

**T.C.  
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ**

**İKİ BOYUTLU HİPERBOLİK GEOMETRİDE DENKLİK  
PROBLEMLERİ ÜZERİNE**

**YAVUZ GÖKSAL**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**SAMSUN  
2017**

**Her hakkı saklıdır.**

## TEZ ONAYI

Yavuz Göksal tarafından hazırlanan “İki Boyutlu Hiperbolik Geometride Denklik Problemleri Üzerine” adlı tez çalışması 30/06/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** Prof. Dr. Emin Kasap  
Ondokuz Mayıs Üniversitesi  
Matematik Anabilim Dalı

### Jüri Üyeleri

**Başkan** Prof. Dr. Hasan GÜMÜŞ  
Ondokuz Mayıs Üniversitesi  
Fizik Anabilim Dalı

**Üye** Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL  
Ondokuz Mayıs Üniversitesi  
Matematik Anabilim Dalı

**Üye** Prof. Dr. Emin KASAP  
Ondokuz Mayıs Üniversitesi  
Matematik Anabilim Dalı

**Üye** Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU  
Karadeniz Teknik Üniversitesi  
Matematik Anabilim Dalı

**Üye** Yrd. Doç. Dr. Hüsnü Anıl ÇOBAN  
Karadeniz Teknik Üniversitesi  
Matematik Anabilim Dalı

**Yukarıdaki sonucu onaylarım. .../.../2017**

**Prof. Dr. Bahtiyar ÖZTÜRK**  
Enstitü Müdürü

## **ETİK BEYAN**

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

30/06/2017

İmza

Yavuz Göksal

## ÖZET

Doktora Tezi

### İKİ BOYUTLU HİPERBOLİK GEOMETRİDE DENKLİK PROBLEMLERİ ÜZERİNE

Yavuz Göksal

Ondokuz Mayıs Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı  
Danışman: Prof. Dr. Emin Kasap

Bu çalışma 2-boyutlu hiperbolik geometride denklik problemleri üzerine yapılmıştır. Hiperbolik sayılara ait bazı özellikler ifade edilerek,  $H^*$ ,  $W(H^*)$ ,  $H_+$ ,  $W(H_+)$ ,  $B(H)_2$ ,  $W(B(H)_2)$ ,  $L(H)$ ,  $W(L(H))$  gruplarına göre denklik problemleri çözüldü. Bu sonuçları kullanarak  $O(1,1, \mathbb{R})$ ,  $SO(1,1, \mathbb{R})$  ve Lorentz gruplarının denklik problemleri çözüldü. Ayrıca  $L(H)$ ,  $L$ ,  $B(H)_1$ ,  $SO(1,1, \mathbb{R})$ ,  $O(1,1, \mathbb{R})$ ,  $B(H)_2$  grupları arasındaki bağlantılar incelendi.

Haziran 2017, 99 sayfa

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik Geometri, Hiperbolik Sayı, İnvaryant, Lorentz Grup.

## ABSTRACT

Doctoral Dissertation

### ON TWO-DIMENSIONAL HYPERBOLIC GEOMETRIC EQUIVALANCE PROBLEMS

Yavuz Göksal

Ondokuz Mayıs University  
Graduate School of Sciences  
Department of Mathematics  
Supervisor: Prof. Dr. Emin Kasap

In this study, On 2-dimensional Hyperbolic geometric equivalence problems. Some properties of Hyperbolic numbers were shown. Equality problems for groups  $H^*$ ,  $W(H^*)$ ,  $H_+$ ,  $W(H_+)$ ,  $B(H)_2$ ,  $W(B(H)_2)$ ,  $L(H)$ ,  $W(L(H))$  were solved. Using these results, equality problems for  $O(1,1, \mathbb{R})$ ,  $SO(1,1, \mathbb{R})$  and Lorentz groups were solved. Also the haks among the groups  $L(H)$ ,  $L$ ,  $H^*$ ,  $W(H^*)$ ,  $H_+$ ,  $W(H_+)$ ,  $B(H)_2$ ,  $O(1,1, \mathbb{R})$  were examined.

June 2017, 99 pages

Key Words: Hyperbolic Geometry, Hyperbolic Numbers, Invariant, Lorentz Group.

## ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Lisansüstü Eğitimim boyunca engin bilgi ve tecrübelerini zaman mefhumu gözetmeksizin paylaşan, bilimsel açıdan kendimi geliştirebilmem için her türlü imkânı sunan saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Emin Kasap, Prof. Dr. Ayhan Tutar ve Prof. Dr. Djavvat Khadjiev'e en derin saygı ve şükranlarımı sunarım.

Bugünlere gelmemde emeği olan anne ve babama, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen eşime ve kızlarıma teşekkür ederim. Bilimsel anlamda kendileri ile fikir alışverişinde bulunduğum matematik bölümü öğretim elemanlarına teşekkür ederim.

Haziran 2017, Samsun

Yavuz Göksal

## İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET.....	İ
ABSTRACT.....	İİ
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	İİİ
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	İV
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	V
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Tezin Amacı.....	1
1.2 Literatür Özeti.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	3
2.1 $O(1,1, \mathbb{R}), SO(1,1, \mathbb{R})$ Grupları.....	3
2.2 Küme Üzerine Grup Hareketi.....	4
2.3 $G$ -Denk Vektörler Sistemi ve $G$ -Yörünge.....	5
2.4 $O(1,1, \mathbb{R}), SO(1,1, \mathbb{R})$ ve $L$ Gruplarının yörüngeleri.....	5
2.5 $G$ -İnvaryant Fonksiyon.....	7
2.6 $SO(1,1, \mathbb{R})$ Grup Elemanlarının Hiperbolik Fonksiyonlar Yardımıyla İfadesi.....	8
2.7 $L$ Grup Elemanlarının Hiperbolik Fonksiyonlar Yardımıyla İfadesi.....	8
3. HİPERBOLİK SAYILAR.....	9
3.1 Hiperbolik Fonksiyonların Temel Bazı Özellikleri.....	9
3.2 Hiperbolik Sayılarda 1. tip ve 2. tip Mutlak değerler.....	11
3.3 $B(H)_1$ -Denklik Problemi.....	12
3.4 $L(H)$ -Denklik Problemi.....	13
3.5 $B(H)_2$ -Denklik Problemi.....	14
3.6 $L(H), L, B(H)_1, SO(1,1, \mathbb{R}), O(1,1, \mathbb{R}), B(H)_2$ Grupları arasındaki bağlantılar.....	15
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	16
4.1 $\mathbb{R}^{1+1}$ Uzayında Noktalar Sisteminin $G$ – Denklik Problemi ve $\mathbb{H}$ – Uzayında $G$ – Denklik Problemi.....	16
4.2 $\mathbb{R}^{1+1}$ Uzayında $M(\mathbb{R}^{1+1}, \mathbb{R})$ ve $M(\mathbb{H}, \mathbb{R})$ Arasındaki Bağlantılar.....	19
4.3 $H^*$ Grubun Temel Altgrupları.....	26
4.4 $W(H^*)$ Grubun Temel Altgrupları.....	28
4.5 $G$ – Denklik Problemi ve $W(G)$ – Denklik Problemi Arasındaki Bağlantı..	30
4.6 " $m$ " – lilerin $H^*$ – Denklik Problemi.....	32
4.7 $W(H^*)$ – Denklik Probleminin $H^*$ – Denklik Problemi Yardımıyla çözümü.....	41
4.8 " $m$ " – lilerin $H_+^*$ – Denklik Problemi.....	48
4.7 $W(H_+^*)$ – Denklik Probleminin $H_+^*$ – Denklik Problemi Yardımıyla çözümü.....	57
4.10 " $m$ " – lilerin $B(H)_2$ – Denklik Problemi.....	63
4.11 $W(B(H)_2)$ – Denklik Probleminin $B(H)_2$ – Denklik Problemi Yardımıyla çözümü.....	72
4.12 $L$ – Denklik Probleminin $L(H)$ – Denklik Problemi Yardımıyla çözümü.....	79
4.13 İki nokta ve " $m$ " Noktanın $L(H)$ – Denklik Problemi.....	90
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	97

KAYNAKLAR .....	98
ÖZGEÇMİŞ	

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### SİMGELER

$\mathbb{H}$	Hiperbolik Sayılar Halkası
$\delta$	Karesi 1 olan Hiperbolik sayı
$B(H)_1$	$\{A = a + \delta b \in \mathbb{H}:  A _1 = a^2 - b^2 = 1, a, b \in \mathbb{R}\}$ grup
$B(H)_2$	$\{A = a + \delta b \in \mathbb{H}:  A _2 = \sqrt{ a^2 - b^2 } = 1, a, b \in \mathbb{R}\}$ grup
$L(H)$	$\{A = a + \delta b \in \mathbb{H}:  A _1 = a^2 - b^2 = 1, a \geq 1, a, b \in \mathbb{R}\}$ grup
$H^*$	$\{A = (a, b) \in \mathbb{H}: a^2 - b^2 \neq 0\}$ grup
$H_+^* = \delta H_+^*$	$\{A = a + \delta b \in \mathbb{H}:  A _1 = a^2 - b^2 > 0\}$
$H_-^* = \delta H_-^*$	$\{A = a + \delta b \in \mathbb{H}:  A _1 = a^2 - b^2 < 0\}$
$\mathbb{R}_+ \times B_2(H)$	$\{rp \in \mathbb{H}^*: r \in \mathbb{R}_+, p \in B_2(H)\}$
$\mathbb{R}_+ \times B_1(H)$	$\{rp \in \mathbb{H}^*: r \in \mathbb{R}_+, p \in B_1(H)\}$
$L$	Lorentz Grubu
$O(1,1, \mathbb{R})$	(1,1) –Ortogonal Matrisler Grubu
$SO(1,1, \mathbb{R})$	Özel Ortogonal Matrisler Grubu
$x \stackrel{G}{\sim} y$	$x$ elemanı $y$ elemanına $G$ –denktir
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Cismi
$\mathbb{R}_+$	$\{r \in \mathbb{R}: r > 0\}$
$\mathbb{R}^{1+1}$	İç çarpım indeksi 1 olan 2-Boyutlu $\mathbb{R}^2$ Reel Vektör Uzayı

# 1. GİRİŞ

## 1.1 Tezin Amacı

Bu doktora tezi çalışmasında, Hiperbolik sayıların iki ve  $m > 2$  nokta için denklik problemlerinin elde edilmesi amaçlanmaktadır.

Bu amaç doğrultusunda  $\mathbb{H}$  hiperbolik sayılar kümesinin çarpım işlemine göre  $H^*$  ve  $H_+^*$  alt grupları tanımlandı ve incelendi.

$G$ , hiperbolik sayılar kümesinin çarpım işlemine göre bir alt grubu olsun. Bu şekildeki her altgrup için  $\mathbb{R}^{1+1}$  uzayında  $W(G)$  lineer izomorfu tanımlandı.  $G$  ve  $W(G)$  arasındaki bağlantıları incelendi. Özel olarak  $W(L(H)) = L$  Lorentz grubu olduğu gösterildi.

$G = H^*, H_+^*, B(H)_2$  ve  $L(H)$  grupları için hiperbolik sayılar kümesinde keyfi  $m$  ( $m \geq 1$ ) doğal sayısı için  $m$  –lilerin  $G$  –denklik problemi incelendi.

$G$  ve  $W(G)$  gruplar arasındaki bağlantıyı kullanarak,  $W(G) = W(H^*)$ ,  $W(H_+^*)$ ,  $W(B(H)_2)$  ve  $L = W(L(H))$  grupları için  $\mathbb{R}^{1+1}$  uzayında keyfi  $m$  ( $m \geq 1$ ) doğal sayısı için  $m$  – lilerin  $W(G)$  –denklik problemi incelendi.

## 1.2 Literatür Özeti

Hiperbolik sayı olarak adlandırılan sayılar çeşitli kaynaklarda Split karmaşık sayı, perplex sayı, spacetime sayı veya Double karmaşık sayı olarak adlandırılır. Bu şekilde hiperbolik sayı adının en az 18 tane farklı çeşidi vardır.

Split karmaşık sayıların kullanımı James Cockle' nın (1848) tarihli çalışmasına (Cockle, 1848) kadar gider. W. Kingdom Clifford split karmaşık sayıları (Clifford, 1882) çalışmalarında kullanmıştır. Hiperbolik sayılar Lie ve Scheffers'in (Lie ve Scheffers, 1893) çalışmasında da kullanıldı.

Hiperbolik sayılar iki boyutlu uzay-zaman geometrisiyle bağlantılı olduğu I. M. Yaglom'un (Yaglom, 1968) kitabında verilmiştir. Bu bağlantı, P. Fjelstad'ın makalesinde (Fjelstad, 1986) iki boyutlu özel izafiyet teorisine genişletilmiştir ve F.

Catoni ve P. Zampetti'nin (Catoni ve Zampetti, 2000) makalesinde özel izafiyet teorisini genelleştirmek için kullanılmıştır.

B. Chabat' in (Chabat, 1990) kitabında hiperbolik sayılar ultrasonic phenomena'yi incelemek için kullanılmıştır.

G. Sobczyk yaptığı çalışmada (Sobczyk, 1995) hiperbolik sayılar için modül, iç-çarpım, matris gösterimi ve grafikleri hakkında bilgi sundu. Hiperbolik sayıların hiperbolik fonksiyonlar yardımıyla gösteriminin ifadesini verdi.

F. Catoni, R. Cannata, V. Catoni, P. Zampetti yaptıkları çalışmalarda (Catoni vd, 2003) hiperbolik sayıların hiperbolik fonksiyonlar yardımıyla ifadesini verdiler. Hiperbolik sayının grafiksel gösterimini sundular.

D. Boccaletti, E. Nichelatti, F. Catoni, R. Cannata, V. Catoni, P. Zampetti yazdıkları kitapta (Boccaletti vd, 2008) hiperbolik sayılar hakkında geniş bilgi sundular. Hiperbolik sayıların cebirsel özellikleri ve hiperbolik sayıların 2- boyutlu pseudo-öklid geometriye, trigonometriye ve fiziğe uygulamaları (Birman ve Nomizu, 1984; Catoni vd, 2004; Fjelstad ve Gal, 2001; Hazewinkle, 1994; Rochon ve Shapiro, 2004; Ulrych, 2005; Yaglom, 1979) çalışmalarda verilmiştir.

(Göksal, 2011) ve (Ören, 2004) tezlerinde hiperbolik sayılar teorisinde ortaya çıkmış olan  $L(H), B(H)_1, SO(1,1, \mathbb{R}), B(H)_2, O(1,1, \mathbb{R})$  gruplarını incelediler.  $L(H), B(H)_1, B(H)_2$  gruplarının  $\mathbb{H}$  hiperbolik sayılar kümesinde yörüngeleri bulundu.  $L, SO(1,1, \mathbb{R}), O(1,1, \mathbb{R})$  gruplarının  $\mathbb{R}^{1+1}$  uzayındaki yörüngeleri bulundu.  $SO(1,1, \mathbb{R}), O(1,1, \mathbb{R})$  gruplarının  $\mathbb{R}^{1+1}$  uzayındaki noktaların invaryantları incelendi.

## 2. GENEL BİLGİLER

### 2.1 İki boyutlu pseudo Öklid uzayı, $O(1, 1)$ ve $SO(1, 1)$ Grupları

$\mathbb{R}$  reel sayılar cismi olsun. İki boyutlu  $\mathbb{R}^{1+1}$  pseudo-Öklid uzayı, iç çarpımı  $\phi(x, y) = \langle x, y \rangle = x_1y_1 - x_2y_2$  ile verilen indeksi bir olan lorentz iç çarpımlı iki boyutlu reel uzaydır.

Tanım 2.1.1 :  $\mathbb{R}^{1+1}$  reel vektör uzayı olmak üzere  $\forall x, y \in \mathbb{R}^{1+1}$  için  $\langle F(x), F(y) \rangle = \langle x, y \rangle$  olan  $F: \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R}^{1+1}$  dönüşümüne ortogonal dönüşüm denir. Ortogonal dönüşümler kümesini  $O(1,1)$  ile gösterelim (Ören, 2004).

Önerme 2.1.1:  $F: \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R}^{1+1}$  keyfi ortogonal dönüşüm ise,  $F$  lineerdir (Ören, 2004).

Tanım 2.1.2 :  $\phi: \mathbb{R}^{1+1} \times \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{1+1} \times \mathbb{R}^{1+1}$  indeksi bir olan lorentz iç çarpım olsun.  $\varphi: \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(v) = \phi(v, v) = \langle v, v \rangle = v_1^2 - v_2^2$  ile tanımlanan dönüşüme  $\mathbb{R}^{1+1}$  üzerinde  $\varphi$ -iç çarpımıyla verilen kuadratik form denir (Ören, 2004).

Önerme 2.1.2 :  $F: \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R}^{1+1}$  bir lineer dönüşüm olsun. Bu taktirde, aşağıdakiler denktir;

i)  $F$ , ortogonal dönüşümdür.

ii)  $F$ , kuadratik formu korur, yani keyfi  $x \in \mathbb{R}^{1+1}$  için  $\varphi(F(x)) = \varphi(x)$ ' dir.

iii)  $F$ ,  $\mathbb{R}^{1+1}$ ' nin her ortonormal tabanını  $\mathbb{R}^{1+1}$ ' nin başka ortonormal tabanına taşır (Ören, 2004).

Önerme 2.1.3:  $O(1,1) = \{F: \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R}^{1+1}: \langle F(x), F(y) \rangle = \langle x, y \rangle\}$ ,  $F \in O(1,1) \Leftrightarrow$

$$\{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : A, F' \text{ nin } e_1 \text{ ve } e_2 \text{ tabana göre matrisi, } a, b, c, d \in \mathbb{R}, A^t \eta A = \eta\}$$

şeklindedir, burada  $A^t, A'$  nin transpozsidir (Ören, 2004).

Önerme 2.1.4:  $F \in O(1,1)$  olsun. Eğer  $\{e_1, e_2\}$ , indeksi bir olan ortonormal taban ise,  $\{F(e_1), F(e_2)\}'$  de indeksi bir olan ortonormal tabandır(Ören, 2004).

Önerme 2.1.5:  $\{e_1, e_2\}$  ve  $\{f_1, f_2\}$  indeksi bir olan ortonormal tabanlar olmak üzere  $F(e_i) = f_i, i, j = 1, 2$  olacak şekilde bir tek  $F \in O(1,1)$  vardır (Ören, 2004).

Sonuç 2.1.1: Keyfi  $A \in O(1,1)$  için  $\det A = \pm 1$ ' dir.

Önerme 2.1.6 :  $O(1,1)$  matrislerde çarpma işlemine göre bir gruptur (Ören, 2004).

Önerme 2.1.7 :  $SO(1,1) = \{A \in O(1,1): \det A = 1\}$  kümesi matrislerde çarpma işlemine göre gruptur (Ören, 2004).

## 2.2. Küme Üzerinde Grup Hareketi

Tanım 2.2.1:  $G$  bir grup ve  $E$  bir küme olsun. Bir  $\mu: G \times E \rightarrow E$  dönüşümü verilsin.  $g \in G, x \in E$  için  $\mu(g, x) = gx$  şeklinde yazalım.  $\forall g_1, g_2 \in G, x \in E$  için;

i)  $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$

ii)  $e, G'$  nin birimi olmak üzere  $ex = x$

koşulları sağlanıyorsa  $\mu$  ye  $G'$  nin  $E$  üzerindeki hareketi(etkisi) denir (Ören, 2004).

Örnek 2.2.1:  $O(1,1)$  grubunun  $\mathbb{R}^{1+1} \times \mathbb{R}^{1+1}$  üzerindeki hareketini,  $g \in O(1,1)$  ve

$(x, y) \in \mathbb{R}^{1+1} \times \mathbb{R}^{1+1}$  olmak üzere,  $g(x, y) = (gx, gy)$  olarak tanımlayalım.

Bunun hareket olduğunu gösterelim. Gerçekten;

a)  $\forall g_1, g_2 \in O(1,1)$  ve  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{1+1} \times \mathbb{R}^{1+1}$  için  $g_1 g_2 \in O(1,1)$  olacağından;  
 $(g_1 g_2)(x, y) = ((g_1 g_2)x, (g_1 g_2)y) = (g_1(g_2 x), g_1(g_2 y)) = g_1(g_2 x, g_2 y)$   
 $= g_1(g_2(x, y))$  elde edilir.

b)  $I \in O(1,1)$  birim eleman olmak üzere  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{1+1} \times \mathbb{R}^{1+1}$  için  
 $I(x, y) = (Ix, Iy) = (x, y)$  olup istenen sağlanır.

Benzer şekilde  $H \subset O(1,1)$  altgrubunun  $\mathbb{R}^{1+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{1+1}$  ( $m$  tane) üzerindeki hareketi,  $g \in H \subset O(1,1), x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{1+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{1+1}$  olmak üzere,  $g(x_1, \dots, x_m) = (gx_1, \dots, gx_m) \in \mathbb{R}^{1+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{1+1}$  ile verelim. Bunun hareket olduğu benzer şekilde gösterilir.

Sırasıyla verilen  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^{1+1}$  elemanlar dizisine  $m$  –li diyelim ve bu diziyi  $(x_1, \dots, x_m)$  şeklinde veya  $\{x_1, \dots, x_m\}$  şeklinde yazalım ( $m > 1$  durumunda  $\{x_1, \dots, x_m\}$  ifadesi  $m$  –li anlamda kullanıldığında “ $m$  –li” kelimesi kullanılacak).

### 2.3. G-Denk Vektörler Sistemi ve G-Yörünge

Tanım 2.3.1:  $G$  bir grup olmak üzere,  $G$ 'nin  $\mathbb{R}^{1+1}$  üzerindeki bir etkisi verilsin.  $x \in \mathbb{R}^{1+1}, y \in \mathbb{R}^{1+1}$  olsun. Eğer  $\exists g \in G$  öyle ki  $y = gx$  ise  $x$  eleman  $y$ 'ye  $G$ -denktir denir ve bu durum  $x \stackrel{G}{\sim} y$  ile gösterilir (Ören, 2004).

İki vektör ailesinin denkliği ise şu şekilde verilir.  $\{x_\tau, \tau \in T\}$  ve  $\{y_\tau, \tau \in T\}$ ,  $\mathbb{R}^{1+1}$  de iki vektör ailesi olsun.  $\exists g \in G$  için  $y_\tau = gx_\tau, \forall \tau \in T$  ise bu vektör ailelerine  $G$ -denktir denir ve  $\{x_\tau, \tau \in T\} \stackrel{G}{\sim} \{y_\tau, \tau \in T\}$  ile gösterilir.

$\{x_\tau, \tau \in T\}$  ve  $\{y_\tau, \tau \in T\}, \mathbb{R}^{1+1}$  de iki vektör ailesi olsun.  $\exists g \in K$  için  $y_\tau = gx_\tau, \forall \tau \in T$  ise bu vektör ailelerine  $K$ -denktir denir ve  $\{x_\tau, \tau \in T\} \stackrel{K}{\sim} \{y_\tau, \tau \in T\}$  ile gösterilir.

Önerme 2.3.1:  $G$  grubunun  $\mathbb{R}^{1+1}$  üzerindeki etkisi verilmek üzere,  $x, y \in \mathbb{R}^{1+1}$  için  $x \stackrel{G}{\sim} y$  bir denklik bağıntısıdır (Ören, 2004).

Tanım 2.3.2: Bir  $G$  grubunun bir  $E$  kümesi üzerinde etkisi verilsin. Bir  $x \in E$  noktasının  $G$  yörüngesi  $Gx = \{gx : g \in G\}$  olarak verilir (Ören, 2004).

Örnek 2.3.1 :  $G = O(1,1)$  ve  $E = \mathbb{R}^{1+1}$  alalım.  $O(1,1)$ 'nin  $\mathbb{R}^{1+1}$  üzerindeki etkisini,  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(1,1)$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+1}$  olmak üzere, matrislerin  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  çarpımı şeklinde tanımlayalım. Bu etkiye  $O(1,1)$ 'nin  $\mathbb{R}^{1+1}$  üzerindeki etkisi diyelim. Bir  $x \in \mathbb{R}^{1+1}$  noktasının  $O(1,1)$  yörüngesi

$$O(1,1)(x) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid |a| \neq |b|, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

şeklindedir.

Not: 1) Yörüngeler,  $G$ -denklik bağıntısının denklik sınıflarıdır.

2) İki yörüngenin arakesiti boş küme değilse yörüngeler çakışır. Eğer iki yörüngenin arakesiti boş küme ise, bu yörüngeler farklı yörüngelerdir.

### 2.4. $O(1,1)$ , $SO(1,1)$ ve $L$ Gruplarının Yörüngeleri

$O(1,1)$  ve  $SO(1,1)$  gruplarının  $\mathbb{R}^{1+1}$  üzerindeki doğal etkilerini alalım. Verilen  $k \in \mathbb{R}$  için  $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{1+1} : x_1^2 - x_2^2 = k\}$  kümesini  $Y_k$  ile gösterelim.

Önerme 2.4.1: i) Keyfi  $k \neq 0$  için  $Y_k$  kümesi  $O(1,1)$  grubunun yörüngesidir.

ii)  $k = 0$  için  $Y_0 \setminus \{(0,0)\}$  kümesi  $O(1,1)$  grubunun yörüngesidir.

iii)  $\{(0,0)\}$  noktası  $O(1,1)$  grubunun yörüngesidir.

iv)  $O(1,1)$  grubunun i),ii) ve iii)' de verilen yörüngelerinden farklı yörüngesi yoktur(Ören, 2004).

$k = 0$  için  $\{x = (x_1, x_2) \in Y_0 \setminus \{(0,0)\}: x_1 = x_2\}$  kümesini  $Y_{00}$  ve  $\{x = (x_1, x_2) \in Y_0 \setminus \{(0,0)\}: x_1 = -x_2\}$  kümesini  $Y_{01}$  ile gösterelim.

Önerme 2.4.2: i) Keyfi  $k \neq 0$  için  $Y_k$  kümesi  $SO(1,1)$  grubunun yörüngesidir.

ii)  $k = 0$  için  $Y_{00}$  kümesi  $SO(1,1)$  grubunun yörüngesidir.

iii)  $k = 0$  için  $Y_{01}$  kümesi  $SO(1,1)$  grubunun yörüngesidir.

iv)  $\{(0,0)\}$  noktası  $SO(1,1)$  grubunun yörüngesidir.

v)  $SO(1,1)$  grubunun i),ii), iii) ve iv)' de verilen yörüngelerinden farklı yörüngesi yoktur (Ören, 2004).

$k > 0$  için:  $Y_{k0} = \{x = (x_1, x_2) \in Y_k: x_1 > 0\}$  ve  $Y_{k1} = \{x = (x_1, x_2) \in Y_k: x_1 < 0\}$ ,

$k < 0$  için:  $Y_{k0} = \{x = (x_1, x_2) \in Y_k: x_2 > 0\}$  ve  $Y_{k1} = \{x = (x_1, x_2) \in Y_k: x_2 < 0\}$ ,

$k = 0$  için:  $Y_{000} = \{x = (x_1, x_2) \in Y_{00}: x_1 > 0\}$ ,  $Y_{001} = \{x = (x_1, x_2) \in Y_{01}: x_1 < 0\}$

$Y_{010} = \{x = (x_1, x_2) \in Y_{01}: x_2 > 0\}$ ,  $Y_{011} = \{x = (x_1, x_2) \in Y_{01}: x_2 < 0\}$  kümelerini gösterelim (Ören, 2004).

$$L = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \det A = a^2 - b^2 = 1 \text{ ve } a \geq 1\} \text{ altkümesini alalım.}$$

Önerme 2.4.2:  $L$  altkümesi  $O(1,1)$  grubu altında matrislerde çarpma işlemine göre altguptur (Ören, 2004).

Önerme 2.4.3: i) Keyfi  $k \neq 0$  için  $Y_{k0}$  ve  $Y_{k1}$  kümeleri  $L$  grubunun yörüngeleridir.

ii)  $k = 0$  için  $Y_{000}, Y_{001}, Y_{010}, Y_{011}$  kümeleri  $L$  grubunun yörüngeleridir.

iii)  $\{(0,0)\}$  noktası  $L$  grubunun yörüngesidir.

iv)  $L$  grubunun i),ii) ve iii)' de verilen yörüngelerinden farklı yörüngesi yoktur (Ören, 2004).

## 2.5. $G$ – İnvaryant Fonksiyonlar

Tanım 2.5.1:  $G$  bir grup olmak üzere,  $G$ 'nin  $\mathbb{R}^{1+1}$  üzerindeki etkisini alalım.  $f, \mathbb{R}^{1+1}$  üzerinde tanımlı sıfırdan farklı bir reel değerli fonksiyon olsun.  $\forall g \in G$  için  $f(gx) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}^{1+1}$  ise  $f$ , fonksiyona  $G$ -invaryant denir (Ören, 2004).

Tüm  $G$ -invaryant polinomlar kümesi  $\mathbb{R}[x]^G$  ile, tüm  $G$ -invaryant rasyonel fonksiyonlar kümesi  $\mathbb{R}(x)^G$  ile gösterilir.

*Örnek 2.5.1:*  $O(1,1)$  grubunun  $\mathbb{R}^{1+1}$  üzerindeki doğal etkisini alalım.  $x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+1}$  olmak üzere  $|\det(x_1, x_2)| = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{vmatrix}$  alınırsa bu  $O(1,1)$  invaryanttır. Gerçekten,  $\forall g \in O(1,1)$  için,  $|\det(gx_1, gx_2)| = |\det g \det(x_1, x_2)| = |\det g| |\det(x_1, x_2)| = |\det(x_1, x_2)|$  elde edilip istenen sağlanır.

$x \stackrel{G}{\sim} y$  durumunda  $\exists g \in G$  için  $y = gx$  tir.  $\forall f, G$ -invaryant polinomu için  $f(y) = f(gx) = f(x)$  olduğundan  $f(y) = f(x)$ ' dir. Tersine,  $\forall f, G$ -invaryant polinomu için  $f(y) = f(x)$  ise  $y, x$ ' e  $G$  – denk olmayabilir.

Tanım 2.5.2:  $\mathbb{R}$  reel sayılar cismi,  $V$ -  $\mathbb{R}$  üzerinde  $n \geq 1$  boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve  $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$  olmak üzere

$$Gr(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{pmatrix}$$

matrisine Gram matrisi denir (Ören, 2004).

*Örnek 2.5.2:*  $O(1,1)$  grubunun  $\mathbb{R}^{1+1}$  üzerindeki hareketini alalım.  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{1+1}$  olmak üzere  $\det Gr(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle \end{pmatrix}$  alınırsa bu  $O(1,1)$  invaryanttır. Gerçekten,  $\forall g \in O(1,1)$ :

$$\begin{aligned} \det Gr(gx_1, gx_2) &= \det \begin{pmatrix} \langle gx_1, gx_1 \rangle & \langle gx_1, gx_2 \rangle \\ \langle gx_2, gx_1 \rangle & \langle gx_2, gx_2 \rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle \end{pmatrix} \\ &= \det Gr(x_1, x_2) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Tanım 2.5.3:  $G \subset O(1,1)$  bir alt grup ve  $f, \mathbb{R}^{1+1}$  üzerinde tanımlı sıfırdan farklı bir fonksiyon olsun.  $\exists \lambda(h) (h \in G)$  fonksiyonu için  $f(hx) = \lambda(h)f(x), \forall h \in G, \forall x \in \mathbb{R}^{1+1}$  ise  $f$ ' ye nispi invaryant denir. Burada  $\lambda(h)$  fonksiyonuna ise  $f$ ' nin çarpanı denir (Ören, 2004).

$x \in \mathbb{R}^{1+1}, h_1, h_2 \in G$  olmak üzere  $f, \lambda$  çarpanına sahip, sıfırdan farklı bir nispi invaryant fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} f((h_1 h_2)x) &= f(h_1(h_2 x)) = \lambda(h_1)f(h_2 x) = \lambda(h_1)\lambda(h_2)f(x) \\ f((h_1 h_2)x) &= \lambda(h_1 h_2)f(x) \end{aligned}$$

ve  $f$  sıfırdan farklı olduğundan  $\lambda(h_1)\lambda(h_2) = \lambda(h_1 h_2), \forall h_1, h_2 \in \mathbb{H}$  elde edilir. Yani çarpan bu özelliği sağlar.

*Örnek 2.5.3:*  $G = O(1,1)$  ve  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{1+1}$  olsun.  $O(1,1)$ 'in  $\mathbb{R}^{1+1}$  üzerindeki etkisi örnek 2.5.1'deki gibi olmak üzere  $f(x_1, x_2) = \det(x_1, x_2)$  polinomunu örnek 2.5.1'deki gibi alalım.  $\forall g \in G$  için  $f(gx_1, gx_2) = \det(gx_1, gx_2) = \det g \det(x_1, x_2)$  olup  $\lambda(g) = \det g$  olur.  $\det(g_1 g_2) = \det g_1 \det g_2$  olduğundan, determinant,  $O(1,1)$  grubuna göre nispi invaryanttır.

## 2.6. $O(1, 1)$ ve $SO(1, 1)$ Grup Elemanların Hiperbolik Fonksiyonlar Yardımıyla İfadesi

Önerme 2.6.1:  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(1,1) \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \det A = 1$  veya  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \det A = -1$ ' dir (Ören, 2004).

Önerme 2.6.2:  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(1,1) \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \det A = a^2 - b^2 = 1$ ' dir (Ören, 2004).

Önerme 2.6.3:  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in SO(1,1)$  ise  $|a| \geq 1$ ' dir (Ören, 2004).

## 2.7. $L$ Grup Elemanların Hiperbolik Fonksiyonlar Yardımıyla İfadesi

Önerme 2.7.1:  $A \in SO(1,1)$  için;

1) Eğer  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \det A = a^2 - b^2 = 1$  ve  $a \geq 1$  ise tek  $\alpha \in \mathbb{R}$  vardır, öyle ki,

$a = \cosh \alpha, b = \sinh \alpha$  olup  $A = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha \end{pmatrix}$ ' dir (Ören, 2004).

2) Eğer  $A = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha \end{pmatrix}$  şeklinde bir matris ise  $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$  ve  $\cosh \alpha \geq 1$ ' dir (Ören, 2004).

### 3.HİPERBOLİK SAYILAR

#### 3.1. Hiperbolik Sayıların Temel Bazı Özellikleri

Tanım 3.1.1:  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $A = (a, b)$  ikilisine sıralı ikili denir.

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b): a, b \in \mathbb{R}\}$  olmak üzere,  $\forall h, k \in \mathbb{R}^2, h = (x, y), k = (z, w)$  ve  $x, y, z, w \in \mathbb{R}$  için  $x = z, y = w \Leftrightarrow h = k$  denir.

Şimdi de  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\}$  üzerinde toplama ve çarpma işlemini tanımlayalım.

Tanım 3.1.2:  $\oplus: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  iç işlemleri  $h = (x, y), k = (z, w) \in \mathbb{R}^2$  olmak üzere  $h \oplus k = (x, y) \oplus (z, w) = (x + z, y + w)$  şeklinde tanımlanır ve  $\mathbb{R}^2$ 'deki toplama işlemi olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.3:  $\odot: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  iç işlemleri  $h = (x, y), k = (z, w) \in \mathbb{R}^2$  olmak üzere  $h \odot k = (x, y) \odot (z, w) = (xz + yw, xw + yz)$  şeklinde tanımlanır ve  $\mathbb{R}^2$ 'deki çarpma işlemi olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.4:  $\mathbb{R}$  Reel sayılar kümesi olmak üzere  $\mathbb{R}^2$  kümesi üzerinde Tanım 3.1.2 ve Tanım 3.1.3' deki gibi toplama ve çarpma işlemleri tanımlanmış ise  $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$  kümesine Hiperbolik sayılar kümesi denir ve  $\mathbb{H}$  ile gösterilir (Göksal, 2011).

Teorem 3.1.1:  $\mathbb{H}$  kümesi birimli ve değişmeli halkadır (Göksal, 2011).

Teorem 3.1.2:  $\mathbb{H}$  kümesi bir cisim değildir (Göksal, 2011).

Not:  $\oplus$  işlemleri yerine "+" ve  $\odot$  işlemi yerine "." kullanılacaktır.

Teorem 3.1.3:  $\mathbb{H}$  hiperbolik sayılar halkası  $\mathbb{R}$  reel sayılar cismine izomorf bir alt kümeyi alt cisim olarak kapsar (Göksal, 2011).

Tanım 3.1.5: Teorem 3.1.3' ün sonucu olarak  $(a, 0)$  hiperbolik sayısının izomorf olan  $a$  reel sayısı olarak gösterilecek yani;  $(a, 0) = a$  alınacaktır.

Tanım 3.1.6: Bir  $A = (a, b) \in \mathbb{H}$  hiperbolik sayısında " $a$ " reel sayısına  $A$ 'nin reel kısmı, " $b$ " reel sayısına  $A$ 'nin hiperbolik kısmı denir ve  $Re(A) = a, Hp(A) = b$  şeklinde yazılır (Göksal, 2011).

Tanım 3.1.7:  $(0,1)$  hiperbolik sayısı  $\delta$  ile gösterilecektir yani;  $(0,1) = \delta$  alınacak ve hiperbolik birim olarak adlandırılacak (Göksal, 2011).

Sonuç 3.1.1:  $\delta^2 = 1$ 'dir.

Teorem 3.1.4:  $A = (a, b) \in \mathbb{H}$  için  $A = a + \delta b$  şeklinde tek türlü yazılabilir yani;  $(a, b) = a + \delta b$ 'ye eşittir (Göksal, 2011).

Tanım 3.1.8:  $\lambda \in \mathbb{R}$  ile  $A \in \mathbb{H}$  sayısının çarpımı  $\mathbb{R} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$  şeklindeki sayıya bir hiperbolik sayının bir reel skaler ile çarpımı denir (Göksal, 2011).

Teorem 3.1.9:  $a, b \in \mathbb{R}$  olmak üzere,  $M, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$  formundaki matrisler kümesi olsun.  $M'$  de matrislerdeki  $(+)$  ve  $(\cdot)$  işlemlerini göz önüne alalım.  $(M, +, \cdot)$  işlemlerine göre  $M$  birimli değişmeli bir halkadır ve  $W: H \rightarrow M, W(a + \delta b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$  dönüşümü bir halka izomorfizmasıdır (Göksal, 2011).

Önerme 3.1.1:  $A = (a, b), B = (c, d) \in \mathbb{H}$  olsun. Bu takdirde;  $AX = B, X = (x, y) \in \mathbb{H}$  denkleminin  $\mathbb{H}$ 'da çözümü vardır  $\Leftrightarrow$  aşağıdaki dört şarttan herhangi biri sağlanır:

- 1)  $|a| \neq |b|$  ve  $\forall c, d \in \mathbb{R}$ ,
- 2)  $a = b, c = d, a \neq 0$ ,
- 3)  $a = -b, c = -d, a \neq 0$ ,
- 4)  $a = b = c = d = 0$  (Göksal, 2011).

Önerme 3.1.2:  $A = a + \delta b \in \mathbb{H}, a, b \in \mathbb{R}$  olsun. Bu takdirde  $A^{-1} \in \mathbb{H}$  mevcuttur  $\Leftrightarrow |a| \neq |b|$ 'dir (Göksal, 2011).

Önerme 3.1.3: Hiperbolik sayılar halkasının sadece dört ideali vardır ve onlar şunlardır:

- 1)  $A = \{0\}$ ,
- 2)  $A = \mathbb{H}$ ,
- 3)  $A = \{r(1 + \delta): r \in \mathbb{R}\}$ ,
- 4)  $A = \{r(1 - \delta): r \in \mathbb{R}\}$ 'dir (Göksal, 2011).

Önerme 3.1.4:  $A = a + \delta b, a^2 - b^2 \neq 0$  hiperbolik sayı olsun. Bu takdirde bu hiperbolik sayının hiperbolik fonksiyonlar yardımı ile ifadesi şöyledir:

1)  $a^2 - b^2 = c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$  ve  $a \geq c$  ise tek bir  $\alpha \in \mathbb{R}$  mevcut öyle ki  $A = c(\cosh \alpha + \delta \sinh \alpha)$  dir.

2)  $a^2 - b^2 = c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$  ve  $a \leq -c$  ise tek bir  $\alpha \in \mathbb{R}$  mevcut öyle ki  $A = -c(\cosh \alpha + \delta \sinh \alpha)$  dir.

3)  $a^2 - b^2 = -c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$  ve  $b \geq c$  ise tek bir  $\alpha \in \mathbb{R}$  mevcut öyle ki  $A = \delta c(\cosh \alpha + \delta \sinh \alpha)$  dir.

4)  $a^2 - b^2 = -c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$  ve  $b \leq -c$  ise tek bir  $\alpha \in \mathbb{R}$  mevcut öyle ki  $A = -\delta c(\cosh \alpha + \delta \sinh \alpha)$  dir (Göksal, 2011).

Not: Önerme 3.1.4' de verilen hiperbolik sayıların hiperbolik fonksiyonlar yardımıyla ifadesi kompleks sayıların Euler formülünün benzeridir.

Önerme 3.1.5:  $A = a + \delta b$  hiperbolik sayısı  $a^2 - b^2 = 0$  şartını sağlasın. Bu takdirde bu sayı için  $a + \delta b = c(\cosh \alpha + \delta \sinh \alpha)$  veya  $a + \delta b = c\delta(\cosh \alpha + \delta \sinh \alpha)$  olacak şekilde  $c \in \mathbb{R}$  ve  $\alpha \in \mathbb{R}$  sayıları mevcut değildir. Yani bu hiperbolik sayı için Euler formülünün benzeri mevcut değildir (Göksal, 2011).

## 3.2. Hiperbolik Sayılarda 1. tip ve 2. tip Mutlak Değerler

Tanım 3.2.1:  $A = (a, b) \in \mathbb{H}$  hiperbolik sayılarının bütününe hiperbolik düzlem denir. Her bir  $(a, b)$  ikilisine hiperbolik düzlemin bir noktası veya hiperbolik sayı denir.

