

165995

**SUYUN YOĞUNLUĞUNDAKİ ANORMALLIĞIN
DOĞAL TAŞINIMIN OLUŞUMUNA ETKİSİ**

Ömer DOĞANCI

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
(MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ)**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Şubat 2005

ANKARA

Ömer DOĞANCI tarafından hazırlanan SUYUN YOĞUNLUĞUNDAKİ ANORMALLIĞIN DOĞAL TAŞINIMIN OLUŞUMUNA ETKİSİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.



Prof. Dr. Ö. Ercan ATAER

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Makine Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

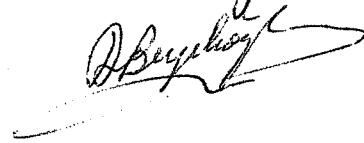
Başkan: : Prof. Dr. Ö. Ercan ATAER



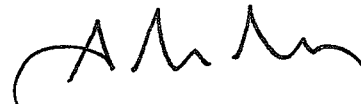
Üye : Doç. Dr. Cemil YAMALI



Üye : Yrd. Doç. Dr. Atilla BIYIKOĞLU



Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	iv
EKLERİN LİSTESİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
2. SUYUN ANORMALLİKLERİ	3
2.1. Gözlenen Anormallikler	3
2.2. Yoğunluk Anormalliği ve Kararsızlık	5
3.BU KONUDA YAPILAN ÇALIŞMALAR	9
4.TEMEL DENKLEMLERİN ELDE EDİLMESİ	17
4.1. Süreklilik Denklemi	17
4.2. Momentum Denklemi	18
4.3. Enerji Denklemi	18
4.4. Boyutsuz Temel Denklemler	19
4.5. Perturbasyon Denklemlerinin Oluşturulması	25
5.ÇÖZÜM YÖNTEMİ	33
6.SONUÇLAR	42
6.1. Sonuçların Değerlendirilmesi	42
6.2. Öneriler	53
KAYNAKLAR	54
EKLER	57
ÖZGEÇMİŞ	89

**SUYUN YOĞUNLUĞUNDAKİ ANORMALLIĞIN
DOĞAL TAŞINIMIN OLUŞUMUNA ETKİSİ
(Yüksek Lisans Tezi)**

Ömer DOĞANCI

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Şubat 2005**

ÖZET

Ekosistemin sürekliliğini sağlayan en önemli faktörlerden birisi de suyun yoğunluğunda görülen anormalliktir. Su, diğer sıvılardan farklı olarak katı faza geçerken yoğunluğu artmaz. Suyun maksimum yoğunluğu yaklaşık $+ 4\text{ }^{\circ}\text{C}$ sıcaklıkta oluşur. Çalışmada, suyun yoğunluğunun sıcaklıkla değişimi parabolik bir denklemle ifade edilmiştir. Suyun yoğunluğunda görülen anormalliğin, yatay su tabakasının farklı yüzey sıcaklıklarında doğal taşınım oluşumuna etkisinin belirlenmesi bu çalışmanın amacıdır. Çalışmada, doğal taşınım başlangıcının bir kriteri olan kritik Rayleigh sayılarının belirlenebilmesi amacıyla süreklilik, momentum ve enerji denklemleri Boussinesq yaklaşımına bağlı olarak değerlendirilmiş ve elde edilen perturbasyon denklemleri sonlu farklar yöntemi kullanılarak sayısal olarak bilgisayar yardımıyla çözülmüştür. Sonuçlar, suyun yoğunluğundaki anormalliğin doğal taşınımı zorlaştırıcı bir etkisinin olduğunu göstermektedir.

Bilim Kodu : 931
Anahtar Kelimeler : Doğal taşınım, yoğunluk anormalliği, yatay su tabakası
Sayfa Adedi : 89
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Ö. Ercan ATAER

**EFFECT OF WATER DENSITY ANOMALY
ON THE ONSET OF NATURAL CONVECTION**

(M.Sc. Thesis)

Ömer DOĞANCI

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

February 2005

ABSTRACT

One of the most important factors, which contribute to the continuity of the ecosystem, is the water density anomaly. The density of water, in contrary to the other liquids, does not increase while it changes to the solid phase. The maximum density of water occurs at the temperature near $+4^{\circ}\text{C}$. In this study, the density – temperature relation of water is defined with a parabolic equation. The aim of this study is to determine the influence of the water density anomaly on the onset of natural convection at the different lower and upper surface temperatures. In the study, to investigate the critical Rayleigh numbers which is a criteria for the beginning of natural convection, the continuity, momentum and energy equations are subjected to the Boussinesq approximation and the obtained perturbation equations are solved numerically base on the finite difference method via personel computer. In the results, it is seen that the density anomaly has a preventive effect on natural convection.

Science Code : 931

Key Words : Natural convection, density anomaly, horizontal water layer

Page Number: 89

Adviser : Prof. Dr. Ö. Ercan ATAER

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım süresince değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren değerli hocam Prof. Dr. Ö. Ercan ATAER' e yine kıymetli tecrübelerinden faydalandığım Prof. Dr. Yalçın GÖĞÜS hocama, tüm çalışmalarım boyunca manevi destekleriyle hep yanımda olan aileme ve çok değerli dostum Mak. Müh. Sunay HEYCAN' a teşekkürü bir borç bilirim.



ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Suyun bazı anormal özelliklerinin sıcaklıkla değişimi	5
Şekil 2.2. Su yoğunluğunun sıcaklıkla değişimi	6
Şekil 2.3. Farklı yüzey sıcaklıklarına göre su tabakasının kararlılık değişimi.....	7
Şekil 4.1. Yatay su tabakasının şematik görünümü.....	17
Şekil 5.1. $z = 0$ ve $z = 1$ aralığında 100 bölgeye ayrılan G(z) fonksiyonunun noktasal gösterimi	38
Şekil 6.1. Rayleigh sayısının dalga sayısına göre değişimi.....	42
Şekil 6.2. Yoğunluğu sıcaklıkla doğrusal olarak değişen akışkanlar için kritik Rayleigh sayısının farklı yüzey sıcaklıklarına göre değişimi.....	44
Şekil 6.3. Kritik Rayleigh sayısının yatay su tabakasının yüzey sıcaklıklarına göre değişimi ($0 \leq T_1 \leq 20$ ve $T_2 = 0$).....	44
Şekil 6.4. Kritik Rayleigh sayısının yatay su tabakasının yüzey sıcaklıklarına göre değişimi ($0 \leq T_1 \leq 20$ ve $T_2 = 2$).....	45
Şekil 6.5. Kritik Rayleigh sayısının yatay su tabakasının yüzey sıcaklıklarına göre değişimi ($0 \leq T_1 \leq 20$ ve $T_2 = 4$).....	45
Şekil 6.6. Kritik Rayleigh sayısının yatay su tabakasının yüzey sıcaklıklarına göre değişimi ($0 \leq T_1 \leq 20$ ve $T_2 = 6$).....	46
Şekil 6.7. Kritik Rayleigh sayısının yatay su tabakasının yüzey sıcaklıklarına göre değişimi ($0 \leq T_1 \leq 20$ ve $T_2 = 8$).....	46
Şekil 6.8. Kritik Rayleigh sayısının yatay su tabakasının yüzey sıcaklıklarına göre değişimi ($0 \leq T_1 \leq 20$ ve $T_2 = 10$).....	47
Şekil 6.9. Kritik Rayleigh sayısının yatay su tabakasının yüzey sıcaklıklarına göre değişimi ($0 \leq T_1 \leq 20$ ve $T_2 = 12$).....	47
Şekil 6.10. Yatay su tabakasının farklı alt ve üst yüzey sıcaklıklarına göre kritik Rayleigh sayısının değişimi.....	48
Şekil 6.11. Farklı alt ve üst yüzey sıcaklıklarına göre doğal taşınımın oluşumu için gerekli minimum su tabakası yükseklik değerleri.....	50

ŞEKİLLERİN LİSTESİ (devam)

Şekil	Sayfa
Şekil 6.12. Kritik Rayleigh sayısının Lineersizlik parametresine göre değişimi	51
Şekil 6.13. Sonuçların literatürdeki bazı çalışmalarla karşılaştırılması	52



EKLERİN LİSTESİ

Ek	Sayfa
Ek – 1. Suyun Anormallikleri (İnternet Kaynağı).....	58
Ek – 2. Grid Sayısının Belirlenmesi	59
Ek – 3. Bilgisayar Programı	60



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
a	Isıl yayılım katsayısı, m^2/s
c	Özgül ısı, $J/kg.K$
$F(z), G(z)$	Perturbasyon fonksiyonları
g	Yerçekimi ivmesi, m/s^2
H	Su tabakası yüksekliği, m
$H(x,y)$	Perturbasyon fonksiyonu
k	Dalga sayısı
K	$= \alpha q (T_1 - T_2) T_1 - T_2 ^{q-1} 1 - R ^{q-1}$
N	$= \pm \left \frac{1 - z - R}{1 - R} \right ^{q-1}$
q	Yoğunluk – sıcaklık ilişki üssü (1,894816)
P'	Basınç, N/m^2
P	Boyutsuz basınç, $\frac{P'H^2}{\rho_0 \nu a}$
Pr	Prandtl sayısı, ν/a
R	Lineersizlik parametresi, $\frac{T_m - T_2}{T_1 - T_2}$
Ra	Rayleigh sayısı, $\frac{gKH^3}{a \nu}$
T	Sıcaklık, $^{\circ}C$
T_m	Maksimum yoğunluktaki su sıcaklığı ($\approx 4^{\circ}C$)
ΔT	Sıcaklık farkı, $^{\circ}C$

SİMGELER VE KISALTMALAR (devam)

