

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Γ' MODÜLER ALT GRUBUNUN ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARI

OSMAN ŞAHİN

TEZ DANIŞMANI

YRD. DOÇ. DR. YAVUZ KESİCİOĞLU

TEZ JÜRİLERİ

PROF. DR. MEHMET AKBAŞ

DOÇ. DR. RUŞEN YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI




RİZE 2017

Her Hakkı Saklıdır

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

F' MODÜLER ALT GRUBUNUN ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARI

Yrd. Doç. Dr. Yavuz KESİCİOĞLU danışmanlığında Osman ŞAHİN tarafından hazırlanan bu çalışma Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla oluşturulan jüri tarafında 05/04/2017 tarihinde MATEMATİK Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	Unvanı Adı Soyadı	İmzası
Başkan :	Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ	
Üye :	Doç. Dr. Ruşen YILMAZ	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Yavuz KESİCİOĞLU	


Doç. Dr. Ferhat KALAYCI
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ



ÖNSÖZ

Γ^2 ve Γ^3 gruplarının kesişimleri ile elde edilen Γ' modüler alt grubunun incelendiği bu çalışma, Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda "Yüksek Lisans Tezi" olarak hazırlanmıştır.

Γ' modüler alt grubunun oluşturduğu alt yörüngesel grafların kenar ve devre şartları belirlenmiş ve bu şartlar altında grafların bağlantılılığı incelenmiştir.

Bu tez çalışmam süresince bana desteklerini sunan danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Yavuz KESİCİOĞLU'na ve Karadeniz Teknik Üniversitesinden Sayın Öğr. Gör. Dr. Tuncay KÖR'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Bütün yaşamım boyunca bana azim ve birlikteliği hissettiren, eğitim hayatım boyunca sürekli yanımda olan tüm aile bireylerime sonsuz saygı ve sevgilerimi sunarak ithaf ederim.

Osman ŞAHİN

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan “T’ Modüler Alt Grubunun Alt Yörüngesel Grafları” başlıklı bu tezin, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 20/02/2017

Osman ŞAHİN

Uyarı: Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Γ' MODÜLER ALT GRUBUNUN ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARI

Osman ŞAHİN

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Yavuz KESİCİOĞLU

Bu tezde Γ' modüler alt grubunun $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ üzerindeki hareketinden oluşan alt yörüngesel graflar incelenmiştir. Birinci bölümde konu ile ilgili genel bilgilerden bahsedilerek literatürdeki bazı önemli tanım, teorem ve sonuçlar verilmiştir. İkinci bölümde Γ' modüler alt grubunun oluşturduğu alt yörüngesel grafların kenar ve devre şartları belirlenmiş ve bu şartlar altında grafların bağlantılılığı incelenmiştir.

2017, 50 sayfa

Anahtar Kelimeler: Modüler Grup, Alt Yörüngesel Graf, Bağlantılılık

ABSTRACT

SUBORBITAL GRAPHS OF MODULAR SUBGROUP Γ'

Osman ŞAHİN

Recep Tayyip Erdoğan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Yavuz KESİCİOĞLU

In this thesis, the main object is to examine the suborbital graphs arising from the action of the modular subgroup Γ' on $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. In the first chapter, general informations about the subject are discussed and proofs of some important theorems and conclusions in the literature were given in detail. In the second chapter, the edge and circuit conditions on the suborbital graphs arising from the modular subgroup Γ' are examined and then the connectedness of the graphs are determined under these conditions.

2017, 50 pages

Keywords: Modular Group, Suborbital Graph, Connectedness

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	I
TEZ ETİK BEYANNAMESİ	II
ÖZET	III
ABSTRACT.....	IV
İÇİNDEKİLER	V
ŞEKİLLER DİZİNİ	VI
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	VII
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Topolojik Gruplar	2
1.3. Modüler Grup.....	5
1.4. Γ nin $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ Üzerindeki Hareketi	6
1.5. Modüler Grubun Kongrüans Alt Grupları	8
1.6. İmprimitif Hareket	10
1.7. Graf Teori.....	11
1.8. Alt Yörüngesel Graflar	12
1.9. Farey Grafi	14
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	16
2.1. Γ' Modüler Alt Grubunun Alt Yörüngesel Grafları	16
2.1.1. Γ' Modüler Alt Grubu	16
2.1.2. Γ' Modüler Alt Grubunun $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ Üzerindeki Hareketi	17
2.1.3. Γ' Modüler Alt Grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları	24
2.1.4. Γ' Modüler Alt Grubunun Alt Yörüngesel Graflarında Bağlantılılık	35
3. TARTIŞMA VE SONUÇLAR	44
4. ÖNERİLER.....	45
KAYNAKLAR	46
ÖZGEÇMİŞ	48

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.	Devreler	11
Şekil 2.	Farey grafi	14
Şekil 3.	\mathcal{U} üst yarı düzleminde kesişen doğrular	15
Şekil 4.	$T_2 \circ T_1^{-1}$ dönüşümü.....	32
Şekil 5.	Bağlantılı K grafi.....	35
Şekil 6.	Bağlantısız K grafi.....	36
Şekil 7.	$F_{0,1}$ Alt yörüngesel grafi.....	36
Şekil 8.	$F_{1,2}$ Alt yörüngesel grafi.....	39
Şekil 9.	$F_{1,3}$ Alt yörüngesel grafi.....	41
Şekil 10.	$F_{1,4}$ Alt yörüngesel grafi	42

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Γ	Modüler Grup
Γ^2	Γ Modüler Grubunun Elemanlarının Kareleri Alınarak Elde Edilen Grup
Γ^3	Γ Modüler Grubunun Elemanlarının Küpleri Alınarak Elde Edilen Grup
Γ'	Γ^2 ve Γ^3 Gruplarının Kesişimleri ile Elde Edilen Modüler Alt Grup
$\Gamma'_0(n)$	Γ' Modüler Alt Grubunun Bir Alt Grubu
$PSL(2, R)$	Gerçel Katsayılı, Lineer, Kesir Dönüşümlerinin Grubu
\mathbb{C}	Kompleks Sayılar Kümesi
\mathbb{R}	Reel Sayılar Kümesi
\mathbb{Q}	Rasyonel Sayılar Kümesi
$\hat{\mathbb{Q}}$	Genişletilmiş Rasyonel Sayılar Kümesi
\mathbb{Z}	Tam Sayılar Kümesi
$\varphi(n)$	Euler Fonksiyonu
H	Hiperbolik Doğrular
$O(\alpha, \beta)$	(α, β) 'yi İçeren Alt Yörünge
U	\mathbb{C} 'de Üst Yarı Düzlem
$ A: B $	B Alt Grubunun A Grubundaki İndeksi
Gx	x Noktasının G Yörüngesi
G_x	x Noktasının G 'deki Sabitleyeni
∞	Sonsuz

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

19. yüzyılın sonlarına doğru ayrık gruplar teorisine temel teşkil edebilecek bazı önemli sonuçlar ilk defa Henry Poincare tarafından göz önüne getirilmiş ve eliptik fonksiyonlar teorisinin geliştirilmesi için kullanılmıştır. Fuchsian grupları adı verilen ve sistematik çalışmasını Henry Poincare'nin geliştirdiği bu ayrık grupların invaryant bıraktığı fonksiyonlar üzerinde birçok bilim adamı çalışmalar yapmıştır. Lineer kesirli dönüşümler grubu özellikle 19. yüzyılda Öklid olmayan geometriler ve İnvaryant teorisinin keşfiyle birlikte büyük önem kazanmış, topolojik grup yapısına uygun olması nedeniyle gerek analiz, gerekse cebirsel yöntemlerle derinlemesine incelenmiştir. Eliptik eğrilerin aritmetiği, integral kuadratik formlar ve eliptik modüler fonksiyonlar teorilerindeki önemi nedeniyle en çok Γ modüler grubunun kongrüans alt grupları olan $\Gamma(N)$, $\Gamma_0(N)$, $\Gamma^0(N)$, $\Gamma_1(N)$ grupları üzerinde çalışılmıştır. Son yıllarda sayılar teorisinde de Γ modüler grubunun kongrüans alt grupları Pierre de Fermat'ın 1637 yılında ifade ettiği son teoreminin ispatında oldukça önemli bir yer teşkil ettiği görülmektedir.

Charles C. Sims tarafından 1967 yılında yayınlanan “Graphs and Finite Permutation Groups” adlı makalede ve Gareth A. Jones, David Singerman ve K. Wicks’in, 1991 yılında yayınlanan “The Modular Group and Generalized Farey Graphs” adlı çalışmasında altyörüngesel graflar ve bu graflardaki devre uzunlukları incelenmiştir. M. Akbaş’ın 2001 yılındaki “On Suborbital Graphs For The Modular Group” adlı çalışmasında devre uzunlukları ile ayrık grupların üretici eliptik elemanlarının mertebeleri arasındaki ilişki ortaya konmuştur.

Kesicioğlu, Y., tarafından 2011 yılında yapılan “ Γ^3 ve G_5 Hecke Gruplarının Alt Yörüngesel Grafları” adlı doktora tezinde

$$\Gamma^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid ab + cd \equiv 0 \pmod{3} \right\} \quad (1)$$

modüler alt grubunun, 2015 yılında da Güler B.Ö., Beşenk, M., Kesicioğlu, Y. ve Değer,

A.H. tarafından yapılan “Suborbital Graphs for The Group Γ^2 ” adlı çalışmada

$$\Gamma^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid ab + bc + cd \equiv 0 \pmod{2} \right\} \quad (2)$$

modüler alt grubunun yardımıyla elde edilen graflar incelenmiş ve bu grafların kenar şartları ile bağlantılılıkları araştırılmıştır.

Bu tez çalışmasında ise Γ modüler grubunun alt gruplarından biri olan ve

$$\Gamma' = \Gamma^2 \cap \Gamma^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid ab + 3bc + cd \equiv 0 \pmod{6} \right\} \quad (3)$$

şeklinde tanımlanan Γ' modüler alt grubunun oluşturduğu alt yörüngesel grafların kenar ve devre şartları belirlenmiş ve bu şartlar altında grafların bağlantılılığı incelenmiştir.

1.2. Topolojik Gruplar

Tanım 1.1. (G, \cdot) bir grup ve aynı zamanda bir topolojik uzay olsun. Bu taktirde her $g, h \in G$ için

- i. $m: G \times G \rightarrow G$
 $(g, h) \rightarrow g \cdot h$
- ii. $i: G \rightarrow G$
 $g \rightarrow g^{-1}$

dönüşümleri sürekli ise G ye bir topolojik grup denir.

Tanım 1.2. G bir topolojik grup ve X bir topolojik uzay olsun. Bu taktirde

$$\Lambda: G \times X \rightarrow X$$
$$\Lambda(g, x) = g\Lambda x =: gx$$

sürekli bir dönüşüm ve her $g_1, g_2 \in G$ ve her $x \in X$ için

- i. $g_1 g_2 x = g_1 (g_2 x)$
- ii. $ex = x$ (e, G ' nin birimi)

şartları sağlanıyorsa $[G, X, \Lambda]$ üçlüsüne veya $[G, X]$ ikilisine bir topolojik dönüşüm grubu

adı verilir. Bu durumda G ye X üzerinde bir hareket grubu denir.

Tanım 1.3. Δ bir topolojik uzayın alt kümesi olsun. Eğer her $x \in \Delta$ için $U \cap \Delta = \{x\}$ olacak şekilde bir U komşuluğu varsa Δ ya ayrıktır denir.

Örneğin, \mathbb{Z} tamsayılar kümesi \mathbb{R} nin bir ayrık alt kümesidir. \mathbb{R} nin her bir sonlu alt kümesi de \mathbb{R} nin bir ayrık alt kümesidir. $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$ kümesi \mathbb{R} nin ayrık bir alt kümesidir. Ancak $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\} \cup \{0\}$ kümesi \mathbb{R} nin ayrık bir alt kümesi değildir.

Lemma 1.4. $[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $x, y \in X$ olsun. Bu taktirde

$$x \approx y: \Leftrightarrow \exists g \in G: gx = y \quad (4)$$

şeklinde tanımlanan " \approx " bağıntısı X üzerinde bir denklik bağıntısıdır (Rose, 1978).

Tanım 1.5. " \approx " bağıntısının denklik sınıflarına hareketin yörüngeleri denir. Ayrıca $x \in X$ noktasını içeren yörüngeye x in yörüngesi denir ve bu $Gx := \{gx \mid g \in G\}$ kümesidir.

Tanım 1.6. G, X üzerinde hareket etsin ve $x, y \in X$ keyfi olsun. $gx = y$ olacak biçimde bir $g \in G$ elemanı varsa G ye X üzerinde transitif olarak hareket ediyor denir.

Bu tanıma göre hareket transitif ise $\forall x \in X$ için $Gx = X$ elde edilir. Yani bir tek yörünge vardır. Yörünge grubun transitif olarak hareket ettiği kümedir.

Tanım 1.7. G bir grup ve $H < G$ olsun. H alt grubuna göre sağ ve sol denklik sınıflarının sayısı aynıdır. Bu sayıya H alt grubunun G içerisindeki indeksi denir ve $|G:H|$ ile gösterilir.

Tanım 1.8. G, X üzerinde hareket etsin ve $x \in X$ olsun. $G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$ kümesine x noktasının sabitleyeni denir.

Şimdi genel anlamda yörünge ile sabitleyen arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Lemma 1.9. G, X üzerinde hareket etsin ve $x \in X$ olsun. Bu durumda $|Gx| = |G:G_x|$ dir (Rose, 1978).

İspat: $Gx = \{gx | g \in G\}$ ve $G_x = \{g \in G | \forall x \in X \text{ için } gx = x\}$ olduğunu biliyoruz. $Y := \{gG_x : g \in G\}$ için $\alpha: Gx \rightarrow Y, \alpha(gx) := gG_x$ şeklinde tanımlansın.

i. α nın iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $g_1, g_2 \in G$ ve $x \in X$ olsun. Eğer $g_1x = g_2x$ ise $\alpha(g_1x) = \alpha(g_2x)$ midir?

$$g_1x = g_2x \Rightarrow g_2^{-1}g_1x = g_2^{-1}(g_1x) = g_2^{-1}g_2x = x \Rightarrow g_2^{-1}g_1 \in G_x \quad (5)$$

dir. Şimdi $g_2^{-1}g_1 \in G_x \Rightarrow g_1G_x = g_2G_x$ yani $g_2^{-1}g_1 \in G_x \Rightarrow g_2^{-1}g_1G_x = G_x$ olduğunu gösterelim. $h \in G_x$ olsun.

$$g_2^{-1}g_1hx = g_2^{-1}g_1x = x \Rightarrow g_2^{-1}g_1G_x \subset G_x \quad (6)$$

$$g_2hx = g_2x = g_1x \Rightarrow g_1^{-1}g_2hx = x \Rightarrow g_1^{-1}g_2h \in G_x \Rightarrow h \in g_2^{-1}g_1G_x \Rightarrow G_x \subset g_2^{-1}g_1G_x \quad (7)$$

olup (6) ve (7) dan $g_2^{-1}g_1G_x = G_x$ dir. Böylece

$$g_1x = g_2x \Rightarrow g_1G_x = g_2G_x \Rightarrow \alpha(g_1x) = \alpha(g_2x) \quad (8)$$

bulunur.

ii. α nın birebir olduğunu gösterelim. $g_1, g_2 \in G$ ve $x \in X$ için $\alpha(g_1x) = \alpha(g_2x)$ olsun. $\alpha(g_1x) = \alpha(g_2x) \Rightarrow g_1G_x = g_2G_x \Rightarrow g_2^{-1}g_1 \in G_x \Rightarrow g_2^{-1}g_1x = x$ dir. $g_1x = g_2g_2^{-1}g_1x = g_2(g_2^{-1}g_1x) = g_2x$ olup α birebirdir.

iii. α nın örten olduğunu gösterelim. $v \in Y$ olsun. Buna göre $v = gG_x$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır. Buradan $\alpha(gx) = gG_x = v$ olup α örtendir. Dolayısıyla $|Gx| = |Y| = |G:G_x|$ elde edilir.

Tanım 1.10. G bir grup olsun. $C := \{g \in G | \forall x \in G \text{ için } gx = xg\}$ kümesine G nin merkezi denir.

Tanım 1.11. Geometride iki noktayı birleştiren minimal uzunluklu eğrilere geodezik adı verilir.

Tanım 1.12. Bir T dönüşümünün periyodu (veya mertebesi) $T^m = I$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır. Böyle bir m sayısı yoksa T 'ye sonsuz periyotludur denir.

Tanım 1.13. $n \in \mathbb{N}$ için $1 \leq a \leq n$ ve $(a, n) = 1$ olan a tamsayılarının sayısı $\varphi(n)$ ile gösterilir. Bu fonksiyona Euler fonksiyonu denir. $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ ise bu taktirde

$$\varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right) \quad (9)$$

dir.

