim sürecinde bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini, bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya bölünebildiğini ve ters çevir çarp algoritmasını açıklama bilgilerinin geliştiği görülmüştür. Bu gelişim öğretimden sonra da görülmüştür. Öğretmen adayları bölmenin işlemin sonucunu her zaman küçültmediğini bölenin basit kesir olmasının yanı sıra bölmenin gruplama anlamını ele alarak işlemin sonucunun grup sayısı olduğunu ve bölünen ile işlemin sonucu için referans alınan bütünlerin farklı olduğunu belirterek açıklamışlardır.

Öğretmen adaylarından öğretimden önce bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya bölünebildiğini açıklayamayanların öğretim sürecinde bölmenin paylaştırma anlamını kullanarak uygun bir şekilde açıkladıkları görülmüştür. Burada bölen ile bölünenin aynı şeyi ifade etmediklerini ve bölenin grup sayısı olduğunu vurgulamışlardır.

Öğretmen adaylarının ters çevir çarp algoritmasını açıklama bilgileri incelendiğinde ön-testten son-teste geliştiği görülmüştür. Öğretmen adaylarının öğretimden önce bu algoritma gibi kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin önemli kavramların altında yatan anlamı öğrenmek için diğer çalışmalarda da görüldüğü gibi (Ball, 1990; Borko vd., 1992) olanakları olmamıştır. Öğretimden önce öğretmen adayları bu algoritmayı açıklamaktansa işlemi model çizerek açıklamaya çalışmışlardır ancak başarılı olamamışlardır. Bu sonuç diğer çalışmaları desteklemektedir (Alenazi, 2016; Borko vd., 1992; Chen, 2010; Gregg ve Gregg, 2007; Li ve Smith, 2007). Öğretmen adayları öğretim sürecinde ters çevir çarp algoritmasını bölmenin grupta anlamını kullanarak, paydayı 1 yapma ile, ortak payda algoritması ile açıklamışlardır. Burada bu algoritmayı en çok paydayı 1 yapma ile açıkladıkları görülmüştür. Bu sonuç Chen (2010)'in çalışmasının sonucu ile farklılık göstermektedir. Bu çalışmada ortak payda algoritmasını daha çok kullanmışlardır. Sonuç olarak öğretmen adayları ters çevir çarp algoritmasını öğretim sürecinde ve son-testte hem bölmenin anlamlarını kullanarak hem de model çizerek veya problem kurarak açıklamışlardır. Bu da öğretmen adaylarının ters çevir çarp algoritmasına ilişkin anlamalarının geliştiğine ve kavramsal düzeyde olduğuna işaret etmektedir.

Öğretmen adaylarının öğretimden önce verilen bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemi ve bu işlemin grupta anlamı için ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen çarpma işleminin aynı olup olmadığını açıklarken bu anlamdan bahsetmiyorlarken öğretimden sonra bölmenin grupta anlamını kullanarak açıkladıkları görülmüştür. Burada verilen bölme işleminin grupta anlamı için model çizerek bunun üzerinden verilen çarpma işleminin karşılık geldiğini açıklamışlardır. Bununla beraber bölmenin paylaştırma anlamı için model çizip verilen bölme işlemine verilen çarpma işleminin karşılık gelmediğini açıklayan öğretmen adayları da olmuştur. Burada bu iki işlemin anlamlarının farklı olduğunu belirtmişlerdir. Öğretmen adayları öğretimden önce her iki işlem için model çizip işlemlerin sonuçlarının aynı olduğunu ifade ederek bu iki işlemin aynı olduğunu belirtirlerken ve bölmenin anlamından bahsetmiyorlarken öğretimden sonra bölmenin anlamlarını ele alarak verilen iki işlemin aynı olup olmadığını açıklamışlardır. Buradan öğretmen adaylarının bir kesir ile bir doğal sayının bölme işlemi ve bu işlemin grupta

anlamı için ters çevir çarp algoritmasından karşılık gelen çarpma işleminin aynı olup olmadığını açıklama bilgilerinin ön-testten son-teste geliştiği anlaşılmaktadır. Bununla beraber öğretmen adayları öğretimden önce en çok ters çevir çarp algoritmasını ve iki kesrin bölme işleminin çözümünü açıklamakta zorlanıyorlarken öğretimden sonra bu zorluğun ortadan kalktığı görülmüştür. ÖA2 hariç diğer öğretmen adayları öğretimden önce iki kesrin bölme işleminin çözümünü açıklayamıyorlarken öğretimden sonra bölmenin anlamlarını kullanıp model çizerek ve işlemin sonucu için referans alınan bütüne işaret ederek açıklamışlardır.

Son olarak bütün bu sonuçlardan öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin özelleştirilmiş alan bilgilerinin gerçekleştirilen öğretimin sonunda geliştiği anlaşılmaktadır. Bu çalışmanın sonuçlarını özetlemek gerekirse aşağıdakiler söylenebilir:

- Öğretimden önce kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin problem kurma veya model çizme deneyimleri (lisans dersinde görme, özel ders verme, vs.) olan öğretmen adaylarının öğretim sürecinde model çizerken, problem kurarken veya matematiksel ifade yazarken neredeyse hiç zorluk yaşamadıkları belirlenmiştir.
- Öğretmen adaylarının öğretimden sonra genel olarak temsil türleri arasında herhangi bir zorluk yaşamadan geçiş yapabildikleri söylenebilir. Yani verilen modelin ifade ettiği işlemi yazabiliyorlar ve bu işlem için problem kuruyorlar, benzer şekilde verilen problemin ifade ettiği işlemi yazabiliyorlar ve bu işlem için model çiziyorlar ve verilen işlem için problem kurup model çizebiliyorlar.
- Öğretmen adaylarının öğretimden önce ve öğretim sürecinde kesirlerle çarpma ve bölme işlemine ilişkin model çizerken ve verilen model için işlemi yazarken veya problem kurarken zorluklar yaşamışlardır. Burada yaşadıkları zorlukların model türüne göre değiştiği tespit edilmiştir.
- Öğretmen adaylarının öğretimden önce kesirlerle çarpma ve bölme işlemine ilişkin verilen model veya işlem için problem kurarken hataya düştükleri ve ilgili literatürde görülen bütünü çokluk olarak alma, bilinmeyenin olmaması, birim kargaşası, kesir sayısına doğal sayı anlamı yükleme, parça-bütün ilişkisi kuramama hatalarını en çok yaptıkları tespit edilmiştir.
- Öğretmen adayları öğretim sürecinin başında her ne kadar “grup” kavramını anlamlandırmakta zorlansalar da bölme işlemini çarpmanın tersi olarak yazmanın ve işlemdeki sayıları çarpmanın tanımına göre ifade etmenin kesirlerle bölme işlemine ilişkin model çizerken ve problem kurarken, verilen model veya

probleme karşılık gelen işlemi matematiksel olarak ifade ederken, verilen durumları gerekçelendirirken ve açıklarken yardımcı olduğu görülmüştür.

- Öğretmen adayları öğretimden önce kesirlerle çarpma işleminin sonucunun iki farklı şekilde ifade edilebileceğini yani sadeleştirme özelliğini model üzerinden açıklayamıyorlarken öğretim sürecinde bunu doğru bir şekilde açıklamışlardır. Öyle ki öğretimden sonra bunu çizdikleri modellerde fazladan bir basamak olarak çizip gösteren öğretmen adayları olmuştur.
- Hem kesirlerle çarpma hem de kesirlerle bölme işleminde referans alınan bütünün belirlenmesinin çok önemli olduğu ve buna ilişkin kavramsal anlamayı kazanan öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kavramsal anlamalarının da geliştiği görülmüştür.
- Kesirlerle çarpma işlemine ilişkin anlamalarının özellikle model bilgilerinin gelişiminde çarpmanın değişme özelliğinin ve çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğinin çok önemli olduğu tespit edilmiştir. Bu özelliklere ilişkin kavramsal anlamaya sahip olmayan öğretmen adaylarının çarpmanın iki anlamına ilişkin ikileme düştükleri, bu anlamayı kazananların kesirlerle çarpmaya ilişkin kavramsal anlamalarının geliştiği görülmüştür.
- Kesirlerle bölmeye ilişkin anlamalarının gelişiminde bütünlerin aynı olup olmadığını ve ortak pay mı ortak payda mı alınacağını belirlemenin önemli olduğu tespit edilmiştir. Bunlara ilişkin kavramsal anlamaya sahip olmayan öğretmen adaylarının bölmenin paylaştırma ve grupta anlamalarına ilişkin ikileme düştükleri ve bu anlamayı kazananların kesirlerle bölmeye ilişkin kavramsal anlamalarının geliştiği görülmüştür.
- Öğretmen adaylarının kurdukları problemlerin hikayesini verilen modelin etkilediği ve verilen problemin hikayesinin model seçimlerini etkilediği tespit edilmiştir.
- Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamalarındaki gelişim en çok ortaya *pay ile pay*, *payda ile payda çarpma* ve *ters çevir çarp* algoritmasına ilişkin yaptıkları açıklamalarda görülmüştür. Öğretmen adayları bu algoritmaları model çizerek, gerçek yaşamdan örnekler verip problem kurarak ve/veya matematiksel olarak açıklamışlardır. Buna göre gerçekleştirilen öğretimin öğretmen adaylarına bu algoritmaları açıklamak için alternatif yollar kazandırdığı söylenebilir.

- Öğretim sürecinde ilginç bir durumla karşılaşmıştır. Kesirlerle bölme işlemine ilişkin öğretim gerçekleştirildikten sonra yapılan görüşmelerde kesirlerle çarpma işlemine ilişkin bir model veya problem verildiğinde işlemini yazmakta zorlandıkları, çarpma yerine bölme işlemini yazdıkları ve verilen işlem için model çizme ve problem kurmalarında zorlandıkları görülmüştür.
- Öğretim sürecinde karşılaşılan diğer ilginç bir durum da özellikle kesirlerle bölme işlemine ilişkin görüşmeler esnasında verilen modelin işlemini yazmaları istenilen görevlerde öğretmen adayları bu işlemleri yazamayınca diğer görevlere geçildiğinde verilen işlem için bu modelin benzerini çizmiş olmalarıdır. Bu durumun işlemdeki sayıların birbirinden büyük küçük olmalarıyla ilgili olduğu görülmüştür.
- Bir kesir ile bir doğal sayının gruptama anlamına ilişkin problem kurma bilgileri ÖA4 hariç diğer öğretmen adaylarının öğretim sonunda geliştiği görülmüştür. ÖA4'ün bu bilgisinin gelişmemesi öğretim sırasında verilen alıştırmalarda ve öğretime paralel yapılan görüşmelerde görevleri yaparken çok istekli olmaması ile açıklanabilir. Bunu kayıt dışı sohbet sırasında bölmenin bu anlamını öğrenmenin çok fazla işine yaramayacağını söylemesi desteklemektedir.
- Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kavramsal anlamalarının problem kurma, model çizme, matematiksel ifade yazma, gerekçelendirme ve açıklama deneyimlerini yaşamaları sonucu geliştiği görülmüştür.

5.2. Öneriler

Bu çalışma ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamalarının gelişimini ortaya koymuştur. Bu çalışmada kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin özelleştirilmiş alan bilgileri bileşenleri olan temsil, gerekçelendirme ve açıklama ile ön-test ve son-test uygulayarak ve her hafta yapılan derslere paralel görüşmeler gerçekleştirilerek incelenmiştir. Öğretmen adayları bu çalışma boyunca model çizme, problem kurma, verilen model veya problem için matematiksel ifade yazma, verilen durumlar için gerekçelendirme ve açıklama yapma deneyimleri yaşamışlardır. Bu şekilde kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamalarının geliştiği ve kavramsal düzeyde olduğu görülmüştür.

Öğretmen adaylarıyla yapılan bu çalışma matematik eğitimi alanında yapılan çalışmaların sonuçlarını desteklemektedir. Ülkemizde kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin çalışmalar daha çok öğrencilerle gerçekleştirilmiştir (Biber vd., 2013; Birgin ve Gürbüz, 2009; Haser ve Ubuz, 2003; Işık ve Kar, 2012b; Kılıç ve Özdaş, 2010). Bu anlamda bu çalışma öğretmen adaylarıyla gerçekleştirilerek özellikle Türkçe literatüre katkı sağladığı söylenebilir. Bu çalışma küçük bir grupla gerçekleştirilmiştir. Bu çalışma farklı üniversitelerde okuyan daha çok sayıda öğretmen adaylarıyla tekrarlanabilir veya öğretmenlerle de seminerler aracılığıyla gerçekleştirilebilir. Pilot çalışmada daha büyük bir grupla da çalışılmıştır ancak bunu tek başına yürütmenin zor olduğu görülmüştür. Bu anlamda daha büyük gruplarla çalışırken büyük bir araştırma ekibiyle çalışılmalıdır.

Bu çalışmadan elde edilen verilerin analizi sırasında öğretim sürecinde verilen alıştırmalar da incelenmiştir ancak görüşmelerde bunlara ilişkin sorular sorulmaması sonucu bazı noktalarda öğretmen adayının ne demek istediği tam olarak açıklanamamıştır. Bu anlamda daha sonra yapılacak araştırmalarda öğretim sürecinde verilen bu alıştırmalara ilişkin görüşmeler yapılabilir. Diğer taraftan öğretim sürecinde sınıf ortamında her bir öğretmen adayı için gözlem notları tutulabilir ve görüşmeler sırasında bu notlara ilişkin katılımcı teyidi alınabilir.

Öğretmen adaylarının bu çalışmada karşılaştıkları zorluklar ve yaptıkları hatalar ilgili literatürde görülen hatalar ve zorluklar olduğu görülmüştür (Ball, 1990a; Chen, 2010; Lee, 2010; Luo, 2009; Ma, 1999). Bu zorlukların ve hataların nedenlerini derinlemesine araştıran nitel çalışmalar yapılabilir. Bu hatalar özellikle problem kurma sürecinde görülmüştür. Bu anlamda öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin problem kurma süreçleri daha derinlemesine araştırılabilir. Bununla beraber bu çalışma öğretmen adaylarının yanısıra hem öğrenciler hem de öğretmenlerle de yapılabilir ve kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamalarındaki benzerlikler ve farklılıklara ilişkin bilgi edinilebilir. Literatürde öğrencilerde kesirlerle çarpma ve bölme işlemine ilişkin problem kurarken görülen hataların benzer şekilde öğretmen adaylarında ve öğretmenlerde de görüldüğünü gösteren çalışmalar mevcuttur (Graeber vd., 1989; Harel vd., 1994; Tirosh, 2000). Diğer taraftan öğretmen adaylarının bu çalışmada verilen modelin türüne ve aynı modelin farklı gösterimlerine göre zorlandıkları görülmüştür. Bu zorlanmanın nedenleri de daha derin bir şekilde araştırılabilir.

Öğretimden önce uygulanan ön-testte ve öğretimden sonra uygulanan son-testte verilen görev sayısı çok fazladır ancak konunun geniş çerçevede alınması sonucu bu durum ortaya

çıkmiştir. Bu çalışmada hem kesirlerle çarpma hem de kesirlerle bölme ele alınmıştır. Her ne kadar bu iki konuyu beraber çalışma öğretmen adaylarının anlamalarının öğretim sürecindeki gelişimini görmek adına önemli olsa da bunlardan herhangi birisi tek başına alınarak daha derin bir çalışma gerçekleştirilebilir. Bu şekilde daha sonra yapılacak çalışmalarda daha dar çerçeve (sadece kesirlerle çarpma veya sadece kesirlerle bölme) ve bir veya iki boyut (sadece model çizme veya sadece problem kurma gibi) alınması halinde daha az görev verilerek öğretmen adaylarının özelleştirilmiş alan bilgilerinin daha farklı yönlerden incelenmesine olanak sağlayacaktır.

Ön-test ve son-test bu çalışmada öğretmen adaylarına belirli bir zaman verilerek uygulanmıştır. Daha sonra öğretmen adaylarıyla bu testlere ilişkin görüşme yapılmıştır. Bu görüşmenin testin uygulanmasından çok kısa bir süre sonra uygulanmasının önemli olduğu söylenebilir çünkü testi yaptıktan sonra teste ilişkin bu görüşme birkaç gün içinde yapıldığında bile öğretmen adaylarının bu testteki görevleri nasıl cevapladıklarını hatırlayamadıkları görülmüştür. Buna göre daha sonra yapılacak çalışmalarda bunun gibi testler öğretmen adaylarıyla birebir görüşme sırasında yaptırılabilir ancak görev sayısı ve öğretmen adayı sayısı daha az olmalıdır. Bu şekilde öğretmen adaylarının özellikle başlangıç durumları biraz daha net bir şekilde ortaya koyulabilir.

Bu çalışmada görsel temsil türlerinden sadece çizili temsil tercih edilmiştir. Buna göre öğretmen adaylarından kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin problem veya işlem verip model çizmeleri ve model verip problem kurlmaları veya işlemi matematiksel olarak yazmaları istenmiştir. Daha sonra yapılacak çalışmalarda bunun yanısıra somut materyaller veya manipulatifler kullanılarak da benzer uygulamalar gerçekleştirilebilir. Böylece öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamalarının gelişimine etkileri incelenebilir.

Öğretmen adayları bu çalışmaya seçilirken her ne kadar ön-test uygulanarak öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamalarının başlangıç durumu belirlense de gönüllülük ilkesi esas alınmıştır. Bu çalışmaya katılan öğretmen adaylarının bazılarının anlamalarının öğretim sürecinde direnç gösterdiği, bazılarının derslere paralel yapılan görüşmeler esnasında anlamlandırdığı ve bazılarının çok hızlı bir şekilde gelişim gösterdiği görülmüştür. Bu durumun öğretmen adaylarıyla geçen diyaloglardan öğretmen adayının kesirlerle çarpma ve bölmeyi öğrenmeye ilgisi, istekli olması veya olmaması ve öğretimden önce bunlara ilişkin deneyiminin olması ile ilgisi olduğu söylenebilir. Bunu daha kesin bir şekilde söyleyebilmek adına daha sonra yapılacak araştırmalarda

araştırmacılar öğretmen adaylarının öğrenim geçmişlerini, öğretmenliğe ve kesirlerle çarpma ve bölmeyi öğretmeye ilişkin inançlarını ve matematiğe yönelik tutumlarını da inceleyebilirler. Bu şekilde öğretmen adaylarının özelleştirilmiş alan bilgilerini kavramsal anlamaya dayalı hazırlanan öğretimin yanısıra etkileyen diğer faktörleri de inceleme imkanı bulabilirler.

Kesirlerle çarpma ve bölmenin yanısıra diğer konular için de benzer şekilde öğretmen adaylarına kavramsal anlamayı kazandırmaya yönelik ortamlar hazırlanmalıdır. Bunun için bu konular öğretmen adaylarının lisans öğrenimi boyunca her dönem seçmeli veya zorunlu bir ders olarak ve bu dönemlere paylaştırılarak verilebilir. Böylece öğretmen adayları mezun olduklarında neredeyse bütün matematik konularına ilişkin kavramsal anlamayı kazanabilirler ve atandıkları zaman öğrencilerine bu anlamayı kazandıracak ortamı sağlayabilirler.

Öğretmen adaylarının bu çalışmada yaşadıkları zorluklar ve yaptıkları hatalar ilgili literatürde görülen benzer hatalar ve zorluklar olduğu görülmüştür (Armstrong ve Bezuk, 1995; Ma, 1999; Simon, 1993). Bu zorluklar ve hataların ilgili literatürden öğrencilerde ve hatta uzman öğretmenlerde dahi görüldüğü bilinmektedir (Graeber vd., 1989; Harel vd., 1994; Lo ve Luo, 2012). Bu anlamda bu çalışmada bu hataların giderilmesine ve kavramsal anlamının kazandırılmasına yönelik bir ortam hazırlandığı gibi öğretmenlere de hizmetiçi eğitim seminerleriyle bu ortam sunulabilir. Böylece bu öğretmenler de öğrencilerine bu ortamı hazırlayabilirler.