Simgeler	Açıklama
t	Zaman, s
$U'(u,v,w)$	Kartezyen koordinatlarda hız
$U(u,v,w)$	Kartezyen koordinatlarda boyutsuz hız, $\frac{UH}{a}$
x', y', z'	Kartezyen koordinatlar
x, y, z	Boyutsuz kartezyen koordinatlar
Yunan Simgeleri	Açıklama
α	Yoğunluk-sıcaklık ilişkisi katsayısı ($9,297173 \times 10^{-6}$)
β	Isıl genleşme katsayısı, 1/K
θ	Boyutsuz sıcaklık, $\frac{T - T_2}{T_1 - T_2}$
λ	Isıl iletkenlik, W/mK
ν	Kinematik viskozite, m^2/s
μ	Dinamik viskozite, kg/ms
ρ	Yoğunluk, kg/m^3
ρ_m	Maksimum su yoğunluğu, ($999,972 \text{ kg/m}^3$)
Φ	Viskoz ısı kaybı
σ	Kararlılık parametresi
τ	Boyutsuz zaman, $\frac{at}{H^2}$
∇	Delta operatörü
∇^2	Laplace operatörü
∇_2^2	İki boyutlu Laplace operatörü

SİMGELER VE KISALTMALAR (devam)

Alt İndisler	Açıklama
1	Akışkan tabakasının alt yüzeyi
2	Akışkan tabakasının üst yüzeyi
0	Referans noktası
kr	Kritik değer
Üst İndisler	Açıklama
'	Boyutsuz değer
^	Perturbasyon değeri
-	Statik değer

1. GİRİŞ

Su, yapısında görülen anormal etkilerden dolayı doğanın dengesini ve canlı yaşamın sürekliliğini sağlamaktadır. Dünyamız için bu kadar hayati olan suyun en önemli anormal özelliklerinden birisi de yoğunluğunda görülmektedir. Denizlerin ve göllerin kış aylarında tamamıyla donmaması, bu büyük su kütlelerinin yıl boyunca sıcaklıklarının fazla değişmemesi ve bu sayede doğal ısı depoları olarak kullanılabilmesi gibi pek çok özellik suyun yoğunluğunda görülen anormal etkinin birer sonucudur.

Su, diğer akışkanlar gibi sıvı halden katı hale geçerken yoğunluğu artmaz. Su maksimum yoğunluğuna 3,984 °C sıcaklığında ulaşır. Yaklaşık 4 °C'nin altında, sıcaklığın azalmasıyla yoğunluğu da azalır.

Bu çalışmada, suyun maksimum yoğunluğa ulaştığı sıcaklığın ihmal edilemeyeceği sıcaklık aralığındaki alt ve üst yüzeylerle sınırlandırılmış yatay su tabakasında doğal taşınımın oluşumu incelenmiştir. Su tabakası yatay yönde sonsuz, dikey yönde ise sonlu H yüksekliğinde, alt ve üst yüzeylerde homojen ve birbirinden farklı sıcaklıklara sahip bir sistem olarak düşünülmüştür.

Çalışmanın amacı, yatay su tabakasının yoğunluğunda görülen anormalliğin doğal taşınım başlangıcına olan etkisini araştırmaktır. Bu incelemenin yapılabilmesi için öncelikle süreklilik, momentum ve enerji denklemleri Boussinesq yaklaşımına bağlı olarak değerlendirilmiştir. Bu yaklaşıma göre, temel denklemlerdeki yoğunluk terimleri yerçekimi kuvveti dışındaki bütün terimlerde sabit olarak kabul edilir. Daha sonra, temel denklemler boyutsuz formlarda düzenlenerek hız, sıcaklık, basınç ve yoğunluk perturbasyon değerleriyle genişletilerek çözüm için genel denklemler elde edilir. Suyun yoğunluğu sıcaklıkla doğrusal olarak değişmediği için bu ilişki sıcaklığın bir fonksiyonu olarak parabolik bir denklemle ifade edilir. Suyun yoğunluğunda görülen anormalliğin bir sonucu olarak Rayleigh sayısı, bilinen ifadesinden farklı olarak düzeltilmiş Rayleigh sayısı olarak tanımlanmıştır.

Çalışmada, doğal taşınım başlangıcının belirlenmesinde kullanılan kritik Rayleigh sayıları farklı yüzey sıcaklıkları için belirlenmiştir. Bu değerler perturbasyon denklemlerinin sayısal olarak çözümüyle elde edilmiştir. Sayısal çözüm için sonlu farklar yöntemi kullanılarak oluşturulan denklemler bilgisayar programı yardımıyla çözülmüştür. Program çıktıları olarak elde ettiğimiz kritik Rayleigh sayılarının yatay su tabakasının farklı alt ve üst yüzey sıcaklıklarına göre nasıl bir değişim gösterdiği; bu değerlerin, yoğunluğu sıcaklıkla doğrusal olarak değişim gösteren akışkanlar için geçerli kritik değerlere göre farklılıkları karşılaştırılmıştır.



2. SUYUN ANORMALLIKLERİ

2.1. Gözlenen Anormallikler

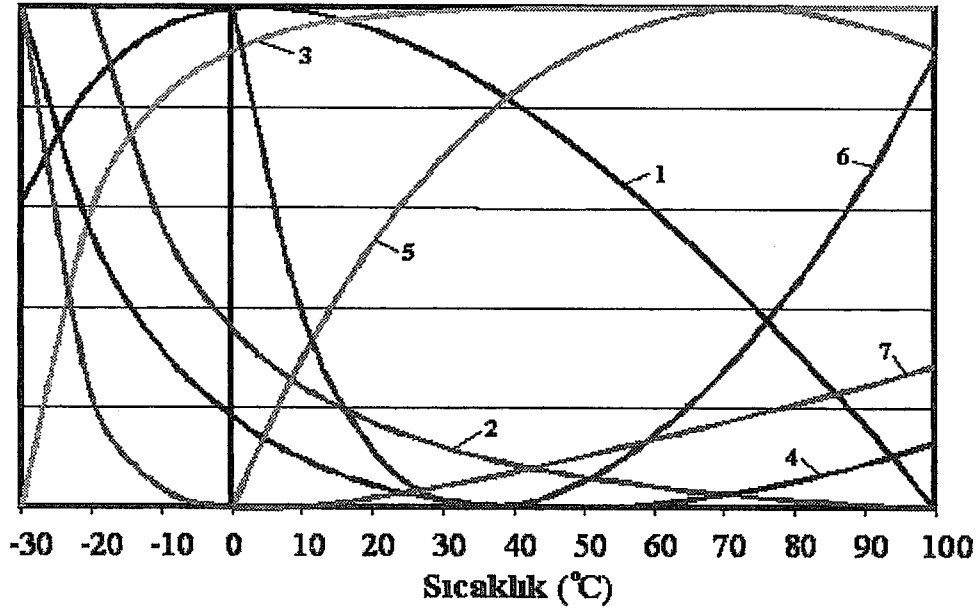
Su moleküler yapısında çok farklı özellikler göstermektedir. Literatürde suyun kırka yakın anormalliğinden bahsedilmektedir (1). Hayat, suyun bu anormal özelliklerine bağlıdır. Özellikle organizmalardaki büyük ısı kapasitesi ve yüksek su miktarları ısı dengeye ve yerel sıcaklık değişimlerini önlemeye yardımcı olur. Okyanus ve denizlerin büyük ısı kapasitelerine sahip olmaları onların ısı depoları gibi çalışmalarını sağlar. Öyle ki, deniz sıcaklığı kara sıcaklığının yalnızca üçte biri kadar değişim gösterir ve bu özellik sayesinde iklimler ılımanlaşır. Suyun yoğunluğunda görülen anormal etkinin bir sonucu olarak, özellikle soğuk iklimlere sahip bölgelerde kış ayları boyunca nehirlerin ve göllerin tamamı donmaz. Ortam sıcaklığının sürekli sıfırın altında olduğu zamanlarda bile su kütlesinin yalnızca yüzeyi donar. Bu anormal etki suda yaşayan canlıların sürekliliğini sağlar.

Suda görülen anormalliklerden bazıları (1),

- 1) Su alışılmışın dışında yüksek erime noktasına sahiptir.
- 2) Su alışılmışın dışında yüksek kaynama noktasına sahiptir.
- 3) Su alışılmışın dışında yüksek kritik noktasına sahiptir.
- 4) Su alışılmışın dışında yüksek yüzey gerilimine sahiptir.
- 5) Su alışılmışın dışında yüksek viskoziteye sahiptir.
- 6) Su alışılmışın dışında buharlaşma ısısına sahiptir.
- 7) Su ergime süresince büzülür.
- 8) Su ısıtmayla artan yüksek yoğunluğa sahiptir.
- 9) Basınç erime noktasını düşürür.
- 10) Basınç maksimum yoğunluk sıcaklığını düşürür.
- 11) D_2O ve T_2O fiziksel özellikleriyle H_2O 'dan çok farklıdır.
- 12) Su sıcaklığın düşmesiyle artan alışılmışın dışında bir yüksek viskozite gösterir.
- 13) Suyun yoğunluğu basınçla düşer.
- 14) Su alışılmışın dışında düşük sıkıştırılabilirliğe sahiptir.

