

169586

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

GRAFLARDA ZEDELENEİLİRLİK KAVRAMI

İlknur BÜYÜKKUŞCU

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 619.03.03

Sunuş Tarihi: 03/02/2005

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Alpay Kırılanc

Bornova-İZMİR

III

Sayın İlknur BÜYÜKKUŞCU tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan “Graflarda Zedelenebilirlik Kavramı” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 03.02.2005 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı : Doç.Dr. Alpay Kılıngıç

Raportör Üye: Yrd. Doç.Dr. Ayşın Aytac

Üye : Doç.Dr. Yakın Cebel

ÖZET

GRAFLARDA ZEDELENEİLİRLİK KAVRAMI

BÜYÜKKUŞCU, İlknur

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Alpay KIRLANGIÇ

Ocak 2005, 29 sayfa

Bu tezin birinci bölümünde, iletişim ağlarındaki zedelenebilirlik kavramı incelenmiş ve bir zedelenebilirlik ölçümü olan bütünlük kavramının tanımı verilmiştir. Ardından, bütünlük ölçümü için bugüne değin elde edilen bazı teoremler ve sonuçlar verilmiştir.

İkinci bölümde, binomial ağaç graf ve double vertex graf tanımları verildikten sonra B_2 , B_3 , B_4 binomial ağaç graflarının double vertex graflarının bütünlük değerleri bulunmuştur.

Anahtar Sözcükler : Zedelenebilirlik, bütünlük.

ABSTRACT

THE CONCEPT OF GRAPHS VULNERABILITY

BÜYÜKKUŞCU, İlknur

MsC in Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ

January 2005, 29 pages

In first part of this thesis, the concept of vulnerability has been studied and integrity –a measurement of vulnerability- has been defined. After this definition some results and theorems related with integrity has been given.

In second part of this thesis, the concept of binomial tree graphs and double vertex has been defined. The Integrity of double vertex of binomial tree graphs, B_2 , B_3 , B_4 are calculated.

Keywords: Vulnerability, Integrity

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince gerekli verilerin sağlanması ve konunun seçilmesinde bana destek olan sayın Doç Dr. Alpay Kırılancıç'a ve çizimler konusunda bana yol gösteren Makina Müh. Bahadır Öge'ye teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	V
ABSTRACT.....	VII
TEŞEKKÜR.....	IX
ŞEKİLLERİN DİZİNİ.....	XI
1.GİRİŞ.....	1
1.1.İletişim Ağlarında Zedelenebilirlik.....	1
1.2.Bir G Grafının Bütünlük Ölçümü	6
1.2.1.Bütünlük ve Graf Parametreleri	8
1.2.2.Tekli Graf İşlemleri	9
1.2.3.İkili Graf İşlemleri	10
2. BİNOMİAL AĞAÇ GRAFLARIN DOUBLE VERTEX GRAFLARININ BÜTÜNLÜK DEĞERLERİ.....	12
2.1.Binomial Ağaç Graflar ve Double Vertex Graflar.....	12
2.2.Binomial Ağaç Grafların Double Vertex Graflarının Tepe Bütünlük Değerinin Bulunması.....	14
3.SONUÇ.....	27

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

KAYNAKLAR DİZİNİ.....28

ÖZGEÇMİŞ29



ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1.1. TTNET İletişim Ağı.....	2
1.1.2. Bağlantılılık sayıları 2 olan G_1 ve G_2 grafları.....	5
2.1.1. B_0 , B_1 , B_2 , B_3 , B_4 Binomial Ağaçları.....	12
2.1.2. G Grafi ve $U_2(G)$ grafi.....	13
2.2.1. B_2 grafi.....	14
2.2.2. B_2 binomial ağaç grafinin double vertex grafi.....	14
2.2.3. B_3 binomial ağaç grafi.....	16
2.2.4. B_3 grafinin double vertex grafi $U_2(B_3)$	16
2.2.5. $U_2(B_3)$ grafindan (2,7) ve (3,6) tepelerinin çıkarılmasıyla oluşan graf.....	17
2.2.6. $U_2(B_3)$ grafindan (2,7), (2,8), (3,6) ve (4,6) tepelerinin çıkarılmasıyla oluşan graf.....	18
2.2.7. Şekil 2.2.6 nın daha açık çizilmiş hali.	19

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.2.8. $U_2(B_3)$ grafindan (1,6), (3,6), (4,6), (2,5), (2,7) ve (2,8) tepelerinin çıkarılmasıyla oluşan graf.....	19
2.2.9. B_4 binomial ağaç grafi.....	20
2.2.10. $U_2(B_4)$ grafi.....	21
2.2.11. $U_2(B_4)$ grafindan (6,10) ayrıtının kullanılmasıyla oluşan ayrıtların uç noktalarından en büyük dereceli olan tepelerin atılması.....	23
2.2.12. Bütünlük değerini minimum yapan tüm tepelerin atılması.....	24

1. GİRİŞ

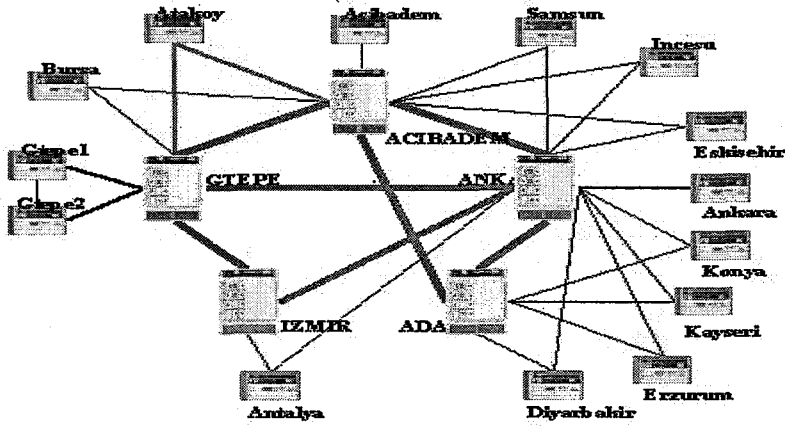
1.1 İletişim Ağlarında Zedelenebilirlik

Bir iletişim ağı, merkezler ile bu merkezleri birbirine bağlayan iletişim yollarının oluşturduğu ve bir bilgi akışını sağlayan sistemdir. İletişim ağları için ilk akla gelen örnek bilgisayarların oluşturduğu ağlar (network) dır. Bir network birbirlerine kablolar ile bağlanmış bilgisayarlar, yazıcılar ve modem gibi bir çok haberleşme ekipmanından oluşmaktadır.

Günümüzde, ağlar üzerinden veri aktarımı yapılarak, günlük yaşantımız bir hayli kolaylaşmaktadır. Örneğin internet bankacılığı sayesinde bankadaki bir çok işimizi herhangi bir şubeye gitmeksizin, ağ üzerindeki veri akışını kullanarak kolayca yapabilmekteyiz. Yine, ağlar üzerindeki veri akışını kullanarak, faturalarımızı işyerimizdeki veya evimizdeki bilgisayar yardımıyla ödeyebiliriz.

İletişim ağlarına değişik bir örnek olarak, bir şehirdeki farklı semtlerde şubeleri olan bir pizzacı verilebilir. Şehirdeki yollar vasıtasıyla birbirine bağlanmış Pizzacı şubeleri ve pizzaların dağıtıldığı evler yine bir iletişim ağı oluşturmaktadır.

Su şebekeleri, doğalgaz hatları, elektrik şebekeleri ve telefon hatları birer iletişim ağı örnekleridir. Şekil 1.1.1 de, Türk Telekomun internet erişimi için oluşturduğu TTNET iletişim ağının küçük bir örneği yer almaktadır.



Şekil 1.1.1. TTNET İletişim Ağı

Günlük yaşantımıza bu denli girmiş olan iletişim ağlarından en verimli şekilde yararlanmak için bu ağların oldukça sağlıklı çalışması gereklidir. Ne yazık ki, bir iletişim ağına giren bir virüs pek çok bilgisayarı işlemez hale getirebilir. Yine bir yada birkaç merkezde oluşan bir arıza büyük bir ağın çalışmasını çökertip, merkezler arasındaki iletişimin kesilmesine neden olabilir. Yada pizzacının, pizzasını ulaştırmaya çalıştığı yoldaki bir onarım (eğer başka bir ulaşım yolu yoksa) pizzaların yerine ulaşmamasına yani iletişimin kopmasına neden olabilir. Kısacası, merkezlerin birbiriyle haberleşmesine engel olan virüsler, doğal afetler, bozukluklar gibi etkenler iletişim ağlarının zedelenmesine ve ağ yapısının değişmesine neden olurlar.