1.3. Modüler Grup

Tanım 1.14. $PSL(2, \mathbb{R}) := \left\{ z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc = 1 \right\}$ grubunun

$$\Gamma := PSL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ ve } ad - bc = 1 \right\} \quad (10)$$

alt grubuna “Modüler Grup” adı verilir. Bu grup aşağıdaki gibi 2×2 lik tam sayılar matrisleriyle de temsil edilebilir:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \det A = 1. \quad (11)$$

A ve $-A$ aynı dönüşümü temsil ettiğinden söz konusu matris negatifi ile eş alınır. Böylece matris ve dönüşüm arasında bir ayrım yapılmayacaktır. Ayrıca $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$, $k \neq 0$ matrisleri yine aynı dönüşümü temsil ettiğinden matris hesaplamalarında uygun olduğu yerde bu matrisler eşit olarak yazılabilir. (Burada determinantın 1 olma şartı aranmayacaktır.) Aşağıdaki teorem Γ modüler grubunun $T(z) = z + 1$ ve $U(z) = -\frac{1}{z}$ dönüşümleri ile üretildiğini göstermektedir.

Teorem 1.15. Γ modüler grubu $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisleriyle üretilir (Schoeneberg, 1974).

1.4. Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ Üzerindeki Hareketi

$\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesinin her elemanı $x, y \in \mathbb{Z}$ ve $(x, y) = 1$ olmak üzere bir x/y indirgenmiş kesri olarak gösterilebilir. $x/y = -x/-y$ olduğundan bu gösterim tek değildir. ∞ u $1/0 = -1/0$ olarak gösterelim. Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \frac{x}{y} \rightarrow \frac{ax+by}{cx+dy} \quad (12)$$

dir. $T \in \Gamma$ olmak üzere

$$T\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\frac{ax+b}{y}+b}{\frac{cx+d}{y}} = \frac{ax+by}{cx+dy} \text{ ve } T\left(\frac{-x}{-y}\right) = \frac{-ax-by}{-cx-dy} = \frac{ax+by}{cx+dy} = T\left(\frac{x}{y}\right) \quad (13)$$

olduğundan Γ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi iyi tanımlıdır. Eğer $(x, y) = 1$ ve $ad - bc = 1$ ise $\frac{ax+by}{cx+dy}$ indirgenmiş kesirdir.

Aksini varsayalım; $\frac{ax+by}{cx+dy}$ indirgenmiş formda olmasın. Buna göre $n|ax + by$ ve $n|cx + dy$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu durumda $k, l \in \mathbb{Z}$ için

$$ax + by = kn \quad (14)$$

ve

$$cx + dy = \ell n \quad (15)$$

dir. (14) eşitliğinin her iki tarafı d ile (15) eşitliğinin ise $-b$ ile çarpıldığında

$$(ad - bc)x = (kd - b\ell)n \quad (16)$$

ve benzer şekilde (14) eşitliğinin her iki tarafı $-c$ ile (15) eşitliğinin ise a ile çarpıldığında

$$(ad - bc)y = (a\ell - ck)n \quad (17)$$

elde edilir. (16) ve (17) dan $n|x, n|y$ çelişkisi elde edilir (Jones vd., 1991).

Teorem 1.16. Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir (Jones vd., 1991).

İspat. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \widehat{\mathbb{Q}}: \frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ ve $(a, b) = (c, d) = 1$ olsun. Bu durumda $a\alpha - b\beta = 1$ ve $c\delta - d\gamma = 1$ olacak şekilde $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{Z}$ tam sayıları vardır. Burada $T(z) = \frac{az+\beta}{bz+\alpha}$ ve $S(z) = \frac{cz+\gamma}{dz+\delta}$ şeklinde tanımlanırsa $T(\infty) = \frac{a}{b}$ ve $S(\infty) = \frac{c}{d}$ olacak şekilde bir $\varphi := ST^{-1} \in \Gamma$ dönüşümü vardır. Dolayısıyla $\Gamma, \widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket eder.

Teorem 1.17. $\widehat{\mathbb{Q}}$ nın herhangi bir noktasının sabitleyeni sonsuz devirlidir (Jones vd., 1991).

İspat. Teorem 1.16' dan $\widehat{\mathbb{Q}}$ nın herhangi iki elemanının sabitleyenlerinin Γ da eşlenik oldukları açıktır. Gerçekten $p, q \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olsun. $S_p = \{T_1 \in \Gamma: T_1 p = p\}, S_q = \{T_2 \in \Gamma: T_2 q = q\}$ ise S_p ve S_q, Γ da eşleniktir. $\Gamma, \widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olduğundan bir $T \in \Gamma$ için $T(p) = q$ dur. Şimdi $S_p = T^{-1}S_qT$ olduğunu gösterelim. $T^{-1}S_qT := \{T^{-1}ST: S \in S_q\}$. $N \in S_p$ keyfi olsun. $N \in T^{-1}S_qT$ olduğunu gösterelim. $N = T^{-1}AT$ olacak şekilde bir $A \in S_q$ arıyoruz öyle ki $A = TNT^{-1}$ dir. $TNT^{-1}(q) = TN(p) = T(p) = q \Rightarrow A = TNT^{-1}$ dir. Böylece

$$T^{-1}AT = N \in T^{-1}S_qT \Rightarrow S_p \subset T^{-1}S_qT \quad (18)$$

dir. $M \in T^{-1}S_qT$ keyfi olsun. $\exists B \in S_q: M = T^{-1}BT$ dir. Buradan

$$M(p) = T^{-1}BT(p) = T^{-1}B(q) = T^{-1}(q) = p \Rightarrow M \in S_p \Rightarrow T^{-1}S_qT \subset S_p \quad (19)$$

dir. Böylece (18) ve (19)'dan $S_p = T^{-1}S_qT$ olduğu görülür.

S_p ve S_q Γ 'da eşleniktirler. Yani izomorfurlar. $S_p \cong S_q \Rightarrow \Gamma_p \cong \Gamma_q$ dur. Bu yüzden ∞ ' un Γ_∞ sabitleyenini düşünmek yeterlidir. Γ_∞ ' u $b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şeklindeki elemanların oluşturduğu kolaylıkla görülür. Gerçekten $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ve $T(\infty) = \infty$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle = \Gamma_\infty \quad (20)$$

dur. Böylece Γ_∞ , $Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elemanları ile üretilen sonsuz devirli bir gruptur. $\Gamma_q = L\Gamma_\infty L^{-1} = \langle L \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} L^{-1} \rangle$ dir.

1.5. Modüler Grubun Kongrüans Alt Grupları

Tanım 1.18. n pozitif tamsayı olmak üzere Γ grubunun temel kongrüans alt grubu

$$\Gamma(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid a \equiv d \equiv 1 \pmod{n}, b \equiv c \equiv 0 \pmod{n} \right\} \quad (21)$$

ile tanımlanır. Γ grubunun $\Gamma(n)$ temel kongrüans alt gruplarını içeren herhangi bir alt grubuna kongrüans alt grubu denir. Üzerinde en çok çalışılan bazı kongrüans alt grupları

$$\Gamma_1(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid a \equiv d \equiv 1 \pmod{n}, c \equiv 0 \pmod{n} \right\} \quad (22)$$

$$\Gamma_0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid c \equiv 0 \pmod{n} \right\} \quad (23)$$

$$\Gamma^0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid b \equiv 0 \pmod{n} \right\} \quad (24)$$

gruplarıdır. $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\Gamma(n) \leq \Gamma_1(n) \leq \Gamma_0(n) \leq \Gamma$ biçimindedir.

Ayrıca $\Gamma(n)$, Γ grubunun normal bir alt grubudur, dolayısıyla $\Gamma(n)$ grubu $\Gamma_0(n)$ ve $\Gamma_1(n)$ gruplarının da normal alt grubudur. Diğer taraftan $\Gamma_1(n) \triangleleft \Gamma_0(n)$ dir. Buna göre indeksler $n > 2$ için

$$|\Gamma:\Gamma_0(n)| = n \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right), \quad |\Gamma:\Gamma_1(n)| = \frac{n^2}{2} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \quad (25)$$

$$|\Gamma:\Gamma(n)| = \frac{n^3}{2} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \quad (26)$$

dir.

$n = 2$ durumunda $|\Gamma:\Gamma_0(2)| = 3$, $|\Gamma:\Gamma_1(2)| = 3$, $|\Gamma:\Gamma(2)| = 6$ dir. $n > 2$ için yukarıda verilen indekslerden aşağıdaki sonuçlar kolayca elde edilir;

$$|\Gamma_0(n):\Gamma_1(n)| = \frac{|\Gamma:\Gamma_1(n)|}{|\Gamma:\Gamma_0(n)|} = \frac{n}{2} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad (27)$$

$$|\Gamma_1(n):\Gamma(n)| = \frac{|\Gamma:\Gamma(n)|}{|\Gamma:\Gamma_1(n)|} = n \quad (28)$$

$\Gamma_0(n)$, $\Gamma_1(n)$ ve $\Gamma(n)$ gruplarının cusp kümesi de $\widehat{\mathbb{Q}}$ dir. Çünkü bu gruplar Γ grubunun sonlu indeksli alt gruplarıdır ve bir Λ Fuchsian grubunun sonlu indeksli herhangi bir alt grubu da Λ ile aynı cusp kümesine sahiptir (Ogg, 1974).

Teorem 1.19. $n > 1$ olmak üzere $\Gamma_0(n)$ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitif değildir.

İspat. Aksini varsayalım ve $0, \infty \in \widehat{\mathbb{Q}}$ seçelim. Bu taktirde $\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ olacak şekilde $\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$ vardır. Bu eşitlikten $b = 1$ ve $d = 0$ elde edilir. Determinant göz önüne alındığında bunun $c = -1$ ve $n = 1$ olmasıyla, diğer bir ifadeyle ancak $\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ olması durumunda mümkün olduğu görülür.

1.6. İmprimitif Hareket

Tanım 1.20.

- i. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $\xi: X \rightarrow X$ birebir ve örten ise ξ ye X in bir permütasyonu denir. X in tüm permütasyonlarının kümesi S^X ile gösterilir.
- ii. $\xi_1, \xi_2 \in S^X$ ise $\xi_1 \circ \xi_2 \in S^X$ olduğu açıktır. S^X grubuna X üzerinde simetrik grup denir. S^X grubunun alt gruplarına da X üzerinde permütasyon grupları denir.

Tanım 1.21. $G, X \neq \emptyset$ üzerinde bir permütasyon grubu olsun. Bu taktirde G, X üzerinde hareket eder. Gerçekten $g \in G$ ise $g: X \rightarrow X$ birebir ve örten bir dönüşümdür. Bu durumda $gx := g(x)$ olarak alınırsa $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$ ve $1x = x$ olduğu açıktır. Bu harekete G grubunun X üzerindeki doğal hareketi denir ve “ (G, X) permütasyon grubu” ifadesi kullanılır. Ayrıca G, X üzerinde transitif olarak hareket ediyorsa (G, X) ikilisine transitif permütasyon grubu adı verilir.

Tanım 1.22. (G, X) bir transitif permütasyon grubu ve “ \approx ” X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Eğer $\alpha, \beta \in X$ için $\alpha \approx \beta$ olduğunda $\forall g \in G$ için $g(\alpha) \approx g(\beta)$ oluyorsa \approx denklik bağıntısına X üzerinde $G - \text{invariant}$ denir. Bu bağıntının denklik sınıflarına da *bloklar* denir. Burada iki tane $G - \text{invariant}$ denklik bağıntısı verelim:

- i. **Özdeşlik Bağıntısı:** $\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$
- ii. **Evensel Bağıntı:** $\forall \alpha, \beta \in X$ için $\alpha \approx \beta$

Eğer X üzerinde i. ve ii. den farklı bir $G - \text{invariant}$ denklik bağıntısı daha varsa (G, X) 'e imprimitif aksi halde primitif denir.

Lemma 1.23. (G, X) transitif olsun. Bu taktirde (G, X) primitiftir $\Leftrightarrow \forall \alpha \in X$ için G_α sabitleyeni G nin bir maksimal alt grubudur (Jones vd., 1991).

Teorem 1.24. (G, X) bir transitif permütasyon grubu olsun. $G_\alpha < H < G$ ise

$$g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g' \in gH \quad (29)$$

ile verilen " \approx " bağıntısı X üzerinde iyi tanımlı bir G – *invariant* denklik bağıntısı olup Özdeşlik veya Evrensel bağıntısı değildir. Yani bu " \approx " bağıntısına göre G, X üzerinde imprimitif olarak hareket eder (Jones vd., 1991).

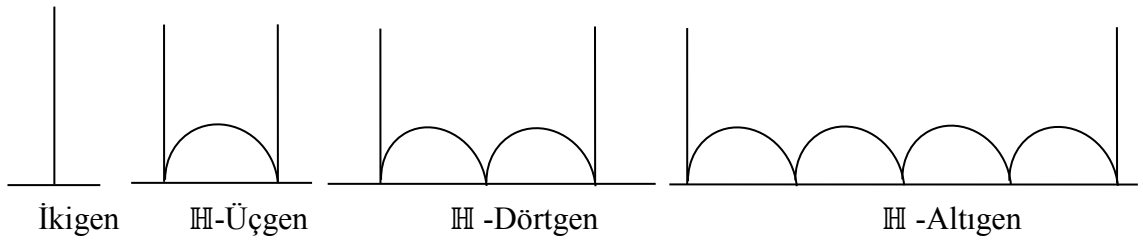
1.7. Graf Teori

Tanım 1.25. $X \neq \emptyset$ bir küme, $\Delta \subset X \times X$ bir bağıntı olsun. $G = (X, \Delta)$ ikilisine bir graf denir. X in elemanlarına grafın köşeleri ve Δ nın elemanlarına grafın kenarları adı verilir. $(a, b) \in \Delta$ ise bu durumda $a \rightarrow b$ ile gösterilir. Eğer $(a, b) \in \Delta$ veya $(b, a) \in \Delta$ ise a ile b bir kenar ile bağlanmıştır. Bu durumda a ve b ye komşu köşeler denir.

Tanım 1.26. $G = (X, \Delta)$ bir graf ve $A \subset X$ olsun. $G' = (A, \Delta \cap A \times A)$ grafına köşe kümesi A olan G' nin bir alt grafi adı verilir.

Tanım 1.27. $a = a_0, a_1, \dots, a_n = b$ bir G grafının köşelerinin bir dizisi olsun. Eğer her $1 \leq i \leq n$ için a_{i-1} ve a_i bir kenar ile bağlanmışlarsa a dan b ye n uzunluğunda bir yol vardır denir. Eğer $a = b$ ve a_0, a_1, \dots, a_{n-1} köşelerinin tümü farklı ise bu yola n kenarlı bir devre (circuit) denir. Ayrıca a_i, a_{i+1} ikilileri için $a_i \rightarrow a_{i+1}$ ise bu devreye yönlenmiş bir devre denir. Örneğin Şekil 1'deki gibi üç kenarlı bir devreye bir üçgen, dört kenarlı bir devreye bir dörtgen ve altı kenarlı bir devreye bir altıgen denir.

Örnek 1.28.



Şekil 1. Devreler

Tanım 1.29. $n \geq 3$ olmak üzere n kenarlı bir devre içermeyen grafa orman denir. Graf hiperbolik doğruların bir birleşimidir.

Tanım 1.30. $G = (X, \Delta)$ bir graf olsun. X üzerinde bir " \approx " bağıntısını şöyle tanımlayalım:

$$"a \approx b: \Leftrightarrow a = b \text{ veya } a \neq b \text{ ise } a \text{ dan } b \text{ ye bir yol vardır.}" \quad (30)$$

Açık olarak " \approx " bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 1.31.

- i. X in kendisi bu " \approx " bağıntısı altında bir denklik sınıfı ise G grafına bağlantılıdır denir.
- ii. Eğer X_1 " \approx " bağıntısı altında bir denklik sınıfı ise $(X_1, \Delta \cap X_1 \times X_1)$ bağlantılı bir grafdır ve bu grafa G grafının bağlantılı bileşeni denir.
- iii. İki grafın köşeleri arasında birebir ve örten bir dönüşüm mevcut ve bu dönüşüm komşu köşeleri, komşu köşelere gönderiyorsa bu iki grafa izomorf graflar denir.

1.8. Alt Yörüngesel Graflar

Tanım 1.32. $x \in X$ noktasının $G(x)$ yörüngesi (veya G - yörüngesi) X in bir alt kümesidir ve

$$G(x) = \{g(x) \in X: g \in G\} \quad (31)$$

ile tanımlanır.

Tanım 1.33. (G, X) bir transitif permütasyon grubu olsun. G nin $X \times X$ üzerindeki hareketini $g \in G$ olmak üzere

$$g: (\alpha, \beta) \rightarrow (g(\alpha), g(\beta)), (\alpha, \beta) \in X \times X \quad (32)$$

olarak tanımlanır (Jones vd., 1991). Bu hareketin yörüngelerine G nin alt yörüngeleri denir. (α, β) yı içeren alt yörüngeyi $O(\alpha, \beta)$ ile gösterelim.