- 15) Sıkıştırılabilirlik, sıcaklığın $46,5^{\circ}\text{C}$ civarında bir minimuma kadar yükseltilmesiyle düşer. Bu sıcaklığın altındaki su, sıcaklığın düşmesiyle kolaylıkla sıkıştırılabilir.
- 16) Su düşük genleşme katsayısına sahiptir.
- 17) Düşük sıcaklıklarda suyun ısı genleşebilirliği azalır.
- 18) Ses hızı sıcaklıkla artar.
- 19) Suyun özgül ısı kapasitesi, buz ve buhara göre iki katından fazladır.
- 20) Özgül ısı kapasitesi alışılmışın dışında yüksektir.
- 21) Özgül ısı kapasitesi bir minimuma sahiptir.
- 22) Çözeltileri yoğunluk ve viskozite gibi özelliklerde farklı etkilere sahiptir.
- 23) Aşırı soğutulmuş su iki faza ve -50°C civarında ikinci bir kritik noktaya sahiptir.
- 24) Sıvı su, minik damlacıklar içerisinde -70°C civarına kadar aşırı soğutulabilir.
- 25) Sıcak su soğuk sudan daha çabuk donar.
- 26) Sudaki polar olmayan gazların çözünürlüğü bir minimuma kadar düşer ve daha sonra yükselir.
- 27) Düşük sıcaklıklarda, suyun ısıl yayılım katsayısı, yoğunluk ve basıncın yükselmesiyle artar.
- 28) Suyun ısıl iletkenliği 130°C civarında bir maksimuma yükselir ve daha sonra düşer.
- 29) Su molekülleri yüksek basınç altında basıncın artmasıyla birbirlerin uzaklaşırlar.
- 30) Suyun elektrik iletkenliği yaklaşık 230°C 'de maksimum noktaya ulaşana kadar artar ve daha sonra azalır.

Aşağıdaki grafikte suda görülen; yoğunluk, viskozite, sıkıştırılabilirlik, ses hızı, özgül ısı ve ısıl genleşme gibi bazı anormal özelliklerin sıcaklıkla olan değişimi gösterilmektedir.



Şekil 2.1. Suyun bazı anormal özelliklerinin sıcaklıkla değişimi (1)
 (1.Yoğunluk, 2.Viskozite, 3.Basınçla viskozitenin değişimi,
 4.Sıkıştırılabilirlik, 5.Ses hızı, 6.Özgül ısı, 7.Isıl genleşme)

2.2. Yoğunluk Anormallliği ve Kararsızlık

Suyun dışındaki sıvı akışkanların yoğunluğunun sıcaklıkla değişimi doğrusal bir ilişki gösterirken, suyun yoğunluk-sıcaklık ilişkisi doğrusal değildir. Sıvılar soğutuldukları zaman yoğunlukları artar ve dolayısıyla hacimleri küçülür. Bu özellik sıcaklığın yaklaşık 4 °C'nin üzerinde olduğu durumlarda su içinde geçerlidir. Fakat, suyun 4 °C'nin altındaki sıcaklıklarda diğer sıvılardan farklı olarak sıcaklığın azalmasıyla yoğunluğu da azalır (Şekil 2.2).

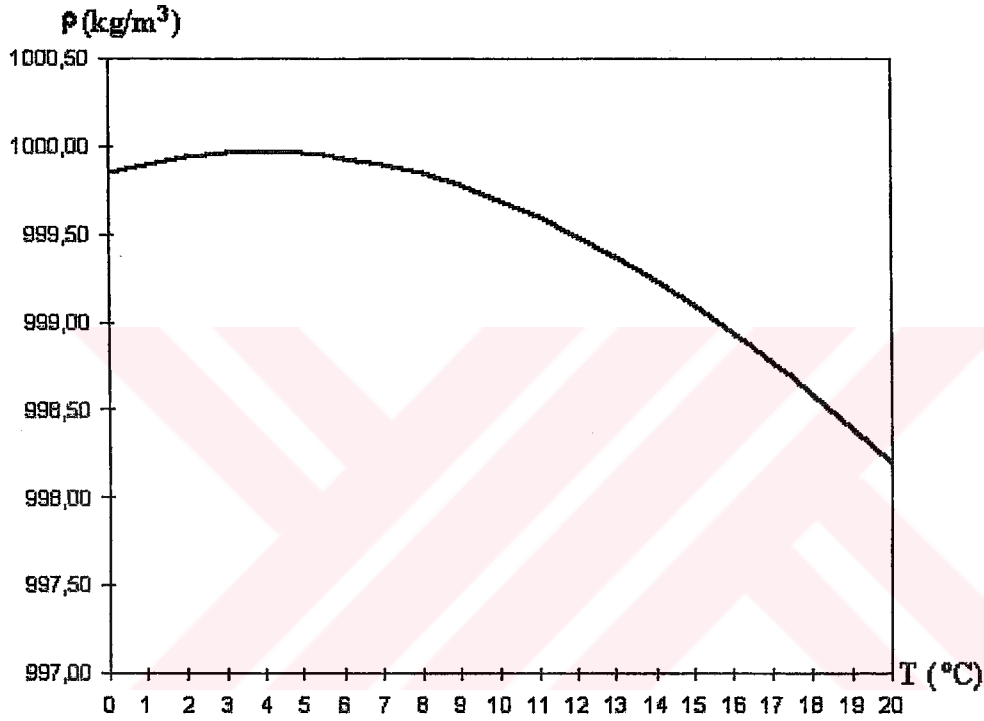
Su dışındaki sıvılar için yoğunluk,

$$\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)] \quad [2.1]$$

şeklinde ifade edilir. Su için bu ifade,

$$\rho(T) = \rho_m (1 - \alpha |T - T_m|^q) \quad [2.2]$$

şeklinde yazılabilir. Burada, T_0 statik denge halindeki akışkan sıcaklığı, T_m maksimum yoğunluktaki su sıcaklığı ($4\text{ }^{\circ}\text{C}$), ρ_0 statik denge halindeki akışkan yoğunluğu, β ısı genleşme katsayısı, ρ_m maksimum su yoğunluğu ($999,972\text{ kg/m}^3$), $\alpha = 9,297173 \times 10^{-6}$ ve $q = 1,894816$ 'dır. Bu değerler 1 bar basınç altında saf su için geçerlidir (2).

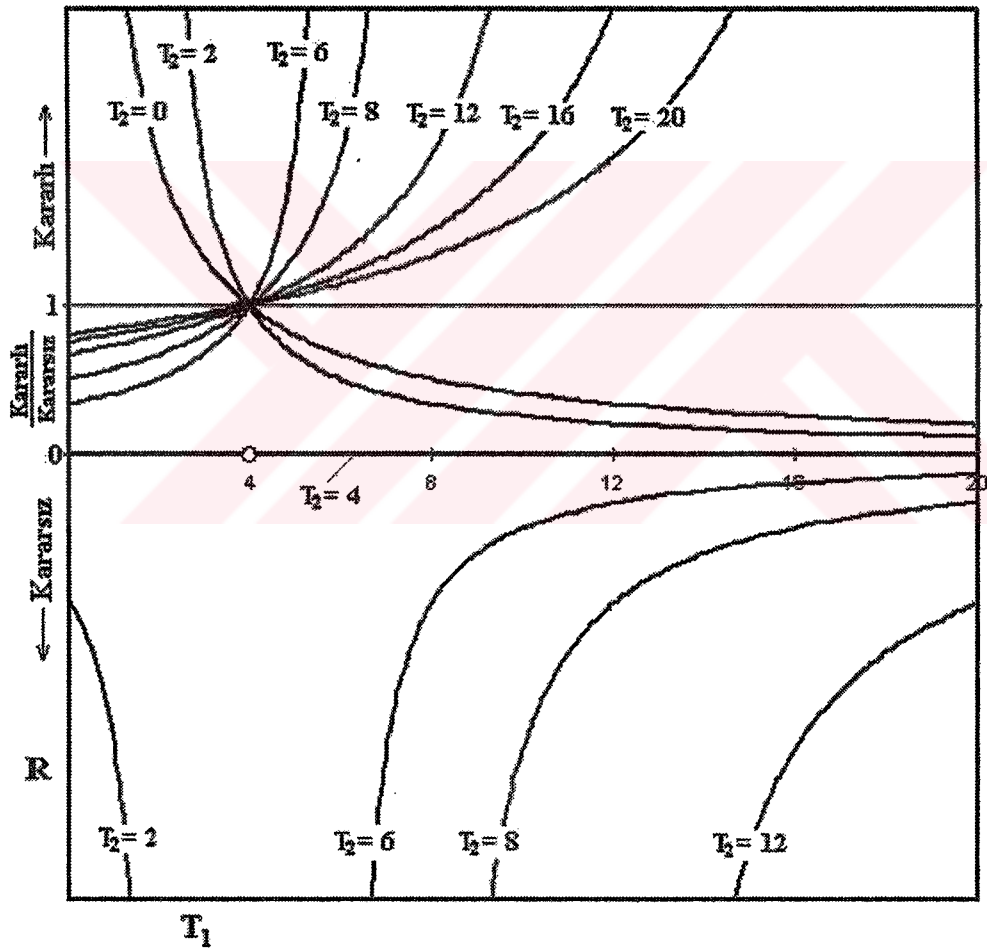


Şekil 2.2. Su yoğunluğunun sıcaklıkla değişimi

Yatay akışkan tabakasında kararsızlık, kaldırma kuvvetinin etkisiyle oluşan akışkan hareketlerinden meydana gelmektedir. Kaldırma kuvvetleri ise yoğunluk farkıyla ve dolayısıyla sıcaklık farkıyla oluşmaktadır. Fakat oluşan her kaldırma kuvveti akışkan hareketlerine sebep olmaz. Bunun için akışkanın viskoz kuvvetlerini yenebilecek kaldırma kuvvetinin yeterli büyüklükte olması gerekir. Kaldırma kuvvetinin kritik bir değeri (Rayleigh sayısı) aşmasıyla doğal taşınım başlar. Kararlı akışkan tabakası ise sıcaklık farkının akışkan içerisinde herhangi bir kaldırma kuvvetine neden olmadığı durumu ifade eder. Yatay su tabakası için kararsızlık kriteri,

$$R = \frac{T_m - T_2}{T_1 - T_2} \quad [2.3]$$

ifadesiyle tanımlanır (2). Bu ifade lineersizlik (nonlinearity) parametresi olarak bilinir. Burada; T_m maksimum yoğunluktaki su sıcaklığı, T_1 ve T_2 sırasıyla akışkan tabakasının alt ve üst yüzey sıcaklıklarıdır. Şekil 2.3’de farklı alt ve üst yüzey sıcaklıklarına göre akışkan tabakasının nasıl bir yapıda olduğu (kararlı, kararlı/kararsız, kararsız) gösterilmiştir.