Bir iletişim ağındaki herhangi bir zedelenmenin oluşturduğu zarar, iletişim ağının yapısına, boyutuna ve ağın günlük yaşamdaki kullanım sahasına bağlıdır. Diğer bir deyişle, zedelenebilirlik değeri göreceli bir kavramdır.

Örneğin, iki kişilik oyun amaçlı kurulan bir iletişim ağı için iki bilgisayardan birinin bozulması durumunda oluşan zarar, sadece oyunun bilgisayar

onarılıncaya kadar oynanmaması olup bu zarar çok önemli değildir. Ancak daha büyük zararların olduğu örneklerde verilebilir. Örneğin, dünyada iki tane hava alanı olan şehirlerden biri olan Shangaydaki uçuş seferlerini ele alalım. Buradaki Pudong Uluslararası Havaalanı ve Hongqiao Uluslararası Havaalanındaki iki kuleyi düşünelim. Kuleler kapsama alanları içindeki uçakların hava alanına inişi uygunsa (orada kalkmaya hazırlanan bir başka uçak yoksa) uçağın ne zaman, nereye ve hangi koşullarda sağlıklı bir şekilde inebileceği ile ilgili bilgi verirler. Varsayalım ki Shangay'a doğru yaklaşan uçak bilinmeyen nedenlerle bozuluyor ve acil iniş yapmak istiyor. Öncelikle en yakındaki Pudong hava alanındaki kuleyle iniş için irtibata geçiyor. Pilot iniş için gerekli direktifleri alırken kulede yaşanan bir sorundan dolayı kule ile uçak arasındaki iletişim kopuyor. Eğer uçak Hongqiao hava alanındaki kulenin kapsama alanına girebilirse yani bir iletişim yoluyla Hongqiao hava alanındaki kuleye bağlanabilirse bu kuledekilerin verdiği emirler doğrultusunda sağlıklı bir iniş yapabilir. Ama Hongqiao hava alanında kuledekiler bu uçak ile veri alışverişi yapamıyor ise uçağın pilotu kendi çabaları ile inmeye çalışacaktır. Bu durumda hava alanında henüz havalanmakta olan bir başka uçak ile çarpışabilir yada şans eseri sağlıklı bir iniş yapabilir. Burada bir başka uçak ile çarpışma durumunda ölüm gibi geri dönüşü olmayan bir bedel ödemek söz konusudur.

Görüldüğü gibi, zedelenme iletişim ağının kullanım alanına ve şartlara bağlı olarak önemsiz sorunlara neden olabileceği gibi bazen de ölümcül sorunlara neden olabilir.

İletişim ağlarını modellemek için graflar kullanılır. İletişim ağını oluşturan her bir merkeze “**grafın tepesi**” ve bu merkezler arasındaki bağlantılara da “**grafın ayrıtı**” denir. Bir G grafının tepeler kümesi $V(G)$ ve ayrıtlar kümesi $E(G)$ olmak üzere, bir G grafi $G = (V, E)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.1: Zedelenebilirlik , bir iletişim ağında bazı merkezlerin veya bağlantı hatlarının bozulmasıyla iletişim kesilene kadar ağın gösterdiği dayanma gücüdür.

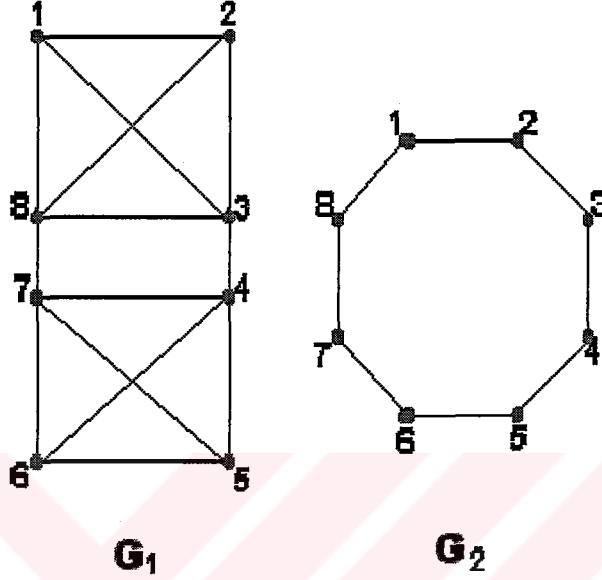
Bir iletişim ağının bazı merkezleri veya bağlantı hatları çeşitli nedenlerle zarara uğradığında, oluşan zararın belirlenebilmesi için aşağıdaki soruların yanıtı aranır (Başka sorular da olabilir).

- 1) Ağ üzerinde iletişimin kopması için bozulması gereken en az eleman sayısı kaç tanedir?
- 2) Ağ kaç tane alt parçaya ayrılmıştır?
- 3) İletişimin devam ettiği alt ağların merkez sayısı nedir?
- 4) En çok merkeze sahip alt ağın merkez sayısı nedir?
- 5) İletişimin devam ettiği alt ağlardaki merkezleri birbirine bağlayan yolların sayısı nedir?

Bu soruların yanıtlarını araştırmak için iletişim ağı bir graf ile modellenir ve graflar için tanımlanmış zedelenebilirlik ölçümleri kullanılır. Bu konuda bilinen en eski ölçüm bir G grafının **bağlantılılık (connectivity)** sayısıdır.

Tanım 1.1.2. Bağlantılılık (Connectivity): Birleştirilmiş bir G grafını bağlantısız bir graf yada izole tepelerden oluşan bir graf haline getirmek için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısına grafın bağlantılılık sayısı denir ve $\kappa(G)$ ile gösterilir.

Zedelenebilirlik için bir ölçüm olan bağlantılılık sayısı bir G grafının dolayısıyla da bir ağın zedelenebilirlik değerini tam olarak ortaya koymamaktadır. Bunun nedenini araştırmak için Şekil 1.1.2 deki grafları ele alalım. Bu grafların bağlantılılık sayıları ikidir.



Şekil 1.1.2. Bağlantılılık sayıları 2 olan G_1 ve G_2 grafları

G_1 grafinda 3 ve 8 numaralı tepeler, G_2 grafinda ise 3 ve 5 numaralı tepeler grafları bağlantısız yapan tepelerdir. Bu iki grafin, bağlantılılık sayıları eşit olmasına rağmen, atılan tepelerin kalan graftaki etkileri farklıdır. G_1 grafi için, 3 ve 8 numaralı tepeler çıkarıldığında geriye kalan alt graflar 2 tepeli yol ve 4 tepeli tam graftır. G_2 grafinda ise, 3 ve 5 numaralı tepeler çıkarıldığında geriye kalan graf bir tek tepe ve 5 tepeli yol graf içermektedir. Burada, her iki grafinda bağlantılılık sayısı olan 2 değeri, her iki grafinda 2 adet tepesinin atılmasıyla geriye kalan grafların bağlantısız olduğunu belirtmekte, ancak bileşenlerin eleman sayıları hakkında bir bilgi vermemektedir. O halde, bağlantılılık sayısı bir G grafinin zedelenebilirlik değeri hakkında tam bir bilgi ortaya koymamaktadır. Diğer bir deyişle, yukarıdaki sorularımızın çoğuna bağlantılılık ölçümü yanıt vermemekte olup, diğer merkezlerin ne oranda etkilendiği, iletişimin bazı alt ağlarda devam edip etmediği, alt ağların sayısı ve bu alt ağların eleman sayısı ortaya konulamaz. O

halde yukarıdaki soruların yanıtlarını daha iyi bir şekilde verebilmek için başka bir ölçüm gereklidir.

1.2 Bir G Grafının Bütünlük Ölçümü

Bir iletişim ağının zedelenebilirliğinin incelenmesinde, genellikle, aşağıdaki iki sorunun yanıtı aranır.

- 1) Bozulmuş merkezlerin sayısı nedir?
- 2) Haberleşmenin halen sürdüğü en çok merkeze sahip alt ağın eleman sayısı nedir?

Özellikle, bu iki sorunun yanıtının eşzamanlı olarak küçük olması istenir. Bu anlamda, bir G grafının zedelenebilirlik değerini ölçmek için **Bütünlük** kavramı Entringer, Barefoot ve Swart tarafından 1987 de tanımlanmıştır.