$O(\alpha, \beta)$ alt yörüngesinden $G(\alpha, \beta)$ alt yörüngesel grafinı oluşturabiliriz:

Bu grafin köşeleri X in elemanlarıdır ve eğer $\gamma, \delta \in X$ noktaları için $(\gamma, \delta) \in O(\alpha, \beta)$ ise γ dan δ ya $\gamma \rightarrow \delta$ ile gösterilen bir yönlendirilmiş kenar vardır. Bu kenarı $\mathfrak{A} = \{z \in \mathbb{C}: \text{Im}z > 0\}$ üst yarı düzlemde bir hiperbolik geodezik olarak çizebiliriz. Açık olarak $O(\beta, \alpha)$ ' da alt yörüngedir ve ya $O(\alpha, \beta) \neq O(\beta, \alpha)$ yada $O(\alpha, \beta) = O(\beta, \alpha)$ dır. Eğer $O(\alpha, \beta) \neq O(\beta, \alpha)$ ise $G(\beta, \alpha)$, $G(\alpha, \beta)$ nın oklarının ters yönlendirilmişidir ve $G(\alpha, \beta)$ ile $G(\beta, \alpha)$ ya eşleşmiş alt yörüngesel graflar denir. Eğer $O(\alpha, \beta) = O(\beta, \alpha)$ ve $(\gamma, \delta) \in O(\alpha, \beta)$ ise bu taktirde γ dan δ ya kenarı $\gamma - \delta$ ($\gamma \leftrightarrow \delta$ nın yerine) ile gösterilecektir. Bu durumda $G(\alpha, \beta)$ yönlendirilmemiş bir kenar olarak düşünülebilir ve $G(\alpha, \beta)$ ya kendisiyle eşleşmiş denir.

$O(\alpha, \alpha) = \{(x, x): x \in X\}$, $X \times X$ ' in bir köşegenidir. $G(\alpha, \alpha)$ alt yörüngesel grafi her bir köşesi $\alpha \in X$ olan bir düğüm noktasından oluşur. Bu grafa trivial alt yörüngesel graf denir.

Şimdi $G = \Gamma$ ve $X = \hat{\mathbb{Q}}$ alalım. $\Gamma, \hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden her bir alt yörünge $v \in \hat{\mathbb{Q}}$ olmak üzere bir (∞, v) çiftini içerir. Eğer $n \geq 0$ ve $(u, n) = 1$ olmak üzere $v = \frac{u}{n}$ ise bu alt yörüngeyi $O_{u,n}$ ile ve buna karşılık gelen $G(\infty, v)$ alt yörüngesel grafinı da $G_{u,n}$ ile göstereceğiz.

Eğer $v = \infty$ ise $G_{1,0} = G_{-1,0}$ aşikar alt yörüngesel graftır. Bundan dolayı $v \in \mathbb{Q}$ olduğunu farz edebiliriz. Eğer $v' \in \mathbb{Q}$ ise bu taktirde $O(\infty, v) = O(\infty, v') \Leftrightarrow v$ ve $v' \in \Gamma_\infty$ ' un aynı yörüngesindedir. Γ_∞ grubu $z: v \rightarrow v + 1$ ile üretildiğinden $z\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{u+n}{n} = \frac{u'}{n'}$ dür. Buradan $n = n'$ ve $u \equiv u' \pmod{n}$ bulunur. Yani

$$G_{u,n} = G_{u',n'} \Leftrightarrow n = n' \text{ ve } u \equiv u' \pmod{n} \quad (33)$$

dir.

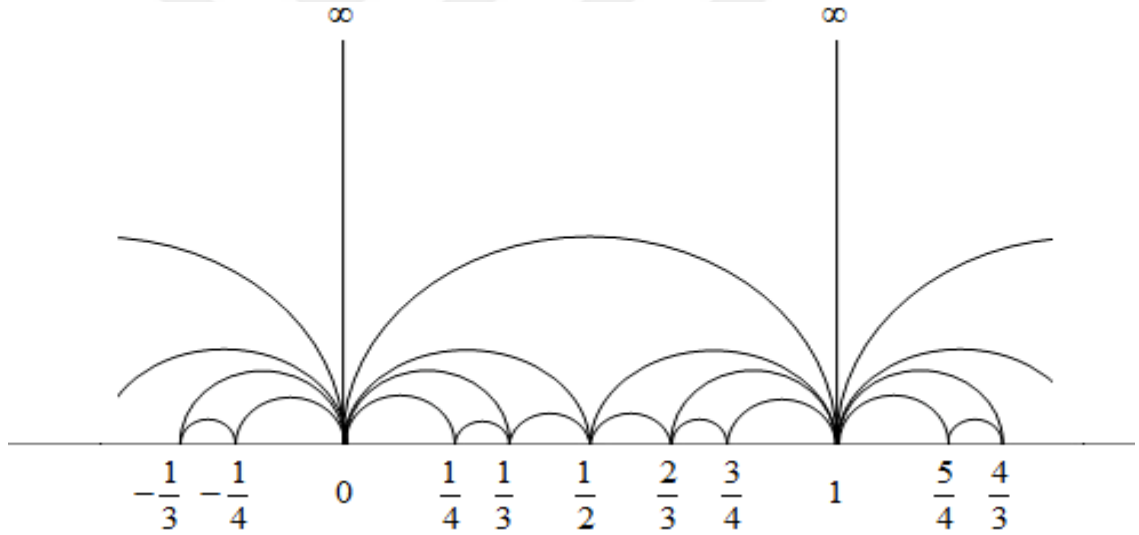
Eğer $\left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right) \in O_{u,n}$ ise $G_{u,n}$ ' de $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ yazacağız.

Teorem 1.34. $G_{u,n}$ de $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ kenarı mevcuttur \Leftrightarrow

- i. $x \equiv ur \pmod{n}, y \equiv us \pmod{n}$ ve $ry - sx = n$ veya
- ii. $x \equiv -ur \pmod{n}, y \equiv -us \pmod{n}$ ve $ry - sx = -n$ (Jones vd., 1991).

1.9. Farey Grafi

$m \geq 1$ ve $m \in \mathbb{N}$ olsun. Bütün $\frac{x}{y}, |y| \leq m$ rasyonel sayılarından oluşan kesin monoton artan diziye m . mertebeden Farey dizisi denir. Farey dizisi F_m ile gösterilir. Örneğin Şekil 2 den de görülebileceği gibi F_4 dizisi $\dots, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \dots$ biçimindedir. Açık olarak $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \dots$ ve $\bigcup_{m \geq 1} F_m = \mathbb{Q}$ dur. $G_{1,1}$, Farey dizileri ile olan ilişkisinden dolayı Farey grafi olarak adlandırılır ve F ile gösterilir.



Şekil 2. Farey Grafi

Farey grafi ile Farey dizileri arasındaki bağlantıyı veren aşağıdaki teoremi verelim:

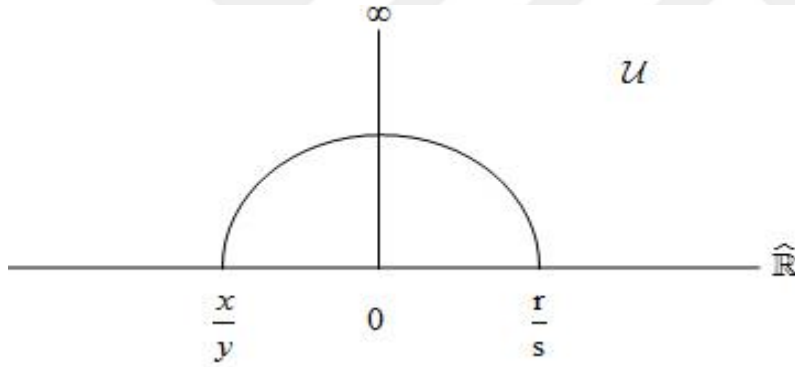
Teorem 1.35. $\frac{r}{s}, \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- i. $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$, F' de köşelerdir.
- ii. $ry - sx = \pm 1$
- iii. $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ bir m doğal sayısı için F_m nin ardışık terimleridir (Jones vd., 1991).

F nin komşu iki köşesini \mathcal{U} üst yarı düzlemde bulunan ve bu iki köşeden geçen merkezi reel eksen ve reel eksene dik yarı çemberlerle bağlayalım. Bu durumda F nin kenarlarıyla ilgili aşağıdaki önemli sonucu verebiliriz:

Teorem 1.36. F nin kenarları $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ üst yarı düzlemde kesişmezler (Jones vd., 1991).

İspat. $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in F$ kenarını alalım. Burada $ry - sx = \pm 1$ dir. Kabul edelim ki Şekil 3 deki gibi 0 ile ∞ u birleştiren $\text{Re}z = 0$ doğrusu $\frac{r}{s}$ yi $\frac{x}{y}$ ye birleştiren doğruyu üst yarı düzlemde kessin. Bu taktirde $\frac{x}{y} < 0 < \frac{r}{s}$ alınabilir. Buna göre $ry - sx = 1$ olur. $x < 0$ ve $r, s, y > 0$ olduğundan $1 = ry - sx \geq 2$ çelişkisi elde edilir. Bu çelişkidenden F nin kenarlarının \mathcal{U} üst yarı düzleminde kesişmedikleri bulunur.



Şekil 3. \mathcal{U} üst yarı düzleminde kesişen doğrular

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Γ' Modüler Alt Grubunun Alt Yörüngesel Grafları

2.1.1. Γ' Modüler Alt Grubu

Γ^2 ve Γ^3 grupları sırasıyla Γ modüler grubunun elemanlarının kareleri ve küpleri alınarak elde edilen gruplar olmak üzere

$$\Gamma^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid ab + bc + cd \equiv 0 \pmod{2} \right\} \quad (34)$$

ve

$$\Gamma^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid ab + cd \equiv 0 \pmod{3} \right\} \quad (35)$$

şeklinde tanımlanır (Rankin, 1977). Ayrıca $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ olmak üzere Γ^2 grubunun herhangi bir elemanının $\begin{pmatrix} 2a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 2c & d \end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2d \end{pmatrix}$ şeklindeki üç tipten birisi olabileceği ve Γ^3 grubunun herhangi bir elemanının da $\begin{pmatrix} 3a & b \\ c & 3d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 3b \\ 3c & d \end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şeklindeki üç tipten birisi olabileceği bilinmektedir (Güler vd., 2015; Kesicioğlu, 2011).

Çalışmamızda kullandığımız Γ' grubu ise Γ^2 ve Γ^3 gruplarının kesişimi ile elde edilen bir grup olup

$$\Gamma' = \Gamma^2 \cap \Gamma^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid ab + 3bc + cd \equiv 0 \pmod{6} \right\} \quad (36)$$

şeklinde tanımlanır (Rankin, 1977). Bu grubun herhangi bir elemanının aşağıdaki 9 tipten birisi şeklinde olabileceği kolaylıkla gösterilebilir. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\Gamma'_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 6b \\ 6c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \right\} \quad (37)$$

$$\Gamma'_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3a & 2b \\ 2c & 3d \end{pmatrix} \in \Gamma \right\} \quad (38)$$

$$\Gamma'_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 6a & b \\ c & 3d \end{pmatrix} \in \Gamma: d \not\equiv 0 \pmod{2} \right\} \quad (39)$$

$$\Gamma'_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 3a & b \\ c & 6d \end{pmatrix} \in \Gamma: a \not\equiv 0 \pmod{2} \right\} \quad (40)$$

$$\Gamma'_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ 3c & 2d \end{pmatrix} \in \Gamma: a \not\equiv 0 \pmod{2} \right\} \quad (41)$$

$$\Gamma'_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 2a & 3b \\ 3c & d \end{pmatrix} \in \Gamma: d \not\equiv 0 \pmod{2} \right\} \quad (42)$$

$$\Gamma'_7 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 2c & d \end{pmatrix} \in \Gamma: a, b, c, d \not\equiv 0 \pmod{3} \right\} \quad (43)$$

$$\Gamma'_8 = \left\{ \begin{pmatrix} 2a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma: d \not\equiv 0 \pmod{2} \text{ ve } a, b, c, d \not\equiv 0 \pmod{3} \right\} \quad (44)$$

$$\Gamma'_9 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2d \end{pmatrix} \in \Gamma: a \not\equiv 0 \pmod{2} \text{ ve } a, b, c, d \not\equiv 0 \pmod{3} \right\} \quad (45)$$

dir.

Teorem 2.1. Γ grubunun Γ' altgrubu rankı 2 olan bir serbest gruptur ve $x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere $|\Gamma: \Gamma'| = 6, \Gamma = \sum_{r=0}^5 (xy)^r \Gamma', \Gamma' = \langle xyxy^2, xy^2xy \rangle$ dir (Akdemirci, 2012).

2.1.2. Γ' Modüler Alt Grubunun $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ Üzerindeki Hareketi

Lemma 2.2.

- i. Γ' grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir.
- ii. Bir noktanın sabitleyeni sonsuz devirli bir gruptur.

İspat:

- i. Γ' grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinin transitif olabilmesi için Γ' nün $\frac{6a}{c}, \frac{a}{6c}, \frac{3a}{c}, \frac{3a}{2c}, \frac{2a}{3c}, \frac{a}{3c}, \frac{2a}{c}, \frac{a}{2c}, \frac{a}{c}$ elemanları üzerinde transitif olduğunu göstermeliyiz.

1. $\frac{a}{6c} \in \widehat{\mathbb{Q}}, (a, 6c) = 1$ olsun. Bu taktirde $(a, 36c) = 1$ olup $\exists x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ için $ay_0 - 36cx_0 = 1$ dir. Böylece $T = \begin{pmatrix} a & 6x_0 \\ 6c & y_0 \end{pmatrix} \in \Gamma'_1$ olup $T(\infty) = \frac{a}{6c}$ dir.

2. $\frac{3a}{2c} \in \widehat{\mathbb{Q}}, (3a, 2c) = 1$ olsun. Buradan $(9a, 4c) = 1$ olup $\exists x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ için $9ay_0 - 4cx_0 = 1$ dir. Böylece $\begin{pmatrix} 3a & 2x_0 \\ 2c & 3y_0 \end{pmatrix} \in \Gamma'_2$ dür.
3. $\frac{6a}{c} \in \widehat{\mathbb{Q}}, (6a, c) = 1$ olsun. Buradan $(18a, c) = 1$ eşitliği yazılabilir. Böylece $\exists x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ için $18ay_0 - cx_0 = 1$ olup $\begin{pmatrix} 6a & x_0 \\ c & 3y_0 \end{pmatrix} \in \Gamma'_3$ dür.
4. $\frac{3a}{c} \in \widehat{\mathbb{Q}}, (3a, c) = 1$ olsun. Böylece $(18a, c) = 1$ eşitliğinden $\exists x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ için $18ay_0 - cx_0 = 1$ olup $\begin{pmatrix} 3a & x_0 \\ c & 6y_0 \end{pmatrix} \in \Gamma'_4$ dür.
5. $\frac{a}{3c} \in \widehat{\mathbb{Q}}, (a, 3c) = 1$ alalım. Bu taktirde $(2a, 9c) = 1$ eşitliği yazılabilir. Böylece $\exists x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ için $2ay_0 - 9cx_0 = 1$ olup $\begin{pmatrix} a & 3x_0 \\ 3c & 2y_0 \end{pmatrix} \in \Gamma'_5$ dür.
6. $\frac{2a}{3c} \in \widehat{\mathbb{Q}}, (2a, 3c) = 1$ olsun. Bu taktirde $(2a, 9c) = 1$ olup $\exists x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ için $2ay_0 - 9cx_0 = 1$ dir. Buradan $T = \begin{pmatrix} 2a & 3x_0 \\ 3c & y_0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ matrisi elde edilir. $T \in \Gamma'$ olması için (39) dan $y_0 \not\equiv 0 \pmod{2}$ olması gerekmektedir. Eğer T matrisinde $y_0 \not\equiv 0 \pmod{2}$ ise problem yoktur. $y_0 \equiv 0 \pmod{2}$ ise $2ay_0 - 9cx_0 = 1$ in bütün çözümleri $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = 3x_0 + 2an, y = y_0 + 3cn$ şeklinde olup $n = 3$ için $\begin{pmatrix} 2a & x \\ 3c & y \end{pmatrix} \in \Gamma'_6$ elde edilir.
7. $\frac{a}{2c} \in \widehat{\mathbb{Q}}, (a, 2c) = 1$ alalım. Bu taktirde $\exists x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ için $ay_0 - 4cx_0 = 1$ olup $T = \begin{pmatrix} a & 2x_0 \\ 2c & y_0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ matrisi elde edilir. $T \in \Gamma'$ olması için (40) dan $x_0 \not\equiv 0 \pmod{3}$ ve $y_0 \not\equiv 0 \pmod{3}$ olması gerekmektedir. T matrisinde $x_0 \not\equiv 0 \pmod{3}$ ve $y_0 \not\equiv 0 \pmod{3}$ ise problem yoktur. Eğer $x_0 \not\equiv 0 \pmod{3}$ ve $y_0 \not\equiv 0 \pmod{3}$ şartları sağlanmıyorsa $ay_0 - 4cx_0 = 1$ in bütün çözümleri $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = 2x_0 + an, y = y_0 + 2cn$ olduğundan uygun n nin uygun değerleri için $\begin{pmatrix} a & x \\ 2c & y \end{pmatrix} \in \Gamma'_7$ elde edilir.