Tanım 3.2.2:  $a^2 - b^2$  reel sayısına  $A = a + \delta b$  hiperbolik sayısının 1. Tip mutlak değeri denir ve  $|A|_1 = |a + \delta b|_1$  şeklinde gösterilir. Şu halde  $|A|_1 = |a + \delta b|_1 = a^2 - b^2$  olur (Göksal, 2011).

Teorem 3.2.1:  $\forall A \in \mathbb{H}$  için  $|A|_1 = |a + \delta b|_1 = 0 \Leftrightarrow |a| = |b|$ ' dir (Göksal, 2011).

Sonuç 3.2.1:  $\forall A \in \mathbb{H}, A \neq 0$ 'nin tersi vardır  $\Leftrightarrow |A|_1 \neq 0$  (Göksal, 2011).

Teorem 3.2.3:  $\forall A, B \in \mathbb{H}, B = c + \delta d$  ve  $|c| \neq |d|$  için  $\left| \frac{A}{B} \right|_1 = \frac{|A|_1}{|B|_1}$  eşitliği sağlanır (Göksal, 2011).

Tanım 3.2.3:  $\sqrt{|a^2 - b^2|}$  reel sayısına  $A = a + \delta b$  hiperbolik sayısının 2. tip mutlak değeri denir ve  $|A|_2 = |a + \delta b|_2$  şeklinde gösterilir. Şu halde  $|A|_2 = |a + \delta b|_2 = \sqrt{|a^2 - b^2|}$  olur (Göksal, 2011).

Teorem 3.2.4:  $\forall A \in \mathbb{H}$  için  $|A|_2 = |a + \delta b|_2 = 0 \Leftrightarrow |a| = |b|$ ' dir (Göksal, 2011).

Teorem 3.2.5:  $\forall A, B \in \mathbb{H}$  için  $|AB|_2 = |A|_2|B|_2$  eşitliği sağlanır (Göksal, 2011).

Teorem 3.2.6:  $\forall A, B \in \mathbb{H}$ ,  $B = c + \delta d$  ve  $|c| \neq |d|$  için  $\left| \frac{A}{B} \right|_2 = \frac{|A|_2}{|B|_2}$  eşitliği sağlanır (Göksal, 2011).

Teorem 3.2.7:  $A \in \mathbb{H}$  ve  $|A|_1 = 1$  koşulunu sağlayan elemanların kümesini  $B(H)_1$  ile gösterelim.  $B(H)_1 = \{A = (a, b) \in \mathbb{H}: |A|_1 = a^2 - b^2 = 1\}$ ,  $\cdot$ , işlemine göre değişmeli gruptur (Göksal, 2011).

Teorem 3.2.8:  $A \in \mathbb{H}$  ve  $|A|_2 = 1$  koşulunu sağlayan elemanların kümesini  $B(H)_2$  ile gösterelim.  $B(H)_2 = \{A = (a, b) \in \mathbb{H}: |A|_2 = \sqrt{|a^2 - b^2|} = 1\}$ ,  $\cdot$ , işlemine göre değişmeli gruptur (Göksal, 2011).

Teorem 3.2.7:  $L(H) = \{A = a + \delta b \in \mathbb{H}, |A|_1 = a^2 - b^2 = 1, a \geq 1\}$  olmak üzere  $L(H)$ , çarpım işlemine göre değişmeli gruptur (Göksal, 2011).

Önerme 3.2.1:  $H^* = \{A = (a, b) \in \mathbb{H}: a^2 - b^2 \neq 0\}$ ,  $\cdot$ , işlemine göre değişmeli gruptur (Göksal, 2011).

Önerme 3.2.2:  $L(H) \subset B(H)_1 \subset B(H)_2 \subset H^*$ ,  $B(H)_1, B(H)_2$ ' nin alt grubudur ve  $B(H)_1 \neq B(H)_2$  dir (Göksal, 2011).

### 3.3. $B(H)_1$ -Denklik Problemi

Tanım 3.3.1:  $h_1, h_2 \in \mathbb{H}$  olsun. Eğer  $h_2 = gh_1$  olacak şekilde  $g \in B(H)_1$  varsa  $h_1$  ve  $h_2$  elemanları  $B(H)_1$ ' e göre denk denir ve  $h_1 \stackrel{B(H)_1}{\sim} h_2$  şeklinde gösterilir (Göksal, 2011).

Önerme 3.3.1:  $x \stackrel{B(H)_1}{\sim} y$  bağıntısı bir denklik bağıntısıdır (Göksal, 2011).

Önerme 3.3.2:  $A, B \in \mathbb{H}$  ve  $A \stackrel{B(H)_1}{\sim} B$  ise  $|A|_1 = |B|_1$  dir (Göksal, 2011).

Önerme 3.3.3:  $A, B \in \mathbb{H}, |A|_1 \neq 0, |B|_1 \neq 0$  ve  $|A|_1 = |B|_1$  ise  $A \stackrel{B(H)_1}{\sim} B$  dir (Göksal, 2011).

Önerme 3.3.4:  $A = x + \delta y \neq 0, B = z + \delta w \neq 0 \in \mathbb{H}, |A|_1 = |B|_1 = 0$  olsun. Bu taktirde:

1)  $x = y$  ve  $z = w$  ise  $A \stackrel{B(H)_1}{\sim} B$  dir.

- 2)  $x = -y$  ve  $z = -w$  ise  $A \overset{B(H)_1}{\sim} B$  dir.
- 3)  $x = -y$  ve  $z = w$  ise  $A$  eleman  $B'$  ye  $B(H)_1$  denk değildir.
- 4)  $x = y$  ve  $z = -w$  ise  $A$  eleman  $B'$  ye  $B(H)_1$  denk değildir (Göksal, 2011).

$B(H)_1$  tüm yörüngelerini şu şekilde verebiliriz:

- 1) Keyfi  $k \neq 0, k > 0$  için  $\{x + \delta y \in \mathbb{H} : x^2 - y^2 = k\}$ ,
- 2) Keyfi  $k \neq 0, k < 0$  için  $\{x + \delta y \in \mathbb{H} : x^2 - y^2 = k\}$ ,
- 3)  $k = 0$  için  $\{x + \delta y \in \mathbb{H} : x^2 - y^2 = k\} \Rightarrow \{x + \delta y \in \mathbb{H} : x = y, x = y \neq 0\}$ ,
- 4)  $k = 0$  için  $\{x + \delta y \in \mathbb{H} : x^2 - y^2 = k\} \Rightarrow \{x + \delta y \in \mathbb{H} : x = -y, x = -y \neq 0\}$ ,
- 5)  $\{(0,0)\}$  (Göksal, 2011).

### 3.4. $L(H)$ -Denklik Problemi

Tanım 3.4.1:  $h_1, h_2 \in \mathbb{H}$  olsun. Eğer  $h_2 = gh_1$  olacak şekilde  $g \in L(H)$  varsa  $h_1$  ve  $h_2$  elemanları  $L(H)$ ' e göre denk denir ve  $h_1 \overset{L(H)}{\sim} h_2$  şeklinde gösterilir (Göksal, 2011).

Önerme 3.4.1:  $x \overset{L(H)}{\sim} y$  bağıntısı bir denklik bağıntısıdır (Göksal, 2011).

Önerme 3.4.2:  $A, B \in \mathbb{H}$  ve  $A \overset{L(H)}{\sim} B$  ise  $|A|_1 = |B|_1$  dir (Göksal, 2011).

Önerme 3.4.3:  $A = x + \delta y, B = z + \delta w \in \mathbb{H}, |A|_1 \neq 0, |B|_1 \neq 0$  olsun. Bu takdirde:

- 1)  $|A|_1 = |B|_1, x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}, x \geq c, z \geq c$  ise,  $A \overset{L(H)}{\sim} B$  dir.
- 2)  $|A|_1 = |B|_1, x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}, x \leq -c, z \leq -c$  ise,  $A \overset{L(H)}{\sim} B$  dir.
- 3)  $|A|_1 = |B|_1, x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = -c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}, y \geq c, w \geq c$  ise,  $A \overset{L(H)}{\sim} B$  dir.
- 4)  $|A|_1 = |B|_1, x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = -c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}, y \leq -c, w \leq -c$  ise,  $A \overset{L(H)}{\sim} B$  dir (Göksal, 2011).

Önerme 3.4.4:  $A = x + \delta y \neq 0, B = z + \delta w \neq 0 \in \mathbb{H}, |A|_1 = |B|_1 = 0$  olsun. Bu takdirde:

- 1)  $x = y$  ve  $z = w$  ise  $A \stackrel{L(H)}{\sim} B$  dir.
- 2)  $x = -y$  ve  $z = -w$  ise  $A \stackrel{L(H)}{\sim} B$  dir.
- 3)  $x = -y$  ve  $z = w$  ise  $A$  elemanı  $B'$  ye  $L(H)$  denk değildir.
- 4)  $x = y$  ve  $z = -w$  ise  $A$  elemanı  $B'$  ye  $L(H)$  denk değildir (Göksal, 2011).

$L(H)$  tüm yörüngelerini şu şekilde verebiliriz:

- 1) Keyfi  $k \in \mathbb{R}, k > 0$  için  $\{x + \delta y \in \mathbb{H}: x^2 - y^2 = k, x > 0\}$ ,
- 2) Keyfi  $k \in \mathbb{R}, k > 0$  için  $\{x + \delta y \in \mathbb{H}: x^2 - y^2 = k, x < 0\}$ ,
- 3) Keyfi  $k \in \mathbb{R}, k < 0$  için  $\{x + \delta y \in \mathbb{H}: x^2 - y^2 = k, y > 0\}$ ,
- 4) Keyfi  $k \neq 0, k < 0$  için  $\{x + \delta y \in \mathbb{H}: x^2 - y^2 = k, y < 0\}$ ,
- 5)  $k = 0$  için  $\{x + \delta y \in \mathbb{H}: x^2 - y^2 = k, x > 0\}$ ,
- 6)  $k = 0$  için  $\{x + \delta y \in \mathbb{H}: x^2 - y^2 = k, x < 0\}$ ,
- 7)  $k = 0$  için  $\{x + \delta y \in \mathbb{H}: x^2 - y^2 = k, y > 0\}$ ,
- 8)  $k = 0$  için  $\{x + \delta y \in \mathbb{H}: x^2 - y^2 = k, y < 0\}$ ,
- 9)  $\{(0,0)\}$  (Göksal, 2011).

### 3.5. $B(H)_2$ -Denklik Problemi

Tanım 3.5.1:  $h_1, h_2 \in \mathbb{H}$  olsun. Eğer  $h_2 = gh_1$  olacak şekilde  $g \in B(H)_2$  varsa  $h_1$  ve  $h_2$  elemanları  $B(H)_2'$  e göre denk denir ve  $h_1 \stackrel{B(H)_2}{\sim} h_2$  şeklinde gösterilir (Göksal, 2011).

Önerme 3.5.1:  $x \stackrel{B(H)_2}{\sim} y$  bağıntısı bir denklik bağıntısıdır (Göksal, 2011).

Önerme 3.5.2:  $A, B \in \mathbb{H}$  ve  $A \stackrel{B(H)_2}{\sim} B$  ise  $|A|_2 = |B|_2$  dir (Göksal, 2011).

Önerme 3.5.3:  $A, B \in \mathbb{H}, |A|_2 \neq 0, |B|_2 \neq 0$  ve  $|A|_2 = |B|_2$  ise  $A \stackrel{B(H)_2}{\sim} B$  dir (Göksal, 2011).

Önerme 3.5.4:  $A = x + \delta y \neq 0, B = z + \delta w \neq 0 \in \mathbb{H}, |A|_2 = |B|_2 = 0$  olsun. Bu taktirde:

- 1)  $x = y$  ve  $z = w$  ise  $A \stackrel{B(H)_2}{\sim} B$  dir.

2)  $x = -y$  ve  $z = -w$  ise  $A \stackrel{B(H)_2}{\sim} B$  dir.

3)  $x = -y$  ve  $z = w$  ise  $A$  elemanı  $B'$  ye  $B(H)_2$  denk değildir.

4)  $x = y$  ve  $z = -w$  ise  $A$  elemanı  $B'$  ye  $B(H)_2$  denk değildir (Göksal, 2011).

$B(H)_2$  tüm yörüngelerini şu şekilde verebiliriz:

1) Keyfi  $k \neq 0, k > 0$  için  $\{x + \delta y \in \mathbb{H} : |x^2 - y^2| = k\}$ ,

2)  $k = 0$  için  $\{x + \delta y \in \mathbb{H} : x^2 - y^2 = k\} \Rightarrow \{x + \delta y \in \mathbb{H} : x = y, x = y \neq 0\}$ ,

3)  $k = 0$  için  $\{x + \delta y \in \mathbb{H} : x^2 - y^2 = k\} \Rightarrow \{x + \delta y \in \mathbb{H} : x = -y, x = -y \neq 0\}$ ,

4)  $\{(0,0)\}$ ,

şeklinde ifade edilebilir (Göksal, 2011).

### 3.6. $L, L(H), B(H)_1, SO(1,1), B(H)_2, O(1,1)$ Grupları Arasındaki Bağlantılar

Önerme 3.6.1:  $f: B(H)_1 \rightarrow SO(1,1)$  dönüşümü  $A = (a + \delta b) \in B(H)_1$  için

$f(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$  olarak tanımlansın. Bu takdirde  $f, B(H)_1'$  den  $SO(1,1)'$  e grup

izomorfizmasıdır (Göksal, 2011).

Önerme 3.6.2:  $f: L(H) \subset B(H)_1 \rightarrow L \subset SO(1,1)$  tanımlansın.  $f, L(H)'$  den  $L'$  ye grup izomorfizmadır (Göksal, 2011).

Önerme 3.6.3:  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \det A = a^2 - b^2 = -1$  ise  $A \notin O(1,1)'$  dir (Göksal, 2011).

Sonuç 3.6.1:  $M(2, \mathbb{R}), 2 \times 2$  tipindeki tüm matrislerin kümesi olarak tanımlansın.

$f: B(H)_2 \rightarrow M(2, \mathbb{R})$  dönüşümü  $A = (a + \delta b) \in B(H)_2$  için  $f(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$  olsun.

$f(B(H)_2) \subset M(2, \mathbb{R})$  alt grubudur.  $f(B(H)_2) \not\subset SO(1,1)$  ve  $f(B(H)_2) \not\subset O(1,1)'$  dir (Göksal, 2011).

## 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

### 4.1. $\mathbb{R}^{1+1}$ - Uzayında Noktalar Sisteminin $G$ – Denklik Problemi ve $\mathbb{H}$ – Uzayında $Q$ – Denklik Problemi

$M(2, \mathbb{R})$ , tüm  $2 \times 2$  tipinde reel matrisler kümesi olsun.  $GL(2, \mathbb{R})$ , tersi mevcut olan tüm  $2 \times 2$  tipinde matrisler olsun.  $GL(2, \mathbb{R})$  kümesi matrislerin çarpma işlemine göre bir gruptur.  $G, GL(2, \mathbb{R})$ ' nin bir alt grubu olsun.  $\mathbb{R}^{1+1}$ ' nin elemanlarını sütun şeklinde yazalım. yani;  $v \in \mathbb{R}^{1+1}, v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$  dir.

Şimdi de  $G, \mathbb{R}^{1+1}$  deki etkisini şu şekilde tanımlayalım:  $p = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \in G,$   
 $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+1}, \alpha: G \times \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R}^{1+1}$  dönüşümü

$$\alpha(p, v) = pv = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}a + p_{12}b \\ p_{21}a + p_{22}b \end{pmatrix} \text{ şeklinde tanımlansın.}$$

Önerme 4.1.1:  $\alpha: G \times \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R}^{1+1}$

$$(p, v) \rightarrow \alpha(p, v) = pv$$

dönüşümü  $G$ ' nin  $\mathbb{R}^{1+1}$  deki bir etkisidir.

*İspat:*  $\alpha$  dönüşümü  $G$ ' nin  $\mathbb{R}^{1+1}$  deki bir etkisi olduğunu göstermek için:

(i)  $\forall p, g \in G, v \in \mathbb{R}^{1+1}$  için  $\alpha(pg, v) = \alpha(p, \alpha(g, v))$  olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \alpha(pg, v) &= (pg)v \\ &= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_{11}g_{11} + p_{12}g_{21} & p_{11}g_{12} + p_{12}g_{22} \\ p_{21}g_{11} + p_{22}g_{21} & p_{21}g_{12} + p_{22}g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (p_{11}g_{11} + p_{12}g_{21})a + (p_{11}g_{12} + p_{12}g_{22})b \\ (p_{21}g_{11} + p_{22}g_{21})a + (p_{21}g_{12} + p_{22}g_{22})b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ag_{11} + bg_{12} \\ ag_{21} + bg_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \alpha(p, \alpha(g, v)) \text{ dir.} \end{aligned}$$

(ii)  $\forall v \in \mathbb{R}^{1+1}, e \in G$  için  $\alpha(e, v) = v$  olduğunu gösterelim.

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$  birim elemanını alalım.  $\alpha(I, v) = Iv = v$  dir.

Tanım 4.1.1:  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\} \subseteq \mathbb{R}^{1+1}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^{1+1}$   $m$  –liler verilsin  $u_i = pv_i, \forall i = 1, 2, \dots, m$  olacak şekilde  $\exists p \in G$  varsa  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  ve  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  –  $m$ 'lileri  $G$  – denktir denir ve  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\} \stackrel{G}{\sim} \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  şeklinde gösterilir.

Örnek 4.1.1:  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} \sqrt{3}-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-\sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+1}$  olsun. Bu takdirde

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \stackrel{SO(1,1)}{\sim} \begin{pmatrix} \sqrt{3}-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

dir.

Çözüm:  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \stackrel{SO(1,1)}{\sim} \begin{pmatrix} \sqrt{3}-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-\sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3}-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-\sqrt{3} \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  olacak şekilde  $\exists p \in SO(1,1)$  var olduğunu gösterelim.

Eğer  $p = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$  olarak alırsak,

$p \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-\sqrt{3} \end{pmatrix}$  bulunur. Önerme 2.6.2'ye göre ve

$\det(p) = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 1$  olduğundan  $p \in SO(1,1)$  dir.

$\mathbb{H}$  – Hiperbolik sayılar kümesi olsun.  $\mathbb{H}'$  da tersi mevcut olan ( yani  $h \in \mathbb{H}$  için  $h = a + \delta b, |a| \neq |b|$ ) elemanlar kümesini  $\mathbb{H}^*$  şeklinde gösterelim.  $\mathbb{H}^*$  kümesi  $\mathbb{H}'$  daki çarpım işlemine göre bir gruptur.  $Q, \mathbb{H}^*$  in bir alt grubu olsun.  $Q'$  nun  $\mathbb{H}'$  deki etkisini,  $\alpha(k, h) = kh, k \in Q, h \in \mathbb{H}$  şeklinde tanımlayalım.

Önerme 4.1.2:  $\alpha: Q \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$

$$(k, h) \rightarrow \alpha(k, h) = kh$$

dönüşümü  $Q'$  nin  $\mathbb{H}$  deki bir etkisidir.

İspat:  $\alpha$  dönüşümünün  $Q'$  nun  $\mathbb{H}$  deki bir etkisi olduğunu göstermek için;

(i)  $\forall k = c_1 + \delta d_1, r = c_2 + \delta d_2 \in Q, h = a + \delta b \in \mathbb{H}$  için  $\alpha(kr, h) = \alpha(k, \alpha(r, h))$  olduğunu gösterelim.

$$\alpha(kr, h) = (kr)h = ((c_1 + \delta d_1)(c_2 + \delta d_2))(a + \delta b)$$

$$\begin{aligned}
&= (c_1c_2 + d_1d_2 + \delta(c_1d_2 + d_1c_2))(a + \delta b) \\
&= (c_1c_2 + d_1d_2)a + (c_1d_2 + d_1c_2)b + \delta((c_1d_2 + d_1c_2)a + \\
&\quad (c_1c_2 + d_1d_2)b) \\
&= (c_1 + \delta d_1)(c_2a + d_2b + \delta(d_2a + c_2b)) \\
&= (c_1 + \delta d_1)((c_2 + \delta d_2)(a + \delta b)) \\
&= \alpha(k, \alpha(r, h))
\end{aligned}$$

dir.

(ii)  $I = 1 + 0\delta \in Q$  birim elemanını alalım.  $\forall h \in \mathbb{H}$  için  $\alpha(I, h) = Ih = h$  dir. Dolayısıyla  $\alpha$  dönüşümü  $Q$ ' nun  $\mathbb{H}$  daki bir etkisidir.

Tanım 4.1.2:  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\} \subseteq \mathbb{H}$ ,  $\{k_1, k_2, \dots, k_m\} \subseteq \mathbb{H}$   $m$  -liler verilsin  $k_i = gh_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  olacak şekilde  $g \in Q$  varsa  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\}, \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$  -  $m$ ' lileri  $Q$  - denktir denir ve  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\} \overset{Q}{\sim} \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$  şeklinde gösterilir.

Örnek 4.1.2:  $h = 2 - \delta, k = 2 + \delta \in \mathbb{H}$  olsun . Bu takdirde,  $h \overset{B(H)_1}{\sim} k$  dir.

Çözüm:  $h \overset{B(H)_1}{\sim} k \Rightarrow k = gh$  olacak şekilde  $\exists g \in B(H)_1$  olduğunu gösterelim: Son eşitliğin her iki tarafını  $h^{-1}$  ile çarparsak,  $kh^{-1} = gh h^{-1} \Rightarrow g = kh^{-1}$  olur.

$g \in B(H)_1$  olup olmadığını inceleyelim:

$$kh^{-1} = (2 + \delta)(2 - \delta)^{-1} = (2 + \delta) \left( \frac{2+\delta}{3} \right) = \frac{5+4\delta}{3}.$$

Dolayısıyla  $g = \frac{5+4\delta}{3}$  bulunur. Buradan  $|g|_1 = \frac{5^2}{3^2} - \frac{4^2}{3^2} = 1$  dir. O halde  $g \in B(H)_1$  olur.

Örnek 4.1.3:  $h = 3 + 2\delta, k = 5 + 4\delta \in \mathbb{H}$  ve özel olarak  $G = B(H)_1$  alırsak,  $h \overset{B(H)_1}{\sim} k$  dir.

Çözüm: Kabul edelim ki,  $h \overset{B(H)_1}{\sim} k$  olsun. Bu takdirde  $h \overset{B(H)_1}{\sim} k \Rightarrow k = gh$  olacak şekilde  $\exists g \in B(H)_1$  vardır. O halde son eşitliğin her iki tarafını  $h^{-1}$  ile çarparsak,

$$kh^{-1} = gh h^{-1} \Rightarrow g = kh^{-1} \text{ olur.}$$

$g \in B(H)_1$  olup olmadığını inceleyelim:

$$kh^{-1} = (5 + 4\delta)(3 + 2\delta)^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= (5 + 4\delta)\left(\frac{3-2\delta}{5}\right) \\
&= \frac{1}{5}(15 - 10\delta + 12\delta - 8) \\
&= \frac{1}{5}(7 + 2\delta)
\end{aligned}$$

Dolayısıyla  $g = \frac{1}{5}(7 + 2\delta)$  bulunur.

$$\text{Fakat } |g|_1 = \left(\frac{7}{5}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} - \frac{4}{25} = \frac{45}{25} = \frac{9}{5} \neq 1 \text{ olduğundan } g \notin B(H)_1 \text{ 'dir.}$$

Dolayısıyla  $h \notin B(H)_1$  'dir.

#### 4.2. $\mathbb{R}^{1+1}$ Uzayında $M(\mathbb{R}^{1+1}, \mathbb{R})$ ve $M(\mathbb{H}, \mathbb{R})$ Grupları Arasındaki Bağlantılar

Önerme 4.2.1:  $F: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{1+1}$

$$(a + \delta b) \rightarrow F(a + \delta b) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan  $F$  dönüşümü  $\mathbb{R}$  üzerindeki lineer uzayların  $\mathbb{R}$  – izomorfizmasıdır.

*İspat:*  $F$  nin birebir olduğunu gösterelim,

$$\forall a + \delta b, c + \delta d \in \mathbb{H},$$

$F(a + \delta b) = F(c + \delta d)$  olsun,  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow a = c$  ve  $b = d \Rightarrow a + \delta b = c + \delta d$  bulunur. O halde  $F$  birebirdir.

$F$  nin örten olduğunu gösterelim;

$\forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+1}; F(a + \delta b) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  olacak şekilde  $a + \delta b \in \mathbb{H}$  vardır. Dolayısıyla  $F$  örtendir.

$F$  nin lineer olduğunu gösterelim;

$$\begin{aligned}
F((a + \delta b) + (c + \delta d)) &= F((a + c) + (b + d)\delta) \\
&= \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\
&= F(a + \delta b) + F(c + \delta d)
\end{aligned}$$

dır.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
F((a + \delta b)\lambda) &= F(a\lambda + \delta b\lambda) \\
&= \begin{pmatrix} a\lambda \\ b\lambda \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\lambda \\
&= F(a + \delta b)\lambda
\end{aligned}$$

dır. O halde  $F, \mathbb{R} -$  lineerdir.

$F, \mathbb{R} -$  izomorfizmadır.

Önerme 4.2.2:  $F^{-1}: \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{H}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow F^{-1}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = a + \delta b, a, b \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan  $F^{-1}$  dönüşümü  $\mathbb{R}$  üzerindeki lineer uzayların  $\mathbb{R} -$  izomorfizmidir.

*İspat:* Önerme 4.2.1 gereği  $F: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{1+1}$  dönüşümü birebir, örten olduğundan  $F^{-1}: \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{H}$  dönüşümü vardır.

$F^{-1}$  nin birebir olduğunu gösterelim;

$$\forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+1};$$

$$F^{-1}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = F^{-1}\left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) \text{ olsun;}$$

$$F^{-1}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = F^{-1}\left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)$$

eşitliğine  $F$  ile soldan bileşke işlemi uygularsak,

$$F\left(F^{-1}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)\right) = F\left(F^{-1}\left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)\right)$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

elde edilir. O halde  $F^{-1} -$  birebirdir.

$F^{-1}$  nin örten olduğunu gösterelim;

$\forall a + \delta b \in \mathbb{H}; F^{-1}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = a + \delta b$  olacak şekilde  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+1}$  var olduğunu göstereceğiz.  $F^{-1}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = a + \delta b$  eşitliğine  $F$  ile soldan bileşke işlemi uygularsak,

$$F\left(F^{-1}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)\right) = F(a + \delta b) \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = F(a + \delta b)$$

elde edilir.  $F$  örten olduğundan  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+1}$ , dir. Dolayısıyla  $F^{-1}$  örtendir.

$F^{-1}$  nin lineer olduğunu gösterelim;

$$\begin{aligned} F^{-1}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) &= F^{-1}\left(\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}\right) \\ &= (a+c) + (b+d)\delta \\ &= (a+\delta b) + (c+\delta d) \\ &= F^{-1}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) + F^{-1}\left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

dır.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ;

$$\begin{aligned} F^{-1}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\lambda\right) &= F^{-1}\left(\begin{pmatrix} a\lambda \\ b\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= a\lambda + \delta b\lambda \\ &= (a+\delta b)\lambda \\ &= F^{-1}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)\lambda \end{aligned}$$

dır.  $F^{-1}, \mathbb{R}$  – lineerdir.

$F^{-1}, \mathbb{R}$  – izomorfizmadır.

**Theorem 4.2.1:**  $F: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{1+1}$

$$(a + \delta b) \rightarrow F(a + \delta b) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$a, b \in \mathbb{R}$  olsun. Bu takdirde  $G: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \mathbb{R}$  – lineerdir.  $\Leftrightarrow F \circ G \circ F^{-1}: \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R}^{1+1}, \mathbb{R}$  – lineerdir.

*İspat:*( $\Rightarrow$ ):  $G: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \mathbb{R}$  – lineer olsun.  $F \circ G \circ F^{-1}, \mathbb{R}$  – lineer olduğunu gösterelim.  $\forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+1}$ ;

$$(F \circ G \circ F^{-1})\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = (F \circ G \circ F^{-1})\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) + (F \circ G \circ F^{-1})\left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} (F \circ G \circ F^{-1})\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) &= (F \circ G)\left(F^{-1}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)\right), F^{-1}, \mathbb{R} – lineer; \\ &= (F \circ G)\left(F^{-1}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) + F^{-1}\left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)\right) \\ &= F\left(G\left(\left(F^{-1}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) + F^{-1}\left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)\right)\right)\right), \end{aligned}$$

$G, \mathbb{R}$  – lineer olduğundan;

$$= F\left(G\left(F^{-1}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)\right) + G\left(F^{-1}\left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)\right)\right),$$

$F, \mathbb{R}$  – lineer olduğundan;

$$\begin{aligned}
&= F \left( G \left( F^{-1} \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) \right) + F \left( G \left( F^{-1} \left( \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \right) \right) \right) \\
&= (F \circ G \circ F^{-1}) \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) + (F \circ G \circ F^{-1}) \left( \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

dir.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  olsun.

$(F \circ G \circ F^{-1}) \left( \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = \left( \lambda (F \circ G \circ F^{-1}) \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) \right)$  olduğunu gösterelim.

$$(F \circ G \circ F^{-1}) \left( \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = (F \circ G) \left( F^{-1} \left( \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) \right)$$

$F^{-1}$ ,  $\mathbb{R}$ -lineer olduğundan;

$$\begin{aligned}
&= (F \circ G) \left( \lambda F^{-1} \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) \right) \\
&= F \left( G \left( \lambda F^{-1} \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$G$ ,  $\mathbb{R}$ -lineer olduğundan;

$$= F \left( \lambda G \left( F^{-1} \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) \right) \right)$$

$F$ ,  $\mathbb{R}$ -lineer olduğundan;

$$\begin{aligned}
&= \lambda F \left( G \left( F^{-1} \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) \right) \right) \\
&= \lambda \left( (F \circ G \circ F^{-1}) \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) \right)
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla  $F \circ G \circ F^{-1}$ ,  $\mathbb{R}$ -lineerdir.

( $\Leftarrow$ ):  $F \circ G \circ F^{-1}: \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R}^{1+1}$ ,  $\mathbb{R}$ -lineer olsun.  $G: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ , dönüşümünün  $\mathbb{R}$ -lineer olduğunu gösterelim.

$\forall a + \delta b, c + \delta d \in \mathbb{H}$  alalım. Bu takdirde,

$$a + \delta b = F^{-1} \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right), c + \delta d = F^{-1} \left( \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \quad \text{ve} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+1}$$

dir.  $F \circ G \circ F^{-1}$ ,  $\mathbb{R}$ -lineer olduğundan;

$$(F \circ G \circ F^{-1}) \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = (F \circ G \circ F^{-1}) \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) + (F \circ G \circ F^{-1}) \left( \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right)$$

dır. Bu eşitliğe soldan  $F^{-1}$  ile bileşke işlemi uygularsak;

$$F^{-1} \left( (F \circ G \circ F^{-1}) \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \right) = F^{-1} \left( (F \circ G \circ F^{-1}) \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) + (F \circ G \circ F^{-1}) \left( \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \right)$$

$$F^{-1} \left( F(G \circ F^{-1}) \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \right) = F^{-1} \left( F(G \circ F^{-1}) \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) + F(G \circ F^{-1}) \left( \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \right)$$

Bulunur.  $F^{-1}$ ,  $\mathbb{R}$ -lineer olduğundan;

$$F^{-1}\left(F(G \circ F^{-1})\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)\right) = F^{-1}\left(F(G \circ F^{-1})\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)\right) + F^{-1}\left(F(G \circ F^{-1})\left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)\right)$$

$$(G \circ F^{-1})\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = (G \circ F^{-1})\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) + (G \circ F^{-1})\left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)$$

$$G\left(F^{-1}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)\right) = G\left(F^{-1}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)\right) + G\left(F^{-1}\left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)\right)$$

$$G((a + \delta b) + (c + \delta d)) = G((a + \delta b)) + G((c + \delta d))$$

elde edilir.  $F \circ G \circ F^{-1}, \mathbb{R}$  – lineer olduğundan,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$(F \circ G \circ F^{-1})\left(\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \lambda \left((F \circ G \circ F^{-1})\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)\right)$$

dır. Bu eşitliğe soldan  $F^{-1}$  ile bileşke işlemi uygularsak.

$$F^{-1}\left((F \circ G \circ F^{-1})\left(\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)\right) = F^{-1}\left(\lambda \left((F \circ G \circ F^{-1})\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)\right)\right)$$

$$F^{-1}\left(F(G \circ F^{-1})\left(\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)\right) = F^{-1}\left(\lambda \left(F(G \circ F^{-1})\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)\right)\right)$$

bulunur.  $F^{-1}, \mathbb{R}$  – lineer olduğundan;

$$F^{-1}\left(F(G \circ F^{-1})\left(\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)\right) = \lambda F^{-1}\left(\left(F(G \circ F^{-1})\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)\right)\right)$$

$$(G \circ F^{-1})\left(\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \lambda \left((G \circ F^{-1})\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)\right)$$

$$G\left(F^{-1}\left(\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)\right) = \lambda G\left(F^{-1}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)\right)$$

$$G(\lambda(a + \delta b)) = \lambda G((a + \delta b))$$

elde edilir. Dolayısıyla  $G: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  dönüşümü  $\mathbb{R}$  – lineerdir.

Tanım 4.2.1:  $\{A: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}: A, \mathbb{R} \text{ – lineer operatör}\}$  kümesine Hiperbolik sayılar uzayında tüm  $\mathbb{R}$  – lineer operatörlerin kümesi denir ve  $M(\mathbb{H}, \mathbb{R})$  ile gösterilir.

Tanım 4.2.2:  $\{B: \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R}^{1+1}: \mathbb{R} \text{ – lineer operatör}\}$  kümesine  $\mathbb{R}^{1+1}$  reel vektör uzayında tüm  $\mathbb{R}$  – lineer operatörlerin kümesi denir ve  $M(\mathbb{R}^{1+1}, \mathbb{R})$  ile gösterilir.

Not 4.2.1:  $M(\mathbb{H}, \mathbb{R})$  ve  $M(\mathbb{R}^{1+1}, \mathbb{R})$  kümeleri  $\mathbb{R}$  üzerinde birer lineer uzaydır.

Teorem 4.2.2:  $W: M(\mathbb{H}, \mathbb{R}) \rightarrow M(\mathbb{R}^{1+1}, \mathbb{R})$

$$G \rightarrow W(G) = F \circ G \circ F^{-1}$$

dönüşümü  $\mathbb{R}$  – izomorfizmadır.

*İspat:*  $W$  nun birebir olduğunu gösterelim. Bunun için;

$$\forall G_1, G_2 \in M(\mathbb{H}, \mathbb{R});$$

$$W(G_1) = W(G_2) \Rightarrow G_1 = G_2$$

olduğunu göstermek gerekir.

$$W(G_1) = W(G_2)$$

$$\Rightarrow F \circ G_1 \circ F^{-1} = F \circ G_2 \circ F^{-1}$$

Eşitliği soldan  $F^{-1}$ , sağdan  $F$  ile bileşke işlemine alırsak;

$$\begin{aligned} F^{-1} \circ (F \circ G_1 \circ F^{-1}) \circ F &= F^{-1} \circ (F \circ G_2 \circ F^{-1}) \circ F \\ (F^{-1} \circ F) \circ G_1 \circ (F^{-1} \circ F) &= (F^{-1} \circ F) \circ G_2 \circ (F^{-1} \circ F) \\ G_1 &= G_2 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla  $W$  – birebirdir.

$W$  nun örten olduğunu gösterelim. Bunun için;

$\forall A \in M(\mathbb{R}^{1+1}, \mathbb{R})$  için  $A = W(G)$  olacak şekilde bir  $G \in M(\mathbb{H}, \mathbb{R})$  olduğunu göstermek gerekir.

$\forall A \in M(\mathbb{R}^{1+1}, \mathbb{R})$  alalım.  $A$  yı soldan  $F^{-1}$ , sağdan  $F$  ile bileşke işlemine alırsak,  $F^{-1} \circ A \circ F$  elde edilir.  $F^{-1} \circ A \circ F: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  bir dönüşümdür. Burada  $F^{-1} \circ A \circ F$  elemanını  $G$  ile gösterelim. Bu taktirde  $G: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ' dir. Önerme 4.2.1 ve Önerme 4.2.2' e göre  $F$  ve  $F^{-1}$  dönüşümleri  $\mathbb{R}$  – lineerdir. Diğer taraftan  $A$  dönüşümü  $\mathbb{R}$  – lineer olduğundan bileşke  $F^{-1} \circ A \circ F = G$  dönüşümü  $\mathbb{R}$  – lineerdir. Dolayısıyla  $G \in M(\mathbb{H}, \mathbb{R})$ ' dir.

$W$  örtendir. Böylece  $W$  birebir ve örtendir.

$W$  nun lineer olduğunu gösterelim;

$$\forall G_1, G_2 \in M(\mathbb{H}, \mathbb{R});$$

$$W(G_1 + G_2) = F \circ (G_1 + G_2) \circ F^{-1}$$

$F, \mathbb{R}$  –lineer olduğundan;

$$= (F(G_1) + F(G_2)) \circ F^{-1}$$

Bileşke işlemi + üzerine dağılımlı olduğundan;

$$\begin{aligned} &= (F(G_1))F^{-1} + (F(G_2))F^{-1} \\ &= (F \circ G_1 \circ F^{-1}) + (F \circ G_2 \circ F^{-1}) \\ &= W(G_1) + W(G_2) \end{aligned}$$

elde edilir.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ;

$$W(G\lambda) = F \circ (G\lambda) \circ F^{-1}, F, \mathbb{R} \text{ –lineer};$$

$$\begin{aligned}
&= (F(G)\lambda) \circ F^{-1} \\
&= \left( (F(G))F^{-1} \right) \lambda \\
&= (F \circ G \circ F^{-1})\lambda \\
&= W(G)\lambda
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $W$ ,  $\mathbb{R}$  –lineerdir. O halde  $W$ ,  $\mathbb{R}$  – izomorfizmadır.

Teorem 4.2.3:  $W: M(\mathbb{H}, \mathbb{R}) \rightarrow M(\mathbb{R}^{1+1}, \mathbb{R})$

$$G \rightarrow W(G) = F \circ G \circ F^{-1} \quad \text{dönüşümü} \quad \mathbb{R} - \text{ cebir}$$

izomorfizmadır.

*İspat:* Teorem 4.2.2' den  $W$ ,  $\mathbb{R}$  –lineerdir.

$\forall G_1, G_2 \in M(\mathbb{H}, \mathbb{R})$  için;

$W(G_1 \circ G_2) = W(G_1) \circ W(G_2)$  olduğunu gösterelim;

$$\begin{aligned}
W(G_1 \circ G_2) &= F \circ (G_1 \circ G_2) \circ F^{-1} \\
&= F \circ G_1 \circ G_2 \circ F^{-1} \\
&= F \circ G_1 \circ (F^{-1} \circ F) \circ G_2 \circ F^{-1} \\
&= (F \circ G_1 \circ F^{-1}) \circ (F \circ G_2 \circ F^{-1}) \\
&= W(G_1) \circ W(G_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla  $W$  dönüşümü  $\mathbb{R}$  – cebir izomorfizmadır.

Teorem 4.2.4:  $W: M(\mathbb{H}, \mathbb{R}) \rightarrow M(\mathbb{R}^{1+1}, \mathbb{R})$

$$G \rightarrow W(G) = F \circ G \circ F^{-1}$$

dönüşümü  $\mathbb{R}$  – cebir izomorfizma olsun. Bu takdirde,  $\mathbb{H}^*$  in her alt grubunun  $W$  altındaki görüntüsü  $W(\mathbb{H}^*)$  in bir alt grubudur.

*İspat:*  $G$ ,  $\mathbb{H}^*$  in bir alt grubu olsun.  $W(G) = \{W(g) \in M(\mathbb{R}^{1+1}, \mathbb{R}): g \in G\}$  nin  $W(\mathbb{H}^*)$  in bir alt grubu olduğunu göstermeliyiz.  $g_1, g_2 \in G$  olmak üzere,  $W(G)$  nin iki elemanı  $W(g_1)$  ve  $W(g_2)$  olsun.

$$\begin{aligned}
W(g_1) \circ (W(g_2))^{-1} &= (F \circ g_1 \circ F^{-1}) \circ (F \circ g_2 \circ F^{-1})^{-1} \\
&= (F \circ g_1 \circ F^{-1}) \circ ((F^{-1})^{-1} \circ g_2^{-1} \circ F^{-1}) \\
&= (F \circ g_1 \circ F^{-1}) \circ (F \circ g_2^{-1} \circ F^{-1}) \\
&= F \circ g_1 \circ (F^{-1} \circ F) \circ g_2^{-1} \circ F^{-1} \\
&= F \circ g_1 \circ g_2^{-1} \circ F^{-1}
\end{aligned}$$

$$= W(g_1 \circ g_2^{-1})$$

bulunur.  $G$ ,  $\mathbb{H}^*$  in bir alt grubu ve  $g_1, g_2 \in G$  alındığından  $g_1 \circ g_2^{-1} \in G$  olur. O halde  $W(g_1 \circ g_2^{-1}) \in W(G)$  olup  $W(g_1) \circ (W(g_2))^{-1} \in W(G)$  elde edilir.

Dolayısıyla  $\mathbb{H}^*$  in her alt grubunun  $W$  altındaki görüntüsü  $W(\mathbb{H}^*)$  in bir alt grubu olmuş olur.

### 4.3. $\mathbb{H}^*$ Grubun Temel Altgrupları

Önerme 3.2.1'e göre  $\mathbb{H}^* = \{A = a + \delta b \in \mathbb{H} : a^2 - b^2 \neq 0\}$  kümesi “.” işlemine göre değişmeli gruptur. Bu grubun  $\{A = a + \delta b \in \mathbb{H} : |A|_1 = a^2 - b^2 > 0\}$  kümesini  $H_+^*$  ile gösterelim.