Tanım 1.2.1: (Entringer et al., 1987) G bir graf ve G nin tepelerinin herhangi bir alt kümesi S olsun. $G-S$ grafının en büyük boyutlu bileşeninin tepe sayısı $m(G-S)$ olmak üzere; G grafının tepe bütünlük değeri (yada kısaca bütünlüğü)

$$I(G) = \min_{S \subset V(G)} \{|S| + m(G-S)\} \text{ dir.}$$

Bütünlük üzerine elde edilen bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.2.1 (Goddard and Swart, 1988; Bagga et al., 1992)

a) n tepeli K_n tam grafi için $I(K_n) = n$,

b) $K_{1,n}$ yıldız grafi için $I(K_{1,n}) = 2$,

c) n tepeli P_n yol grafi için $I(P_n) = \lceil 2\sqrt{n+1} \rceil - 2$,

d) n tepeli C_n çevre grafi için $I(C_n) = \lceil 2\sqrt{n} \rceil - 1$,

e) $m+n$ tepeli, iki parçalı tam graf için $I(K_{m,n}) = 1 + \min\{m, n\}$.

Teorem 1.2.2 (Goddard and Swart, 1990) G , n tepeli bir graf olsun.

a) $I(G)=1$ olması için gerek ve yeter koşul G nin null (boş) graf olmasıdır.

b) $I(G)=2$ olması için gerek ve yeter koşul G nin tüm bileşenlerinin tepeler olması yada G nin bir yıldız graf olmasıdır.

c) $I(G)=n-1$ olması için gerek ve yeter koşul G nin tam graf olmaması ve G nin tümleyen grafinin en az 5 kuşaklı olmasıdır.

d) $I(G) = n$ olması için gerek ve yeter koşul G nin tam graf olmasıdır.

Bir G grafinin bütünlük değerini sağlayan S kümesi, **I-set** ile gösterilir ve bu durumda $|S| + m(G-S) = I(G)$ dir.

Tanım 1.2.2: Bir G grafinin bazı tepelerini graftan çıkardığımızda grafin bileşenlerinin sayısı azalıyorsa bu kümeye grafin **kesim kümesi** denir.

Teorem 1.2.3 (Entringer et al., 1987) S kümesi bir I-set olsun. Bu durumda,

a) $I(G-S) = m(G-S)$

b) G tam graf değilse, S kümesi kesim kümedir.

1.2.1 Bütünlük ve Graf Parametreleri

Bir G grafinin bütünlük değerinin alt veya üst sınırlarını bulmak için bazı graf parametreleri kullanılır. Örneğin, tam olmayan bir graftaki bir minimal I -set bir kesim küme olduğundan herhangi bir G grafinin bütünlük değerinin bağlantılılık sayısından en az 1 fazla olduğunu söyleyebiliriz. Burada diğer graf parametrelerini kullanmadan önce bu parametrelerin tanımını verelim:

Tanım 1.2.3: Bir G grafinin herhangi bir v tepesine bitişik olan ayrıtların sayısına v tepesinin derecesi denir. Bir G grafinin en küçük tepe derecesi $\delta(G)$ ile, en büyük tepe derecesi ise $\Delta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.4: Bir G grafinin tepeler kümesi $V(G)$ olmak üzere $S \subseteq V(G)$ olsun. G grafinin her bir ayrıtının en az bir uç noktası S kümesinde ise bu kümeye G grafinin örtü kümesi (*covering set*) denir. Bir G grafinin birden fazla örtü kümesi olabilir. Bu kümeler içerisinde en az elemanlı kümenin eleman sayısına G grafinin örtü sayısı (*covering number*) denir ve $\alpha(G)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.5: Bir G grafinin tepeler kümesi $V(G)$ olmak üzere $S \subseteq V(G)$ olsun. S kümesinin herhangi iki tepe çifti arasında bir ayrıt yoksa, bu kümeye G grafinin bağımsız kümesi (*independent set*) denir. Bir G grafinin birden fazla bağımsız kümesi olabilir. Bu kümeler içerisinde en çok elemanlı kümenin eleman sayısına G grafinin bağımsızlık sayısı (*independent number*) denir ve $\beta(G)$ ile gösterilir.

Bu parametrelerden faydalananarak Goddard ve Swart aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır.

Teorem 1.2.4 : (Goddard and Swart, 1990) n tepeli herhangi bir G grafi için,

a) $I(G) \leq \alpha(G) + 1$

b) $I(G) \geq \delta(G) + 1$

c) $I(G) \geq (n - \kappa(G)) / \beta(G) + \kappa(G)$

d) $I(G) = \kappa(G) + 1$ eğer ve yalnız eğer $\kappa(G) = \alpha(G)$ ise.

1.2.2 Tekli Graf İşlemleri

Bu kısımda, bir G grafi için tümleyen (complement) ve güç (power) tekli işlemleri kullanılarak elde edilen bazı sonuçlar verilecektir.

Tanım 1.2.6 : Bir G grafinin tepeler kümesi $V(G)$ ile G de olmayan ayrıtların oluşturduğu yeni grafa G nin tümleyeni denir ve $\overline{G}$ ile gösterilir.

Aşağıdaki teorem bir grafin ve onun tümleyeninin bütünlük değeri için bir alt sınır verir.

Teorem 1.2.5: (Goddard and Swart, 1988) n tepeli herhangi bir G grafi için

a) $I(G) + I(\overline{G}) \geq n + 1$

b) $I(G) * I(\overline{G}) \geq n$

Tanım 1.2.7: Bir G grafinin k ' ıncı gücü, G^k ile gösterilir ve G^k grafinin tepeler kümesi $V(G)$ ve ayrıt kümesi de $E(G^k) = \{uv : d_G(u, v) \leq k\}$ dir.

Bu tanımdan ve bütünlük tanımından, herhangi bir G grafi ve k pozitif tamsayısı için $I(G) \leq I(G^2) \leq I(G^3) \leq \dots \leq I(G^k)$ olduğu kolayca görülebilir (Entringer et al., 1987).

Teorem 1.2.6: (Entringer et al., 1987) $1 \leq k \leq n/2$ için

$s = \left\lceil \sqrt{n/k + 1/4} + \frac{1}{2} \right\rceil$ olsun. Bu durumda,

$$I(C_n^k) = k(s-1) + \lceil n/s \rceil \text{ dir.}$$

1.2.3 İkili Graf İşlemleri

Bu kısımda, iki graf arasında birleşim, toplama ve çarpım işlemleri uygulandığında elde edilen yeni grafların bütünlük değerleri için elde edilen bazı sonuçlar verilecektir.

Tanım 1.2.8: $G_1, G_2, \dots, G_k$ graflarının birleşimi $G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \dots \cup G_k$ biçiminde gösterilir. Bu yeni grafın tepeler kümesi $\bigcup_{i=1}^k V(G_i)$ ve ayrıt kümesi $\bigcup_{i=1}^k E(G_i)$ dir.

Bir G grafi, $G_1, G_2, \dots, G_k$ graflarının birleşimi ise $m(G) = \max(G_i)$ olduğu kolayca görülebilir.

Teorem 1.2.7: (Goddard and Swart, 1988) Eğer $G = \bigcup_{i=1}^k G_i$ ise,

$$\max_i I(G_i) \leq I(G) \leq \sum_{i=1}^k I(G_i) - k + 1 \text{ dir.}$$

Tanım 1.2.9: G ve H graflarının tepe kümeleri sırasıyla $V(G)$ ve $V(H)$ olsun. $V(G)$ deki her bir tepenin $V(H)$ deki her bir tepe ile birleştirilmesine iki grafın toplamı denir ve $G + H$ ile gösterilir.

Teorem 1.2.8: (Goddard and Swart, 1988) Herhangi iki G ve H grafi için

$$I(G+H) = \min\{I(G) + |H|, I(H) + |G|\} \text{ dır.}$$

Tanım 1.2.10 : G_1 ve G_2 graflarının kartezyen çarpımının tepeler kümesi $V(G_1) \times V(G_2)$ olup, (u_1, u_2) tepesi (v_1, v_2) tepesine ya $u_1 = v_1$ iken u_2, v_2 'ye bağlıysa yada $u_2 = v_2$ iken u_1, v_1 'ye bağlıysa bir ayırıt ile birleştirilmiştir.