Öğretmen adaylarının bu çalışmada kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin problem kurma ve model çizme deneyimi yaşamalarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kavramsal anlamalarının gelişimine yardımcı olduğu görülmüştür. Bu sonuç daha önce yapılan çalışmaları desteklemektedir (Baek vd., 2017; Flores vd., 2005; Toluk-Uçar, 2009). Diğer taraftan matematiksel ifade yazma, gerekçelendirme ve açıklama deneyimleri de yaşamışlardır ancak özellikle gerekçelendirme bilgilerinin çok fazla geliştiği görülmemiştir. Bu anlamda öğretmen adaylarına matematik metot derslerinde bunun gibi diğer matematik konularında da farklı durumlar verilerek gerekçelendirmeleri istenmelidir. Bunlara ilişkin ne kadar çok deneyim yaşarlarsa o konuya ilişkin kavramsal anlamaları da o kadar gelişebilir. Bu yüzden bu derslerde gerekçelendirme ve açıklama yapmalarına daha fazla fırsat tanınmalıdır.

Bu çalışmada ilgili literatürde de görüldüğü gibi referans alınan bütünün özellikle kesirlerle bölme işlemini anlamlandırmak için önemli anahtar kavramlardan birisi olduğu

görülmüştür (Orrill vd., 2010; Armstrong ve Bezuk, 1995; Lee vd., 2011). Diğer taraftan neden ters çevir çarp algoritmasının kesirlerle bölme işleminin sonucunu verdiğini açıklamanın alternatif yollarının verilmesi öğretmen adaylarının kesirlerle bölmeye ilişkin kavramsal anlamalarının gelişimine yardımcı olduğu görülmüştür. Buna göre öğretmen adaylarına verilen özel öğretim yöntemleri dersinde veya seçmeli derslerde kesirlerle bölme işlemi verilirken referans alınan bütün gibi anahtar kavramlar ve ters çevir çarp algoritması için farklı açıklama yolları matematik eğitimcileri tarafından verilmelidir.

Pay ile pay, payda ile payda çarpma ve ters çevir çarp algoritmasını açıklamak için alternatif yolların verilmesinin, bölünenin bölenden büyük olduğu kesirlerle bölme işleminin paylaştırma ve bölünenin bölenden küçük olduğu kesirlerle bölme işleminin grupta anlamları için de problemler ve modellerin verilmesinin ve farklı model türleri ile aynı modelin farklı gösterimlerinin verilmesinin bu çalışmada öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kavramsal anlamalarının gelişiminde önemli olduğu görülmüştür. Öğretmenlerin kılavuz kitaplarında ve öğrenci ders kitaplarında bunlarla karşılaşmamaktadır (Aydın ve Gündoğdu, 2014; Bağcı, 2015; M. Çebi ve Çebi, 2013). Buna göre bunların öğretmen adaylarına matematik metot derslerinde verilmesinin yanısıra öğrencilere ve öğretmenlere de bu kitaplarda sunulmalıdır. Bu farklı stratejilerin ve modellerin nasıl kullanılacağı öğretmenlere program geliştiricileri tarafından seminerler verilerek öğretilir. Böylece öğretmenler öğrencilere kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin kavramsal anlamayı kazandıracak ortam sunabilirler ve öğrencilerin farklı çözüm yollarına ve stratejilerine de daha hazırlıklı olabilirler. MEB (2013)'in ortaokul matematik dersi öğretim programına göre hazırlanan ders kitaplarında kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerini anlamlandırmayı vurgulayan kazanımların dikkate alındığı görülmektedir. Bunlara bu şekilde birkaç ilavede bulunulabilir. Diğer taraftan uygulanan sınavlarda kavramsal anlamaya dayalı sorular sorulmadıktan sonra derslerin bu şekilde verilmesinin anlamı kalmamaktadır. Bu anlamda hem matematik eğitimcileri hem de matematik öğretmenleri öğretmen adaylarının ve öğrencilerin bu kavramsal anlamalarını ortaya koyacak şekilde sınavlar hazırlamalıdır.

KAYNAKLAR

- An, S., Kulm, G. & Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teacher in China and the U.S. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7, 145–172.
- Alacacı, C. (2010). Öğrencilerin kesirler konusundaki kavram yanılgıları. E. Bingölbali ve M. F. Özmantar (Ed.), *İlköğretimde karşılaşılan matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri* içinde (s. 63-95). Ankara: Pegem Akademi.
- Alenazi, A. (2016). Examining middle school pre-service teachers' knowledge of fraction division interpretations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(5), 696-716. <http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2015.1083127>
- Armstrong, B. E. & Bezuk, N. (1995). Multiplication and division of fractions: The search for meaning. J. Sowder & B. P. Schappelle (Ed.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* içinde (s. 85-119). Albany, NY: State University of New York.
- Aydın, E. & Gündoğdu, L. (2014). *Ortaokul matematik 6 ders kitabı*. Ankara: Sevgi.
- Azim, D. S. (1995). *Preservice elementary teachers' understanding of multiplication with fractions*. Doctoral Dissertation, College of Education, Washington State University, Washington.
- Back, R. -J., Manilla, L. & Wallin, S. (2009). Student justifications in high school mathematics. *Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education*, 291-300.
- Baek, J. M., Wickstrom, M. H., Tobias, J. M., Miller, A. L., Şafak, E., Wessman-Enzinger, N. & Kirwan, J. V. (2017). Preservice teachers' pictorial strategies for a multipstep multiplicative fraction problem. *Journal of Mathematical Behavior*, 45, 1-14. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.10.005>

- Bağcı, O. (2015). *Ortaokul matematik 6 ders kitabı*. Ankara: Dikey.
- Baker, M., & Chick, H. L. (2006). Pedagogical content knowledge for teaching primary mathematics: A case study of two teachers. Identities, cultures and learning spaces. *Proceedings of the 29. Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 60-67.
- Bal, A. P. & Doğanay, A. (2014). Sınıf öğretmenliği adaylarının matematiksel modelleme sürecini anlamalarını geliştirmeye yönelik bir eylem araştırması. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 14(4), 1363-1384. <http://www.kuyeb.com/pdf/tr/0d251969bf16c9545bea846d78d6f20731384.pdf> sayfasından erişilmiştir.
- Ball, D. L. (1990a). The mathematical understanding that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal*, 90 (4), 449-466. https://www.jstor.org/stable/1001941?seq=1#page_scan_tab_contents sayfasından erişilmiştir.
- Ball, D. L. (1990b). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21 (2), 132-144. https://www.jstor.org/stable/749140?seq=1#page_scan_tab_contents sayfasından erişilmiştir.
- Ball, D. L., Lubienski, S. & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* içinde (s. 433-456). New York: Macmillan. http://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/30561596/balllubienskimewbornchapter.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1495364173&Signature=9G4W%2FOT9U0r9qV4PnuXiEbpoEI%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DResearch_on_teaching_mathematics_The_uns.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Ball, D. L., Hill, H. C. & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade and how can we decide? *American Educator*, 29, 14-26. https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/65072/Ball_F05.pdf sayfasından erişilmiştir.

- Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407. <https://www.math.ksu.edu/~bennett/onlinehw/qcenter/ballmkt.pdf> sayfasından erişilmiştir.
- Baştürk S. ve Dönmez, G. (2011). Öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusuna ilişkin pedagojik alan bilgilerinin öğretim programı bilgisi bağlamında incelenmesi. *International Online Journal of Educational Sciences*, 3(2), 743-775. http://www.iojes.net/userfiles/Article/IOJES_440.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983) Rational number concepts. R. Lesh & M. Landau (Ed.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* içinde (s. 91-125). New York: Academic.
- Behr, M. J., Knoury, H. A., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1997). Conceptual units analysis of preservice elementary school teachers' strategies on a rational numbers as operator task. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 48-69. http://www.jstor.org/stable/749663?seq=1#page_scan_tab_contents sayfasından erişilmiştir.
- Beckmann, S. (2005). *Mathematics for elementary teachers*. Boston: Pearson.
- Berg, B. L. (1998). *Qualitative research methods for the social sciences*. Needham Heights, MA: Allyn and Bacon.
- Biber, A. Ç., Tuna, A. & Aktaş, O. (2013). Öğrencilerin kesirler konusundaki kavram yanlışları ve bu yanlışların kesir problemleri çözümlerine etkisi. *Trakya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 3(2), 152-162. <http://dergipark.gov.tr/download/article-file/200350> sayfasından erişilmiştir.
- Bicknell, B. (1999). The writing of explanations and justifications in mathematics: Differences and dilemmas. *Proceedings of the 22. Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 76-83.
- Birgin, O. & Gürbüz, R. (2009). İlköğretim ikinci kademe öğrencilerinin rasyonel sayılar konusundaki işlemsel ve kavramsal bilgi düzeylerinin incelenmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 22(2), 529-550. <http://www.acarindex.com/dosyalar/makale/acarindex-1423935447.pdf> sayfasından erişilmiştir.

- Black, J. W. (2008). Content knowledge and pedagogical content knowledge of algebra teachers and changes in both types of knowledge as a result of professional development. *Proceedings of the 5. Annual TEAM*, 30-40.
- Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C. A., Underhill, R. G., Jones, D. & Agard, P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(2), 194-222. https://www.jstor.org/stable/749118?seq=1#page_scan_tab_contents sayfasından erişilmiştir.
- Bosse, M. J., Adu-Gyamfi, K. & Cheetham, M. (2011). Translations among mathematical representations: Teacher beliefs and practices. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*, 15(6), 1-23. <https://eric.ed.gov/?id=EJ940927> sayfasından erişilmiştir.
- Bradshaw, L., Izsák, A., Templin J. & Jacobson, E. (2014). Diagnosing teachers' understanding of rational numbers: Building a multidimensional test within the diagnostic classification framework. *Educational Measurement: Issues and Practice*, 33(1), 2-14. <http://dx.doi.org/10.1111/emip.12020>
- Burns, M. (2003). Introducing multiplication of fractions: A lesson for fifth and sixth graders. *Math Solutions*, 12, 1-6. http://mathsolutions.com/wp-content/uploads/Introducing_Multiplication_of_Fractions_A_Lesson_for_Fifth_and_Sixth_graders.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Büyüköztürk, Ş., Çakmak, E. K., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. & Demirel, F. (2012). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Ankara: Pegem Akademi.
- Büyüköztürk, Ş., Çokluk, Ö. & Köklü, N. (2013). *Sosyal bilimler için istatistik*. Ankara: Pegem Akademi.
- Cai, J. (1998). An investigation of U.S. and Chinese students' mathematical problem posing and problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, 10(1), 37-50. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=61F0D475707D8D6AB9AD63E465303B2F?doi=10.1.1.473.4619&rep=rep1&type=pdf> sayfasından erişilmiştir.

- Cai, J. & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in U.S. and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *The Journal of Mathematical Behavior*, 21(4), 401-421. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(02\)00142-6](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00142-6)
- Carter, K. (1990). Teachers' knowledge and learning to teach. W.R. Houston (Ed.), *Handbook of research on teacher education* içinde (s. 291-310). New York: Macmillan.
- Chen, X. (2010). *A study of prospective mathematics teachers' knowledge development and beliefs changes for teaching fraction division*. Doctoral Dissertation, Texas A&M University, Texas.
- Chick, H. L., Baker, M., Pham, T., & Cheng, H. (2006). Aspects of teachers' pedagogical content knowledge for decimals. *Proceedings of the 30. Annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 297-304.
- Chigeza, P. (2013). Translating between and within representations: Mathematics as lived experiences and interactions. *Proceedings of the 36. Annual Conference of the Mathematics Education Group of Australasia*, 178-184.
- Chinnappan, M., Forrester, T. & Thurtell-Hoare, E. (2012). Development in pre-service teachers' mathematics for teaching of fractions. *Proceedings of the 35. Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 186-193.
- Clements, D. H. (1999). Concrete manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 1(1), 45-60.
- Cluff, J. J. (2005). *Fraction multiplication and division image change in pre-service elementary teachers*. Master's Thesis, Department of Mathematics Education, Brigham Young University, Utah.
- Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). *The common core state standards for mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. <http://www.corestandards.org/Math/Content/NF/> sayfasından erişilmitir.

- Crespo, S. & Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(5), 395-415. <http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10857-008-9081-0> sayfasından erişilmiştir.
- Creswell, J. W. (2012). *Educational research: Planning, conducting and evaluating quantitative and qualitative research*. Boston: Pearson Education.
- Creswell, J. W. (2016a). *Araştırma deseni: Nitel, nicel ve karma yöntem yaklaşımları* (S. B. Demir, Çev.). Ankara: Eğiten.
- Creswell, J. W. (2016b). *Nitel araştırma yöntemleri: Beş yaklaşıma göre nitel araştırma ve araştırma deseni* (M. Bütün & S. B. Demir, Çev.). Ankara: Siyasal.
- Çebi, M. & Çebi, H. (2013). *İlköğretim matematik 6 ders kitabı*. Ankara: Dörtel.
- Ders Planı (t.y.). *Kesirlerle çarpmaya ilişkin bir ders planı*. http://bcpshelpdeskmiddlemath.weebly.com/uploads/6/3/4/6/6346105/6.4_fraction_multiplication_teacher_and_student_pages.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Dixon, J. K. & Tobias, J. M. (2013). The whole story: Understanding fraction computation. *Mathematics Teaching In The Middle School*, 19(3), 156-163. http://www.nctm.org/Publications/mathematics-teaching-in-middle-school/2013/Vol19/Issue3/mtms2013-10-156a_pdf/ sayfasından erişilmiştir.
- Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 85-109. <http://link.springer.com/article/10.1023/A:1003660018579> sayfasından erişilmiştir.
- Eisenhart, M., Borko, H., Underhill, R., Brown, C., Jones, D. & Agard, P. (1993). Conceptual knowledge falls through the cracks: Complexities of learning to teach mathematics for understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(1), 8-40. https://www.jstor.org/stable/749384?seq=1#page_scan_tab_contents sayfasından erişilmiştir.
- Feil, Y. C. (2010). *Can you teach in a normal way? Examining Chinese and US curricula's approach to teaching fraction divisions*. Doctoral Dissertation, Educational Psychology, University of Illinois, Illinois.

- Ferreira, N. & Da Ponte, J. P. (2016). Exploring pictorial representations in rational numbers: Struggles of a prospective teacher. *Proceedings of the 9. Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 3199-3205.
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 3-17. https://www.jstor.org/stable/748969?seq=1#page_scan_tab_contents sayfasından erişilmiştir.
- Flores, A. (2002). Profound understanding of division of fractions. Litwiller, B. & Bright, G. (Ed.), *Making sense of fractions, ratios and proportions* içinde (s. 237-246). Reston, VA: NCTM.
- Flores, A., Turner, E. E. & Bachman, R. C. (2005). Posing problems to develop conceptual understanding: Two teachers make sense of division of fractions. *Teaching Children Mathematics*, 12, 117-121. https://www.researchgate.net/profile/Alfinio_Flores/publication/268033717_Posing_Problems_to_Develop_Conceptual_Understanding/links/5729b9ee08ae2efb92ad3.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Forrester, T. & Chinnappan, M. (2010). The predominance of procedural knowledge in fractions. *Proceedings of the 33. Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 185-192.
- Forrester, T. & Chinnappan, M. (2011). Two avatars of teachers' content knowledge of mathematics. *Proceedings of the 34. Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 261-269.
- Fraenkel, J. R. & Wallen, N. E. (2006). *How to design and evaluate research in education*. New York, NY: The McGraw-Hill.
- Galbraith, P. & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modeling process. *ZDM*, 38(2), 143-162. <http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF02655886?LI=true> sayfasından erişilmiştir.
- Glesne, C. (2015). *Nitel araştırmaya giriş* (A. Ersoy & P. Yalçınoglu, Çev.). Ankara: Anı.
- Goldin, G. (1998). Representational systems, learning and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 137-165. [https://doi.org/10.1016/S0364-0213\(99\)80056-1](https://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80056-1)

- Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* içinde (s. 1-23). Reston, VA: NCTM.
- Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics* içinde (s. 197-218). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Goodson-Espy, T. (2009). An exploration of preservice teachers' creation and analysis of fraction multiplication word problems. *Proceedings of the 31. Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1330-1338.
- Graeber A. O., Tirosh D. & Glover, R. (1989). Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 95-102. https://www.jstor.org/stable/749100?seq=1#page_scan_tab_contents sayfasından erişilmiştir.
- Gregg, J. & Gregg, D. U. (2007). Measurement and Fair-Sharing Models for Dividing Fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 12(9), 490-496. <https://www.nctm.org/Handlers/AttachmentHandler.ashx?attachmentID=cWM5WHxb%2BIE%3D> sayfasından erişilmiştir.
- Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York, NY: Teachers College.
- Güçler, B., Park, J., & McCrory, R. (2009). Affordances of visual representations: The case of fraction multiplication. *Proceedings of the 31. Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1116-1124.
- Harel, G., Behr, M., Post, T. & Lesh, R. (1994). The impact of the number type on the solution of multiplication and division problems: Further considerations. G. Harel & J. Confrey (Ed.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* içinde (s. 363-384). Albany, NY: Suny.
- Haser, Ç. & Ubuz, B. (2003). Öğrencilerin kesirleri kavraması: 5. sınıf öğrencileri üzerine bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 64-69. <http://dergipark.ulakbim.gov.tr/hunefd/article/download/5000048776/5000046096> adresinden erişilmiştir.

- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* içinde (s. 1-23). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Hill, H., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400. <https://pdfs.semanticscholar.org/9a72/f2765a4e0880a413f32e0a7ddc7e53046b60.pdf> sayfasından erişilmiştir.
- Ho, S. Y. & Lai, M. Y. (2012). Pre-service teachers' specialized content knowledge on multiplication of fractions. *Proceedings 36. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2*, 291-298.
- Hunter, J. & Anthony, G. (2008). The development of students' use of justification strategies. *Proceedings of the 31. Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 265-272.
- Işık, C. (2011). İlköğretim matematik öğretmenleri adaylarının kesirlerde çarpma ve bölmeye yönelik kurdukları problemlerin kavramsal analizi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 41, 231-243. <http://dergipark.ulakbim.gov.tr/hunefd/article/view/5000048324/5000045644> sayfasından erişilmiştir.
- Işık, C. & Kar, T. (2012a). İlköğretim matematik öğretmenleri adaylarının kesirlerde bölmeye yönelik kurdukları problemlerde hata analizi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 12(3), 2289-2309. <http://www.kuyeb.com/pdf/tr/e262e23e67d5f24ef35b4cf2c8c298eesiktr.pdf> sayfasından erişilmiştir.
- Işık, C. & Kar, T. (2012b). Yedinci sınıf öğrencilerinin kesirlerde toplama işlemine kurdukları problemlerin analizi. *İlköğretim Online*, 11(4), 1021-1035. <http://dergipark.ulakbim.gov.tr/ilkonline/article/view/5000037838/5000036696> sayfasından erişilmiştir.
- Izsák, A. (2006a). Aspects of mathematical knowledge for teaching fraction multiplication. *Proceedings of the 28. Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2*, 364-370.