Şekil 2.3. Farklı yüzey sıcaklıklarına göre su tabakasının kararlılık değişimi

Grafikte, $R \geq 1$ değerleri için akışkan tabakası tamamıyla kararlı yapıdadır. Bu bölgede, yüzey sıcaklıklarının maksimum yoğunluğun olduğu sıcaklıktan büyük

olduğu durumlarda üst yüzey sıcaklığı her zaman alt yüzey sıcaklığından büyük; yüzey sıcaklıklarının maksimum yoğunluğun oluştuğu sıcaklıktan küçük olduğu durumlarda ise üst yüzey sıcaklığı alt yüzey sıcaklığından daima küçüktür. Bu bölgede doğal taşınım olayı gerçekleşmez. $R \leq 0$ durumu, su tabakasının tamamının kararsız yapıda olduğu bölgeyi gösterir. Burada, yüzey sıcaklıklarının maksimum yoğunluğun oluştuğu sıcaklıktan büyük olduğu durumlarda üst yüzey sıcaklığı her zaman alt yüzey sıcaklığından küçük; yüzey sıcaklıklarının maksimum yoğunluğun oluştuğu sıcaklıktan küçük olduğu durumlarda ise üst yüzey sıcaklığı alt yüzey sıcaklığından daima büyüktür. Bu bölgede kritik değerin aşılmasıyla doğal taşınım olayı gerçekleşir. Akışkan tabakasında maksimum yoğunluğun oluştuğu eksen ile alt yüzey arasında kalan bölgenin kararsız, bu eksen ile üst yüzey arasında kalan bölgenin ise kararlı olduğu durum $0 < R < 1$ şartı için geçerlidir. Bu bölgede doğal taşınım akışkan tabakasının belli bir bölümünde gerçekleşirken diğer bölümünde taşınım hareketleri gerçekleşmez. Grafikte, alt ve üst yüzey sıcaklıklarının eşit olduğu ve dolayısıyla sıcaklık farkının oluşmadığı noktalar doğal taşınımın gerçekleşmediği tamamıyla kararlı bölgelerdir.

3. BU KONUDA YAPILAN ÇALIŞMALAR

1900'lü yıllardan bu yana sıvı tabakalarında taşınım olayı ile ilgili çok sayıda deneysel ve teorik çalışma yapılmıştır. İlk yıllarda, akışkan tabakasının alt yüzeyinden ısıtılmasıyla meydana gelen akış hareketlerinin incelenmesiyle başlayan bu süreçte zaman içerisinde pek çok bilim adamı ve araştırmacı tarafından farklı durumlar göz önüne alınmıştır. Bu çalışmaların bir bölümünü yatay akışkan tabakası olarak suyun kullanıldığı ve yoğunluk sıcaklık ilişkisinin parabolik bir yaklaşımla değerlendirildiği sistemler oluşturmaktadır. Konuyla ilgili benzer çalışmalar aşağıda gösterilmektedir.

Merker et al. (3) yaptıkları analitik ve deneysel çalışmalarında alt yüzeyinden soğutulan yatay su tabakası için taşınım başlangıcını incelemişlerdir. Su sıcaklığı 0 °C'den 20 °C'ye kadar değiştirilmiştir. Farklı sınır şartları için belirlenen nötr kararlılıklar Rayleigh sayısı, lineersizlik (nonlinearity) ve Biot sayısı olmak üzere üç farklı parametre ile tanımlanmıştır.

Merker (4) sudaki yoğunluk anormalliğinin taşınım oluşumuna etkisini su tabakasının altından ısıtılmasıyla veya soğutulmasıyla yarı sonsuz yatay su tabakası için analitik olarak incelemiştir. Su sıcaklığının 0 °C ile 20 °C arasında değiştiği kabul edilmiştir. Taşınım başlangıcına Rayleigh sayısının etkisinin yanı sıra, iki ilave parametre ile kararlılık sınırları da tanımlanmıştır. Lineer kararlılık analizi ve Galerkin yaklaşımı kullanılarak kararlılık sınırları için hesaplanan değerler literatürde geçen değerlerle uyum göstermektedir. Genel bir sonuç olarak, yoğunluk anormalliğinin kararlılık etkisine sahip olduğu söylenebilir.

Merker and Grigull (5) analitik çalışmalarında doğrusal olmayan yoğunluk-sıcaklık ilişkisine sahip yarı sonsuz bir akışkan tabakasında taşınım başlangıcını incelemişlerdir. Sıcaklık-yoğunluk ilişkisi parabolik olarak ifade edilen mevcut analizde, sürekli şartlar için suyun yoğunluk anormalliğinin etkisini iki parametre ile, zamana bağlı durum için ise bu etkiyi üç farklı parametre ile tanımlamışlardır. Bu parametreler Rayleigh sayısı, lineersizlik katsayısı ve başlangıç parametresidir. Yarı

sonsuz su tabakası için marjinal kararlılık sınırları alt yüzey için sabit sıcaklık ve sabit ısı akısı olmak üzere iki durumda incelenmiştir. Normal akışkanlar için hesaplanan kritik Rayleigh sayısı $Ra_c = 213$ ve $Ra_c = 135$ olarak hesaplanmıştır. Su için ise düşük ve orta ısı akı oranlarında kuvvetli bir kararlaştırıcı etkisi olduğu görülmüştür.

Merker et al. (6) yoğunluk anormalliği ($\approx 4^\circ\text{C}$) etkisi ile yatay su tabakasında taşınım başlangıcını lineer kararlılık analizi kullanarak incelemiştir. Ortaya çıkan perturbasyon denklemleri Galerkin Metodu yardımı ile çözülmüştür. Uygun test fonksiyonlarının seçimi, %1'lik bir hassasiyetle yedi terimli bir ifadenin yeterli olacağını göstermiştir. $Ra = Ra(T_1, T_2)$ burada T_1 ve T_2 sırasıyla alt ve üst duvar sıcaklıkları olmak üzere, sonuçlar kararlılık diyagramında gösterilmiştir. Lineer olmayan yoğunluk - sıcaklık ilişkisi, 2, 3 ve 5 terimli üç farklı polinom tarafından yaklaşık olarak elde edilebilmektedir. Beşinci dereceden polinomun doğru olarak kabul edilmesiyle, kritik Rayleigh sayısı basit parabolik ilişki ile %10'luk bir hassasiyetle hesaplanabilmektedir. Bu farkın çok büyük olmasından dolayı yoğunluk-sıcaklık ilişkisine kübik bir terimin eklenmesiyle hata payı yaklaşık %3'ler seviyesine indirilebilmiştir.

Oertel (7) yaptığı çalışmada, alttan ısıtılan ve üstten soğutulan dikey olarak sınırlandırılmış yatay akışkan tabakasında sürekli ve zamana bağlı doğal taşınımı incelemiştir. Sürekli şartlarda doğal taşınımın başlangıcı lineer Boussinesq denklemleri ve Galerkin metodu kullanılarak hesaplanmıştır. Deneyler, yalıtılmış vakumlu dikdörtgen prizması şeklindeki bir ortamda gerçekleşmiştir. Deneysel çalışmada akış konfigürasyonlarını gözlemek için fark interferometresi kullanmıştır. Yoğunluk değişimleri lazer interferometresi ile ölçülmüştür. Bu çalışmada zamana bağlı ve doğrusal olmayan ısı taşınımında olduğu gibi sürekli ve doğrusal ısı profillerinin etkisi farklı ısıtma oranlarında incelenmiştir. Farklı akışkanlar kullanılarak doğal taşınımın başlamasında Prandtl sayısının taşınım etkisini görmek için silikon yağı ($Pr = 1870$) ve gazı ($Pr = 0.75$) da kullanılmıştır. Ölçülen, sürekli ve zamana bağlı ısı iletimi ve taşınım yoğunluk profilleri değerlendirilmiş ve daha önce yayınlanmış olan sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Mahler et al. (8) çalışmalarında, zamana bağlı yoğunluk değişimine zıt olarak akışkan tabakasının kararlılığını iki farklı hesaplama tekniğiyle incelemişlerdir. Zamana bağlı denklemlerin integrasyonu ile en direkt çözüm, sıkça kullanılan sanki sürekli şartlar yaklaşımı yardımı ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Kararsızlık akışkan tabakasının bir yüzeyindeki sıcaklığın veya konsantrasyonun ani bir değişiminden meydana geliyorsa, bu son yaklaşımın geçerli olmadığı görülmüştür. Burada çalışılan akışkan tabakası, sıvı içerisine gaz absorpsiyonu ile sızdırmaz bir duvarda oluşan ince bir sıvı tabakadır. Bu kararlı durumlar arasındaki gelişim süresince sistemin kararlılığını değerlendirebilmek için oluşan esas problemle, sistem kararlı bir durumdan bir diğerine doğru değişmektedir. Bu, Rayleigh sayısının lineer ve zamandan bağımsız yoğunluk değişimli alışılan durumda olduğu gibi tek bir değerinin olmadığını, fakat bir dereceye kadar kritik Rayleigh sayısının başlangıç tedirginim büyüklüğü ve gözlem yöntemi gibi soyut faktörlere bağlı olduğunu göstermektedir.