Önerme 4.3.1:  $H_+^*$  kümesi  $\mathbb{H}^*$  grubunun alt grubudur.

*İspat:* Açıktır.

$\{A = a + \delta b \in \mathbb{H} : |A|_1 = a^2 - b^2 < 0\}$  kümesini  $H_-^*$  ile gösterelim.

Önerme 4.3.2:  $\mathbb{H}^* = H_+^* \cup H_-^*$  ve  $H_+^* \cap H_-^* = \emptyset$  dir.

*İspat:* Açıktır.

$\{\delta A \in \mathbb{H} : A \in H_+^*\}$  kümesini  $\delta H_+^*$  ile ve  $\{\delta A \in \mathbb{H} : A \in H_-^*\}$  kümesini  $\delta H_-^*$  ile gösterelim.

Önerme 4.3.3:  $H_-^* = \delta H_+^*$  ,  $H_+^* = \delta H_-^*$  ,  $H^* = H_+^* \cup \delta H_+^* = H_-^* \cup \delta H_-^*$  ve  $H_+^* \cap \delta H_+^* = H_-^* \cap \delta H_-^* = \emptyset$  dir.

*İspat:*  $A = a + \delta b \in H_+^*$  olsun. Bu takdirde  $a^2 - b^2 > 0$ . Buradan  $b^2 - a^2 < 0$  bulunur.  $\delta A = \delta(a + \delta b) = b + \delta a$  elemanı için  $b^2 - a^2 < 0$  olduğundan  $\delta A = b + \delta a \in H_-^*$  dir. Dolayısıyla  $\delta H_+^* \subset H_-^*$  dir.  $C = a + \delta b \in H_-^*$  olsun. Bu takdirde  $a^2 - b^2 < 0$  dir. Buradan  $b^2 - a^2 > 0$  bulunur. Şimdi  $\delta C = \delta(a + \delta b) = b + \delta a$  olduğundan  $\delta C \in H_+^*$ . Buradan  $\delta(\delta C) = C \in H_-^*$  ve  $\delta \in H_+^*$  olduğundan  $H_-^* \subset \delta H_+^*$  elde edilir. Dolayısıyla  $H_-^* = \delta H_+^*$  dir. Diğer eşitlikler benzer şekilde ispat edilir.

Pozitif reel sayılar kümesini  $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R}, r > 0\}$  şeklinde gösterelim.

Önerme 4.3.4:  $\forall h \in \mathbb{H}^*$  için  $h = rp$  olacak şekilde bir tek  $r \in \mathbb{R}_+$  ve  $p \in B_2(H)$  vardır.

*İspat:* Gerçekten, keyfi  $h \in \mathbb{H}^*$  için  $|h|_2 \neq 0$  dir. Buradan  $(|h|_2)^{-1}h \in B_2(H)$  ve  $h = |h|_2((|h|_2)^{-1}h)$ .

$\mathbb{R}_+ \times B_2(H) = \{rp \in \mathbb{H}^*: r \in \mathbb{R}_+, p \in B_2(H)\}$  kümesini alalım. Önerme 4.3.4 göre  $\mathbb{H}^* = \mathbb{R}_+ \times B_2(H)$  dir.

Önerme 4.3.5:  $\forall h \in \mathbb{H}^*$  için  $h = rp$  olacak şekilde bir tek  $r \in \mathbb{R}_+$  ve  $p \in B_1(H)$  vardır.

*İspat:* Açıktır.

$\mathbb{R}_+ \times B_1(H) = \{rp \in \mathbb{H}^*: r \in \mathbb{R}_+, p \in B_1(H)\}$  kümesini alalım. Önerme 4.3.4 göre  $H_+^* = \mathbb{R}_+ \times B_1(H)$  dir.  $\{\delta A \in \mathbb{H}: A \in B_1(H)\}$  kümesini  $\delta B_1(H)$  ile gösterelim.  $H_+^* = \mathbb{R}_+ \times B_1(H)$  eşitliği ve Önerme 4.3.3 ten aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 4.3.6:  $H_+^* = \mathbb{R}_+ \times B_1(H)$  ve  $H_+^* = (\mathbb{R}_+ \times B_1(H)) \cap (\mathbb{R}_+ \times \delta B_1(H))$  dir.

*İspat:* Açıktır.

Önerme 4.3.7:  $B_2(H) = B_1(H) \cup (\delta B_1(H))$  dir.

*İspat:* Açıktır.

$(-1)L(H) = \{-h: h \in L(H)\}$  kümesini alalım.

Önerme 4.3.8:  $B_1(H) = L(H) \cup ((-1)L(H))$  ve  $L(H) \cap ((-1)L(H)) = \emptyset$  dir.

*İspat:* Açıktır.

Önerme 4.3.9:  $B_2(H) = (L(H) \cup ((-1)L(H))) \cup (\delta L(H) \cup ((-\delta)L(H))$  dir.

*İspat:* Açıktır.

#### 4.4. $W(\mathbb{H}^*)$ Grubunun Temel Altgrupları

$F$ , Önerme 4.2.1 de tanımlanan dönüşüm ve  $W$ , Önerme 4.2.2 de tanımlanan dönüşüm olsun.

Önerme 4.4.1: Keyfi  $A \in M(\mathbb{H}, \mathbb{R})$  ve  $x \in \mathbb{H}$  elemanları için  $F(Ax) = W(A)F(x)$  dir.

*İspat:* Keyfi  $A \in M(\mathbb{H}, \mathbb{R})$  ve  $x \in \mathbb{H}$  elemanları için  $F(Ax) \in \mathbb{R}^{1+1}$  dir.  $I, \mathbb{H}$ 'nin birim dönüşümü olsun.  $I = F^{-1} \circ F$  eşitliği kullanılarak,  $F(Ax) = F(A(Ix)) = F(A(F^{-1} \circ F)x) = F(A(F^{-1}(Fx))) = (F \circ A \circ F^{-1})(Fx) = W(A)F(x)$  elde edilir.

Önerme 4.4.2: Keyfi  $a \in \mathbb{H}$  ve  $x \in \mathbb{H}$  elemanlar için  $F(ax) = W(a)F(x)$  dir.

*İspat:* Önerme 4.4.1' deki  $F(Ax) = W(A)F(x)$  eşitliğinde  $A$  lineer dönüşümü yerine  $a \in \mathbb{H}$  eleman ile çarpım dönüşümünü alırsak,  $F(ax) = W(a)F(x)$  eşitliği elde edilir.

$$a = a_1 + \delta a_2 \in \mathbb{H}, x = x_1 + \delta x_2 \in \mathbb{H} \text{ olsun.}$$

Teorem 4.4.1: Keyfi  $a = a_1 + \delta a_2 \in \mathbb{H}$  ve  $x = x_1 + \delta x_2 \in \mathbb{H}$  elemanlar için  $F(ax) = \begin{pmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ a_1 x_2 + a_2 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = W(a)F(x)$  ve  $W(a) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$  dir.

*İspat:*  $\mathbb{H}$  deki  $a$  ve  $x$  elemanlarının  $ax = (a_1 x_1 + a_2 x_2) + \delta(a_1 x_2 + a_2 x_1)$  çarpımına  $F$  dönüşümünü uygularsak;

$$F(ax) = F((a_1 x_1 + a_2 x_2) + \delta(a_1 x_2 + a_2 x_1)) = \begin{pmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ a_1 x_2 + a_2 x_1 \end{pmatrix} \text{ ifadesi elde edilir.}$$

Böylece  $\begin{pmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ a_1 x_2 + a_2 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} F(x)$  eşitliğini ve Önerme 4.4.2 yi kullanarak,

$$F(ax) = \begin{pmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ a_1 x_2 + a_2 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = W(a)F(x) \quad \text{ve} \quad W(a) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

eşitlikleri elde edilir.

$\mathbb{H}$  cebirinin  $W(H) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$  cebirine  $W: a = a_1 + \delta a_2 \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$  şeklinde tanımlı dönüşümü Teorem 3.1.9'e göre cebir izomorfizmasıdır. Bu izomorfizma  $W: H \rightarrow W(H)$  şeklinde gösterilmiştir. Bu  $W$  izomorfizması ile  $H^* = \{A = a + \delta b \in \mathbb{H}: a^2 - b^2 \neq 0\}$  kümesi  $W(H^*)$  kümesine dönüşmektedir, ayrıca  $W(H^*) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 - b^2 \neq 0 \right\}$  ve  $W(\delta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  dir.

Önerme 4.4.3:  $W(H^*)$  kümesi  $W(H)$  cebirindeki matrislerin çarpım işlemine göre gruptur ve  $W: H^* \rightarrow W(H^*), h = a + \delta b \rightarrow W(h) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$ , şeklinde tanımlanan dönüşüm grup izomorfizmasıdır..

*İspat:* Teorem 4.2.4 ve Teorem 4.4.1 den elde edilir.

$W$  izomorfizması  $H_+^*$  kümesini  $W(H_+^*)$  kümesine eşler ve  $W(H_+^*) \subset W(H^*)$  dır.

Önerme 4.4.4:  $W(H_+^*)$  kümesi  $W(H^*)$  grubunun altgrubudur,

$W(H_+^*) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 - b^2 > 0 \right\}$  dir ve  $W: H_+^* \rightarrow W(H_+^*)$ ,  
 $h = a + \delta b \rightarrow W(h) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , şeklinde tanımlanan dönüşüm grup izomorfizmasıdır.

*İspat:* Teorem 4.2.4 ve Teorem 4.4.1 den elde edilir.

$W$  izomorfizması  $H_-^*$  kümesini  $W(H_-^*)$  kümesine eşler ve  $W(H_-^*) \subset W(H^*)$  dır.

Önerme 4.4.5:  $W(H^*) = W(H_+^*) \cup W(H_-^*) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 - b^2 > 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 - b^2 > 0 \right\}$  ve  $W(H_+^*) \cap W(H_-^*) = \emptyset$  dir.

*İspat:* Önerme 4.3.2'in sonucudur.

$W$  izomorfizması  $\delta H_+^*$  kümesini

$W(\delta H_+^*) = W(\delta)W(H_+^*) = W(H_+^*) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 - b^2 > 0 \right\}$   
kümesine eşler ve  $W(\delta H_+^*) \subset W(H^*)$  dır.

$W$  izomorfizması  $\delta H_-^*$  kümesini

$W(\delta H_-^*) = W(\delta)W(H_-^*) = W(H_-^*) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 - b^2 < 0 \right\}$   
kümesine eşler ve  $W(\delta H_-^*) \subset W(H^*)$  dır.

Önerme 4.4.6:  $W(H_-^*) = W(\delta H_+^*)$  ,  $W(H_+^*) = W(\delta H_-^*)$  ,  $W(H^*) = W(H_+^*) \cup W(H_-^*) = W(H_-^*) \cup W(\delta H_-^*)$  ve  $W(H_+^*) \cap W(\delta H_+^*) = W(H_-^*) \cap W(\delta H_-^*) = \emptyset$  dir.

*İspat:* Önerme 4.3.3'ün sonucudur.

$W$  izomorfizması  $B_1(H)$  kümesini  $W(B_1(H))$  kümesine eşler ve  $W(B_1(H)) \subset W(H^*)$  dır.

$W$  izomorfizması  $B_2(H)$  kümesini  $W(B_2(H))$  kümesine eşler ve  $W(B_2(H)) \subset W(H^*)$  dır.

$W$  izomorfizması  $L(H)$  kümesini  $W(L(H))$  kümesine eşler ve  $W(L(H)) \subset W(H^*)$  dır.

Önerme 4.4.6:  $W(B_1(H))$ ,  $W(B_2(H))$ ,  $W(L(H))$  kümeleri  $W(H^*)$  grubunun altgruplarıdır.

*İspat:* Teorem 4.2.4'ün sonucudur.

$\mathbb{R}_+ \times B_1(H) = \{rp \in \mathbb{H}^*: r \in \mathbb{R}_+, p \in B_1(H)\}$  kümesi verilsin. Önerme 4.3.4 göre  $H_+^* = \mathbb{R}_+ \times B_1(H)$  dir.  $\{\delta A \in \mathbb{H}: A \in B_1(H)\}$  kümesini  $\delta B_1(H)$  ile gösterelim.

Önerme 4.4.7:  $W(H_+^*) = \mathbb{R}_+ \times W(B_1(H))$  ve

$W(H^*) = (\mathbb{R}_+ \times W(B_1(H))) \cup (\delta \mathbb{R}_+ \times W(B_1(H)))$  dir.

*İspat:* Önerme 4.3.6 nin sonucudur.

Önerme 4.4.8:  $W(B_2(H)) = (W(B_2(H))) \cup (\delta W(B_2(H))) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 - b^2 = 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 - b^2 = 1 \right\}$  ve  $W(H_+^*) \cap W(H_-^*) = \emptyset$  dur.

*İspat:* Önerme 4.3.7 nin sonucudur.

Önerme 4.4.9:  $W(B_1(H)) = W(L(H)) \cup ((-1)W(L(H)))$  ve

$W(L(H)) \cap ((-1)W(L(H))) = \emptyset$  dir.

*İspat:* Önerme 4.3.8 in sonucudur.

Sonuç 4.4.10:  $W(B_2(H)) = (W(L(H)) \cup ((-1)W(L(H)))) \cup (\delta W(L(H)) \cup ((-\delta)W(L(H))))$  dir.

*İspat:* Önerme 4.3.9 un sonucudur.

#### 4.5. G-Denklik Problemi ve W(G)-Denklik Problemi Arasındaki Bağlantı

$G, M(\mathbb{H}, \mathbb{R})$  nin bir alt grubu olsun. Bu takdirde Teorem 4.2.4'e göre  $W(G)$  kümesi  $M(\mathbb{R}^{1+1}, \mathbb{R})$  nin bir alt grubudur.

Burada  $F(h) = Fh$  şeklinde de kullanılacaktır.

Teorem 4.5.1:  $G, M(\mathbb{H}, \mathbb{R})$ ' nin bir alt grubu olsun.  $F: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{1+1}$ ,

$(a + \delta b) \rightarrow F(a + \delta b) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , dönüşümü  $\mathbb{R} -$  izomorfizma,

$h_1, h_2, \dots, h_m \in \mathbb{H}$ ,  $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{H}$  olsun. Bu durumda

$\{h_1, h_2, \dots, h_m\} \stackrel{G}{\sim} \{k_1, k_2, \dots, k_m\} \Leftrightarrow \{Fh_1, Fh_2, \dots, Fh_m\} \stackrel{W(G)}{\sim} \{Fk_1, Fk_2, \dots, Fk_{m_1}\}$   
dir.

*İspat:* ( $\Rightarrow$ )  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\} \stackrel{G}{\sim} \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$  olsun. O halde  $k_i = gh_i, i = 1, 2, \dots, m$  olacak şekilde  $\exists g \in G$  vardır.

$\{Fh_1, Fh_2, \dots, Fh_m\} \stackrel{W(G)}{\sim} \{Fk_1, Fk_2, \dots, Fk_{m_1}\}$  olduğunu göstermek için  $Fk_i = pFh_i, i = 1, 2, \dots, m$  olacak şekilde  $\exists p \in W(G)$  olduğunu göstermek gerekir.

$F: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{1+1}, F(a + \delta b) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$  dönüşümü  $\mathbb{R} -$  izomorfizma olduğundan,  $k_i \in \mathbb{H} \Rightarrow F(k_i) \in \mathbb{R}^{1+1}$  ve  $h_i \in \mathbb{H} \Rightarrow F(h_i) \in \mathbb{R}^{1+1}$  olur.  $k_i = gh_i$ , eşitliğinin her iki tarafına  $F$  dönüşümü uygulanırsa, tüm  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $F(k_i) = F(gh_i)$  olur. Buradan, tüm  $i = 1, 2, \dots, m$  için, Teorem 4.4.1'e göre  $F(k_i) = F(gh_i) = W(g)F(h_i)$  olur. Buradan  $F(k_i) = pF(h_i), i = 1, 2, \dots, m$  olacak şekilde  $\exists p \in W(G)$  vardır. Böylece  $\{Fh_1, Fh_2, \dots, Fh_m\} \stackrel{W(G)}{\sim} \{Fk_1, Fk_2, \dots, Fk_{m_1}\}$  bulunur.

( $\Leftarrow$ ):  $\{Fh_1, Fh_2, \dots, Fh_m\} \stackrel{W(G)}{\sim} \{Fk_1, Fk_2, \dots, Fk_{m_1}\}$  olsun. O halde  $Fk_i = pFh_i, i = 1, 2, \dots, m$  olacak şekilde  $\exists p \in W(G)$  vardır. Dolayısıyla,  $p = W(g)$  olacak şekilde  $g \in G$  mevcuttur.  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\} \stackrel{G}{\sim} \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$  olduğunu göstermek için tüm  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $k_i = gh_i$ , olduğunu göstermek gerekir. Tüm  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $Fk_i = pFh_i$  ve  $p = W(g)$  olduğundan  $Fk_i = W(g)Fh_i$  dir. Teorem 4.4.1'e göre  $W(g)Fh_i = F(gh_i)$  dir. Böylece  $Fk_i = W(g)Fh_i$  olduğundan  $Fk_i = F(gh_i)$  eşitliği bulunur.  $F$  dönüşüm izomorfizma olduğundan  $k_i = gh_i$  dir. Dolayısıyla  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\} \stackrel{G}{\sim} \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$  olur.

Özel olarak,  $m = 1$  durumunda bu teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.5.1:  $G, \mathbb{H}^*$  grubun bir alt grubu ve  $K, \mathbb{H}'$  nin bir alt kümesi olsun. Bu takdirde  $K$  kümenin  $G$  nin  $\mathbb{H}$  deki  $(g, h) \rightarrow gh$  etkisine göre  $G -$  yörünge olması için gerek ve yeter şart  $F(K)$  kümesinin  $W(G)$  nin  $\mathbb{R}^{1+1}$  deki  $(W(g), x) \rightarrow W(g)x$  etkisine göre  $W(G) -$  yörünge olmasıdır.

Önerme 4.5.1:  $G, M(\mathbb{H}, \mathbb{R})$  nin bir alt grubu ve  $h_1, h_2, \dots, h_m \in \mathbb{H}, k_1, \dots, k_m \in \mathbb{H}$  olsun. Eğer  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\} \stackrel{G}{\sim} \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$  ise, keyfi  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $h_i \stackrel{G}{\sim} k_i$  dir, yani keyfi  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $h_i$  ve  $k_i$  elemanları aynı  $G -$  yörüngeye elemanlarıdır.

*İspat:*  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\} \stackrel{G}{\sim} \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$  den  $G$  –denklik tanımına göre keyfi  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $h_i \stackrel{G}{\sim} k_i$  dir, yani keyfi  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $h_i$  ve  $k_i$  elemanları aynı  $G$  –yörüngenin elemanlarıdır.

Önerme 4.5.2:  $G, \mathbb{H}^*$  grubun bir altgrubu ve  $K, H$  in bir altkümesi olsun. Bu takdirde keyfi  $g \in G$  için  $F(gK) = \{F(ga)|a \in K\} = \{W(g)F(a)|a \in K\} = W(g)F(K)$  dir.

*İspat:*  $F(gK) = \{F(ga)|a \in K\}$  ve Önerme 4.4.2'e göre  $F(ga) = W(g)F(a)$  olduğundan  $F(gK) = \{F(ga)|a \in K\} = \{W(g)F(a)|a \in K\} = W(g)F(K)$  dir.

#### 4.6. "m" lilerin $\mathbb{H}^*$ –Denklik Problemi

Yüksek lisans tezinde bir noktanın bir noktaya  $B(H)_1$  –denkliği incelenmiştir(Göksal, 2011). Bu bölümde,  $m$  noktadan oluşan iki sistemin  $\mathbb{H}^*$  –denklik problemi incelenecektir. Önce  $m = 1$  ve  $m = 2$  durumları için iki sistemin  $\mathbb{H}^*$  –denklik problemini inceleyeceğiz.

$m = 1$  olsun. Bu durumda  $\mathbb{H}^*$  –denklik probleminin çözümü  $\mathbb{H}^*$  grubunun  $\mathbb{H}$  cebirdeki  $(g, h) \rightarrow gh$  etkisine göre  $\mathbb{H}^*$  –yörüngelerin bulunması şeklinde olur.

Önerme 4.6.1:  $\mathbb{H}^*$  grubunun  $\mathbb{H}$  cebirdeki  $(g, h) \rightarrow gh$  etkisine göre sadece dört  $\mathbb{H}^*$  –yörüngesi vardır. Bunlar,  $\mathbb{H}^*, \{r(1 + \delta)|r \in \mathbb{R}^*\}, \{r(1 - \delta)|r \in \mathbb{R}^*\}, \{0\}$  dir. Burada  $\mathbb{R}^* = \{r \in \mathbb{R}|r \neq 0\}$  dir.

*İspat:*  $\{0\}$  kümesinin yörünge olduğu açıktır.  $h = h_1 + \delta h_2 \in \mathbb{H}$  olsun.  $h$  nin  $\{gh|g \in \mathbb{H}^*\}$  yörüngesini bulalım. Burada iki durum vardır:  $h \in \mathbb{H}^*, h \notin \mathbb{H}^*$ .

(i)  $h \in \mathbb{H}^*$  olsun.  $\mathbb{H}^*$  grup olduğundan keyfi  $g \in \mathbb{H}^*$  için  $gh \in \mathbb{H}^*$  dir. Dolayısıyla  $\{gh|g \in \mathbb{H}^*\} \subset \mathbb{H}^*$  dir. keyfi  $k \in \mathbb{H}^*$  alalım. Bu takdirde  $gh = k$  şartını sağlayan  $g \in \mathbb{H}^*$  mevcuttur:  $g = kh^{-1}$ . Dolayısıyla  $\{gh|g \in \mathbb{H}^*\} = \mathbb{H}^*$ . Bu küme  $1 \in \mathbb{H}$  elemanın  $\mathbb{H}^*$  – yörüngesidir. Bundan dolayı bu küme  $1 \cdot \mathbb{H}^*$  küme şeklinde yazılabilir.

(ii)  $h \notin \mathbb{H}^*$  olsun. Eğer  $h = 0$  ise,  $\{gh|g \in \mathbb{H}^*\} = \{0\}$  olur.  $h \neq 0$  olsun. Bu durumda  $h \notin \mathbb{H}^*$  olduğunda dolayı  $h$  nin tersi yoktur. Önerme 3.1.2'ye göre  $h = c(1 + \delta), c \in \mathbb{R}$  şeklinde veya  $c(1 - \delta)$  şeklindedir,  $c \in \mathbb{R}$ . Burada  $h$  elemanı sıfırdan farklı olduğundan  $c \neq 0$  dir. Şimdi  $h = c(1 + \delta), c \in \mathbb{R}^*, g = a + \delta b \in \mathbb{H}^*$  keyfi olsun. Buradan  $gh = c(a + b)(1 + \delta)$  olur. Bu gösteriyor ki

$h = c(1 + \delta), c \in \mathbb{R}^*$  şeklindeki elemanın  $\mathbb{H}^*$  – yörüngesi  $\{r(1 + \delta) \mid r \in \mathbb{R}^*\}$  kümesidir. Bu  $\mathbb{H}^*$  – yörünge  $1 + \delta$  elemanı kapsayan  $\mathbb{H}^*$  – yörüngedir. Bu  $\mathbb{H}^*$  – yörünge  $(1 + \delta) \cdot \mathbb{H}^*$  şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde  $c(1 - \delta), c \in \mathbb{R}^*$  şeklindeki elemanın  $\mathbb{H}^*$  – yörüngesinin  $\{r(1 - \delta) \mid r \in \mathbb{R}^*\}$  kümesi olduğu gösterilir. Bu  $\mathbb{H}^*$  – yörünge  $(1 - \delta) \cdot \mathbb{H}^*$  şeklinde yazılabilir.

$\mathbb{H}^*$  grubunun  $\mathbb{H}^*$  – yörüngesinin tipi 1 dir diyelim. Eğer  $h \in \mathbb{H}$  için  $h \in \mathbb{H}^*$  ise  $h$  nin tipine 1 diyelim ve bunu  $T_1(h) = 1$  şeklinde gösterelim.  $\mathbb{H}^*$  grubunun  $\{r(1 + \delta) \mid r \in \mathbb{R}^*\}$  yörüngesinin tipine  $1 + \delta$  diyelim. Eğer  $h \in \mathbb{H}$  için  $h \in \{r(1 + \delta) \mid r \in \mathbb{R}^*\}$  ise  $h$  nin tipi  $1 + \delta$  dir ve bunu  $T_1(h) = 1 + \delta$  şeklinde gösterelim.

$\mathbb{H}^*$  grubunun  $\{r(1 - \delta) \mid r \in \mathbb{R}^*\}$  yörüngesinin tipine  $1 - \delta$  diyelim. Eğer  $h \in \mathbb{H}$  için  $h \in \{r(1 - \delta) \mid r \in \mathbb{R}^*\}$  ise  $h$  nin tipi  $1 - \delta$  dir ve bunu  $T_1(h) = 1 - \delta$  şeklinde gösterelim.

$\mathbb{H}^*$  grubunun  $\{0\}$  yörüngesinin tipi 0 dir diyelim. Eğer  $h \in \mathbb{H}$  için  $h = 0$  ise  $h$  nin tipi 0 dir ve bunu  $T_1(0) = 0$  şeklinde gösterelim.

$h = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ ,  $T_1(h_i) = t_i$  olacak şekilde  $\mathbb{H}$  nin bir  $m$  –lisi olsun. Burada  $t_i = 1, 1 + \delta, 1 - \delta$  veya 0 dir.  $(t_1, \dots, t_m)$   $m$  –li dizisine  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$   $m$  –lisinin tipi diyelim ve  $T_1(h) = (t_1, \dots, t_m)$  şeklinde veya  $T_1\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$  şeklinde gösterelim. Örneğin, eğer  $h = \{h_1, h_2\}$  2 –lisi için  $T_1(h_1) = 1 - \delta$  ve  $T_1(h_2) = 1$  ise  $T_1(h) = (1 - \delta, 1)$  dir.

Önerme 4.6.2: Eğer  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  için  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\} \sim^{\mathbb{H}^*} \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$  ise, bu takdirde  $T_1(h) = T_1(k)$  dir, yani  $m$  –linin tipi  $\mathbb{H}^*$  invarianttır.

*İspat:* Önerme 4.5.1 ve Önerme 4.6.1 in sonucudur.

Sonuç 4.6.1: Eğer  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  için  $T_1\{h_1, h_2, \dots, h_m\} \neq T_1\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$  ise  $h$  ve  $k$   $m$  –liler  $\mathbb{H}^*$  – denk değildir.

*İspat:* Önerme 4.6.2 den elde edilir.

Sonuç 4.6.2: Eğer  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  elemanlar öyleki bir  $p \in \{1, 2, \dots, m\}$  olmak üzere  $T_1(h_p) \neq T_1(k_p)$  ise  $h$  ve  $k$   $m$  –liler  $\mathbb{H}^*$  – denk değildir.

*İspat:* Önerme 4.6.2 den elde edilir.

Yukarıdaki sonuç gereğince, iki  $m$  –linin  $\mathbb{H}^*$  –denklik şartı incelenirken, onların tipleri eşit olma şartıyla incelenebilir.

Önerme 4.6.3:  $G, \mathbb{H}^*$  nin bir altgrubu olsun. Eğer  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  için  $1 \leq j \leq m$  olmak üzere  $h_j = k_j = 0$  ise,  $h$  ve  $k$   $m$  –liler  $G$  –denktir  $\Leftrightarrow \{h_1, \dots, h_{j-1}, h_{j+1}, \dots, h_m\}$  ve  $\{k_1, \dots, k_{j-1}, k_{j+1}, \dots, k_m\}$   $(m - 1)$  –liler  $G$  –denktir.

*İspat:* Açıktır.

Not: Bu önermeye göre gelecekte iki  $m$  –linin  $G$  –denklik problemi incelenirken, bu  $m$  –lilerin tüm elemanları sıfırdan farklı olarak alınacaktır.

İlk olarak  $m = 2$  durumu inceleyelim.  $\mathbb{H}$  de keyfi bir  $h = \{h_1, h_2\}$  2 –lisini göz önüne alalım, burada  $h_1, h_2$  lerin her biri sıfırdan farklıdır. Bu ikilinin tipi için,  $T_1(h) = (1, 1), T_1(h) = (1, 1 + \delta), T_1(h) = (1, 1 - \delta), T_1(h) = (1 + \delta, 1), T_1(h) = (1 + \delta, 1 + \delta), T_1(h) = (1 + \delta, 1 - \delta), T_1(h) = (1 - \delta, 1), T_1(h) = (1 - \delta, 1 + \delta), T_1(h) = (1 - \delta, 1 - \delta)$  durumları vardır.

Eğer  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $T_1(h_1) \neq T_1(k_1)$  ise, Sonuç 4.6.2’e göre  $h$  ve  $k$  2 –liler  $\mathbb{H}^*$  –denk değildir.

Önerme 4.6.4:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $T_1(h_1) = T_1(k_1) = 1$  olsun. Bu takdirde  $h \underset{\sim}{\sim}^{H^*} k \Rightarrow h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$  dir.

*İspat:*  $h \underset{\sim}{\sim}^{H^*} k$  olsun. Bu takdirde  $k = gh$  olacak şekilde  $\exists g \in \mathbb{H}^*$  vardır.

$$\begin{aligned} k &= gh \\ (k_1, k_2) &= g(h_1, h_2) \\ (k_1, k_2) &= (gh_1, gh_2) \\ k_1 &= gh_1, k_2 = gh_2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Şimdi de  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$  olduğunu gösterelim.  $T_1(h_1) = T_1(k_1) = 1$  olduğundan dolayı  $h_1 \in \mathbb{H}^*, k_1 \in \mathbb{H}^*$  dir. Dolayısıyla  $h^{-1}$  ve  $k^{-1}$  elemanlar mevcuttur. Bunları ve  $k_1 = gh_1, k_2 = gh_2$  eşitlikleri kullanarak  $k_1^{-1}k_2 = (gh_1)^{-1}(gh_2) = g^{-1}h_1^{-1}gh_2 = g^{-1}gh_1^{-1}h_2 = h_1^{-1}h_2$  bulunur. Buradan  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$  olduğu gösterilmiş olur.

Önerme 4.6.5:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $T_1(h_2) = T_1(k_2) = 1$  olsun. Bu takdirde  $h \underset{\sim}{\overset{H^*}{\sim}} k \implies h_2^{-1}h_1 = k_2^{-1}k_1$  dir.

*İspat:* Önerme 4.6.4'ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.6.1:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $T_1(h_1) = T_1(k_1) = 1$  olsun. Bu takdirde  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2 \implies h \underset{\sim}{\overset{H^*}{\sim}} k$  dir.

*İspat:*  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$  olsun.  $h \underset{\sim}{\overset{H^*}{\sim}} k$  olduğunu göstermeliyiz. Bunun için  $k = gh$  olacak şekilde  $\exists g \in H^*$  bulunmalıdır.  $T_1(h_1) = T_1(k_1) = 1$  olduğundan  $h_1 \in \mathbb{H}^*$  ve  $k_1 \in \mathbb{H}^*$  dir. Buradan,  $\mathbb{H}^*$  grup olduğundan dolayı,  $k_1 h_1^{-1} \in \mathbb{H}^*$  dir.  $g = k_1 h_1^{-1}$  olsun. Buradan  $k_1 = gh_1$  olur. Şimdi  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$  eşitliğinden  $k_1 h_1^{-1} h_2 = k_2$  elde edilir.  $g = k_1 h_1^{-1}$  eşitliği kullanılarak,  $k_2 = gh_2$  bulunur. Dolayısıyla  $k_1 = gh_1$  ve  $k_2 = gh_2$  yani  $h \underset{\sim}{\overset{H^*}{\sim}} k$  dir.

Teorem 4.6.2:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $T_1(h_2) = T_1(k_2) = 1$  olsun. Bu takdirde  $h_2^{-1}h_1 = k_2^{-1}k_1 \implies h \underset{\sim}{\overset{H^*}{\sim}} k$  dir.

*İspat:* Teorem 4.6.1'in ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.6.1 ve Teorem 4.6.2 de  $T_1(h) = (1,1), T_1(h) = (1, 1 + \delta), T_1(h) = (1, 1 - \delta), T_1(h) = (1 + \delta, 1), T_1(h) = (1 - \delta, 1)$  durumlar tam olarak incelenmiş oldu.

Şimdi incelenmeyen  $T_1(h) = (1 + \delta, 1 + \delta), T_1(h) = (1 + \delta, 1 - \delta), T_1(h) = (1 - \delta, 1 + \delta), T_1(h) = (1 - \delta, 1 - \delta)$  durumları inceleyelim.

$T_1(h) = (1 + \delta, 1 + \delta)$  durumunda  $h = (h_1, h_2)$  2-lisinin elemanları  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 + \delta)$  şeklindedir. Burada  $r_1 \neq 0$  ve  $r_2 \neq 0$  dir.

Önerme 4.6.6:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2, T_1(h) = T_1(k) = (1 + \delta, 1 + \delta)$  ve  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 + \delta), r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 + \delta), k_2 = q_2(1 + \delta), q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun. Bu takdirde  $h \underset{\sim}{\overset{H^*}{\sim}} k \implies r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  dir.

*İspat:* Kabul edelim ki,  $h \underset{\sim}{\overset{H^*}{\sim}} k$  olsun. Bu takdirde  $k = gh$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in \mathbb{H}^*$  mevcuttur. Buradan  $k_1 = q_1(1 + \delta) = gh_1 = (a + \delta b)r_1(1 + \delta) = r_1(a + b)(1 + \delta)$  ve  $k_2 = q_2(1 + \delta) = gh_2 = (a + \delta b)r_2(1 + \delta) = r_2(a + b)(1 + \delta)$  eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden  $q_1 = r_1(a + b)$  ve  $q_2 = r_2(a + b)$

eşitlikleri elde edilir. Önerme 3.1.2 ye göre  $a + b \neq 0$  dir. Böylece  $q_1 = r_1(a + b)$ ,  $q_2 = r_2(a + b)$  eşitliklerinden  $r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  bulunur.

Teorem 4.6.3:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$ ,  $T_1(h) = T_1(k) = (1 + \delta, 1 + \delta)$  ve  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 + \delta)$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 + \delta), k_2 = q_2(1 + \delta), q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun. Bu takdirde  $r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1 \Rightarrow h \underset{\sim}{\overset{H^*}{\sim}} k$  dir.

*İspat:* Kabul edelim ki  $r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  olsun. Buradan  $q_1 = (q_2 r_2^{-1})r_1$  bulunur.  $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0$  ve  $q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$  olduğundan  $q_2 r_2^{-1} \neq 0$  elde edilir.  $a = q_2 r_2^{-1}$  olsun. Bu takdirde  $q_1 = ar_1$  ve  $q_2 = ar_2$  olur. Şimdi  $g = a + \delta b, b = 0$  alalım. Bu takdirde  $g^{-1} = a^{-1}$  dir. Dolayısıyla  $g \in \mathbb{H}^*$  bulunur. Böylece  $k_1 = q_1(1 + \delta) = ar_1(1 + \delta) = ah_1 = gh_1$  ve  $k_2 = q_2(1 + \delta) = ar_2(1 + \delta) = ah_2 = gh_2$  eşitlikleri elde edilir. Buradan  $h = gk$  yazılabilir. O halde,  $h \underset{\sim}{\overset{H^*}{\sim}} k$  dir.

$T_1(h) = (1 - \delta, 1 - \delta)$ , için  $h = (h_1, h_2)$  2 -lisinin elemanları,  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 + \delta)$  şeklindedir.  $r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  dir.

Teorem 4.6.4:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$ ,  $T_1(h) = T_1(k) = (1 - \delta, 1 - \delta)$  ve  $h_1 = r_1(1 - \delta), h_2 = r_2(1 - \delta), r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 - \delta), k_2 = q_2(1 - \delta), q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun. Bu takdirde  $h \underset{\sim}{\overset{H^*}{\sim}} k \Leftrightarrow r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  dir.

*İspat:* Önerme 4.6.6 ve Teorem 4.6.3 ün ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Son olarak  $T_1(h) = (1 + \delta, 1 - \delta), T_1(h) = (1 - \delta, 1 + \delta)$  durumlarını inceleyelim.

$T_1(h) = (1 + \delta, 1 - \delta)$  için  $h = (h_1, h_2)$  2 -lisinin elemanları  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 - \delta)$  şeklindedir. Burada,  $r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  dir.

Teorem 4.6.5:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$ ,  $T_1(h) = T_1(k) = (1 + \delta, 1 - \delta)$  ve  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 - \delta), r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 + \delta), k_2 = q_2(1 - \delta), q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun. Bu takdirde  $h \underset{\sim}{\overset{H^*}{\sim}} k$  dir.

*İspat:*  $a = \frac{1}{2}(r_1^{-1}q_1 + r_2^{-1}q_2)$  ,  $b = \frac{1}{2}(r_1^{-1}q_1 - r_2^{-1}q_2)$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in \mathbb{H}^*$  alalım.  $(a + b) = r_1^{-1}q_1$  ve  $(a - b) = r_2^{-1}q_2$  dir. Böylece  $a^2 - b^2 = r_1^{-1}q_1 r_2^{-1}q_2 \neq 0$  bulunur. Dolayısıyla  $g = a + \delta b \in \mathbb{H}^*$  dir.  $(a + b) = r_1^{-1}q_1, (a - b) = r_2^{-1}q_2$  eşitliklerinden  $q_1 = r_1(a + b), q_2 = r_2(a - b)$  eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden  $k_1 = q_1(1 + \delta) = r_1(a + b)(1 + \delta) = (a +$

$\delta b)r_1(1 + \delta) = gh_1$  ve  $k_2 = q_2(1 - \delta) = r_2(a + b)(1 - \delta) = (a + \delta b)r_2(1 - \delta) = gh_2$  eşitlikleri bulunur. Dolayısıyla  $k = gh$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in \mathbb{H}^*$  mevcuttur.

$T_1(h) = (1 - \delta, 1 + \delta)$  için  $h = (h_1, h_2)$  2-lisinin elemanları,  $h_1 = r_1(1 - \delta), h_2 = r_2(1 + \delta)$  şeklindedir. Burada,  $r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  dır.

**Teorem 4.6.6:**  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2, T_1(h) = T_1(k) = (1 - \delta, 1 + \delta)$  ve  $h_1 = r_1(1 - \delta), h_2 = r_2(1 + \delta), r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 - \delta), k_2 = q_2(1 + \delta), q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun. Bu takdirde  $h \underset{\sim}{H^*} k$  dır.

*İspat:* Teorem 4.6.5 in ispatına benzer şekilde yapılır.

**Tanım 4.6.1:** Eğer  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{H}^m, i \in \{1, 2, \dots, m\}, m$ -lisi için  $T_1(h_i) = 1$  ise, bu  $m$ -liye  $\mathbb{H}^*$ -bozulmamış  $m$ -li denir. Bu şekilde  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  yoksa, bu  $m$ -liye  $\mathbb{H}^*$ -bozulmuş  $m$ -li denir.

Eğer  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$   $m$ -lileri için,  $h \underset{\sim}{H^*} k$  ve  $h, \mathbb{H}^*$ -bozulmamış ise,  $k$  da  $\mathbb{H}^*$ -bozulmamıştır.

Eğer  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$   $m$ -liler öyle ki,  $h \underset{\sim}{H^*} k$  ve  $h, \mathbb{H}^*$ -bozulmuş ise,  $k$  da  $\mathbb{H}^*$ -bozulmuştur.

**Önerme 4.6.7:**  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m, m$ -lileri için  $T_1(h_1) = T_1(k_1) = 1$  yani  $h_i = x_i + \delta y_i, k_i = z_i + \delta w_i$ , ve  $|x_1| \neq |y_1|, |z_1| \neq |w_1|, x_i, y_i, z_i, w_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m$  olsun. Bu takdirde  $h \underset{\sim}{H^*} k \implies h_1^{-1}h_j = k_1^{-1}k_j, j = 2, 3, \dots, m$  dir.

**İspat:**  $h \underset{\sim}{H^*} k$  olsun. Bu takdirde  $k = gh$  olacak şekilde  $\exists g \in \mathbb{H}^*$  vardır.

$$\begin{aligned} k &= gh, \\ (k_1, k_2, \dots, k_m) &= g(h_1, h_2, \dots, h_m), \\ (k_1, k_2, \dots, k_m) &= (gh_1, gh_2, \dots, gh_m), \\ k_1 &= gh_1, k_2 = gh_2, \dots, k_m = gh_m \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi de  $h_1^{-1}h_j = k_1^{-1}k_j, j = 2, 3, \dots, m$  olduğunu gösterelim:  $k_1^{-1}k_j = (gh_1)^{-1}(gh_j) = g^{-1}h_1^{-1}gh_j = g^{-1}gh_1^{-1}h_j = h_1^{-1}h_j$  dir. Buradan  $h_1^{-1}h_j = k_1^{-1}k_j$  bulunur.

Teorem 4.6.7:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $m$ -lileri için  $T_1(h_1) = T_1(k_1) = 1$  ve  $h_1^{-1}h_j = k_1^{-1}k_j$ ,  $j = 2, 3, \dots, m$ , olsun. Bu takdirde  $h \sim^{H^*} k$  dir.