8. $\frac{2a}{c} \in \widehat{\mathbb{Q}}, (2a, c) = 1$ alalım. Bu taktirde $\exists x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ için $2ay_0 - cx_0 = 1$ olup $T = \begin{pmatrix} 2a & x_0 \\ c & y_0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ matrisi elde edilir. $T \in \Gamma'$ olması için (41) den $x_0 \not\equiv 0 \pmod{3}, y_0 \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $y_0 \not\equiv 0 \pmod{3}$ olması gerekmektedir. T matrisinde $x_0 \not\equiv 0 \pmod{3}, y_0 \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $y_0 \not\equiv 0 \pmod{3}$ ise problem yoktur. Eğer $x_0 \not\equiv 0 \pmod{3}, y_0 \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $y_0 \equiv 0 \pmod{3}$ şartları sağlanmıyorsa $2ay_0 - cx_0 = 1$ in bütün çözümleri $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = x_0 + 2an, y = y_0 + cn$ olduğundan uygun n nin uygun değerleri için $\begin{pmatrix} 2a & x \\ c & y \end{pmatrix} \in \Gamma'_8$ elde edilir.

9. $\frac{a}{c} \in \widehat{\mathbb{Q}}, (a, c) = 1$ olsun. Bu taktirde $(2a, c) = 1$ olup $\exists x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ için $2ay_0 - cx_0 = 1$ dir. Buradan $T = \begin{pmatrix} a & x_0 \\ c & 2y_0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ elde edilir. $T \in \Gamma'$ olması için (42) den $x_0 \not\equiv 0 \pmod{3}$ ve $y_0 \not\equiv 0 \pmod{3}$ olması gerekmektedir. T matrisinde $x_0 \not\equiv 0 \pmod{3}$ ve $y_0 \not\equiv 0 \pmod{3}$ ise problem yoktur. Eğer T matrisinde $x_0 \not\equiv 0 \pmod{3}$ ve $y_0 \equiv 0 \pmod{3}$ şartları sağlanmıyorsa $2ay_0 - cx_0 = 1$ in bütün çözümleri $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = x_0 + an, y = 2y_0 + cn$ olduğundan n nin uygun değerleri için $\begin{pmatrix} a & x \\ c & y \end{pmatrix} \in \Gamma'_9$ elde edilir.

ii. Γ' grubu $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif hareket ettiğinden $\widehat{\mathbb{Q}}$ daki herhangi iki noktanın sabitleyeni Γ' grubunda eşleniktirler. Bu yüzden ∞ un sabitleyeni olan Γ'_∞ grubunu göz önüne almak yeterlidir. Buradan $\Gamma'_\infty = \langle \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ olduğu açıktır. Gerçekten $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eşitliğinden $a = 1, c = 0, d = 1$ elde edilir. Ayrıca $ab + 3bc + cd \equiv 0 \pmod{6}$ dan $b \equiv 0 \pmod{6}$ dır. Bu ise $\Gamma'_\infty = \langle \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla Γ'_∞ grubu sonsuz devirli bir gruptur.

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\Gamma'_0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma' : c \equiv 0 \pmod{n} \right\}$ olsun. Bu taktirde $\Gamma'_0(n), \Gamma'$ grubunun bir alt grubudur. Burada $n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma'_\infty(n) \leq \Gamma'_0(n) \leq \Gamma'(n)$ olduğu açıktır. Ayrıca $n > 1$ ise $\Gamma'_\infty(n) \leq \Gamma'_0(n) \leq \Gamma'(n)$ dir. Gerçekten:

$$n \equiv 0(\text{mod } 6) \text{ ise } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n+1 & n+2 \end{pmatrix} \in \Gamma' \setminus \Gamma'_0(n) \quad (46)$$

$$n \equiv 1(\text{mod } 6) \text{ ise } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ n+2 & 3n+7 \end{pmatrix} \in \Gamma' \setminus \Gamma'_0(n) \quad (47)$$

$$n \equiv 2(\text{mod } 6) \text{ ise } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ n+3 & n+2 \end{pmatrix} \in \Gamma' \setminus \Gamma'_0(n) \quad (48)$$

$$n \equiv 3(\text{mod } 6) \text{ ise } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ n+2 & n+1 \end{pmatrix} \in \Gamma' \setminus \Gamma'_0(n) \quad (49)$$

$$n \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ ise } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n+3 & n+4 \end{pmatrix} \in \Gamma' \setminus \Gamma'_0(n) \quad (50)$$

$$n \equiv 5(\text{mod } 6) \text{ ise } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n+2 & n+3 \end{pmatrix} \in \Gamma' \setminus \Gamma'_0(n) \quad (51)$$

dir.

Teorem 2.3. $|\Gamma_0(n):\Gamma'_0(n)| = 6$ dir.

Bu teoremin ispatını vermeden önce bazı yardımcı lemmaları ispatlayalım.

Lemma 2.4. Her $K = \begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$ için $\exists m \in \mathbb{Z}$ vardır öyle ki $K_m := \begin{pmatrix} a - 2cnm & b - 2dm \\ cn & d \end{pmatrix}, \Gamma_0^3(n)$ nin elemanıdır.

İspat: $ad - bcn = 1$ olduğundan her $m \in \mathbb{Z}$ için $K_m \in \Gamma$ dir. $m \in \mathbb{Z}$ yi, $K_m \in \Gamma^3$ olacak biçimde seçebileceğimizi cn ve d nin \mathbb{Z}_3 deki olası tüm durumlarını göz önüne alarak gösterebiliriz.

1. $cn \equiv 0(\text{mod } 3)$ olsun. Bu taktirde $K_m \in \Gamma^3 \Leftrightarrow b - 2dm \equiv 0(\text{mod } 3)$ olmalıdır. Buradan $2dm \equiv b(\text{mod } 3)$ ve $d \not\equiv 0(\text{mod } 3)$ olduğundan $2m \equiv d^{-1}b(\text{mod } 3)$ olup $m \equiv 2d^{-1}b(\text{mod } 3)$ elde edilir.

2. $d \equiv 0(\text{mod } 3)$ olsun. Bu taktirde $K_m \in \Gamma^3 \Leftrightarrow a - 2cnm \equiv 0(\text{mod } 3)$ dür. Buradan $(cn)m \equiv 2a(\text{mod } 3)$ ve $cn \not\equiv 0(\text{mod } 3)$ olduğundan $m \equiv (cn)^{-1}2a(\text{mod } 3)$ elde edilir.

3. $cn \not\equiv 0(\text{mod } 3)$ ve $d \not\equiv 0(\text{mod } 3)$ olsun.

a) $cn \equiv d \equiv 1(\text{mod } 3)$ olsun. $ad - bcn = 1$ olduğundan $a \equiv b + 1(\text{mod } 3)$ dür. $K_m \in \Gamma^3$ ise $(a - 2cnm)(b - 2dm) \equiv 2(\text{mod } 3)$ olmalıdır. Buradan $(b + 1 - 2m)(b - 2m) \equiv 2(\text{mod } 3)$ elde edilir. Bu taktirde

i. $b \equiv 0(\text{mod } 3)$ ise $(1 - 2m)(-2m) \equiv 2(\text{mod } 3)$ olup $(1 + m)m \equiv 2(\text{mod } 3)$ den $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ bulunur.

ii. $b \equiv 1(\text{mod } 3)$ ise $(2 - 2m)(1 - 2m) \equiv 2(\text{mod } 3)$ olup $(1 - m)(1 + m) \equiv 2(\text{mod } 3) \Rightarrow 1 - m^2 \equiv 2(\text{mod } 3)$ dür. Böylece $m^2 \equiv 0(\text{mod } 3)$ den $m \equiv 0(\text{mod } 3)$ bulunur.

iii. $b \equiv 2(\text{mod } 3)$ ise $(-2m)(2 - 2m) \equiv 2(\text{mod } 3)$ olup $m(2 + m) \equiv 2(\text{mod } 3)$ den $m \equiv 2(\text{mod } 3)$ bulunur.

b) $cn \equiv d \equiv 2(\text{mod } 3)$ olsun. Bu taktirde $ad - bcn = 1$ den $a \equiv b + 2(\text{mod } 3)$ elde edilir. $K_m \in \Gamma^3$ ise $(a - 2cnm)(b - 2dm) \equiv 2(\text{mod } 3)$ olmalıdır. Buradan $(b + 2 - 2m)(b - 4m) \equiv 2(\text{mod } 3) \Rightarrow (b + 2 + 2m)(b + 2m) \equiv 2(\text{mod } 3)$ elde edilir. Bu taktirde

i. $b \equiv 0(\text{mod } 3)$ ise $2(1 + m)2m \equiv 2(\text{mod } 3)$ den $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ bulunur.

ii. $b \equiv 1(\text{mod } 3)$ ise $2m(1 + 2m) \equiv 2(\text{mod } 3)$ den $m(1 + 2m) \equiv 1(\text{mod } 3)$ olup $m \equiv 2(\text{mod } 3)$ bulunur.

iii. $b \equiv 2(\text{mod } 3)$ ise $(1 + 2m)(2 + 2m) \equiv 2(\text{mod } 3) \Rightarrow (1 + 2m)(1 + m) \equiv 1(\text{mod } 3) \Rightarrow m \equiv 0(\text{mod } 3)$ veya $m \equiv 2(\text{mod } 3)$ bulunur.

c) $cn \equiv 1 \pmod{3}$ ve $d \equiv 2 \pmod{3}$ olsun. Bu taktirde $ad - bcn = 1$ olduğundan $b \equiv 2a + 2 \pmod{3}$ elde edilir. $K_m \in \Gamma^3$ ise $(a - 2cnm)(b - 2dm) \equiv 2 \pmod{3}$ olmalıdır. Buna göre $(a - 2cnm)(2a + 2 - 2dm) \equiv 1 \pmod{3}$ den $(a - 2m)(2a + 2 + 2m) \equiv 1 \pmod{3}$ elde edilir. Bu taktirde

i. $a \equiv 0 \pmod{3}$ ise $(-2m)(2 + 2m) \equiv 1 \pmod{3}$ olup $m \equiv 1 \pmod{3}$ bulunur.

ii. $a \equiv 1 \pmod{3}$ ise $(1 - 2m)(1 + 2m) \equiv 1 \pmod{3}$ olup $m \equiv 0 \pmod{3}$ bulunur.

iii. $a \equiv 2 \pmod{3}$ ise $(2 - 2m)(2m) \equiv 1 \pmod{3}$ olup $m \equiv 2 \pmod{3}$ bulunur.

d) $cn \equiv 2 \pmod{3}$ ve $d \equiv 1 \pmod{3}$ olsun. Bu taktirde $ad - bcn = 1$ olduğundan $a \equiv 2b + 1 \pmod{3}$ bulunur. $K_m \in \Gamma^3$ ise $(a - 2cnm)(b - 2dm) \equiv 2 \pmod{3}$ olmalıdır. Buna göre $(2b + 1 + 2m)(b + m) \equiv 1 \pmod{3}$ elde edilir. Bu taktirde

i. $b \equiv 0 \pmod{3}$ ise $(1 + 2m)m \equiv 1 \pmod{3}$ olduğundan $m \equiv 2 \pmod{3}$ bulunur.

ii. $b \equiv 1 \pmod{3}$ ise $2m(1 + m) \equiv 1 \pmod{3}$ olduğundan $m \equiv 1 \pmod{3}$ bulunur.

iii. $b \equiv 2 \pmod{3}$ ise $(2 + 2m)(2 + m) \equiv 1 \pmod{3}$ olduğundan $m \equiv 0 \pmod{3}$ bulunur.

Lemma 2.5. $\Gamma_0(n) \subset \Gamma_0^2(n), \Gamma_0^3(n)$ dir. Yani her $\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$ için $\exists A \in \Gamma_0^2(n)$ ve $\exists B \in \Gamma_0^3(n)$ vardır öyle ki $\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} = A.B$ dir.

İspat: $K = \begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$ olsun. Lemma 2.4. den bir $m \in \mathbb{Z}$ için $B = K_m = \begin{pmatrix} a - 2cnm & b - 2dm \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^3(n)$ vardır. Ayrıca her $m \in \mathbb{Z}$ için $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0^2(n)$ dir. Böylece $A.B = \begin{pmatrix} 1 & 2m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - 2cnm & b - 2dm \\ cn & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix}$ dir.

Sonuç 2.6. $\Gamma_0(n) = \Gamma_0^2(n) \cdot \Gamma_0^3(n)$ dir.

İspat: $\Gamma_0^2(n) \cdot \Gamma_0^3(n) \subset \Gamma_0(n)$ olduğu açıktır. Ayrıca Lemma 2.5. den $\Gamma_0(n) \subset \Gamma_0^2(n) \cdot \Gamma_0^3(n)$ olup sonuç açıktır.

Lemma 2.7. $\forall n \geq 1$ için $\Gamma'_0(n) = \Gamma_0^2(n) \cap \Gamma_0^3(n)$ dir.

İspat: $\Gamma'_0(n) \subset \Gamma_0^2(n)$ ve $\Gamma'_0(n) \subset \Gamma_0^3(n)$ olduğundan $\Gamma'_0(n) \subset \Gamma_0^2(n) \cap \Gamma_0^3(n)$ dir. Ayrıca $A \in \Gamma_0^2(n) \cap \Gamma_0^3(n)$ ise $A \in \Gamma'_0(n)$ olup $\Gamma_0^2(n) \cap \Gamma_0^3(n) \subset \Gamma'_0(n)$ bulunur. Dolayısıyla $\Gamma'_0(n) = \Gamma_0^2(n) \cdot \Gamma_0^3(n)$ elde edilir.

Teorem 2.8. G bir grup, $H, K \leq G$ ve $HK = G$ ve $[G:K]$ sonlu olsun. Bu taktirde $|G:H \cap K| = |G:H| \cdot |G:K|$ dir (Hungerford, 1974).

Şimdi Teorem 2.3. ü ispatlayabiliriz.

Teorem 2.3. ün İspatı: $|\Gamma_0(n):\Gamma_0^2(n)| = 2, |\Gamma_0(n):\Gamma_0^3(n)| = 3$ olduğundan ve Sonuç 2.6., Lemma 2.7. ve Teorem 2.8. den kolaylıkla elde edilir.

Teorem 1.24. den biliyoruz ki Γ' grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi imprimitiftir. Şimdi " \approx " ile $\Gamma'_0(n)$ grubuyla $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerine indirgenmiş olan $\Gamma' - invariant$ denklik bağıntısını gösterelim.

$v = \frac{r}{s}$ ve $w = \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olsun. Γ' grubunun transitifliğinden $v = g(\infty)$ ve $w = g'(\infty)$

olacak şekilde $g, g' \in \Gamma'$ vardır. Bu taktirde $g = \begin{pmatrix} r & * \\ s & * \end{pmatrix}, g' = \begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix}$ dir. Böylece Teorem 1.24. den

$$v \approx w \Leftrightarrow g^{-1}g' \in \Gamma'_0(n) \tag{52}$$

olduğundan

$$v \approx w \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \pmod{n} \quad (53)$$

elde edilir.

Açıkça ∞ bloğunu $[\infty]$ ile gösterirsek

$$[\infty] = \left\{ \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} \mid y \equiv 0 \pmod{n} \right\} \quad (54)$$

dir. Bu durumda blokların sayısı $\psi(n) = |\Gamma': \Gamma'_0(n)|$ 'dir.

2.1.3. Γ' Modüler Alt Grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları

Şimdi Γ' 'nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi için alt yörüngesel grafları inceleyelim. Γ' , $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif hareket ettiğinden her bir alt yörünge bir $v \in \widehat{\mathbb{Q}}$ için (∞, v) ikilisini içerir. $n \geq 0$ ve $(u, n) = 1$ olmak üzere $v = \frac{u}{n}$ yazarsak bu alt yörüngeyi $O_{u,n}$ ile ve buna karşılık gelen $G(\infty, v)$ alt yörüngesel grafini da $G_{u,n}$ ile göstereceğiz.

Eğer $v = \infty$ ise bu $G_{1,0} = G_{-1,0}$ aşikar alt yörüngesel grafıdır. Bundan dolayı $v \in \mathbb{Q}$ olduğunu farz edebiliriz.

Lemma 2.9. $G_{u,n} = G_{u',n'} \Leftrightarrow n = n'$ ve $u \equiv u' \pmod{6n}$ dir.

İspat: $G_{u,n} = G_{u',n'} \Leftrightarrow O\left(\infty, \frac{u}{n}\right) = O\left(\infty, \frac{u'}{n'}\right) \Leftrightarrow \exists T \in \Gamma': T(\infty) = \infty$ ve $T\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{u'}{n'}$ tür. $T(\infty) = \infty$ olduğundan $T \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \Gamma'_\infty$ dir. Buradan $T = \begin{pmatrix} 1 & 6k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir. Ayrıca $T\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{u'}{n'}$ olduğundan $\begin{pmatrix} 1 & 6k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ n' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u + 6kn \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ n' \end{pmatrix}$ olup $(u', n') = 1$ olduğundan $n = n'$ ve $u' = u + 6kn \Rightarrow u' \equiv u \pmod{6n}$ dir. Böylece $G_{u,n} = G_{u',n'} \Leftrightarrow n = n'$ ve $u \equiv u' \pmod{6n}$ ' dir.