Sugawara et al. (9) yaptıkları deneysel çalışmalarda, doğrudan doğruya ısı radyasyon ile ısıtılan yatay buz tabakasının erimesi olayını incelemişlerdir. Suyun yüzeyinden gerçekleşen buharlaşma ve buzun sürekli olarak erimesinden dolayı oluşan sıvı tabakasındaki 4 °C'de yoğunluk değişimini esas alan doğal taşınım etkilerini değerlendirmişlerdir. Belirtilen deney şartlarında doğal taşınım başlangıcı Rayleigh sayısının yaklaşık 500 olduğu değerde bulunmuştur.

Boger and Westwater (10) yaptıkları deneysel çalışmada, boyutları 0,5x0,5x2 in. olan su kütlesinin donması ve erimesi sırasında oluşan katı-sıvı ara yüzeyindeki akışkan hızlarını ve sıcaklık değişimlerini incelemişlerdir. Isı akışı yukarı ve aşağı olmak üzere tek boyutludur. Deneyler 4 °C'deki suyun maksimum yoğunluk değişimini içeren ve içermeyen olmak üzere iki kısımda gerçekleştirilmiştir. Suyun yüzeyinden ve dibinden soğutma işlemleri -50 °C ve -5 °C sıcaklıkları arasında gerçekleştirilirken, ısıtma işlemleri 3 °C ve 97 °C sıcaklıkları arasında gerçekleştirilmiştir. Çalışmalar sıvıdaki kaldırma kuvvetlerini ve doğal taşınım olaylarını içermektedir. Yapılan çalışmalar sonucunda Rayleigh sayısının yaklaşık 1700 değeri için doğal taşınımın başladığı tespit edilmiştir.

Yen (11) taşınım başlangıcını ve alt kısmından sürekli olarak ısıtılan su tabakasında kritik Rayleigh sayısını incelemiştir. Bütün deneylerde homojen ve içinde hava kabarcığı olmayan buz kütleleri kullanılmıştır. Faz değişimine uğrayan ve yoğunluğu değişen akışkan için tek bir kritik Rayleigh sayısından söz edilemez, fakat alt plaka sıcaklığının bir fonksiyonu olarak ampirik bir formülle tanımlanabilir. Bu ifade alt plaka sıcaklığının 6,72 °C ile 25,50 °C arasında olması halinde geçerlidir. Başlangıçtaki buz sıcaklığı -4,8 °C'den -22 °C'ye doğru değişmektedir. Kritik Rayleigh sayısının bulunmasında başlangıçtaki buz sıcaklığının etkisi olmadığı görülmüştür.

Yen and Galea (12) yaptıkları deneysel çalışmada, buz tabakasının üst kısmından sürekli olarak ısıtılmasıyla oluşan su tabakasında doğal taşınım başlangıcının su tabakasının yüksekliği ile olan ilişkisini deneysel olarak incelemişlerdir. Su tabakası yüksekliğinin deneysel olarak bulunan değerleri, benzer bir problemin teorik analizi ile elde edilen değerlere göre %14,1'lik bir sapma gösterdiği tespit edilmiştir. Bu ve daha önceki çalışmalardan, yoğunluk değişimi gösteren yatay akışkan tabakası için bulunan kritik Rayleigh sayısının tek düzen bir yoğunluk - sıcaklık ilişkili normal bir akışkanda olduğu gibi tek bir değere sahip olmadığı fakat sınır sıcaklıkları ile değişebildiği sonucu çıkarılabilir.

Cheng and Ou (13) çalışmalarında sıcaklığı yaklaşık 4 °C olan suyun maksimum yoğunluğunun, yatay bir su borusunun ısı girişi bölgesinde serbest ve zorlanmış birleşik taşınımına olan etkisini incelemişlerdir. Bu etki büyük bir Prandtl sayısının kabulü ile sayısal olarak analiz edilmiştir. Sayısal değerler üniform giriş sıcaklıklı (6 °C) ve sabit duvar sıcaklıklı (1 °C) değerlerde $Ra = 2 \times 10^4$ ve 10^5 değerleri için elde edilmiştir.

Seki et al. (14) üst yüzeyinden ısıtılan yatay buz tabakasında suyun yoğunluğundaki değişimin, serbest taşınımın başlaması ve taşınım ısı transferine olan etkisini deneysel ve analitik olarak incelemişlerdir. Rayleigh sayısının 2×10^2 ve 1×10^5 arasında değişmesine karşın tabakanın üst yüzey sıcaklığı da 1 °C ile 15 °C arasında değişmektedir. Hem deneysel hem de analitik olarak elde edilen sonuçlara göre,

maksimum yoğunluk değişimi olmayan diğer akışkanlardan elde edilen sonuçlardan farklı olarak, su tabakasının üst yüzey sıcaklığının 8 °C'den küçük olduğu durumlarda sudaki yoğunluk değişiminin serbest taşınım başlangıcına ve serbest taşınım ısı transferine çok önemli bir etki yaptığı gözlenmiştir.

Foster (15) yaptığı deneysel çalışmada, su tabakasını üst yüzeyinden buharlaşma ile soğutmuştur. Deneylerde su tabakasının üst yüzey sıcaklığı kızıl ötesi termometre kullanılarak ölçülmüştür. Doğal taşınımın başlaması su tabakasının altındaki ince mürekkep tabakasının hareketinin gözlenmesi ile belirlenmiştir. Deney gözlemlerinin hassasiyeti içerisinde, yüksek Rayleigh sayılarında, doğal taşınım davranışının oluşumu için gerekli zamanın akışkan tabakasının derinliğinden bağımsız olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Foster (16) deneylerini alt yüzey sıcaklığı sabit oranlarda artırılan derin akışkan tabakalarında gerçekleştirmiştir. Deneyler neticesinde ısı sınır tabakanın yalnızca akışkan tabakasının toplam derinliğinin küçük bir bölümünün oluşturması durumunda, taşınım başlangıcının akışkan derinliğinden bağımsız olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Kalabin et al. (17) eş merkezli iki silindir arasında bulunan suda oluşan doğal taşınım problemini ele almışlardır. Grashof sayısının dokuz değeri için ($2 \cdot 10^1$, $2 \cdot 10^2$, $2 \cdot 10^3$, $2 \cdot 10^4$, $3 \cdot 10^4$, $4 \cdot 10^4$, $5 \cdot 10^4$, $7 \cdot 10^4$, $2 \cdot 10^5$), çözümler elde etmişlerdir. Sürekli ve süreksiz çözümlerin varlığı incelenmiştir. Akışkan sıvı olarak kullanılan suyun başlangıç sıcaklığı maksimum yoğunluktaki su sıcaklığı olarak, sınır sıcaklıklarını ise sabit ve suyun başlangıç sıcaklığının simetrik değerleri olarak seçilmiştir.

Tankin and Farhadieh (18) yaptıkları deneysel çalışmalarında interferometre aygıtı yardımıyla buz oluşumunda taşınım akımlarının etkisini incelemişlerdir. Hazırladıkları deney düzeneğiyle sıvının her tarafında eş sıcaklıklar elde edilmiştir. Sıvı tabakasının alt kısmından soğutulmasıyla oluşan kritik Rayleigh sayısı yaklaşık 480 değerine ulaşmaktadır. Bu değer aşıldığı zaman su-buz ara yüzeyi ve ısı taşınım akımları arasında bir bağlantının olduğu gözlemlenmiştir.

Suo-Anttila and Catton (19) çalışmalarında farklı alt ve üst yüzey sıcaklıkları için volumetrik olarak ısıtılan sıvı yakıt tabakasının alt ve üst yüzeylerine olan ısı transferini incelemişlerdir. Sonuçlar, yüzey sıcaklıkları farkını esas alan Rayleigh sayısının çeşitli değerleri için ve iç ısı üretimini esas alan Rayleigh sayısının bir fonksiyonu olarak tanımlanan üst ve alt yüzey ısı transferleri için iki farklı Nusselt sayısı cinsinden genelleştirilmiştir.

Forbes and Cooper (20) üst yüzeyinden donma noktasına yakın bir sıcaklıkla soğutulan yatay akışkan tabakalarında doğal taşınım oluşumunu analitik olarak incelemişlerdir. Su tabakası yan yüzeylerle sınırlandırılmış, alt yüzey sabit olarak izole edilmiş ve üst yüzeyin 0 °C sabit sıcaklık veya açık yüzey olmak üzere iki farklı durumu için değerlendirilmiştir. Açık yüzeyde dış ortam sıcaklığı 0 °C ve ısı taşınım katsayıları 568 W/m²K ve 284 W/m²K olarak iki farklı değerde tutulmuştur. Dikdörtgen su tabakasının genişlik derinlik olarak 1, 3 ve 6 olarak düşünülmüştür.

Matsumoto et. al. (21) makalelerinde üniform iç ısı üreten ve sabit fakat farklı ısı akılarına sahip iki yatay yüzey arasındaki tam gelişmiş laminar akış üzerinde oluşan ikincil akışların etkisini incelemişlerdir. Bu akışta, ikincil akışın başlamasından önce temel sıcaklık profili doğrusal değildir ve potansiyel kararsızlığı tetikleyecek kaldırma kuvvetinin yönünde negatif sıcaklık dağılımına sahiptir. Kararsızlık kriteri lineer kararlılık teorisi kullanılarak elde edilmiştir. Kritik Rayleigh sayısı ve ikincil akışın genlik değerleri farklı Prandtl sayıları ve temel sıcaklık profilini karakterize eden parametreler için bulunmuştur. Teorik sonuçların deneysel verilerle uyum içerisinde olduğu görülmüştür.