- Izsák, A. (2006b). Knowledge for teaching fraction arithmetic: Partitioning drawn representations. *Proceedings 30. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 3*, 345-352.
- Izsák, A. (2008). Mathematical knowledge for teaching fraction multiplication. *Cognition and Instruction*, 26(1), 95-143. <http://dx.doi.org/10.1080/07370000701798529>
- Izsák, A., Jacobson, E. & Lobato, J. (2011). *Diagnosing teachers' multiplicative reasoning attributes*. http://cadrek12.org/sites/default/files/DTMR_%20Attributes.FINAL_.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Johnson, N. R. (1998). *A descriptive study of number sense and related misconceptions about selected rational number concepts exhibited by prospective elementary teachers*. Doctoral Dissertation, University of South Florida, Florida.
- Kasachkoff, T. (1988). Explaining and justifying. *Informal Logic*, 10(1), 21-30.
- Khashan, K. H. (2014). Conceptual and a procedural knowledge of rational numbers for Riyadh elementary school teachers. *Journal of Education and Human Development*, 3(4), 181-197. <http://dx.doi.org/10.15640/jehd.v3n4a17>
- Kılcan, S. A. (2006). *İlköğretim matematik öğretmenlerinin kesirlerle bölmeye ilişkin kavramsal bilgi düzeyleri*. Master's Thesis, Abant İzzet Baysal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bolu.
- Kılıç, Ç. & Özdaş, A. (2010). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin kesirlerde karşılaştırma ve sıralama yapmayı gerektiren problemlerin çözümlerinde kullandıkları temsiller. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 18(2), 513-530. http://www.kefdergi.com/pdf/18_2/18_2_12.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Kieren, T.E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. R. A. Lesh & D. A. Bradbard (Ed.), *Number and measurement* içinde (s. 101-144). Columbus, OH: SMEAC.
- Kim, Y. -O. (2007). *Middle school mathematics teachers' subject matter knowledge for teaching in China and Korea*. Doctoral Dissertation, Indiana University Department of Mathematics Education, Indiana.

- Kocaoğlu, T. & Yenilmez, K. (2010). Beşinci sınıf öğrencilerinin kesir problemlerinde yaptıkları hatalar ve kavram yanlışları. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, 14, 71-85. http://www.zgefdergi.com/Makaleler/1920217272_14_07_Kocaoğlu-Yenilmez.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Koren, M. (2004). Acquiring the concept of signed numbers: Incorporating practically-based and mathematically-based explanations. *Aleh*, 32, 18-24.
- Lamberg, T. & Wiest, L. R. (2015). Dividing fractions using an area model: A look at in-service teachers' understanding. *Mathematics Teacher Education and Development*, 17(1), 30-43. <https://www.merga.net.au/ojs/index.php/mted/article/view/176/214> sayfasından erişilmiştir.
- Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 1, 629-667.
- Lee, S. J. (2010). *Exploring middle grade teachers' knowledge of partitive and quotitive fraction divisions*. Doctoral Dissertation, University of Georgia, Georgia.
- Lee, S. J., Brown, R. E. & Orrill, C. H. (2011). Mathematics teachers' reasoning about fractions and decimals using drawn representations. *Mathematical Thinking and Learning*, 13, 198-220. <http://dx.doi.org/10.1080/10986065.2011.564993>
- Leinhardt, G. & Smith, D. (1985). Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge. *Journal of Educational Psychology*. 77, 247-271. <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED247137.pdf> sayfasından erişilmiştir.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning mathematics* içinde (s. 33-40). New Jersey: Erlbaum.
- Lesser, L. M. & Tchoshanov, M. A. (2005). The effect of representation and representational sequence on students' understanding. *Proceedings of the 27. Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1-7.

- Leung, I. K. C. & Carbone, R. E. (2013). Pre-service teachers' knowledge about fraction division reflected through problem posing. *The Mathematics Educator*, 14(2), 80-92. http://math.nie.edu.sg/ame/matheduc/tme/tmeV14_1/5.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Levenson, E., Tirosh, D. & Tsamir, P. (2004). Elementary school students' use of mathematically-based and practically-based explanations: The case of multiplication. *Proceedings of the 28. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 3*, 241-248.
- Levenson, E., Tirosh, D. & Tsamir, P. (2006). Mathematically and practically-based explanations: Individual preferences and sociomathematical norms. *International Journal of Science and Mathematical Education*, 4, 319-344. <http://link.springer.com/article/10.1007/s10763-005-9011-x> sayfasından erişilmiştir.
- Levenson, E., Tsamir, P. & Tirosh, D. (2010). Mathematically based and practically based explanations in the elementary school: Teachers' preferences. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 345-369. <http://link.springer.com/article/10.1007/s10857-010-9142-z> sayfasından erişilmiştir.
- Levenson, E. (2010). Fifth-grade students' use and preferences for mathematically and practically based explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 73(2), 121-142. <https://eric.ed.gov/?id=EJ872768> sayfasından erişilmiştir.
- Li, Y. & Smith, D. (2007). Prospective middle school teachers' knowledge in mathematics and pedagogy for teaching: The case of fraction division. *Proceedings of the 31. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 3*, 185-192.
- Lin, C. -Y., Becker, J., Byun, M. -R., Yang, D. -C. & Huang, T. -W. (2013). Preservice teachers' conceptual and procedural knowledge of fraction operations: A comparative study of the United States and Taiwan. *School Science and Mathematics*, 113(1), 41-51. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00173.x>
- Lo, J. -J., Grant, T. J., & Flowers, J. (2004). Developing mathematical justification: The case of prospective elementary school teachers. *Proceedings of the 26. Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 3*, 1159-1168.

- Lo, J. -J., Grant, T. J., & Flowers, J. (2008). Challenges in deepening prospective teachers' understanding of multiplication through justification. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(1), 5-22. <http://link.springer.com/article/10.1007/s10857-007-9056-6> sayfasından erişilmiştir.
- Lo, J. -J. & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15, 481-500. <http://link.springer.com/article/10.1007/s10857-012-9221-4> sayfasından erişilmiştir.
- Luo, F. (2009). Evaluating the effectiveness and insights of pre-service elementary teachers' abilities to construct word problems for fraction multiplication. *Journal of Mathematics Education*, 2(1), 83-98. http://www.educationforatoz.net/images/_6_Fenqjen_Luo_Final.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 16-32. https://www.jstor.org/stable/749454?seq=1#page_scan_tab_contents sayfasından erişilmiştir.
- Mack, N. K. (1998). Building a foundation for understanding the multiplication of fractions. *Teaching Children Mathematics*, 5(1), 34-38. <https://eric.ed.gov/?id=EJ574275> sayfasından erişilmiştir.
- Mack, N. K. (2001). Building on informal knowledge through instruction in a complex content domain: Partitioning, units and understanding multiplication of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(3), 267-295. https://www.jstor.org/stable/749828?seq=1#page_scan_tab_contents sayfasından erişilmiştir.
- Magnusson, S., Krajcik, J., & Borko, H. (1999). Nature, sources, and development of pedagogical content knowledge for science teaching. J. Gess-Newsome & N. G. Lederman (Ed.), *Examining pedagogical content knowledge: The construct and its implications for science education* içinde (s. 95-132). Boston: Kluwer Academic.

- Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education*, 41(3), 3-11. <http://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/002248719004100302> sayfasından erişilmiştir.
- Marshall, S. A. (2016). *Mathematics knowledge for teaching of elementary and secondary teachers with regards to division by fractions*. Doctoral Dissertation, Kansas State University, Kansas.
- Matthews, M. & Ding, M. (2011). Common mathematical errors of preservice elementary school teachers in an undergraduate course. *Mathematics and Computer Education*, 45(3), 186-196. <https://eric.ed.gov/?id=EJ954207> sayfasından erişilmiştir.
- Merriam, S. B. (2015). *Nitel araştırma: Desen ve uygulama için bir rehber* (S. Turhan, Çev.). Ankara: Nobel.
- Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2009). *İlköğretim matematik dersi 6-8. sınıflar öğretim programı*. <http://ttkb.meb.gov.tr/program2.aspx> sayfasından erişilmiştir.
- Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2013). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı*. <http://ttkb.meb.gov.tr/program2.aspx> sayfasından erişilmiştir.
- Mertler, C. A. (2001). Designing scoring rubrics for your classroom. *Practical Assessment, Research & Evaluation*, 7(25). <http://pareonline.net/getvn.asp?v=7&n=25> sayfasından erişilmiştir.
- Miles, M. B. & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An axpanded sourcebook*. Thousand Oaks, California: Sage.
- Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 309-330. https://www.jstor.org/stable/749783?seq=1#page_scan_tab_contents sayfasından erişilmiştir.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Ochefu, A. S. (2013). Development of the concept of multiplication with fraction. *Universal Journal of Education and General Studies*, 2(3), 79-83.

- Olanoff, D. E. (2011). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The case of multiplication and division of fractions*. Doctoral Dissertation, Syracuse University, New York.
- Olkun, S. & Toluk-Uçar, Z. (2014). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi*. Ankara: Eğiten.
- Orrill, C. H., Sexton, S., Lee, S. J. & Gerde, C. (2008) Mathematics teachers' abilities to use and make sense of drawn representations. *Proceedings of the 8. International Conference for the Learning Sciences 2*, 140-147.
- Orrill, C. H., Araujo, Z. & Jacobson, E. D. (2010). *Teachers' emerging understanding of fractions division as proportional reasoning in professional development*. Annual Meeting of the American Educational Research Association'da sunulmuş bildiri, San Diego. http://www.kaputcenter.umassd.edu/downloads/products/workshops/aera2010/tchr_proportional_reasoning_040910_final.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Osana, H. P. & Royea, D. A. (2011). Obstacles and challenges in preservice teachers' explorations with fractions: A view from a small-scale intervention study. *The Journal of Mathematical Behavior*, 30(4), 333-352. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.07.001>
- Özel, S. (2013). An analysis of in-service teachers' content knowledge of division of fractions. *Anthropologist*, 16(2), 1-5. [http://www.krepublishers.com/02-Journals/T-Anth/Anth-16-0-000-13-Web/Anth-16-1-2-000-2013-Abst-PDF/T-ANTH-SV-10-001-13-01/T-ANTH-SV-10-001-13-01-Tx\[1\].pmd.pdf](http://www.krepublishers.com/02-Journals/T-Anth/Anth-16-0-000-13-Web/Anth-16-1-2-000-2013-Abst-PDF/T-ANTH-SV-10-001-13-01/T-ANTH-SV-10-001-13-01-Tx[1].pmd.pdf) sayfasından erişilmiştir.
- Park, J., Güçler, B. & McCrory, R. (2012). Teaching prospective teachers about fractions: Historical and pedagogical perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 82(3), 455-479. <http://link.springer.com/article/10.1007/s10649-012-9440-8> sayfasından erişilmiştir.
- Park, S. H., & Oliver, J. S. (2008). Reconceptualization of pedagogical content knowledge: PCK as a conceptual tool to understand teachers as professionals. *Research in Science Education*, 38, 261-284. <https://eric.ed.gov/?id=EJ791518> sayfasından erişilmiştir.
- Patton, M. Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri* (M. Bütün & S. B. Demir, Çev.). Ankara: Pegem Akademi.

- Pesen, C. (2008). *Yapılandırmacı öğrenme yaklaşımına göre matematik öğretimi*. Ankara: Pegem Akademi.
- PROMPT. (2013). *Kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin görevler*. Proportional reasoning of mathematics teachers (PROMPT) proje notları. University of Georgia, Georgia.
- Rayner, V. (2007). *An examination of the type of instruction that facilitates pre-service teachers' development of specialized content knowledge of division with fractions*. Master's Thesis, Canada Concordia University, Canada.
- Redmond, A. (2009). *Prospective elementary teachers' division of fractions understanding: A mixed methods study*. Doctoral Dissertation, Oklahoma State University, Oklahoma.
- Rittle-Johnson, B. & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, 91(1), 175-189. https://www.researchgate.net/publication/289963945_Conceptual_and_procedural_knowledge_of_mathematics_Does_one_lead_to_the_other sayfasından erişilmiştir.
- Roche, A. & Clarke, D. (2009). Making sense of partitive and quotitive division: A snapshot of teachers' pedagogical knowledge. *Proceedings of the 32. Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* 2, 467-474.
- Saenz-Ludlow, A. (1995). Ann's fraction schemes. *Educational Studies in Mathematics*, 28, 101-132. <http://link.springer.com/article/10.1007/BF01295789> sayfasından erişilmiştir.
- Sezer, S. (2005). Öğrencilerin akademik başarısının belirlenmesinde tamamlayıcı değerlendirme aracı olarak rubrik kullanımı üzerine bir araştırma. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18, 61-69. <http://pauegitimdergi.pau.edu.tr/DergiPdfDetay.aspx?ID=90> sayfasından erişilmiştir.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. http://www.jstor.org/stable/1175860?seq=1#page_scan_tab_contents sayfasından erişilmiştir.

- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–22. <https://eric.ed.gov/?id=EJ351846> sayfasından erişilmiştir.
- Siebert, D. (2002). Connecting informal thinking and algorithms: The case of division of fractions. Litwiller, B. & Bright, G. (Ed.) *Making sense of fractions, ratios and proportions* içinde (s. 247-257). Reston, VA: NCTM.
- Siebert, D. & Gaskin, N. (2006). Creating, naming and justifying fractions. *Teaching Children Mathematics*, 12(8), 394-400. http://lrt.ednet.ns.ca/PD/math8support_11/USB_files/07B_creating_naming_justifying_fract.pdf sayfasından erişilmiştir.
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-128. https://www.jstor.org/stable/40248099?seq=1#page_scan_tab_contents sayfasından erişilmiştir.
- Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S. & Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 293-309. https://www.jstor.org/stable/749366?seq=1#page_scan_tab_contents sayfasından erişilmiştir.
- Simon, M. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(3), 233-254. https://www.jstor.org/stable/749346?seq=1#page_scan_tab_contents sayfasından erişilmiştir.
- Sinicrope, R., Mick, H. W. & Kolb, J. R. (2002). Fraction division interpretations. Litwiller, B. & Bright, G. (Ed.) *Making sense of fractions, ratios and proportions* içinde (s. 153-162). Reston, VA: NCTM.
- Son, J. -W. & Senk, S. L. (2010). How reform curricula in the USA and Korea present multiplication and division of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 117-142. <http://link.springer.com/article/10.1007/s10649-010-9229-6> sayfasından erişilmiştir.
- Sowder, J., Philipp, R., Armstrong, B., & Schappelle, B. (1998). *Middle-grade teachers' mathematical knowledge and its relationship to instruction: A research monograph*. Albany: State University of New York.

- Soylu, Y. & Soylu, C. (2005). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin kesirler konusundaki öğrenme güçlükleri: Kesirlerde sıralama, toplama, çıkarma, çarpma ve kesirlerle ilgili problemler. *Erzincan Eğitim Fakültesi Dergisi*, 7(2), 101-117. <http://eefdergi.erkincan.edu.tr/article/download/1006000693/1006001205> sayfasından erişilmiştir.
- Staples, M. E. & Truxaw, M. P. (2009). A journey with justification: Issue arising from the implementation and evaluation of the math access project. *Proceedings of the 31. Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 5*, 827-835.
- Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 5-25. https://www.jstor.org/stable/749817?seq=1#page_scan_tab_contents sayfasından erişilmiştir.
- Tobias, J. M. (2009). Preservice teachers' conceptualization of fraction multiplication. *Proceedings of the 31. Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of the Mathematics Education 5*, 1276-1283.
- Toluk, Z. (2002). İlkokul öğrencilerinin bölme işlemi ve rasyonel sayıları ilişkilendirme süreçleri. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 19(2), 81-103. https://www.researchgate.net/publication/287811483_Ilkokul_Ogrencilerinin_Bolme_Islemi_ve_Rasyonel_Sayilari_Iliskilendirme_Surecleri sayfasından erişilmiştir.
- Toluk-Uçar, Z. (2009). Developing pre-service teachers' understanding of fractions through problem solving. *Teaching and Teacher Education*, 25(1), 166-175. https://www.researchgate.net/publication/223641459_Developing_pre-service_teachers_understanding_of_fractions_through_problem_posing sayfasından erişilmiştir.
- Tsankova, J. K. & Pjanic, K. (2009). The area model of multiplication of fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(5), 281-285. <http://www.nctm.org/Publications/mathematics-teaching-in-middle-school/2009/Vol15/Issue5/The-Area-Model-of-Multiplication-of-Fractions/> sayfasından erişilmiştir.

- Tsay, J. & Hauk, S. (2009). Prospective K-8 teachers' fraction multiplication schema. *Proceedings of the 31. Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 5*, 783-791.
- Tuna, A., Biber, A. Ç. & Yurt, N. (2013). Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel modelleme becerileri. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 33(1), 129-146. <http://gefad.gazi.edu.tr/article/view/5000078384/5000072607> sayfasından erişilmiştir.
- Tzur, R. & Timmerman, M. (1997). Why do we invert and multiply? Elementary teachers' struggle to conceptualize division of fractions. *Proceedings of the 19. Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2*, 553-559.
- Van De Walle, J. V., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. M. (2012). *İlkokul ve ortaokul matematiği gelişimsel yaklaşımla öğretim* (S. Durmuş, Çev.). Ankara: Nobel.
- Van Der Valk, T. A. E., & Broekman, H. H. G. B. (1999). The lesson preparation method: A way of investigating pre-service teachers' pedagogical content knowledge. *European Journal of Teacher Education*, 22(1), 11-22. <http://dx.doi.org/10.1080/0261976990220102>
- Watanabe, T. (2002). Representations in teaching and learning fractions. *Teaching Children Mathematics*, 8(8), 457-463. <http://www.nctm.org/Publications/teaching-children-mathematics/2002/Vol8/Issue8/Representations-in-Teaching-and-Learning-Fractions/> sayfasından erişilmiştir.
- Watanabe, T. (2003). Teaching multiplication: An analysis of elementary school mathematics teachers' manuals from Japan and the United States. *The Elementary School Journal*, 104(2), 111-125. https://www.jstor.org/stable/3202982?seq=1#page_scan_tab_contents sayfasından erişilmiştir.
- Wu, H. (1999). Basic skills versus conceptual understanding. *American Educator*, 23(3), 14-19. <http://bioscience.tripod.com/readings/basicskillvsconcpt.pdf> sayfasından erişilmiştir.
- Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 1*, 9-24.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin.

Yin, R. K. (1994). *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks, California: Sage.