Sonuç 2.10. n keyfi sabit olmak üzere $6\Phi(n)$ tane farklı $G_{u,n}$ alt yörüngesel grafi vardır.

Teorem 2.11. $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in G_{u,n} \Leftrightarrow$

1. $r \equiv 0 \pmod{6}$ ise ya
 - a. $x \equiv ur \pmod{n}, y \equiv us \pmod{3n}, y \not\equiv us \pmod{2n}$ ve $ry - sx = n$ ya da
 - b. $x \equiv -ur \pmod{n}, y \equiv -us \pmod{3n}, y \not\equiv -us \pmod{2n}$ ve $ry - sx = -n$
2. $s \equiv 0 \pmod{6}$ ise ya
 - a. $x \equiv ur \pmod{6n}, y \equiv us \pmod{n}$ ve $ry - sx = n$ ya da
 - b. $x \equiv -ur \pmod{6n}, y \equiv -us \pmod{n}$ ve $ry - sx = -n$
3. $r \not\equiv 0 \pmod{6}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{6}$ olsun. Bu taktirde
 - i. $r \not\equiv 0 \pmod{2}, r \equiv 0 \pmod{3}, s \equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{3}$ ise ya
 - a. $x \equiv ur \pmod{2n}, y \equiv us \pmod{3n}$, ve $ry - sx = n$ ya da
 - b. $x \equiv -ur \pmod{2n}, y \equiv -us \pmod{3n}$ ve $ry - sx = -n$
 - ii. $r \not\equiv 0 \pmod{2}, r \equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{3}$ ise ya
 - a. $x \equiv ur \pmod{n}, y \equiv us \pmod{6n}$ ve $ry - sx = n$ ya da
 - b. $x \equiv -ur \pmod{n}, y \equiv -us \pmod{6n}$ ve $ry - sx = -n$
 - iii. $r \equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \equiv 0 \pmod{3}$ ise ya
 - a. $x \equiv ur \pmod{3n}, y \equiv us \pmod{n}, y \not\equiv us \pmod{2n}$ ve $ry - sx = n$ ya da
 - b. $x \equiv -ur \pmod{3n}, y \equiv -us \pmod{n}, y \not\equiv -us \pmod{2n}$ ve $ry - sx = -n$
 - iv. $r \equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{3}$ ise ya
 - a. $x \equiv ur \pmod{n}, x \not\equiv ur \pmod{3n}, y \equiv us \pmod{n}, y \not\equiv us \pmod{2n}, y \not\equiv us \pmod{3n}$ ve $ry - sx = n$ ya da
 - b. $x \equiv -ur \pmod{n}, x \not\equiv -ur \pmod{3n}, y \equiv -us \pmod{n}, y \not\equiv -us \pmod{2n}, y \not\equiv -us \pmod{3n}$ ve $ry - sx = -n$
 - v. $r \not\equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \equiv 0 \pmod{3}$ ise ya
 - a. $x \equiv ur \pmod{3n}, y \equiv us \pmod{2n}$ ve $ry - sx = n$ ya da
 - b. $x \equiv -ur \pmod{3n}, y \equiv -us \pmod{2n}$ ve $ry - sx = -n$

- vi. $r \not\equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{3}$ ise ya
- a. $x \equiv ur \pmod{2n}, x \not\equiv ur \pmod{3n}, y \equiv us \pmod{n}, y \not\equiv us \pmod{3n}$ ve $ry - sx = n$ ya da
- b. $x \equiv -ur \pmod{2n}, x \not\equiv -ur \pmod{3n}, y \equiv -us \pmod{n}, y \not\equiv -us \pmod{3n}$ ve $ry - sx = -n$

- vii. $r \not\equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{3}$ ise ya
- a. $x \equiv ur \pmod{n}, x \not\equiv ur \pmod{3n}, y \equiv us \pmod{2n}, y \not\equiv us \pmod{3n}$ ve $ry - sx = n$ ya da
- b. $x \equiv -ur \pmod{n}, x \not\equiv -ur \pmod{3n}, y \equiv -us \pmod{2n}, y \not\equiv -us \pmod{3n}$ ve $ry - sx = -n$

dir.

İspat: $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in G_{u,n}$ olsun.

1. $r \equiv 0 \pmod{6}$ olduğunu kabul edelim. Genellikle bir şey kaybetmeden $\frac{r}{s} < \frac{x}{y}$ olduğunu farz edebiliriz. Bu taktirde $ry - sx < 0$ olur. $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in G_{u,n}$ olduğundan $\exists T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'$ vardır öyle ki $T \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix}$ 'dir. $ry - sx < 0$ olduğundan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix} r & -x \\ s & -y \end{pmatrix}$ dir. Eğer $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ ise $a = -r, c = -s, au + bn = x, cu + dn = y$ dir. $r \equiv 0 \pmod{6}$ olduğundan $a \equiv 0 \pmod{6}$ olduğu açıktır. $T \in \Gamma'$ olduğundan $d \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $d \equiv 0 \pmod{3}$ elde edilir. Böylece $x \equiv -ur \pmod{n}, y \equiv -us \pmod{3n}, y \not\equiv -us \pmod{2n}$ elde edilir. Ayrıca determinantlar göz önüne alınırsa $ry - sx = -n$ olduğu kolayca görülebilir.

Tersine $r \equiv 0 \pmod{6}$ ve $x \equiv -ur \pmod{n}, y \equiv -us \pmod{3n}, y \not\equiv -us \pmod{2n}, ry - sx = -n$ olsun. Bu taktirde $\exists k, t \in \mathbb{Z}: x = -ur + kn, y = -us + 3tn$ 'dir. Buradan $\begin{pmatrix} -r & k \\ -s & 3t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ dir. $r \equiv 0 \pmod{6}$ ve $y \not\equiv -us \pmod{2n}$ ise $t \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $-3rt + sk = 1$ olduğundan $\begin{pmatrix} -r & k \\ -s & 3t \end{pmatrix} \in \Gamma'$ dür.

2. $s \equiv 0 \pmod{6}$ olsun. 1) deki gibi $T \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ olacak şekilde $T \in \Gamma'$ vardır.

Buradan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ ise $a = -r, c = -s, au + bn = x, cu + dn = y$ dir. $s \equiv 0 \pmod{6}$ ise $c \equiv 0 \pmod{6}$ dir. $T \in \Gamma'$ olduğundan $b \equiv 0 \pmod{6}$ dir. Böylece $x \equiv -ur \pmod{6n}, y \equiv -us \pmod{n}$ dir. Ayrıca determinantlar göz önüne alınırsa $ry - sx = -n$ olduğu görülebilir.

Tersine $s \equiv 0 \pmod{6}$ ve $x \equiv -ur \pmod{6n}, y \equiv -us \pmod{n}, ry - sx = -n$ olsun. Bu taktirde $\exists k, t \in \mathbb{Z}: x = -ur + 6kn, y = -us + tn$ dir. Buradan $\begin{pmatrix} -r & 6k \\ -s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ dir. $s \equiv 0 \pmod{6}$ ve $-rt + 6sk = 1$ olduğundan $\begin{pmatrix} -r & 6k \\ -s & t \end{pmatrix} \in \Gamma'$ dir.

3. $r \not\equiv 0 \pmod{6}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{6}$ olduğunu kabul edelim.

i. $r \not\equiv 0 \pmod{2}, r \equiv 0 \pmod{3}, s \equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{3}$ olsun. Bu taktirde $T \in \Gamma'$ için $T \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ dir. Yani $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ dir. Buradan $a = -r, c = -s, au + bn = x, cu + dn = y$ dir. $T \in \Gamma'$ olduğundan $b \equiv 0 \pmod{2}$ ve $d \equiv 0 \pmod{3}$ tür. Böylece $x \equiv -ur \pmod{2n}, y \equiv -us \pmod{3n}$ ve $ry - sx = -n$ elde edilir.

Tersine $r \not\equiv 0 \pmod{2}, r \equiv 0 \pmod{3}, s \equiv 0 \pmod{2}, s \not\equiv 0 \pmod{3}$ ve $x \equiv -ur \pmod{2n}, y \equiv -us \pmod{3n}$ ve $ry - sx = -n$ olsun. Bu taktirde $\exists k, t \in \mathbb{Z}: x = -ur + 2kn, y = -us + 3tn$ dir. Böylece $\begin{pmatrix} -r & 2k \\ -s & 3t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ dir. $r \equiv 0 \pmod{3}, s \equiv 0 \pmod{2}$ ve $-3rt + 2ks = 1$ olduğundan $\begin{pmatrix} -r & 2k \\ -s & 3t \end{pmatrix} \in \Gamma'$ olur.

ii. $r \not\equiv 0 \pmod{2}, r \equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{3}$ olsun. Bu taktirde $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'$ için $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ dir. Buradan $a = -r, c = -s, au + bn = x, cu + dn = y$ elde edilir. $T \in \Gamma'$ olduğundan $d \equiv 0 \pmod{6}$ dir. Böylece $x \equiv -ur \pmod{n}, y \equiv -us \pmod{6n}$ ve $ry - sx = -n$ bulunur.

Tersine $r \not\equiv 0 \pmod{2}, r \equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}, s \not\equiv 0 \pmod{3}$ ve $x \equiv$

$-ur \pmod{n}, y \equiv -us \pmod{6n}, ry - sx = -n$ olsun. Bu taktirde $\exists k, t \in \mathbb{Z}: x = -ur + kn, y = -us + 6tn$ olur. Böylece $\begin{pmatrix} -r & k \\ -s & 6t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ dir. $r \equiv 0 \pmod{3}, r \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $-6rt + ks = 1$ olduğundan $\begin{pmatrix} -r & k \\ -s & 6t \end{pmatrix} \in \Gamma'$ dür.

iii. $r \equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \equiv 0 \pmod{3}$ olsun. $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'$ için $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ olup $a = -r, c = -s, au + bn = x, cu + dn = y$ dir. $T \in \Gamma'$ olduğundan $b \equiv 0 \pmod{3}$ ve $d \not\equiv 0 \pmod{2}$ dir. Böylece $x \equiv -ur \pmod{3n}, y \equiv -us \pmod{n}, y \not\equiv -us \pmod{2n}$ ve $ry - sx = -n$ elde edilir.

Tersine $r \equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}, s \equiv 0 \pmod{3}$ ve $x \equiv -ur \pmod{3n}, y \equiv -us \pmod{n}, y \not\equiv -us \pmod{2n}, ry - sx = -n$ olsun. Bu taktirde $\exists k, t \in \mathbb{Z}: x = -ur + 3kn, y = -us + tn$ olur. Böylece $\begin{pmatrix} -r & 3k \\ -s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ dir. $r \equiv 0 \pmod{2}, s \equiv 0 \pmod{3}, t \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $-rt + ks - st = 1$ olduğundan $\begin{pmatrix} -r & 3k \\ -s & t \end{pmatrix} \in \Gamma'$ dür.

iv. $r \equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{3}$ olsun. Bu taktirde $\exists T \in \Gamma'$ için $T \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ dir. Buradan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ ise $a = -r, c = -s, au + bn = x, cu + dn = y$ dir. $T \in \Gamma'$ olduğundan $d \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $a, b, c, d \not\equiv 0 \pmod{3}$ tür. Böylece $x \equiv -ur \pmod{n}, x \not\equiv -ur \pmod{3n}, y \equiv -us \pmod{n}, y \not\equiv -us \pmod{2n}, y \not\equiv -us \pmod{3n}$ ve $ry - sx = -n$ elde edilir.

Tersine $r \equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}, s \not\equiv 0 \pmod{3}$ ve $x \equiv -ur \pmod{n}, x \not\equiv -ur \pmod{3n}, y \equiv -us \pmod{n}, y \not\equiv -us \pmod{2n}, y \not\equiv -us \pmod{3n}, ry - sx = -n$ olsun. Bu taktirde $\exists k, t \in \mathbb{Z}: x = -ur + kn, y = -us + tn$ dir. Buradan $\begin{pmatrix} -r & k \\ -s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ dir. $x \not\equiv -ur \pmod{3n}$ olduğundan $k \not\equiv 0 \pmod{3}$ ve $y \not\equiv -us \pmod{2n}, y \not\equiv -us \pmod{3n}$ olduğundan $t \not\equiv 0 \pmod{2}, t \not\equiv 0 \pmod{3}$ tür. Ayrıca $r, s \not\equiv 0 \pmod{3}$ ve $r \equiv 0 \pmod{2}$ olduğundan $\begin{pmatrix} -r & k \\ -s & t \end{pmatrix} \in \Gamma'$ dür.

v. $r \not\equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \equiv 0 \pmod{3}$ olsun. $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'$ için $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ dir. Buradan $a = -r, c = -s, au + bn = x, cu + dn = y$ dir. $T \in \Gamma'$ olduğundan $d \equiv 0 \pmod{2}$ ve $b \equiv 0 \pmod{3}$ dir. Böylece $x \equiv -ur \pmod{3n}, y \equiv -us \pmod{2n}$ ve $ry - sx = -n$ elde edilir.

Tersine $r \not\equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}, s \equiv 0 \pmod{3}$ ve $x \equiv -ur \pmod{3n}, y \equiv -us \pmod{2n}, ry - sx = -n$ olsun. Bu taktirde $\exists k, t \in \mathbb{Z}: x = -ur + 3kn, y = -us + 2tn$ dir. Böylece $\begin{pmatrix} -r & 3k \\ -s & 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ dir. $r \not\equiv 0 \pmod{2}, s \equiv 0 \pmod{3}$ ve $-2rt + 3ks = 1$ olduğundan $\begin{pmatrix} -r & 3k \\ -s & 2t \end{pmatrix} \in \Gamma'$ dür.

vi. $r \not\equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{3}$ olsun. $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'$ için $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & -x \\ s & -y \end{pmatrix}$ dir. Buradan $a = -r, c = -s, au + bn = x, cu + dn = y$ dir. $T \in \Gamma'$ olduğundan $b \equiv 0 \pmod{2}$ ve $a, b, c, d \not\equiv 0 \pmod{3}$ tür. Böylece $x \equiv -ur \pmod{2n}, x \not\equiv -ur \pmod{3n}, y \equiv -us \pmod{n}, y \not\equiv -us \pmod{3n}$ ve $ry - sx = -n$ elde edilir.

Tersine $r \not\equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \equiv 0 \pmod{2}, s \not\equiv 0 \pmod{3}$ ve $x \equiv -ur \pmod{2n}, x \not\equiv -ur \pmod{3n}, y \equiv -us \pmod{n}, y \not\equiv -us \pmod{3n}, ry - sx = -n$ olsun. Bu taktirde $\exists k, t \in \mathbb{Z}: x = -ur + 2kn, y = -us + tn$ olur. Böylece $\begin{pmatrix} -r & 2k \\ -s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ dir. $s \equiv 0 \pmod{2}, r, s, k, t \not\equiv 0 \pmod{3}$ ve $-rt + 2ks = 1$ olduğundan $\begin{pmatrix} -r & 2k \\ -s & t \end{pmatrix} \in \Gamma'$ dür.

vii. $r \not\equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{3}$ olsun. Yukarıdakilere benzer şekilde $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'$ için $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ dir. Buradan $a = -r, c = -s, au + bn = x, cu + dn = y$ dir. $T \in \Gamma'$ olduğundan $a \not\equiv 0 \pmod{2}, d \equiv 0 \pmod{2}$ ve $a, b, c, d \not\equiv 0 \pmod{3}$ tür. Böylece $x \equiv -ur \pmod{n}, x \not\equiv -ur \pmod{3n}, y \equiv -us \pmod{2n}, y \not\equiv -us \pmod{3n}$ ve $ry - sx = -n$ elde edilir.

Tersine $r \not\equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}, s \not\equiv 0 \pmod{3}$ ve $x \equiv -ur \pmod{n}, x \not\equiv -ur \pmod{3n}, y \equiv -us \pmod{2n}, y \not\equiv -us \pmod{3n}, ry - sx = -n$ olsun. Bu taktirde $\exists k, t \in \mathbb{Z}: x = -ur + kn, y = -us + 2tn$ olur. Böylece $\begin{pmatrix} -r & k \\ -s & 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ dir. $r \not\equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{3}, k \not\equiv 0 \pmod{3}, t \not\equiv 0 \pmod{3}$ ve $-2rt + ks = 1$ olduğundan $\begin{pmatrix} -r & k \\ -s & 2t \end{pmatrix} \in \Gamma'$ olur.