*İspat* :  $h_1^{-1}h_j = k_1^{-1}k_j, j = 2, 3, \dots, m$  olsun.  $h \sim^{H^*} k$  olduğunu göstermeliyiz. Bunun için  $k = gh$  olacak şekilde  $\exists g \in \mathbb{H}^*$  var olmalıdır.  $T_1(h_1) = 1$  olduğundan  $h_1^{-1}$  mevcuttur.  $T_1(k_1) = 1$  olduğundan  $k_1^{-1}$  mevcuttur. Dolayısıyla  $k_1 = gh_1$  olacak şekilde  $g \in \mathbb{H}^*$  vardır ve  $g = k_1 h_1^{-1}$  dir. Bu eşitliği ve  $h_1^{-1}h_j = k_1^{-1}k_j$  kullanarak,  $h_1^{-1}h_j = (gh_1)^{-1}k_j$  eşitliği elde edilir. Buradan  $h_1^{-1}h_j = h_1^{-1}g^{-1}k_j$  dir. Eşitliğin her iki tarafını  $h_1$  ile işleme alırsak,  $h_j = g^{-1}k_j$  bulunur. Burada her iki tarafı  $g$  ile işleme alırsak,  $k_j = gh_j$  yani tüm  $j = 1, 2, \dots, m$  için  $k_j = gh_j$  olacak şekilde  $g \in \mathbb{H}^*$  bulunabilir.

Önerme 4.6.8:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $m$ -lileri için  $p \in \{2, 3, \dots, m\}$  olmak üzere  $T_1(h_p) = T_1(k_p) = 1$  olsun. Bu takdirde  $h \sim^{H^*} k \implies h_p^{-1}h_j = k_p^{-1}k_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, m$  dir.

*İspat*: Önerme 4.6.7 nin ispatına benzerdir.

Teorem 4.6.8:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $m$ -lileri için  $p \in \{2, 3, \dots, m\}$  olmak üzere  $T_1(h_p) = T_1(k_p) = 1$  ve  $h_p^{-1}h_j = k_p^{-1}k_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, m$  olsun. Bu takdirde  $h \sim^{H^*} k$  dir.

*İspat*: Teorem 4.6.7 nin ispatına benzerdir.

*Örnek 4.6.1*:  $h = (h_1, h_2) = (1, 2)$  ve  $k = (k_1, k_2) = (1, 3)$ , 2-lilerini alalım. Bunların tipleri eşittir:  $T_1(h_1) = T_1(1) = 1$ ,  $T_1(h_2) = T_1(2) = 1$ ,  $T_1(k_1) = T_1(1) = 1$ ,  $T_1(k_2) = T_1(3) = 1$ . Dolayısıyla bunlar  $\mathbb{H}^*$ -bozulmamış 2-lilerdir. Eğer bu 2-liler  $\mathbb{H}^*$ -denk olsaydı, Önerme 4.6.4 göre  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$  olacaktı. Fakat  $h_1^{-1}h_2 = 1 \cdot 2 = 2 \neq k_1^{-1}k_2 = 1 \cdot 3 = 3$  dur. Dolayısıyla  $T_1(h) = T_1(k)$ , fakat  $h$  ve  $k$  2-liler  $\mathbb{H}^*$ -denk değildir yani tip  $T_1(h)$  tam invaryanlar sistemi değildir.

Not:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $\mathbb{H}^*$ -bozulmamış  $m$ -liler olsun. Eğer  $T_1(h) \neq T_1(k)$  ise Sonuç 4.6.2 göre bu  $m$ -liler  $\mathbb{H}^*$ -denk değildir. Kabul edelim ki  $T_1(h) = T_1(k)$  olsun. Bu takdirde  $h$ ,  $\mathbb{H}^*$ -nondegenerate

olduğundan bir  $p \in \{1,2,3, \dots, m\}$  için  $T_1(h_p) = 1$  dir. Buradan ve  $T_1(h) = T_1(k)$  eşitliğinden  $T_1(h_p) = T_1(k_p) = 1$  dir. Dolayısıyla Önerme 4.6.7, Önerme 4.6.8, Teorem 4.6.7, Teorem 4.6.8 den  $\mathbb{H}^*$  –bozulmamış  $m$  –lilerin  $\mathbb{H}^*$  –denklik problemi tam olarak çözülmüş olur.

$h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $\mathbb{H}^*$  –bozulmuş  $m$  –li olsun. Bu takdirde tüm  $j \in \{1,2, \dots, m\}$  için  $T_1(h_j) = 1 + \delta$  veya  $T_1(h_j) = 1 - \delta$  dir.

$h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $\mathbb{H}^*$  –bozulmuş  $m$  –li ve tüm  $j \in \{1,2, \dots, m\}$  için  $T_1(h_j) = 1 + \delta$  olsun. Bu durumda  $h$ ,  $m$  –linin elemanları  $h_1 = r_1(1 + \delta), \dots, h_m = r_m(1 + \delta)$  şeklindedir. Burada  $r_1 \neq 0, \dots, r_m \neq 0$  dir.

Önerme 4.6.9:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $\mathbb{H}^*$  –bozulmuş  $m$  –liler ve  $\forall j \in \{1,2, \dots, m\}$  için  $T_1(h_j) = T_1(k_j) = 1 + \delta$  ve  $h_1 = r_1(1 + \delta), \dots, h_m = r_m(1 + \delta)$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 + \delta), \dots, k_m = q_m(1 + \delta)$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$ , olsun. Bu takdirde  $h \stackrel{H^*}{\sim} k \implies r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$   $j = 2, \dots, m$  dir.

*İspat:*  $h \stackrel{H^*}{\sim} k$  olsun. Bu takdirde  $k = gh$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in \mathbb{H}^*$  mevcuttur. Buradan  $k_j = q_j(1 + \delta) = gh_j = (a + \delta b)r_j(1 + \delta) = r_j(a + b)(1 + \delta)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  bulunur. Bu eşitliklerden  $q_j = r_j(a + b)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  elde edilir. Önerme 3.1.2'ye göre  $a + b \neq 0$  dir. Buradan ve  $q_j = r_j(a + b)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  olduğundan  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$   $j = 2, \dots, m$  bulunur.

Teorem 4.6.9:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $\mathbb{H}^*$  –bozulmuş  $m$  –liler ve  $\forall j \in \{1,2, \dots, m\}$  için  $T_1(h_j) = T_1(k_j) = 1 + \delta$  ve  $h_1 = r_1(1 + \delta), \dots, h_m = r_m(1 + \delta)$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 + \delta), \dots, k_m = q_m(1 + \delta)$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun. Bu takdirde  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1 \implies h \stackrel{H^*}{\sim} k_j^{-1}$ ,  $j = 2, \dots, m$  dir.

*İspat:*  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$ ,  $j = 2, \dots, m$  olsun.  $r_j \neq 0, q_j \neq 0$  olduğundan  $q_j r_j^{-1} \neq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , dir.  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$ ,  $j = 2, \dots, m$ , olduğundan  $q_j r_j^{-1} = q_1 r_1^{-1}$ ,  $j = 2, \dots, m$  elde edilir.  $c = q_1 r_1^{-1}$  olsun.  $q_j r_j^{-1} = q_1 r_1^{-1} = c$ ,  $j = 2, \dots, m$  olduğundan  $q_j = c r_j$ ,  $j = 2, \dots, m$ , bulunur. Şimdi  $g = c$  alalım. Böylece

$k_j = q_j(1 + \delta) = cr_j(1 + \delta) = ac = gh_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  elde edilir. Buradan  $h = gk$  dir. O halde  $h \underset{\sim}{\sim}^{H^*} k$  dir.

Önerme 4.6.10:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $\mathbb{H}^*$  –bozulmuş  $m$  –liler ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_1(h_j) = T_1(k_j) = 1 - \delta$  ve  $h_1 = r_1(1 - \delta), \dots, h_m = r_m(1 - \delta)$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 - \delta), \dots, k_m = q_m(1 - \delta)$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun. Bu takdirde  $h \underset{\sim}{\sim}^{H^*} k \Rightarrow r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1, j = 2, \dots, m$  dir.

*İspat:* Önerme 4.6.9 un ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.6.10:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $\mathbb{H}^*$  –degenerate  $m$  –liler ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_1(h_j) = T_1(k_j) = 1 - \delta$  ve  $h_1 = r_1(1 - \delta), \dots, h_m = r_m(1 - \delta)$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 - \delta), \dots, k_m = q_m(1 - \delta)$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun. Bu takdirde  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1, j = 2, \dots, m \Rightarrow h \underset{\sim}{\sim}^{H^*} k$ , dir.

*İspat:* Teorem 4.6.9 un ispatına benzer şekilde yapılır.

$D$  ve  $E$  kümeleri  $\{1, 2, \dots, m\}$  kümesinin altkümeleri,  $D \neq \emptyset, E \neq \emptyset, D \cap E = \emptyset$  ve  $D \cup E = \{1, 2, \dots, m\}$  olsun.  $D$ 'nin en küçük elemanı 1 ve  $E$ 'nin en küçük elemanı  $p$  olsun. ( $E$ 'nin en küçük elemanı 1 ve  $D$ 'nin en küçük elemanı  $p$  olan durum benzer şekilde incelenir.)

Önerme 4.6.11:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $\mathbb{H}^*$  –degenerate  $m$  –liler,  $\forall i \in D$  için  $T_1(h_i) = 1 + \delta$ ,  $h_i = r_i(1 + \delta), r_i \in \mathbb{R}^*$ ,  $\forall j \in E$  için  $T_1(k_j) = 1 - \delta$ ,  $k_j = q_j(1 - \delta), q_j \in \mathbb{R}^*$  olsun. Bu takdirde  $h \underset{\sim}{\sim}^{H^*} k$  ise  $\forall i \in D$  için  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1$  ve  $\forall j \in E$  için  $r_j^{-1}r_p = q_j^{-1}q_p$  dir.

*İspat:*  $h \underset{\sim}{\sim}^{H^*} k$  olsun. Bu takdirde  $k = gh$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in \mathbb{H}^*$  mevcuttur. Buradan  $\forall i \in D$  için  $k_i = q_i(1 + \delta) = gh_i = (a + \delta b)r_i(1 + \delta) = r_i(a + b)(1 + \delta)$ , ve  $\forall j \in E$  için  $k_j = q_j(1 - \delta) = gh_j = (a + \delta b)r_j(1 - \delta) = r_j(a + b)(1 - \delta)$ , bulunur. Bu eşitliklerden  $\forall i \in D$  için  $q_i = r_i(a + b)$  ve  $\forall j \in E$  için  $q_j = r_j(a - b)$  elde edilir. Önerme 3.1.2 ye göre  $a + b \neq 0$  ve  $a - b \neq 0$  dir.  $\forall i \in D$  için  $q_i = r_i(a + b)$  ve  $\forall j \in E$  için  $q_j = r_j(a - b)$  olduğundan  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1$  ve  $r_j^{-1}r_p = q_j^{-1}q_p$  bulunur.

Teorem 4.6.11:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $\mathbb{H}^*$  –bozulmuş  $m$  –liler olsun. Farz edelim ki  $\forall i \in D$  için  $T_1(h_i) = 1 + \delta$ ,  $h_i = r_i(1 + \delta), r_i \in \mathbb{R}^*$ , ve  $\forall j \in E$  için  $T_1(k_j) = 1 - \delta$ ,  $k_j = q_j(1 - \delta), q_j \in \mathbb{R}^*$  olsun. Bu takdirde  $\forall i \in D$  için  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1$  ve  $\forall j \in E$  için  $r_j^{-1}r_p = q_j^{-1}q_p \Rightarrow h \underset{\sim}{\sim}^{H^*} k$  dir.

*İspat:*  $\forall i \in D$  için  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1$  ve  $\forall j \in E$  için  $r_j^{-1}r_p = q_j^{-1}q_p$  olsun.  $a = \frac{1}{2}(r_1^{-1}q_1 + r_p^{-1}q_p)$ ,  $b = \frac{1}{2}(r_1^{-1}q_1 - r_p^{-1}q_p)$  olmak üzere  $g = a + \delta b \in \mathbb{H}^*$  alalım. Buradan  $(a + b) = r_1^{-1}q_1, (a - b) = r_p^{-1}q_p$  bulunur. Bu eşitliklerden  $q_1 = r_1(a + b), q_p = r_p(a - b)$  elde edilir. Böylece,  $k_1 = q_1(1 + \delta) = gh_1 = (a + \delta b)r_1(1 + \delta) = r_1(a + b)(1 + \delta)$  ve  $k_p = q_p(1 - \delta) = gh_p = (a + \delta b)r_p(1 - \delta) = r_p(a + b)(1 - \delta)$  dir.  $r_j \neq 0, q_j \neq 0$  olduğundan  $q_j r_j^{-1} \neq 0, j = 1, 2, \dots, m$  dir.  $\forall i \in D$  için  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1$  ve  $\forall j \in E$  için  $r_j^{-1}r_p = q_j^{-1}q_p$  olduğundan  $q_i r_i^{-1} = q_1 r_1^{-1} = a + b$ ,  $q_j r_j^{-1} = q_p r_p^{-1} = a - b$  bulunur. Bu takdirde  $q_i r_i^{-1} = q_1 r_1^{-1} = a + b$  eşitliğinden  $q_i = r_i(a + b)$  elde edilir.  $q_j r_j^{-1} = q_p r_p^{-1} = a - b$  eşitliğinden  $q_j = r_j(a - b)$  elde edilir. Bu eşitliklerden  $\forall i \in D$  için  $k_i = q_i(1 + \delta) = (a + b)r_i(1 + \delta) = (a + \delta b)r_i(1 + \delta) = gh_i$  ve  $\forall j \in E$  için  $k_j = q_j(1 - \delta) = (a - b)r_j(1 - \delta) = (a + \delta b)r_j(1 - \delta) = gh_j$  olur. Böylece  $h = gk$  bulunur. O halde  $h \underset{\sim}{\sim}^{H^*} k$  dir.

Dolayısıyla  $\mathbb{H}^*$  grubu için tüm durumlar incelendi ve  $\mathbb{H}^*$  –Denklik Problemi tam olarak çözüldü.

#### 4.7. $W(\mathbb{H}^*)$ -Denklik Probleminin $\mathbb{H}^*$ -Denklik Problemi Yardımıyla çözümü

Bu kısımda  $u_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+1}, i = 1, 2, \dots, m$  için  $\begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix} = x_i y_j - x_j y_i$  determinantını  $[u_i, u_j]$  şeklinde gösterelim ve  $\langle u_i, u_j \rangle = x_i x_j - y_i y_j$  olsun.

Lemma 4.7.1:  $u_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+1}, i = 1, 2, \dots, m$ , ve  $u_1 \in \mathbb{H}^*$  olsun. Bu takdirde

$$u_1^{-1}u_i = \frac{\langle u_1, u_i \rangle + \delta [u_1, u_i]}{\langle u_1, u_1 \rangle} = \frac{\langle u_1, u_i \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} + \delta \frac{[u_1, u_i]}{\langle u_1, u_1 \rangle} \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} \text{İspat: } u_1^{-1}u_i &= (x_1 + \delta y_1)^{-1}(x_i + \delta y_i) = \frac{x_1 - \delta y_1}{x_1^2 - y_1^2}(x_i + \delta y_i) \\ &= \frac{(x_1 x_i - y_1 y_i) + \delta(x_1 y_i - x_i y_1)}{x_1^2 - y_1^2} = \frac{\langle u_1, u_i \rangle + \delta [u_1, u_i]}{\langle u_1, u_1 \rangle}. \end{aligned}$$

Bu bölümde  $\mathbb{R}^{1+1}$  deki  $m$  noktadan oluşan iki sistemin  $W(\mathbb{H}^*)$  –denklik problemini inceleyeceğiz. Önce  $m = 1$  ve  $m = 2$  için iki sistemin  $W(\mathbb{H}^*)$  –denklik problemini ele alacağız.

$m = 1$  olsun. Bu durumda  $W(\mathbb{H}^*)$  –denklik probleminin çözümü  $W(\mathbb{H}^*)$  grubunun  $\mathbb{R}^{1+1}$  uzayındaki  $(g, h) \rightarrow W(g)F(h)$  etkisine göre  $W(\mathbb{H}^*)$  –yörüngelerinin bulunmasına indirgenir.  $\mathbb{R}^* = \{r \in \mathbb{R} | r \neq 0\}$  ve  $F$  önerme 4.2.1 de tanımlanan dönüşüm olsun.

Önerme 4.7.1:  $W(\mathbb{H}^*)$  grubunun  $\mathbb{R}^{1+1}$  uzayındaki  $(W(g), x) \rightarrow W(g)x$  etkisine göre sadece dört  $W(\mathbb{H}^*)$  –yörüngesi vardır. Bu yörüngeler:  $F(\mathbb{H}^*) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 - b^2 \neq 0 \right\}, \left\{ r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}^* \right\}, \left\{ r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}^* \right\}, \{0\}$ .

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.6.1 ve Sonuç 4.5.1 den açıktır.

$W(\mathbb{H}^*)$  grubunun  $W(\mathbb{H}^*)$  yörüngelerini gösterelim. Eğer  $u \in \mathbb{R}^{1+1}$  elemanı için  $u \in W(\mathbb{H}^*)$  ise  $u$  nun tipi 1dir diyelim ve bunu  $T_1(u) = 1$  şeklinde yazalım.  $W(\mathbb{H}^*)$  grubunun  $\left\{ r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}^* \right\}$  yörüngesinin tipi  $1 + \delta$  olsun. Eğer  $u \in \mathbb{R}^{1+1}$  elemanı için  $u \in \left\{ r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}^* \right\}$  ise  $u$  nin tipi  $1 + \delta$  dır diyelim ve bunu  $T_1(u) = 1 + \delta$  şeklinde yazalım.

$W(\mathbb{H}^*)$  grubunun  $\left\{ r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}^* \right\}$  yörüngesinin tipi  $1 - \delta$  olsun. Eğer  $u \in \mathbb{R}^{1+1}$  elemanı için  $u \in \left\{ r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}^* \right\}$  ise  $u$  nin tipi  $1 - \delta$  diyelim ve bunu  $T_1(u) = 1 - \delta$  şeklinde yazalım.

$W(\mathbb{H}^*)$  grubunun  $\{0\}$  yörüngesinin tipi 0 olsun. Eğer  $u \in \mathbb{R}^{1+1}$  elemanı için  $u = 0$  ise  $u$  nun tipi 0 dır diyelim ve bunu  $T_1(0) = 0$  şeklinde yazalım.

Önerme 4.7.2: Keyfi  $h \in H$  için  $T_1(h) = T_1(F(h))$  dir.

*İspat:* Önerme 4.6.1, Önerme 4.7.1 ve Sonuç 4.5.1 den açıktır.

Şimdi  $x = \{x_1, \dots, x_m\}$ ,  $\mathbb{R}^{1+1}$ 'nin bir  $m$  –lisi olmak üzere  $T_1(x_i) = t_i$  olsun, burada  $t_i = 1, 1 + \delta, 1 - \delta$  veya 0 dır. Bu takdirde  $(t_1, \dots, t_m)$ ,  $m$  –li' dizisine  $\{x_1, \dots, x_m\}$   $m$  –lisinin tipi diyelim ve  $T_1(x) = (t_1, \dots, t_m)$ , şeklinde veya  $T_1\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  şeklinde gösterelim.

Önerme 4.7.3: Eğer  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  elemanları için  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \stackrel{W(H^*)}{\sim} \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$  ise, bu takdirde  $T_1(x) = T_1(y)$  dir yani  $m$  –linin tipi  $W(\mathbb{H}^*)$  –invarianttır.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.5.1 ve Önerme 4.7. 2 den açıktır.

Sonuç 4.7.1: Eğer  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  elemanları için  $T_1\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \neq T_1\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  ise  $x$  ve  $y$   $m$  –liler  $W(\mathbb{H}^*)$  –denk değildir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.7.3 den açıktır.

Sonuç 4.7.2: Eğer  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  elemanları ve  $\exists p \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_1(x_p) \neq T_1(y_p)$  ise  $x$  ve  $y$   $m$  –liler  $W(\mathbb{H}^*)$  –denk değildir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Sonuç 4.7.1 den açıktır.

Sonuç 4.7.2 den iki  $m$  –linin  $W(\mathbb{H}^*)$  –denklik şartı incelenirken, onların tiplerinin eşit olması şartı gerektiği elde edilir.

$G, \mathbb{H}^*$  nin bir altgrubu olsun. İleride iki  $m$  –linin  $W(G)$  –denklik problemini incelerken, bu  $m$  –lilerin tüm elemanlarını sıfırdan farklı olarak alacağız.

Şimdi  $m = 2$  durumunu inceleyelim.  $\mathbb{R}^{1+1}$  de keyfi bir  $x = \{x_1, x_2\}$  2 –lisini göz önüne alalım, burada  $x_1, x_2$ ’in her biri sıfırdan farklıdır. Bu ikilinin tipi için şu durumlar vardır,  $T_1(x) = (1, 1), T_1(x) = (1, 1 + \delta), T_1(x) = (1, 1 - \delta), T_1(x) = (1 + \delta, 1), T_1(x) = (1 + \delta, 1 + \delta), T_1(x) = (1 + \delta, 1 - \delta), T_1(x) = (1 - \delta, 1), T_1(x) = (1 - \delta, 1 + \delta), T_1(x) = (1 - \delta, 1 - \delta)$ .

Eğer  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $T_1(x_1) \neq T_1(y_1)$  ise, Sonuç 4.7.2’e göre  $x$  ve  $y$  2 –liler  $W(\mathbb{H}^*)$  –denk değildir.

Önerme 4.7.4:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $T_1(x_1) = T_1(y_1) = 1$  olsun.

Bu takdirde  $x \stackrel{W(H^*)}{\sim} y \implies \frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_2 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}, \frac{[x_1, x_2]}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{[y_1, y_2]}{\langle y_1, y_1 \rangle}$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.6.4 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Önerme 4.7.5:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $T_1(x_2) = T_1(y_2) = 1$  olsun.

Bu takdirde  $x \stackrel{W(H^*)}{\sim} y \implies \frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\langle x_2, x_2 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle}, \frac{[x_1, x_2]}{\langle x_2, x_2 \rangle} = \frac{[y_1, y_2]}{\langle y_2, y_2 \rangle}$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.6.5 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Teorem 4.7.1:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $T_1(x_1) = T_1(y_1) = 1$  olsun.

Bu takdirde  $\frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_2 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}, \frac{[x_1, x_2]}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{[y_1, y_2]}{\langle y_1, y_1 \rangle} \Rightarrow x \stackrel{W(H^*)}{\sim} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Teorem 4.6.1 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Teorem 4.7.2:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $T_1(x_2) = T_1(y_2) = 1$  olsun.

Bu takdirde  $\frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\langle x_2, x_2 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle}, \frac{[x_1, x_2]}{\langle x_2, x_2 \rangle} = \frac{[y_1, y_2]}{\langle y_2, y_2 \rangle} \Rightarrow x \stackrel{W(H^*)}{\sim} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Teorem 4.6.2 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Teorem 4.7.1 ve Teorem 4.7.2 de  $T_1(x) = (1, 1), T_1(x) = (1, 1 + \delta), T_1(x) = (1, 1 - \delta), T_1(x) = (1 + \delta, 1), T_1(x) = (1 - \delta, 1)$  durumları tam olarak incelendi. İncelenmeyen durumları  $T_1(x) = (1 + \delta, 1 + \delta), T_1(x) = (1 + \delta, 1 - \delta), T_1(x) = (1 - \delta, 1 + \delta), T_1(x) = (1 - \delta, 1 - \delta)$  durumlarıdır. Bu durumları inceleyelim:  $T_1(x) = (1 + \delta, 1 + \delta)$  durumda  $x = (x_1, x_2)$  2 -linin elemanları şu şekildedir,  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , burada  $r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$ .

Önerme 4.7.6:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y_2 = q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$ , olsun. Bu takdirde  $x \stackrel{W(H^*)}{\sim} y \Rightarrow r_2^{-1} r_1 = q_2^{-1} q_1$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Önerme 4.6.6 dan açıktır.

Teorem 4.7.3:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y_2 = q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$ , olsun. Bu takdirde  $r_2^{-1} r_1 = q_2^{-1} q_1 \Rightarrow x \stackrel{W(H^*)}{\sim} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.6.3 den açıktır.

$T_1(x) = (1 - \delta, 1 - \delta)$  durumunda  $x = (x_1, x_2)$  2-lisinin elemanları şu şekildedir:  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , burada  $r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  dir.

Teorem 4.7.4:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, y_2 = q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$ , olsun. Bu takdirde  $x \stackrel{W(H^*)}{\sim} y \Leftrightarrow r_2^{-1} r_1 = q_2^{-1} q_1$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.6.4 den açıktır.

Şimdi incelenmeyen  $T_1(x) = (1 + \delta, 1 - \delta)$  ve  $T_1(x) = (1 - \delta, 1 + \delta)$  durumlarını inceleyelim:  $T_1(x) = (1 + \delta, 1 - \delta)$  durumunda  $x = (x, x_2)$  2 –lisinin elemanları  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  şeklindedir. Burada  $r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  dir.

**Teorem 4.7.5:**  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y_2 = q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun. Bu takdirde  $x \stackrel{W(H^*)}{\sim} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.6.5 den açıktır.

$T_1(x) = (1 - \delta, 1 + \delta)$  durumunda  $x = (x, x_2)$  2 –lisinin elemanları  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  şeklindedir. Burada  $r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  dir.

**Teorem 4.7.6:**  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, y_2 = q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$ , olsun. Bu takdirde  $x \stackrel{W(H^*)}{\sim} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.6.6 dan açıktır.

$m$  bir doğal sayı ve  $m > 2$  olsun.

**Tanım 4.7.1:** Eğer  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  olmak üzere bir  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_1(x_i) = 1$  ise, bu  $m$  –liye  $\mathbb{H}^*$  –bozulmamış  $m$  –li denir. Böyle özellikli  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  yoksa, bu  $m$  –liye  $\mathbb{H}^*$  –bozulmuş  $m$  –li denir.

Eğer  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$   $m$  –lileri için,  $x \stackrel{W(H^*)}{\sim} y$  ve  $x, \mathbb{H}^*$  –bozulmamış ise,  $y$  de  $\mathbb{H}^*$  – bozulmamışdır.

Eğer  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$   $m$  –lileri için,  $x \stackrel{W(H^*)}{\sim} y$  ve  $x, \mathbb{H}^*$  –bozulmuş ise,  $y$  de  $\mathbb{H}^*$  – bozulmuşdur.

**Önerme 4.7.7:**  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$   $m$  –liler için,  $T_1(x_1) = T_1(y_1) = 1$  olsun. Bu takdirde  $x \stackrel{W(H^*)}{\sim} y \implies \frac{\langle x_1, x_j \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_j \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}, \frac{[x_1, x_j]}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{[y_1, y_j]}{\langle y_1, y_1 \rangle}, j = 2, 3, \dots, m$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.6.7 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Teorem 4.7.7:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $m$  –liler için,  $T_1(x_1) = T_1(y_1) = 1$  ve  $\frac{\langle x_1, x_j \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_j \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}, \frac{[x_1, x_j]}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{[y_1, y_j]}{\langle y_1, y_1 \rangle}$ ,  $j = 2, 3, \dots, m$ , olsun. Bu takdirde  $x \underset{\sim}{W(H^*)} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Teorem 4.6.7 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Önerme 4.7.8:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $m$  –liler olmak üzere bir  $p \in \{2, 3, \dots, m\}$  için  $T_1(x_p) = T_1(y_p) = 1$  olsun. Bu takdirde  $x \underset{\sim}{W(H^*)} y$  ise  $\frac{\langle x_p, x_j \rangle}{\langle x_p, x_p \rangle} = \frac{\langle y_p, y_j \rangle}{\langle y_p, y_p \rangle}, \frac{[x_p, x_j]}{\langle x_p, x_p \rangle} = \frac{[y_p, y_j]}{\langle y_p, y_p \rangle}$ ,  $j = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, m$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.6.8 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Teorem 4.7.8:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $m$  –liler olmak üzere bir  $p \in \{2, 3, \dots, m\}$  için  $T_1(x_p) = T_1(y_p) = 1$  ve  $\frac{\langle x_p, x_j \rangle}{\langle x_p, x_p \rangle} = \frac{\langle y_p, y_j \rangle}{\langle y_p, y_p \rangle}, \frac{[x_p, x_j]}{\langle x_p, x_p \rangle} = \frac{[y_p, y_j]}{\langle y_p, y_p \rangle}$ ,  $j = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, m$  olsun. Bu takdirde  $x \underset{\sim}{W(H^*)} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Teorem 4.6.8 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Not: Şimdi  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m, \mathbb{H}^*$  –bozulmamış  $m$  –liler olsun. Eğer  $T_1(x) \neq T_1(y)$  ise Sonuç 4.6.2 göre bu  $m$  –liler  $W(\mathbb{H}^*)$  –denk değildir. Kabul edelim ki,  $T_1(x) = T_1(y)$  olsun.  $x$ ,  $\mathbb{H}^*$  –bozulmamış olduğundan bir  $p \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$  için  $T_1(x_p) = 1$  dir. Buradan ve  $T_1(x) = T_1(y)$  den  $T_1(x_p) = T_1(y_p) = 1$  dir. Dolayısıyla Önerme 4.7.7, Önerme 4.7.8, Teorem 4.7.7, Teorem 4.7.8 den  $\mathbb{H}^*$  –bozulmamış  $m$  –lilerin  $W(\mathbb{H}^*)$  –denklik problemi tam olarak incelenmiş oldu.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $\mathbb{H}^*$  –bozulmuş  $m$  –li olsun. Bu takdirde  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_1(x_j) = 1 + \delta$  veya  $T_1(x_j) = 1 - \delta$  dir.

Şimdi  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $\mathbb{H}^*$  –bozulmuş  $m$  –li ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_1(x_j) = 1 + \delta$  olsun. Bu durumda  $x$   $m$  –linin elemanları  $x_1 = r_1 \binom{1}{1}, \dots, x_m = r_m \binom{1}{1}$  şeklindedir. Burada  $r_1 \neq 0, \dots, r_m \neq 0$  dir.

Önerme 4.7.9:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $\mathbb{H}^*$  –bozulmuş  $m$  –liler ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_1(x_j) = T_1(y_j) = 1 + \delta$  ve  $x_1 = r_1 \binom{1}{1}, \dots, x_m = r_m \binom{1}{1}$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \binom{1}{1}, \dots, y_m = q_m \binom{1}{1}$ ,

$q_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun. Bu takdirde  $x \stackrel{W(H^*)}{\sim} y \Rightarrow r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1, j = 2, \dots, m$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Önerme 4.6.9 dan açıktır.

Teorem 4.7.9:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m, \mathbb{H}^*$  –bozulmuş  $m$  –liler ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_1(x_j) = T_1(y_j) = 1 + \delta$  ve  $x_1 = r_1 \binom{1}{1}, \dots, x_m = r_m \binom{1}{1}, r_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \binom{1}{1}, \dots, y_m = q_m \binom{1}{1}, q_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$ , olsun. Bu takdirde  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1 \Rightarrow x \stackrel{W(H^*)}{\sim} y, j = 2, \dots, m$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.6.9 dan açıktır.

Önerme 4.7.10:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m, \mathbb{H}^*$  – bozulmuş  $m$  –liler ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_1(x_j) = T_1(y_j) = 1 - \delta$  ve  $x_1 = r_1 \binom{1}{-1}, \dots, x_m = r_m \binom{1}{-1}, r_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \binom{1}{-1}, \dots, y_m = q_m \binom{1}{-1}, q_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$ , olsun. Bu takdirde  $x \stackrel{W(H^*)}{\sim} y \Rightarrow r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1, j = 2, \dots, m$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Önerme 4.6.10 dan açıktır.

Teorem 4.7.10:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m, \mathbb{H}^*$  –bozulmuş  $m$  –liler ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_1(x_j) = T_1(y_j) = 1 - \delta$  ve  $x_1 = r_1 \binom{1}{-1}, \dots, x_m = r_m \binom{1}{-1}, r_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \binom{1}{-1}, \dots, y_m = q_m \binom{1}{-1}, q_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$ , olsun. Bu takdirde  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1 \Rightarrow x \stackrel{W(H^*)}{\sim} y, j = 2, \dots, m$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.6.10 dan açıktır.

$D$  ve  $E$  kümeleri  $\{1, 2, \dots, m\}$  kümesinin altkümeleri,  $D \neq \emptyset, E \neq \emptyset, D \cap E = \emptyset$  ve  $D \cup E = \{1, 2, \dots, m\}$  olsun.  $D$ 'nin en küçük elemanı 1 ve  $E$ 'nin en küçük elemanı  $p$  olarak verilsin.

Önerme 4.7.11:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m, \mathbb{H}^*$  –bozulmuş  $m$  –liler olmak üzere  $\forall i \in D$  için  $T_1(x_i) = 1 + \delta, x_i = r_i \binom{1}{1}, r_i \in \mathbb{R}^*$  ve  $\forall j \in E$  için  $T_1(y_j) = 1 - \delta, y_j = q_j \binom{1}{-1}, q_j \in \mathbb{R}^*$  olsun. Bu takdirde  $x \stackrel{W(H^*)}{\sim} y$  ise  $\forall i \in D$  için  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1$  ve  $\forall j \in E$  için  $r_j^{-1}r_p = q_j^{-1}q_p$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Önerme 4.6.11 den açıktır.

Teorem 4.7.11:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m, \mathbb{H}^*$  –bozulmuş  $m$  –liler olmak üzere  $\forall i \in D$  için  $T_1(x_i) = 1 + \delta, x_i = r_i \binom{1}{1}, r_i \in \mathbb{R}^*$  ve  $\forall j \in E$

için  $T_1(y_j) = 1 - \delta, y_j = q_j \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, q_j \in \mathbb{R}^*$  olsun. Bu takdirde  $\forall i \in D$  için  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1$  ve  $\forall j \in E$  için  $r_j^{-1}r_p = q_j^{-1}q_p$  ise  $x \underset{\sim}{\sim}^{W(H^*)} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.6.11 den açıktır.

Böylece  $W(\mathbb{H}^*)$  grubu için tüm durumlar incelendi ve  $W(\mathbb{H}^*)$  –Denklik Problemi tam çözülüş oldu.

#### 4.8. "m" lilerin $H_+^*$ –Denklik problemi

Bu bölümde  $m$  noktadan oluşan iki sistemin  $H_+^*$  –denklik problemini inceleyeceğiz. Önce  $m = 1$  ve  $m = 2$  için iki sistemin  $H_+^*$  –denklik problemi ele alacağız.

$m = 1$  olsun. Bu durumda  $H_+^*$  –denklik probleminin çözümü  $H_+^*$  grubunun  $H$  cebirdeki  $(g, h) \rightarrow gh$  etkisine göre  $H_+^*$  –yörüngeleri bulunmasına indirgenir.

Önerme 4.8.1:  $H_+^*$  grubunun  $H$  cebirdeki  $(g, h) \rightarrow gh$  etkisine göre sadece beş  $H_+^*$ -yörüngesi vardır. Bu yörüngeler  $H_+^*, \delta H_+^* \{r(1 + \delta) \mid r \in \mathbb{R}^*\}, \{r(1 - \delta) \mid r \in \mathbb{R}^*\}, \{0\}$  dir.

*İspat:*  $\{0\}$  kümesinin yörünge olduğu açıktır. Şimdi  $h = h_1 + \delta h_2 \in \mathbb{H}^*$  olsun. Bu elemanın  $\{gh \mid g \in H_+^*\}$  yörüngesini bulalım. Burada iki durum vardır,  $h \in H_+^*$  ve  $h \notin H_+^*$ .

(i)  $h \in H_+^*$  olsun.  $H_+^*$  grup olduğundan keyfi  $g \in H_+^*$  için  $gh \in H_+^*$  dir. Dolayısıyla  $\{gh \mid g \in H_+^*\} \subset H_+^*$  dir. Şimdi  $k \in H_+^*$  keyfi olsun. Bu takdirde  $gh = k$  şartını sağlayan  $g \in H_+^*$  mevcuttur,  $g = kh^{-1}$ . Dolayısıyla  $\{gh \mid g \in H_+^*\} = H_+^*$ .

(ii)  $h \notin H_+^*$  olsun. Eğer  $h = 0$  ise,  $\{gh \mid g \in H_+^*\} = \{0\}$  olur.  $h \neq 0$  olsun. Bu durumda  $h$  eleman için iki durum vardır:  $h \in \mathbb{H}^*, h \notin \mathbb{H}^*$ .

(ii). (a)  $h \notin H_+^*$  ve  $h \in \mathbb{H}^*$  olsun. Bu durumda Önerme 4.3.2 ve Önerme 4.3.3 göre  $h \in \delta H_+^*$  dir.

(ii). (b)  $h \notin H_+^*$  olsun. O halde  $h^{-1}$  yoktur. Önerme 3.1.2 göre  $h = c(1 + \delta)$  veya  $h = c(1 - \delta)$  dir. Burada  $c \in \mathbb{R}$  dir.  $h \neq 0$  olduğundan  $c \neq 0$  dir.  $h = c(1 + \delta), c \in \mathbb{R}^*$  olsun ve  $\forall g = a + \delta b \in H_+^*$  olsun. Buradan  $gh = c(a + b)(1 + \delta)$  bulunur.  $g = a + \delta b \in H_+^*$  olduğundan  $a^2 - b^2 > 0$  dir.  $\forall r \in \mathbb{R}^*$  ve  $\forall c \in \mathbb{R}^*$  için  $r = c(a + b)$  ve  $a^2 - b^2 > 0$  olacak şekilde  $a, b \in \mathbb{R}^*$  var olduğunu gösterelim:

$r = c(a + b)$  den  $a + b = rc^{-1}$  bulunur.  $a = rc^{-1}, b = 0$  alınışa  $r \neq 0$  ve  $c \neq 0$  olduğundan  $a^2 - b^2 = (rc^{-1})^2 > 0$  elde edilir. O halde  $h = c(1 + \delta)$ ,  $c \in \mathbb{R}^*$  elemanının  $H_+^*$  yörüngesi  $\{r(1 + \delta) | r \in \mathbb{R}^*\}$  kümesidir. Benzer şekilde  $c(1 - \delta), c \in \mathbb{R}^*$  şeklindeki elemanın  $H_+^*$  -yörüngesi  $\{r(1 - \delta) | r \in \mathbb{R}^*\}$  kümesi olduğu gösterilebilir.

$H_+^*$  grubunun  $H_+^*$  yörüngesinin tipi 1 dir diyelim. Eğer  $h \in \mathbb{H}$  için  $h \in H_+^*$  ise  $h$  nin tipi 1 dir diyelim ve bunu  $T_2(h) = 1$  ile gösterelim.  $H_+^*$  grubunun  $\delta H_+^*$  yörüngesinin tipi  $\delta$  dir diyelim. Eğer  $h \in \mathbb{H}$  için  $h \in \delta H_+^*$  ise  $h$  in tipi  $\delta$  diyelim ve bunu  $T_2(h) = \delta$  ile gösterelim.  $H_+^*$  grubunun  $\{r(1 + \delta) | r \in \mathbb{R}^*\}$  yörüngesinin tipi  $1 + \delta$  dir diyelim. Eğer  $h \in \mathbb{H}$  için  $h \in \{r(1 + \delta) | r \in \mathbb{R}^*\}$  ise  $h$  nin tipi  $1 + \delta$  dir diyelim ve bunu  $T_2(h) = 1 + \delta$  ile gösterelim.

$H_+^*$  grubunun  $\{r(1 - \delta) | r \in \mathbb{R}^*\}$  yörüngesinin tipi  $1 - \delta$  dir diyelim. Eğer  $h \in \mathbb{H}$  için  $h \in \{r(1 - \delta) | r \in \mathbb{R}^*\}$  ise  $h$  nin tipi  $1 - \delta$  diyelim ve bunu  $T_2(h) = 1 - \delta$  ile gösterelim.

$H_+^*$  grubunun  $\{0\}$  yörüngesinin tipi 0 dir diyelim. Eğer  $h \in \mathbb{H}$  için  $h = 0$  ise  $h$  nin tipi 0 diyelim ve bunu  $T_2(0) = 0$  ile gösterelim.

$\mathbb{H}$  de  $h = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ ,  $m$  -lisi için  $T_2(h_i) = t_i$  olsun,  $t_i = 1, \delta, 1 + \delta, 1 - \delta$  veya 0 dir.  $(t_1, \dots, t_m)$   $m$  -li dizisine  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$   $m$  -lisinin tipi diyelim ve  $T_2(h) = (t_1, \dots, t_m)$  şeklinde veya  $T_2\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$  şeklinde gösterelim.

**Önerme 4.8.2:** Eğer  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  için  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\} \stackrel{H_+^*}{\sim} \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$  ise,  $T_2(h) = T_2(k)$  dir yani  $m$  -linin tipi  $H_+^*$  -invarianttır.

*İspat:* Önerme 4.5.1 ve Önerme 4.8.1 den açıktır.

**Sonuç 4.8.1:** Eğer  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  için  $T_2\{h_1, h_2, \dots, h_m\} \neq T_2\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$  ise  $h$  ve  $k$   $m$  -liler  $H_+^*$  -denk değildir.

*İspat:* Önerme 4.8.2 den açıktır.

**Sonuç 4.8.2:**  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  olmak üzere bir  $p \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_2(h_p) \neq T_2(k_p)$  ise  $h$  ve  $k$   $m$  -liler  $H_+^*$  -denk değildir.

*İspat:* Önerme 4.8.2 den açıktır.

Böylece iki  $m$ -linin  $H_+^*$ -denklik şartı incelenirken, onların tipleri eşit olmalıdır. Önerme 4.6.3 de olduğu gibi ileride iki  $m$ -linin  $G$ -denklik problemi incelenirken, bu  $m$ -lilerin tüm elemanları sıfırdan farklı olarak alınacaktır.

Şimdi  $m = 2$  durumunu inceleyelim:  $\mathbb{H}$  de keyfi bir  $h = \{h_1, h_2\}$  2-lisini göz önüne alalım, burada  $h_1, h_2$  lerin her biri sıfırdan farklıdır. Bu ikilinin tipi için şu durumlar vardır:  $T_2(h) = (1,1), T_2(h) = (1, \delta), T_2(h) = (1, 1 + \delta), T_2(h) = (1, 1 - \delta), T_2(h) = (\delta, 1), T_2(h) = (\delta, \delta), T_2(h) = (\delta, 1 + \delta), T_2(h) = (\delta, 1 - \delta), T_2(h) = (1 + \delta, 1), T_2(h) = (1 + \delta, \delta), T_2(h) = (1 + \delta, 1 + \delta), T_2(h) = (1 + \delta, 1 - \delta), T_2(h) = (1 - \delta, 1), T_2(h) = (1 - \delta, \delta), T_2(h) = (1 - \delta, 1 + \delta), T_2(h) = (1 - \delta, 1 - \delta)$ .