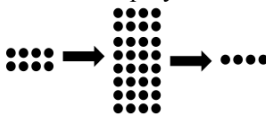
EKLER

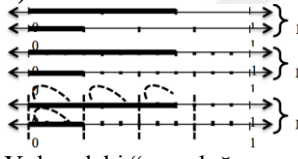


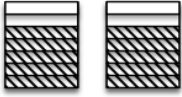
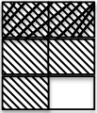
EK 1. Esas Çalışmada Uygulanan KÇB Testi ve Testteki Görevlerin İçerdikleri

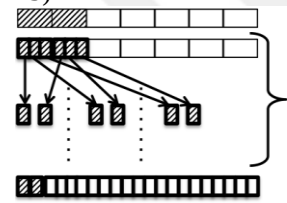
Boyutlar

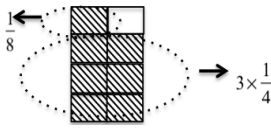
Görevler	Boyutlar	Amaçlar	Kazanımlar
1) $6 \times \frac{2}{3}$ işlemine ilişkin aşağıda verilen soruları cevaplayınız.	a) Bu işleme uygun problem kurunuz. b) Bu işlemi model çizerek gösteriniz. Çiziminizi adım adım yapınız.	Problem kurma Model çizme	$6 \times \frac{2}{3} = 6$ tane $\frac{2}{3}$ 'ün toplamı (Tekrarlı toplama) olduğunu bilme. Bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemi yapar ve anlamlandırır.
2) “5’in içinde kaç tane $\frac{1}{2}$ vardır?” ifadesine ilişkin aşağıda verilen soruları cevaplayınız.	a) Bu ifadeye karşılık gelen işlemi matematiksel olarak yazınız. b) Neden bu işlemi ifade ettiğini açıklayınız. c) Bu yazdığınız işleme uygun problem kurunuz. d) Bu işlemi model çizerek gösteriniz. Çiziminizi adım adım yapınız.	Matematiksel ifade yazma Gerekçelendirme Problem kurma Model çizme	$5 \div \frac{1}{2}$ işleminin 5’in içinde kaç tane $\frac{1}{2}$ olduğunu arama anlamının olduğunu bilme ve bu işlemi uygun modellerle gösterme. Bölmenin “gruplama” anlamı. Bir doğal sayıyı bir birim kesre ve bir birim kesri bir doğal sayıya böler, bu işlemi anlamlandırır.
3) Ebru ve Tuğba $\frac{2}{3} \div \frac{1}{5}$ işleminin sonucunu bulmaya çalışıyorlar. Ebru hemen “ikinci kesir ters çevrilir, birinci kesir aynen bırakılır ve bölme işlemi çarpma işlemine değiştirilir yani kısaca ters çevir çarp” diye cevap veriyor. Tuğba, Ebru’ya neden böyle yapıldığını sorduğunda Ebru bunu açıklayamamıştır.	Peki siz bunu Tuğba’ya nasıl açıklarsınız?	Açıklama	“Ters çevir çarp” algoritmasını kullanmadan işlemi çözme ve bu algoritmayı açıklama. İki kesrin bölme işlemi yapar ve anlamlandırır.
4) Aşağıdaki “küme modeli” için verilen soruları cevaplayınız.	a) Bu model ile gösterilen işlemi matematiksel olarak yazınız. b) Neden bu işlemi ifade ettiğini açıklayınız. c) Bu model	Matematiksel ifade yazma Gerekçelendirme Problem kurma	$\frac{4}{8} \times 2 = 2$ ’nin $\frac{4}{8}$ ’i veya yarısı olduğunu bilme. Bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemi yapar ve anlamlandırır.



	ile gösterilen işleme uygun problem kurunuz.			
5) Sevil $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}$ işleminin sonucunu bulmuştur. Ancak bulduğu sonucun doğru olmadığını çünkü çarpma işleminin sayıyı büyültmesi gerektiğini ifade etmiştir.	Bu durumu Sevil'e nasıl açıklarsınız?	Açıklama	Çarpma büyültür denilir ama kesirlerde durum değişir. Bu durumu bilme ve açıklama. 1'den küçük bir kesirle çarpıldığında sonuç bu sayıdan küçük, 1'den büyük bir kesirle çarpıldığında sonuç bu sayıdan büyük olduğunu vurgulama. $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{35}$	Bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır.
6) $\frac{1}{2} \div 2$ işlemi için aşağıda verilen soruları cevaplayınız.	a) Bu işleme uygun problem kurunuz. b) Bu işlemi model çizerek gösteriniz. Çiziminizi adım adım yapınız.	Problem kurma Model çizme	Yarısı kavramı. (2 ile bölme ve $\frac{1}{2}$ ile bölme karıştırılıyor. $\frac{1}{2}$ ile bölme sorulduğunda 2 ile bölmeyle ilgili problem kuruyor, modelliyor.) $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{2}$ 'nin yarısı olduğunu bilme ve uygun modellerle gösterme.	Bir doğal sayıyı bir birim kesre ve bir birim kesri bir doğal sayıya böler, bu işlemi anlamlandırır.
7)  Yukarıdaki "sayı doğrusu modeline" ilişkin aşağıda verilen soruları cevaplayınız.	a) Bu model ile gösterilen işlemi matematiksel olarak yazınız. b) Neden bu işlemi ifade ettiğini açıklayınız. c) Bu model ile gösterilen işleme uygun problem kurunuz.	Matematiksel ifade yazma Gerekçelendirme Problem kurma	$\frac{2}{3} \div \frac{1}{4}$ işleminin $\frac{2}{3}$ 'ün içinde kaç tane $\frac{1}{4}$ olduğunu arama anlamının olduğunu bilme ve bu işleme uygun verilen sayı doğrusu modelinin gösterdiği bu işlemi yazma. Bölmenin "kaç grup"/ölçme/gruplamalı anlamı. Tekrarlı çıkarma	İki kesrin bölme işlemini yapar ve anlamlandırır.
8) Mert $6 \times \frac{1}{3}$ ve $\frac{1}{3} \times 6$ işlemlerinin aynı anlamı ifade ettiğini söylemektedir.	Mert'e bu işlemlerin aynı olup olmadığını nasıl açıklarsınız?	Açıklama	Değişme özelliği işleminden dolayı sonuç değişmez ama modelde değişiklik görülür. Bu durumu uygun modellerle göstererek açıklama.	Bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır.
9) Metin $\frac{5}{7} \times 2$ işleminin sonucunu bulmak için aşağıdaki "dikdörtgensel modeli" çizmiş ve cevabın	Metin'in modeli ve cevabı hakkında ne düşünüyorsunuz? Neden? Metin'e bu	Gerekçelendirme Açıklama	Referans alınan birim ve bütün kavramlarını bilir.	Bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır.

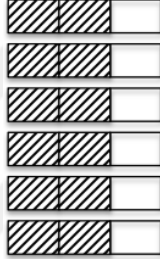
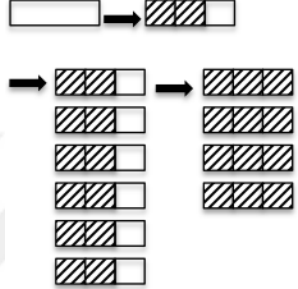
$\frac{10}{14}$ olduğunu ifade etmiştir. 	işlemin çözümünü nasıl açıklarsınız?				
10) Cenk ve Eren $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ işlemini çözmeye çalışıyorlar. Cenk hemen “pay ile pay çarpılır paya yazılır, payda ile payda çarpılır paydaya yazılır” diye cevap veriyor. Eren, Cenk’e neden böyle yapıldığını sorduğunda Cenk bunu açıklayamamıştır.	Peki siz bunu Eren’e nasıl açıklarsınız?	Açıklama	“Pay ile pay, payda ile payda çarpılır” ifadesinin nedenini bilme ve kavramsal olarak açıklama.	İki kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır.	
11) Melis $4 \div \frac{1}{3}$ işleminin sonucunu bulmuştur. Ancak bulduğu sonucun doğru olmadığını çünkü bölme işleminin sayıyı küçültmesi gerektiğini ifade etmiştir.	Bu durumu Melis’e nasıl açıklarsınız?	Açıklama	Bölme küçültür denilir ama kesirlerde durum değişir. 1’den büyük bir kesirle bölündüğünde sonuç bu sayıdan küçük, 1’den küçük bir kesirle bölündüğünde sonuç bu sayıdan büyük olur. $4 \div \frac{1}{3} = 12$ Uygun modellerle gösterme.	Bir doğal sayıyı bir birim kesre ve bir birim kesri bir doğal sayıya böler, bu işlemi anlamlandırır.	
12) Cihan $\frac{5}{6}$’nın $\frac{1}{3}$’ünü aşağıdaki “dikdörtgensel modeli” çizerek göstermiş ve bu modele bakarak işlemin sonucunun $\frac{2}{6}$ olduğunu ifade etmiştir. Buna göre aşağıda verilen soruları cevaplayınız. 	a) Cihan’ın modeli ve cevabı hakkında ne düşünüyorsunuz? Neden? b) Cihan’a sorulan işlemi matematiksel olarak yazınız. c) Cihan’a bu işlemin çözümünü nasıl açıklarsınız?	Gerekçelendirme Matematiksel ifade yazma Açıklama	Bütünün parçası mı parçanın parçası mı olduğunu bilme ve kesirleri buna göre açıklama, uygun kesir modelleriyle gösterme.	İki kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır.	
13) Ahu $\frac{1}{3} \div 4$ ve $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ işlemlerinin aynı anlamı ifade ettiğini söylemektedir.	Ahu’ya bu işlemlerin aynı olup olmadığını nasıl açıklarsınız?	Açıklama	Birim kesir ile çarpmanın neden paydaya bölme ile aynı olduğunu açıklama. Uygun modellerle gösterme.	Bir doğal sayıyı bir birim kesre ve bir birim kesri bir doğal sayıya böler, bu işlemi anlamlandırır.	

14) “Bir sınıf geziye gidecektir. Öğrencilerin $\frac{3}{5}$’i İzmir’e gitmek istiyor. İzmir’e gitmek isteyen öğrencilerin $\frac{2}{3}$’ü Çeşme’ye gitmek istiyor. Çeşme’ye gitmek isteyen öğrenciler sınıftaki öğrencilerin kaçta kaçındır?” Yukarıdaki problem için aşağıda verilen soruları cevaplayınız.	a) Bu problemin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazınız. b) Neden bu işlemi ifade ettiğini açıklayınız. c) Bu problemin ifade ettiği işlemi model çizerek gösteriniz. Çiziminizi adım adım yapınız.	Matematiksel ifade yazma Gerekçelendirme Model çizme	Bütünün parçası mı parçanın parçası mı olduğunu bilme ve kesirleri buna göre açıklama, uygun kesir modelleriyle gösterme.	İki kesrin çarpma işlemi yapar ve anlamlandırır.
15)  Yukarıdaki “kesir çubuğu modeline” ilişkin aşağıda verilen soruları cevaplayınız.	a) Bu model ile gösterilen işlemi matematiksel olarak yazınız. b) Neden bu işlemi ifade ettiğini açıklayınız. c) Bu model ile gösterilen işleme uygun problem kurunuz.	Matematiksel ifade yazma Gerekçelendirme Problem kurma	$2/7 \div 3$ işleminin $2/7$’yi 3’e bölmek anlamının olduğunu bilme ve bu işleme uygun verilen kesir çubuğu modelinin gösterdiği bu işlemi yazma. Bölmenin “Her bir grupta kaç/parçalamalı/ paylaştırma anlamı.	Bir doğal sayıyı bir kesre ve bir kesri bir doğal sayıya böler, bu işlemi anlamlandırır.
16) $\frac{1}{7} \div \frac{3}{4}$ işlemi için aşağıda verilen soruları cevaplayınız.	a) Bu işleme uygun problem kurunuz. b) Bu işlemi model çizerek gösteriniz. Çiziminizi adım adım yapınız.	Problem kurma Model çizme	Bölmenin iki anlamı	İki kesrin bölme işlemi yapar ve anlamlandırır.
17) $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$ işlemine ilişkin aşağıda verilen soruları cevaplayınız.	a) Bu işleme uygun problem kurunuz. b) Bu işlemi model çizerek gösteriniz. Çiziminizi adım adım yapınız.	Problem kurma Model çizme	Yarısı ne demek? ($1/2$ ile çarpma $1/2$ ile bölme ile karıştırılıyor veya çarpmayı bölme ile açıklayarak 2 ile bölmeyi ifade ediyor.) $1/2 \times 2/5 = 2/5$’in $1/2$’si yani yarısı olduğunu bilme. $2/5 \times 1/2$	İki kesrin çarpma işlemi yapar ve anlamlandırır.

18) Melda $\frac{7}{8} \div \frac{1}{4}$ işlemini çözmek için aşağıdaki “dikdörtgensel modeli” çizmiş ve bu modele bakarak işlemin sonucunun $3\frac{1}{8}$ olduğunu ifade etmiştir. Buna göre aşağıda verilen soruları cevaplayınız.	a) Melda’nın modeli ve cevabı hakkında ne düşünüyorsunuz? Neden? b) Melda’ya bu işlemin çözümünü nasıl açıklarsınız?	Gerekçelendirme Açıklama	Referans alınan birim ve bütün kavramlarını bilir. Bölmenin “kaç grup” anlamı	İki kesrin bölme işlemini yapar ve anlamlandırır.
				
19) Salih $\frac{2}{3} \div 4$ işleminin yapılamayacağını çünkü bir sayının kendinden daha büyük bir sayıya bölünemeyeceğini ifade etmiştir.	Bu durumu Salih’e nasıl açıklarsınız?	Açıklama	Bölen bölünenden büyük olamaz gibi genel bir algı var.	Bir doğal sayıyı bir kesre ve bir kesri bir doğal sayıya böler, bu işlemi anlamlandırır.
20) “Leyla Hanım, altın günü için gelen misafirlerlerine dikdörtgen şeklindeki bir kekten ikram etmiştir ve kekin $\frac{2}{5}$’i kalmıştır. Misafirler gittikten sonra Leyla Hanım’ın 3 çocuğu kekin kalanını eşit olarak paylaşmışlardır o halde çocukların her biri kekin ne kadarını yemiştir?” Yukarıdaki probleme ilişkin aşağıda verilen soruları cevaplayınız.	a) Bu problemin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazınız. b) Neden bu işlemi ifade ettiğini açıklayınız. c) Bu problemin ifade ettiği işlemi model çizerek gösteriniz. Çiziminizi adım adım yapınız.	Matematiksel ifade yazma Gerekçelendirme Model çizme	Bölmenin paylaşırma anlamı	Bir doğal sayıyı bir kesre ve bir kesri bir doğal sayıya böler, bu işlemi anlamlandırır.

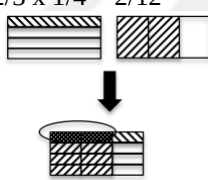
EK 2. KÇB Testini Puanlamada Kullanılan Analitik Rubrik, Rubriğin Boyutları ile Düzeyleri ve Açıklamaları

Boyutlar	Düzeyler			
	0	1	2	3
	Yok	Uygun değil	Uygun, eksik	Uygun, tam
Matematiksel ifade yazma	• Cevap yok, boş bırakılmış. • Bir sayı veya kesir yazıp bırakılmış.	• Verilen modeli, ifadeyi veya problemi yansıtmıyor. Örneğin, “5’in içinde kaç tane $1/2$ vardır?” ifadesi için $5 \times 1/2$ veya $5/2$ yazma (Bir doğal sayının bir kesre bölümü şeklinde yazması isteniliyor ama kesrin paydasına bölümünü yazmış veya bölme yerine çarpma ile ifade etmiş). • Örneğin, $4/8 \times 2$ işlemine ilişkin verilen model için $(8 + 24) - 28 = 4$ yazma (Her ne kadar model bu şekilde de yorumlanabilir olsa da burada bir doğal sayı ve kesrin çarpımı şeklinde yazması isteniliyor).	• Verilen modeli, ifadeyi veya problemi yansıtmıyor ama sayı eksik veya işlem eksik veya basamakları yazmış, tek bir basamakta/işlemle yazmamış. Örneğin, $2/7 \div 3$ işlemine ilişkin verilen model için $(2/7 \div 6) \times 2$ veya $2/7 \times 1/3$ veya $1/3 \times 2/7$ yazma (Bir kesrin bir doğal sayıya bölümü şeklinde yazması isteniliyor ama parçalı olarak yazmış veya ters çevir çarp’tan yararlanarak çarpma ile ifade etmiş). • Örneğin, “5’in içinde kaç tane $1/2$ vardır?” ifadesi için 10 tane $1/2$ veya $10 \times 1/2$ yazma veya $5 \div X = 1/2$ veya $1/2 \times X = 5$ yazma (Bir doğal sayının bir kesre bölümü şeklinde yazması isteniliyor ama yazmamış). • Örneğin, $4/8 \times 2$ işlemine ilişkin verilen model için $(1 \times 4) \div 8$ veya $32/8 = 4$ veya $\frac{8 + (8 \times 3)}{8} = 4$ veya $(8 \times 4) \div 8$ veya $(8 \times 4) \times 1/8$ yazma (Bir doğal sayı ile bir kesrin çarpımı şeklinde yazması isteniliyor ama yazmamış). • Örneğin, $3/5$’in $2/3$’üne ilişkin verilen problem için $(15 \times 3/5) \times 2/3$ veya $(5 \times 3/5) \times 2/3$ yazma (İki kesrin çarpımı şeklinde yazması isteniliyor ama yazmamış). • Örneğin, $3/5$’in $2/3$’üne ilişkin verilen model için $2/3 \times 3/5$ yerine $3/5 \times 2/3$ yazma.	• Verilen modeli, ifadeyi veya problemi yansıtmıyor. • Eksik sayı veya basamak yok. Örneğin, “5’in içinde kaç tane $1/2$ vardır?” ifadesi için $5 \div 1/2$ veya $\frac{5}{1/2}$ yazma. • Tek bir basamakta, çarpma veya bölme işlemi olarak yazmış. • Örneğin, $4/8 \times 2$ işlemine ilişkin verilen model için $4/8 \times 1$ veya $4/8 \times 1/2$ yazma.

Boyutlar	Düzeyler			
	0	1	2	3
	Yok	Uygun değil	Uygun, eksik	Uygun, tam
Model çizme	- Cevap yok, boş bırakılmış. - Bir daire, dikdörtgen, vb. çizip bırakılmış.	- İşlemi ve anlamını yansıtmıyor. Örneğin, $1/7 \div 3/4$ işlemi için şu modeli çizme:  - Burada $1/7$ kesri görülüyor sonra ne yaptığı belirsiz, anlaşılmıyor. - Çarpma/Bölen, çarpılan/ bölünen, çarpım/ bölümden en çok ikisi görülüyor ama herhangi bir işlemi göstermiyor. Örneğin, $1/7$ ve $3/4$ kesirlerini ayrı ayrı gösteren çizimler olabilir ama başka bir şey yoktur.	- İşlemi yansıtmıyor ama modelde çarpma/bölen, çarpılan/bölüne n, çarpım/ bölüm'den en az biri görülüyor. İşlemin hangi anlamı olduğu net değil. Örneğin, $6 \times 2/3$ işlemi için şu modeli çizme:  - Burada 6 ve $2/3$ görülüyor ama sonuç olan 4 yok. "Tekrarlı toplama" mı yoksa "6'nın $2/3$'ü" anlamı mı açık değil. - Örneğin, çarpmanın yerine kesrin operatör anlamını kullanmış, pay ile çarpma ve payda ile bölme şeklinde modellemiş. - Örneğin, $1/2 \div 2$ işlemi için $1/2$'nin $1/2$'sini yansıtan model çizme (Bölme işlemi yerine ters çevir çarp algoritmasında yararlanarak çarpma işlemine ilişkin model çiziyor.)	- İşlemi yansıtmıyor ve modelde çarpma/bölen, çarpılan/bölünen, çarpım/bölümün hepsi görülüyor. Çarpmanın/bölmenin herhangi bir anlamını kullanmış ve net bir şekilde görülüyor. Örneğin, $6 \times 2/3$ işlemi için şu modeli çizme:  - Burada 6, $2/3$ ve 4 görülmektedir, ayrıca "6 tane $2/3$" anlamı kullanıldığı açıktır. - Verilen problem gruplama anlamı ama çizdiği model paylaşma anlamı ise problem değil bölmenin diğer anlamını kullanmıştır.

Boyutlar	Düzeyler			
	0	1	2	3
	Yok	Uygun değil	Uygun, eksik	Uygun, tam
Problem kurma	• Cevap yok, boş bırakılmış. • Bir cümle, vs. yazıp bırakılmış.	• İşlemi yansıtmıyor. • Modeli desteklemiyor. Örneğin, $1/7 \div 3/4$ işlemi için $1/7$'nin $3/4$'ünü veren yani çarpma işlemine yönelik problem kurma. • Verilen “5’in içinde kaç tane $1/2$ vardır?” ifadesi için 5×2 veya $5 \div 2$ veya $5 \times 1/2$ işlemine yönelik problem kurma.	• İşlemi veya modeli yansıtıyor ama verilen veya istenen net değil veya eksik ifade var. Örneğin, $1/2 \times 2/5$ işlemi için “Annem elindeki hamuru önce $1/2$'ye sonra da $2/5$'e bölüyor. Böldüğü bu iki oranı birbiriyle çarptığında sonuç ne olur?” şeklinde problem kurma (Burada aynı hamuru mu kastediyor, hamurun yarısının $2/5$'ini almayı mı? veya iki oranı çarpmak ile ne demek istiyor çok açık değil ama problem çatısı itibarıyla uygun). • Çarpmanın yerine kesrin operatör anlamını kullanarak paydaya bölme payla çarpma şeklinde problem kurma. • Bölme yerine ters çevir çarp kullanarak çarpmaya yönelik problem kurma. Örneğin, $2/7 \div 3$ işlemine ilişkin $2/7 \times 1/3$'ü veren problem kurma.	• İşlemi veya modeli yansıtıyor, eksik ifade yok. • Verilen veya istenen net. Örneğin, $6 \times 2/3$ işlemi için “Ali’nin 6 metre uzunluğunda ipi vardır. Ali’nin ipinin $2/3$'ü ne kadardır?” şeklinde bir problem kurma. • Bölmenin herhangi bir anlamını veren problem olabilir.