Sonuç 2.12. $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in F_{u,n} \Leftrightarrow$

1. $r \equiv 0 \pmod{6}$ ise ya

a. $x \equiv ur \pmod{n}, y \equiv us \pmod{3n}, y \not\equiv us \pmod{2n}$ ve $ry - sx = n$ ya da

b. $x \equiv -ur \pmod{n}, y \equiv -us \pmod{3n}, y \not\equiv -us \pmod{2n}$ ve $ry - sx = -n$

2. $s \equiv 0 \pmod{6}$ ise ya

a. $x \equiv ur \pmod{6n}$ ve $ry - sx = n$ ya da

b. $x \equiv -ur \pmod{6n}$ ve $ry - sx = -n$

3. $r \not\equiv 0 \pmod{6}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{6}$ olsun. Bu taktirde

i. $r \not\equiv 0 \pmod{2}, r \equiv 0 \pmod{3}, s \equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{3}$ ise ya

a. $x \equiv ur \pmod{2n}, y \equiv us \pmod{3n}$, ve $ry - sx = n$ ya da

b. $x \equiv -ur \pmod{2n}, y \equiv -us \pmod{3n}$ ve $ry - sx = -n$

ii. $r \not\equiv 0 \pmod{2}, r \equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{3}$ ise ya

a. $x \equiv ur \pmod{n}, y \equiv us \pmod{6n}$ ve $ry - sx = n$ ya da

b. $x \equiv -ur \pmod{n}, y \equiv -us \pmod{6n}$ ve $ry - sx = -n$

iii. $r \equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \equiv 0 \pmod{3}$ ise ya

a. $x \equiv ur \pmod{3n}, y \not\equiv us \pmod{2n}$ ve $ry - sx = n$ ya da

b. $x \equiv -ur \pmod{3n}, y \not\equiv -us \pmod{2n}$ ve $ry - sx = -n$

iv. $r \equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{3}$ ise ya

a. $x \equiv ur \pmod{n}, x \not\equiv ur \pmod{3n}, y \not\equiv us \pmod{2n}, y \not\equiv us \pmod{3n}$ ve $ry -$

$sx = n$ ya da

b. $x \equiv -ur \pmod{n}$, $x \not\equiv -ur \pmod{3n}$, $y \equiv -us \pmod{2n}$, $y \not\equiv -us \pmod{3n}$ ve $ry - sx = -n$

v. $r \not\equiv 0 \pmod{2}$, $r \not\equiv 0 \pmod{3}$, $s \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \equiv 0 \pmod{3}$ ise ya

a. $x \equiv ur \pmod{3n}$, $y \equiv us \pmod{2n}$ ve $ry - sx = n$ ya da

b. $x \equiv -ur \pmod{3n}$, $y \equiv -us \pmod{2n}$ ve $ry - sx = -n$

vi. $r \not\equiv 0 \pmod{2}$, $r \not\equiv 0 \pmod{3}$, $s \equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{3}$ ise ya

a. $x \equiv ur \pmod{2n}$, $x \not\equiv ur \pmod{3n}$, $y \equiv us \pmod{3n}$ ve $ry - sx = n$ ya da

b. $x \equiv -ur \pmod{2n}$, $x \not\equiv -ur \pmod{3n}$, $y \equiv -us \pmod{3n}$ ve $ry - sx = -n$

vii. $r \not\equiv 0 \pmod{2}$, $r \not\equiv 0 \pmod{3}$, $s \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{3}$ ise ya

a. $x \equiv ur \pmod{n}$, $x \not\equiv ur \pmod{3n}$, $y \equiv us \pmod{2n}$, $y \not\equiv us \pmod{3n}$ ve $ry - sx = n$ ya da

b. $x \equiv -ur \pmod{n}$, $x \not\equiv -ur \pmod{3n}$, $y \equiv -us \pmod{2n}$, $y \not\equiv -us \pmod{3n}$ ve $ry - sx = -n$

dir.

Teorem 2.13. $G_{u,n}$ de bütün graflar eşleşmiştir.

İspat: Γ' transitif olduğundan $G\left(\infty, \frac{u}{n}\right) \neq G\left(\frac{u}{n}, \infty\right)$ olduğunu göstermeliyiz. Yani

$T\left(\infty, \frac{u}{n}\right) \neq T\left(\frac{u}{n}, \infty\right)$ olacak şekilde bir $T \in \Gamma'$ yoktur. Tersini varsayalım ve $T(\infty) = \frac{u}{n}$ ve

$T\left(\frac{u}{n}\right) = \infty$ olacak şekilde bir $T \in \Gamma'$ mevcut olsun. Bu taktirde

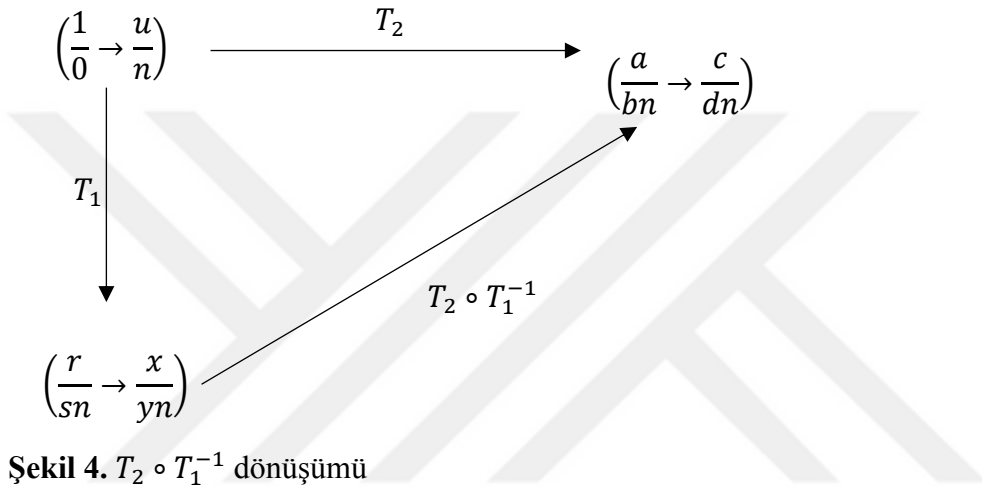
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u & 1 \\ -n & 0 \end{pmatrix} \quad (55)$$

veya

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -1 \\ n & 0 \end{pmatrix} \quad (56)$$

dir. Birinci durumda $a = -u, c = -n, au + bn = 1$ ve $ru + dn = 0$ dir. Buradan $d = u$ ve $u^2 = -1 + bn$ bulunur. $T = \begin{pmatrix} -u & b \\ -n & u \end{pmatrix}$ alırsak $T \in \Gamma'$ olması için $2|b$ ve $2|n$ olması gerekir. $u^2 = -1 + bn, 2|b$ ve $2|n$ olduğundan $u^2 = -1 \pmod{4}$ olup bu ise imkansızdır. İkinci durumda $T = \begin{pmatrix} u & b \\ n & -u \end{pmatrix}$ alınırsa benzer çelişki elde edilir.

Sonuç 2.14. $G_{u,n}$ de kendisiyle eşleşmiş graf yoktur.



Teorem 2.15. $\Gamma'_0(n)$ grubu $F_{u,n}$ grafının köşelerini ve kenarlarını transitif olarak permüte eder.

İspat:

i. v ve w , $F_{u,n}$ nin köşeleri olsun. Γ' grubu $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olduğundan $\exists T \in \Gamma': T(v) = w$ dir. $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olmak üzere $v = \frac{k}{ln}, w = \frac{t}{sn}$ alırsak $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ ln \end{pmatrix} = \frac{ak+bln}{ck+dln} = \frac{t}{sn}$ olup $n|ck$ dir. $(k, n) = 1$ olduğundan $c \equiv 0 \pmod{n}$ dir. Bu ise $T \in \Gamma'_0(n)$ olduğunu yani $\Gamma'_0(n)$ nin $F_{u,n}$ nin köşeleri üzerinde transitif olduğunu gösterir. Böylece $\Gamma'_0(n)$, $F_{u,n}$ nin köşelerini permüte eder.

ii. $h_1: \frac{r}{sn} \rightarrow \frac{x}{yn} \in F_{u,n}$ ve $h_2: \frac{a}{bn} \rightarrow \frac{c}{dn} \in F_{u,n}$ iki kenar olsun. Bu taktirde $\exists T_1, T_2 \in \Gamma': \left(\infty, \frac{u}{n} \right) \xrightarrow{T_1} \left(\frac{r}{sn}, \frac{x}{yn} \right), \left(\infty, \frac{u}{n} \right) \xrightarrow{T_2} \left(\frac{a}{bn}, \frac{c}{dn} \right)$ dir. $T_1 \left(\frac{1}{0} \right) = \frac{r}{sn}$ olduğundan $T_1 = \begin{pmatrix} r & k_1 \\ sn & l_1 \end{pmatrix}$ ve

benzer şekilde $T_2 = \begin{pmatrix} a & k_2 \\ bn & l_2 \end{pmatrix}$ 'dir. Bu taktirde T , Şekil 4 deki gibi $T_2 \circ T_1^{-1}$ olarak alınırsa

$T_2 \circ T_1^{-1} = \begin{pmatrix} al_1 - k_2sn & -ak_1 + k_2r \\ bl_1n - l_2sn & -bk_1n + l_2r \end{pmatrix}$ olduğundan $T := T_2 \circ T_1^{-1} \in \Gamma'_0(n)$ bulunur.

Açıkça $T\left(\frac{r}{sn}\right) = \frac{a}{bn}$, $T\left(\frac{x}{yn}\right) = \frac{c}{dn}$ dir. Böylece $T \in \Gamma'_0(n)$ dönüşümü h_1 kenarını h_2 kenarına resmeder. Dolayısıyla $\Gamma'_0(n)$ kenarları permüte eder.

Lemma 2.16. $v, F_{u,n}$ de bir köşe olmak üzere $F_{u,n} \xrightarrow{h} F_{-u,n}$, $v \rightarrow -v$ dönüşümü bir izomorfizmadır.

İspat: h dönüşümünün $1 - 1$ ve örten olduğu açıktır. Şimdi h dönüşümünün yapı koruyan olduğunu yani $a \rightarrow b \in F_{u,n}$ ise $-a \rightarrow -b \in F_{-u,n}$ olduğunu gösterelim. $\frac{r}{s} < \frac{x}{y} \in F_{u,n}$ olsun.

1. $r \equiv 0 \pmod{6}$ olsun. Bu taktirde Teorem 2.11.(1) den $x \equiv -ur \pmod{n}$, $y \equiv -us \pmod{3n}$, $y \not\equiv -us \pmod{2n}$ ve $ry - sx = -n$ dir. $\frac{r}{s} < \frac{x}{y}$ olduğundan $-\frac{r}{s} > -\frac{x}{y}$ dir. Buradan $-\frac{r}{s} > -\frac{x}{y} \in F_{-u,n}$ olması için $-x \equiv (-u)(-r) \pmod{n}$, $y \equiv (-u)s \pmod{3n}$, $y \not\equiv (-u)s \pmod{2n}$ ve $-ry + sx = n$ olmalıdır.

2. $s \equiv 0 \pmod{6}$ olsun. Bu taktirde Teorem 2.11.(2) den $x \equiv -ur \pmod{6n}$, $y \equiv -us \pmod{n}$ ve $ry - sx = -n$ dir. $\frac{r}{s} < \frac{x}{y}$ olduğundan $-\frac{r}{s} > -\frac{x}{y}$ dir. Buradan $-\frac{r}{s} > -\frac{x}{y} \in F_{-u,n}$ olması için $-x \equiv (-u)(-r) \pmod{6n}$, $y \equiv (-u)s \pmod{n}$ ve $-ry + sx = n$ olmalıdır.

3. $r \not\equiv 0 \pmod{6}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{6}$ olsun.

i. $r \not\equiv 0 \pmod{2}$, $r \equiv 0 \pmod{3}$, $s \equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{3}$ olsun. Bu taktirde Teorem 2.11.(3-i) den $x \equiv -ur \pmod{2n}$, $y \equiv -us \pmod{3n}$ ve $ry - sx = -n$ dir. $\frac{r}{s} < \frac{x}{y}$ olduğundan $-\frac{r}{s} > -\frac{x}{y}$ dir. Buradan $-\frac{r}{s} > -\frac{x}{y} \in F_{-u,n}$ olması için $x \equiv (-u)(-r) \pmod{2n}$, $y \equiv (-u)s \pmod{3n}$ ve $-ry + sx = n$ olmalıdır.

ii. $r \not\equiv 0 \pmod{2}, r \equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{3}$ olsun. Bu taktirde Teorem 2.11.(3-ii) den $x \equiv -ur \pmod{n}, y \equiv -us \pmod{6n}$ ve $ry - sx = -n$ dir. $\frac{r}{s} < \frac{x}{y}$ olduğundan $-\frac{r}{s} > -\frac{x}{y}$ dir. Buradan $-\frac{r}{s} \xrightarrow{>} -\frac{x}{y} \in F_{-u,n}$ olması için $-x \equiv (-u)(-r) \pmod{n}, y \equiv (-u)s \pmod{6n}$ ve $-ry + sx = n$ olmalıdır.

iii. $r \equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \equiv 0 \pmod{3}$ olsun. Bu taktirde Teorem 2.11.(3-iii) den $x \equiv -ur \pmod{3n}, y \equiv -us \pmod{n}, y \not\equiv -us \pmod{2n}$ ve $ry - sx = -n$ dir. $\frac{r}{s} < \frac{x}{y}$ olduğundan $-\frac{r}{s} > -\frac{x}{y}$ dir. Buradan $-\frac{r}{s} \xrightarrow{>} -\frac{x}{y} \in F_{-u,n}$ olması için $-x \equiv (-u)(-r) \pmod{3n}, y \equiv (-u)s \pmod{n}, y \not\equiv (-u)s \pmod{2n}$ ve $-ry + sx = n$ olmalıdır.

iv. $r \equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{3}$ olsun. Bu taktirde Teorem 2.11.(3-iv) den $x \equiv -ur \pmod{n}, x \not\equiv -ur \pmod{3n}, y \equiv -us \pmod{n}, y \not\equiv -us \pmod{2n}, y \not\equiv -us \pmod{3n}$ ve $ry - sx = -n$ dir. $\frac{r}{s} < \frac{x}{y}$ olduğundan $-\frac{r}{s} > -\frac{x}{y}$ dir. Buradan $-\frac{r}{s} \xrightarrow{>} -\frac{x}{y} \in F_{-u,n}$ olması için $-x \equiv (-u)(-r) \pmod{n}, -x \not\equiv (-u)(-r) \pmod{3n}, y \equiv (-u)s \pmod{n}, y \not\equiv (-u)s \pmod{2n}, y \not\equiv (-u)s \pmod{3n}$ ve $-ry + sx = n$ olmalıdır.

v. $r \not\equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \equiv 0 \pmod{3}$ olsun. Bu taktirde Teorem 2.11.(3-v) den $x \equiv -ur \pmod{3n}, y \equiv -us \pmod{2n}$ ve $ry - sx = -n$ dir. $\frac{r}{s} < \frac{x}{y}$ olduğundan $-\frac{r}{s} > -\frac{x}{y}$ dir. Buradan $-\frac{r}{s} \xrightarrow{>} -\frac{x}{y} \in F_{-u,n}$ olması için $-x \equiv (-u)(-r) \pmod{3n}, y \equiv (-u)s \pmod{2n}$ ve $-ry + sx = n$ olmalıdır.

vi. $r \not\equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{3}$ olsun. Bu taktirde Teorem 2.11.(3-vi) dan $x \equiv -ur \pmod{2n}, x \not\equiv -ur \pmod{3n}, y \equiv -us \pmod{n}, y \not\equiv -us \pmod{3n}$ ve $ry - sx = -n$ dir. $\frac{r}{s} < \frac{x}{y}$ olduğundan $-\frac{r}{s} > -\frac{x}{y}$ dir. Buradan $-\frac{r}{s} \xrightarrow{>} -\frac{x}{y} \in F_{-u,n}$ olması için $-x \equiv (-u)(-r) \pmod{2n}, -x \not\equiv (-u)(-r) \pmod{3n}, y \equiv (-u)s \pmod{n}, y \not\equiv (-u)s \pmod{3n}$ ve $-ry + sx = n$ olmalıdır.

vii. $r \not\equiv 0 \pmod{2}, r \not\equiv 0 \pmod{3}, s \not\equiv 0 \pmod{2}$ ve $s \not\equiv 0 \pmod{3}$ olsun. Bu takdirde Teorem 2.11.(3-vii) den $x \equiv -ur \pmod{n}, x \not\equiv -ur \pmod{3n}, y \equiv -us \pmod{2n}, y \not\equiv -us \pmod{3n}$ ve $ry - sx = -n$ dir. $\frac{r}{s} < \frac{x}{y}$ olduğundan $-\frac{r}{s} > -\frac{x}{y}$ dir. Buradan $-\frac{r}{s} > -\frac{x}{y} \in F_{-u,n}$ olması için $-x \equiv (-u)(-r) \pmod{n}, -x \not\equiv (-u)(-r) \pmod{3n}, y \equiv (-u)s \pmod{2n}, y \not\equiv (-u)s \pmod{3n}$ ve $-ry + sx = n$ olmalıdır.

Teorem 2.17. Γ' grubunda 3. mertebeden eliptik eleman yoktur.

İspat: Γ^3 de 3. mertebeden eliptik eleman yoktur (Kesicioğlu, 2011). $T \in \Gamma'$ ise $T \in \Gamma^3$ olduğundan sonuç açıktır.

Teorem 2.18. $F_{u,n}$ yönelenmiş üçgen içermez.

İspat: Eliptik elemanlar ile devreler arasındaki ilişkiden dolayı $F_{u,n}$ yönelenmiş üçgen içeriyorsa Γ' de 3. Dereceden bir eliptik eleman olmak zorundadır (Akbaş, 2001). Bu ise Teorem 2.17. ya göre mümkün olmadığından $F_{u,n}$ üçgen içermez.