Onat and Grigull (22) gerçekleştirdikleri deneysel çalışmalarında üst yüzeyi sabit ısı akısıyla ısıtılan farklı akışkanlar için zamana bağlı sıcaklık alanlarını incelemişlerdir. Kararsızlık başlangıcı (taşınımın olayının gerçekleşmeye başlaması) $K=g\beta q_0 \tau_{kr}^2/\eta c_p$ ile verilen boyutsuz bir sayı ile tanımlanmışlardır, burada g yer çekimi ivmesi, β sabit basınçta genleşme katsayısı, q_0 ısı akısı, τ_{kr} kritik zaman diğer bir deyişle ısıtma işleminin başlangıcı ile doğal taşınım olayının başlangıcı arasındaki zaman aralığı, η ise dinamik viskoziteyi ifade etmektedir.

Genceli and Onat (23) teorik ve deneysel olarak gerçekleştirdikleri çalışmalarında alt yüzeyinden sabit ısı akısıyla ısıtılan sonsuz yatay bir hava tabakasının kararsızlık başlangıcını incelemişlerdir. Teorik bölümde kararsızlık sanki-statik yaklaşım kullanılarak değerlendirilmiştir. Dalga sayısı ve Rayleigh sayısı arasındaki fonksiyonel ilişki Prandtl sayısının farklı değerleri için bilgisayar programıyla elde edilmiştir. Benzer çalışmalarla bir karşılaştırma yapmak amacıyla sonsuzluk sınırları ve çok küçük Prandtl sayıları için de değerlendirmeler yapılmıştır. Deneysel kısımda ise gözle görülebilen taşınım başlangıcına karşılık gelen Rayleigh sayısı farklı ısı akıları için optik metotlar kullanılarak incelenmiştir. Ölçülen ortalama Rayleigh değerleri 145 olarak bulunmuştur.

Legros et al. (24) gerçekleştirdikleri deneysel çalışmayla üst plaka sıcaklığı 0°C ile 20°C arasında olan ve alt yüzeyinden ısıtılan su tabakasının ısı kararlılığı ile ilgili incelemelerinin sonuçlarını sunmuşlardır. Hesaplanan değerler ile sonuçların karşılaştırılmasıyla mükemmel bir sonuç elde edilmiştir.

Catton (25) çalışmalarında kapalı ortamlar için yoğunluk değişimi sonucunda oluşan kaldırma kuvvetinin neden olduğu doğal taşınım akımlarını incelemiştir. Kapalı ortam olarak dikey, yatay ve eğimli dikdörtgen şekiller ele alınmıştır.

Kim et al. (26) teorik çalışmalarında başlangıç anında durgun, uniform ısı akısıyla alt yüzeyinden ısıtılan ve üst yüzeyinden soğutulan yatay akışkan tabakasında zamana bağlı sıcaklık etkisiyle oluşan kaldırma kuvvetleri etkisiyle gerçekleşen ısı kararlılığı incelemişlerdir. Bunun için lineer kararlılık teorisi kullanılmıştır. Kaldırma kuvveti etkisiyle oluşan hareket Rayleigh sayısı ve Prandtl sayısının bir fonksiyonudur.

Kim et al. (27) çalışmalarında alt yüzeyinden ısıtılan başlangıçta hareketsiz akışkan tabakasında zamana bağlı kaldırma kuvveti etkisiyle gelişen taşınım oluşumunun başlangıcı yayılma teorisi kullanılarak analiz edilmiştir. Taşınım kararsızlığının başlangıcını işaret eden boyutsuz kritik zaman ifadesi Rayleigh sayısı ve Prandtl sayısının bir fonksiyonu olarak ifade edilmiştir. Gerçekleştirilen kararlılık analizi

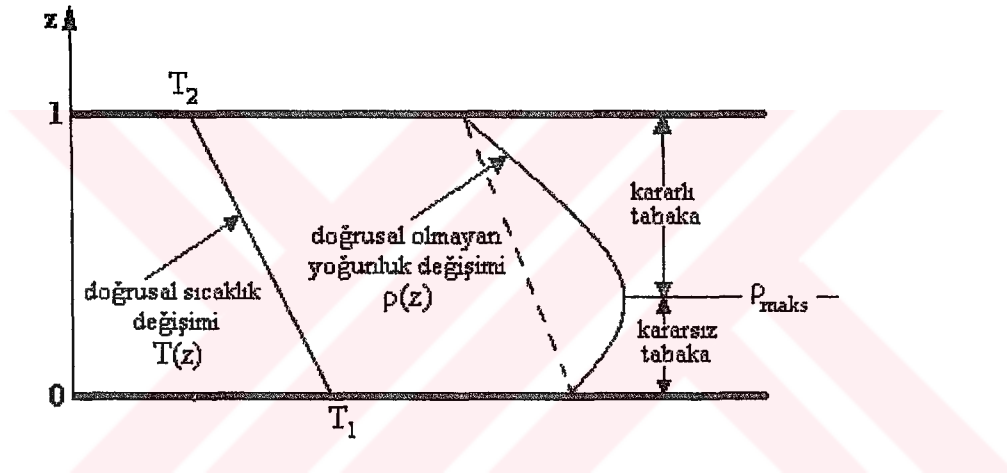
verilen bir Rayleigh sayısında Prandtl sayısının artmasıyla ile kritik zamanın azaldığını göstermektedir.

Nadolin (28) çalışmasında Rayleigh – Benard problemini Boussinesq yaklaşımını kullanmadan nümerik olarak incelemiştir. Özgül hacmi doğrusal olarak sıcaklığa bağlı ve basınçtan bağımsız akışkanlar için genel denklemlerden bu yaklaşım elde edilmiştir. Oberbeck – Boussinesq yaklaşımından farklı olarak bu modelde ısı genleşme ihmal düşünülmemiş ve ısı genleşme katsayısını içeren bütün terimler dikkate alınmıştır. Akışkanın dinamik viskozitesi, ısı iletkenliği ve özgül ısı sabit olarak kabul edilmiştir. Diğer kabuller olarak da; basınç kuvvetinin yaptığı iş ve viskoz enerji kaybı ihmal edilmiş ve tabaka sınırları izotermal olarak düşünölmüştür. Taşınım hareketinin başlangıcı nümerik ve analitik olarak her iki yöntem ile incelenmiştir. Doğrusal ve doğrusal olmayan kararlılık sonuçları Oberbeck-Boussinesq yaklaşımıyla karşılaştırılmıştır.

4. TEMEL DENKLEMLERİN ELDE EDİLMESİ

4.1. Süreklilik Denklemi

Daha önce de belirtildiği gibi bu çalışmada, alt ve üst yüzeylerle sınırlandırılmış yatay su tabakasında doğal taşınımın oluşumu incelenmiştir. Sistem şematik olarak Şekil 4.1’de görülmektedir. Sistem alt ve üst yüzeylerle sınırlandırılmış H yüksekliğinde ve yatay yönde sonsuz uzunluktaki su tabakasından oluşmaktadır. Yüzeyler farklı, homojen T_1 ve T_2 sıcaklıklarına sahip rijit olarak düşünülmüştür.



Şekil 4.1. Yatay su tabakasının şematik görünümü

Süreklilik ve momentum denklemlerinde bulunan yoğunluk teriminin yerçekimi kuvveti dışındaki bütün terimlerde sabit alınması sıcaklık farkının düşük olduğu durumlarda geçerlidir ve bu durum Boussinesq yaklaşımı olarak bilinir (29). Sistemin temel denklemleri bu yaklaşıma bağlı olarak değerlendirilmiştir.

Kartezyen koordinat sisteminde üç boyutlu süreklilik denklemi (29),

$$\frac{\partial(u')}{\partial x'} + \frac{\partial(v')}{\partial y'} + \frac{\partial(w')}{\partial z'} = 0 \quad [4.1]$$

şeklinde ifade edilir. $U' = U'(u', v', w')$ notasyonu ile süreklilik denklemi,

$$\nabla U' = 0 \quad [4.2]$$

şeklinde yazılır. Denklemlerdeki “ ' ” üslü ifadeler boyutlu terimlerdir.

4.2. Momentum Denklemi

Üç boyutlu momentum denklemi (29),

$$\rho_0 \left[\frac{\partial U'}{\partial t} + u' \frac{\partial U'}{\partial x'} + v' \frac{\partial U'}{\partial y'} + w' \frac{\partial U'}{\partial z'} \right] = -\nabla P' + \mu \left[\frac{\partial^2 U'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial z'^2} \right] + \Delta \rho g \quad [4.3]$$

şeklinde ifade edilebilir. $\frac{D}{Dt}$ toplam türevi ve $\Delta \rho = \rho_0 - \rho$ ifadeleri kullanılarak

Eş.4.3 yeniden düzenlenirse,

$$\frac{DU'}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P' + \nu \nabla^2 U' - \frac{1}{\rho_0} (\rho - \rho_0) g \quad [4.4]$$

eşitliği elde edilir.

4.3. Enerji Denklemi

Enerji denklemi (29),

$$\rho_0 c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u' \frac{\partial T}{\partial x'} + v' \frac{\partial T}{\partial y'} + w' \frac{\partial T}{\partial z'} \right] = \lambda \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z'^2} \right] + \mu \Phi \quad [4.5]$$

şeklinde yazılır. Bu bağıntı yeniden düzenlenerek,

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\lambda}{\rho_0 c_p} \nabla^2 T \quad [4.6]$$

veya

$$\frac{DT}{Dt} = a \nabla^2 T \quad [4.7]$$

eşitliği elde edilir. Burada, viskoz sürtünmelerden kaynaklanan ısı (Φ) ihmal edilmiştir.