Eğer  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $T_2(h_1) \neq T_2(k_1)$  ise, Sonuç 4.8.1'e göre  $h$  ve  $k$  2-lileri  $H_+^*$ -denk değildir.

Önerme 4.8.3:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  olsun.  $T_2(h_1) = T_2(k_1) = 1$  veya  $T_2(h_1) = T_2(k_1) = \delta$  olmak üzere  $h \underset{\sim}{\overset{H_+^*}{\sim}} k \implies h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$  dir.

*İspat:*  $h \underset{\sim}{\overset{H_+^*}{\sim}} k$  olsun. Bu takdirde  $k = gh$  olacak şekilde  $\exists g \in H_+^*$  vardır.

$$k = gh,$$

$$(k_1, k_2) = g(h_1, h_2),$$

$$(k_1, k_2) = (gh_1, gh_2),$$

$$k_1 = gh_1, k_2 = gh_2$$

olur. Şimdi de  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$  olduğunu gösterelim.  $T_2(h_1) = T_2(k_1) = 1$  veya  $T_2(h_1) = T_2(k_1) = \delta$  olduğundan dolayı  $h_1 \in \mathbb{H}^*$ ,  $k_1 \in \mathbb{H}^*$  dir. Dolayısıyla  $h^{-1}$  ve  $k^{-1}$  elemanlar mevcuttur.  $k_1 = gh_1, k_2 = gh_2$  olduğundan  $k_1^{-1}k_2 = (gh_1)^{-1}(gh_2) = g^{-1}h_1^{-1}gh_2 = g^{-1}gh_1^{-1}h_2 = h_1^{-1}h_2$  bulunur. Buradan  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$  elde edilir.

Önerme 4.8.4:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  olsun.  $T_2(h_2) = T_2(k_2) = 1$  veya  $T_2(h_2) = T_2(k_2) = \delta$  olmak üzere  $h \underset{\sim}{\overset{H_+^*}{\sim}} k \implies h_2^{-1}h_1 = k_2^{-1}k_1$  dir.

*İspat:* Önerme 4.8.3 ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.8.1:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  olsun.  $T_2(h_1) = T_2(k_1) = 1$  veya  $T_2(h_1) = T_2(k_1) = \delta$  olmak üzere  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2 \implies h \underset{\sim}{\overset{H_+^*}{\sim}} k$  dir.

*İspat:*  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$  olsun.  $h \stackrel{H^+}{\sim} k$  olduğunu göstermeliyiz. Bunun için  $\exists g \in H_+^*$  için  $k = gh$  olmalıdır. Şimdi  $T_2(h_1) = T_2(k_1) = 1$  veya  $T_2(h_1) = T_2(k_1) = \delta$  olduğundan  $h_1 \in \mathbb{H}^*$ , ve  $k_1 \in \mathbb{H}^*$  dir. Dolayısıyla  $h^{-1}$  ve  $k^{-1}$  elemanları mevcuttur. Buradan,  $T_2(h_1) = T_2(k_1) = 1$  veya  $T_2(h_1) = T_2(k_1) = \delta$  olduğundan  $h_1$  ve  $k_1$  elemanları aynı  $H_+^*$  yörüngenin veya aynı  $\delta H_+^*$  yörüngenin elemanlarıdır. Dolayısıyla  $k_1 = gh_1$  olacak şekilde  $g \in H_+^*$  mevcuttur. Böylece  $g = k_1 h_1^{-1}$  dir.  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$  den  $k_1 h_1^{-1}h_2 = k_2$  olur.  $g = k_1 h_1^{-1}$  olduğundan  $k_2 = gh_2$  elde edilir. Dolayısıyla  $k_1 = gh_1$  ve  $k_2 = gh_2$  yani  $h \stackrel{H^+}{\sim} k$  dir.

**Teorem 4.8.2:**  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  olsun.  $T_2(h_2) = T_2(k_2) = 1$  veya  $T_2(h_2) = T_2(k_2) = \delta$  olmak üzere  $h_2^{-1}h_1 = k_2^{-1}k_1 \implies h \stackrel{H^+}{\sim} k$  dir.

*İspat:* Teorem 4.8.1'in ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.8.1 ve Teorem 4.8.2 de  $T_2(h) = (1,1), T_2(h) = (1, \delta), T_2(h) = (1, 1 + \delta), T_2(h) = (1, 1 - \delta), T_2(h) = (\delta, 1), T_2(h) = (\delta, \delta), T_2(h) = (\delta, 1 + \delta), T_2(h) = (\delta, 1 - \delta), T_2(h) = (1 + \delta, 1), T_2(h) = (1 + \delta, \delta), T_2(h) = (1 - \delta, 1), T_2(h) = (1 - \delta, \delta)$  durumlar tam olarak incelenmiş oldu.

İncelenmeyen  $T_2(h) = (1 + \delta, 1 + \delta), T_2(h) = (1 + \delta, 1 - \delta), T_2(h) = (1 - \delta, 1 + \delta), T_2(h) = (1 - \delta, 1 - \delta)$  durumları kaldı. Bu durumları inceleyelim:  $T_2(h) = (1 + \delta, 1 + \delta)$  durumunda  $h = (h_1, h_2)$  2 -linin elemanları,  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 + \delta)$  şeklindedir. burada  $r_1 \neq 0$  ve  $r_2 \neq 0$  dir.

**Önerme 4.8.5:**  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 + \delta), r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 + \delta), k_2 = q_2(1 + \delta), q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun. Bu takdirde  $h \stackrel{H^+}{\sim} k$  ise  $r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  dir.

*İspat:*  $h \stackrel{H^+}{\sim} k$  olsun. Bu takdirde  $k = gh$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in \mathbb{H}^*$  mevcuttur. Buradan  $k_1 = q_1(1 + \delta) = gh_1 = (a + \delta b)r_1(1 + \delta) = r_1(a + b)(1 + \delta)$  ve  $k_2 = q_2(1 + \delta) = gh_2 = (a + \delta b)r_2(1 + \delta) = r_2(a + b)(1 + \delta)$  eşitlikleri elde edilir. Böylece  $q_1 = r_1(a + b)$  ve  $q_2 = r_2(a + b)$  bulunur. Önerme 3.1.2 ye göre  $a + b \neq 0$  dir. Buradan ve  $q_1 = r_1(a + b), q_2 = r_2(a + b)$  den  $r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  dir.

**Teorem 4.8.3:**  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 + \delta), r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 + \delta), k_2 = q_2(1 + \delta), q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun. Bu takdirde  $r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  ise  $h \stackrel{H^+}{\sim} k$  dir.

*İspat:*  $r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  olsun. Buradan  $q_1=(r_2^{-1}q_2)r_1$  dir.  $r_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $q_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $q_2 \in \mathbb{R}^*$  olduğundan  $r_2^{-1}q_2 \neq 0$  bulunur.  $a = r_2^{-1}q_2$  olsun. Böylece  $q_1 = ar_1$  ve  $q_2 = ar_2$  olur.  $g = a + \delta b, b = 0$ , alalım.  $a \neq 0, b = 0$  olduğundan,  $|g|_1 = a^2 - b^2 = a^2 > 0$  yani  $g \in H_+^*$  dir. O halde  $k_1 = q_1(1 + \delta) = ar_1(1 + \delta) = ah_1 = gh_1$  ve  $k_2 = q_2(1 + \delta) = ar_2(1 + \delta) = ah_2 = gh_2$  bulunur. Buradan  $h = gk$  elde edilir. Yani  $h \underset{\sim}{\sim}^{H_+^*} k$  dir.

$T_2(h) = (1 - \delta, 1 - \delta)$  durumunda  $h = (h_1, h_2)$  2-lisinin elemanları,  $h_1 = r_1(1 - \delta), h_2 = r_2(1 - \delta)$  şeklindedir. Burada  $r_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $r_2 \in \mathbb{R}^*$  dir.

**Teorem 4.8.4:**  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $h_1 = r_1(1 - \delta), h_2 = r_2(1 - \delta)$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 - \delta), k_2 = q_2(1 - \delta)$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun. Bu takdirde  $h \underset{\sim}{\sim}^{H_+^*} k \Leftrightarrow r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  dir.

*İspat:* Önerme 4.8.5 ve Teorem 4.8.3 ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Şimdi incelenmeyen  $T_2(h) = (1 + \delta, 1 - \delta)$  ve  $T_2(h) = (1 - \delta, 1 + \delta)$  durumları inceleyelim.

$T_2(h) = (1 + \delta, 1 - \delta)$  durumunda  $h = (h_1, h_2)$  2-lisinin elemanları  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 - \delta)$  şekildedir. Burada  $r_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $r_2 \in \mathbb{R}^*$  dir.

**Teorem 4.8.5:**  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 - \delta)$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 + \delta), k_2 = q_2(1 - \delta)$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $q_2 \in \mathbb{R}^*$ , ve  $r_1^{-1}q_1r_2^{-1}q_2 > 0$  olsun. Bu takdirde  $h \underset{\sim}{\sim}^{H_+^*} k \Leftrightarrow r_1^{-1}q_1r_2^{-1}q_2 > 0$  dir.

*İspat:( $\Rightarrow$ )*  $h \underset{\sim}{\sim}^{H_+^*} k$  olsun. Bu takdirde  $k = gh$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in H_+^*$  mevcuttur. Buradan  $k_1 = q_1(1 + \delta) = gh_1 = (a + \delta b)r_1(1 + \delta) = r_1(a + b)(1 + \delta)$  ve  $k_2 = q_2(1 - \delta) = gh_2 = (a + \delta b)r_2(1 - \delta) = r_2(a + b)(1 - \delta)$  bulunur. Böylece  $q_1 = r_1(a + b)$  ve  $q_2 = r_2(a - b)$  elde edilir. Buradan  $(a + b) = r_1^{-1}q_1$ ,  $(a - b) = r_2^{-1}q_2$  dir.  $a^2 - b^2 = r_1^{-1}q_1r_2^{-1}q_2$  ve  $g = a + \delta b \in H_+^*$  olduğundan  $a^2 - b^2 > 0$  yazılabilir. Dolayısıyla  $r_1^{-1}q_1r_2^{-1}q_2 > 0$  dir.

*( $\Leftarrow$ )*  $r_1^{-1}q_1r_2^{-1}q_2 > 0$  olsun.  $a = \frac{1}{2}(r_1^{-1}q_1 + r_2^{-1}q_2)$ ,  $b = \frac{1}{2}(r_1^{-1}q_1 - r_2^{-1}q_2)$  olmak üzere  $g = a + \delta b \in \mathbb{H}^*$  alalım. Buradan  $(a + b) = r_1^{-1}q_1$ ,  $(a - b) = r_2^{-1}q_2$  bulunur.  $r_1^{-1}q_1r_2^{-1}q_2 > 0$  olduğundan  $a^2 - b^2 = r_1^{-1}q_1r_2^{-1}q_2 > 0$  elde edilir. Dolayısıyla  $g = a + \delta b \in H_+^*$  dir.  $(a + b) = r_1^{-1}q_1$  ve  $(a - b) = r_2^{-1}q_2$  olduğundan  $q_1 = r_1(a + b), q_2 = r_2(a - b)$  dir. Bu eşitliklerden  $k_1 = q_1(1 + \delta) =$

$gh_1 = (a + \delta b)r_1(1 + \delta) = r_1(a + b)(1 + \delta)$  ve  $k_2 = q_2(1 - \delta) = gh_2 = (a + \delta b)r_2(1 - \delta) = r_2(a + b)(1 - \delta)$  bulunur. Dolayısıyla  $k = gh$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in H_+^*$  mevcuttur.

**Teorem 4.8.6:**  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $h_1 = r_1(1 - \delta), h_2 = r_2(1 + \delta), r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 - \delta), k_2 = q_2(1 + \delta), q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$ , ve  $r_1^{-1}q_1r_2^{-1}q_2 > 0$  olsun. Bu takdirde  $h \underset{\sim}{\overset{H_+^*}{\sim}} k \Leftrightarrow r_1^{-1}q_1r_2^{-1}q_2 > 0$  dir.

*İspat:* Teorem 4.8.5 in ispatına benzerdir.

$m$  bir doğal sayı ve  $m > 2$  olsun.

**Tanım 4.8.1:**  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{H}^m$  olmak üzere  $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $h_i \neq 0$  olsun. Eğer bir  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_2(h_i) = 1$  veya  $T_2(h_i) = \delta$  ise, bu  $h, m$  -liye  $H_+^*$  -bozulmamış  $m$  -li denir. Böyle bir  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  yoksa, bu  $h, m$  -liye  $H_+^*$  -bozulmuş  $m$  -li denir. Dolayısıyla  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{H}^m$   $H_+^*$  -bozulmuş ise  $T_2(h_i) = 1 + \delta$  veya  $T_2(h_i) = 1 - \delta$  dir.

Eğer  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$   $m$  -lileri için  $h \underset{\sim}{\overset{H_+^*}{\sim}} k$  ve  $h, H_+^*$  -bozulmamış ise  $k$  da  $H_+^*$  -bozulmamıştır.

Eğer  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$   $m$  -lileri için  $h \underset{\sim}{\overset{H_+^*}{\sim}} k$  ve  $h, H_+^*$  -bozulmuş ise  $k$  da  $H_+^*$  -bozulmuştur.

**Önerme 4.8.6:**  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  olsun.  $T_2(h_1) = T_2(k_1) = 1$  veya  $T_2(h_1) = T_2(k_1) = \delta$  olmak üzere  $h \underset{\sim}{\overset{H_+^*}{\sim}} k$  ise  $h_1^{-1}h_j = k_1^{-1}k_j, j = 2, 3, \dots, m$  dir.

*İspat:* Önerme 4.6.7 nin ispatına benzerdir.

**Teorem 4.8.7:**  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  olsun.  $T_2(h_1) = T_2(k_1) = 1$  veya  $T_2(h_1) = T_2(k_1) = \delta$  olmak üzere  $h_1^{-1}h_j = k_1^{-1}k_j, j = 2, 3, \dots, m$ , ise  $h \underset{\sim}{\overset{H_+^*}{\sim}} k$  dir.

*İspat:*  $h_1^{-1}h_j = k_1^{-1}k_j, j = 2, 3, \dots, m$  olsun.  $T_2(h_1) = T_2(k_1) = 1$  veya  $T_2(h_1) = T_2(k_1) = \delta$  olduğundan dolayı  $h_1$  ve  $k_1$  elemanlar aynı yörüngenin elemanlarıdır. Böylece  $\exists g \in H_+^*$  için  $k_1 = gh_1$  dir.  $T_2(h_1) = 1$  veya  $T_2(h_1) = \delta$  olduğundan  $h_1^{-1}$  mevcuttur. Benzer şekilde  $T_2(k_1) = 1$  veya  $T_2(k_1) = \delta$  olduğundan  $k_1^{-1}$  mevcuttur.  $k_1 = gh_1$  olduğundan  $g = k_1h_1^{-1}$  bulunur.  $h_1^{-1}h_j = k_1^{-1}k_j$  eşitliği

kullanılarak,  $h_1^{-1}h_j = (gh_1)^{-1}k_j$  elde edilir. Buradan  $h_1^{-1}h_j = h_1^{-1}g^{-1}k_j$  dir. Son eşitliğin her iki tarafı  $h_1$  ile işleme alınırsa  $h_j = g^{-1}k_j$  bulunur. Burada her iki taraf  $g$  ile işleme alınırsa,  $k_j = gh_j$  elde edilir. O halde  $\forall j = 1, 2, \dots, m$  için  $k_j = gh_j$  olacak şekilde  $g \in H_+^*$  vardır. Böylece  $h \underset{\sim}{H_+^*} k$  dir.

Önerme 4.8.7:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  olsun. Bir  $p \in \{2, 3, \dots, m\}$  için  $T_2(h_p) = T_2(k_p) = 1$  veya  $T_2(h_p) = T_2(k_p) = \delta$  olmak üzere  $h \underset{\sim}{H_+^*} k$  ise  $h_p^{-1}h_j = k_p^{-1}k_j, j = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, m$  dir.

*İspat:* Önerme 4.6.7 nin ispatına benzerdir.

Teorem 4.8.8:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  olsun. Eğer bu  $m$ -liler öyle ki bir  $p \in \{2, 3, \dots, m\}$  için  $T_2(h_p) = T_2(k_p) = 1$  veya  $T_2(h_p) = T_2(k_p) = \delta$  ise, bu takdirde  $h_p^{-1}h_j = k_p^{-1}k_j, j = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, m, \Rightarrow h \underset{\sim}{H_+^*} k$  dir.

*İspat:* Teorem 4.6.7 nin ispatına benzerdir.

Not:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m, H_+^*$ -bozulmamış  $m$ -liler olsun. Eğer  $T_2(h) \neq T_2(k)$  ise Sonuç 4.8.1'e göre bu  $m$ -liler  $H_+^*$ -denk değildir. Kabul edelim ki  $T_1(h) = T_1(k)$  olsun. Bu takdirde  $h, H_+^*$ -bozulmamış olduğundan bir  $p \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$  için  $T_1(h_p) = 1$  veya  $T_1(h_p) = \delta$  dir. Böylece  $T_1(h) = T_1(k)$  olduğundan  $T_1(h_p) = T_1(k_p) = 1$  veya  $T_1(h_p) = T_1(k_p) = \delta$  dir. Dolayısıyla Önerme 4.8.6, Önerme 4.8.7, Teorem 4.8.7, Teorem 4.8.8 de  $H_+^*$ -bozulmamış  $m$ -lilerin  $H_+^*$ -denklik problemi tam olarak çözülmüş olur.

$h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{H}^m, H_+^*$ -bozulmuş  $m$ -li olsun. Bu takdirde  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T(h_j) = 1 + \delta$  veya  $T(h_j) = 1 - \delta$  dir.

$h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{H}^m, H_+^*$ -bozulmuş  $m$ -li ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_2(h_j) = 1 + \delta$  olsun. Bu durumda  $h$  nin elemanları  $h_1 = r_1(1 + \delta), \dots, h_m = r_m(1 + \delta)$  şeklindedir. Burada  $r_1 \neq 0, \dots, r_m \neq 0$  dir.

Önerme 4.8.8:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m, H_+^*$ -bozulmuş  $m$ -liler ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_2(h_j) = T_2(k_j) = 1 + \delta$  ve  $h_1 = r_1(1 + \delta), \dots, h_m = r_m(1 + \delta), r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 + \delta), \dots, k_m =$

$q_m(1 + \delta)$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $q_2 \in \mathbb{R}^*$ , ...,  $q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $h \underset{\sim}{\overset{H_+^*}{k}}$  ise  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$   $j = 2, \dots, m$  dir.

*İspat:*  $h \underset{\sim}{\overset{H_+^*}{k}}$  olsun. Bu takdirde  $k = gh$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in H_+^*$  mevcuttur. Buradan  $k_j = q_j(1 + \delta) = gh_j = (a + \delta b)r_j(1 + \delta) = r_j(a + b)(1 + \delta)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  bulunur. Bu eşitliklerden  $q_j = r_j(a + b)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  elde edilir. Önerme 3.1.2 ye göre  $a + b \neq 0$  dir.  $q_j = r_j(a + b)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  olduğundan  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$   $j = 2, \dots, m$  dir.

**Teorem 4.8.9:**  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ ,  $k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $H_+^*$  -bozulmuş  $m$  -liler ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_2(h_j) = T_2(k_j) = 1 + \delta$  ve  $h_1 = r_1(1 + \delta)$ , ...,  $h_m = r_m(1 + \delta)$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $r_2 \in \mathbb{R}^*$ , ...,  $r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 + \delta)$ , ...,  $k_m = q_m(1 + \delta)$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $q_2 \in \mathbb{R}^*$ , ...,  $q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$ ,  $j = 2, \dots, m$  ise  $h \underset{\sim}{\overset{H_+^*}{k}}$  dir.

*İspat:*  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$ ,  $j = 2, \dots, m$  olsun.  $r_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $r_2 \in \mathbb{R}^*$ , ...,  $r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $q_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $q_2 \in \mathbb{R}^*$ , ...,  $q_m \in \mathbb{R}^*$   $r_j \neq 0$ ,  $q_j \neq 0$  olduğundan  $q_j r_j^{-1} \neq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  dir.  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$ ,  $j = 2, \dots, m$  olduğundan  $q_j r_j^{-1} = q_1 r_1^{-1}$ ,  $j = 2, \dots, m$  bulunur.  $c = q_1 r_1^{-1}$  olsun.  $q_j r_j^{-1} = q_1 r_1^{-1} = c$ ,  $j = 2, \dots, m$  olduğundan  $q_j = c r_j$ ,  $j = 2, \dots, m$ , elde edilir.  $g = c + \delta d$ ,  $d = 0$ , alalım.  $c \neq 0$ ,  $d = 0$  olduğundan,  $|g|_1 = c^2 - d^2 = c^2 > 0$  yani  $g \in H_+^*$  dir. Böylece  $k_j = q_j(1 + \delta) = c r_j(1 + \delta) = ac = gh_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  dir. Buradan  $h = gk$  olup  $h \underset{\sim}{\overset{H_+^*}{k}}$  dir.

**Önerme 4.8.9:**  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ ,  $k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $H_+^*$  -bozulmuş  $m$  -liler ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_2(h_j) = T_2(k_j) = 1 - \delta$  ve  $h_1 = r_1(1 - \delta)$ , ...,  $h_m = r_m(1 - \delta)$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $r_2 \in \mathbb{R}^*$ , ...,  $r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 - \delta)$ , ...,  $k_m = q_m(1 - \delta)$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $q_2 \in \mathbb{R}^*$ , ...,  $q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $h \underset{\sim}{\overset{H_+^*}{k}}$  ise  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$   $j = 2, \dots, m$  dir.

*İspat:* Önerme 4.8.8 in ispatına benzer şekilde yapılır.

**Teorem 4.8.10:**  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ ,  $k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $H_+^*$  -degenerate  $m$  -liler ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_2(h_j) = T_2(k_j) = 1 - \delta$  ve  $h_1 = r_1(1 - \delta)$ , ...,  $h_m = r_m(1 - \delta)$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $r_2 \in \mathbb{R}^*$ , ...,  $r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 - \delta)$ , ...,  $k_m =$

$q_m(1 - \delta)$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $q_2 \in \mathbb{R}^*$ , ...,  $q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$ ,  $j = 2, \dots, m$  ise  $h \underset{\sim}{\overset{H_+^*}{k}}$  dır.

*İspat:* Teorem 4.8.9 un ispatına benzer şekilde yapılır.

Şimdi  $D$  ve  $E$  kümeleri  $\{1, 2, \dots, m\}$  kümesinin altkümeleri,  $D \neq \emptyset$ ,  $E \neq \emptyset$ ,  $D \cap E = \emptyset$  ve  $D \cup E = \{1, 2, \dots, m\}$  olsun.  $D$  nin en küçük elemanı 1 ve  $E$  nin en küçük elemanı  $p$  olsun.  $E$  nin en küçük elemanı 1 ve  $D$  nin en küçük elemanı  $p$  olduğu durum benzer şekilde inceleniyor.

Önerme 4.8.10:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ ,  $k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $H_+^*$  -bozulmuş  $m$  -liler olsun.  $\forall i \in D$  için  $T_2(h_i) = 1 + \delta$ ,  $h_i = r_i(1 + \delta)$ ,  $r_i \in \mathbb{R}^*$  ve  $\forall j \in E$  için  $T_2(k_j) = 1 - \delta$ ,  $k_j = q_j(1 - \delta)$ ,  $q_j \in \mathbb{R}^*$  olsun. Bu takdirde  $h \underset{\sim}{\overset{H_+^*}{k}}$  ise  $\forall i \in D$  ve  $\forall j \in E$   $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1$ ,  $r_j^{-1}r_p = q_j^{-1}q_p$  ve  $r_1^{-1}q_1r_p^{-1}q_p > 0$  dır.

*İspat:*  $h \underset{\sim}{\overset{H_+^*}{k}}$  olsun. Bu takdirde  $k = gh$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in H_+^*$  mevcuttur. Böylece  $q_1 = r_1(a + b)$  ve  $q_2 = r_2(a - b)$  bulunur. Buradan  $(a + b) = r_1^{-1}q_1$ ,  $(a - b) = r_p^{-1}q_p$  elde edilir.  $a^2 - b^2 = r_1^{-1}q_1r_p^{-1}q_p$  ve  $g = a + \delta b \in H_+^*$  olduğundan  $a^2 - b^2 > 0$  dır. Dolayısıyla  $r_1^{-1}q_1r_p^{-1}q_p > 0$  dır.

$\forall i \in D$  için  $k_i = q_i(1 + \delta) = gh_i = (a + \delta b)r_i(1 + \delta) = r_i(a + b)(1 + \delta)$ , ve  $\forall j \in E$  için  $k_j = q_j(1 - \delta) = gh_j = (a + \delta b)r_j(1 - \delta) = r_j(a - b)(1 - \delta)$ , olup  $q_i = r_i(a + b)$  ve  $q_j = r_j(a - b)$  elde edilir. Buradan  $(a + b) = r_1^{-1}q_1$ ,  $(a - b) = r_p^{-1}q_p$  dır.  $a^2 - b^2 = r_1^{-1}q_1r_p^{-1}q_p$  ve  $g = a + \delta b \in H_+^*$  olduğundan  $a^2 - b^2 > 0$  bulunur. Dolayısıyla  $r_1^{-1}q_1r_p^{-1}q_p > 0$  dır. Önerme 3.1.2'ye göre  $a + b \neq 0$  ve  $a - b \neq 0$  dır. Böylece  $q_i = r_i(a + b)$  ve  $q_j = r_j(a - b)$  eşitliklerinden  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1$  ve  $r_j^{-1}r_p = q_j^{-1}q_p$  olur.

Teorem 4.8.11:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ ,  $k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $H_+^*$  -bozulmuş  $m$  -liler olsun.  $\forall i \in D$  için  $T_2(h_i) = 1 + \delta$ ,  $h_i = r_i(1 + \delta)$ ,  $r_i \in \mathbb{R}^*$  ve  $\forall j \in E$  için  $T_2(k_j) = 1 - \delta$ ,  $k_j = q_j(1 - \delta)$ ,  $q_j \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1$ ,  $r_j^{-1}r_p = q_j^{-1}q_p$  ve  $r_1^{-1}q_1r_p^{-1}q_p > 0$  ise  $h \underset{\sim}{\overset{H_+^*}{k}}$  dır.

*İspat:*  $\forall i \in D$ ,  $\forall j \in E$  için  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1$ ,  $r_j^{-1}r_p = q_j^{-1}q_p$  ve  $r_1^{-1}q_1r_p^{-1}q_p > 0$  olsun.  $a = \frac{1}{2}(r_1^{-1}q_1 + r_p^{-1}q_p)$ ,  $b = \frac{1}{2}(r_1^{-1}q_1 - r_p^{-1}q_p)$  olmak üzere  $g = a + \delta b \in$

$H_+^*$  alalım. Buradan  $(a + b) = r_1^{-1}q_1$ ,  $(a - b) = r_p^{-1}q_p$  bulunur.  $r_1^{-1}q_1r_p^{-1}q_p > 0$  dan  $a^2 - b^2 = r_1^{-1}q_1r_p^{-1}q_p > 0$  dir. Dolayısıyla  $g = a + \delta b \in H_+^*$  dir.

$(a + b) = r_1^{-1}q_1$ ,  $(a - b) = r_p^{-1}q_p$  olduğundan  $q_1 = r_1(a + b)$ ,  $q_p = r_p(a - b)$  bulunur. Böylece  $k_1 = q_1(1 + \delta) = gh_1 = (a + \delta b)r_1(1 + \delta) = r_1(a + b)(1 + \delta)$  ve  $k_p = q_p(1 - \delta) = gh_p = (a + \delta b)r_p(1 - \delta) = r_p(a - b)(1 - \delta)$ , elde edilir.  $r_j \neq 0$ ,  $q_j \neq 0$  olduğundan  $q_jr_j^{-1} \neq 0, j = 1, 2, \dots, m$  dir.  $\forall i \in D, \forall j \in E$  için  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1$  ve  $r_j^{-1}r_p = q_j^{-1}q_p$  olduğundan  $q_i r_i^{-1} = q_1 r_1^{-1} = a + b$ ,  $q_j r_j^{-1} = q_p r_p^{-1} = a - b$  bulunur. Böylece  $q_i r_i^{-1} = q_1 r_1^{-1} = a + b$  den  $q_i = (a + b)r_i$  ve  $q_j r_j^{-1} = q_p r_p^{-1} = a - b$  den  $q_j = (a - b)r_j$  elde edilir. O halde  $k_i = q_i(1 + \delta) = (a + b)r_i(1 + \delta) = (a + \delta b)r_i(1 + \delta) = gh_i$  ve  $k_j = q_j(1 - \delta) = (a - b)r_j(1 - \delta) = (a + \delta b)r_j(1 - \delta) = gh_j$  yazılabilir. Buradan  $h = gk$  dir. Yani  $h \underset{\sim}{\sim}^{H_+^*} k$  dir.

Böylece  $H_+^*$  grubu için tüm durumlar incelenerek  $H_+^*$  –Denklik Problemi tam olarak çözülmüş oldu.

#### 4.9. $W(H_+^*)$ –Denklik Probleminin $H_+^*$ –Denklik Problemi Yardımıyla Çözümü

Bu kısımda  $\mathbb{R}^{1+1}$  deki  $m$  noktadan oluşan iki sistemin  $W(H_+^*)$  –denklik problemini inceleyeceğiz. Önce  $m = 1$  ve  $m = 2$  için iki sistemin  $W(H_+^*)$  –denklik problemini ele alacağız.

$m = 1$  olsun. Bu durumda  $W(H_+^*)$  –denklik probleminin çözümü  $W(H_+^*)$  grubunun  $\mathbb{R}^{1+1}$  uzaydaki  $(g, h) \rightarrow W(g)F(h)$  etkisine göre  $W(H_+^*)$ -yörüngeleri bulunmasına indirgenir. Burada  $F$ , önerme 4.2.1 de tanımlanan dönüşüm olarak alınacaktır.

Önerme 4.9.1:  $W(H_+^*)$  grubunun  $\mathbb{R}^{1+1}$  uzaydaki  $(W(g), x) \rightarrow W(g)x$  etkisine göre sadece beş  $W(H_+^*)$ -yörüngesi vardır. Bunlar:  $F(H_+^*) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 - b^2 > 0 \right\}$ ,  $F(\delta H_+^*) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 - b^2 < 0 \right\}$ ,  $\left\{ r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}^* \right\}$ ,  $\left\{ r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}^* \right\}$ ,  $\{0\}$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.8.1 ve Sonuç 4.5.1 den açıktır.

$W(H_+^*)$  grubunun  $W(H_+^*)$  yörüngesinin tipi 1 dir diyelim. Eğer  $u \in \mathbb{R}^{1+1}$  için  $u \in W(H_+^*)$  ise  $u$  nin tipi 1 diyelim ve bunu  $T_2(u) = 1$  şeklinde yazalım.

$W(H_+^*)$  grubunun  $W(\delta H_+^*)$  yörüngesinin tipi  $\delta$  dir diyelim. Eğer  $u \in \mathbb{R}^{1+1}$  için  $u \in W(\delta H_+^*)$  ise  $u$  nin tipi  $\delta$  diyelim ve bunu  $T_2(u) = \delta$  şeklinde yazalım.

$W(H_+^*)$  grubunun  $\{r\binom{1}{1} \mid r \in \mathbb{R}^*\}$  yörüngesinin tipi  $1 + \delta$  dir diyelim. Eğer  $u \in \mathbb{R}^{1+1}$  için  $u \in \{r\binom{1}{1} \mid r \in \mathbb{R}^*\}$  ise  $u$  nun tipi  $1 + \delta$  diyelim ve bunu  $T_2(u) = 1 + \delta$  şeklinde yazalım.

$W(H_+^*)$  grubunun  $\{r\binom{1}{-1} \mid r \in \mathbb{R}^*\}$  yörüngesinin tipi  $1 - \delta$  dir diyelim. Eğer  $u \in \mathbb{R}^{1+1}$  için  $u \in \{r\binom{1}{-1} \mid r \in \mathbb{R}^*\}$  ise  $u$  nun tipi  $1 - \delta$  diyelim ve bunu  $T_2(u) = 1 - \delta$  şeklinde yazalım.

$W(H_+^*)$  grubunun  $\{0\}$  yörüngesinin tipi  $0$  dır diyelim. Eğer  $u \in \mathbb{R}^{1+1}$  için  $u = 0$  ise  $u$  nin tipi  $0$  diyelim ve bunu  $T_2(0) = 0$  şeklinde yazalım.

Sonuç 4.9.1:  $\forall h \in H$  için  $T_2(h) = T_2(F(h))$  dir.

*İspat:* Önerme 4.9.1 ve Sonuç 4.5.1 den açıktır.

Şimdi  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ,  $\mathbb{R}^{1+1}$ 'nin bir  $m$ -lisi olmak üzere  $T_2(x_i) = t_i$  alalım. Burada  $t_i = 1, \delta, 1 + \delta$  veya  $1 - \delta$ .  $(t_1, t_2, \dots, t_m)$   $m$ -li dizisine  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$   $m$ -lisinin tipi diyelim ve  $T_2(x) = (t_1, t_2, \dots, t_m)$  şeklinde veya  $T_2\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  şeklinde gösterelim.

Önerme 4.9.2:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  elemanları için  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \stackrel{W(H_+^*)}{\sim} \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$  ise  $T_2(x) = T_2(y)$  dir yani  $m$ -linin tipi  $W(H_+^*)$ -invarianttır.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.5.1 ve Önerme 4.8.2 den açıktır.

Sonuç 4.9.2: Eğer  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  için  $T_2\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \neq T_2\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  ise  $x$  ve  $y$   $m$ -liler  $W(H_+^*)$ -denk değildir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Sonuç 4.8.1 den açıktır.

Sonuç 4.9.3: Eğer  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  olmak üzere bir  $p \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_2(x_p) \neq T_2(y_p)$  ise  $x$  ve  $y$   $m$ -liler  $W(H_+^*)$ -denk değildir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Sonuç 4.8.2 den açıktır.

Böylece iki  $m$ -linin  $W(H_+^*)$ -denklik şartı incelenirken, onların tiplerini eşit olması gerektiği elde edilir.

Şimdi  $m = 2$  durumunu inceleyelim.

$\mathbb{R}^{1+1}$  de keyfi bir  $x = \{x_1, x_2\}$  2 –lisini göz önüne alalım, burada  $x_1, x_2$  lerin her biri sıfırdan farklıdır. Bu ikilinin tipi için şu durumlar vardır:  $T_2(x) = (1, 1)$ ,  $T_2(x) = (1, \delta)$ ,  $T_2(x) = (1, 1 + \delta)$ ,  $T_2(x) = (1, 1 - \delta)$ ,  $T_2(x) = (\delta, 1)$ ,  $T_2(x) = (\delta, \delta)$ ,  $T_2(x) = (\delta, 1 + \delta)$ ,  $T_2(x) = (\delta, 1 - \delta)$ ,  $T_2(x) = (1 + \delta, 1)$ ,  $T_2(x) = (1 + \delta, \delta)$ ,  $T_2(x) = (1 + \delta, 1 + \delta)$ ,  $T_2(x) = (1 + \delta, 1 - \delta)$ ,  $T_2(x) = (1 - \delta, 1)$ ,  $T_2(x) = (1 - \delta, \delta)$ ,  $T_2(x) = (1 - \delta, 1 + \delta)$ ,  $T_2(x) = (1 - \delta, 1 - \delta)$ .

Eğer  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $T_2(x_1) \neq T_2(y_1)$  ise, Sonuç 4.8.1'e göre  $x$  ve  $y$  2 –liler  $W(H_+^*)$  –denk değildir.

Önerme 4.9.3:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $T_2(x_1) = T_2(y_1) = 1$  veya  $T_2(x_1) = T_2(y_1) = \delta$  olsun. Bu takdirde  $x \underset{\sim}{\overset{W(H_+^*)}{\rightsquigarrow}} y \implies \frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_2 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}, \frac{[x_1, x_2]}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{[y_1, y_2]}{\langle y_1, y_1 \rangle}$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.8.3 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Önerme 4.9.4:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $T_2(x_2) = T_2(y_2) = 1$  veya  $T_2(x_2) = T_2(y_2) = \delta$  olsun. Bu takdirde  $x \underset{\sim}{\overset{W(H_+^*)}{\rightsquigarrow}} y \implies \frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\langle x_2, x_2 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle}, \frac{[x_1, x_2]}{\langle x_2, x_2 \rangle} = \frac{[y_1, y_2]}{\langle y_2, y_2 \rangle}$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.8.4 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Teorem 4.9.1:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $T_2(x_1) = T_2(y_1) = 1$  veya  $T_2(x_1) = T_2(y_1) = \delta$  olsun. Bu takdirde  $\frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_2 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}, \frac{[x_1, x_2]}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{[y_1, y_2]}{\langle y_1, y_1 \rangle}$  ise  $x \underset{\sim}{\overset{W(H_+^*)}{\rightsquigarrow}} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Teorem 4.8.1 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Teorem 4.9.2:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $T_2(x_2) = T_2(y_2) = 1$  veya  $T_2(x_2) = T_2(y_2) = \delta$  olsun. Bu takdirde  $\frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\langle x_2, x_2 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle}, \frac{[x_1, x_2]}{\langle x_2, x_2 \rangle} = \frac{[y_1, y_2]}{\langle y_2, y_2 \rangle}$  ise  $x \underset{\sim}{\overset{W(H_+^*)}{\rightsquigarrow}} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Teorem 4.9.2 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Teorem 4.9.1 ve Teorem 4.9.2 de  $T_2(x) = (1, 1), T_2(x) = (1, \delta), T_2(x) = (1, 1 + \delta), T_2(x) = (1, 1 - \delta), T_2(x) = (\delta, 1), T_2(x) = (\delta, \delta), T_2(x) = (\delta, 1 +$

$\delta), T_2(x) = (\delta, 1 - \delta), T_2(x) = (1 + \delta, 1), T_2(x) = (1 + \delta, \delta), T_2(x) = (1 - \delta, 1), T_2(x) = (1 - \delta, \delta)$  durumları tam olarak incelendi.

İncelenmeyen durumlar  $T_2(x) = (1 + \delta, 1 + \delta), T_2(x) = (1 + \delta, 1 - \delta), T_2(x) = (1 - \delta, 1 + \delta), T_2(x) = (1 - \delta, 1 - \delta)$  durumlarıdır. Bu durumları inceleyelim:  $T_2(x) = (1 + \delta, 1 + \delta)$  durumunda  $x = (x_1, x_2)$  2-lisinin elemanları şu şekildedir:  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , burada  $r_1 \neq 0$  ve  $r_2 \neq 0$ .

Önerme 4.9.5:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r_1 \neq 0$  ve  $r_2 \neq 0$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y_2 = q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, q_1 \neq 0$  ve  $q_2 \neq 0$  olsun. Bu takdirde  $x \stackrel{W(H_+^*)}{\sim} y$  ise  $r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Önerme 4.8.6 den açıktır.

Teorem 4.9.3:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r_1 \neq 0$  ve  $r_2 \neq 0$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y_2 = q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, q_1 \neq 0$  ve  $q_2 \neq 0$  olsun. Bu takdirde  $r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  ise  $x \stackrel{W(H_+^*)}{\sim} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.8.3 den açıktır.

$T_2(x) = (1 - \delta, 1 - \delta)$  durumunda  $x = (x_1, x_2)$  2-lisinin elemanları  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  şeklindedir. Burada  $r_1 \neq 0$  ve  $r_2 \neq 0$  dir.

Teorem 4.9.4:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, r_1 \neq 0$  ve  $r_2 \neq 0$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, y_2 = q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, q_1 \neq 0$  ve  $q_2 \neq 0$  olsun. Bu takdirde  $x \stackrel{W(H_+^*)}{\sim} y \Leftrightarrow r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.8.4 den açıktır.

$T_2(x) = (1 + \delta, 1 - \delta)$  durumunda  $x = (x_1, x_2)$  2-lisinin elemanları  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  şeklindedir. Burada  $r_1 \neq 0$  ve  $r_2 \neq 0$  dir.

Teorem 4.9.5:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, r_1 \neq 0$  ve  $r_2 \neq 0$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y_2 = q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, q_1 \neq 0$  ve  $q_2 \neq 0$  olsun.  $x \stackrel{W(H_+^*)}{\sim} y \Leftrightarrow r_1^{-1}q_1 r_2^{-1}q_2 > 0$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.8.5 den açıktır.

$m$  bir doğal sayı ve  $m > 2$  olsun.

Teorem 4.9.6:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$   
 $r_1 \neq 0$  ve  $r_2 \neq 0$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, y_2 = q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$   $q_1 \neq 0$  ve  $q_2 \neq 0$  olsun.  
 $x \stackrel{W(H_+^*)}{\sim} y \Leftrightarrow r_1^{-1} q_1 r_2^{-1} q_2 > 0$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.8.6 dan açıktır.

Tanım 4.9.1:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  olmak üzere  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_2(x_i) = 1$  veya  $T_2(x_i) = \delta$  ise, bu  $m$ -liye  $H_+^*$ -bozulmamış  $m$ -li denir. Böyle bir  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  yoksa, bu  $m$ -liye  $H_+^*$ -bozulmuş  $m$ -li denir. Dolayısıyla  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{H}^m$   $H_+^*$ -bozulmuş ise  $T_2(x_i) = 1 + \delta$  veya  $T_2(x_i) = 1 - \delta$  dır.