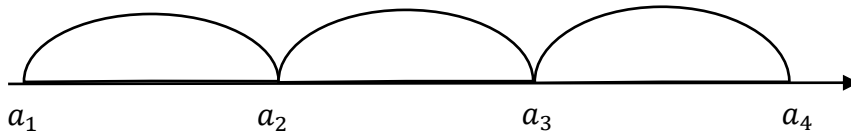
Sonuç 2.19. $G_{u,n}$ ormandır.

İspat: Teorem 2.18. ve Akbaş (2001) den açıktır.

2.1.4. Γ' Modüler Alt Grubunun Alt Yörüngesel Graflarında Bağlantılılık

Tanım 2.20. $G_{u,n}$ nin bir K alt grafına bağlantılıdır denir: $\Leftrightarrow K$ daki herhangi iki köşe K da bir geodezik yolla birleştirilebilir.

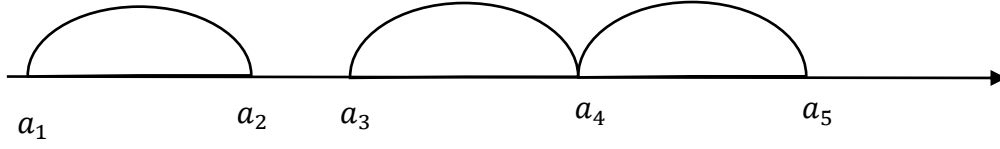
Örnek 2.21.



Şekil 5. Bağlantılı K grafı

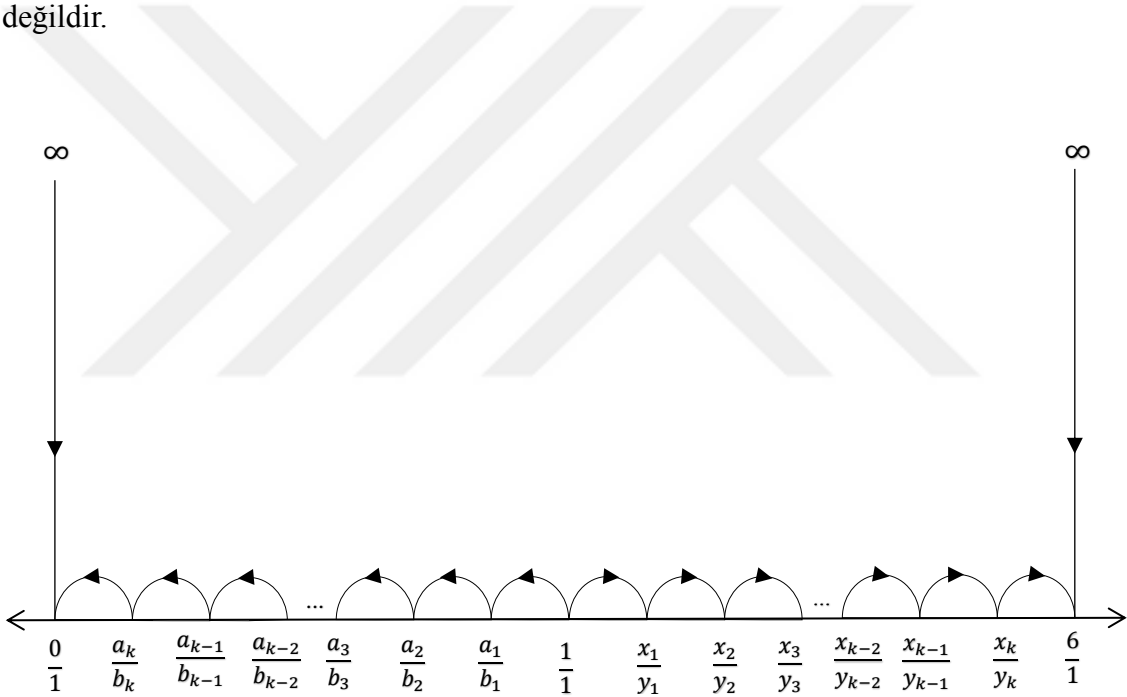
$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ elemanlarını köşeler kabul eden Şekil 5 deki K grafi bağlantılıdır.

Örnek 2.22.



Şekil 6. Bağlantısız K grafi

$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ kümesinin elemanlarını köşe kabul eden Şekil 6 daki K grafi bağlantılı değildir.



Şekil 7. $F_{0,1}$ Alt yörüngesel grafi

Teorem 2.23. $F_{0,1}$ grafi bağlantısızdır.

İspat: Sonuç 2.12. den $\frac{1}{0} \rightarrow \frac{a}{1} \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{6}$ olduğundan $[0,6]$ aralığında ∞ ile komşu köşeler sadece 0 ve 6 dır. Eğer bu graf bağlantılı ise $\frac{0}{1}$ ve $\frac{1}{1}$ köşelerini bir yolla birbirine bağlamalıyız. Açıkça Sonuç 2.12. den $\frac{1}{1} \nrightarrow \frac{0}{1}$ dir. O halde Şekil 7 deki gibi

$$\frac{1}{1} \rightarrow \frac{a_1}{b_1} \rightarrow \frac{a_2}{b_2} \rightarrow \frac{a_3}{b_3} \rightarrow \frac{a_4}{b_4} \rightarrow \frac{a_5}{b_5} \rightarrow \frac{a_6}{b_6} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{a_{k-2}}{b_{k-2}} \rightarrow \frac{a_{k-1}}{b_{k-1}} \rightarrow \frac{a_k}{b_k} \rightarrow \frac{0}{1} \quad (57)$$

bir yolla $\frac{1}{1}$ köşesinin $\frac{0}{1}$ köşesine bağlandığını varsayalım. Sonuç 2.12. ye göre bu yol

$$\frac{1}{1} \rightarrow \underbrace{\frac{a_1}{2b_1} \rightarrow \frac{2a_2}{b_2} \rightarrow \frac{a_3}{b_3}} \rightarrow \underbrace{\frac{a_4}{2b_4} \rightarrow \frac{2a_5}{b_5} \rightarrow \frac{a_6}{b_6}} \rightarrow \dots \rightarrow \underbrace{\frac{a_{k-2}}{2b_{k-2}} \rightarrow \frac{2a_{k-1}}{b_{k-1}} \rightarrow \frac{a_k}{b_k}} \rightarrow \frac{0}{1} \quad (58)$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Burada $a_1, a_2, \dots, a_k \not\equiv 0 \pmod{3}$ ve $b_1, b_2, \dots, b_k \not\equiv 0 \pmod{3}$ tür. Dikkat edilirse bu yolun köşeleri şekilde gösterildiği gibi periyodik olarak devam etmektedir. Ayrıca yine Sonuç 2.12. ye göre

$$\frac{1}{1} \rightarrow \frac{a_1}{2b_1} \nrightarrow \frac{0}{1}$$

$$\frac{1}{1} \rightarrow \frac{a_1}{2b_1} \rightarrow \frac{2a_2}{b_2} \nrightarrow \frac{0}{1}$$

$$\frac{1}{1} \rightarrow \frac{a_1}{2b_1} \rightarrow \frac{2a_2}{b_2} \rightarrow \frac{a_3}{b_3} \nrightarrow \frac{0}{1}$$

...

$$\frac{1}{1} \rightarrow \frac{a_1}{2b_1} \rightarrow \frac{2a_2}{b_2} \rightarrow \frac{a_3}{b_3} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{a_{k-2}}{2b_{k-2}} \nrightarrow \frac{0}{1}$$

$$\frac{1}{1} \rightarrow \frac{a_1}{2b_1} \rightarrow \frac{2a_2}{b_2} \rightarrow \frac{a_3}{b_3} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{a_{k-2}}{2b_{k-2}} \rightarrow \frac{2a_{k-1}}{b_{k-1}} \nrightarrow \frac{0}{1}$$

$$\frac{1}{1} \rightarrow \frac{a_1}{2b_1} \rightarrow \frac{2a_2}{b_2} \rightarrow \frac{a_3}{b_3} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{a_{k-2}}{2b_{k-2}} \rightarrow \frac{2a_{k-1}}{b_{k-1}} \rightarrow \frac{a_k}{b_k} \nrightarrow \frac{0}{1}$$

olduğundan böyle bir yol imkansızdır.

Benzer şekilde Sonuç 2.12. ye göre $\frac{0}{1} \nrightarrow \frac{1}{1}$ olup $\frac{0}{1}$ köşesinin $\frac{1}{1}$ köşesine ulaşması için

$$\frac{0}{1} \rightarrow \frac{c_1}{3d_1} \rightarrow \frac{3c_2}{2d_2} \rightarrow \frac{2c_3}{3d_3} \rightarrow \frac{3c_4}{d_4} \rightarrow \frac{c_5}{6d_5} \rightarrow \frac{6c_6}{d_6} \rightarrow \frac{c_7}{3d_7} \rightarrow \frac{3c_8}{2d_8} \rightarrow \frac{2c_9}{3d_9} \rightarrow \frac{3c_{10}}{d_{10}} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{1}{1} \quad (59)$$

şeklinde bir yol takip etmesi gerekmektedir. Yine Sonuç 2.12. den

$$\frac{0}{1} \rightarrow \frac{c_1}{3d_1} \nrightarrow \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1} \rightarrow \frac{c_1}{3d_1} \rightarrow \frac{3c_2}{2d_2} \nrightarrow \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1} \rightarrow \frac{c_1}{3d_1} \rightarrow \frac{3c_2}{2d_2} \rightarrow \frac{2c_3}{3d_3} \nrightarrow \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1} \rightarrow \frac{c_1}{3d_1} \rightarrow \frac{3c_2}{2d_2} \rightarrow \frac{2c_3}{3d_3} \rightarrow \frac{3c_4}{d_4} \nrightarrow \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1} \rightarrow \frac{c_1}{3d_1} \rightarrow \frac{3c_2}{2d_2} \rightarrow \frac{2c_3}{3d_3} \rightarrow \frac{3c_4}{d_4} \rightarrow \frac{c_5}{6d_5} \nrightarrow \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1} \rightarrow \frac{c_1}{3d_1} \rightarrow \frac{3c_2}{2d_2} \rightarrow \frac{2c_3}{3d_3} \rightarrow \frac{3c_4}{d_4} \rightarrow \frac{c_5}{6d_5} \rightarrow \frac{6c_6}{d_6} \nrightarrow \frac{1}{1}$$

olduğundan böyle bir yol imkansızdır.

Şimdi de

$$\frac{1}{1} \rightarrow \frac{x_1}{y_1} \rightarrow \frac{x_2}{y_2} \rightarrow \frac{x_3}{y_3} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{x_{k-2}}{y_{k-2}} \rightarrow \frac{x_{k-1}}{y_{k-1}} \rightarrow \frac{x_k}{y_k} \rightarrow \frac{6}{1} \quad (60)$$

şeklinde olduğunu varsayalım. Sonuç 2.12. den $\frac{1}{1} \nrightarrow \frac{6}{1}$ olduğu açıktır ve $\frac{1}{1}$ köşesini $\frac{6}{1}$ köşesine bağlayan bu yol

$$\frac{1}{1} \rightarrow \frac{x_1}{2y_1} \rightarrow \frac{2x_2}{y_2} \rightarrow \frac{x_3}{y_3} \rightarrow \frac{x_4}{2y_4} \rightarrow \frac{2x_5}{y_5} \rightarrow \frac{x_6}{2y_6} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{x_{k-2}}{2y_{k-2}} \rightarrow \frac{2x_{k-1}}{y_{k-1}} \rightarrow \frac{x_k}{y_k} \rightarrow \frac{6}{1} \quad (61)$$

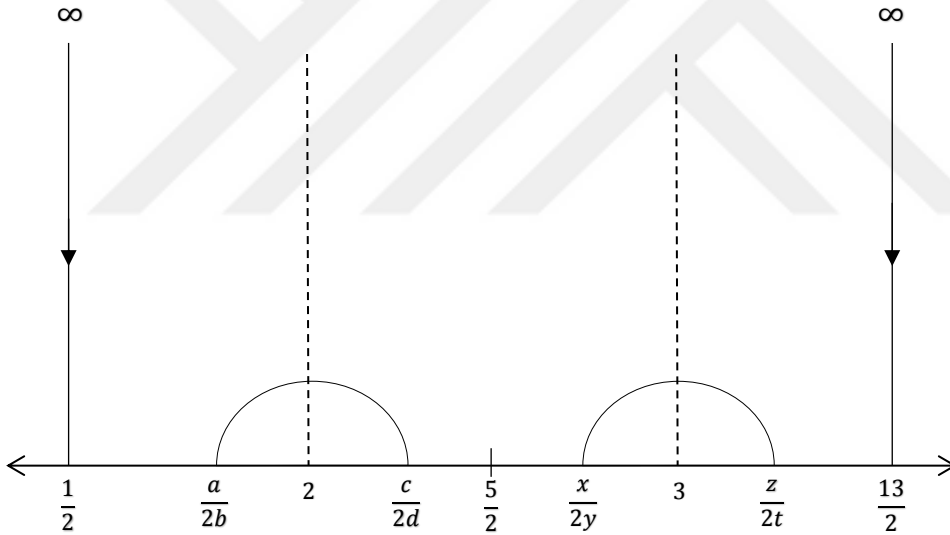
şeklinde yeniden düzenlenebilir. Burada $x_1, x_2, \dots, x_k \not\equiv 0 \pmod{3}$ ve $y_1, y_2, \dots, y_k \not\equiv 0 \pmod{3}$ tür. Bu ise Sonuç. 2.12. ye göre mümkün değildir.

Benzer şekilde $\frac{6}{1} \rightarrow \frac{1}{1}$ olup

$$\frac{6}{1} \rightarrow \frac{z_1}{3t_1} \rightarrow \frac{3z_2}{2t_2} \rightarrow \frac{2z_3}{3t_3} \rightarrow \frac{3z_4}{t_4} \rightarrow \frac{z_5}{6t_5} \rightarrow \frac{6z_6}{t_6} \rightarrow \frac{z_7}{3t_7} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{1}{1} \quad (62)$$

şeklinde bir yolun olamayacağı da gösterilebilir.

Dolayısıyla $F_{0,1}$ grafi bağlantısızdır.



Şekil 8. $F_{1,2}$ Alt yörüngesel grafi

Teorem 2.24. $F_{1,2}, F_{3,2}, F_{5,2}, F_{7,2}, F_{9,2}$ ve $F_{11,2}$ grafları bağlantısızdır.

İspat: Burada sadece $F_{1,2}, F_{3,2}$ ve $F_{5,2}$ graflarının karakterlerini belirlemek yeterlidir. Çünkü Lemma 2.16. ya göre $F_{1,2}$ ile $F_{-1,2}$, $F_{3,2}$ ile $F_{-3,2}$ ve $F_{5,2}$ ile $F_{-5,2}$ izomorf olduklarından aynıdır. Ayrıca Lemma 2.9. dan $F_{-1,2} = F_{11,2}$, $F_{-3,2} = F_{9,2}$ ve $F_{-5,2} = F_{7,2}$ dir. Böylece bu eşit grafların cinsleri aynıdır. Eğer $F_{1,2}$ bağlantılı ise her bir $v = \frac{a}{2b}$ köşesi ∞ ile birleştirilebilir. Şimdi gösterelim ki $2 < v < 3$ olan bir v köşesi ∞ ile

birleştirilemez. Burada $\left[\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right]$ aralığında ∞ ile komşu köşelerin sadece $\frac{1}{2}$ ve $\frac{13}{2}$ olduğuna dikkat edelim. Varsayalım ki Şekil 8 deki gibi $Rez = 2$ ile kesişen bir $\frac{a}{2b} \rightarrow \frac{c}{2d} \in F_{1,2}$ kenarı olsun. Bu taktirde $\frac{a}{b} < 4 < \frac{c}{d}$ olup $ad - bc = -1$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Benzer şekilde $2 < \frac{x}{2y} < 3 < \frac{z}{2t} \leq \frac{13}{2}$ olsa $\frac{x}{y} < 6 < \frac{z}{t}$ ve $xt - yz = -1$ olur ki bu ise bir çelişkidir. Bu çelişki $2 \leq m \leq 3$ şeridinde hiçbir köşenin ∞ ile birleştirilemeyeceğini gösterir. Yani $F_{1,2}$ bağlantılı değildir.