Boyutlar	Düzeyler			
	0	1	2	3
	Yok	Uygun değil	Uygun, eksik	Uygun, tam
Gerekçelendirme	• Cevap yok, boş bırakılmış. • Bir cümle yazıp bırakılmış. • “Fikrim yok” veya “güzel açıklamış” gibi tek bir ifade yazıp bırakılmış.	• Durumu açıklamıyor. • İkna etmeyle hiç ilgisi yok. • Yanlış yazdığı işlemi açıklıyor. • Yanlış olan duruma “doğru”, doğru olan duruma “yanlış” olarak açıklama yapmış. • “Doğrudur” veya “yanlıştır” yazıp bırakılmış.	• Durumu açıklıyor ama eksik ifade var. Örneğin, $2/7 \div 3$ işlemine ilişkin verilen modelin neden bu işlemi gösterdiğine ilişkin “$2/7$ kesrini 3’erli parçalara ayırmam gerektiği için $2/7$’yi 3 sayısına böldüm” olarak ifade etme (Burada 3’erli parçalara ayırmak demekle ne demek istedi, 2’erli gruplandırmak için denilebilirdi veya 3 gruba ayırmış denilebilirdi. Neden bu modelin bölme işlemini gösterdiğini tam olarak açıklayamamış). • Tam ikna edici değil. • Sadece işlem yazıp bırakılmış. Örneğin, $5/7 \times 2 = 10/14$ olarak ifade edilen duruma ilişkin sadece $5/7 + 5/7 = 10/14$ yazıp “hem payı hem paydayı kendi aralarında çarpmış veya toplamış” olarak ifade etme (Burada sadece bunu söylemek yeterli değildir bütünden de bahsedilmelidir).	• Tam olarak durumun nedenini yansıtan ifadeler var. • Tamamen ikna edici, gayet açık. Örneğin, $7/8 \div 1/4$ işlemine ilişkin verilen model ve sonuç için “model doğru ama cevap yanlıştır çünkü $1/8$’lik kısım için kaç tane $1/4$ olduğuna bakılmamış burada referans alınan birim $1/4$’tür.” olarak ifade etme. • Örneğin, $5/7 \times 2 = 10/14$ olarak ifade edilen duruma ilişkin “iki parçayı bir bütün düşündü” veya “bütündeki toplam parça sayısı aynıdır, 7 parçadır bu yüzden yanlış olur” olarak ifade etme.

Boyutlar	Düzeyler			
	0	1	2	3
	Yok	Uygun değil	Uygun, eksik	Uygun, tam
Açıklama	• Cevap yok, boş bırakılmış. • Bir işlem, sayı yazıp veya şekil çizip bırakılmış.	• Verilen durumu başka bir şekilde/durumla açıklama ama duruma açıklık getiremem. • Belirsiz. • Çok karışık ve uzun. • Net değil. • Konuyla ilgisiz. • Durumu yansıtmıyor. • Modeli desteklemiyor. • Uygun olmayan matematiksel işlem veya model veya problem var. Örneğin, $2/3 \div 4$ işleminde kendinden büyük bir sayıya bölünebileceğini şu şekilde açıklama: $2/3 \times 1/4 = 2/12$  Burada çarpma işlemi ile açıklamış ama sorulan durumun nedenini açıklamamış. Yani sadece işlemi açıklamış. • Örneğin, $4 \div 1/3$ işlemine ilişkin bölmenin her zaman küçültmeyeceğini şu şekillerde açıklama: “Yine bir kavram yanılgısı örneği. Öğrenci bir sayının doğal sayıyla ve rasyonel sayıyla çarpımının illa ki büyüteceğini veya küçülteceğini	• Verilen durumu uygun bir şekilde açıklama ama eksik ifadelerin olması. • Durumu net olarak açıklayamıyor. Örneğin, $2/3 \div 4$ işleminde kendinden büyük bir sayıya bölünebileceğini şu şekilde açıklama: “$2/3$ sayısının içinde kaç tane 4 eş parçaya böldüğümüzde bir parçanın neyi ifade ettiğini bulmamız gerekiyor.” $2/3 \times 1/4 = 2/12 = 1/6$  Burada bölmenin paylaştırma anlamından yararlanıyor ama $2/3$ ve 4’ün ne olduğunu ve durumun nedenini tam açıklayıyor. • Örneğin, $4 \div 1/3$ işlemine ilişkin bölmenin her zaman küçültmeyeceğini şu şekillerde açıklama: “Bölen ve bölünen pozitif tam sayıysa bölme işleminin sonucunda bölünen azalır. 4 tam sayı, $1/3$ rasyonel sayı.” “İşlemin sonucu $4 \times 3 = 12$. Burada görüldüğü gibi 4 doğal sayısı büyümüştür. 3 kat artarak 12 olmuştur. Melis’in yanıltığı nokta bir sayı ancak doğal sayıya bölünürse küçülür. Eğer kesirli ifadeye bölüyorsak ters çevrilip çarpıldığından büyür.” “$4 \div 1/3$ ifadesinin anlamı 4’ün içinde kaç defa $1/3$’ün olduğunu gösterir. $1/3$	• Verilen durumu uygun bir şekilde açıklama. • İfadelerde eksiklik yoktur. • Durum net olarak açıklanmış. Örneğin, $2/3 \div 1/5$ işleminde neden ters çevir çarp yapıldığını bölmenin anlamlarından yararlanarak modelle açıklama veya özelliklere dayalı işlemsel olarak açıklama. • Örneğin, $4 \div 1/3$ işlemine ilişkin bölmenin her zaman küçültmeyeceğini şu şekillerde açıklama: “Melis bir sayıyı bir kesre böldüğünde sayının değerinin artacağı kazanımına daha ulaşamamıştır. Sadece bir bütünü parçalara böldüğümüzde daha küçük parçalar elde edildiği kazanımına sahiptir. Öncelikle bu kavram yanılgısı giderilmelidir. Bir problem yardımıyla açıklamaya çalışırım: ‘4 lt’lik süt $1/3$ lt’lik kaplara yerleştirilmeye çalışılsın. Kaç tane kaba ihtiyaç vardır? $\frac{4}{1/3} = 12$.” • “Rasyonel sayılarda bölme işlemi yapılırken ikinci sayı ters çevrilip

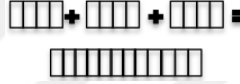
sanıyor. $\frac{4}{1/3} = 12$

, 4 sayısı büyür.”

$$\frac{4}{1/3} = 4 \times 3 = 12.$$

Bölme işlemi yaparken bölüm çizgisinin altındaki sayı pay ve payda yer değiştirerek çarpım durumuna geçer. Bu yüzden sayı büyür.”

“Bölme işleminin her zaman sayıyı küçültmesi beklenemez. Sayıyı $1/3$ 'e bölerken 4'ten 3 adet almış oluyoruz.



4'e ayrılmış kutulardan 3 tane aldık. Elde edilen tüm kutuların sayısı 12'dir.”

< 1 (tam)'den küçük olduğu için 4'ten daha fazla çıkacaktır. Yani bölme işlemi sayıyı her zaman küçültmez.”

çarpıldığından 4'ü $1/3$ ile değil 3 ile çarpmış oluruz. Yani sayı büyür.



$1/3$ kesrini aşağıdaki her bir modele yerleştiriyoruz.



1	4	7	10
2	5	8	11
3	6	9	12

4 sayısını temsil eden 4 tane eş model.

12 tane $1/3$ olduğundan $4 \div 1/3 = 12$ 'dir.

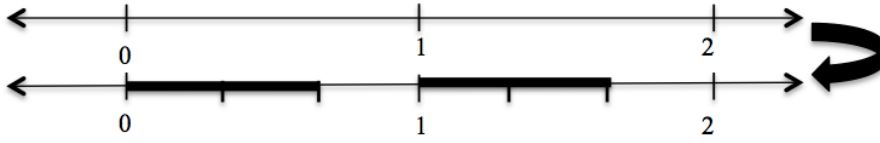
Bu modellerin her birinin içinde kaç tane $1/3$ var? sorusuna cevap ararız bu bölme işleminde.”

EK 3. Pilot Çalışmada Derslerde Kullanılan Alıştırmalar Örneği

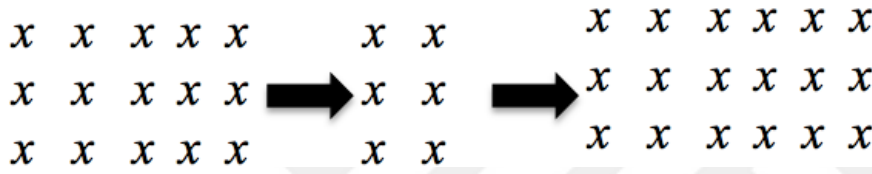
Alıştırmalar

1) Aşağıda verilen modellerin gösterdiği işlemleri matematiksel olarak yazınız. Her bir model için neden bu işlemleri gösterdiğini sözel olarak açıklayınız.

a)



b)



2) Aşağıda verilen işlemlerin neler ifade ettiğini açıklayınız. Her bir işlem için problem kurarak çözünüz. Her bir işlemi model çizerek gösteriniz. Çizimlerinizi adım adım yaparak her bir adımınızı sözel olarak açıklayınız.

a) $4 \times \frac{3}{5}$

b) $\frac{2}{3} \times 6$

3) Aşağıda verilen problemlere karşılık gelen işlemleri matematiksel olarak yazınız. Her bir problem için neden bu işlemi gösterdiğini açıklayınız.

a) Partiden sonra 3 paket pizza kalmıştır ve her bir pakette bir pizzanın $\frac{2}{7}$ 'si vardır. Serap herkes gittikten sonra bu kalan pizzaların hepsini yemiştir. Serap bir pizzanın ne kadarını yemiştir?

b) Her birinde eşit sayıda bir çeşit meyve olmak üzere 5 poşet vardır. Her bir poşetteki meyvelerin $\frac{3}{4}$ 'ü alınarak misafirlere verilmek isteniyor. Misafirlere kaç poşet meyve verilecektir?

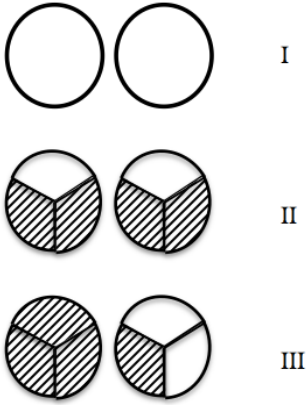
EK 4. Pilot Çalışmada Gerçekleştirilen Görüşmelere Örnek

Görüşme Soruları

Giriş konuşması:

“Bu çalışma boyunca sizinle görüşmeler yapacağım. Bu görüşmelerde sizin düşüncelerinizle ilgileniyorum. Nasıl düşündüğünüzü ne kadar çok açıklarsanız o kadar bu görüşmelerin araştırmaya yardımcı olacaktır. Soruları atlayabilir ve daha sonra tekrar aynı sorulara geri dönebilirsiniz. Lütfen görüşme boyunca yapacağınız yorumlarda çekinmeyin.”

1)



Yukarıdaki “dairesel alan modeline” ilişkin aşağıda verilen soruları cevaplayınız.

- Bu modelin hangi işlemi gösterdiğini matematiksel olarak yazınız.
- Bu modelin gösterdiği işleme uygun problem kurarak çözünüz.
- Bu modelin gösterdiği işlemi başka bir model çizerek gösteriniz.

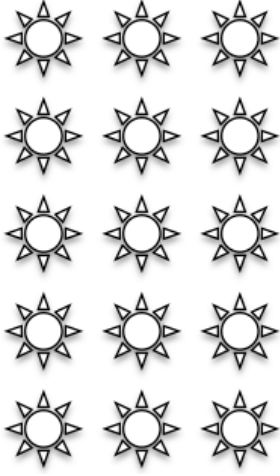
2) $5 \times \frac{1}{2}$ işlemine ilişkin aşağıda verilen soruları cevaplayınız.

- Bu işleme uygun problem kurarak çözünüz.
- Bu işleme uygun model çizerek gösteriniz.

3) Bir terzi müşterilerinden birisi için bir pantolon dikecektir ve elinde 4 metre kumaş vardır. Terzi bu pantolon için bu kumaşın $\frac{3}{7}$ 'sini kullanacaktır o halde bu pantolon kaç metre kumaştan dikilecektir?

- Bu problemin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazınız.
- Bu problemin ifade ettiği işleme uygun model çizerek gösteriniz.
- Bu problemin ifade ettiği işlem için bir başka problem kurarak çözünüz.

4)

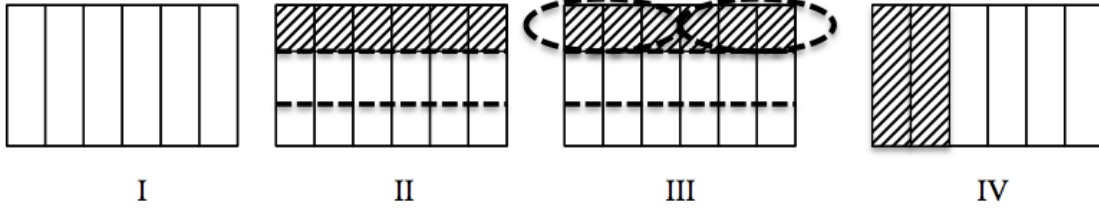


Yukarıda verilen “küme modeli” bir bütünü gösteriyorsa aşağıda verilen eşitlikleri bu modeli kullanarak nasıl gösterir ve açıklarsınız?

a) $3 \times \frac{2}{5} = 6 \times \frac{1}{5}$

b) $3 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times 3$

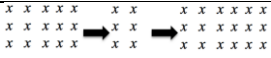
5)



Yukarıdaki “dikdörtgensel alan modeline” ilişkin aşağıda verilen soruları cevaplayınız.

- Bu modelin hangi işlemi gösterdiğini matematiksel olarak yazınız.
- Bu modelin gösterdiği işleme uygun problem kurarak çözünüz.
- Bu modelin gösterdiği işlemi başka bir model çizerek gösteriniz.

EK 5. Esas Çalışmada Derste Kullanılan Alıştırmalara Örnek

Görevler	Boyutlar	Amaçlar	Kazanımlar
 Yukarıdaki küme modeline ilişkin aşağıda verilen soruları cevaplayınız.	Bu modelin gösterdiği işlemi matematiksel olarak yazınız. Bu model için neden bu işlemi gösterdiğini sözel olarak açıklayınız. Bu işlem için problem kurarak çözünüz.	Matematiksel ifade yazma Gerekçelendirme Problem kurma	Çarpmanın tekrarlı toplama anlamını bilme, verilen modelin ifade ettiği işlemi $3 \times 2/5$'i yazma. Bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır.
2/3 x 6 işlemi için aşağıda verilen soruları cevaplayınız.	Bu işlem için problem kurarak çözünüz. Bu işlemi model çizerek gösteriniz. Çiziminizi adım adım yaparak her bir adımını sözel olarak açıklayınız.	Problem kurma Model çizme	2/3 x 6 = 6'nın 2/3'ü anlamı olduğunu bilme ve modelde önce 6 bütünü çizip sonra her bir bütünün veya hepsinin 2/3'lük kısmını gösterme, bu anlamı yansıtan problem kurma. Bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır.
“Partiden sonra 3 paket pizza kalmıştır ve her bir pakette bir pizzanın $\frac{2}{7}$'si vardır. Serap herkes gittikten sonra bu kalan pizzaların hepsini yemiştir. Serap bir pizzanın ne kadarını yemiştir?” Yukarıdaki probleme ilişkin aşağıda verilen soruları cevaplayınız.	Bu probleme karşılık gelen işlemi matematiksel olarak yazınız. Bu problem için neden bu işlemi gösterdiğini açıklayınız. Bu işlemi model çizerek gösteriniz. Çiziminizi adım adım yaparak her bir adımını sözel olarak açıklayınız.	Matematiksel ifade yazma Gerekçelendirme Model çizme	Çarpmanın tekrarlı toplama anlamını bilme. Problemin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazma ve uygun kesir modelleriyle gösterme. Bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır.

EK 6. Öğretim Sürecinde Gerçekleştirilen Bir Ders Örneği



İki kesrin çarpma işlemi

6.1.4.4. İki kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır.

- Örneğin $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ ifadesinin $\frac{2}{3}$ 'ün $\frac{1}{2}$ 'si (yani yarısı) ve $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ ifadesinin $\frac{1}{2}$ 'nin $\frac{2}{3}$ 'ü anlamına geldiği vurgulanır.
- Gerçek yaşam durumları ve uygun kesir modelleriyle yapılacak çalışmalara yer verilir.

→ $\frac{3}{7} \times 4$

→ $4 \times \frac{3}{7}$

- Her birinin $\frac{3}{7}$ 'sini almak ile 4'ün $\frac{3}{7}$ 'sini aldığımızı nasıl açıklayabiliriz?
- 4'ler aynı mı farklı mı? Neden?
- "Yeni bütün" kavramı?
- "Grup sayısı, bütün=nesne, her bir gruptaki nesne ve A gruptaki toplam nesne sayısı" kavramları?

1. Dikdörtgen biçimindeki bir bahçenin $\frac{2}{3}$ 'ünün $\frac{1}{2}$ 'sine domates fidesi dikildi. Domates fidesi dikili bölgenin, bahçenin kaçta kaç olduğunu bulalım:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6}$ olur.
Bahçenin $\frac{2}{6}$ 'sine domates fidesi dikilmiştir.

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ ifadesi, $\frac{2}{3}$ 'ün $\frac{1}{2}$ 'si (yani yarısı) anlamına gelmektedir.

2. Dikdörtgen biçimindeki bir bahçenin $\frac{1}{2}$ 'sinin $\frac{2}{3}$ 'üne birer fidesi dikildi. Birer fidesi dikili bölgenin, bahçenin kaçta kaç olduğunu bulalım:

$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$ olur.
Bahçenin $\frac{2}{6}$ 'sine birer fidesi dikilmiştir.

$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ ifadesi, $\frac{1}{2}$ 'nin $\frac{2}{3}$ 'sü anlamına gelir.

Yukarıdaki iki örnekte görüldüğü gibi $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ ve $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ işlemleri aynı sonuçları vermektedir.

Burada yarısının almanın $\frac{1}{2}$ ile çarpma olduğu ve iki kesrin çarpımında **değişme özelliği** ile sonucun değişmediği sadece modellerin değiştiği görülür. Bunu dairesel modellerle şöyle örnekleyebiliriz:

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$

İki kesrin çarpımı bir kesrin diğer kesir kadarını bulmaktır. Bunu kısaca **pay ile pay, payda ile payda çarpılır** olarak ifade edebiliriz ama neden?

Bunu **algoritmik** olarak şöyle açıklayabiliriz:

(i) $\frac{a}{a} = 1$ Neden?

$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ (Kesir tanımı, $\frac{1}{b}$ 'nin çarpmaya göre tersi)

$b=a$ alınırsa;

$\frac{a}{a} = a \times \frac{1}{a} = 1$ ($\frac{1}{a}$, a'nın çarpmaya göre tersi)

(ii) $\frac{1}{b \times d} = \frac{1}{b} \times \frac{1}{d}$ Neden? ($d \neq 0, b \neq 0$)

$\frac{1}{b} \times \frac{1}{d}$ işlemini $b \times d$ işleminin çarpmaya göre tersi olduğunu görmek için $b \times d$ ile çarpalım.