Mevcut durumda, yoğunluk sadece sıcaklığın bir fonksiyonu olarak kabul edildiği için yoğunluk – sıcaklık bağıntısı,

$$\rho(T) = \rho_m (1 - \alpha |T - T_m|^q) \quad [4.8]$$

eşitliği ile ifade edilebilir (2). Burada $\alpha = 9,297173 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-q}$ ve $q = 1,894816$ ifadeleri yoğunluk – sıcaklık ilişkisi katsayılarıdır. ρ_m suyun maksimum yoğunluğunu ifade etmektedir. Değerler 1 bar basıncındaki saf su için geçerlidir.

4.4. Boyutsuz Temel Denklemler

Boyutsuz parametreler olarak kullanılacak terimler,

Prandtl sayısı,

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a} \quad [4.9]$$

boyutsuz zaman ifadesi

$$\tau = \frac{at}{H^2} \quad [4.10]$$

şeklinde ifade edilir. Bu bağıntıdaki a ısı yayılım katsayısıdır. Boyutsuz sıcaklık,

$$\theta = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} \quad [4.11]$$

boyutsuz koordinatlar,

$$x = \frac{x'}{H} \quad y = \frac{y'}{H} \quad z = \frac{z'}{H} \quad [4.12]$$

boyutsuz hız terimleri,

$$u = \frac{u'H}{a} \quad v = \frac{v'H}{a} \quad w = \frac{w'H}{a} \quad [4.13]$$

ve boyutsuz basınç,

$$P = \frac{P'H^2}{\rho_0 v a} \quad [4.14]$$

olarak ifade edilebilir.

Eş. 4.12 ve 4.13'de verilen boyutsuz parametreler kullanılarak süreklilik denklemi boyutsuz formda,

$$\frac{\partial w'}{\partial z'} = \frac{\partial(wa/H)}{\partial z'} = \frac{a}{H} \frac{\partial w}{\partial z'} = \frac{a}{H} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z'} = \frac{a}{H} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial(z'/H)}{\partial z'} = \frac{a}{H^2} \frac{\partial w}{\partial z} \quad [4.15]$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde u' ve v' hızları içinde düzenlenerek Eş. 4.1' de yerine koyulursa,

$$\frac{a}{H^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a}{H^2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{a}{H^2} \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad [4.16]$$

veya

$$\nabla U = 0 \quad [4.17]$$

olarak süreklilik denklemi boyutsuz forma dönüştürülür.

Momentum denkleminin boyutsuz forma dönüştürülebilmesi için Eş. 4.9 – 4.14 boyutsuz parametreleri kullanılarak düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{\partial U'}{\partial t} = \frac{\partial(Ua/H)}{\partial t} = \frac{a}{H} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{a}{H} \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{a}{H} \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{\partial(at/H^2)}{\partial t} = \frac{a^2}{H^3} \frac{\partial U}{\partial \tau} \quad [4.18]$$

veya

$$w' \frac{\partial U'}{\partial z'} = \frac{wa}{H} \frac{\partial(Ua/H)}{\partial z'} = \frac{wa^2}{H^2} \frac{\partial U}{\partial z'} = \frac{wa^2}{H^2} \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z'} = \frac{wa^2}{H^2} \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial(z'/H)}{\partial z'} = \frac{wa^2}{H^3} \frac{\partial U}{\partial z} \quad [4.19]$$

bağıntıları yazılabilir. Bu ifadeler kütlelesel türev ifadesinde yerine yazılarak,

$$\frac{DU'}{Dt} = \frac{a^2}{H^3} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{a^2}{H^3} u \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{a^2}{H^3} v \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{a^2}{H^3} w \frac{\partial U}{\partial z} \quad [4.20]$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı yeniden düzenlenerek,

$$\frac{DU'}{Dt} = \frac{a^2}{H^3} \frac{DU}{D\tau} \quad [4.21]$$

ifadesi elde edilir. Basınç terimi için,

$$\frac{\partial P'}{\partial z'} = \frac{\partial(P\rho_0 va/H^2)}{\partial z'} = \frac{\rho_0 va}{H^2} \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z'} = \frac{\rho_0 va}{H^2} \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(z'/H)}{\partial z'} = \frac{\rho_0 va}{H^3} \frac{\partial P}{\partial z} \quad [4.22]$$

ifadesi yazılabilir. Bu ifade yeniden düzenlenerek,

$$\nabla P' = \frac{\rho_0 \nu a}{H^3} \nabla P \quad [4.23]$$

boyutsuz basınç terimi elde edilir. Eş. 4.4'deki $\nabla^2 U'$ terimi için de boyutsuz parametreler kullanılarak,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U'}{\partial z'^2} &= \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{\partial U'}{\partial z'} \right] = \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{\partial(Ua/H)}{\partial z'} \right] = \frac{a}{H} \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z'} \right] \\ &= \frac{a}{H} \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial(z'/H)}{\partial z'} \right] = \frac{a}{H^2} \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{\partial U}{\partial z} \right] \\ &= \frac{a}{H^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial U}{\partial z} \right] \frac{\partial z}{\partial z'} = \frac{a}{H^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial U}{\partial z} \right] \frac{\partial(z'/H)}{\partial z'} = \frac{a}{H^3} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial U}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad [4.24]$$

eşitlikleri yazılabilir. Benzer şekilde x ve y eksenleri için,

$$\nabla^2 U' = \frac{a}{H^3} \nabla^2 U \quad [4.25]$$

ifadesi elde edilir.

Eş. 4.21, 4.23 ve 4.25'deki boyutsuz ifadeler Eş. 4.4'deki momentum ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\frac{a^2}{H^3} \frac{DU}{D\tau} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_0 \nu a}{H^3} \nabla P + \frac{\nu a}{H^3} \nabla^2 U - \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) g \quad [4.26]$$

ifadesi elde edilir. Denklemin her iki tarafı $\left(\frac{H^3}{a\nu}\right)$ ile çarpılarak yeniden düzenlenirse,

$$\frac{1}{Pr} \frac{DU}{D\tau} = -\nabla P + \nabla^2 U - \frac{H^3}{a\nu} \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) g \quad [4.27]$$

boyutsuz momentum denklemi elde edilir.

Eş. 4.10 – 4.13 boyutsuz parametreleri kullanılarak enerji denkleminin boyutsuz forma dönüştürülebilmesi için,

$$\Delta T = T_1 - T_2 \quad [4.28]$$

ifadesi Eş. 4.11’de yerine yazılarak,

$$\theta = \frac{T - T_2}{\Delta T} \Rightarrow T = T_2 + \Delta T \theta \quad [4.29]$$

bağıntısı elde edilir. Bu ifade Eş. 4.5’deki $\frac{\partial T}{\partial t}$ terimi için düzenlenirse,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (T_1 + \Delta T \theta) = \Delta T \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \Delta T \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \Delta T \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial (at/H^2)}{\partial t} \quad [4.30]$$

ifadesi yazılır. Bu bağıntı yeniden düzenlenerek,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\Delta T a}{H^2} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad [4.31]$$

bağıntısını elde ederiz. Benzer şekilde Eş. 4.5’deki $w' \frac{\partial T}{\partial z'}$ terimi,

$$\begin{aligned}
w' \frac{\partial T}{\partial z'} &= \frac{wa}{H} \frac{\partial T}{\partial z'} = \frac{wa}{H} \frac{\partial (T_1 + \Delta T \theta)}{\partial z'} = \frac{wa \Delta T}{H} \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z'} \\
&= \frac{wa \Delta T}{H} \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial (z'/H)}{\partial z'} = \frac{wa \Delta T}{H^2} \frac{\partial \theta}{\partial z}
\end{aligned} \quad [4.32]$$

şeklinde ifade edilir. Sıcaklığın kütesel türevi Eş. 4.31 ve 4.32 kullanılarak,

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\Delta Ta}{H^2} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{ua \Delta T}{H^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{va \Delta T}{H^2} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{wa \Delta T}{H^2} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad [4.33]$$

ifadesi düzenlenirse,

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\Delta Ta}{H^2} \frac{D\theta}{D\tau} \quad [4.34]$$

bağıntısı elde edilir. Eş. 4.5 ile verilen enerji denkleminin sağ tarafındaki $\frac{\partial^2 T}{\partial z'^2}$ terimi,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T}{\partial z'^2} &= \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{\partial T}{\partial z'} \right] = \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{\partial (T_1 + \Delta T \theta)}{\partial z'} \right] = \Delta T \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \frac{\partial z}{\partial z'} \\
&= \Delta T \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \frac{\partial (z'/H)}{\partial z'} = \frac{\Delta T}{H} \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \\
&= \frac{\Delta T}{H} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \frac{\partial z}{\partial z'} = \frac{\Delta T}{H} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \frac{\partial (z'/H)}{\partial z'} \quad [4.35]
\end{aligned}$$

düzenlenerek,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z'^2} = \frac{\Delta T}{H^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad [4.36]$$

ifadesi elde edilir. x ve y koordinatları için de aynı düzenlemeler yapılarak $\nabla^2 T$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\nabla^2 T = \frac{\Delta T}{H^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\Delta T}{H^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\Delta T}{H^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad [4.37]$$

veya

$$\nabla^2 T = \frac{\Delta T}{H^2} \nabla^2 \theta \quad [4.38]$$

bağıntısı elde edilir. Eş. 4.34 ve 4.38 boyutsuz ifadeleri Eş. 4.7 enerji denkleminde yerine yazılarak düzenleme yapılırsa,

$$\frac{D\theta}{D\tau} = \nabla^2 \theta \quad [4.39]$$

şeklinde boyutsuz enerji denklemi elde edilir.