Eğer  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$   $m$ -lileri için  $x \stackrel{W(H_+^*)}{\sim} y$  ve  $x, H_+^*$ -bozulmamış ise  $y$  de  $H_+^*$ -bozulmamışdır.

Eğer  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$   $m$ -lileri için  $x \stackrel{W(H_+^*)}{\sim} y$  ve  $x, H_+^*$ -bozulmuş ise  $y$  de  $H_+^*$ -bozulmuşdur.

Önerme 4.9.6:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m,$   $m$ -liler öyle ki  $T_2(x_1) = T_2(y_1) = 1$  olsun. Bu takdirde  $x \stackrel{W(H_+^*)}{\sim} y \Rightarrow \frac{\langle x_1, x_j \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_j \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}, \frac{[x_1, x_j]}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{[y_1, y_j]}{\langle y_1, y_1 \rangle}, j = 2, 3, \dots, m$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.8.7 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Teorem 4.9.7:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m,$   $m$ -lileri için  $T_2(x_1) = T_2(y_1) = 1$  ve  $\frac{\langle x_1, x_j \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_j \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}, \frac{[x_1, x_j]}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{[y_1, y_j]}{\langle y_1, y_1 \rangle}, j = 2, 3, \dots, m,$  olsun. Bu takdirde  $x \stackrel{W(H_+^*)}{\sim} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Teorem 4.8.7 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Önerme 4.9.7:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m,$   $m$ -liler olmak üzere ve bir  $p \in \{2, 3, \dots, m\}$  için  $T_2(x_p) = T_2(y_p) = 1$  olsun.  $x \stackrel{W(H_+^*)}{\sim} y$  ise  $\frac{\langle x_p, x_j \rangle}{\langle x_p, x_p \rangle} = \frac{\langle y_p, y_j \rangle}{\langle y_p, y_p \rangle}, \frac{[x_p, x_j]}{\langle x_p, x_p \rangle} = \frac{[y_p, y_j]}{\langle y_p, y_p \rangle}, j = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, m$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.8.8 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Teorem 4.9.8:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $m$  –liler olmak üzere bir  $p \in \{2, 3, \dots, m\}$  için  $T_2(x_p) = T_2(y_p) = 1$  ve  $\frac{\langle x_p, x_j \rangle}{\langle x_p, x_p \rangle} = \frac{\langle y_p, y_j \rangle}{\langle y_p, y_p \rangle}, \frac{[x_p, x_j]}{\langle x_p, x_p \rangle} = \frac{[y_p, y_j]}{\langle y_p, y_p \rangle}, j = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, m$  olsun. Bu takdirde  $x \stackrel{W(H_+^*)}{\sim} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Teorem 4.8.8 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Not:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $H_+^*$  –bozulmamış  $m$  –liler olsun. Eğer  $T_2(x) \neq T_2(y)$  ise Sonuç 4.9.2 göre bu  $m$  –liler  $W(H_+^*)$  –denk değildir. Kabul edelim ki  $T_2(x) = T_2(y)$  olsun.  $x, H_+^*$  –bozulmamış olduğundan bir  $p \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$  için  $T_2(x_p) = 1$  veya  $T_2(x_p) = \delta$  dir.  $T_1(x) = T_1(y)$  olduğundan  $T_1(x_p) = T_1(y_p) = 1$  veya  $T_1(x_p) = T_1(y_p) = \delta$  dir. Dolayısıyla Önerme 4.9.7, Önerme 4.9.7, Teorem 4.9.7, Teorem 4.9.8 de  $H_+^*$  –bozulmamış  $m$  –lilerin  $W(H_+^*)$  –denklik problemi tam olarak çözülmüş oldu.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $H_+^*$  –bozulmuş  $m$  –li olsun. Bu takdirde  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_2(x_j) = 1 + \delta$  veya  $T_2(x_j) = 1 - \delta$  dir.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $H_+^*$  –bozulmuş  $m$  –li ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_2(x_j) = 3$  olsun. Bu durumda  $x$  in elemanları  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, x_m = r_m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  şeklindedir. Burada  $r_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  dır.

Önerme 4.9.8:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $H_+^*$  –bozulmuş  $m$  –liler ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_2(x_j) = T_2(y_j) = 3$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, x_m = r_m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, y_m = q_m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, q_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $x \stackrel{W(H_+^*)}{\sim} y$  ise  $r_j^{-1} r_1 = q_j^{-1} q_1, j = 2, \dots, m$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Önerme 4.8.9 dan açıktır.

Teorem 4.9.9:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $H_+^*$  –bozulmuş  $m$  –liler ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_2(x_j) = T_2(y_j) = 3$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, x_m = r_m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, y_m = q_m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, q_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun. Bu takdirde  $r_j^{-1} r_1 = q_j^{-1} q_1 \Rightarrow x \stackrel{W(H_+^*)}{\sim} y, j = 2, \dots, m$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.8.9 den açıktır.

Önerme 4.9.9:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $H_+^*$  –bozulmuş  $m$  –liler ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_2(x_j) = T_2(y_j) = 4$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dots, x_m =$

$r_m \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, r_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dots, y_m = q_m \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, q_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $x \stackrel{W(H_+^*)}{\sim} y$  ise  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$   $j = 2, \dots, m$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Önerme 4.8.10 dan açıktır.

Teorem 4.9.10:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m, H_+^*$  –bozulmuş  $m$  –liler ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_2(x_j) = T_2(y_j) = 4$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dots, x_m = r_m \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, r_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dots, y_m = q_m \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, q_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1, j = 2, \dots, m$  ise  $x \stackrel{W(H_+^*)}{\sim} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.8.10 dan açıktır.

$D$  ve  $E$  kümeleri  $\{1, 2, \dots, m\}$  kümesinin  $D \neq \emptyset, E \neq \emptyset, D \cap E = \emptyset$  ve  $D \cup E = \{1, 2, \dots, m\}$  olacak şekilde alt kümeleri olsun.  $D$  nin en küçük elemanı 1 ve  $E$  nin en küçük elemanı  $p$  olsun.

Önerme 4.9.10:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m, H_+^*$  –bozulmuş  $m$  –liler olsun.  $\forall i \in D$  için  $T_2(x_j) = 3, x_i = r_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r_i \in \mathbb{R}^*$  ve  $\forall j \in E$  için  $T_2(y_j) = 4, y_j = q_j \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, q_j \in \mathbb{R}^*$  olmak üzere  $x \stackrel{W(H_+^*)}{\sim} y$  ise  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1, r_j^{-1}r_p = q_j^{-1}q_p$  ve  $r_1^{-1}q_1 r_p^{-1}q_p > 0$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Önerme 4.8.11 den açıktır.

Teorem 4.9.11:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m, H_+^*$  –bozulmuş  $m$  –liler olsun.  $\forall i \in D$  için  $T_2(x_j) = 3, x_i = r_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r_i \in \mathbb{R}^*$  ve  $\forall j \in E$  için  $T_2(y_j) = 4, y_j = q_j \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, q_j \in \mathbb{R}^*$  olmak üzere  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1, r_j^{-1}r_p = q_j^{-1}q_p$  ve  $r_1^{-1}q_1 r_p^{-1}q_p > 0$  ise  $\implies x \stackrel{W(H_+^*)}{\sim} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.8.11 den açıktır.

Böylece  $W(H_+^*)$  grubu için tüm durumlar incelenerek  $W(H_+^*)$  –denklik problemi tam olarak çözülmüş oldu.

#### 4.10. " $m$ " lilerin $B(H)_2$ -Denklik problemi

Yüksek lisans tezinde (Göksal, 2011) bir noktanın bir noktaya  $B(H)_2$  –denkliği incelenmişti. Bu bölümde  $m$  noktadan oluşan iki sistemin  $B(H)_2$  –denklik problemini inceleyeceğiz.

$m = 1$  olsun. Bu durumda  $B(H)_2$  –denklik probleminin çözümü  $B(H)_2$  grubunun  $\mathbb{H}$  cebirdeki  $(g, h) \rightarrow gh$  etkisine göre  $B(H)_2$  –yörüngeleri bulunmasına indirgenir.  $\mathbb{R}^* = \{r \in \mathbb{R} | r \neq 0\}$  ve  $p \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $Y_3(p) = \{h \in \mathbb{H} | |h|_2 = p\}$  kümesini alalım.  $\forall p \in \mathbb{R}^*$  için  $Y_3(p)$  nin  $B(H)_2$  –yörüngedir (Göksal, 2011).

Önerme 4.10.1:  $B(H)_2$  grubunun  $\mathbb{H}$  cebirdeki  $(g, h) \rightarrow gh$  etkisine göre yörüngeleri şunlardır,  $Y_3(p), p \in \mathbb{R}^*; \{r(1 + \delta) | r \in \mathbb{R}^*\}, \{r(1 - \delta) | r \in \mathbb{R}^*\}, \{0\}$  dir (Göksal, 2011).

$B(H)_2$  grubunun  $Y_3(p)$  yörüngesinin tipi  $p$  olsun. Eğer  $h \in \mathbb{H}$  için  $h \in Y_3(p)$  ise  $h$  nin tipi  $p$  dir diyelim ve bunu  $T_3(h) = p$  şeklinde gösterelim.

$B(H)_2$  grubunun  $\{r(1 + \delta) | r \in \mathbb{R}^*\}$  yörüngesinin tipi  $1 + \delta$  olsun. Eğer  $h \in \mathbb{H}$  için  $h \in \{r(1 + \delta) | r \in \mathbb{R}^*\}$  ise  $h$  nin tipi  $1 + \delta$  dir diyelim ve bunu  $T_3(h) = 1 + \delta$  şeklinde gösterelim.

$B(H)_2$  grubunun  $\{r(1 - \delta) | r \in \mathbb{R}^*\}$  yörüngesinin tipi  $1 - \delta$  dir diyelim. Eğer  $h \in \mathbb{H}$  için  $h \in \{r(1 - \delta) | r \in \mathbb{R}^*\}$  ise  $h$  nin tipi  $1 - \delta$  dir diyelim ve bunu  $T_3(h) = 1 - \delta$  şeklinde gösterelim.

$B(H)_2$  grubunun  $\{0\}$  yörüngesinin tipi  $0$  olsun. Eğer  $h \in \mathbb{H}$  için  $h = 0$  ise  $h$  nin tipi  $0$  dir diyelim ve bunu  $T_3(0) = 0$  şeklinde gösterelim.

Şimdi  $h = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ ,  $\mathbb{H}$ 'nin bir  $m$  –lisi öyle ki  $T_3(h_i) = t_i$  olsun, burada  $t_i = p, 1 + \delta, 1 - \delta$  veya  $0$  dir. Burada  $p \in \mathbb{R}^*$ .  $(t_1, t_2, \dots, t_m)$   $m$  –li dizisine  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$   $m$  –lisinin tipi diyelim ve  $T_3(h) = (t_1, t_2, \dots, t_m)$  şeklinde veya  $T_3\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$  şeklinde gösterelim.

Önerme 4.10.2:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  elemanları için  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\} \stackrel{B(H)_2}{\sim} \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$  ise  $T_3(h) = T_3(k)$  dir yani  $m$  –linin tipi  $B(H)_2$  –invarianttır.

*İspat:* Önerme 4.5.1 ve Önerme 4.10.1 den açıktır.

Sonuç 4.10.1: Eğer  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  elemanları için  $T_3\{h_1, h_2, \dots, h_m\} \neq T_3\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$  ise  $h$  ve  $k$   $m$  –liler  $B(H)_2$  –denk değildir.

*İspat:* Önerme 4.10.2 den açıktır.

Sonuç 4.10.2: Eğer  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  olmak üzere bir  $p \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_3(h_p) \neq T_3(k_p)$  ise  $h$  ve  $k$   $m$  –liler  $B(H)_2$  –denk değildir.

*İspat:* Sonuç 4.10.1 den açıktır.

O halde iki  $m$  –linin  $B(H)_2$  –denklik şartı incelenirken, onların tiplerinin eşit olması gerektiği elde edilir.

Şimdi  $m = 2$  durumu inceleyelim.  $\mathbb{H}$  de keyfi bir  $h = \{h_1, h_2\}$  2 –lisini göz önüne alalım, burada  $h_1, h_2$  lerin her biri sıfırdan farklıdır. Bu ikilinin tipi için:  $T_3(h) = (p, q), p, q \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(h) = (p, 1 + \delta), p \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(h) = (p, 1 - \delta), p \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(h) = (1 + \delta, p), p \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(h) = (1 + \delta, 1 + \delta), p \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(h) = (1 + \delta, 1 - \delta), p \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(h) = (1 - \delta, p), p \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(h) = (1 - \delta, 1 + \delta), p \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(h) = (1 - \delta, 1 - \delta), p \in \mathbb{R}^*$  durumları vardır.

Eğer  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $T_3(h_1) \neq T_3(k_1)$  ise, Sonuç 4.10.2 göre  $h$  ve  $k$  2 –lileri  $B(H)_2$  –denk değildir.

Önerme 4.10.3:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $|h_1|_2 \neq 0, |k_1|_2 \neq 0$  olsun.  $h \underset{\sim}{B(H)^2} k$  ise  $|h_1|_2 = |k_1|_2$  ve  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$  dir.

*İspat:*  $h \underset{\sim}{B(H)^2} k$  olsun. O halde  $k = gh$  olacak şekilde  $\exists g \in B(H)_2$  vardır.

$$k = gh,$$

$$(k_1, k_2) = g(h_1, h_2),$$

$$(k_1, k_2) = (gh_1, gh_2),$$

$$k_1 = gh_1, k_2 = gh_2,$$

olur. Şimdi de  $|h|_2 = |k|_2$  ve  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$  olduğunu gösterelim:  $k_1 = gh_1, |k_1|_2 = |gh_1|_2 = |g|_2|h_1|_2$  ve  $|g|_2 = 1$  olduğundan  $|k_1|_2 = |h_1|_2$  bulunur. Sonuç 3.2.2'ye göre  $|h_1|_2 \neq 0, |k_1|_2 \neq 0$  olduğundan dolayı  $h_1 \in \mathbb{H}^*, k_1 \in \mathbb{H}^*$  dir. Dolayısıyla  $h^{-1}$  ve  $k^{-1}$  elemanlar mevcuttur.  $k_1 = gh_1, k_2 = gh_2$  olduğundan  $k_1^{-1}k_2 = (gh_1)^{-1}(gh_2) = h_1^{-1}g^{-1}gh_2 = h_1^{-1}h_2$  bulunur. Buradan  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$  olur.

Önerme 4.10.4:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $|h_2|_2 \neq 0, |k_2|_2 \neq 0$  olsun.  $h \underset{\sim}{B(H)^2} k$  ise  $|h_2|_2 = |k_2|_2$  ve  $h_2^{-1}h_1 = k_2^{-1}k_1$  dir.

*İspat:* Önerme 4.10.3 ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.10.1:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $|h_1|_2 \neq 0, |k_1|_2 \neq 0$  olsun.  $|h_1|_2 = |k_1|_2$  ve  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$  ise  $h \underset{\sim}{B(H)^2} k$  dir.

*İspat:*  $|h_1|_2 = |k_1|_2 \neq 0$  ve  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$  olsun.  $k = gh$  olacak şekilde  $\exists g \in B(H)_2$  var olduğunu göstermeliyiz. Sonuç 3.2.2 göre ve  $|h_1|_2 \neq 0$ ,  $|k_1|_2 \neq 0$  olduğundan  $h_1 \in \mathbb{H}^*$ ,  $k_1 \in \mathbb{H}^*$  dir.  $\mathbb{H}^*$  grup olduğundan  $k_1 h_1^{-1} \in \mathbb{H}^*$  dir.  $g = k_1 h_1^{-1}$  ile gösterelim. Böylece  $k_1 = gh_1$  bulunur.  $k_1 = gh_1$ ,  $|h_1|_2 = |k_1|_2$  ve  $|k_1|_2 = |gh_1|_2 = |g|_2 |h_1|_2$  den  $|g|_2 = 1$  elde edilir. Yani  $g \in B(H)_2$  dir.  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$  olduğundan  $k_1 h_1^{-1}h_2 = k_2$  olur.  $g = k_1 h_1^{-1}$  olduğundan  $k_2 = gh_2$  dir. Dolayısıyla  $k_1 = gh_1$  ve  $k_2 = gh_2$  olup  $h \underset{\sim}{B(H)_2} k$  dir.

**Teorem 4.10.2:**  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $|h_2|_2 \neq 0$ ,  $|k_2|_2 \neq 0$  olsun.  $|h_2|_2 = |k_2|_2$  ve  $h_2^{-1}h_1 = k_2^{-1}k_1$  ise  $h \underset{\sim}{B(H)_2} k$  dir.

*İspat:* Teorem 4.10.1 in ispatına benzer şekilde yapılır.

**Teorem 4.10.1** ve **Teorem 4.10.2** de  $T_3(h) = (p, q), p, q \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(h) = (p, 1 + \delta), p \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(h) = (p, 1 - \delta), p \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(h) = (1 + \delta, p), p \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(h) = (1 - \delta, p), p \in \mathbb{R}^*$  durumları tam olarak incelendi. Şimdi incelenmeyen  $T_3(h) = (1 + \delta, 1 + \delta)$ ,  $T_3(h) = (1 + \delta, 1 - \delta)$ ,  $T_3(h) = (1 - \delta, 1 + \delta)$ ,  $T_3(h) = (1 - \delta, 1 - \delta)$  durumlarını inceleyelim.  $T_3(h) = (1 + \delta, 1 + \delta)$  durumunda  $h = (h_1, h_2)$  2-lisinin elemanları  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 + \delta)$  şeklindedir. Burada  $r_1 \neq 0$  ve  $r_2 \neq 0$  dir.

**Önerme 4.10.6:**  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 + \delta)$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $r_2 \in \mathbb{R}^*$ , ve  $k_1 = q_1(1 + \delta), k_2 = q_2(1 + \delta)$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $q_2 \in \mathbb{R}^*$ , olsun.  $h \underset{\sim}{B(H)_2} k$  ise  $r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  dir.

*İspat:* Önerme 4.6.6 nin ispatına benzer şekilde yapılır.

**Teorem 4.10.3:**  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 + \delta)$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $r_2 \in \mathbb{R}^*$ , ve  $k_1 = q_1(1 + \delta), k_2 = q_2(1 + \delta)$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  ise  $h \underset{\sim}{B(H)_2} k$  dir.

*İspat:*  $r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  olsun. Buradan  $q_1 = (r_2^{-1}q_2)r_1$  dir.  $r_1 \neq 0$ ,  $r_2 \neq 0$  ve  $q_1 \neq 0$ ,  $q_2 \neq 0$  olduğundan  $r_2^{-1}q_2 \neq 0$  bulunur.  $c = r_2^{-1}q_2$  ile gösterelim.  $r_2^{-1}q_2 \neq 0$  olduğundan  $c \neq 0$ ,  $q_1 = cr_1$  ve  $q_2 = cr_2$  olur.  $a + b = c$  ve  $a - b = c^{-1}$  olmak üzere  $g = a + \delta b$  alalım.  $a = \frac{1}{2}(c + c^{-1})$ ,  $b = \frac{1}{2}(c - c^{-1})$  ve  $a^2 - b^2 = 1$  olur. Dolayısıyla  $g \in B(H)_2$  dir.  $g(1 + \delta) = (a + \delta b)(1 + \delta) = (a + b)(1 + \delta)$  olduğundan  $k_1 = q_1(1 + \delta) = cr_1(1 + \delta) = ch_1 = (a + b)r_1(1 + \delta) = gh_1$  ve

$k_2 = q_2(1 + \delta) = (a + b)r_2(1 + \delta) = (a + b)h_2 = gh_2$  bulunur. Böylece  $h = gk$  olup  $h \underset{\sim}{B(H)_2} k$  dir.

$T_3(h) = (1 - \delta, 1 - \delta)$  durumunda  $h = (h_1, h_2)$  2-lisinin elemanları  $h_1 = r_1(1 - \delta), h_2 = r_2(1 - \delta)$  şeklindedir. Burada  $r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  dir.

Teorem 4.10.4:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $h_1 = r_1(1 - \delta), h_2 = r_2(1 - \delta), r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 - \delta), k_2 = q_2(1 - \delta), q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun. Bu takdirde  $h \underset{\sim}{B(H)_2} k \Leftrightarrow r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  dir.

*İspat:* Önerme 4.6.6 ve Teorem 4.10.3 ün ispatına benzer şekildedir.

Şimdi incelenmeyen  $T_3(h) = (1 + \delta, 1 - \delta), T_3(h) = (1 - \delta, 1 + \delta)$  durumlarını inceleyelim.  $T_3(h) = (1 + \delta, 1 - \delta)$  durumunda  $h = (h_1, h_2)$  2-lisinin elemanları  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 - \delta)$  şeklindedir. Burada  $r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  dir.

Önerme 4.10.7:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 - \delta), r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 + \delta), k_2 = q_2(1 - \delta), q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun. Bu takdirde  $h \underset{\sim}{B(H)_2} k$  ise  $r_1r_2 = q_1q_2$  dir.

*İspat:*  $h \underset{\sim}{B(H)_2} k$  olsun. Bu takdirde  $k = gh$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in B(H)_2$  mevcuttur. Buradan  $a^2 - b^2 = 1, k_1 = gh_1$  ve  $k_2 = gh_2$  olur. Böylece  $k_1 = q_1(1 + \delta) = (a + b)r_1(1 + \delta)$  ve  $k_2 = q_2(1 - \delta) = (a - b)r_2(1 + \delta)$  bulunur. Bu eşitliklerden  $q_1 = (a + b)r_1$  ve  $q_2 = (a - b)r_2$  elde edilir. O halde  $q_1r_1^{-1} = (a + b)$  ve  $q_2r_2^{-1} = (a - b)$  dir.  $a^2 - b^2 = 1$  olduğundan  $q_1r_1^{-1}q_2r_2^{-1} = 1$  dir. Böylece  $r_1r_2 = q_1q_2$  bulunur.

Teorem 4.10.5:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 - \delta), r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 + \delta), k_2 = q_2(1 - \delta), q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $r_1r_2 = q_1q_2$  ise  $h \underset{\sim}{B(H)_2} k$  dir.

*İspat:*  $r_1r_2 = q_1q_2$  olsun. Buradan  $q_1r_1^{-1}q_2r_2^{-1} = 1$  dir.  $a = \frac{1}{2}(q_1r_1^{-1} + q_2r_2^{-1}), a = \frac{1}{2}(q_1r_1^{-1} - q_2r_2^{-1})$  olmak üzere  $g = a + \delta b \in \mathbb{H}^*$  alalım.  $(a + b) = q_1r_1^{-1}, (a - b) = r_2^{-1}q_2$  olup  $a^2 - b^2 = q_1r_1^{-1}q_2r_2^{-1} = 1$  dir. Dolayısıyla  $g = a + \delta b \in B(H)_2$  dir.  $(a + b) = q_1r_1^{-1}, (a - b) = r_2^{-1}q_2$  olduğundan  $q_1 = (a + b)r_1$  ve  $q_2 = (a - b)r_2$  bulunur. Böylece  $k_1 = q_1(1 + \delta) = gh_1 = (a + \delta b)r_1(1 + \delta) =$

$r_1(a+b)(1+\delta)$  ve  $k_2 = q_2(1-\delta) = gh_2 = (a+\delta b)r_2(1-\delta) = r_2(a-b)(1-\delta)$  elde edilir. Dolayısıyla  $k = gh$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in B(H)_2$  mevcuttur.

$T_3(h) = (1-\delta, 1+\delta)$  durumunda  $h = (h_1, h_2)$  2-lisinin elemanları  $h_1 = r_1(1-\delta), h_2 = r_2(1+\delta)$  şeklindedir. Burada  $r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  dır.

Teorem 4.10.6:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $h_1 = r_1(1-\delta), h_2 = r_2(1+\delta), r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1-\delta), k_2 = q_2(1+\delta), q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $r_1r_2 = q_1q_2 \Leftrightarrow h \underset{\sim}{B(H)_2} k$  dir.

*İspat:* Teorem 4.10.5 in ispatına benzer şekilde yapılır.

$m$  bir doğal sayı ve  $m > 2$  olsun.

Tanım 4.10.1:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{H}^m$  olmak üzere  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  ve bir  $p \in \mathbb{R}^*$  için  $T_3(h_i) = p$  ise, bu  $m$ -liye  $B(H)_2$ -bozulmamış  $m$ -li denir. Bu şekilde  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  yoksa, bu  $m$ -liye  $B(H)_2$ -bozulmuş  $m$ -li denir. Eğer  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$   $m$ -liler için  $h \underset{\sim}{B(H)_2} k$  ve  $h, B(H)_2$ -bozulmamış ise  $k$  da  $B(H)_2$ -bozulmamıştır.

Eğer  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$   $m$ -liler için  $h \underset{\sim}{B(H)_2} k$  ve  $h, B(H)_2$ -bozulmuş ise  $k$  da  $B(H)_2$ -bozulmuştur.

Önerme 4.10.7:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $m$ -liler için  $|h_1|_2 \neq 0, |k_1|_2 \neq 0$  olsun.  $h \underset{\sim}{B(H)_2} k$  ise  $|h_1|_2 = |k_1|_2$  ve  $h_1^{-1}h_j = k_1^{-1}k_j, j = 2, 3, \dots, m$  dir.

*İspat:*  $h \underset{\sim}{B(H)_2} k$  olsun. Bu takdirde  $k = gh$  olacak şekilde  $\exists g \in B(H)_2$  vardır.

$$\begin{aligned} k &= gh, \\ (k_1, k_2, \dots, k_m) &= g(h_1, h_2, \dots, h_m), \\ (k_1, k_2, \dots, k_m) &= (gh_1, gh_2, \dots, gh_m), \\ k_1 &= gh_1, k_2 = gh_2, \dots, k_m = gh_m \end{aligned}$$

olur. Şimdi de  $|h_1|_2 = |k_1|_2$  ve  $h_1^{-1}h_j = k_1^{-1}k_j, j = 2, 3, \dots, m$  olduğunu gösterelim: Sonuç 3.2.2 ye göre  $|h_1|_2 \neq 0, |k_1|_2 \neq 0$  olduğundan  $h_1 \in \mathbb{H}^*, k_1 \in \mathbb{H}^*$  dır. Dolayısıyla  $h^{-1}$  ve  $k^{-1}$  elemanlar mevcuttur.  $k_1 = gh_1, |k_1|_2 = |gh_1|_2 = |g|_2|h_1|_2$  ve  $|g|_2 = 1$  olduğundan  $|k_1|_2 = |h_1|_2$  bulunur.  $k_1 = gh_1,$

$k_2 = gh_2, \dots, k_m = gh_m$  eşitliklerinden  $k_1^{-1}k_j = (gh_1)^{-1}(gh_j) = g^{-1}h_1^{-1}gh_j = g^{-1}gh_1^{-1}h_j = h_1^{-1}h_j$  elde edilir. Böylece  $h_1^{-1}h_j = k_1^{-1}k_j$  dir.

**Teorem 4.10.7:**  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $m$  –liler için  $|h_1|_2 \neq 0, |k_1|_2 \neq 0$  olsun.  $|h_1|_2 = |k_1|_2$  ve  $h_1^{-1}h_j = k_1^{-1}k_j, j = 2, 3, \dots, m$  ise  $h \underset{\sim}{B(H)_2} k$  dir.

*İspat:*  $|h_1|_2 = |k_1|_2 \neq 0$  ve  $h_1^{-1}h_j = k_1^{-1}k_j, j = 2, 3, \dots, m$  olsun.  $k = gh$  olacak şekilde  $\exists g \in B(H)_2$  var olduğunu göstermeliyiz. Sonuç 3.2.2 ve  $|h_1|_2 \neq 0, |k_1|_2 \neq 0$  olduğundan  $h_1 \in \mathbb{H}^*, k_1 \in \mathbb{H}^*$  dir.  $\mathbb{H}^*$  grup olduğundan  $k_1 h_1^{-1} \in \mathbb{H}^*$  dir.  $g = k_1 h_1^{-1}$  ile gösterelim. Buradan  $k_1 = gh_1$  olur.  $k_1 = gh_1, |h_1|_2 = |k_1|_2$  ve  $|k_1|_2 = |gh_1|_2 = |g|_2 |h_1|_2$  eşitliklerinden  $|g|_2 = 1$  bulunur. Yani  $g \in B(H)_2$  dir.  $h_1^{-1}h_j = k_1^{-1}k_j, j = 2, 3, \dots, m$  olduğundan  $k_1 h_1^{-1}h_j = k_j, j = 2, 3, \dots, m$  dir.  $g = k_1 h_1^{-1}$  kullanılarak  $k_j = gh_j, j = 2, 3, \dots, m$  elde edilir. Dolayısıyla  $k_1 = gh_1$  ve  $k_j = gh_j, j = 2, 3, \dots, m$  olup  $h \underset{\sim}{B(H)_2} k$  dir.

**Önerme 4.10.8:**  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  olmak üzere bir  $i \in \{2, 3, \dots, m\}$  için  $|h_i|_2 \neq 0, |k_i|_2 \neq 0$  olsun.  $h \underset{\sim}{B(H)_2} k$  ise  $|h_i|_2 = |k_i|_2$  ve  $h_i^{-1}h_j = k_i^{-1}k_j, j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m$  dir.

*İspat:* Önerme 4.10.7 nin ispatına benzerdir.

**Teorem 4.10.8:**  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  olmak üzere bir  $i \in \{2, 3, \dots, m\}$  için  $|h_i|_2 \neq 0, |k_i|_2 \neq 0$  olsun.  $|h_i|_2 = |k_i|_2$  ve  $h_p^{-1}h_j = k_p^{-1}k_j, j = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, m$  ise  $h \underset{\sim}{B(H)_2} k$  dir.

*İspat:* İspat Teorem 4.10.7 nin ispatına benzerdir.

$h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m, B(H)_2$  –bozulmamış  $m$  –liler olsun. Eğer  $T_3(h) \neq T_3(k)$  ise Sonuç 4.10.1 göre bu  $m$  –liler  $B(H)_2$  –denk değildir.  $T_3(h) = T_3(k)$  olsun. Bu takdirde  $h, B(H)_2$  –bozulmamış olduğundan bir  $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$  ve bir  $p \in \mathbb{R}^*$  için  $T_3(h_i) = p$  dir.  $T_3(h) = T_3(k)$  olduğundan  $T_3(h_i) = T_3(k_i) = p$  dir. Dolayısıyla Önerme 4.10.7, Önerme 4.10.8, Teorem 4.10.7, Teorem 4.10.8 den  $B(H)_2$  –bozulmamış  $m$  –lilerin  $B(H)_2$  –denklik problemi tam olarak incelenmiş olur.

$h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $B(H)_2$  –bozulmuş  $m$  –li olsun. Bu takdirde tüm  $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$  için  $T_3(h_j) = 1 + \delta$  veya  $T_3(h_j) = 1 - \delta$  dir.

$h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $B(H)_2$  –bozulmuş  $m$  –li ve tüm  $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$  için  $T_3(h_j) = 1 + \delta$  olsun. Bu durumda  $h$   $m$  –linin elemanları  $h_1 = r_1(1 + \delta), \dots, h_m = r_m(1 + \delta)$  şeklindedir. Burada  $r_1 \neq 0, \dots, r_m \neq 0$  dir.

Önerme 4.10.9:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $B(H)_2$  –bozulmuş  $m$  –liler ve tüm  $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$  için  $T_3(h_j) = T_3(k_j) = 1 + \delta$  ve  $h_1 = r_1(1 + \delta), \dots, h_m = r_m(1 + \delta)$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 + \delta), \dots, k_m = q_m(1 + \delta)$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $h \stackrel{B(H)_2}{\sim} k$  ise  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$   $j = 2, \dots, m$  dir.

*İspat:* İspat Önerme 4.6.9 un ispatına benzerdir.

Teorem 4.10.9:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $B(H)_2$  –bozulmuş  $m$  –liler ve tüm  $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$  için  $T_3(h_j) = T_3(k_j) = 1 + \delta$  ve  $h_1 = r_1(1 + \delta), \dots, h_m = r_m(1 + \delta)$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 + \delta), \dots, k_m = q_m(1 + \delta)$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$ ,  $j = 2, \dots, m$  ise  $h \stackrel{B(H)_2}{\sim} k$  dir.

*İspat:*  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$ ,  $j = 2, \dots, m$  olsun.  $r_j \neq 0$ ,  $q_j \neq 0$  olduğundan  $q_j r_j^{-1} \neq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  dir.  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$ ,  $j = 2, \dots, m$  olduğundan  $q_j r_j^{-1} = q_1 r_1^{-1}$ ,  $j = 2, \dots, m$  bulunur.  $q_1 r_1^{-1} = c$  olsun.  $q_j r_j^{-1} = q_1 r_1^{-1} = c$ ,  $j = 2, \dots, m$  den  $q_j = c r_j$ ,  $j = 2, \dots, m$ , yazılabilir.  $a + b = c$  ve  $a - b = c^{-1}$  olacak biçimde  $g = a + \delta b$  alalım.  $a = \frac{1}{2}(c + c^{-1})$ ,  $b = \frac{1}{2}(c - c^{-1})$  ve  $a^2 - b^2 = 1$  olur. Dolayısıyla  $g \in B(H)_2$  dir.  $g(1 + \delta) = (a + \delta b)(1 + \delta) = (a + b)(1 + \delta)$  olduğundan  $k_1 = q_1(1 + \delta) = c r_1(1 + \delta) = c h_1 = (a + b)r_1(1 + \delta) = g h_1$  ve  $k_j = q_j(1 + \delta) = (a + b)r_j(1 + \delta) = (a + b)h_j = g h_j$ ,  $j = 2, \dots, m$  bulunur. Buradan  $h = gk$  olup  $h \stackrel{B(H)_2}{\sim} k$  dir.

Önerme 4.10.10:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $B(H)_2$  –bozulmuş  $m$  –liler ve  $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$  için  $T_3(h_j) = T_3(k_j) = 1 - \delta$  ve  $h_1 = r_1(1 - \delta), \dots, h_m = r_m(1 - \delta)$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 - \delta), \dots, k_m = q_m(1 - \delta)$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $h \stackrel{B(H)_2}{\sim} k$  ise  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$   $j = 2, \dots, m$  dir.

*İspat:* Önerme 4.6.9 un ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.10.10:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m, B(H)_2$  –bozulmuş  $m$  –liler ve  $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$  için  $T_3(h_j) = T_3(k_j) = 1 - \delta$  ve  $h_1 = r_1(1 - \delta), \dots, h_m = r_m(1 - \delta), r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 - \delta), \dots, k_m = q_m(1 - \delta), q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1, j = 2, \dots, m$  ise  $h \stackrel{B(H)_2}{\sim} k$  dir.

*İspat:* Teorem 4.10.9 un ispatına benzer şekilde yapılır.

Şimdi  $D$  ve  $E$  kümeleri  $\{1, 2, \dots, m\}$  kümesinin  $D \neq \emptyset, E \neq \emptyset, D \cap E = \emptyset$  ve  $D \cup E = \{1, 2, \dots, m\}$  olacak biçimde alt kümeleri olsun.  $D$  nin en küçük elemanı 1 ve  $E$  nin en küçük elemanı  $n$  olsun.  $E$  nin en küçük elemanı 1 ve  $D$  nin en küçük elemanı  $n$  olması durumun da benzer şekilde incelenebilir.

Önerme 4.10.11:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m, B(H)_2$  –bozulmuş  $m$  –liler olsun.  $\forall i \in D$  için  $T_3(h_i) = 1 + \delta, h_i = r_i(1 + \delta), r_i \in \mathbb{R}^*$  ve  $\forall j \in E$  için  $T_3(k_j) = 1 - \delta, k_j = q_j(1 - \delta), q_j \in \mathbb{R}^*$  olmak üzere  $h \stackrel{B(H)_2}{\sim} k$  ise  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1, r_j^{-1}r_n = q_j^{-1}q_n$  ve  $r_1r_n = q_1q_n$  dir.

*İspat:*  $h \stackrel{B(H)_2}{\sim} k$  olsun. Bu takdirde  $k = gh$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in B(H)_2$  mevcuttur. Buradan  $a^2 - b^2 = 1, k_n = gh_n, n \in \{1, 2, \dots, m\}$  olur. Böylece  $\forall i \in D$  ve  $\forall j \in E$  için  $k_i = q_i(1 + \delta) = (a + b)r_i(1 + \delta)$  ve  $k_j = q_j(1 - \delta) = (a - b)r_j(1 + \delta)$  bulunur. Bu eşitliklerden  $q_i = (a + b)r_i$  ve  $q_j = (a - b)r_j$  elde edilir. O halde  $q_i r_i^{-1} = (a + b)$  ve  $q_j r_j^{-1} = (a - b)$  dir.  $a^2 - b^2 = 1$  olduğundan  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1, r_j^{-1}r_n = q_j^{-1}q_n$  ve  $r_1r_n = q_1q_n$  bulunur.

Teorem 4.10.11:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m, B(H)_2$  –bozulmuş  $m$  –liler olsun.  $\forall i \in D$  için  $T_3(h_i) = 1 + \delta, h_i = r_i(1 + \delta), r_i \in \mathbb{R}^*$  ve  $\forall j \in E$  için  $T_3(k_j) = 1 - \delta, k_j = q_j(1 - \delta), q_j \in \mathbb{R}^*$  olmak üzere  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1, r_j^{-1}r_n = q_j^{-1}q_n$  ve  $r_1r_n = q_1q_n$  ise  $h \stackrel{B(H)_2}{\sim} k$  dir.

*İspat:*  $\forall i \in D$  ve  $\forall j \in E$  için  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1, r_j^{-1}r_n = q_j^{-1}q_n$  ve  $r_1r_n = q_1q_n$  olsun. Buradan  $r_1^{-1}q_1 r_n^{-1}q_n = 1$  dir.  $a = \frac{1}{2}(r_1^{-1}q_1 + r_n^{-1}q_n), b = \frac{1}{2}(r_1^{-1}q_1 - r_n^{-1}q_n)$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in \mathbb{H}^*$  alalım. Buradan  $(a + b) = r_1^{-1}q_1, (a - b) = r_n^{-1}q_n$  dir. Böylece  $a^2 - b^2 = r_1^{-1}q_1 r_n^{-1}q_n = 1$  bulunur. Dolayısıyla

$g = a + \delta b \in B(H)_2$  dir.  $(a + b) = r_1^{-1}q_1, (a - b) = r_n^{-1}q_n$  eşitliklerinden  $q_1 = r_1(a + b), q_2 = r_2(a - b)$  elde edilir. Buradan  $k_1 = q_1(1 + \delta) = gh_1 = (a + \delta b)r_1(1 + \delta) = r_1(a + b)(1 + \delta)$  ve  $k_2 = q_2(1 - \delta) = gh_2 = (a + \delta b)r_2(1 - \delta) = r_2(a - b)(1 - \delta)$  dir.  $(a + b) = r_1^{-1}q_1$  ve  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1$  olduğundan  $(a + b) = r_i^{-1}q_i$  bulunur. Böylece  $k_i = q_i(1 + \delta) = gh_i = (a + \delta b)r_i(1 + \delta) = r_i(a + b)(1 + \delta)$ , elde edilir. Benzer şekilde  $(a - b) = r_i^{-1}q_n$  ve  $r_j^{-1}r_n = q_j^{-1}q_n$  olduğundan  $(a - b) = r_j^{-1}q_j$  bulunur. Buradan  $k_j = q_j(1 - \delta) = gh_j = (a + \delta b)r_j(1 - \delta) = r_j(a + b)(1 - \delta)$ , elde edilir. Dolayısıyla  $k = gh$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in B(H)_2$  mevcuttur.

Böylece  $B(H)_2$  grubu için tüm durumlar incelenerek  $B(H)_2$  –denklik problemi tam olarak çözülmüş oldu.

#### 4.11. $W(B(H)_2)$ –Denklik Probleminin $B(H)_2$ –Denklik Problemi Yardımıyla Çözümü

Bu bölümde  $\mathbb{R}^{1+1}$  deki  $m$  noktadan oluşan iki sistemin  $W(B(H)_2)$  –denklik problemini inceleyeceğiz. Önce  $m = 1$  ve  $m = 2$  için iki sistemin  $W(B(H)_2)$  –denklik problemini inceleyelim.

$m = 1$  olsun. Bu durumda  $W(B(H)_2)$  –denklik probleminin çözümü  $W(B(H)_2)$  –grubunun  $\mathbb{R}^{1+1}$  uzaydaki  $(g, h) \rightarrow W(g)F(h)$  etkisine göre  $W(B(H)_2)$  –yörüngelerinin bulunmasına indirgenir.  $\mathbb{R}^* = \{r \in \mathbb{R} | r \neq 0\}$  olsun.  $F$ , önerme 4.2.1 de tanımlanan dönüşüm olsun. Önerme 4.10.1 de  $B(H)_2$  grubunun  $H$  cebirdeki  $(g, h) \rightarrow gh$  etkisine göre yörüngelerini  $Y_3(p), p \in \mathbb{R}^*; \{r(1 + \delta) | r \in \mathbb{R}^*\}, \{r(1 - \delta) | r \in \mathbb{R}^*\}, \{0\}$  olduğu gösterilmişti.

Önerme 4.11.1:  $W(B(H)_2)$  grubunun  $\mathbb{R}^{1+1}$  uzaydaki  $(W(g), x) \rightarrow W(g)x$  etkisine göre tüm  $W(B(H)_2)$  –yörüngeleri  $F(Y_3(p)), p \in \mathbb{R}^*; \{r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} | r \in \mathbb{R}^*\}, \{r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} | r \in \mathbb{R}^*\}$  ve  $\{0\}$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.10.1 ve Sonuç 4.5.1 den açıktır.

$W(B(H)_2)$  grubunun  $W(Y_3(p))$  yörüngesinin tipi  $p$  dir diyelim. Eğer  $u \in \mathbb{R}^{1+1}$  eleman öyleki  $u \in W(Y_3(p))$  ise  $u$  nin tipi  $p$  diyelim ve bunu  $T_3(u) = p$  şeklinde yazalım.