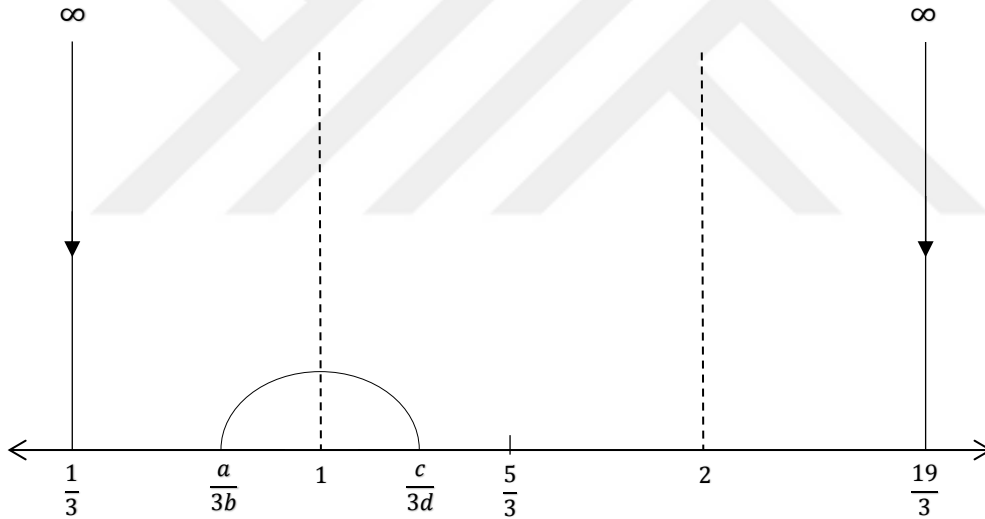
Benzer şekilde eğer $F_{3,2}$ bağlantılı ise her bir $v = \frac{a}{2b}$ köşesi ∞ ile birleştirilebilir. Şimdi gösterelim ki $4 < v < 5$ olan bir v köşesi ∞ ile birleştirilemez. Burada $\left[\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right]$ aralığında ∞ ile komşu köşelerin sadece $\frac{3}{2}$ ve $\frac{15}{2}$ olduğuna dikkat edelim. Varsayalım ki $\frac{3}{2} \leq \frac{a}{2b} \leq 4 \leq \frac{c}{2d} \leq 5$ olsun. Buradan $\frac{a}{b} < 8 < \frac{c}{d}$ olup $ad - bc = -1$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Benzer şekilde $4 < \frac{x}{2y} < 5 < \frac{z}{2t} \leq \frac{15}{2}$ olsa $\frac{x}{y} < 10 < \frac{z}{t}$ ve $xt - yz = -1$ olur ki bu ise bir çelişkidir. Bu çelişki $4 \leq m \leq 5$ şeridinde hiçbir köşenin ∞ ile birleştirilemeyeceğini gösterir. Yani $F_{3,2}$ bağlantılı değildir.

Son olarak $F_{5,2}$ grafini inceleyelim. Eğer $F_{5,2}$ bağlantılı ise her bir $v = \frac{a}{2b}$ köşesi ∞ ile birleştirilebilir. Şimdi gösterelim ki $5 < v < 7$ olan bir v köşesi ∞ ile birleştirilemez. Burada $\left[\frac{5}{2}, \frac{17}{2}\right]$ aralığında ∞ ile komşu köşelerin sadece $\frac{5}{2}$ ve $\frac{17}{2}$ olduğuna dikkat edelim. Varsayalım ki $\frac{5}{2} \leq \frac{a}{2b} \leq 5 \leq \frac{c}{2d} \leq 7$ olsun. Buradan $\frac{a}{b} < 10 < \frac{c}{d}$ olup $ad - bc = -1$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Benzer şekilde $5 < \frac{x}{2y} < 7 < \frac{z}{2t} \leq \frac{15}{2}$ olsa $\frac{x}{y} < 14 < \frac{z}{t}$ ve $xt - yz = -1$ olur ki bu ise bir çelişkidir. Bu çelişki $5 \leq m \leq 7$ şeridinde hiçbir köşenin ∞ ile birleştirilemeyeceğini gösterir. Yani $F_{5,2}$ bağlantılı değildir.

Teorem 2.25. $F_{1,3}, F_{2,3}, F_{4,3}, F_{5,3}, F_{7,3}, F_{8,3}, F_{10,3}, F_{11,3}, F_{13,3}, F_{14,3}, F_{16,3}$ ve $F_{17,3}$ grafları bağlantısızdır.

İspat: Burada sadece $F_{1,3}, F_{2,3}, F_{4,3}, F_{5,3}, F_{7,3}$ ve $F_{8,3}$ graflarının karakterlerini belirlemek yeterlidir. Çünkü Lemma 2.16. ya göre $F_{1,3}$ ile $F_{-1,3}, F_{2,3}$ ile $F_{-2,3}, F_{4,3}$ ile $F_{-4,3}, F_{5,3}$ ile

$F_{-5,3}, F_{7,3}$ ile $F_{-7,3}$ ve $F_{8,3}$ ile $F_{-8,3}$ izomorf olduklarından aynıdır. Ayrıca Lemma 2.9. dan $F_{-1,3} = F_{17,3}$, $F_{-2,3} = F_{16,3}$, $F_{-4,3} = F_{14,3}$, $F_{-5,3} = F_{13,3}$, $F_{-7,3} = F_{11,3}$ ve $F_{-8,3} = F_{10,3}$ dir. Böylece bu eşit grafların cinsleri aynıdır. Eğer $F_{1,3}$ bağlantılı ise her bir $v = \frac{a}{3b}$ köşesi ∞ ile birleştirilebilir. Şimdi gösterelim ki $1 < v < 2$ olan bir v köşesi ∞ ile birleştirilemez. Burada $\left[\frac{1}{3}, \frac{19}{3}\right]$ aralığında ∞ ile komşu köşelerin sadece $\frac{1}{3}$ ve $\frac{19}{3}$ olduğuna dikkat edelim. Varsayalım ki Şekil 9 daki gibi $Re z = 1$ ile kesişen $\frac{a}{3b} \rightarrow \frac{c}{3d} \in F_{1,3}$ kenarı olsun. Bu taktirde $\frac{a}{b} < 3 < \frac{c}{d}$ olup $ad - bc = -1$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Benzer şekilde $1 < \frac{x}{3y} < 2 < \frac{z}{3t} \leq \frac{19}{3}$ olsa $\frac{x}{y} < 6 < \frac{z}{t}$ ve $xt - yz = -1$ olur ki bu ise bir çelişkidir. Bu çelişki $1 \leq m \leq 2$ şeridinde hiçbir köşenin ∞ ile birleştirilemeyeceğini gösterir. Yani $F_{1,3}$ bağlantılı değildir.

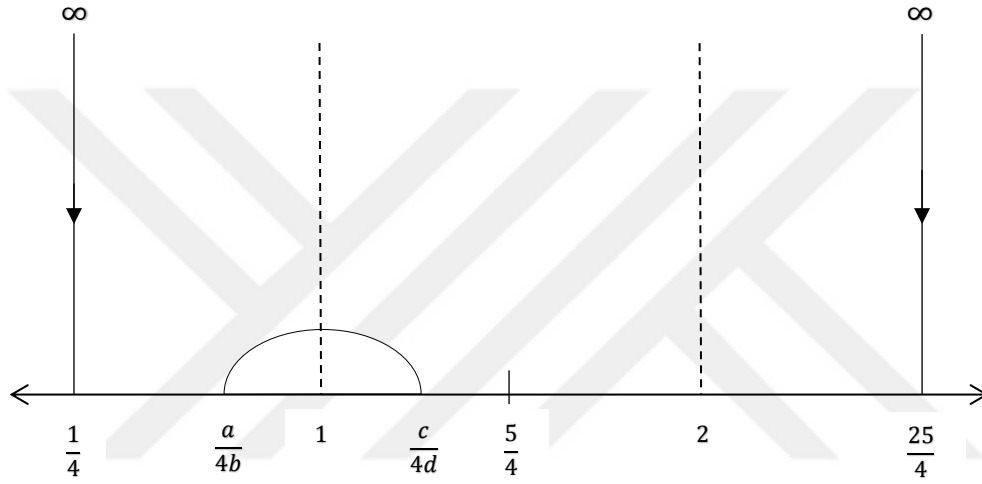


Şekil 9. $F_{1,3}$ Alt yörüngesel grafi

Eğer $F_{2,3}$ bağlantılı ise her bir $v = \frac{a}{3b}$ köşesi ∞ ile birleştirilebilir. Şimdi gösterelim ki $1 < v < 2$ olan bir v köşesi ∞ ile birleştirilemez. Burada $\left[\frac{2}{3}, \frac{20}{3}\right]$ aralığında ∞ ile komşu köşelerin sadece $\frac{2}{3}$ ve $\frac{20}{3}$ olduğuna dikkat edelim. Varsayalım ki $\frac{2}{3} \leq \frac{a}{3b} \leq 1 \leq \frac{c}{3d} \leq 2$ olsun. Buradan $\frac{a}{b} < 3 < \frac{c}{d}$ olup $ad - bc = -1$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Benzer şekilde $1 < \frac{x}{3y} < 2 < \frac{z}{3t} \leq \frac{21}{3}$ olsa $\frac{x}{y} < 6 < \frac{z}{t}$ ve $xt - yz = -1$ olur ki bu ise bir çelişkidir. Bu

çelişki $1 \leq m \leq 2$ şeridinde hiçbir köşenin ∞ ile birleştirilemeyeceğini gösterir. Yani $F_{2,3}$ bağlantılı değildir.

Benzer şekilde $F_{4,3}$, $F_{5,3}$, $F_{7,3}$ ve $F_{8,3}$ graflarının da bağlantısız olduğu gösterilebilir.



Şekil 10. $F_{1,4}$ Alt yörüngesel grafi

Teorem 2.26. $F_{1,4}$, $F_{3,4}$, $F_{5,4}$, $F_{7,4}$, $F_{9,4}$, $F_{11,4}$, $F_{13,4}$, $F_{15,4}$, $F_{17,4}$, $F_{19,4}$, $F_{21,4}$ ve $F_{23,4}$ grafları bağlantısızdır.

İspat: Burada $F_{1,4}$, $F_{3,4}$, $F_{5,4}$, $F_{7,4}$, $F_{9,4}$ ve $F_{11,4}$ graflarının karakterlerini belirlemek yeterlidir. Çünkü Lemma 2.16. ya göre $F_{1,4}$ ile $F_{-1,4}$, $F_{3,4}$ ile $F_{-3,4}$, $F_{5,4}$ ile $F_{-5,4}$, $F_{7,4}$ ile $F_{-7,4}$, $F_{9,4}$ ile $F_{-9,4}$, $F_{11,4}$ ile $F_{-11,4}$ izomorf olduklarından aynıdır. Ayrıca Lemma 2.9. dan $F_{-1,4} = F_{23,4}$, $F_{-3,4} = F_{21,4}$, $F_{-5,4} = F_{19,4}$, $F_{-7,4} = F_{17,4}$, $F_{-9,4} = F_{15,4}$, $F_{-11,4} = F_{13,4}$ dir. Böylece bu eşit grafların cinsleri aynıdır. Eğer $F_{1,4}$ bağlantılı ise her bir $v = \frac{a}{4b}$ köşesi ∞ ile birleştirilebilir. Şimdi gösterelim ki $1 < v < 2$ olan bir v köşesi ∞ ile birleştirilemez. Burada $\left[\frac{1}{4}, \frac{25}{4}\right]$ aralığında ∞ ile komşu köşelerin sadece $\frac{1}{4}$ ve $\frac{25}{4}$ olduğuna dikkat edelim.

Varsayalım ki Şekil 10 daki gibi $Rez = 1$ ile kesişen $\frac{a}{4b} \rightarrow \frac{c}{4d} \in F_{1,4}$ kenarı olsun. Bu taktirde $\frac{a}{b} < 4 < \frac{c}{d}$ olup $ad - bc = -1$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Benzer şekilde $1 < \frac{x}{4y} < 2 < \frac{z}{4t} \leq \frac{25}{4}$ olsa $\frac{x}{y} < 8 < \frac{z}{t}$ ve $xt - yz = -1$ olur ki bu ise bir çelişkidir. Bu çelişki $1 \leq m \leq 2$ şeridinde hiçbir köşenin ∞ ile birleştirilemeyeceğini gösterir. Yani $F_{1,4}$ bağlantılı değildir.

Eğer $F_{3,4}$ bağlantılı ise her bir $v = \frac{a}{4b}$ köşesi ∞ ile birleştirilebilir. Şimdi gösterelim ki $1 < v < 2$ olan bir v köşesi ∞ ile birleştirilemez. Burada $\left[\frac{3}{4}, \frac{27}{4}\right]$ aralığında ∞ ile komşu köşelerin sadece $\frac{3}{4}$ ve $\frac{27}{4}$ olduğuna dikkat edelim. Varsayalım ki $\frac{3}{4} \leq \frac{a}{4b} \leq 1 \leq \frac{c}{4d} \leq 2$ olsun. Buradan $\frac{a}{b} < 4 < \frac{c}{d}$ olup $ad - bc = -1$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Benzer şekilde $1 < \frac{x}{4y} < 2 < \frac{z}{4t} \leq \frac{27}{4}$ olsa $\frac{x}{y} < 8 < \frac{z}{t}$ ve $xt - yz = -1$ olur ki bu ise bir çelişkidir. Bu çelişki $1 \leq m \leq 2$ şeridinde hiçbir köşenin ∞ ile birleştirilemeyeceğini gösterir. Yani $F_{3,4}$ bağlantılı değildir.

Benzer şekilde $F_{5,4}$, $F_{7,4}$, $F_{9,4}$ ve $F_{11,4}$ graflarının da bağlantısız olduğu gösterilebilir.

3. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Yaptığımız çalışmada elde edilen başlıca sonuçlar şunlardır:

1. Γ' grubunun $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ üzerindeki hareketi incelenmiş ve transitif olarak hareket ettiği gösterilmiştir (Lemma 2.2).
2. Γ' grubunun $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ üzerindeki hareketinden oluşan alt yörüngesel graflardaki kenar şartı elde edilmiştir (Teorem 2.11).
3. Γ' grubunun $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ üzerindeki hareketinden oluşan alt yörüngesel graflardaki bağlantılılık incelenmiştir (Teorem 2.23, Teorem 2.24, Teorem 2.25 ve Teorem 2.26).

4. ÖNERİLER

1. Γ' modüler alt grubunun $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ üzerindeki hareketinden farklı olarak başka bir küme üzerindeki hareketi incelenebilir.
2. $F_{1,1}$ alt yörüngesel grafının bağlantılı olup olmadığı henüz gösterilmemiştir. Bu problem incelenebilir.



KAYNAKLAR

- Akbaş, M., 1989.** The Normalizer of Modular Subgroups, Ph.D. Thesis, University of Southampton.
- Akbaş, M., 2001.** On Suborbital Graphs for The Modular Group, Bull. London Math. Soc., 33, 647-652.
- Akdemirci, Z., 2012.** Modöler Grubun Normal ve Serbest Alt Grupları. Yüksek Lisans Tezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, Türkiye, 49s., 29.
- Biggs, N.L. and White, A.T., 1979.** Permutation groups and combinatorial structures, London Math. Soc. Lecture Notes 33, Cambridge University Pres, Cambridge,
- Göler, B.Ö., Beşenk, M., Kesicioğlu, Y. and Değer, A.H.** Suborbital graphs for the group Γ^2 . Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Volume 44(5), 1033-1044.
- Hungerford, T.W., 1974.** Algebra. Springer, ISBN: 978-0-387-90518-1. 502 s., 39.
- Jones, G.A. and Singerman, D., 1987.** Complex Functions : An Algebraic and Geometric Viewpoint, Cambridge University Press, Cambridge,
- Jones, G.A., Singerman, D. and Wicks, K., 1991.** The Modular Group and Generalized Farey Graphs, London Math. Soc. Lecture Notes, CUP, Cambridge, 160, 316–338.
- Kesicioğlu, Y., 2011.** Γ^3 ve G_5 Hecke Gruplarının Alt Yörüngesel Grafları. Doktora Tezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, Türkiye, 75s., 33.
- Neumann, P.M., 1977.** Finite Permutation groups, Edge-Coloured Graphs and Matrices, Topics in Group Theory and Computation, Ed. M. P. J. Curran, Academic Press, London, Newyork, San Fransisco,
- Newman, M., 1962.** The Structure of Some Subgroups of the Modular Group, Illinois Journal Of Mathematics, 6, 480-487.
- Newman, M., 1964.** Free Subgroups and Normal Subgroups of The Modular Group, Illinois Journal Of Mathematics, 8, 262-265.
- Ogg, A.P., 1974.** Automorphismes des Courbes Modulaires, Seminaire Delange-Pisot, Poitou, 7,
- Rankin, R.A., 1977.** Modular Forms and Functions, Cambridge University Press,
- Rose, J.S., 1978.** A Course on Group Theory, Cambridge University Press, Cambridge.
- Schoeneberg, B., 1974.** Elliptic Modular Functions, Springer Verlag, Berlin,

Sims, C.C., 1967. Graphs and Finite Permutation Groups, *Mathematische Zeitschrift*, 95, 76-86.

Tsuzuku, T., 1982. *Finite Groups and Finite Geometries*, Cambridge University Press, Cambridge.



ÖZGEÇMİŞ

OSMAN ŞAHİN, 01/04/1990 tarihinde Trabzon'da doğdu. İlköğretimini 2004 yılında Trabzon ili Akçaabat ilçesinde Hasan Saka İlköğretim Okulu'nda ve Ortaöğretimini 2007 yılına Trabzon ili Akçaabat ilçesinde 17 Şubat Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 01/09/2008 tarihinde başladığı lisans eğitimini 20/06/2012 tarihinde Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde tamamladı. 2013 yılında başlamış olduğu Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Tezli Yüksek Lisans Programına devam etmektedir.