Teorem 1.2.9: (Atici and Kırlangıç, 2000) $n \geq 3$, $a = \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor$ alt sınır ve $b = \lceil 2\sqrt{n+1} \rceil$ üst sınır olsun. Bu durumda

$$I(K_2 \times P_n) = \begin{cases} 2I(P_n) - 1, & n+1 \leq a(b - a - \frac{1}{2}), \\ 2I(P_n), & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

Teorem 1.2.10: (Atici and Kırlangıç, 2000) $n \geq 3$, $a = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ alt sınırı ve $b = \lceil 2\sqrt{n} \rceil$ üst sınır olsun. Bu durumda

$$I(K_2 \times C_n) = \begin{cases} 2I(C_n) - 1, & n+1 \leq a(b - a - \frac{1}{2}), \\ 2I(C_n), & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

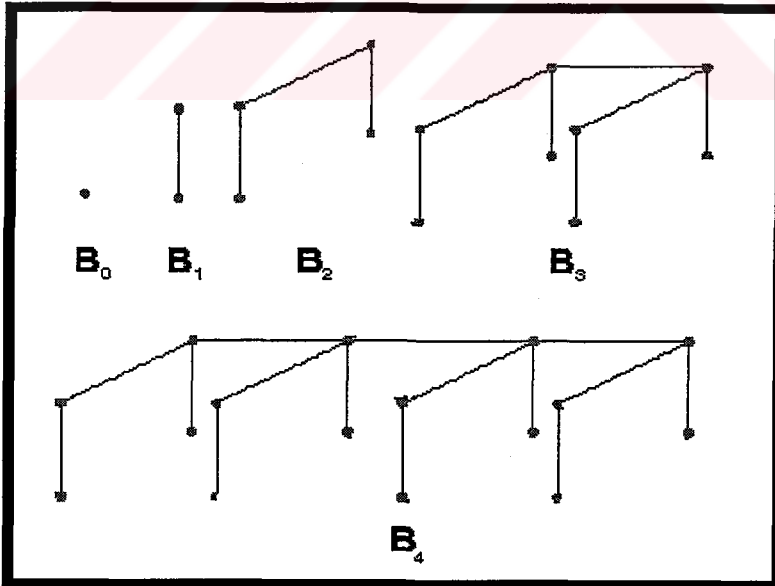
2. BİNOMİAL AĞAÇ GRAFLARIN DOUBLE VERTEX GRAFLARININ BÜTÜNLÜK DEĞERLERİ

2.1 Binomial Ağaç Graflar ve Double vertex Graflar

Bu bölümde, B_2, B_3, B_4 binomial ağaç graflarının double-vertex grafi elde edilerek, bu grafların bütünlük değerleri hesaplanacaktır. Bu amaçla, aşağıda binomial ağaç grafların ve double vertex grafların tanımı verilmiştir.

Tanım 2.1.1: $n \geq 0$ dereceli, R köklü binomial ağaç B_n ile gösterilir. Burada R tek bir tepeyi ifade etmektedir. Eğer $n=0$ ise, $B_n = B_0 = \{R\}$ 'dir. Yani, 0 dereceli binomial ağaç sadece bir tek tepeden oluşur. Eğer $n>0$ ise, $B_n = \{R, B_0, B_1, \dots, B_{n-1}\}$ olup $n>0$ dereceli binomial ağaç n tane $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ binomial alt ağaçlarından oluşur.

Bir binomial ağaç grafin tepe sayısı $|V(B_n)| = 2^n$ ve ayrıt sayısı $|E(B_n)| = 2^n - 1$ dir.



Şekil 2.1.1. B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 Binomial Ağaçları

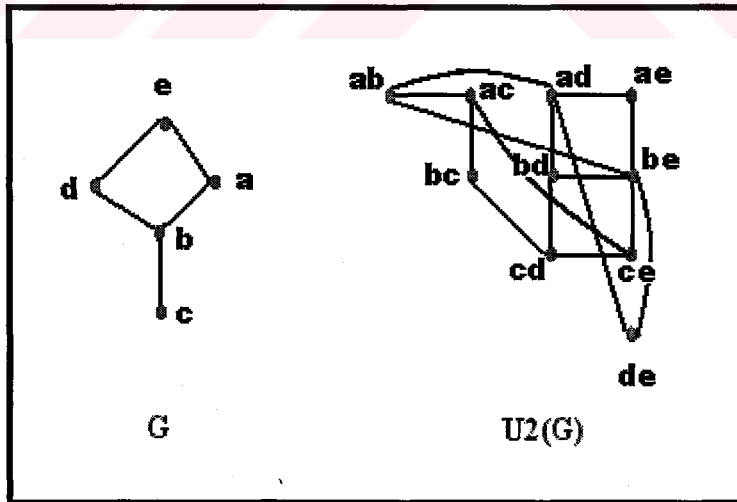
n dereceli bir binomial ağac 2 tane $n-1$. dereceli binomial ağacın köklerinin bir ayrıtla birleştirilmesinden oluşur.

Herhangi bir G grafinin double-vertex grafi Y. Alavi, M. Behzad, P. Erdős ve D.R. Lick tarafından tanımlanmıştır (Alavi et al., 1991).

Tanım 2.1.2: $G = (V,E)$ en az iki tepeli bir graf olsun. Bir G grafinin double-vertex grafi $U_2(G)$ şeklinde gösterilir ve grafin tepeler kümesi V nin iki elemanlı tüm alt kümelerinden oluşur. $U_2(G)$ grafinin herhangi iki tepesi $\{x,y\}$ ve $\{u,v\}$ ise bu iki tepenin bir ayrıtla birleştirilmesi için gerek ve yeter koşul $x=u$ ve $|\{x,y\} \cap \{u,v\}|=1$ olmasıdır. Bu durumda y ve v tepeleri G grafinde bitişiktir.

Bir binomial ağaç grafin double vertex grafinin tepelerinin sayısı $V(U_2(B_n)) = 2^{n-1} * (2^n - 1)$ ve ayrıt sayısı $E(U_2(B_n)) = (2^n - 1) * (2^n - 2)$ dir.

Aşağıdaki şekilde bir G grafi ve bu grafin double-vertex grafi verilmiştir (Şekil 2.1.2).



Şekil 2.1.2. G Grafi ve $U_2(G)$ grafi

2.2 Binomial Ağaç Grafların Double Vertex Graflarının Tepe

Bütünlük Değerinin Bulunması

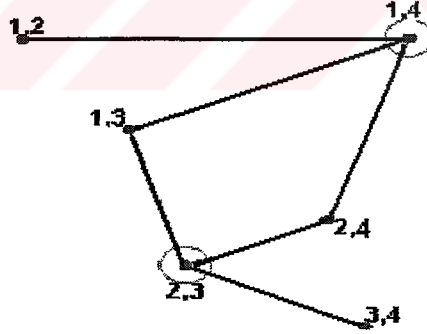
Teorem 2.2.1: B_2 binomial ağaç grafinin double vertex grafi $U_2(B_2)$ ise, B_2 binomial ağaç grafinin double vertex grafinin bütünlük değeri $I(U_2(B_2))=3$ dür.

Kanıt: İki tane B_1 grafinin bir ayrıtla birleştirilmesiyle B_2 grafi oluşur (Şekil 2.2.1). B_2 grafinin tepelerini aşağıdaki gibi numaralandıralım.



Şekil 2.2.1. B_2 grafi

Bu durumda , B_2 grafinin double vertex grafi aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.2.2. B_2 binomial ağaç grafinin double vertex grafi

Bütünlük tanımına göre, burada S kümesi seçilirken amacımız $|S|+m(G-S)$ toplamını minumum yapan değeri bulmaktır ve tüm S kümeleri denendiğinde görülmektedir ki en uygun S kümesi $(1,4)$ ve $(2,3)$ tepelerinden oluşmaktadır. Bunun nedeni, B_2 grafini oluşturmak için iki tane B_1 grafini birleştiren $(2,4)$

ayrıtının $U_2(B_2)$ de oluşturduğu ayrıtların uç noktalarının en çok dereceli olan tepelerinin atılmasıyla grafın daha çok parçaya ayrılmasıdır.

$U_2(B_2)$ grafının ayrıtlarının oluşumu ve S kümesinin tepelerinin seçimi tablo 2.2.1 de gösterilmiştir. Bu tablo, double vertex grafın tanımından faydalanılarak, B_2 binomial ağaç grafın double vertex grafının tepelerinin elde edilmesini göstermektedir.

$U_2(B_2)$ grafının ayrıtlarının oluşumu:		
B_2 grafının $E(1,2)$ ayrıtı için:	(1,3; 2,3)	(1,4; 2,4)
B_2 grafının $E(2,4)$ ayrıtı için:	(1,2; 1,4)	(2,3; 3,4)
B_2 grafının $E(3,4)$ ayrıtı için:	(1,3; 1,4)	(2,3; 2,4)

Tablo 2.2.1 $U_2(B_2)$ grafının ayrıtları

Bu durumda, S kümesi aşağıdaki şekilde iki biçimde seçilebilir.