$(b \times d) \times \left(\frac{1}{b} \times \frac{1}{d} \right) = b \times \frac{1}{b} \times d \times \frac{1}{d}$ (Değişme özelliği)

$= 1 \times 1$ (Birim eleman özelliği (i))

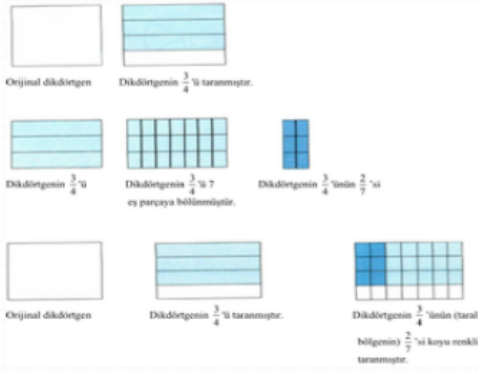
$= 1$ (Çarpmaya göre tersi olduğunu gösterir)

Dolayısıyla $\frac{1}{b} \times \frac{1}{d} = \frac{1}{b \times d}$ yazılır.

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} &= a \times \left(\frac{1}{b}\right) \times c \times \left(\frac{1}{d}\right) \left(\frac{a}{b} \text{ ve } \frac{c}{d} \text{'nin tanımı}\right) \\ &= a \times c \times \left(\frac{1}{b}\right) \times \left(\frac{1}{d}\right) \text{ (Değişme özelliği)} \\ &= a \times c \times \left(\frac{1}{b \times d}\right) \text{ (ii)} \\ &= \frac{a \times c}{b \times d} \text{ (Kesir tanımı)}\end{aligned}$$

Bunu **modelleyerek** şöyle açıklayabiliriz:

Örneğin, $\frac{2}{7} \times \frac{3}{4}$ işleminin anlamı her bir grupta bir dikdörtgenin $\frac{3}{4}$ 'ü olduğunda bir grubun $\frac{2}{7}$ 'sindeki bir dikdörtgenin kesridir yani bir dikdörtgenin $\frac{3}{4}$ 'ünün $\frac{2}{7}$ 'sidir. Buna uygun şöyle bir problem olabilir: "Ayşe bir defter sayfasının $\frac{3}{4}$ 'ünün $\frac{2}{7}$ kadarını kullandı. Ayşe'nin kullandığı bölüm, sayfanın kaçta kaçtır?"

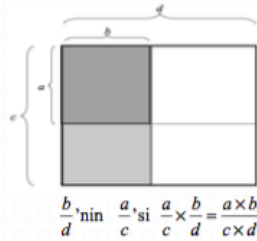


Burada bir dikdörtgenin $\frac{3}{4}$ 'ünün $\frac{2}{7}$ 'sini orijinal

dikdörtgeni oluşturan 7 x 4 eşit parçanın 2 x 3 parçası

göstermektedir. Bu da $\frac{2 \times 3}{7 \times 4}$ demektir ki; $\frac{2}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{7 \times 4}$

Bunu daha genel olarak ifade etmek gerekirse şöyle olacaktır:



Burada çarpmanın **dikdörtgensel alan** anlamını kullanmış oluyoruz. Tam sayılarda olduğu gibi kesirlerde çarpma da dikdörtgensel alan modeliyle gösterilebilir.

Burada çarpmanın sonucu olan kesri iki taraflı kısmın **kesiştikleri ortak bölge** olarak da ifade edebiliriz ama önemli olan bütünün $\frac{2}{7}$ 'sini almadığımız yani bütünün

$\frac{3}{4}$ 'ünün $\frac{2}{7}$ 'sini aldığımızı vurgulamaktır!

Bütünün parçası mı parçanın parçası mı?
Yeni bütün?

Burada önce orijinal dikdörtgenin $\frac{3}{4}$ 'ünü alıyoruz sonra

$\frac{3}{4}$ parçasının $\frac{2}{7}$ 'sini alıyoruz. Yani dikdörtgenin

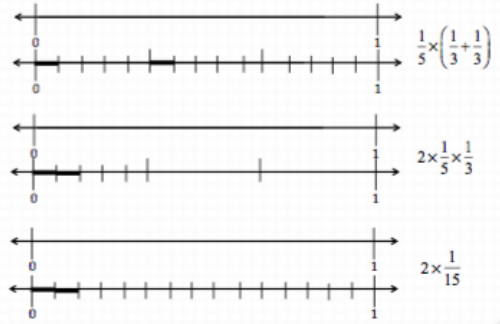
$\frac{3}{4}$ 'ü **yeni bir bütün** oluyor. Dikdörtgenin $\frac{3}{4}$ 'ünün

$\frac{2}{7}$ 'sini bulduğumuzda orijinal dikdörtgenin parçası

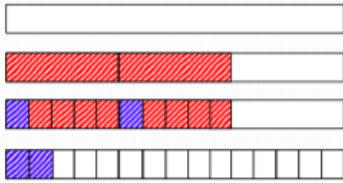
olan kesrin ne olduğunu belirlememiz gerekir. Yani orijinal bütüne geri dönmek zorundayız. Kesirlerle çalışırken **parçanın parçası** mı yoksa **bütünün parçası** mı çok dikkat göstermeliyiz. Modelleri kullanmak kesirlerde çarpma problemlerini çözmeye yardımcı olabilir.

$\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}$ işlemini sayı doğrusu, kesir çubuğu ve küme modelleriyle gösterelim:

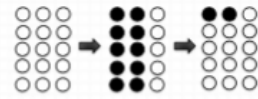
Sayı doğrusu modeli



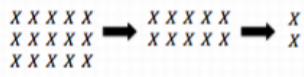
Kesir çubuğu modeli



Küme modeli



Küme modeli



EK 7. Esas Çalışmada Yapılan Görüşmelere Örnek

İsim:

Görüşme No:

Tarih:

1)



Yukarıdaki “dairesel alan modeline” ilişkin aşağıda verilen soruları cevaplayınız.

- Bu modelin hangi işlemi gösterdiğini matematiksel olarak yazınız.
- Bu modelin gösterdiği işleme uygun problem kurarak çözünüz.

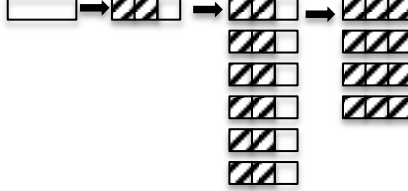
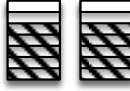
2) $5 \times \frac{1}{2}$ işlemine ilişkin aşağıda verilen soruları cevaplayınız.

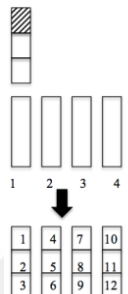
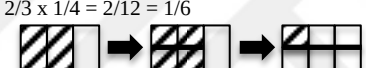
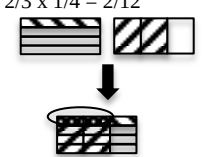
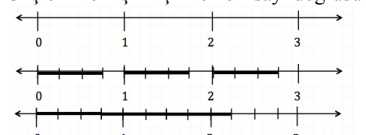
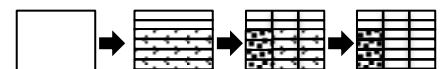
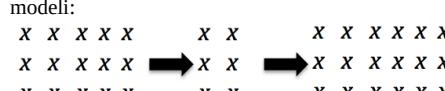
- Bu işleme uygun problem kurarak çözünüz.
- Bu işlemi uygun model çizerek gösteriniz.

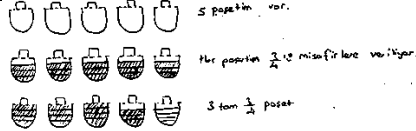
3) Bir terzi müşterilerinden birisi için bir pantolon dikecektir ve elinde 4 metre kumaş vardır. Terzi bu pantolon için bu kumaşın $\frac{3}{7}$ ’sini kullanacaktır o halde bu pantolon kaç metre kumaştan dikilecektir?

- Bu problemin ifade ettiği işlemi matematiksel olarak yazınız.
- Bu problemin ifade ettiği işlemi uygun model çizerek gösteriniz.

EK 8. Kodlama Tablosu

Alt Tema	Açıklaması	Kodlar	Açıklaması
Uygunluk	Görevlerde çizdiği modelin, kurduğu problemin verilen işlemi tam olarak yansıtıp yansıtmadığını, yazdığı işlemin verilen modeli veya problemi tam olarak karşılayıp karşılamadığını, verilen durum için yaptığı gerekçelendirmenin yeterince ikna edici olup olmadığını ve yaptığı açıklamanın yeterince açık ve yeterli olup olmadığını incelemeyi içerir.	Uygun-tam model	Görevde verilen işlemi veya problemi tam olarak yansıtan yani çarpan/bölen, çarpılan/bölünen, çarpım/bölümün ve çarpmanın/bölmenin herhangi bir anlamının net bir şekilde görüldüğü bir model çizmedir. Örneğin, $6 \times 2/3$ işlemi için şu modeli çizme: 
		Uygun-eksik model	Burada işlemdeki 6, $2/3$ ve 4 modelde görülmektedir, ayrıca modelde “6 tane $2/3$ ” yani tekrarlı toplama anlamının kullanıldığı açıktır. Görevde verilen işlemi veya problemi yansıtan bir model çizme ama çarpan/bölen, çarpılan/bölünen, çarpım/bölümün biri görülmüyor veya işlemin hangi anlamının kullanıldığı net değildir. Örneğin, $6 \times 2/3$ işlemi için şu modeli çizme: 
		Uygun olmayan model	Burada işlemdeki 6 ve $2/3$ modelde görülüyor ama sonuç olan 4 yoktur ve tekrarlı toplama yani “6 tane $2/3$ ” anlamı mı yoksa operatör yani “6’nın $2/3$ ’ü” anlamı mı kullanıldığı açık değildir. Görevde verilen işlemi veya problemi yansıtmayan bir model çizmedir. Çarpan/bölen ve çarpılan/bölünen modelde görülüyor ama model herhangi bir işlemi göstermiyor. Örneğin, $1/7 \div 3/4$ işlemi için şu modeli çizme: 
		Uygun-tam problem	Burada $1/7$ kesri görülüyor ama sonra ne yaptığı belirsizdir, anlaşılmıyor. Görevde verilen işlemi veya modeli tam olarak yansıtan ve çarpmanın/bölmenin herhangi bir anlamını kullanan bir problem yazmadır. Örneğin, $6 \times 2/3$ işlemi için “Ali’nin 6 metre uzunluğunda ipi vardır. Ali’nin ipinin $2/3$ ’ü ne kadardır?” şeklinde bir problem kurma.
		Uygun-eksik problem	Görevde verilen işlemi veya modeli yansıtmıyor ama işlemin hangi anlamının kullanıldığı net değildir, eksik veya fazla sayı vardır veya bölme yerine ters çevir çarp kullanarak çarpma işlemine yönelik yazılmıştır. Örneğin, $1/2 \times 2/5$ işlemi için “Annem elindeki hamuru önce $1/2$ ’ye sonra da $2/5$ ’e bölüyor. Böldüğü bu iki oranı birbiriyle çarptığında sonuç ne olur?” şeklinde problem kurma.
		Uygun olmayan problem	Görevde verilen işlemi veya modeli yansıtmayan bir problem yazmadır. Örneğin, $1/7 \div 3/4$ işlemi için “Bir pastanın $1/7$ ’si kalmıştır. Bir çocuk bu kalan pastanın $3/4$ ’ünü yemiştir. Buna göre bu çocuk en başta alınan pastanın ne kadarını yemiştir?” şeklinde $1/7$ ’nin $3/4$ ’ünü veren yani çarpma işlemine yönelik problem kurma.
		Uygun-tam işlem	Görevde verilen modeli veya problemi tam olarak yansıtan bir işlem yazmadır. Örneğin, “5’in içinde kaç tane $1/2$ vardır?” problemi için $5 \div 1/2$ veya $\frac{5}{1/2}$ yazma.
		Uygun-eksik işlem	Görevde verilen modeli veya problemi yansıtmıyor ama sayı eksik veya fazla, işlemi basamaklar halinde yazma veya işlemi başka bir işlemle ifade etme mevcuttur. Örneğin, $2/7 \div 3$ işlemine ilişkin verilen model için $(2/7 \div 6) \times 2$ veya $2/7 \times 1/3$ veya $1/3 \times 2/7$ yazma.
		Uygun olmayan işlem	Görevde verilen modeli veya problemi yansıtmayan işlem yazmadır. Örneğin, “5’in içinde kaç tane $1/2$ vardır?” problemi için $5 \times 1/2$ veya $5/2$ yazma.
		Uygun-tam gerekçelendirme	Görevde verilen durumun nedenini tam olarak açıklayan, tamamen ikna edici ve açık bir gerekçelendirmedir. Örneğin, $5/7 \times 2 = 10/14$ olarak ifade edilen duruma ilişkin “iki parçayı bir bütün düşündü” veya “bütündeki toplam parça sayısı aynıdır, 7 parçadır bu yüzden yanlış olur” olarak ifade etme. 
		Uygun-eksik	Buradaki önemli nokta işlemin sonucu için referans alınan bütütün yanlış alınmasıdır yani soruda verilen modelde bir dikdörtgen yerine iki dikdörtgenin bir bütün alınmasıdır, ÖA bu ifadeleriyle buna işaret etmektedir. Görevde verilen durumun nedenini açıklıyor ama eksik ifadeler var ve tam ikna

			gerekçelendirme edici değildir. Örneğin, $5/7 \times 2 = 10/14$ olarak ifade edilen duruma ilişkin “hem payı hem paydayı 2 ile çarpmış” veya $5/7 + 5/7 = 10/14$ yazıp “hem payı hem paydayı kendi aralarında toplamış” olarak ifade etme. Bu gerekçelendirme işlemin sonucunun böyle bulunmasını açıklar ama referans alınan bütünden bahsetmediği için yeterli değildir.
			Uygun olmayan gerekçelendirme Görevde verilen durumu açıklamıyor, ikna etmeyle hiç ilgisi yoktur. Örneğin, $5/7 \times 2 = 10/14$ olarak ifade edilen duruma ilişkin “doğrudur” veya “yanlıştır” yazıp bırakma.
			Uygun-tam açıklama Görevde verilen durumu uygun bir şekilde açıklar, ifadelerde eksiklik yoktur ve gayet açık ve yeterlidir. Örneğin, $4 \div 1/3$ işlemine ilişkin bölmenin her zaman küçültmeyeceğini şu şekilde açıklama: “Rasyonel sayılarda bölme işlemi yapılırken ikinci sayı ters çevrilip çarpıldığından 4’ü $1/3$ ile değil 3 ile çarpmış oluruz. Yani sayı büyür. $1/3$ kesrini yandaki her bir modele yerleştiriyoruz.  4 sayısını temsil eden 4 tane eş model. 12 tane $1/3$ olduğundan $4 \div 1/3 = 12$’dir. “Bu modellerin her birinin içinde kaç tane $1/3$ var?” sorusuna cevap ararız bu bölme işleminde.” Burada bu işlemle her bir bütünün içinde $1/3$’ün arandığını vurgulayarak sonuç olan 12’nin $1/3$’ten 12 tane olduğuna işaret etmektedir.
			Uygun-eksik açıklama Görevde verilen durumu uygun bir şekilde açıklar ama eksik ifadeler vardır ve açık değildir. Örneğin, $2/3 \div 4$ işleminde kendinden büyük bir sayıya bölünebileceğini şu şekilde açıklama: “$2/3$ sayısının içinde kaç tane 4 eş parçaya böldüğümüzde bir parçanın neyi ifade ettiğini bulmamız gerekiyor.” $2/3 \times 1/4 = 2/12 = 1/6$  Burada bölmenin paylaştırma anlamından yararlanıyor ama $2/3$ ve 4’ün ne olduğunu ve durumun nedenini tam açıklamıyor.
			Uygun olmayan açıklama Görevde verilen durumu başka bir durumla açıklama ama duruma açıklık getirememedir. Örneğin, $2/3 \div 4$ işleminde kendinden büyük bir sayıya bölünebileceğini şu şekilde açıklama: $2/3 \times 1/4 = 2/12$  Burada bu durumu çarpma işlemi ile açıklamış ama verilen durumun nedenini açıklamamıştır. Yani sadece işlemi uygun ama eksik olan bir model çizerek göstermiştir.
Tür	Görevlerde ne tür model çizdiklerini, ne tür problem kurduklarını, ne tür gerekçelendirmeleri ve açıklama yaptıklarını incelemeyi içerir.	Uzunluk modeli	Sayı doğrusu veya kesir çubuğu çizerek gösterilen model türüdür. Örneğin, $3/4 \times 3$ işlemine ilişkin çizilen bir sayı doğrusu modeli: 
		Alan modeli	Dikdörtgen, daire, kare veya üçgen çizerek gösterilen model türüdür. Örneğin, $5/7 \div 3$ işleminin paylaştırma anlamına ilişkin çizilen bir dikdörtgensel alan modeli: 
		Küme modeli	Bilye, gazoz kapağı, bozuk para vs. veya küçük dairelerle veya x’lerle gösterilen model türüdür. Örneğin, $3 \times 2/5$ işlemine ilişkin çizilen bir x’ler dikdörtgeni modeli: 
		Gerçek nesne modeli	Gerçek yaşamdaki nesneleri çizerek gösterilen model türüdür. Örneğin, $3/4 \times 5$ işlemine ilişkin bir ÖA’nın çizdiği model:



Burada ÖA verilen problemde poşet ifadesi geçtiği için böyle bir model tercih etmiştir ancak böyle göstererek parçaların eş olacağını göz ardı etmiştir. Her ne kadar işlemin anlamını yansıtsa da parçaları eşit göstermediği için eksik bir modeldir.