$W(B(H)_2)$  grubunun  $u \in \{r\binom{1}{1} \mid r \in \mathbb{R}^*\}$  yörüngesinin tipi  $1 + \delta$  dir diyelim. Eğer  $u \in \mathbb{R}^{1+1}$  için  $\{r\binom{1}{1} \mid r \in \mathbb{R}^*\}$  ise  $u$ 'nun tipi  $1 + \delta$  diyelim ve bunu  $T_3(u) = 1 + \delta$  şeklinde gösterelim.

$W(B(H)_2)$  grubunun  $\{r\binom{1}{-1} \mid r \in \mathbb{R}^*\}$  yörüngesinin tipi  $1 - \delta$  dir diyelim. Eğer  $u \in \mathbb{R}^{1+1}$  için  $u \in \{r\binom{1}{-1} \mid r \in \mathbb{R}^*\}$  ise  $u$  nin tipi  $1 - \delta$  diyelim ve bunu  $T_3(u) = 1 - \delta$  şeklinde gösterelim.

$W(B(H)_2)$  grubunun  $\{0\}$  yörüngesinin tipi  $0$  dir diyelim. Eğer  $u \in \mathbb{R}^{1+1}$  için  $u = 0$  ise  $u$  nun tipi  $0$  diyelim ve bunu  $T_3(0) = 0$  şeklinde gösterelim.

Sonuç 4.11.1:  $\forall h \in \mathbb{H}$  için  $T_3(h) = T_3(F(h))$  dır.

*İspat:* Önerme 4.11.1 ve Sonuç 4.5.1 den açıktır.

$x = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ,  $T_3(x_i) = t_i$  olacak şekilde  $\mathbb{R}^{1+1}$  in bir  $m$ -lisi olsun.  $t_i = p, 1 + \delta, 1 - \delta$  veya  $0$  olup  $p \in \mathbb{R}^*$  dir.  $(t_1, t_2, \dots, t_m)$   $m$ -li dizisine  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$   $m$ -lisinin tipi diyelim ve  $T_3(x) = (t_1, t_2, \dots, t_m)$  şeklinde veya  $T_3\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  şeklinde gösterelim.

Önerme 4.11.2: Eğer  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  elemanlar için  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$  ise  $T_3(x) = T_3(y)$  dir yani  $m$ -linin tipi  $W(B(H)_2)$  -invarianttır.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.5.1 ve Önerme 4.10.2 den açıktır.

Sonuç 4.11.2:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  elemanlar için  $T_3\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \neq T_3\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  ise  $x$  ve  $y$   $m$ -liler  $W(B(H)_2)$  -denk değildir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Sonuç 4.10.2 den açıktır.

Sonuç 4.11.3:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  elemanlar için bir  $n \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_2(x_n) \neq T_2(y_n)$  ise  $x$  ve  $y$   $m$ -liler  $W(B(H)_2)$  -denk değildir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Sonuç 4.10.3 den açıktır.

O halde iki  $m$ -linin  $W(B(H)_2)$  -denklik şartı incelenirken, onların tiplerinin eşit olması gerektiği elde edilir.

Şimdi  $m = 2$  durumu inceleyelim.  $\mathbb{R}^{1+1}$  de keyfi bir  $u = \{u_1, u_2\}$  2 –lisini göz önüne alalım, burada  $u_1, u_2$  lerin her biri sıfırdan farklıdır. Bu ikilinin tipi için şu durumlar vardır:  $T_3(u) = (p, q), p, q \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(u) = (p, 1 + \delta), p \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(u) = (p, 1 - \delta), p \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(u) = (1 + \delta, p), p \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(u) = (1 + \delta, 1 + \delta), p \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(u) = (1 + \delta, 1 - \delta), p \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(u) = (1 - \delta, p), p \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(u) = (1 - \delta, 1 + \delta), p \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(u) = (1 - \delta, 1 - \delta), p \in \mathbb{R}^*$ .

$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $T_3(x_1) \neq T_3(y_1)$  ise, Sonuç 4.8.2 göre  $x$  ve  $y$  2 –lileri  $W(B(H)_2)$  –denk değildir.

Önerme 4.11.3:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $|x_1|_2 \neq 0, |y_1|_2 \neq 0$  olsun.  $x \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} y$  ise  $|x_1|_2 = |y_1|_2$  ve  $\frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_2 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}, \frac{[x_1, x_2]}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{[y_1, y_2]}{\langle y_1, y_1 \rangle}$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.10.3 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Önerme 4.11.4:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $|x_2|_2 \neq 0, |y_2|_2 \neq 0$  olsun.  $x \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} y$  ise  $|x_2|_2 = |y_2|_2$  ve  $\frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\langle x_2, x_2 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle}, \frac{[x_1, x_2]}{\langle x_2, x_2 \rangle} = \frac{[y_1, y_2]}{\langle y_2, y_2 \rangle}$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.10.4 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Teorem 4.11.1:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $|h_1|_2 \neq 0, |k_1|_2 \neq 0$  olsun.  $|x_1|_2 = |y_1|_2$  ve  $\frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_2 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}, \frac{[x_1, x_2]}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{[y_1, y_2]}{\langle y_1, y_1 \rangle}$  ise  $x \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Teorem 4.10.1 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Teorem 4.11.2:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $|h_2|_2 \neq 0, |k_2|_2 \neq 0$  olsun.  $|x_2|_2 = |y_2|_2$  ve  $\frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_2 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}, \frac{[x_1, x_2]}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{[y_1, y_2]}{\langle y_1, y_1 \rangle}$  ise  $x \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Teorem 4.10.2 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Teorem 4.11.1 ve Teorem 4.11.2 de  $T_3(x) = (p, q), p, q \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(x) = (p, 1 + \delta), p \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(x) = (1 + \delta, p), p \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(x) = (p, 1 - \delta), p \in \mathbb{R}^*$ ;  $T_3(x) = (1 - \delta, p), p \in \mathbb{R}^*$  durumları tam olarak incelendi. İncelenmeyen  $T_3(x) = (1 + \delta, 1 + \delta), T_3(x) = (1 + \delta, 1 - \delta), T_3(x) = (1 - \delta, 1 + \delta), T_3(x) = (1 - \delta, 1 - \delta)$  durumları kaldı.şimdi bu durumları inceleyelim:  $T_3(x) = (1 + \delta, 1 + \delta)$  durumda  $x = (x_1, x_2)$  2 –lisinin elemanları  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  şeklindedir. burada  $r_1 \neq 0$  ve  $r_2 \neq 0$  dir.

Önerme 4.11.5:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r_1 \neq 0, r_2 \neq 0$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y_2 = q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$  olsun.  $x \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} y$  ise  $r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Önerme 4.10.6 den açıktır.

Teorem 4.11.3:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r_1 \neq 0, r_2 \neq 0$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y_2 = q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$  olsun.  $r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  ise  $x \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.10.3 den açıktır.

$T_3(x) = (1 - \delta, 1 - \delta)$  durumunda  $x = (x_1, x_2)$  2 -lininin elemanları  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  şeklindedir. Burada  $r_1 \neq 0$  ve  $r_2 \neq 0$  dir.

Teorem 4.11.4:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, r_1 \neq 0, r_2 \neq 0$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, y_2 = q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$  olsun.  $x \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} y \Leftrightarrow r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.10.4 den açıktır.

Şimdi incelenmeyen  $T_3(x) = (1 + \delta, 1 - \delta), T_3(x) = (1 - \delta, 1 + \delta)$  durumlarını inceleyelim:  $T_3(x) = (1 + \delta, 1 - \delta)$  durumda  $x = (x_1, x_2)$  2 -lininin elemanları  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  şeklindedir. Burada  $r_1 \neq 0$  ve  $r_2 \neq 0$  dir.

Önerme 4.11.7:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y_2 = q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $x \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} y$  ise  $r_1 r_2 = q_1 q_2$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Önerme 4.10.7 den açıktır.

Teorem 4.11.5:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y_2 = q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $r_1 r_2 = q_1 q_2$  ise  $x \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.10.5 den açıktır.

$T_3(x) = (1 - \delta, 1 + \delta)$  durumda  $x = (x_1, x_2)$  2 -lininin elemanları  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  şeklindedir. Burada  $r_1 \in \mathbb{R}^*$  ve  $r_2 \in \mathbb{R}^*$  dir.

Teorem 4.11.6:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, y_2 = q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$ , olsun.  $r_1 r_2 = q_1 q_2 \Leftrightarrow x \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.10.6 dan açıktır.

$m$  bir doğal sayı ve  $m > 2$  olsun.

Tanım 4.11.1:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  olmak üzere bir  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  ve bir  $p \in \mathbb{R}^*$  için  $T_3(x_i) = p$  ise bu  $m$ -liye  $B(H)_2$ -bozulmamış  $m$ -li denir. Bu şekilde  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  yoksa, bu  $m$ -liye  $B(H)_2$ -bozulmuş  $m$ -li denir.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  için  $x \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} y$  ve  $x, B(H)_2$ -bozulmamış ise  $y$  de  $B(H)_2$ -bozulmamıştır.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  için  $x \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} y$  ve  $x, B(H)_2$ -bozulmuş ise  $y$  de  $B(H)_2$ -bozulmuştur.

Önerme 4.11.6:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  için  $|x_1|_2 \neq 0, |y_1|_2 \neq 0$  olsun.  $x \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} y$  ise  $|x_1|_2 = |y_1|_2, \frac{\langle x_1, x_j \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_j \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}$  ve  $\frac{[x_1, x_j]}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{[y_1, y_j]}{\langle y_1, y_1 \rangle}, j = 2, 3, \dots, m$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.10.7 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Teorem 4.11.7:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  için  $|x_1|_2 \neq 0, |y_1|_2 \neq 0$  olsun.  $|x_1|_2 = |y_1|_2, \frac{\langle x_1, x_j \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_j \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}$  ve  $\frac{[x_1, x_j]}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{[y_1, y_j]}{\langle y_1, y_1 \rangle}, j = 2, 3, \dots, m$  ise  $x \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Teorem 4.10.7 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Önerme 4.11.7:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  olmak üzere bir  $n \in \{2, 3, \dots, m\}$  için  $|x_n|_2 \neq 0, |y_n|_2 \neq 0$  olsun.  $x \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} y$  ise  $|x_n|_2 = |y_n|_2, \frac{\langle x_n, x_j \rangle}{\langle x_n, x_n \rangle} = \frac{\langle y_n, y_j \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle}$  ve  $\frac{[x_n, x_j]}{\langle x_n, x_n \rangle} = \frac{[y_n, y_j]}{\langle y_n, y_n \rangle}, j = 1, 2, \dots, n-1, n+1, \dots, m$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.10.8 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Teorem 4.11.8:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  olmak üzere bir  $i \in \{2, 3, \dots, m\}$  için  $|x_i|_2 \neq 0, |y_i|_2 \neq 0$  olsun.  $|x_i|_2 = |y_i|_2, \frac{\langle x_i, x_j \rangle}{\langle x_i, x_i \rangle} = \frac{\langle y_i, y_j \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle}$  ve

$$\frac{\langle x_i, x_j \rangle}{\langle x_i, x_i \rangle} = \frac{\langle y_i, y_j \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle}, j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m \text{ ise } x \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} y \text{ dir.}$$

*İspat:* Teorem 4.5.1, Teorem 4.10.8 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$   $B(H)_2$  –bozulmamış  $m$  –liler olsun. Eğer  $T_3(x) \neq T_3(y)$  ise Sonuç 4.11.1 göre bu  $m$  –liler  $W(B(H)_2)$  –denk değildir. Kabul edelim ki  $T_3(x) = T_3(y)$  olsun. Bu takdirde  $x, B(H)_2$  –bozulmamış olduğundan bir  $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$  ve bir  $p \in \mathbb{R}^*$  için  $T_3(x_i) = p$  dir.  $T_3(x) = T_3(y)$  eşitliğinden  $T_3(x_i) = T_3(y_i) = p$  dir. Dolayısıyla Önerme 4.11.6, Önerme 4.11.7, Teorem 4.11.7, Teorem 4.11.8 den  $B(H)_2$  –bozulmamış  $m$  –lilerin  $W(B(H)_2)$  –denklik problemi tam olarak incelenmiş oldu.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m, B(H)_2$  –bozulmuş  $m$  –li olsun. Bu takdirde  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_3(x_j) = 1 + \delta$  veya  $T_3(x_j) = 1 - \delta$  dir.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m, B(H)_2$  –bozulmuş  $m$  –li ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_3(x_j) = 1 + \delta$  olsun. Bu durumda  $x, m$  –linin elemanları  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, x_m = r_m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  şeklindedir. Burada  $r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  dir.

Önerme 4.11.8:  $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m, B(H)_2$  –bozulmuş  $m$  –liler ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_3(x_j) = T_3(y_j) = 1 + \delta$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, x_m = r_m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, y_m = q_m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $x \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} y$  ise  $r_j^{-1} r_1 = q_j^{-1} q_1$   $j = 2, \dots, m$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Önerme 4.10.9 dan açıktır.

Teorem 4.11.9:  $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m, B(H)_2$  –bozulmuş  $m$  –liler ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_3(x_j) = T_3(y_j) = 1 + \delta$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, x_m = r_m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, y_m = q_m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $r_j^{-1} r_1 = q_j^{-1} q_1, j = 2, \dots, m$  ise  $x \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.10.9 dan açıktır.

Önerme 4.11.9:  $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m, B(H)_2$  –bozulmuş  $m$  –liler ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_3(x_j) = T_3(y_j) = 1 - \delta$  ve

$x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dots, x_m = r_m \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dots, y_m = q_m \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun. Bu takdirde  $x \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} y \Rightarrow r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$   $j = 2, \dots, m$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Önerme 4.10.10 dan açıktır.

Teorem 4.11.9:  $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $B(H)_2$  –bozulmuş  $m$  –liler ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_3(x_j) = T_3(y_j) = 1 - \delta$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dots, x_m = r_m \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dots, y_m = q_m \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1, j = 2, \dots, m$  ise  $x \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.10.10 dan açıktır.

Şimdi  $D$  ve  $E$  kümeleri  $\{1, 2, \dots, m\}$  kümesinin  $D \neq \emptyset, E \neq \emptyset, D \cap E = \emptyset$  ve  $D \cup E = \{1, 2, \dots, m\}$  olacak şekilde alt kümeleri olsun.  $D$  nin en küçük elemanı 1 ve  $E$  nin en küçük elemanı  $n$  olarak verilsin.  $E$  nin en küçük elemanı 1 ve  $D$  nin en küçük elemanı  $n$  olduğu durum benzer şekilde incelenebilir.

Önerme 4.11.10:  $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $B(H)_2$  –bozulmuş  $m$  –liler olsun.  $\forall i \in D$  için  $T_3(x_i) = 1 + \delta, x_i = r_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r_i \in \mathbb{R}^*$  ve  $\forall j \in E$  için  $T_3(y_j) = 1 - \delta, y_j = q_j \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, q_j \in \mathbb{R}^*$  olmak üzere  $x \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} y$  ise  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1, r_j^{-1}r_p = q_j^{-1}q_p$  ve  $r_1r_n = q_1q_n$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Önerme 4.10.11 den açıktır.

Teorem 4.11.10:  $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $B(H)_2$  –bozulmuş  $m$  –liler olsun.  $\forall i \in D$  için  $T_3(x_i) = 1 + \delta, x_i = r_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r_i \in \mathbb{R}^*$  ve  $\forall j \in E$  için  $T_3(y_j) = 1 - \delta, y_j = q_j \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, q_j \in \mathbb{R}^*$  olmak üzere  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1, r_j^{-1}r_p = q_j^{-1}q_p$  ve  $r_1r_n = q_1q_n$  ise  $x \stackrel{W(B(H)_2)}{\sim} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.10.11 den açıktır.

Böylece  $W(B(H)_2)$  grubu için tüm durumlar incelenerek  $W(B(H)_2)$  –denklik problemi tam olarak çözülmüş oldu.

#### 4.12. İki Noktanın ve "m" Noktanın $L(H)$ Denklik Problemi

Yüksek lisans tezinde (Göksal, 2011) bir noktanın bir noktaya  $L(H)$  –denkliği incelenmişti. Bu kısımda ise  $m$  noktadan oluşan iki sistemin  $L(H)$  –denklik problemi incelenecektir.

$L(H) = \{A = a + \delta b \in \mathbb{H}, |A|_1 = a^2 - b^2 = 1, a \geq 1\}$  kümesi  $\mathbb{H}$  cebirdeki çarpım işlemine göre bir gruptur (Göksal, 2011).

$m = 1$  olsun. Bu durumda  $L(H)$  –denklik probleminin çözümü  $L(H)$  grubunun  $\mathbb{H}$  cebirdeki  $(g, h) \rightarrow gh$  etkisine göre  $L(H)$  –yörüngeleri bulunmasına indirgenir.  $p \in \mathbb{R}^*$  ve  $h \in \mathbb{H}$  alalım. Bu  $h$  elemanın  $L(H)$  –yörüngesi  $hL(H) = \{hu, u \in L(H)\}$  şeklinde gösterelim.  $p > 0$  için  $L(H) = \{A = a + \delta b \in \mathbb{H}, |A|_1 = a^2 - b^2 = p, a > 0\}$  olmak üzere  $L(H)$  kümesi  $h = 1$  elemanın  $L(H)$  –yörüngesidir.

Önerme 4.12.1: 1)  $\{A = a + \delta b \in \mathbb{H}, |A|_1 = a^2 - b^2 = p, a > 0\}$  kümesi  $\forall p \in \mathbb{R}^*, p > 0$  için  $L(H)$  –yörüngedir ve  $h = \sqrt{p}$  elemanın  $L(H)$  –yörüngesidir yani  $\{A = a + \delta b \in \mathbb{H}, |A|_1 = a^2 - b^2 = p, a > 0\} = \sqrt{p}L(H)$  dir.

2)  $\{A = a + \delta b \in \mathbb{H}, |A|_1 = a^2 - b^2 = p, a < 0\}$  kümesi  $\forall p \in \mathbb{R}^*, p > 0$  için  $L(H)$  –yörüngedir ve  $h = -\sqrt{p}$  elemanın  $L(H)$  –yörüngesidir yani  $\{A = a + \delta b \in \mathbb{H}, |A|_1 = a^2 - b^2 = p, a < 0\} = (-\sqrt{p})L(H)$  dir.

3)  $\{A = a + \delta b \in \mathbb{H}, |A|_1 = a^2 - b^2 = p, b > 0\}$  kümesi  $\forall p \in \mathbb{R}^*, p < 0$  için  $L(H)$  –yörüngedir ve  $\delta\sqrt{-p}$  elemanın  $L(H)$  –yörüngesidir yani  $\{A = a + \delta b \in \mathbb{H}, |A|_1 = a^2 - b^2 = p, b > 0\} = (\delta\sqrt{-p})L(H)$  dir.

4)  $\{A = a + \delta b \in \mathbb{H}, |A|_1 = a^2 - b^2 = p, b < 0\}$  küme  $\forall p \in \mathbb{R}^*, p < 0$  için  $L(H)$  –yörüngedir ve  $-\delta\sqrt{-p}$  elemanın  $L(H)$  –yörüngesidir yani  $\{A = a + \delta b \in \mathbb{H}, |A|_1 = a^2 - b^2 = p, b < 0\} = (-\delta\sqrt{-p})L(H)$  dir.

5)  $\{A = a + \delta b \in \mathbb{H}, A = r(1 + \delta), r \in \mathbb{R}^*\}$  kümesi  $L(H)$  –yörüngedir ve  $1 + \delta$  elemanın  $L(H)$  –yörüngesidir yani  $\{A = a + \delta b \in \mathbb{H}, A = r(1 + \delta), r \in \mathbb{R}^*\} = (1 + \delta)L(H)$  dir.

6)  $\{A = a + \delta b \in \mathbb{H}, A = r(1 - \delta), r \in \mathbb{R}^*\}$  kümesi  $L(H)$  –yörüngedir ve  $1 - \delta$  elemanının  $L(H)$  –yörüngesidir yani  $\{A = a + \delta b \in \mathbb{H}, A = r(1 - \delta), r \in \mathbb{R}^*\} = (1 - \delta) L(H)$  dir.

7)  $\{0\}$  kümesi  $L(H)$  –yörüngedir ve 0 elemanının  $L(H)$  –yörüngesidir yani  $\{0\} = 0 \cdot L(H)$  dir.

$L(H)$  grubunun  $\mathbb{H}$  kümesinde yukarıda verilen  $\sqrt{p}L(H), p \in \mathbb{R}^*, p > 0$ ;  $(-\sqrt{p})L(H), p \in \mathbb{R}^*, p > 0$ ;  $(\delta\sqrt{-p})L(H), p \in \mathbb{R}^*, p < 0$ ;  $p \in \mathbb{R}^*, p < 0$ ;  $(1 + \delta) L(H)$ ;  $(1 - \delta) L(H)$ ;  $\{0\} L(H)$  –yörüngelerinden farklı başka  $L(H)$  –yörüngesi yoktur(Göksal, 2011).

$h \in \mathbb{H}$  olsun. Eğer  $p \in \mathbb{R}^*, p > 0$  ve  $h, \sqrt{p}L(H)$  yörüngenin elemanı ise  $h$  nin tipi  $\sqrt{p}$  diyelim ve bunu  $T_4(h) = \sqrt{p}$  şeklinde yazalım.

Eğer  $p \in \mathbb{R}^*, p > 0$  ve  $h, (-\sqrt{p})L(H)$  yörüngenin elemanı ise  $h$  nin tipi  $-\sqrt{p}$  diyelim ve bunu  $T_4(h) = -\sqrt{p}$  şeklinde gösterelim.

Eğer  $p \in \mathbb{R}^*, p < 0$  ve  $h, (\delta\sqrt{-p})L(H)$  yörüngenin elemanı ise  $h$  nin tipi  $\delta\sqrt{-p}$  diyelim ve bunu  $T_4(h) = \delta\sqrt{-p}$  şeklinde gösterelim.

Eğer  $p \in \mathbb{R}^*, p < 0$  ve  $h, (-\delta\sqrt{-p})L(H)$  yörüngenin elemanı ise  $h$  nin tipi  $-\delta\sqrt{-p}$  diyelim ve bunu  $T_4(h) = -\delta\sqrt{-p}$  şeklinde gösterelim.

Eğer  $h$  eleman  $(1 + \delta) L(H)$  yörüngenin elemanı ise  $h$  nin tipi  $1 + \delta$  diyelim ve bunu  $T_4(h) = 1 + \delta$  şeklinde gösterelim.

Eğer  $h, (1 - \delta) L(H)$  yörüngenin elemanı ise  $h$  nin tipi  $1 - \delta$  diyelim ve bunu  $T_4(h) = 1 - \delta$  şeklinde gösterelim.

Eğer  $h = 0$  ise  $h$  nin tipi 0 diyelim ve bunu  $T_4(h) = 0$  şeklinde gösterelim.

Önerme 4.12.2:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  elemanları için  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\} \stackrel{L(H)}{\sim} \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$  ise  $T_4(h_j) = T_4(k_j), j = 1, 2, \dots, m$ , dir. Yani  $m$  –linin  $T_4(h_j)$  tipleri  $L(H)$  –invarianttır.

*İspat:* Önerme 4.5.1 ve Önerme 4.12.1 den açıktır.

Sonuç 4.12.1:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  elemanları için  $T_4\{h_1, h_2, \dots, h_m\} \neq T_4\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$  (yani  $\exists n \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_4(h_n) \neq T_4(k_n)$ ) ise  $h$  ve  $k$   $m$ -liler  $L(H)$ -denk değildir.

*İspat:* Önerme 4.5.1 ve Önerme 4.12.1 den açıktır.

$h = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}, T_4(h_i) = t_i$  olacak şekilde  $\mathbb{H}$  nin bir  $m$ -lisi olmak üzere,  $(t_1, \dots, t_m)$   $m$ -li dizisine  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$   $m$ -lisinin tipi diyelim ve  $T_4(h) = (t_1, \dots, t_m)$  şeklinde veya  $T_4\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$  şeklinde gösterelim.

Sonuç 4.12.1 den, iki  $m$ -linin  $L(H)$ -denklik şartı incelenirken, onların tiplerinin eşit olma şartıyla incelenebilir. İki  $m$ -linin  $L(H)$ -denklik şartını incelenirken, onların tipleri  $\{0\}$  yörüngeden farklı alacağız.

$m = 2$  durumunu inceleyelim:  $\mathbb{H}$  de keyfi bir  $h = \{h_1, h_2\}$  2-lisini göz önüne alalım, burada  $h_1, h_2$  lerin her biri sıfırdan farklıdır. Bu ikilinin tipi için şu durumlar vardır,  $r \in \mathbb{R}^*, q \in \mathbb{R}^*$  keyfi olsun.  $T_4(h) = (r, q), T_4(h) = (r, \delta q), T_4(h) = (r, 1 + \delta), T_4(h) = (r, 1 - \delta), T_4(h) = (\delta r, q), T_4(h) = (\delta r, \delta q), T_4(h) = (\delta r, 1 + \delta), T_4(h) = (\delta r, 1 - \delta), T_4(h) = (1 + \delta, q), T_4(h) = (1 + \delta, \delta q), T_4(h) = (1 + \delta, 1 + \delta), T_4(h) = (1 + \delta, 1 - \delta), T_4(h) = (1 - \delta, q), T_4(h) = (1 - \delta, \delta q), T_4(h) = (1 - \delta, 1 + \delta), T_4(h) = (1 - \delta, 1 - \delta)$ .

Eğer  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $T_4(h_1) \neq T_4(k_1)$  ise, Sonuç 4.12.1'e göre  $h$  ve  $k$  2-liler  $L(H)$ -denk değildir.

Önerme 4.12.3:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2, h_i = x_i + \delta y_i, k_i = z_i + \delta y_i, i = 1, 2$ , ve  $|h_1|_1 \neq 0, |k_1|_1 \neq 0$  olsun.  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  ise  $T_4(h_1) = T_4(k_1)$  ve  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$  dir.

*İspat:*  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  olsun.  $k_j = gh_j, j = 1, 2$  olacak şekilde  $g \in L(H)$  mevcuttur. Önerme 4.12.2 ye göre  $T_4(h_1) = T_4(k_1)$  dir. Şimdi de  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$ , olduğunu gösterelim.  $k_j = gh_j, j = 1, 2$  olduğundan  $k_1^{-1}k_2 = (g h_1)^{-1} (g h_2) = h_1^{-1}g^{-1}gh_2 = h_1^{-1}h_2$  bulunur. Dolayısıyla  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$  dir.

Önerme 4.12.4:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$ , ve  $|h_2|_1 \neq 0, |k_2|_1 \neq 0$  olsun.

$h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  ise  $T_4(h_2) = T_4(k_2)$  ve  $h_2^{-1}h_1 = k_2^{-1}k_1$  dir.

*İspat:* Önerme 4.12.3 ün ispatına benzerdir.

Teorem 4.12.1:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$ , ve  $|h_1|_1 \neq 0, |k_1|_1 \neq 0$  olsun.  $T_4(h_1) = T_4(k_1)$  ve  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$  ise  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  dir.

*İspat:*  $T_4(h_1) = T_4(k_1)$  ve  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$  olsun.  $T_4(h_1) = T_4(k_1)$  olduğundan  $h_1$  ve  $k_1$  elemanlar aynı  $L(H)$  –yörüngenin elemanlarıdır. Dolayısıyla  $k_1 = gh_1$  olacak şekilde  $g \in L(H)$  mevcuttur.  $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2$  den  $k_1h_1^{-1}h_2 = k_2$  bulunur. Böylece  $g = k_1h_1^{-1}$  kullanılarak  $k_2 = gh_2$  elde edilir. Dolayısıyla  $k_1 = gh_1$  ve  $k_2 = gh_2$  olup  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  dir.

Teorem 4.12.2:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$ , ve  $|h_2|_1 \neq 0, |k_2|_1 \neq 0$  olsun. Bu takdirde  $T_4(h_2) = T_4(k_2)$  ve  $h_2^{-1}h_1 = k_2^{-1}k_1 \Rightarrow h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  dir.

*İspat:* Teorem 4.12.1 in ispatına benzerdir.

Teorem 4.12.1 ve Teorem 4.12.2 den şu durumlar tam olarak incelendi:  $T_4(h) = (r, q), T_4(h) = (r, \delta q), T_4(h) = (r, 1 + \delta), T_4(h) = (r, 1 - \delta), T_4(h) = (\delta r, q), T_4(h) = (\delta r, \delta q), T_4(h) = (\delta r, 1 + \delta), T_4(h) = (\delta r, 1 - \delta), T_4(h) = (1 + \delta, q), T_4(h) = (1 + \delta, \delta q), T_4(h) = (1 - \delta, q), T_4(h) = (1 - \delta, \delta q)$ .

Şimdi incelenmeyen  $T_4(h) = (1 + \delta, 1 + \delta), T_4(h) = (1 + \delta, 1 - \delta), T_4(h) = (1 - \delta, 1 + \delta), T_4(h) = (1 - \delta, 1 - \delta)$  durumları inceleyelim:  $T_4(h) = (1 + \delta, 1 + \delta)$  durumunda  $h = (h_1, h_2)$  2 –linin elemanları  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 + \delta)$  şeklindedir. Burada  $r_1 \neq 0$  ve  $r_2 \neq 0$  dir.

Önerme 4.12.5:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 + \delta), r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$ , ve  $k_1 = q_1(1 + \delta), k_2 = q_2(1 + \delta), q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$ , olsun.  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  ise  $r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  dir. Burada  $Sgn(r), r \in \mathbb{R}^*$  in işaretidir.

*İspat:*  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  olsun. Bu takdirde  $k = gh$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in L(H)$  vardır. Böylece  $k_1 = gh_1$  ve  $k_2 = gh_2$  dir.  $g(1 + \delta) = (a + \delta b)(1 + \delta) = (a + b)(1 + \delta)$  olduğundan  $k_1 = q_1(1 + \delta) = (a + b)r_1(1 + \delta) = gh_1$  ve  $k_2 = q_2(1 + \delta) = (a + b)r_2(1 + \delta) = (a + b)h_2 = gh_2$  bulunur. Buradan  $q_1 = (a + b)r_1$  ve  $q_2 = (a + b)r_2$  elde edilir. O halde  $r_1^{-1}q_1 = a + b = r_2^{-1}q_2$  dir. Buradan  $r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  bulunur.

$g = a + \delta b \in L(H)$  olduğundan  $a^2 - b^2 = 1$  ve  $a > 0$  dir.  $r_1^{-1}q_1 = a + b = r_2^{-1}q_2$  den  $1 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = r_1^{-1}q_1(a - b)$  dir. Böylece  $a - b =$

$r_1 q_1^{-1}$  dir.  $a + b = r_1^{-1} q_1$  ve  $a - b = r_1 q_1^{-1}$  eşitliklerinden  $a = \frac{1}{2}(r_1^{-1} q_1 + r_1 q_1^{-1}) = (r_1 q_1)^{-1}(r_1^2 + q_1^2)$  bulunur. Böylece  $r_1 \neq 0, q_1 \neq 0, a > 0$  ve  $r_1^2 + q_1^2 > 0$  olduğundan  $r_1 q_1 > 0$  dir. Buradan  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  dir.

Önerme 4.12.5 den  $Sgn(r)$  fonksiyonu  $h = r(1 + \delta)$  elemanının  $L(H)$  –invariantıdır.

Teorem 4.12.3:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 + \delta), r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$ , ve  $k_1 = q_1(1 + \delta), k_2 = q_2(1 + \delta), q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $r_2^{-1} r_1 = q_2^{-1} q_1$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  ise  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  dir.

*İspat:*  $r_2^{-1} r_1 = q_2^{-1} q_1$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  olsun.  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  den  $r_1 q_1 > 0$  dir.  $r_2^{-1} r_1 = q_2^{-1} q_1, r_1 \neq 0, r_2 \neq 0$  ve  $q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$  olduğundan  $r_1^{-1} q_1 = r_2^{-1} q_2 > 0$  bulunur.  $c = r_2^{-1} q_2$  olsun.  $r_2^{-1} q_2 \neq 0$  olduğundan  $c \neq 0, q_1 = cr_1$  ve  $q_2 = cr_2$  olur.  $a + b = c$  ve  $a - b = c^{-1}$  olacak şekilde  $g = a + \delta b$  alalım. Buradan  $a = \frac{1}{2}(c + c^{-1})$  ve  $b = \frac{1}{2}(c - c^{-1})$  dir. Böylece  $a^2 - b^2 = \frac{1}{4}(c + c^{-1})^2 - \frac{1}{4}(c - c^{-1})^2 = \frac{1}{4}(c^2 + 2 + c^{-2}) - \frac{1}{4}(c^2 - 2 + c^{-2}) = 1$  yazılabilir. Dolayısıyla  $g \in B(H)_1$  dir.  $a = \frac{1}{2}(c + c^{-1}) = \frac{1}{2}(r_2^{-1} q_2 + (r_2^{-1} q_2)^{-1}) = \frac{1}{2}(r_2^{-1} q_2 + r_2 q_2^{-1}) = \frac{1}{2}(r_2 q_2)^{-1}(r_2^2 + q_2^2)$  ve  $r_1^{-1} q_1 = r_2^{-1} q_2 > 0$  kullanarak  $a > 0$  bulunur. Dolayısıyla  $g \in L(H)$  dir.  $g(1 + \delta) = (a + \delta b)(1 + \delta) = (a + b)(1 + \delta)$  olduğundan  $k_1 = q_1(1 + \delta) = cr_1(1 + \delta) = ch_1 = (a + b)r_1(1 + \delta) = gh_1$  ve  $k_2 = q_2(1 + \delta) = cr_2(1 + \delta) = ch_2 = (a + b)r_2(1 + \delta) = gh_2$  dir. Buradan  $h = gk$  olup  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  dir.

Önerme 4.12.5 ve Teorem 4.12. 3 e göre  $T_4(h) = (1 + \delta, 1 + \delta)$  durumunda  $q_2^{-1} q_1$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  fonksiyonlarını  $L(H)$  –invariantların tam sistemi olduğu görülür.

$T_4(h) = (1 - \delta, 1 - \delta)$  durumunda  $h = (h_1, h_2)$  2 –lisinin elemanları  $h_1 = r_1(1 - \delta), h_2 = r_2(1 - \delta)$  şeklindedir. Burada  $r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  dir.

Önerme 4.12.6:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $h_1 = r_1(1 - \delta), h_2 = r_2(1 - \delta), r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$ , ve  $k_1 = q_1(1 - \delta), k_2 = q_2(1 - \delta), q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  ise  $r_2^{-1} r_1 = q_2^{-1} q_1$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  dir.

*İspat:*  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  olsun. Bu takdirde  $k = gh$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in L(H)$  vardır. Buradan  $k_1 = gh_1$  ve  $k_2 = gh_2$  bulunur.  $g(1 - \delta) = (a + \delta b)(1 - \delta) = (a - b)(1 - \delta)$  olduğundan  $k_1 = q_1(1 - \delta) = (a - b)r_1(1 - \delta) = gh_1$  ve  $k_2 = q_2(1 - \delta) = (a - b)r_2(1 - \delta) = (a - b)h_2 = gh_2$  dir. Böylece  $q_1 = (a - b)r_1$  ve  $q_2 = (a - b)r_2$  elde edilir. O halde  $r_1^{-1}q_1 = a - b = r_2^{-1}q_2$  dir. Buradan  $r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  yazılabilir.

Şimdi  $g = a + \delta b \in L(H)$  olduğundan  $a^2 - b^2 = 1$  ve  $a > 0$  dir.  $r_1^{-1}q_1 = a - b = r_2^{-1}q_2$  olduğundan  $1 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = (a + b)r_1^{-1}q_1$  dir. Buradan  $a + b = r_1q_1^{-1}$  dir.  $a - b = r_1^{-1}q_1$  ve  $a + b = r_1q_1^{-1}$  olduğundan  $a = \frac{1}{2}(r_1^{-1}q_1 + r_1q_1^{-1}) = (r_1q_1)^{-1}(r_1^2 + q_1^2)$  elde edilir.  $r_1 \neq 0$ ,  $q_1 \neq 0$ ,  $a > 0$  ve  $r_1^2 + q_1^2 > 0$  olduğundan  $r_1q_1 > 0$  dir. Buradan  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  bulunur.

Önerme 4.12.6 dan  $Sgn(r)$  fonksiyonu  $h = r(1 - \delta)$  elemanının  $L(H)$  -invariantıdır.

Teorem 4.12.4:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $h_1 = r_1(1 - \delta), h_2 = r_2(1 - \delta), r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$ , ve  $k_1 = q_1(1 - \delta), k_2 = q_2(1 - \delta), q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  ise  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  dir.

*İspat:*  $r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  olsun.  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  den  $r_1q_1 > 0$  dir.  $r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$ ,  $r_1 \neq 0$ ,  $r_2 \neq 0$  ve  $q_1 \neq 0$ ,  $q_2 \neq 0$  olduğundan  $r_1^{-1}q_1 = r_2^{-1}q_2 > 0$  bulunur.  $r_2^{-1}q_2 = c$  olsun. Buradan  $r_1^{-1}q_1 = r_2^{-1}q_2 = c$  dir.  $r_2^{-1}q_2 \neq 0$  olduğundan  $c \neq 0$ ,  $q_1 = cr_1$  ve  $q_2 = cr_2$  olur.  $a - b = c$  ve  $a + b = c^{-1}$  olacak şekilde  $g = a + \delta b$  alalım.  $a = \frac{1}{2}(c + c^{-1})$  ve  $b = \frac{1}{2}(c - c^{-1})$  eşitlikleri elde edilir.  $a^2 - b^2 = \frac{1}{4}(c + c^{-1})^2 - \frac{1}{4}(c - c^{-1})^2 = \frac{1}{4}(c^2 + 2 + c^{-2}) - \frac{1}{4}(c^2 - 2 + c^{-2}) = 1$  dir. Dolayısıyla  $g \in B(H)_2$  dir.  $a = \frac{1}{2}(c + c^{-1}) = \frac{1}{2}(r_2^{-1}q_2 + (r_2^{-1}q_2)^{-1}) = \frac{1}{2}(r_2^{-1}q_2 + r_2q_2^{-1}) = \frac{1}{2}(r_2q_2)^{-1}(r_2^2 + q_2^2)$  ve  $r_1^{-1}q_1 = r_2^{-1}q_2 > 0$  olduğundan  $a > 0$  dir. Dolayısıyla  $g \in L(H)$  dir.  $a - b = c$  ve  $g(1 - \delta) = (a + \delta b)(1 - \delta) = (a - b)(1 - \delta)$  olduğundan  $k_1 = q_1(1 - \delta) = cr_1(1 - \delta) = ch_1 = (a - b)r_1(1 - \delta) = gh_1$  ve  $k_2 = q_2(1 - \delta) = cr_2(1 - \delta) = ch_2 = (a - b)r_2(1 - \delta) = gh_2$  elde edilir. Buradan  $k = gh$  olup  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  dir.

Şimdi incelenmeyen  $T_4(h) = (1 + \delta, 1 - \delta), T_4(h) = (1 - \delta, 1 + \delta)$  durumlarını inceleyelim:  $T_4(h) = (1 + \delta, 1 - \delta)$  durumunda  $h = (h_1, h_2)$  2 –lisinin elemanları  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 - \delta)$  şeklindedir. Burada  $r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  dir.

Önerme 4.12.7:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 - \delta), r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$ , ve  $k_1 = q_1(1 + \delta), k_2 = q_2(1 - \delta), q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  ise  $r_1 r_2 = q_1 q_2$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  dir.

*İspat:*  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  olsun. Bu takdirde  $k = gh$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in L(H)$  mevcuttur. Buradan  $a^2 - b^2 = 1, k_1 = gh_1$  ve  $k_2 = gh_2$  olur. Böylece  $k_1 = q_1(1 + \delta) = (a + b)r_1(1 + \delta)$  ve  $k_2 = q_2(1 - \delta) = (a - b)r_2(1 - \delta)$  bulunur. O halde  $q_1 = (a + b)r_1$  ve  $q_2 = (a - b)r_2$  elde edilir. Buradan  $q_1 r_1^{-1} = (a + b)$  ve  $q_2 r_2^{-1} = (a - b)$  yazılabilir.  $a^2 - b^2 = 1$  olduğundan  $q_1 r_1^{-1} q_2 r_2^{-1} = 1$  dir. Buradan  $r_1 r_2 = q_1 q_2$  bulunur.

$g = a + \delta b \in L(H)$  olduğundan  $a^2 - b^2 = 1$  ve  $a > 0$  dir.  $q_1 r_1^{-1} = (a + b)$  ve  $q_2 r_2^{-1} = (a - b)$  olduğundan  $a = \frac{1}{2}(r_1^{-1} q_1 + q_2 r_2^{-1})$  bulunur.  $r_1 r_2 = q_1 q_2$  ve  $r_2 \neq 0, q_1 \neq 0$  den  $q_2 r_2^{-1} = q_1^{-1} r_1 = (q_1 r_1^{-1})^{-1}$  dir.  $a = \frac{1}{2}(r_1^{-1} q_1 + q_2 r_2^{-1}) > 0$  kullanılarak  $a = \frac{1}{2}((q_1 r_1^{-1})^2 + 1) q_1^{-1} r_1 > 0$  elde edilir.  $(q_1 r_1^{-1})^2 + 1 > 0$  olduğundan  $q_1^{-1} r_1 > 0$  olup  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  dir.

Teorem 4.12.5:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $h_1 = r_1(1 + \delta), h_2 = r_2(1 - \delta), r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$ , ve  $k_1 = q_1(1 + \delta), k_2 = q_2(1 - \delta), q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $r_1 r_2 = q_1 q_2$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  ise  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  dir.