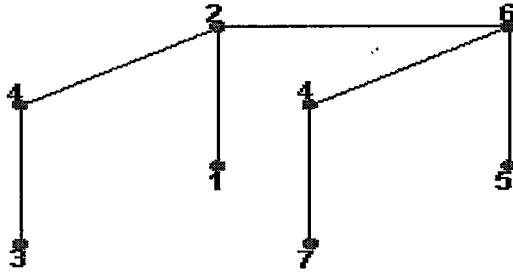
1) $S = \{(1,4), (2,3)\}$ ise $m(U_2(B_2) - S) = 1$ olup $I(U_2(B_2)) = 2 + 1 = 3$ olur.

2) S kümesi $S = \{(1,4), (2,3)\}$ dışında ne seçilirse seçilsin $m(U_2(B_2) - S) \geq 1$ olup $I(U_2(B_2)) \geq 3$ dür.

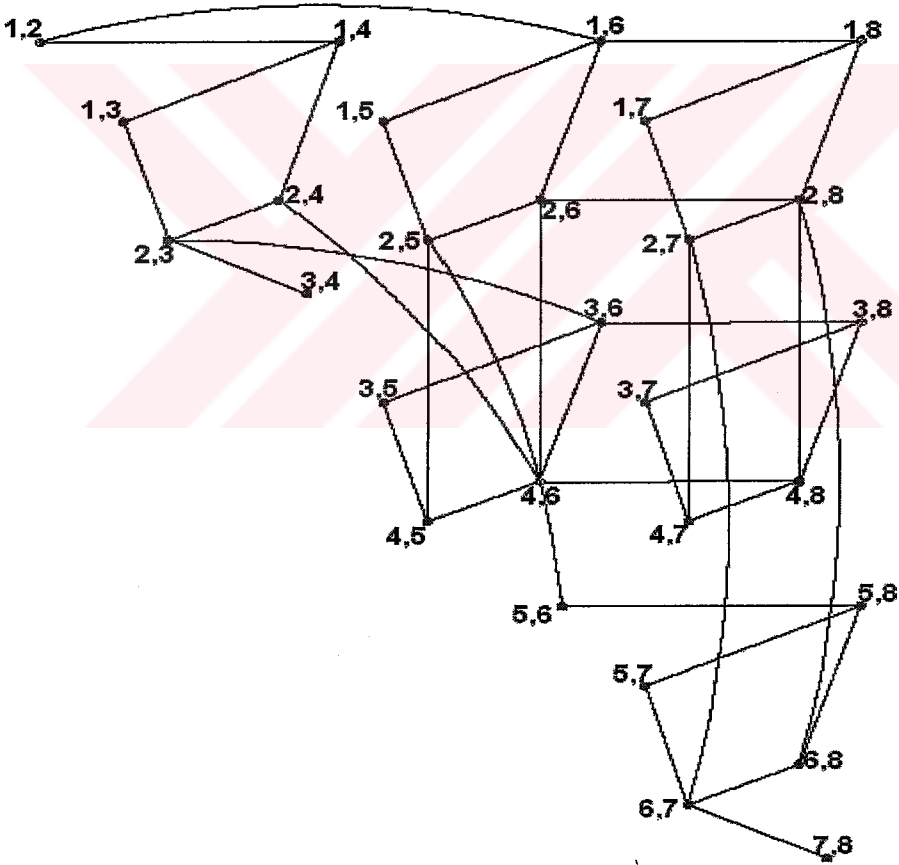
Sonuç olarak $I(U_2(B_2)) = 2 + 1 = 3$ dir.

Teorem 2.2.2: B_3 binomial ağaç grafının double vertex grafi $U_2(B_3)$ ise, B_3 binomial ağaç grafının double vertex grafının bütünlük değeri $I(U_2(B_3)) = 12$ dir.

Kanıt: İki tane B_2 grafının bir ayrıtla birleştirilmesiyle B_3 grafi oluşur (Şekil 2.2.3). B_3 grafının tepelerini aşağıdaki gibi numaralandıralım. Bu graftan elde edilen $U_2(B_3)$ grafi ise Şekil 2.2.4 de verilmiştir.



Şekil 2.2.3. B_3 binomial ağaç grafi

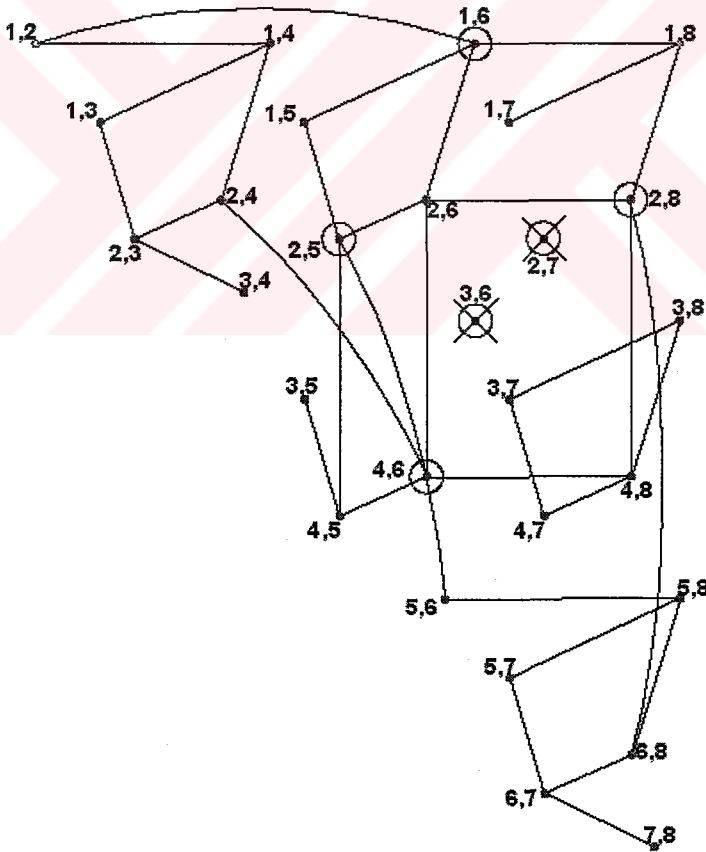


Şekil 2.2.4. B_3 grafinin double vertex grafi $U_2(B_3)$

Burada, amaç $|S|+m(G-S)$ toplamının minimum değerini bulmak ve bunun için tüm S kümelerini ele almakır:

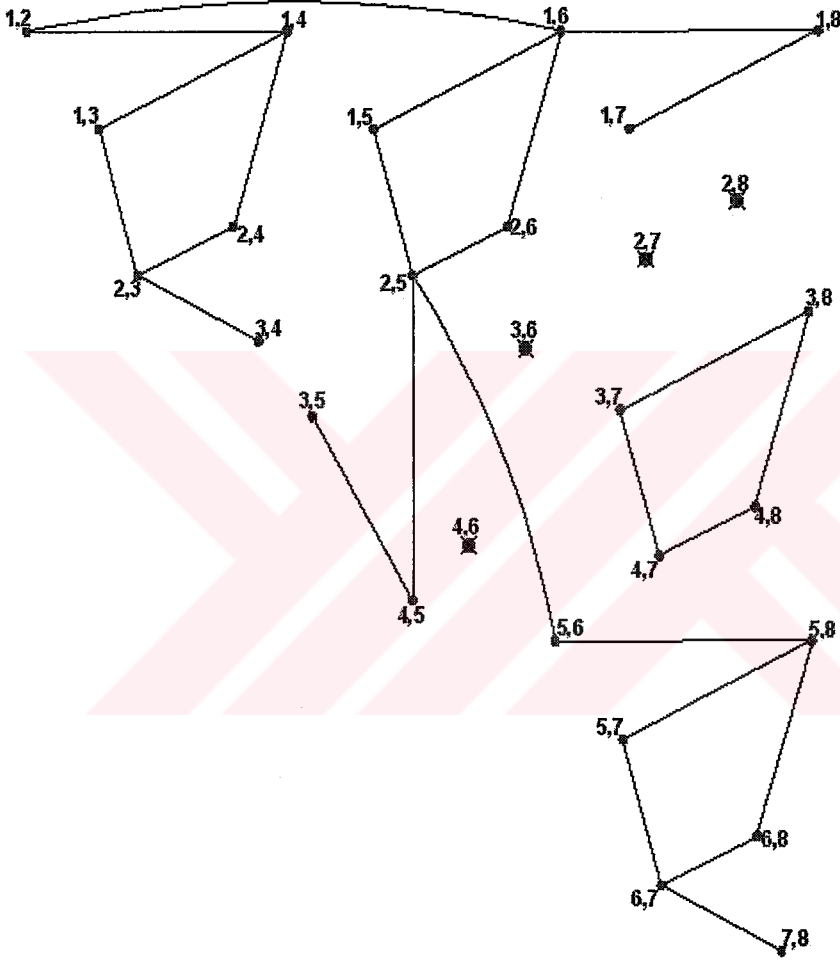
$U_2(B_3)$ grafını mümkün olduğunca çok parçaya ayırabilmek için B_3 grafindaki $(2,6)$ ayrıtının kullanılmasıyla $U_2(B_3)$ de oluşan $(1,2;1,6)$, $(2,3;3,6)$, $(2,4;4,6)$, $(2,5;5,6)$, $(2,7;6,7)$, $(2,8;6,8)$ ayrıtlarının uç noktalarından en çok dereceli olanın atılması gereklidir.