Oran yapısında çarpma problemi	Çarpmanın herhangi bir anlamını kullanmak yerine oran-orantı yoluyla kurulan problemlerdir. Örneğin, 5×3 işlemi için kurulan bir problem (Kim, 2007, s. 71): “Her bir çantada 3 tenis topu varsa, 5 çantada kaç tane tenis topu vardır?”
Oran yapısında paylaştırma bölme problemi	Bölmenin paylaştırma anlamını kullanmak yerine oran-orantı yoluyla kurulan problemlerdir. Örneğin, $3/4 \div 2/5$ işlemi için bir öğretmen adayının kurduğu problem (Işık & Kar, 2012, s.2295): “Bir yere kaldırım taşı döşenecektir. Bu alanın $3/4$ 'ü $2/5$ saatte döşendiğine göre 1 saatte bu alanın ne kadarı kaldırım taşı ile döşenir?”
Oran yapısında gruplama bölme problemi	Bölmenin gruplama anlamını kullanmak yerine oran-orantı yoluyla kurulan problemlerdir. Örneğin, $15 \div 3$ işlemi için kurulan bir problem (Kim, 2007, s.71): “Her bir çantada 3 top olacak şekilde 15 tenis topunu koymak için kaç tane çanta gerekir?”
Çarpımsal karşılaştırma yapısında çarpma problemi	Çarpımsal karşılaştırma durumlarını içerir. Bir küme diğerinin çoklu kopyalarını içerir. “Bir değer diğerinden kaç kat büyüktür?” veya “Bir değer diğerine kesri veya bölümü kaçtır?” sorularıyla oluşturulur. (Thompson, 1994). Örneğin, $1 \frac{1}{2} \times 10 \frac{1}{2}$ işlemine ilişkin kurulan bir problem (Van de Walle, 2007, s.155): “Mustafa bu hafta geçen hafta çalıştığından $1 \frac{1}{2}$ kat fazla çalışmıştır. Geçen hafta $10 \frac{1}{2}$ saat çalışmıştır. Mustafa bu hafta kaç saat çalışmıştır?”
Çarpımsal karşılaştırma yapısında paylaştırma bölme problemi	Çarpımsal karşılaştırma durumlarını içerir. Bir küme diğerinin çoklu kopyalarını içerir. Örneğin, $8 \frac{1}{4} \div 4 \frac{1}{2}$ işlemi için kurulan bir problem (Lo & Luo, 2012, s.493): “Mert bu hafta geçen hafta çalıştığından $4 \frac{1}{2}$ kat daha fazla çalışmıştır. Bu hafta $8 \frac{1}{4}$ saat çalıştıysa, geçen hafta kaç saat çalışmıştır?”
Çarpımsal karşılaştırma yapısında gruplama bölme problemi	Çarpımsal karşılaştırma durumlarını içerir. Bir küme diğerinin çoklu kopyalarını içerir. Örneğin, $8 \frac{1}{4} \div 4 \frac{1}{2}$ işlemi için kurulan bir problem (Lo & Luo, 2012): “Mahmut bu hafta $8 \frac{1}{4}$ saat spor yapmıştır. Geçen hafta $4 \frac{1}{2}$ saat spor yapmıştır. Bu hafta geçen haftadan kaç kat fazla spor yapmıştır?”
Eş-grup yapısında çarpma problemi	Belirli sayıda gruplar ve hepsi eşit büyüklüktedir. Çarpmanın tanımından gelen grup sayısı ve her bir gruptaki nesne sayısı göz önüne alınarak kurulan problemlerdir. Örneğin, $2 \frac{1}{2} \times 4 \frac{2}{3}$ işlemi için kurulan bir problem (Van de Walle, 2007): “Bir tepsi kurabiye yapmak için $4 \frac{2}{3}$ bardak un gerekiyor. $2 \frac{1}{2}$ tepsi kurabiye yapmak için kaç bardak un gerekir?”
Eş-grup yapısında paylaştırma bölme problemi	Belirli sayıda gruplar ve hepsi eşit büyüklüktedir. Çarpmanın tanımından gelen grup sayısı ve her bir gruptaki nesne sayısı göz önüne alınarak kurulan problemlerdir. Örneğin, $11 \frac{2}{3} \div 2 \frac{1}{2}$ işlemi için kurulan bir problem (Lo & Luo, 2012, s.493): “Murat’ın $11 \frac{2}{3}$ bardak unu vardır. Bu $2 \frac{1}{2}$ tepsi kurabiye için yeterlidir. Bir tepsi kurabiye için kaç bardak un gerekir?”
Eş-grup yapısında gruplama bölme problemi	Belirli sayıda gruplar ve hepsi eşit büyüklüktedir. Çarpmanın tanımından gelen grup sayısı ve her bir gruptaki nesne sayısı göz önüne alınarak kurulan problemlerdir. Örneğin, $11 \frac{2}{3} \div 4 \frac{1}{3}$ işlemi için kurulan bir problem (Lo & Luo, 2012, s.493): “Bir tepsi kurabiye yapmak için $4 \frac{1}{3}$ bardak un gerekiyor. Meltem’in $11 \frac{2}{3}$ bardak unu vardır. Kaç tepsi kurabiye yapabilir?”
Dikdörtgensel alan yapısında çarpma problemi	Çarpma işlemi iki boyutlu birimlerden oluşur. Örneğin, dikdörtgenin alanı için uzunluk x genişlik birimi. Örneğin, $2 \frac{1}{10} \times 1 \frac{3}{5}$ işlemi için kurulan bir problem (Van de Walle, 2007, s.156): “ $2 \frac{1}{10}$ m uzunluk ve $1 \frac{3}{5}$ m genişliğindeki bir dikdörtgenin alanı kaçtır?”
Dikdörtgensel alan yapısında bölme problemi	Çarpma işlemi iki boyutlu birimlerden oluşur. Örneğin, dikdörtgenin alanı için uzunluk x genişlik birimi. Örneğin, $13 \frac{1}{2} \div 3 \frac{1}{4}$ işlemi için kurulan bir problem (Lo & Luo, 2012, s.493): “Dikdörtgenin alanı $13 \frac{1}{2} \text{ m}^2$ ve uzunluğu $3 \frac{1}{4}$ m ise genişliği ne kadardır?”
Kendi açıklaması şeklinde gerekçelendirme	Neden o basamağın geçerli olduğunu kendi kelimeleriyle veya sembollerle açıklama. Örneğin, “k bir tam sayı ise $2k^2 + 2k$ bir tam sayıdır. Bu yüzden $2(2k^2 + 2k)$ çift bir tam sayıdır.” Bazı gerekçelendirmelerde matematiksel tanım kendi kelimeleriyle yazılmıştır. Örneğin, “ $2 \equiv_{13} 106$ çünkü $2 - 106 = -104$, $13 \mid -104$ ” (Back vd., 2009, s.295).
Varsayıma dayalı gerekçelendir	Görevin içinde verilen varsayıma doğrudan gönderme yapma veya yeni biçimde yeniden yazma (Back vd., 2009).

me	
Kurala dayalı gerekçelendirme	Kuralın veya tanımın ismine gönderme yapma. Örneğin, tam değer kuralı, totoloji, kongruens, vb. Bazı durumlarda gerekçelendirme açık şekilde yazılmış kuralı içerir (Back vd., 2009, s.295).
Belirsiz/Genel ifade şeklinde gerekçelendirme	Çok kısa ve bilgilendirici olmayan gerekçelendirme tipi: “mantık” veya “sadeleştirmek” (Back vd., 2009, s.295)
İşlemsel tanım şeklinde gerekçelendirme	O basamakta ne yapıldığına ilişkin açıklama. Örneğin, “her iki tarafa $2x+4$ eklenir”, “3 diğer tarafa taşınır ve işaret değiştirilir” ve “toplam hesaplanır” (Back vd., 2009, s.295)
Çarpmanın tekrarlı toplama anlamını kullanarak gerekçelendirme	“Sınıfta 6 kişi var, her bir öğrenci bir elmanın yarısını yiyor. Hepsi kaç elma yer?” problemini neden çarpma işleminin çözdüğünü gerekçelendirme (Espy, 2009, s.1134): “6 öğrencinin her biri $1/2$ elma yiyorsa, $1/2$ 'yi 6 kere toplayabilirsiniz ve 3 elde edersiniz. Bu $6 \times 1/2 = 3$ demekle aynıdır.”
Çarpmanın tanımı yoluyla gerekçelendirme	Çarpmanın tanımından yararlanarak gerekçelendirme. Örneğin, 18×26 işlemi için neden o metodun işe yaradığını şu şekilde gerekçelendirme (Lo vd., 2004): “ 18×26 , 26 'nın 18 grubu olarak düşünülebilir. 26 , 20 ve 6 'dan oluşur bu yüzden 26 'nın 18 grubu, 20 'nin 18 grubu ve 6 'nın 18 grubu ile aynıdır.”
Resim çizerek gerekçelendirme	Örneğin, 18×26 işlemi için neden o metodun işe yaradığını şu şekilde gerekçelendirme (Lo vd., 2004, s.1163): 5 sütun ve 4 satır olmak üzere küçük dairelerden oluşan ve her birinin içinde 26 yazan bir küme modeli çiziyor. İki dairenin üzerine çarpı atıyor.
Hikaye/problemler yoluyla gerekçelendirme	Örneğin, 18×26 işlemi için neden o metodun işe yaradığını şu şekilde gerekçelendirme (Lo vd., 2004, s.1162): “10 çanta 26, 10 çanta 26, böylece 20 çanta 26 kalemi vardır. Sonra 2 çanta 26 kalemin arkadaşının olduğunu fark ediyor ve onları çıkarıyor, böylece onların kalemlerini çıkarıyor.”
Matematiksel temelli açıklama (MTA)	Matematiksel tanımlar veya daha önce öğrenilen matematiksel özelliklere dayalı açıklamalardır (Levenson vd., 2006). Örneğin: “ $\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$ Neden eşittir?” sorusuna şu şekillerde cevap verme (Levenson vd., 2010, s.347; Levenson vd., 2010, s.131): “ $1/4$, $3/12$ ile aynıdır. $2/4$, 2 tane $3/12$ 'dir yani $6/12$ 'dir. Bu yüzden $2/4 = 6/12$ 'dir.” (İki eşit kesir) $\frac{2}{4} = \frac{6 \div 2}{12 \div 2} = \frac{3}{6}$ $\frac{2}{4} = \frac{2 \div 2}{4 \div 2} = \frac{1}{2}$ $2/4$ ve $6/12$ kesirleri $1/2$ 'ye eşittir. Bu yüzden $2/4 = 6/12$ 'dir.” (Yarıma eşitlik) “Her sayının 1 ile çarpımı kendisine eşittir: $1 = 3/3$ $2/4$, $3/3$ ile çarpılır: $2/4 \times 3/3 = 6/12$ $2/4 \times 1 = 2/4$ ve $2/4 \times 3/3 = 6/12$. Bu yüzden $2/4 = 6/12$ 'dir.” (Çarpımsal özdeşlik kullanma) “ $6/12$ kesrinin paydasını 3 ile bölersek $2/4$ kesrinin paydasıyla aynı sayıyı, 4'ü elde ederiz. Bu yüzden kesir 3 ile sadeleştirilir. $\frac{6}{12} = \frac{6 \div 3}{12 \div 3} = \frac{2}{4}$ Dolayısıyla $2/4 = 6/12$.” (Kesirleri sadeleştirme)
Uygulama temelli açıklama (UTA)	Matematiksel ifadeler anlam verecek günlük/gerçek yaşam bağlamına dayalı ve/veya manipülatifler kullanan açıklamalardır (Levenson vd., 2004). Görsel destekler veya manipülatifler kullanan ve gerçek yaşam bağlamına dayalı açıklamalardır (Levenson vd., 2006). Örneğin, “ $\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$ Neden eşittir?” sorusuna şu şekillerde cevap verme (Levenson vd., 2010, s.347; Levenson vd., 2010, s.132): “Anneleri Derya ve Meryem'e eş çikolatalar vermiştir. Derya çikolatasını 4 eşit parçaya bölüp 2 parçasını yemiştir. Meryem çikolatasını 12 eşit parçaya bölüp 6 parçasını yemiştir. Çocukların her biri aynı miktar çikolata yemiştir. Dolayısıyla

$$\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$$

“Anneleri Derya ve Meryem’e eş çikolatalar vermiştir. Derya çikolatasını 4 eşit parçaya bölüp 2 parçasını yemiştir.



4 parçadan 2’sini yemiştir.

Meryem çikolatasını 12 eşit parçaya bölüp 6 parçasını yemiştir.



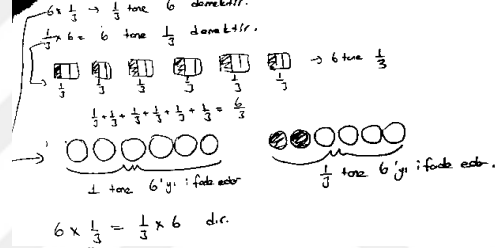
12 parçadan 6’sını yemiştir.

$$\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$$

Çocukların her biri aynı miktar çikolata yemiştir. Dolayısıyla

çikolata açıklaması)

Hem matematiksel hem uygulama temelli açıklama (MUTA)



Burada ÖA’nın açıklaması eksik olsa da hem model çizerek hem de sözel ve matematiksel ifadeler kullanarak açıklama yapmıştır.

Anahtar Kavramlar	Görevlerde model çizerken, problem kurarken, işlem yazarken, gerekçelendirir en veya açıklama yaparken kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerini anlamak için temel olan kesirler, çarpma ve bölme ilişkisi hangi önemli/anahtar kavramları kullandıklarını incelemeyi içerir.	Çarpmanın tanımı	A x B veya A · B işleminde A, grup sayısı; B, her bir gruptaki nesne sayısı (grubun büyüklüğü) ve A x B, A gruptaki toplam nesne sayısıdır ki bu sonuca A ile B’nin çarpımı denir (Beckmann, 2005, s.219). Grup sayısı x Her bir gruptaki nesne sayısı = Toplam nesne sayısı Nesne ve grup kavramları önemlidir. Örneğin, 3 poşet ve her bir poşette 4 patates var. Yani 4’ün 3 grubu (eş-grup); 3 x 4. Kesirlerle çarpma işlemlerinde ilk sayı doğal sayı, ikinci sayı kesirli sayı olduğunda mesela 3 x 1/4 için 3 tane 1/4 anlamını verir. Ancak ilk sayı kesirli sayı olduğunda veya her ikisi de kesirli sayı olduğunda mesela 2/3 x 4/5 için 4/5’in 2/3’ü olarak ifade edilir (Siebert ve Gaskin, 2006).
		Çarpmanın tekrarlı toplama anlamı	Çarpma işleminin anlamlarından birisidir. a tane b’nin toplamı a x b olarak ifade edilebilir. $b + b + b + \dots + b = a \times b$ Çarpma işlemi her bir grupta aynı sayıda nesnelerin olduğu gruplardaki toplam nesne sayısını bulmak için kullanılan işlemidir. Grupların çarpımsal bileşimi toplama işleminden elde edilir. Örneğin, 9 x 5 işlemi her bir grupta 5 nesnenin olduğu 9 grubun toplamı anlamına gelir (Lampert, 1986). $9 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ Aynı sayıyı tekrar tekrar topladığında, çarpma işlemi bu tekrarlı toplama ile aynıdır (Burns, 2003). Örneğin, 2 x 3/5 işlemi “3/5’in 2 grubu” veya “2 tane 3/5” olarak ifade etme ve $3/5 + 3/5$ olarak yazma.
		Çarpmanın operatör anlamı	Çarpma işlemi tekrarlı toplanmanın yanısıra -(n)ın ifadesi kullanılarak da açıklanabilir. Örneğin, 3/4 x 3 işlemi 3/4 tane 3 şeklinde ifade etmek uygun olmayabilir bu yüzden 3’ün 3/4’ü olarak ifade etmek daha uygun olabilir. Burada çarpmanın değişme özelliği kullanılmıştır. Örneğin, 1/3 x 1/2 işlemi için çizilen bir model (Olanoff, 2011, s.154):
			Burada çarpmanın operatör anlamı kullanılarak bu model çizilmiştir ve kesirsel bir alanın kesirini alma şeklinde gerçekleştirilmiştir.
		Pay ile pay, payda ile payda çarpma	İki kesrin çarpımı bir kesrin diğer kesir kadarını bulmaktır. Burada kısaca “pay ile pay, payda ile payda çarpılır” denilir. Bu algoritmanın neden işe yaradığı algoritmik olarak şöyle açıklanabilir (“Ders Planı”, t.y.):

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} &= a \times \left(\frac{1}{b} \right) \times c \times \left(\frac{1}{d} \right) \quad \left(\frac{a}{b} \text{ ve } \frac{c}{d} \text{'nin tanımı} \right) \\
&= a \times c \times \left(\frac{1}{b} \right) \times \left(\frac{1}{d} \right) \quad (\text{Değişme özelliği}) \\
&= a \times c \times \left(\frac{1}{b \times d} \right) \quad (\text{ii}) \\
&= \frac{a \times c}{b \times d} \quad (\text{Kesrin tanımı})
\end{aligned}$$

(i) $\frac{a}{a} = 1$ Neden?

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \quad (\text{Kesrin tanımı, } \frac{1}{b}, b\text{'nin çarpmaya göre tersi})$$

$b = a$ alınırsa;

$$\frac{a}{a} = a \times \frac{1}{a} = 1 \quad \left(\frac{1}{a}, a\text{'nin çarpmaya göre tersi} \right)$$

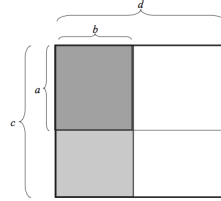
(ii) $\frac{1}{b \times d} = \frac{1}{b} \times \frac{1}{d}$ Neden? ($d \neq 0, b \neq 0$)

$\frac{1}{b} \times \frac{1}{d}$ işlemini $b \times d$ işleminin çarpmaya göre tersi olduğunu görmek için $b \times d$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned}
(b \times d) \times \left(\frac{1}{b} \times \frac{1}{d} \right) &= b \times \frac{1}{b} \times d \times \frac{1}{d} \quad (\text{Değişme özelliği}) \\
&= 1 \times 1 \quad (\text{Birim eleman özelliği (i)}) \\
&= 1 \quad (\text{Çarpmaya göre tersi olduğunu gösterir})
\end{aligned}$$

Dolayısıyla $\frac{1}{b} \times \frac{1}{d} = \frac{1}{b \times d}$ yazılır.

Bu algoritmanın neden işe yaradığı dikdörtgensel alan modeliyle şöyle açıklanabilir (Izsák, 2008, s.108):



$$\frac{b}{d} \text{'nin } \frac{a}{c} \text{'si } \frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{a \times b}{c \times d}$$

Çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliği	Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğinden dolayı kesirlerle çarpma işleminin sonucunun değişmediğini ancak modellerin değişeceğini ifade etme. Örneğin, $3/5 \times 2$ işlemini her bir bütünün $3/5$ 'i yani $3/5 \times (1 + 1)$ olarak ifade etme ve buna göre model çizme, problem kurma veya açıklama yapma. Örneğin, $2/3 \times 4$ işleminde 4'ü bir bütün olarak ele alıp onun $2/3$ 'ünü alma ile 4'ü 4 ayrı bütün olarak ele alıp her bir bütünün $2/3$ 'ünü almanın aynı sonuca ulaşacağını ama modelin değişeceğini ifade etme. Bunu da $2/3 \times 4 = 2/3 \times (1 + 1 + 1 + 1)$ ile açıklama.
Çarpmada değişme özelliği	Çarpma işleminde değişme özelliğinden dolayı kesirlerle çarpma işleminin sonucun değişmediğini ancak işlemin anlamının ve modelinin değişeceğini ifade etme. Örneğin, $6 \times 2/3$ ve $2/3 \times 6$ işlemleri bu özellikten dolayı aynıdır ancak