*İspat:*  $r_1 r_2 = q_1 q_2$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  olsun. Buradan  $r_1^{-1} q_1 q_2 r_2^{-1} = 1$  dir.  $a = \frac{1}{2}(r_1^{-1} q_1 + q_2 r_2^{-1}), b = \frac{1}{2}(r_1^{-1} q_1 - q_2 r_2^{-1})$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in \mathbb{H}^*$  alalım.  $(a + b) = r_1^{-1} q_1, (a - b) = r_2^{-1} q_2$  olup  $a^2 - b^2 = r_1^{-1} q_1 q_2 r_2^{-1} = 1$  dir. Dolayısıyla  $g = a + \delta b \in B(H)_2$  dir.  $(a + b) = r_1^{-1} q_1, (a - b) = r_2^{-1} q_2$  den  $q_1 = r_1(a + b), q_2 = r_2(a - b)$  bulunur. Böylece  $k_1 = q_1(1 + \delta) = gh_1 = (a + \delta b)r_1(1 + \delta) = r_1(a + b)(1 + \delta)$  ve  $k_2 = q_2(1 - \delta) = gh_2 = (a + \delta b)r_2(1 - \delta) = r_2(a - b)(1 - \delta)$  elde edilir. Dolayısıyla  $k = gh$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in B(H)_2$  mevcuttur.  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  ve  $r_1 \neq 0, q_1 \neq 0$  olduğundan  $q_1^{-1} r_1 > 0$  dir.  $r_1 r_2 = q_1 q_2$  ve  $r_2 \neq 0, q_1 \neq 0$  olduğundan  $q_2 r_2^{-1} = q_1^{-1} r_1 =$

$(q_1 r_1^{-1})^{-1}$  dir.  $a = \frac{1}{2}(r_1^{-1}q_1 + q_2 r_2^{-1})$  olduğundan  $a = \frac{1}{2}((q_1 r_1^{-1})^2 + 1) q_1^{-1} r_1$  bulunur.  $(q_1 r_1^{-1})^2 + 1 > 0$  ve  $q_1^{-1} r_1 > 0$  olduğundan  $a > 0$  dir. Dolayısıyla  $k = gh$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in L(H)$  mevcuttur.

$T_4(h) = (1 - \delta, 1 + \delta)$  durumunda  $h = (h_1, h_2)$  2 –lisinin elemanları  $h_1 = r_1(1 - \delta), h_2 = r_2(1 + \delta)$  şeklindedir. Burada  $r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*$  dir.

Teorem 4.12.6:  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $h_1 = r_1(1 - \delta), h_2 = r_2(1 + \delta), r_1 \in \mathbb{R}^*, r_2 \in \mathbb{R}^*,$  ve  $k_1 = q_1(1 - \delta), k_2 = q_2(1 + \delta), q_1 \in \mathbb{R}^*, q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $r_1 r_2 = q_1 q_2$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1) \Leftrightarrow h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  dir.

*İspat:* Teorem 4.12.5 in ispatına benzer şekilde yapılır.

$m$  bir doğal sayı ve  $m > 2$  olsun. Aşağıdaki  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{H}^m$  olmak üzere  $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $h_i \neq 0$  alalım.

Tanım 4.12.1:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{H}^m$  olmak üzere bir  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $|h_i|_1 \neq 0$  ise  $m$  –liye  $L(H)$  –bozulmamış  $m$  –li denir. Bu şekilde bir  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  yoksa  $m$  –liye  $L(H)$  –bozulmuş  $m$  –li denir.

$h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$   $m$  –liler için  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  ve  $h, L(H)$  –bozulmamış ise  $k$  da  $L(H)$  –bozulmamıştır.

$h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$   $m$  –liler için  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  ve  $h, L(H)$  –bozulmuş ise  $k$  da  $L(H)$  –bozulmuştur.

Önerme 4.12.7:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  için  $|h_1|_1 \neq 0, |k_1|_1 \neq 0$  olsun.  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  ise  $T_4(h_1) = T_4(k_1)$  ve  $h_1^{-1} h_j = k_1^{-1} k_j, j = 2, 3, \dots, m$  dir.

*İspat:*  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  olsun. Bu takdirde  $k_j = gh_j, j = 1, 2, \dots, m$  olacak şekilde  $g \in L(H)$  mevcuttur. Önerme 4.12.2 göre  $T_4(h_1) = T_4(k_1)$  dir. Şimdi de  $h_1^{-1} h_j = k_1^{-1} k_j, j = 2, 3, \dots, m$  olduğunu gösterelim:  $k_j = gh_j, j = 1, 2, \dots, m$  den  $k_1^{-1} k_j = (g h_1)^{-1} (g h_j) = h_1^{-1} g^{-1} g h_j = h_1^{-1} h_j$  bulunur. Dolayısıyla  $h_1^{-1} h_j = k_1^{-1} k_j, j = 2, 3, \dots, m$  dir.

Teorem 4.12.7:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  için  $|h_1|_1 \neq 0, |k_1|_1 \neq 0$  olsun.  $T_4(h_1) = T_4(k_1)$  ve  $h_1^{-1} h_j = k_1^{-1} k_j, j = 2, 3, \dots, m$  ise  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  dir.

*İspat:*  $T_4(h_1) = T_4(k_1)$  ve  $h_1^{-1}h_j = k_1^{-1}k_j$ ,  $j = 2, 3, \dots, m$  olsun.  $T_4(h_1) = T_4(k_1)$  olduğundan  $h_1$  ve  $k_1$  elemanlar aynı  $L(H)$  –yörüngeinin elemanlarıdır. Dolayısıyla  $k_1 = gh_1$  olacak şekilde  $g \in L(H)$  mevcuttur.  $h_1^{-1}h_j = k_1^{-1}k_j$  den  $k_1h_1^{-1}h_j = k_j$  dir.  $g = k_1h_1^{-1}$  kullanılarak  $k_j = gh_j$ ,  $j = 2, 3, \dots, m$  bulunur. Dolayısıyla  $k_j = gh_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  olup  $h \underset{\sim}{L(H)} k$  dir.

**Önerme 4.12.8:**  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  olmak üzere  $i \in \{2, 3, \dots, m\}$  için  $|h_i|_1 \neq 0$ ,  $|k_i|_1 \neq 0$  olsun.  $h \underset{\sim}{L(H)} k$  ise  $T_4(h_i) = T_4(k_i)$  ve  $h_i^{-1}h_j = k_i^{-1}k_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m$  dir.

*İspat:* Önerme 4.12.7 den açıktır.

**Teorem 4.12.8:**  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  olmak üzere  $i \in \{2, 3, \dots, m\}$  için  $|h_i|_1 \neq 0$ ,  $|k_i|_1 \neq 0$  olsun. Bu takdirde  $T_4(h_i) = T_4(k_i)$  ve  $h_i^{-1}h_j = k_i^{-1}k_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m$  ise  $h \underset{\sim}{L(H)} k$  dir.

*İspat:* Teorem 4.12.7 den açıktır.

$h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $L(H)$  –bozulmamış  $m$  –liler olsun. Eğer  $T_4(h) \neq T_4(k)$  ise sonuç 4.12.2 göre bu  $m$  –liler  $L(H)$  –denk değildir. Kabul edelim ki  $T_4(h) = T_4(k)$  olsun.  $h$ ,  $L(H)$  –bozulmamış olduğundan bir  $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$  ve bir  $p \in \mathbb{R}^*$  için  $|h_i|_1 \neq 0$  ve  $T_4(h_i) = T_4(k_i)$  dir. Dolayısıyla Önerme 4.12.7, Önerme 4.12.8, Teorem 4.12.7, Teorem 4.12.8 den  $L(H)$  –bozulmamış  $m$  –lilerin  $L(H)$  –denklik problemi tam olarak incelenmiş oldu.

Şimdi  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $L(H)$  –bozulmuş  $m$  –li olsun. Bu takdirde  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_4(h_j) = 1 + \delta$  veya  $T_4(h_j) = 1 - \delta$  dir.

$h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $L(H)$  –bozulmuş  $m$  –li ve  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $T_3(h_j) = 1 + \delta$  olsun. Bu durumda  $h$  nin elemanları  $h_1 = r_1(1 + \delta), \dots, h_m = r_m(1 + \delta)$  şeklindedir. Burada  $r_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  dir.

**Önerme 4.12.9:**  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  olmak üzere  $h_1 = r_1(1 + \delta), \dots, h_m = r_m(1 + \delta)$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 + \delta), \dots, k_m = q_m(1 + \delta)$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $h \underset{\sim}{L(H)} k$  ise  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$   $j = 2, \dots, m$ ,  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  dir.

*İspat:*  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  olsun. Bu takdirde  $k = gh$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in L(H)$  vardır. Buradan  $k_j = gh_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , bulunur.  $g(1 + \delta) = (a + \delta b)(1 + \delta) = (a + b)(1 + \delta)$  olduğundan  $k_j = q_j(1 + \delta) = (a + b)r_j(1 + \delta) = gh_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  dir. Böylece  $q_j = (a + b)r_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  elde edilir. O halde  $r_1^{-1}q_1 = a + b = r_j^{-1}q_j$ ,  $j = 2, 3, \dots, m$  dir. Buradan  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$ ,  $j = 2, 3, \dots, m$  bulunur.

$g = a + \delta b \in L(H)$  olduğundan  $a^2 - b^2 = 1$  ve  $a > 0$  dir.  $r_1^{-1}q_1 = a + b = r_2^{-1}q_2$  olduğundan  $1 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = r_1^{-1}q_1(a - b)$  bulunur. Böylece  $a - b = r_1 q_1^{-1}$  dir.  $a + b = r_1^{-1}q_1$  ve  $a - b = r_1 q_1^{-1}$  den  $a = \frac{1}{2}(r_1^{-1}q_1 + r_1 q_1^{-1}) = (r_1 q_1)^{-1}(r_1^2 + q_1^2)$  yazılabilir.  $r_1 \neq 0, q_1 \neq 0, a > 0$  ve  $r_1^2 + q_1^2 > 0$  olduğundan  $r_1 q_1 > 0$  olup  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  dir.

**Teorem 4.12.9:**  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  olmak üzere  $h_1 = r_1(1 + \delta), \dots, h_m = r_m(1 + \delta)$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 + \delta), \dots, k_m = q_m(1 + \delta)$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$ ,  $j = 2, \dots, m$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  ise  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  dir.

*İspat:*  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$ ,  $j = 2, \dots, m$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  olsun.  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  olduğundan  $r_1 q_1 > 0$  dir.  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$ ,  $j = 2, \dots, m$  ve  $r_j \neq 0, q_j \neq 0$ ,  $j = 2, \dots, m$  olduğundan  $r_1^{-1}q_1 = r_j^{-1}q_j > 0$ ,  $j = 2, \dots, m$  bulunur.  $r_j^{-1}q_j = c$  olsun.  $r_j^{-1}q_j \neq 0$  olduğundan  $c \neq 0$ ,  $q_j = cr_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  olur.  $a + b = c$  ve  $a - b = c^{-1}$  olacak şekilde  $g = a + \delta b$  alalım. Burada  $a = \frac{1}{2}(c + c^{-1})$  ve  $b = \frac{1}{2}(c - c^{-1})$  olup  $a^2 - b^2 = \frac{1}{4}(c + c^{-1})^2 - \frac{1}{4}(c - c^{-1})^2 = \frac{1}{4}(c^2 + 2 + c^{-2}) - \frac{1}{4}(c^2 - 2 + c^{-2}) = 1$  dir. Dolayısıyla  $g \in B(H)_2$  dir.  $a = \frac{1}{2}(c + c^{-1}) = \frac{1}{2}(r_1^{-1}q_1 + (r_1^{-1}q_1)^{-1}) = \frac{1}{2}(r_1^{-1}q_1 + r_1 q_1^{-1}) = \frac{1}{2}(r_1 q_1)^{-1}(r_1^2 + q_1^2)$  ve  $r_1^{-1}q_1 > 0$  olduğundan  $a > 0$  dir. Böylece  $g \in L(H)$  dir.  $g(1 + \delta) = (a + \delta b)(1 + \delta) = (a + b)(1 + \delta)$  olduğundan  $k_j = q_j(1 + \delta) = cr_j(1 + \delta) = ch_j = (a + b)r_j(1 + \delta) = gh_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  bulunur. Buradan  $h = gk$  olup  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  dir.

**Teorem 4.12.10:**  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$  olmak üzere  $h_1 = r_1(1 - \delta), \dots, h_m = r_m(1 - \delta)$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $k_1 = q_1(1 - \delta), \dots, k_m = q_m(1 - \delta)$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$ ,  $j = 2, \dots, m$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1) \Leftrightarrow h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  dir.

*İspat:* Teorem 4.12.9 dan açıktır.

Şimdi  $D$  ve  $E$  kümeleri  $\{1,2,\dots,m\}$  kümesinin  $D \neq \emptyset, E \neq \emptyset, D \cap E = \emptyset$  ve  $D \cup E = \{1,2,\dots,m\}$  olacak şekilde alt kümeleri olsun.  $D$  nin en küçük elemanı 1 ve  $E$  nin en küçük elemanı  $n$  olsun.  $E$  nin en küçük elemanı 1 ve  $D$  nin en küçük elemanı  $n$  olduğu durum benzer şekilde incelenebilir.

Önerme 4.12.10:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $L(H)$  –bozulmuş  $m$  –liler olsun.  $\forall i \in D$  için  $T_4(h_i) = 1 + \delta, h_i = r_i(1 + \delta), r_i \in \mathbb{R}^*$  ve  $\forall j \in E$  için  $T_4(k_j) = 1 - \delta, k_j = q_j(1 - \delta), q_j \in \mathbb{R}^*$  olmak üzere  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  ise  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1, r_j^{-1}r_n = q_j^{-1}q_n, r_1r_n = q_1q_n$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  dir.

*İspat:*  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  olsun. Bu takdirde  $k = gh$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in L(H)$  mevcuttur. Buradan  $a^2 - b^2 = 1, k_s = gh_s, s \in \{1,2,\dots,m\}$  olur. Böylece  $\forall i \in D$  için ve  $\forall j \in E$  için  $k_i = q_i(1 + \delta) = (a + b)r_i(1 + \delta), k_j = q_j(1 - \delta) = (a - b)r_j(1 + \delta)$  bulunur. Buradan  $q_i = (a + b)r_i$  ve  $q_j = (a - b)r_j$  elde edilir. Böylece  $q_i r_i^{-1} = (a + b)$  ve  $q_j r_j^{-1} = (a - b)$  yazılabilir.  $a^2 - b^2 = 1$  olduğundan  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1, r_j^{-1}r_n = q_j^{-1}q_n$  dir. Buradan  $a^2 - b^2 = 1, k_1 = gh_1$  ve  $k_n = gh_n$  olur. Böylece  $k_1 = q_1(1 + \delta) = (a + b)r_1(1 + \delta)$  ve  $k_n = q_n(1 - \delta) = (a - b)r_n(1 + \delta)$  dir. Buradan  $q_1 = (a + b)r_1$  ve  $q_n = (a - b)r_n$  yazılabilir. O halde  $q_1 r_1^{-1} = (a + b)$  ve  $q_n r_n^{-1} = (a - b)$  dir.  $a^2 - b^2 = 1$  den  $q_1 r_1^{-1} q_n r_n^{-1} = 1$  olup  $r_1 r_n = q_1 q_n$  dir.

$g = a + \delta b \in L(H)$  olduğundan  $a^2 - b^2 = 1$  ve  $a > 0$  dir.  $q_n r_n^{-1} = (a + b)$  ve  $q_1 r_1^{-1} = (a - b)$  olduğundan  $a = \frac{1}{2}(q_1 r_1^{-1} + q_n r_n^{-1})$  bulunur.  $r_1 r_n = q_1 q_n$  ve  $r_1 \neq 0, r_n \neq 0, q_1 \neq 0$  den  $q_n r_n^{-1} = q_1^{-1} r_1 = (q_1 r_1^{-1})^{-1}$  dir.  $a = \frac{1}{2}(q_1 r_1^{-1} + q_n r_n^{-1}) > 0$  olduğundan  $a = \frac{1}{2}((q_1 r_1^{-1})^2 + 1) q_1^{-1} r_1 > 0$  bulunur.  $(q_1 r_1^{-1})^2 + 1 > 0$  olduğundan  $q_1^{-1} r_1 > 0$  dir. Buradan  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  elde edilir.

Teorem 4.12.11:  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m), k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{H}^m$ ,  $L(H)$  –bozulmuş  $m$  –liler olsun.  $\forall i \in D$  için  $T_4(h_i) = 1 + \delta, h_i = r_i(1 + \delta), r_i \in \mathbb{R}^*$  ve  $\forall j \in E$  için  $T_4(k_j) = 1 - \delta, k_j = q_j(1 - \delta), q_j \in \mathbb{R}^*$  olmak üzere  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1, r_j^{-1}r_n = q_j^{-1}q_n, r_1 r_n = q_1 q_n$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  ise  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  dir.

*İspat:*  $\forall i \in D$  için ve  $\forall j \in E$  için  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1$ ,  $r_j^{-1}r_n = q_j^{-1}q_n$ ,  $r_1r_n = q_1q_n$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  olsun.  $r_1r_n = q_1q_n$  olduğundan  $q_1r_1^{-1}q_nr_n^{-1} = 1$  dir.  $a = \frac{1}{2}(q_1r_1^{-1} + q_nr_n^{-1})$ ,  $b = \frac{1}{2}(q_1r_1^{-1} - q_nr_n^{-1})$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in \mathbb{H}^*$  alalım.  $(a + b) = q_1r_1^{-1}$ ,  $(a - b) = r_n^{-1}q_n$  olup  $a^2 - b^2 = q_1r_1^{-1}q_nr_n^{-1} = 1$  dir. Dolayısıyla  $g = a + \delta b \in B(H)_1$  dir.  $(a + b) = q_1r_1^{-1}$ ,  $(a - b) = r_n^{-1}q_n$ ,  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1$ ,  $r_j^{-1}r_n = q_j^{-1}q_n$  olduğundan  $q_i = r_i(a + b)$ ,  $q_j = r_j(a - b)$  bulunur. Böylece  $k_i = q_i(1 + \delta) = gh_i = (a + \delta b)r_i(1 + \delta) = r_i(a + b)(1 + \delta)$  ve  $k_j = q_j(1 - \delta) = gh_j = (a + \delta b)r_j(1 - \delta) = r_j(a - b)(1 - \delta)$  elde edilir. Dolayısıyla  $k = gh$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in B(H)_1$  mevcuttur.

$Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  ve  $r_1 \neq 0, q_1 \neq 0$  olduğundan  $q_1^{-1}r_1 > 0$  dir.  $r_1r_n = q_1q_n$  ve  $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0, q_1 \neq 0$  olduğundan  $q_nr_n^{-1} = q_1^{-1}r_1 = (q_1r_1^{-1})^{-1}$  bulunur.  $a = \frac{1}{2}(q_1r_1^{-1} + q_nr_n^{-1})$  olduğundan  $a = \frac{1}{2}((q_1r_1^{-1})^2 + 1)q_1^{-1}r_1$  yazılabilir.  $(q_1r_1^{-1})^2 + 1 > 0$  olduğundan  $q_1^{-1}r_1 > 0$  ve  $a > 0$  dir. Dolayısıyla  $k = gh$  olacak şekilde  $g = a + \delta b \in L(H)$  mevcuttur.

Böylece  $L(H)$  grubu için tüm durumlar incelenerek  $L(H)$  –denklik problemi tam olarak çözülmüş oldu.

#### 4.13. $L$ –Denklik Probleminin $L(H)$ –Denklik Problemi Yardımıyla çözümü

Bu bölümde  $\mathbb{R}^{1+1}$  deki  $m$  noktadan oluşan iki sistemin  $L$  Lorentz grubu için  $L$  –denklik problemini inceleyeceğiz. Önce  $m = 1$  ve  $m = 2$  durumlarında iki sistemin  $L$  –denklik problemini inceleyelim.

$m = 1$  olsun. Bu durumda  $L$  –denklik probleminin çözümü  $L$  grubunun  $\mathbb{R}^{1+1}$  uzayındaki  $(g, h) \rightarrow W(g)F(h)$  etkisine göre  $L$  –yörüngeleri bulunması durumuna indirgenir.  $F$ , önerme 4.2.1 tanımlanan dönüşüm olarak verilsin. Önerme 4.10.1 de  $L(H)$  grubunun  $\mathbb{H}$  cebirdeki  $(g, h) \rightarrow gh$  etkisine göre tüm yörüngeleri Önerme 4.12.1 de verilmişti.  $g = a + \delta b \in \mathbb{H}$  ve  $h = x + \delta y \in \mathbb{H}$  alalım. Bu takdirde  $W(g) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$  ve  $F(h) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  dir.  $L = W(L(H))$  grubun  $\mathbb{R}^{1+1}$  uzayındaki  $(W(g), F(h)) \rightarrow W(g)F(h) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ bx+ay \end{pmatrix}$  etkisine göre  $L$  –yörüngelerini bulalım: Aşağıdaki  $F$  ve  $W$ , önerme 4.2.1 ve teorem 4.2.2 de tanımlanan dönüşümler olsun.

Önerme 4.13.1: 1)  $F(L(H)) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 - b^2 = p, a > 0 \right\}$  kümesi  $\forall p \in \mathbb{R}^*, p > 0$  için  $L$ -yörüngedir ve  $\begin{pmatrix} \sqrt{p} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+1}$  elemanının  $L$ -yörüngesidir.

2)  $F(L(H)) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+1}, a, b \in \mathbb{R}, a^2 - b^2 = p, a < 0 \right\}$  kümesi  $\forall p \in \mathbb{R}^*, p > 0$  için  $L$ -yörüngedir ve  $\begin{pmatrix} -\sqrt{p} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+1}$  elemanının  $L$ -yörüngesidir.

3)  $F(L(H)) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 - b^2 = p, b > 0 \right\}$  kümesi  $\forall p \in \mathbb{R}^*, p < 0$  için  $L$ -yörüngedir ve  $\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{-p} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+1}$  elemanının  $L$ -yörüngesidir.

4)  $F(L(H)) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 - b^2 = p, b < 0 \right\}$  kümesi  $\forall p \in \mathbb{R}^*, p < 0$  için  $L$ -yörüngedir ve  $\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{-p} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+1}$  elemanının  $L$ -yörüngesidir.

5)  $F(L(H)) = \left\{ r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}^* \right\}$  küme  $L$ -yörüngedir ve  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+1}$  elemanının  $L$ -yörüngesidir.

6)  $F(L(H)) = \left\{ r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}^* \right\}$  kümesi  $L$ -yörüngedir ve  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+1}$  elemanının  $L$ -yörüngesidir.

7)  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  kümesi  $L$ -yörüngedir ve  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  elemanının  $L$ -yörüngesidir.

$L$  grubunun  $\mathbb{R}^{1+1}$  kümesinde yukarıda verilen yörüngelerinden başka  $L$ -yörüngesi yoktur.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.12.1 ve Sonuç 4.5.1'lerin sonucudur.

$x \in \mathbb{R}^{1+1}$  alalım. Bu takdirde  $F^{-1}(x) \in \mathbb{H}$  dir.  $F^{-1}(x)$  elemanın  $\mathbb{H}$ 'deki  $T_4(F^{-1}(x))$  tipine  $x$  elemanın  $\mathbb{R}^{1+1}$ 'deki tipi denir ve  $T_4(x)$  şeklinde gösterilir.

Sonuç 4.13.1:  $\forall x \in \mathbb{R}^{1+1}$  için  $T_4(x) = T_4(F(x))$  dir.

*İspat:* Tanımdan açıktır.

$x = \{x_1, \dots, x_m\}$ ,  $T_4(x_i) = t_i$  olacak şekilde  $\mathbb{R}^{1+1}$  in bir  $m$ -lisi olsun.  $(t_1, \dots, t_m)$   $m$ -li dizisine  $\{x_1, \dots, x_m\}$   $m$ -lisinin tipi diyelim ve  $T_4(x) = (t_1, \dots, t_m)$  şeklinde veya  $T_4\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  şeklinde gösterelim.

Önerme 4.13.2:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  elemanları için  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \stackrel{L}{\sim} \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$  ise  $T_4(x) = T_4(y)$  dir yani  $m$ -linin tipi  $L$ -invarianttır.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.5.1 ve Önerme 4.12. 2 den açıktır.

Sonuç 4.13.2:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  elemanları için  $T_3\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \neq T_3\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  ise  $x$  ve  $y$   $m$  –liler  $L$  –denk değildir

*İspat:* Teorem 4.5.1, Sonuç 4.12.1 den açıktır.

O halde iki  $m$  –linin  $L$  –denklik şartı, onların tiplerinin eşit olması şartıyla incelenebilir.

$m = 2$  durumu inceleyelim:

$\mathbb{R}^{1+1}$  de keyfi bir  $x = \{x_1, x_2\}$  2 –lisini göz önüne alalım, burada  $x_1, x_2$  lerin her biri sıfırdan farklıdır. Bu ikilinin tipi için  $r \in \mathbb{R}^*, q \in \mathbb{R}^*$  keyfi olsun.  $T_4(x) = (r, q), T_4(x) = (r, \delta q), T_4(x) = (r, 1 + \delta), T_4(x) = (r, 1 - \delta), T_4(x) = (\delta r, q), T_4(x) = (\delta r, \delta q), T_4(x) = (\delta r, 1 + \delta), T_4(x) = (\delta r, 1 - \delta), T_4(x) = (1 + \delta, q), T_4(x) = (1 + \delta, \delta q), T_4(x) = (1 + \delta, 1 + \delta), T_4(x) = (1 + \delta, 1 - \delta), T_4(x) = (1 - \delta, q), T_4(x) = (1 - \delta, \delta q), T_4(x) = (1 - \delta, 1 + \delta), T_4(x) = (1 - \delta, 1 - \delta)$  durumları söz konusudur.

Eğer  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $T_4(x_1) \neq T_4(y_1)$  ise, Sonuç 4.13.2'e göre  $x$  ve  $y$  2 –liler  $L$  –denk değildir.

Önerme 4.13.3:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $|x_1|_1 \neq 0, |y_1|_1 \neq 0$  olsun.  $x \sim^L y$  ise  $T_4(x_1) = T_4(y_1), \frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_2 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}$  ve  $\frac{[x_1, x_2]}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{[y_1, y_2]}{\langle y_1, y_1 \rangle}$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.12.3 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Önerme 4.13.4:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $|x_2|_1 \neq 0, |y_2|_1 \neq 0$  olsun.  $x \sim^L y$  ise  $T_4(x_2) = T_4(y_2), \frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\langle x_2, x_2 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle}$  ve  $\frac{[x_1, x_2]}{\langle x_2, x_2 \rangle} = \frac{[y_1, y_2]}{\langle y_2, y_2 \rangle}$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.12.4 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Teorem 4.13.1:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $|x_1|_1 \neq 0, |y_1|_1 \neq 0$  olsun.  $T_4(x_1) = T_4(y_1), \frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_2 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}$  ve  $\frac{[x_1, x_2]}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{[y_1, y_2]}{\langle y_1, y_1 \rangle}$  ise  $x \sim^L y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Teorem 4.12.1 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Teorem 4.13.2:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $|x_2|_1 \neq 0, |y_2|_1 \neq 0$  olsun.  $T_4(x_2) = T_4(y_2), \frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\langle x_2, x_2 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle}$  ve  $\frac{[x_1, x_2]}{\langle x_2, x_2 \rangle} = \frac{[y_1, y_2]}{\langle y_2, y_2 \rangle}$  ise  $x \sim^L y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Teorem 4.12.2 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Böylece Önerme 4.13.3, Önerme 4.13.4, Teorem 4.13.1 ve Teorem 4.13.2 de  $T_4(x) = (r, q), T_4(x) = (r, \delta q), T_4(x) = (r, 1 + \delta), T_4(x) = (r, 1 - \delta), T_4(x) = (\delta r, q), T_4(x) = (\delta r, \delta q), T_4(x) = (\delta r, 1 + \delta), T_4(x) = (\delta r, 1 - \delta), T_4(x) = (1 + \delta, q), T_4(x) = (1 + \delta, \delta q), T_4(x) = (1 - \delta, q), T_4(x) = (1 - \delta, \delta q)$  durumları tam olarak incelenmiş oldu. şimdi incelenmeyen  $T_4(x) = (1 + \delta, 1 + \delta), T_4(x) = (1 + \delta, 1 - \delta), T_4(x) = (1 - \delta, 1 + \delta), T_4(x) = (1 - \delta, 1 - \delta)$  durumları inceleyelim:  $T_4(x) = (1 + \delta, 1 + \delta)$  durumunda  $x = (x_1, x_2)$  2 -lisinin elemanları  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  şeklindedir. Burada  $r_1 \neq 0$  ve  $r_2 \neq 0$  dir.

Önerme 4.13.5:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r_1 \neq 0, r_2 \neq 0$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y_2 = q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$  olsun.  $x \stackrel{L(H)}{\sim} y$  ise  $r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Önerme 4.12.5 den açıktır.

Teorem 4.13.3:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r_1 \neq 0, r_2 \neq 0$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y_2 = q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$  olsun.  $r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  ise  $x \stackrel{L(H)}{\sim} y$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.13.3 den açıktır.

$T_4(x) = (1 - \delta, 1 - \delta)$  durumunda  $x = (x_1, x_2)$  2 -lisinin elemanları  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  şeklindedir. Burada  $r_1 \neq 0$  ve  $r_2 \neq 0$  dir.

Teorem 4.13.4:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^{1+1})^2$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, r_1 \neq 0, r_2 \neq 0$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, y_2 = q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$  olsun.  $x \stackrel{L(H)}{\sim} y \Leftrightarrow r_2^{-1}r_1 = q_2^{-1}q_1$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.12.6 ve Teorem 4.12.4 den açıktır.

Şimdi son olarak  $T_4(x) = (1 + \delta, 1 - \delta), T_4(x) = (1 - \delta, 1 + \delta)$  incelenmeyen durumları inceleyelim:  $T_4(x) = (1 + \delta, 1 - \delta)$  durumunda  $x = (x_1, x_2)$  2 -lisinin elemanları  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  şeklindedir. Burada  $r_1 \in \mathbb{R}^*$  ve  $r_2 \in \mathbb{R}^*$  dir.

Teorem 4.13.5:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $y_2 = q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $q_2 \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $x \underset{\sim}{\sim}^L y \Leftrightarrow r_1 r_2 = q_1 q_2$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.12.7 ve Teorem 4.12.5 den açıktır.

Teorem 4.13.6:  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{H}^2$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $x_2 = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $r_2 \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $y_2 = q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $q_2 \in \mathbb{R}^*$ , olsun. Bu takdirde  $x \underset{\sim}{\sim}^L y \Leftrightarrow r_1 r_2 = q_1 q_2$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.12.6'den çıkıyor.

$m$  bir doğal sayı ve  $m > 2$  olsun.

Tanım 4.13.1: Eğer  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  olmak üzere bir  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $|x_i|_1 \neq 0$  ise, bu  $m$ -li  $L$ -bozulmamış  $m$ -li denir. Böyle özellikli  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  yoksa, bu  $m$ -liye  $L$ -bozulmuş  $m$ -li denir.

Eğer  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $m$ -liler için  $x \underset{\sim}{\sim}^L y$  ve  $x, L$ -bozulmamış ise  $y$  de  $L$ -bozulmamıştır.

Eğer  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $m$ -liler için  $x \underset{\sim}{\sim}^L y$  ve  $x, L$ -bozulmuş ise  $y$  de  $L$ -bozulmuştur.

Teorem 4.13.7:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  için  $|x_1|_1 \neq 0$ ,  $|y_1|_1 \neq 0$  olsun.  $x \underset{\sim}{\sim}^L y \Leftrightarrow T_4(h_1) = T_4(k_1)$ ,  $\frac{\langle x_1, x_j \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_j \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}$  ve  $\frac{[x_1, x_j]}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{[y_1, y_j]}{\langle y_1, y_1 \rangle}$ ,  $j = 2, 3, \dots, m$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.12.7, Teorem 4.12.7 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

Teorem 4.13.8:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$  olmak üzere bir  $i \in \{2, 3, \dots, m\}$  için  $|x_i|_1 \neq 0$ ,  $|y_i|_1 \neq 0$  olsun.  $x \underset{\sim}{\sim}^L y \Leftrightarrow T_4(h_i) = T_4(k_i)$ ,  $\frac{\langle x_1, x_j \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_j \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}$  ve  $\frac{[x_1, x_j]}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{[y_1, y_j]}{\langle y_1, y_1 \rangle}$ ,  $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.12.8, Teorem 4.12.8 ve Lemma 4.7.1 den açıktır.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $L$ -bozulmamış  $m$ -liler olsun. Eğer  $T_4(x) \neq T_4(y)$  ise Sonuç 4.13.2'e göre bu  $m$ -liler  $L$ -denk değildir. Kabul edelim ki  $T_4(x) = T_4(y)$  olsun. Bu takdirde  $x, L$ -bozulmamış olduğundan bir

$i \in \{1,2,3, \dots, m\}$  için  $|x_i|_1 \neq 0$  ve  $T_4(x_i) = T_4(y_i)$  dir. Dolayısıyla Teorem 4.13.7 ve Teorem 4.13.8 ile  $L$  –bozulmamış  $m$  –lilerin  $L$  –denklik problemi tam olarak incelenmiş oldu.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $L$  –bozulmuş  $m$  –li olsun. Bu takdirde  $\forall j \in \{1,2, \dots, m\}$  için  $T_4(x_j) = 1 + \delta$  veya  $T_4(x_j) = 1 - \delta$  dir.

Şimdi  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $L$  –bozulmuş  $m$  –li ve  $\forall j \in \{1,2, \dots, m\}$  için  $T_4(x_j) = 1 + \delta$  olsun. Bu durumda  $x$   $m$  –linin elemanları şu şekildedir,  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, x_m = r_m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , burada  $r_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$ .

Teorem 4.13.9:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $L$  –bozulmuş  $m$  –liler ve  $\forall j \in \{1,2, \dots, m\}$  için  $T_4(x_i) = T_4(y_i) = 1 + \delta$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, x_m = r_m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, y_m = q_m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $h \stackrel{L(H)}{\sim} k \Leftrightarrow r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$   $j = 2, \dots, m$ ,  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1)$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.12.9 ve Teorem 4.12.9 dan açıktır.

Teorem 4.13.10:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $L$  –bozulmuş  $m$  –liler ve  $\forall j \in \{1,2, \dots, m\}$  için  $T_4(x_i) = T_4(y_i) = 1 - \delta$  ve  $x_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dots, x_m = r_m \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $r_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, r_m \in \mathbb{R}^*$  ve  $y_1 = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dots, y_m = q_m \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^*, \dots, q_m \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $r_j^{-1}r_1 = q_j^{-1}q_1$ ,  $j = 2, \dots, m$ , ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1) \Leftrightarrow h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.12.10 dan açıktır.

$D$  ve  $E$ ,  $\{1,2, \dots, m\}$  kümesinin  $D \neq \emptyset, E \neq \emptyset, D \cap E = \emptyset$  ve  $D \cup E = \{1,2, \dots, m\}$  olacak şekilde alt kümeleri olsun.  $D$  nin en küçük elemanı 1 ve  $E$  nin en küçük elemanı  $n$  olsun.  $E$  nin en küçük elemanı 1 ve  $D$  nin en küçük elemanı  $n$  olduğu durum benzer şekilde incelenebilir.

Teorem 4.13.11:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{1+1})^m$ ,  $L$  –bozulmuş  $m$  –liler olsun.  $\forall i \in D$  için  $T_4(x_i) = 1 + \delta$ ,  $x_i = r_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r_i \in \mathbb{R}^*$  ve  $\forall j \in E$  için  $T_4(y_j) = 1 - \delta, y_j = q_j \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, q_j \in \mathbb{R}^*$  olsun.  $\forall i \in D$  ve  $\forall j \in E$  için  $r_i^{-1}r_1 = q_i^{-1}q_1$ ,  $r_j^{-1}r_n = q_j^{-1}q_n$ ,  $r_1r_n = q_1q_n$  ve  $Sgn(r_1) = Sgn(q_1) \Leftrightarrow h \stackrel{L(H)}{\sim} k$  dir.

*İspat:* Teorem 4.5.1, Önerme 4.12.10 ve Teorem 4.12.11 den açıktır.

Böylece  $L$  grubu için tüm durumlar incelenerek  $L$  –denklik problemi tam olarak çözülmüş oldu.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Hiperbolik sayıların iki boyutlu hiperbolik düzlemde belirtilmesi bu sayıları çok önemli yapar. Hiperbolik sayılar üzerine pek fazla kitap ve makale yazılmadığından araştırılması gereken konular mevcuttur. Bu tezde iki hiperbolik noktanın ve  $m$ -tane hiperbolik noktanın  $H^*, W(H^*), H_+, W(H_+), B(H)_2, W(B(H)_2), L(H), W(L(H))$ , gruplarına göre denklik problemlerinin çözümleri yapılmıştır. Bu çalışmanın bir sonucu olarak  $W(H^*), W(H_+), W(B(H)_2), W(L(H))$  gruplarına göre  $m \geq 2$  için denklik problemleri hiperbolik fonksiyonlar yardımı ile yapılmıştır.

Bu soruların cevaplarını bulmak için (Göksal, 2011) tezde bulunan Hiperbolik sayılara ait bilgileri kullanılarak,  $H^*, H_+, B(H)_1, B(H)_2, L(H)$  grupların da bir noktanın denklik problemi ve iki noktanın denklik problemi çözümlerinden yardım alarak yürütülmesi yöntem olarak kullanılmıştır.

Tez çalışmasının önemi:

1. Hiperbolik sayıları anlamak ve önemli olduklarını göstermek.
2. Tezde kullanılan yöntemler Hiperbolik sayılarda yeni yapılacak çalışmalara yardımcı olma niteliğindedir.
3. Tezde kullanılan yöntemler Hiperbolik sayılarda noktalar sisteminin denklik probleminde, hiperbolik geometrideki eğrilerin denklik probleminde önemlidir.
4. Hiperbolik sayılarda nokta sistemlerinin denklik problemleri, hiperbolik geometrideki eğrilerin denklik problemleri araştırılmasında ve bazı fiziksel (Özel relativity) problemlerin çözümünde de önemli olabilir.

## KAYNAKLAR

- Birman G.S. and Nomizu K. 1984. *Trigonometry in Lorentzian Geometry*, Amer. Math. Monthly 91, 543-549.
- Boccaletti D., Nichelatti E., Catoni F., Cannata R., Catoni V. and Zampetti P. 2008. *The Mathematics of Minkowski Space-Time, With Introduction to Commutative Hypercomplex Numbers*, Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin.
- Catoni F. and Zampetti P. 2000. *Two-Dimensional Space-Time Symmetry in Hyperbolic Functions*, N. Cim. B 115 B 12, 1433-1440.
- Catoni F., Cannata R., Catoni V. and Zampetti P. 2003. *Hyperbolic Trigonometry in Two-Dimensional Space-Time Geometry*. N. Cim. B 118 B, 475-491.
- Catoni F., Cannata R., Catoni V. and Zampetti P. 2004. Two-Dimensional Hypercomplex Numbers and Related Trigonometries and Geometries, *Advances in Applied Clifford Algebras* 14, No. 1, 47-68.
- Chabat B. 1990. Introduction à l'analyse complexe, Vol. I, Mir, Moscou.
- Clifford W. K. 1882. "Further Notes on Biquaternions", in *Mathematical Works* edited by A.W. Tucker, 392.
- Cockle J. 1847. "On A New Imaginary in Algebra", Phil. Mag. 3, 34, 37-47.
- Fjelstad P. 1986. *Extending special relativity via the perplex numbers*, Amer. J. Phys. 54, no. 5, 416-422.
- Fjelestad P. and Gal S. G. 2001. Two-dimensional geometries, topologies, trigonometries and physics generated by complex-type numbers, *Adv. Appl. Clifford Algebr.* 11, no. 1, 81-107.
- Göksal Y. 2011. Hiperbolik Sayılar ve Hiperbolik Sayıların 2-Boyutlu Hiperbolik Geometriye Uygulamaları, Yüksek lisans Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Hazewinkle M. 1994. "Double and dual numbers", *Encyclopaedia of Mathematics*, Soviet/AMS/Kluwer, Dordrecht.
- Lie S. and Scheffers M. G. 1893. Vorlesungen über continuerliche Gruppen, Kap. 21, Taubner, Leipzig.
- Ören İ. 2004. Minkoski Uzayzaman Geometrisinde noktaların invaryantları, Yüksek lisans Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Rochon D. and Shapiro M. 2004. On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers, *Anal. Univ. Oradea, fasc. math.* 11, 71-110.

Sobczyk G. 1995. *The Hyperbolic Number Plane*, The College Math.J., 26, 4, 268-280.

Ulrych S. 2005. Relativistic quantum physics with hyperbolic numbers, *Physics Letters B* 625, 313-323.

Yaglom I. M. 1968. *Complex numbers in geometry*, Academic Press, New York.

Yaglom I. M. 1979. *A simple non-Euclidean geometry and its Physical Basis*, Springer-Verlag, New York.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Yavuz Göksal  
Doğum Yeri : Trabzon  
Doğum Tarihi : 01.01.1981  
Yabancı Dili : İngilizce

### Eğitim Durumu

Lise : Samsun Gazi Anadolu Lisesi (1997)  
Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat  
Fakültesi Matematik Bölümü (2005)  
Yüksek Lisans : Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri  
Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Şubat 2009 –  
Haziran 2011)

### Çalıştığı Kurumlar ve Yıl

Matematik Öğretmeni, Özel Dershanelerde (2006-2013).  
Matematik Öğretmeni, Atatürk Anadolu Meslek Lisesi, Erzurum (2014-2015).  
Matematik Öğretmeni, Sürmene Anadolu Lisesi, Trabzon (2015- Devam ediyor).

### Yayımlar

Khadjiev D & Göksal Y (2016). *Applications of hyperbolic numbers to the invariant theory in two-dimensional pseudo Euclidean space*, Adv. Appl. Clifford Algebras vol.26 no.2 ISSN 0188-7009.