1) S kümesi $S=\{(1,6), (3,6), (4,6), (2,5), (2,7), (2,8)\}$ olsun. Şimdi, $(2,7)$ ve $(3,6)$ tepelerinden başlayarak adım adım S kümesindeki tepeleri graftan çıkartalım.



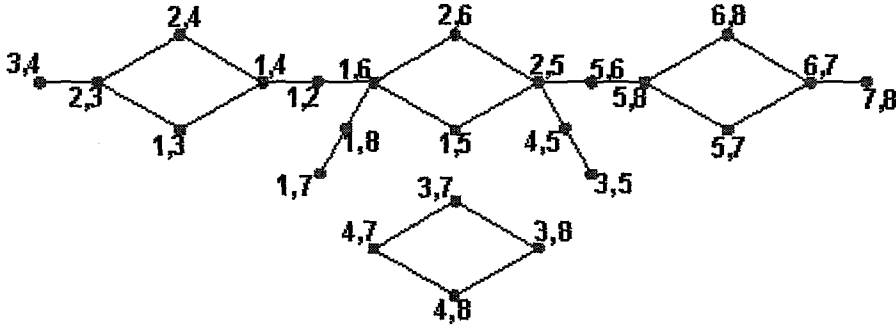
Şekil 2.2.5. $U_2(B_3)$ grafindan $(2,7)$ ve $(3,6)$ tepelerinin atılmasıyla elde edilen graf

Şimdi de (2,8) ve (4,6) tepelerini de çıkartarak kalan grafi inceleyelim.
 Şekil 2.2.6 da görüldüğü gibi, kalan graf birleştirilmemiş graftır.



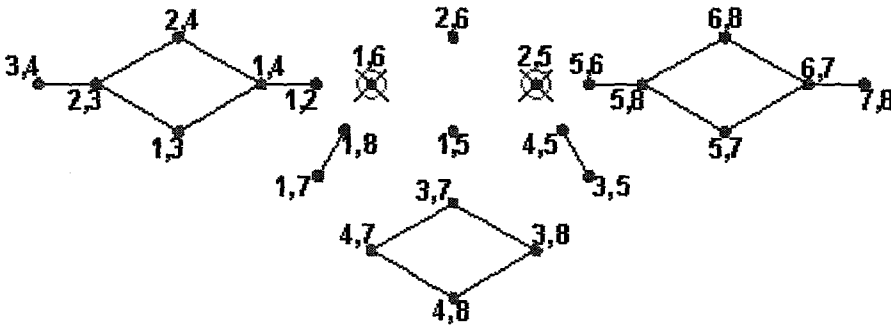
Şekil 2.2.6. $U_2(B_3)$ grafindan (2,7), (2,8), (3,6) ve (4,6) tepelerinin çıkarılmasıyla oluşan graf

Şekil 2.2.6 daki graf simetrikliğin görülmesi için aşağıdaki şekilde de çizilebilir.



Şekil 2.2.7. Şekil 2.2.6 nm daha açık çizilmiş hali.

Son olarak S kümesinin (1,6) ve (2,5) tepelerini çıkarttığımızda geriye yedi parçaya ayrılmış aşağıdaki gibi bir graf kalır.



Şekil 2.2.8. $U_2(B_3)$ grafından (1,6), (3,6), (4,6), (2,5), (2,7) ve (2,8) tepelerinin çıkarılmasıyla oluşan graf

Daha fazla tepe çıkarmaya çalıştığımızda elde edilen bütünlük değeri artmaya başlar.

Bu durumda, $m(U_2(B_3) - S) = 6$ olup

$$I(U_2(B_3)) = 6 + 6 = 12 \text{ olur.}$$

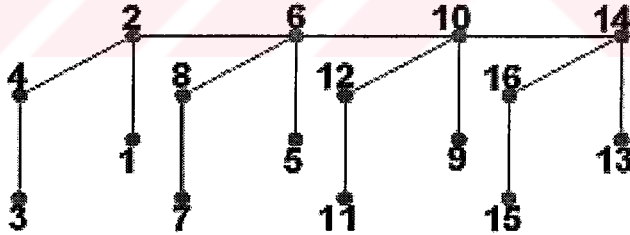
2) S kümesi $S = \{(1,6), (3,6), (4,6), (2,5), (2,7), (2,8)\}$ dışında ne seçilirse seçilsin $m(U_2(B_3) - S) \geq 6$ olup $I(U_2(B_3)) \geq 12$ dir.

Sonuç olarak,

$$I(U_2(B_3)) = 6 + 6 = 12 \text{ dir}$$

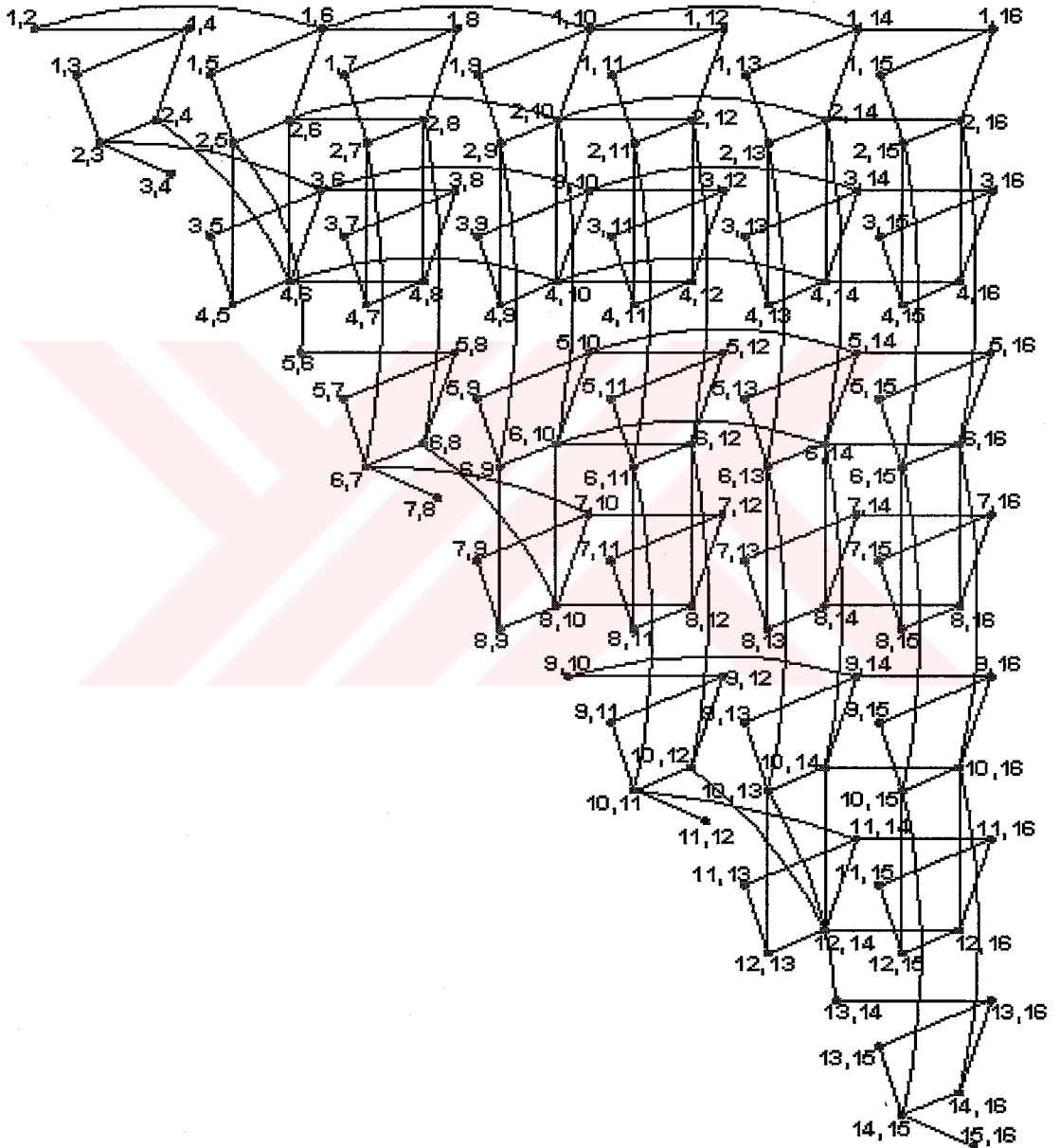
Teorem 2.2.3: B_4 binomial ağaç grafinin double vertex grafi $U_2(B_4)$ ise, B_4 binomial ağaç grafinin double vertex grafinin bütünlük değeri $I(U_2(B_4)) = 38$ dir.