	anlamları ve modelleri farklıdır.
Yeni bütün	İki bütün söz konusu olamayacağı için ikinci bütün olarak alınana yeni bütün denilmektedir. Örneğin, $1/2 \times 3/5$ işleminde $3/5$ için referans alınan bütün 1 bütün iken $1/2$ için referans alınan bütün $3/5$ 'tir ve bu yeni bütündür. Burada işlemin sonucunun asıl (orijinal) bütüne yani 1 bütüne göre ifade edilmesi gerektiğinin göz ardı edilmemesi çok önemlidir. $2/3 \div 2/5$ işleminde $2/3$ 'ün içinde $2/5$ aranırken $2/3$ ve $2/5$ için referans alınan bütün 1 bütündür ancak sonuç olan $5/3$ için referans alınan bütün $2/5$ 'tir. Burada en çok yapılan şey $2/5$ 'ten 1 tane olduğunu görüp 1 olarak cevap verilmesidir. Kalan parçalar dikkate alınmamaktadır, bu kalan parçaların da $2/5$ 'e yani yeni bütüne göre açıklanması gerekmektedir.
Dikdörtgensel alan anlamı	Çarpma işlemi alan ile gösterilebilir. Alan modeliyle gösterimde dikey ve yatay parçalamanın algoritmayı oluşturduğu ve parçanın parçası kavramı açıklanmalıdır. Parçanın parçasıyla bütün ilişkilendirilmelidir. Örneğin, $2/7 \times 3/4$ işlemi için önce orijinal dikdörtgenin $3/4$ 'ünü alınıyor sonra $3/4$ parçasının $2/7$ 'sini alınıyor. Yani dikdörtgenin $3/4$ 'ü yeni bir bütün oluyor. Dikdörtgenin $3/4$ 'ünün $2/7$ 'sini bulduğumuzda orijinal dikdörtgenin parçası olan kesrin ne olduğunun belirlenmesi gerekir. Yani orijinal bütüne geri dönmek zorundadır. Kesirlerle çalışırken parçanın parçası mı yoksa bütünün parçası mı olduğuna çok dikkat gösterilmelidir. Dikdörtgenin içindeki küçük karelerin sayısının toplamı satır ve sütun sayılarının çarpımı ile elde edilebilir. Aynı şekilde, dikdörtgenin alanı uzunluğunun ve genişliğinin çarpımı ile elde edilebilir. (Watanabe, 2003). Örneğin, $6 \times 1/2$ işlemi şu şekilde gösterilebilir (Burns, 2003, s.3): $\begin{array}{c} 6 \\ 1/2 \end{array} \begin{array}{ c c c c c c } \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array}$
Referans alınan bütün	Hem bölme için hem çarpma için bütünün doğru yorumlanmasıdır. Yeni bütün, orijinal bütün kavramlarını anlamayı gerektirir. $9 \div 4$ için 9 ve 4 için referans alınan bütün orijinal bütündür yani 1'dir ama 4'ün gruplarına bakıldığında sonuç olan $2 \frac{1}{4}$ için referans alınan bütün yeni bütündür yani 4 olur. $2/3$ 'ün $1/5$ 'i için $2/3$ ve $2/15$ için referans alınan bütün orijinal bütün yani 1 iken $1/5$ için referans alınan bütün yeni bütün yani bir bütünün $2/3$ 'üdür. Örneğin, $1/2 \times 3/5$ işleminde $3/5$ ve sonuç olan $3/10$ için aynı bütün yani 1 bütün geçerli iken $1/2$ için bütün $3/5$ yani bir bütünün $3/5$ 'idir. Bölme için uygun anlamı bilmek bölme görevini tamamlamak için her zaman yeterli değildir, aynı zamanda hangi sayı için hangi bütünün referans alındığını bilmek gerekir (Izsák vd., 2011). $a \div b$ için, gruplama bölmede a ve b için referans alınan bütün aynıken, paylaştırma bölme için farklıdır. $5/8 \div 2/3$ işlemi için gruplama bölmede $5/8$ ve $2/3$ için referans alınan bütün aynı ve 1'dir, paylaştırma bölmede farklıdır, $5/8$ için 1'dir, $2/3$ grup büyüklüğüdür. Sonuç olan $15/16$ için gruplama bölmede referans alınan bütün $2/3$ 'tür, paylaştırma bölmede referans alınan bütün 1'dir (Cluff, 2005).
Ortak kesişim	İki kesrin çarpımını ortak kesişimle gösterme. Önce ilk kesri gösterip tarama, sonra ikinci kesri gösterip tarama ve taran kısımların kesiştiği kısma işaret etme. Kesirlerle çarpma işlemi dikdörtgensel alan modeli ile gösterilirken sadece taralı kısımların kesiştiği bölge olarak tanımlanması yeterli değildir. Burada bütün ve yeni bütüne vurgu yaparak bütünün parçası mı yoksa parçanın parçasının mı alındığı ifade edilmelidir.
Paylaştırma/ Parçalama bölme (Her bir grupta kaç?)	$C \div B = A$ işlemi $C = A \times B$ veya $C = B \times A$ olarak ifade edilebilir. Burada her bir gruptaki nesne sayısının (A) bulunduğu ikinci ifade $C = B \times A$, bölmenin paylaştırma anlamını verir. A gruptaki toplam nesne sayısı (C) ve grup sayısı (B) bilinmektedir. "Her bir grupta kaç nesne var" sorusuna cevap aranır. Bölme işlemindeki bölünen ve bölen için referans alınan bütünler farklıdır. $12 \div 3 = 4$ işlemi için 12, 3 gruba eşit bir şekilde paylaştırılıyor ve her bir grupta 4 olur (Roche ve Clarke, 2009).
Gruplama/ Ölçme bölme (Kaç grup?)	$C \div B = A$ işlemi $C = A \times B$ veya $C = B \times A$ olarak ifade edilebilir. Burada grup sayısının (A) bulunduğu ilk ifade $C = A \times B$, bölmenin gruplama anlamını verir. A gruptaki toplam nesne sayısı (C) ve her bir gruptaki nesne sayısı (B) bilinmektedir. "Kaç grup" sorusuna cevap aranır. Bölme işlemindeki bölünen ve bölen için referans alınan bütünler aynıdır. Örneğin, $12 \div 3 = 4$ işlemi için 12, 3'lerin gruplarına bölünüyor ve 4, 3'lerin gruplarının sayısıdır (Roche ve Clarke, 2009).
Tekrarlı çıkarma	Her bir grupta kaç tane olacağını bildiğiniz için gruplama bölmede uygulanabilir. Bölmenin gruplama anlamını açıklamaktadır. Gruplama bölme büyük bir niceliğin içinde verilen niceliğin kaç tane olduğunu belirlemez. Bölüm tam sayı ise tekrarlı çıkarma olarak görülebilir (Fischbein et al., 1985). Çarpma işleminde tekrarlı toplama anlamından yola çıkarak burada da tekrarlı çıkarma yapılarak bölme işlemi tanımlanabiliyor. Örneğin, $18 \div 3$ işleminin cevabı 18'den 3'ün kaç kere çıkarılabileceğini görerek belirlenebilir. Örneğin, $2 \div 1/4$ işlemini $2 - 1/4 - 1/4 - 1/4 - 1/4 - 1/4 - 1/4 - 1/4$ olarak ifade etme.

Ters çevir
çarp

Bölmeyi çarpmanın tersi olarak anlamayı gerektirir. İkinci kesir ters çevrilir ve

çarpılır. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ Örneğin, $6 \div 2$ işlemi $6 \times \frac{1}{2}$ işlemi ile aynı sonucu verir.

Bunu tam sayılı kesirlerde kullanmak için bileşik kesre çevrilmeli, paylar ve

paydalar çarpılmalıdır. Örneğin, $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemi $\frac{7}{4} \times \frac{2}{1}$ olur (Ball, 1990b).

Ters çevir çarp algoritmasını açıklamak için birçok yol vardır:

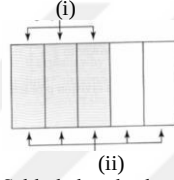
- Ortak payda algoritması

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \div \frac{bc}{bd} = \frac{ad \div bc}{bd \div bd} = \frac{ad \div bc}{1} = ad \div bc = \frac{ad}{bc}$$

- Paylaştırma bölme yorumu

Beckmann (2005) bu durumu bir örnekle açıklamıştır: $\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ işlemi için “Bir

duvarın $\frac{3}{5}$ ’ini boyamak için bir boya kutusunun $\frac{1}{2}$ ’sini kullandın. Bütün duvarı boyamak için kaç kutu boya gerekecektir?” sözel problemi olsun.



Şekle bakacak olursak bir duvarı 5 eşit parçaya böleriz, bunların 3’ünü $\frac{1}{2}$ kutu boya ile boyadın. 3 parçasını boyamak için $\frac{1}{2}$ kutu boya kullandıysan her bir

parçası için $\frac{1}{2} \div 3$ veya $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ kutu boya gereklidir (i). Tamamını boyamak için

gereken boyayı bulmak için bir parçası için gereken boya miktarını 5 ile çarparsın (ii). Bu $\frac{1}{2}$ ’yi $\frac{5}{3}$ ile çarpmak ile aynıdır.

Duvarın $\frac{3}{5}$ ’ini boyamak için boyanın $\frac{1}{2}$ ’si kullanılır.

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \div 3 \text{ veya } \times \frac{1}{3} & \div 3 \text{ veya } \times \frac{1}{3} \end{array}$$

Duvarın $\frac{1}{5}$ ’ini boyamak için boyanın $\frac{1}{6}$ ’sı kullanılır.

$$\begin{array}{cc} \downarrow \times 5 & \downarrow \times 5 \end{array}$$

Duvarın bütünü boyamak için boyanın $\frac{5}{6}$ ’sı kullanılır.

Tek bir adımla çözülecek olursa:

Duvarın $\frac{3}{5}$ ’ini boyamak için boyanın $\frac{1}{2}$ ’si kullanılır.

$$\begin{array}{cc} \downarrow \times \frac{5}{3} & \downarrow \times \frac{5}{3} \end{array}$$

Duvarın bütünü boyamak için boyanın $\frac{5}{6}$ ’sı kullanılır.

- Gruplama bölme yorumu

Armstrong ve Bezuk (1995) bu algoritmayı basit bir şekilde şöyle açıklamıştır:

$$1 \div \frac{2}{1} = \frac{1}{2}; 1 \div \frac{3}{1} = \frac{1}{3}; 1 \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2}; 1 \div \frac{3}{4} = \frac{4}{3}; 1 \div \frac{4}{5} = \frac{5}{4}$$

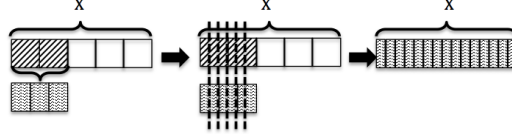
Burada 1'in içinde kaç tane A/B olduğu aranmaktadır ki görüldüğü gibi cevap her zaman B/A olmaktadır. Daha sonraki örneklerde herkesin 1'e bölünen sayının çarpmaya göre tersinin cevabı verdiğini ve bunun 1'in içinde kaç tane olduğunu söylediğini farketmeleri beklenir.

- Paydayı 1 yapma

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Paylaştırma anlamında ortak pay

Bölmenin "paylaştırma" anlamına ilişkin çizilen modelde ortak pay kullanılarak parçalama yapıldığı görülür. Örneğin, $3 \div \frac{2}{5}$ işleminde neyin $\frac{2}{5}$ 'i 3'tür diye bakılır ve 3 ve $\frac{2}{5}$ için bütünlük farklı çizilir. Burada 3 parçaya 2 parça karşılık geldiğinden 3 parçanın her birini 2 parçaya, 2 parçanın her birini 3 parçaya bölme.

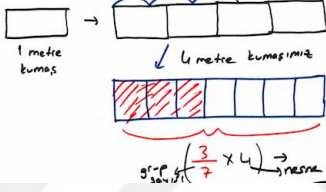


Gruplama anlamında ortak payda

Bölmenin "gruplama" anlamına ilişkin çizilen modelde ortak payda kullanılarak parçalama yapıldığı görülür. $5/6 \div 4/5$ işleminde $5/6$ 'nın içinde kaç tane $4/5$ var diye bakılır ve $5/6$ ve $4/5$ için bütünlük aynı çizilir. Bunların her ikisi de 1 bütündür ve ilkinde 6, ikincisinde 5 eş parçaya bölünmüştür. Burada 6 parçaya 5 parça karşılık geldiğinden 6 parçanın her birini 5 parçaya, 5 parçanın her birini 6 parçaya bölme.



Zorluklar/ Hatalar	Görevlerde model çizirken, problem kurarken, işlem yazarken, gerekçelendirir en veya açıklama yaparken ne tür zorluklarla karşılaştıklarını/ ne tür hatalar yaptıklarını incelemeyi içerir.	Bölen kesir yerine paydasına bölme	Bölen kesir yerine bölen kesrin paydasına bölmeyi yansıtan problem kurma. Örneğin, $1 \frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemi için bir öğretmen adayının kurduğu problem (Ball, 1990): "1 $\frac{3}{4}$ pizza kalmıştır ve ikimiz bunu bölüşmek istiyoruz, o zaman nasıl bölüşebiliriz?"
		Bölme yerine çarpma	Bölme yerine çarpma işlemini yansıtan problem kurma. Bir öğretmen adayı $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$ işlemi için sözel problem kurarken $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$ işlemini kullanıyor (Işık ve Kar, 2012, s.2296): "Ali marketten karışık çerez almıştır. Çerezin ağırlığının $\frac{3}{4}$ 'ü fındıktır. Fındıkların ağırlığının $\frac{2}{5}$ 'i kabuktur. Buna göre aldığı çerezin ne kadarı kabuktur?"
		Bölme yerine oran kullanma	Problem soru kökünün bölmenin herhangi bir anlamı yerine oran üzerine kurulması. Örneğin, $3 \div \frac{3}{5}$ işlemi için bir öğretmen adayının kurduğu problem (Işık, 2011, s.237): "Bir baba ve oğlu akşama kadar çalışarak tarlalarını sürüp bitirmişlerdir. Gün sonunda baba 3 dönüm, oğlu ise $\frac{3}{5}$ dönümlük yer sürmüştür. Babanın sürdüğü kısmın, oğlunun sürdüğü kısma oranı nedir?"
		Tersine çevirme	İşlemdaki sayıları ters kullanarak problem kurma. Örneğin, $6 \div \frac{3}{4}$ işlemi için $\frac{3}{4} \div 6$ işlemine yönelik problem kurma.
		Parça-bütün ilişkisi kuramama	İşlemdaki kesir sayılarının veya çarpımlarının bütünden büyük olduğunu veya bölme işlemi sonunda bölümün bölünen kesir sayısının belirtmiş olduğu çokluktan daha fazlasını gerektirdiğini dikkate almadan problem kurma. Örneğin, $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$ işlemi için bir öğretmen adayının kurduğu problem (Işık ve Kar, 2012, s.2295): "Seda bir pastanın $\frac{3}{4}$ 'ünü ayırmıştır. Ayırdığı bu pastanın $\frac{5}{2}$ 'sini Ayşe'ye vermiştir. Ayşe pastanın ne kadarını almıştır?"
		Kesir sayısına doğal sayı anlamı yükleme	İşlemin sonucu veya işlemdaki sayılar kesir sayısı olmasına rağmen doğal sayı gibi düşünülerek soru kökünü oluşturma. Örneğin, $\frac{7}{8} \div 3 \frac{1}{2}$ işlemi için "7/8 metrelik bir kurdele kaç kişiye eşit olarak paylaşırsa kişi başına 3 $\frac{1}{2}$ metre kurdele düşer?" problemini kurma (Işık ve Kar, 2012, s.2295). Burada bu problemin ifade ettiği işlemin sonucu $\frac{1}{4}$ kişiye karşılık gelmektedir, öte yandan her bir kişiye verilen miktarın bölünenden daha çok miktar olduğu göz ardı edilmiştir ki bu da parça-bütün ilişkisini kuramadığını göstermektedir.
		Çarpmanın operatör ve tekrarlı toplama anlamı ikilemi	$A/B \times C$ işlemi C'nin A/B 'sidir. Operatör görüşüyle A/B kesri C niceliği üzerinde işlem yapar. $C \times A/B$ işlemi bir miktar bütünün A/B 'sinin C grubu veya $A/B + A/B + \dots + A/B$, C tanesinin toplamı olarak göz önüne alınır. Bu iki görüş birbirleriyle karıştırılmaktadır. Örneğin, $\frac{2}{3} \times 6$ işlemi için bir öğretmen adayının kurduğu problem (Matthews ve Ding, 2011, s.190): "6 arkadaş pizza yemeye çıkmışlardır. Her biri $\frac{2}{3}$ 'ünü yemiştir, kaç tane yemişlerdir?" Bu problem $\frac{2}{3} \times 6$ işlemi yerine $6 \times \frac{2}{3}$ işlemini yansıtmaktadır.
		Bölmenin paylaştırma anlamında grup sayısı aranır. Bu iki anlamı birbirleriyle karıştırılmaktadır. Örneğin, $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$ işleminin "her bir grupta kaç" yani paylaştırma anlamı için bir	

		anlamı ikilemi	öğretmen adayının kurduğu problem (Matthews ve Ding, 2011, s.190): “Bir ölçek pasta için 3/4 bardak yağ gerekiyor ve elimizde 1/2 bardak yağ vardır, o halde kaç ölçek yapabiliriz?” Bu problemde her bir gruptaki nesne sayısı yerine grup sayısı bulunmaktadır.
		Bütünü çokluk olarak alma	İşlemde yer almayan bir sayı ilave ederek onun üzerinden işlemi gerçekleştirerek problem kurma veya model çizme. $6 \times \frac{2}{5}$ işlemi için “Ayşe’nin 10 TL’si vardır. Parasının $\frac{2}{5}$ ’i ile kalem alıyor. Bir kalem fiyatının 6 katına da defter alıyor. Ayşe kalem ve deftere ne kadar para ödemiştir?” problemini kurma (Işık, 2011). Burada işlemde yer almayan 10 sayısı ilave edilerek problem kurulmuştur ve işlem bir bütün yerine 10 bütün üzerinden gerçekleştirilmiştir.
		Birim kargaşası	Kesir sayılarının uygun birimle ifade edilemediği ve kesir sayıları için yazılan birimlerin birbiri ile tutarlı olmadığı problemler. Örneğin, $6 \times \frac{2}{5}$ işlemi için “Ezgi yürüyüş parkurunu $\frac{2}{5}$ saatte tamamlamaktadır. Ara vermeden bu parkuru 6 kez yürümesi kaç dakika sürer?” problemini kurma (Işık, 2011, s.234). Bu problemde hem saat hem de dakika birimlerini kullanmıştır, problem sorulana göre $6 \times \frac{2}{5}$ işleminden ziyade 6×24 işlemini yansıtmaktadır.
		Bilgi değiştirme/ekl eme	Problem kurarken veya model çizirken verilen işlemdekinden farklı sayılar kullanmak veya başka bir sayı veya işlem daha kullanmak. Örneğin, $\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}$ işlemi için “15 tane çikolatanın $\frac{2}{3}$ ’ü kalmıştır. Kalan çikolataların $\frac{1}{5}$ ’ini yiyen Ayşe kaç çikolata yemiştir?” problemini kurma.
		Eksik/yetersiz bilgi	Problemi çözmek için yeteri kadar bilgi olmamasıdır. Örneğin, $9 \frac{1}{3} \div 7$ işlemi için “Doğumgünü partisinde 9 $\frac{1}{3}$ pizza vardır. Pizzalar eşit olarak bölünürse kaç kişi yiyebilir?” problemini kurma (Osana ve Royea, 2011, s.340).
		Bilinmeyen olmaması	Problemin sorunun cevabını içermesidir. Örneğin, “6 tane ekmek vardır. Her bir kişi bir ekmeğin $\frac{3}{4}$ ’ünü alıyor. Her bir kişi ne kadar alır?” (Osana ve Royea, 2011, s.340)
		Yeni bütünü 1 bütün alma	Bir kesir ile bir doğal sayının çarpımında yeni bütüne 1 bütün olarak davranma ve yeniden parçalama. Örneğin, $\frac{3}{7} \times 4$ işlemi için bir ÖA’nın çizdiği model: 
		Bütün/Nesne ve grup ikilemi	Burada çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliği göz ardı edilmiştir ve yeni bütün olan 4 bütünü 1 bütün olarak parçalama gerçekleştirmiştir. Burada ÖA’nın yeni bütünü yanlış yorumlaması sonucu modeli bu şekilde çizmesi işlemin sonucunu modelden bulmasına engel olmuştur.
Matematiksel bilgi	Görevlerde model çizerken, problem kurarken, işlem yazarken, gerekleştirir en veya açıklama yaparken kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin anlamalarının ne düzeyde olduğunun incelenmesidir.	İşlemsel bilgi (İB)	Bir görevi tamamlamak için gereken algoritma ya da kuralları uygulamadır (Hiebert & Lefevre, 1986, s.3). Örneğin, $1 \frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ işlemine ilişkin işlemsel bilgi (Forrester ve Chinnappan, 2011, s.264): ➤ Tam sayılı kesri bileşik kesre çevirme ➤ Bölünü ters çevirme ➤ Payları ve paydaları çarpma ➤ Sonuç sadeleştiriyor mu diye bakma
		Kavramsal bilgi (KB)	Matematiksel kurallar ve aralarındaki ilişkilerin özüne hitap eden soyut bilgidir (Hiebert & Lefevre, 1986, s.6) Örneğin, $1 \frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ işlemine ilişkin kavramsal bilgi (Forrester ve Chinnappan, 2011, s. 264): ➤ $1 \frac{1}{2}$’nin içinde kaç tane $\frac{1}{4}$ olduğunu bulma ➤ $1 \frac{1}{2}$’yi $\frac{1}{4}$’lere/çeyreklerle parçalama ve çeyrekleri sayma
		Hem işlemsel hem kavramsal bilgi (İKB)	İşlemsel ve kavramsal bilginin ayrılmaz bir şekilde olduğu durumlardır.