Kanıt: İki tane B_3 grafinin bir ayrıtla birleştirilmesiyle B_4 grafi oluşur (Şekil 2.2.9). B_4 grafinin tepelerini aşağıdaki gibi numaralandıralım.



Şekil 2.2.9. B_4 binomial ağaç grafi

Bu durumda , B_4 grafinin double vertex grafi $U_2(B_4)$ grafi Şekil 2.2.10 da görülmektedir.

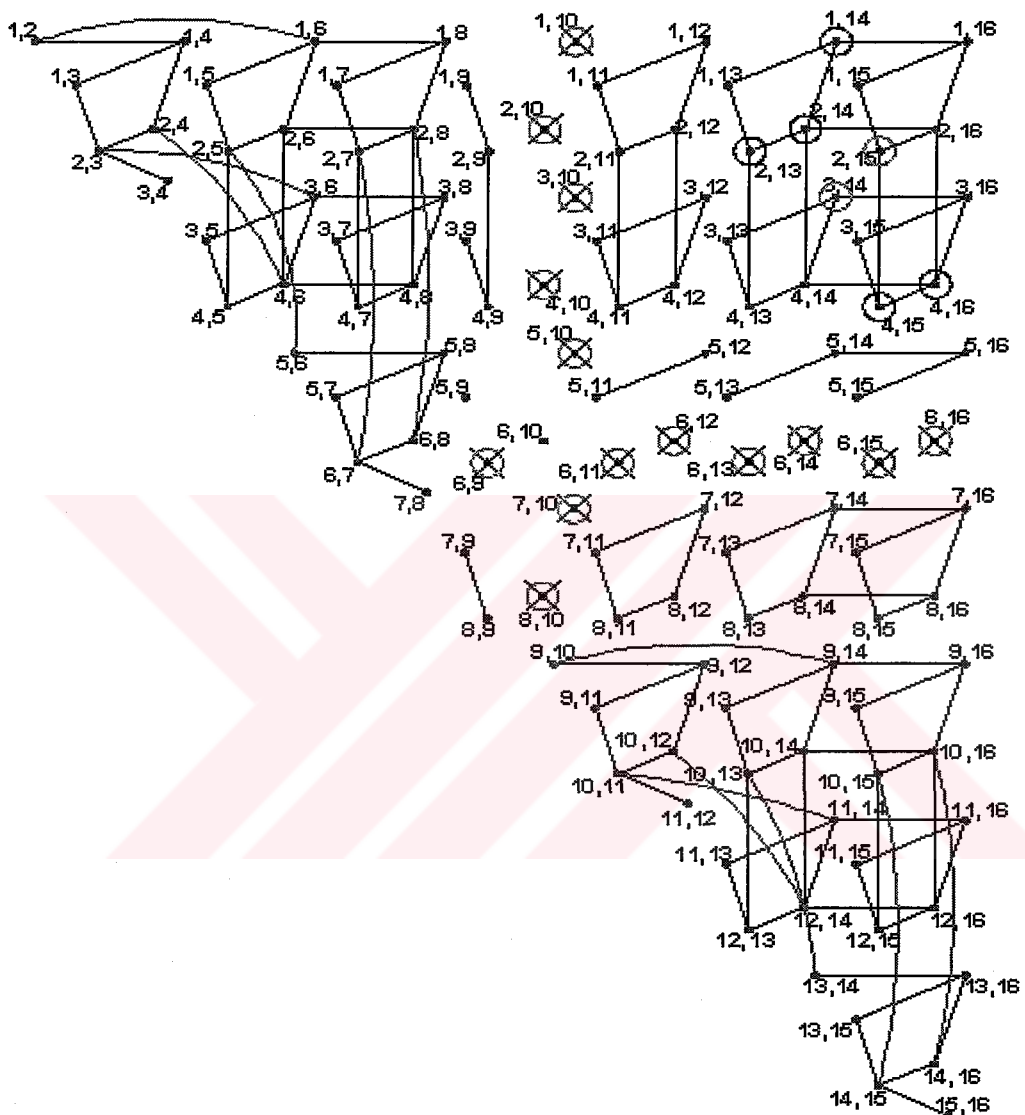


Şekil 2.2.10. $U_2(B_4)$ grafi

Burada, amaç $|S|+m(G-S)$ toplamının minimum değerini bulmak ve tüm S kümelerini ele almaktır:

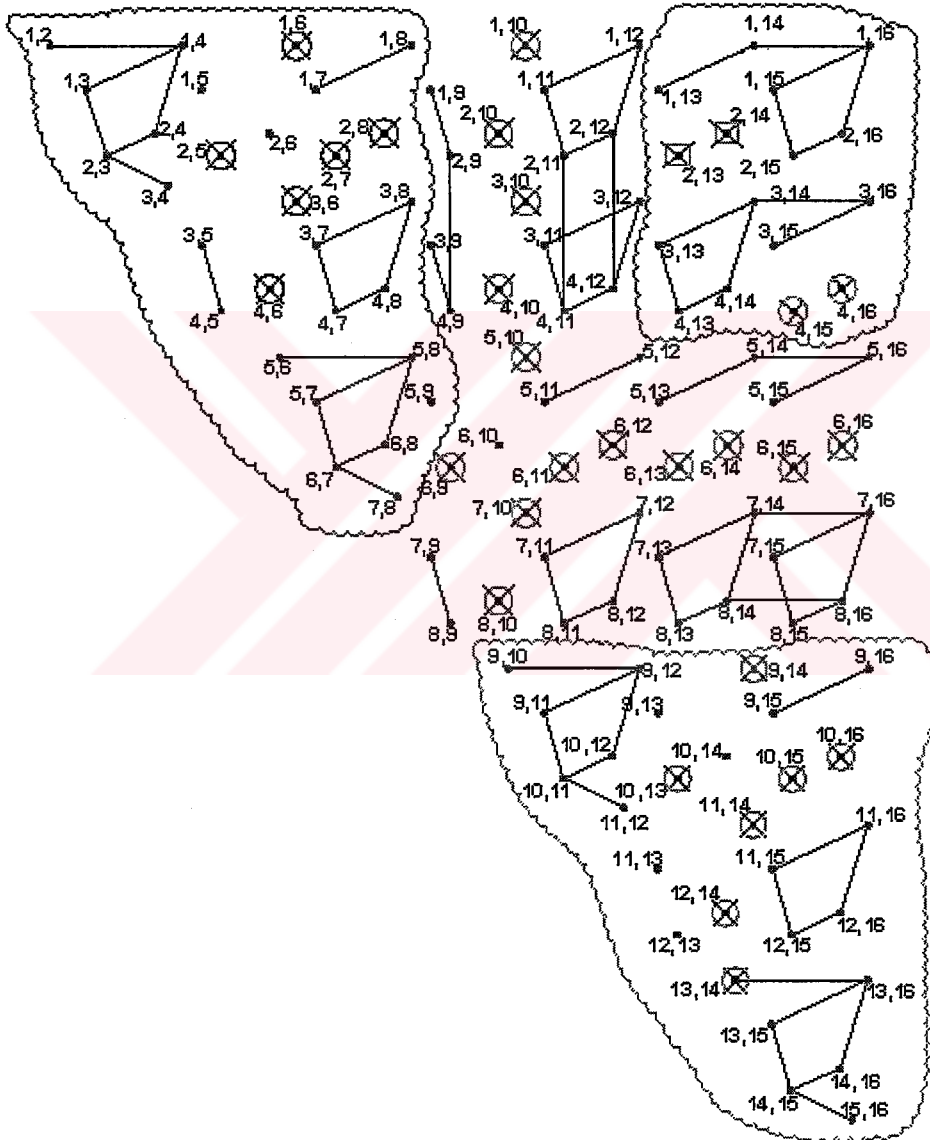
$U_2(B_4)$ grafinı mümkün olduğunca çok parçaya ayırabilmek için B_4 grafindaki iki tane B_3 grafinı birleştiren $(6,10)$ ayrıtının kullanılmasıyla $U_2(B_4)$ de oluşan ayrıtların uç noktalarından en büyük dereceli olan tepelerin atılması gereklidir.

Bu durumda graftan $\{(1,10), (2,10), (3,10), (4,10), (5,10), (7,10), (8,10), (6,9), (6,11), (6,12), (6,13), (6,14), (6,15), (6,16)\}$ tepelerini çıkarırsak, geriye kalan graf 2 tane $U_2(B_3)$ grafinın double vertex'ini ve aşağıdaki alt grafları içermektedir (Şekil 2.2.11).



Şekil 2.2.11. $U_2(B_4)$ grafından (6,10) ayrıtının kullanılmasıyla oluşan ayrıtların uç noktalarından en büyük dereceli olan tepelerin atılması

Bu kezde graftan $\{(1,6), (3,6), (4,6), (2,5), (2,7), (2,8), (9,14), (10,13), (10,15), (10,16), (11,14), (12,14), (2,13), (2,14), (4,15), (4,16)\}$ tepelerini çıkarırsak (Şekil 2.2.12) deki graf elde edilir.



Şekil 2.2.12. Bütünlük değerini minimum yapan tüm tepelerin atılması

B_4 grafinın double vertex grafinın bütünlük değerini bulmak için yaptığımız adımları özetlersek,

- İlk olarak B_4 grafinın double vertex grafindan, B_4 grafindaki iki tane B_3 grafinı birleştiren $(6,10)$ ayrıtının kullanılmasıyla $U_2(B_4)$ de oluşan ayrıtların uç noktalarından en büyük dereceli tepeler atılır. Bu tepeler $\{(1,10), (2,10), (3,10), (4,10), (5,10), (7,10), (8,10), (6,9), (6,11), (6,12), (6,13), (6,14), (6,15), (6,16)\}$ tepeleri olup 14 tanedir. Böylece geriye iki tane B_3 alt grafi ve 16 tepeli bir alt graf kalır.
- İki tane B_3 grafi için sanki tek başına B_3 grafinın double vertex'i bulunuyormuş gibi 6 şar tane ve yerleri simetrik tepeler olan $\{(1,6), (3,6), (4,6), (2,5), (2,7), (2,8)\}$ ve $\{(9,14), (10,13), (10,15), (10,16), (11,14), (12,14)\}$ çıkarılır.
- Son olarak 16 elemanlı (geriye kalan alt graflar arasında en çok elemanlı) graftan 4 tane $\{(2,13), (2,14), (4,15), (4,16)\}$ tepeleri çıkarılır.
- Geriye kalan grafta en çok elemanlı alt grafin eleman sayısı 8 olur.

Sonuç olarak,

1) S kümesi,

$$S = \{(1,10), (2,10), (3,10), (4,10), (5,10), (7,10), (8,10), (6,9), (6,11), (6,12), (6,12), (6,13), (6,14), (6,15), (6,16), (1,6), (3,6), (4,6), (2,5), (2,7), (2,8), (9,14), (10,13), (10,15), (10,16), (11,14), (12,14), (2,13), (2,14), (4,15), (4,16)\}$$

şeklinde seçilirse $m(U_2(B_4)-S) = 8$ olup

$$I(U_2(B_4)) = 38 \text{ dir.}$$

2) S kümesi,

$S = \{(1,10), (2,10), (3,10), (4,10), (5,10), (7,10), (8,10), (6,9), (6,11), (6,12), (6,12), (6,13), (6,14), (6,15), (6,16), (1,6), (3,6), (4,6), (2,5), (2,7), (2,8), (9,14), (10,13), (10,15), (10,16), (11,14), (12,14), (2,13), (2,14), (4,15), (4,16)\}$

dışında ne seçilirse seçilsin $m(U_2(B_4)-S) \geq 8$ olup

$$I(U_2(B_4)) \geq 38 \text{ dir.}$$

Bu durumda,

$$I(U_2(B_4)) = 8 + 30 = 38 \text{ dir}$$

3. SONUÇ

Bir zedelenebilirlik ölçümü olan bütünlük B_2 , B_3 , B_4 binomial ağaç grafların double vertex graflarında uygulanmıştır.

B_2 binomial ağaç grafinin double vertex grafinda uygulandığında, bütünlük değerini minimum yapmak için seçilen tepelerin B_2 binomial ağaç grafi içindeki iki tane B_1 grafini birleştiren ayrıtla ilgili olduğu görülmektedir. Double vertex tanımından faydalanılarak bu ayrıt için B_2 binomial ağaç grafinin double vertex grafinda oluşturulan ayrıtların en çok dereceli tepeleri B_2 binomial ağaç grafinin double vertex grafindan çıkarıldığında bütünlük değeri minimum olmaktadır. B_3 grafinin double vertex grafinda da tamamen aynı sonuç elde edilmiştir.

B_4 binomial ağaçların double vertex grafinda bütünlük ölçümü yapıldığında bütünlük değerini minimum yapmak için seçilen tepelerin B_4 binomial ağaç grafindaki içindeki iki tane B_3 grafini birleştiren ayrıtla ilgili olduğu görülmektedir. Double vertex tanımından faydalanılarak bu ayrıt için B_4 binomial ağaç grafinin double vertex grafinda oluşturulan ayrıtların en çok dereceli tepeleri B_4 binomial ağaç grafinin double vertex grafindan çıkarılması gerekmektedir. Fakat B_4 binomial ağaç grafinda, B_2 , B_3 binomial ağaç grafindan farklı olarak sadece bu tepelerin çıkartılması yeterli değildir. Bu tepeler çıkarıldığında geriye 2 tane B_3 binomial ağaç grafi kalmaktadır. Burada her bir B_3 binomial ağaç grafi için aynı işlemler yukarda bahsedildiği gibi tekrarlanır. En son olarak geriye kalan altgraflardan en çok tepeli olan yine simetrik yapıdaki alt graftan 4 tepe daha çıkarılır.

B_2 , B_3 , B_4 binomial ağaçları için yapılan bu işlemlerin bir dereceye kadar düzenlilik içerdiği görülmekte olup $n > 4$ için binomial ağaçların double vertex graflarının bütünlük değerlerinin de bir başka araştırmada incelenmesinin faydalı olacağı inancındayım.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Alavi, Y., Behzad, M., Erdős, P., Lick, D.R.: Double Vertex Graphs, Journal of Combinatorics, Information and System Sciences, 16, (1991), 37-50p.

Atici, M., Kırlangıç, A. : Counterexamples to the Theorems of Integrity of Prisms and Ladders, J. Combin. Math. Combin. Comp.34, 119-127, 2000.

Bagga, K.S., Beineke, L.W., Goddard, W.D., Lipman, M.J., Pippert, R.E. : A survey of Integrity, Discrete Applied Mathematics 37/38 (1992) 13-28

Bagga, K.S., Deogun, J.S. : On the Pure Edge-Integrity of Graphs, Graph Theory, Combinatorics, and Algorithms, Vol.1, 2 (Kalamazoo, MI, 1992) 301-310

Barefoot, C.A., Entringer, R., Swart, H.C. : Vulnerability in Graphs – A Comparative Survey, J. Combin. Math. Combin. Comp.1, 13-22, 1987

Goddard, W.D., Swart, H.C. : On the Integrity of Combinations of Graphs, J. Combin. Math. Combin. Comp. 4, 3-18, 1988

Goddard, W. Swart, H.C. : Integrity in Graphs, Bounds and Basics, J. Combin. Math. Combin. Comp. 7, (1990), 139-151p.

<http://www.telekom.gov.tr/>

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Uşak'da doğdu. İlköğrenimini 1984-1989 yılları arasında Uşak Mehmetcik İlkokulu'nda, orta ve lise öğrenimini ise 1989-1996 yılları arasında Uşak Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 1996 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Elektronik ve Haberleşme Bölümüne başladı. İngilizce hazırlık eğitimi ile 2001 yılında, Elektronik ve Haberleşme Bölümü'nden iyi derece ile mezun oldu. Aynı yıl, Ege Üniversitesi Matematik Bölümünde yüksek lisans programına başladı. Eylül 2002 yılında başladığı Vestel Elektronik AR&GE'de Yazılım Mühendisi olarak çalışmaya devam ediyor. İyi derecede İngilizce bilmekte, yazılım, haberleşme ve bilişim teknolojileriyle ilgilenmektedir.