4.5. Perturbasyon Denklemlerinin Oluşturulması

Sistemin genel hız, sıcaklık, basınç ve yoğunluk fonksiyonları iki yüzey ile sınırlandırılmış akışkan tabakasındaki yüzey sıcaklıklarının etkisiyle meydana gelen anlık akış hareketlerine bağlı olarak oluşan hız, sıcaklık, basınç ve yoğunluk fonksiyonları ile sürekli şartlarda ısı iletimi için geçerli fonksiyonların toplamı olarak ifade edilebilir. Denklemlerdeki “ - ” üslü ifadeler yatay su tabakasının durgun (statik) hali için geçerli fonksiyonlardır. “ ^ ” üslü ifadeler ise doğal taşınımın oluşmasıyla meydana gelen değişkenleri ifade etmektedir.

$$U(x, y, z, \tau) = \bar{U}(z) + \hat{U}(x, y, z, \tau) \quad [4.40]$$

$$\theta(x, y, z, \tau) = \bar{\theta}(z) + \hat{\theta}(x, y, z, \tau) \quad [4.41]$$

$$P(x, y, z, \tau) = \bar{P}(z) + \hat{P}(x, y, z, \tau) \quad [4.42]$$

$$\rho(x, y, z, \tau) = \bar{\rho}(\bar{T}) + \hat{\rho}(x, y, z, \tau) \quad [4.43]$$

Denklemlerdeki $\bar{U}, \bar{\theta}, \bar{P}$ ve $\bar{\rho}$ ifadeleri kaldırma kuvvetinin viskoz kuvvetleri yenmesiyle meydana gelen anlık akış hareketlerinin başlamasından önce oluşan sürekli şartlardaki hız, sıcaklık, basınç ve yoğunluk değişimlerini göstermektedir. $\hat{U}, \hat{\theta}, \hat{P}$ ve $\hat{\rho}$ ifadeleri, meydana gelen akış hareketini niteleyen fonksiyonlardır.

Doğal taşınım oluşumundan önce yatay su tabakasındaki, sürekli şartlarda ısı iletimi için boyutsuz formda düzenlediğimiz Eş. 4.27 momentum denklemi,

$$0 = -\nabla P + 0 - \frac{H^3}{a\nu} \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) g \quad [4.44]$$

şeklinde ifade edilir. Akış hareketleri henüz gerçekleşmediği için hız sıfırdır. Eş 4.44 düzenlenerek anlık akış hareketlerinin başlamasından önce akışkan içerisindeki basınç dağılımı,

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = -\frac{H^3}{a\nu} \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} - 1 \right) g \quad [4.45]$$

şeklinde yazılabilir. Doğal taşınım başlamadan önce yatay su tabakasında sürekli şartlarda ısı iletimi için Eş. 4.39 enerji ifadesi,

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \tau} + u \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} \quad [4.46]$$

şeklinde yazılarak düzenlenirse tek boyutlu sürekli şartlarda ısı iletimi için,

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} = 0 \quad [4.47]$$

eşitliği elde edilir. Eş. 4.47 denklemini çözmek için, tek boyutlu sürekli şartlarda yatay su tabakasının alt ve üst yüzeyleri için sınır şartları,

Alt yüzey sıcaklığı ($z = 0$) için,

$$T = T_1 \quad \bar{\theta} = \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_2} \Rightarrow \bar{\theta}_{(z=0)} = 1 \quad [4.48]$$

Üst yüzey sıcaklığı ($z = 1$) için,

$$T = T_2 \quad \bar{\theta} = \frac{T_2 - T_2}{T_1 - T_2} \Rightarrow \bar{\theta}_{(z=1)} = 0 \quad [4.49]$$

sınır değerleri bulunur. Eş. 4.47 ifadesi integral alınarak çözümlenirse,

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = A \Rightarrow \bar{\theta} = Az + B \quad [4.50]$$

bağıntısı elde edilir. Eş. 4.48 ve 4.49 sınır şartları için Eş. 4.50 ifadesinde A ve B bilinmeyenleri,

$z = 0$ için,

$$\bar{\theta} \Big|_{z=0} = 1 = A \cdot 0 + B \Rightarrow B = 1 \quad [4.51]$$

$z = 1$ için,

$$\bar{\theta}\Big|_{z=1} = 0 = A1 + 1 \Rightarrow A = -1 \quad [4.52]$$

olarak bulunur. $A = -1$ ve $B = 1$ değerleri Eş. 50'de yerine yazılarak,

$$\bar{\theta} = 1 - z \quad [4.53]$$

statik haldeki yatay su tabakası için tek boyutlu sürekli şartlarda ısı iletimi ifadesi elde edilir.

Yatay su tabakasında doğal taşınım başlamadan önce akışkan hızı,

$$\bar{U}(z) = 0 \quad [4.54]$$

ifadesiyle yazılabilir. Eş. 4.54 ifadesi Eş. 4.40'da yerine yazılarak,

$$U(x, y, z, \tau) = \hat{U}(x, y, z, \tau) \quad [4.55]$$

eşitliği elde edilir. Eş. 4.55 ifadesi Eş. 4.17'de yerine yazılarak,

$$\nabla \hat{U} = 0 \quad [4.56]$$

ifadesi elde edilir. Eş. 4.40 ifadesi Eş. 4.27 momentum denkleminde yerine yazılırsa momentum denkleminin sol tarafı,

$$\frac{DU}{D\tau} = \frac{D\hat{U}}{D\tau} = \frac{\partial \hat{U}}{\partial \tau} + \hat{u} \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial \hat{U}}{\partial y} + \hat{w} \frac{\partial \hat{U}}{\partial z} \cong \frac{\partial \hat{U}}{\partial \tau} \quad [4.57]$$

şeklinde bulunur. İfadede perturbasyon hız ifadelerinin çarpımları çok küçük değerler oldukları için ihmal edilmiştirler.

4.42 basınç ifadesi,

$$\nabla P = \nabla \bar{P} + \nabla \hat{P} \quad [4.58]$$

şeklinde yazılabilir. Eş. 4.45 ifadesi Eş. 4.58'de yerine yazılarak,

$$\nabla P = -\frac{H^3}{a\nu} \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} - 1 \right) g + \nabla \hat{P} \quad [4.59]$$

olarak basınç terimi elde edilir. Eş. 4.27 momentum denklemi için, $\nabla^2 U$ ifadesi Eş. 4.40 kullanılarak düzenlenirse

$$\nabla^2 U = \nabla^2 \hat{U} \quad [4.60]$$

eşitliği elde edilir. Eş. 4.43 yoğunluk ifadesi,

$$\hat{\rho} = \rho - \bar{\rho} \quad [4.61]$$

şeklinde düzenlenir. Eş. 4.8'de verilen yoğunluk fonksiyonu için $\bar{T}$ 'a göre Taylor serisi açılımı, ilk terimin değeri için Eş. 4.61'de yerine yazılırsa,

$$\hat{\rho} = (T - \bar{T}) \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{T=\bar{T}} = \hat{T} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{T=\bar{T}} \quad [4.62]$$

bağıntısı elde edilir. Eş. 4.8 yoğunluk ifadesiyle Eş. 4.62 düzenlenerek,

$$\hat{\rho} = \pm \hat{T} \rho_m \alpha q |\bar{T} - T_m|^{q-1} \quad [4.63]$$

olarak doğal taşınımın oluşumuyla meydana gelen yoğunluk değişimi ifadesi elde edilir. Burada eşitlik $\bar{T} < T_m$ için negatif, $\bar{T} > T_m$ için ise pozitif olarak değerlendirilecektir. Eş. 4.63'de,

$$\bar{T} = T_1 - (T_1 - T_2)z \quad [4.64]$$

$$R = \frac{T_m - T_2}{T_1 - T_2} \quad [4.65]$$

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{T}}{T_1 - T_2} \quad [4.66]$$

bağıntıları yerine yazılarak,

$$\hat{\rho} = \pm \hat{\theta} (T_1 - T_2) \rho_m \alpha q |T_1 - (T_1 - T_2)z - R(T_1 - T_2) - T_2|^{q-1} \quad [4.67]$$

eşitliği elde edilir. İfade düzenlenerek,

$$\hat{\rho} = \pm \rho_m \alpha q (T_1 - T_2) |T_1 - T_2|^{q-1} |1 - z - R|^{q-1} \hat{\theta} \quad [4.68]$$

bağıntısı elde edilir. Eş. 4.68 ifadesi için,

$$K = \alpha q (T_1 - T_2) |T_1 - T_2|^{q-1} |1 - R|^{q-1} \quad [4.69]$$

ve

$$N(z, R) = \pm \frac{|1 - z - R|^{q-1}}{|1 - R|} \quad [4.70]$$

tanımlamaları kullanılarak Eş. 4.67 düzenlenirse,

$$\hat{\rho} = \rho_m KN(z, R) \hat{\theta} \quad [4.71]$$

ifadesi şeklinde yazılabilir. Eş. 4.57 – 4.60 ve 4.71 ifadeleri Eş. 4.27 momentum ifadesinde yerine koyularak,

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \tau} = - \left[- \frac{H^3}{a\nu} \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} - 1 \right) g + \nabla \hat{P} \right] + \nabla^2 \hat{U} - \frac{H^3}{a\nu} \left[\frac{\bar{\rho} + \rho_m KN \hat{\theta}}{\rho_0} - 1 \right] g \quad [4.72]$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik düzenlenerek,

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \tau} = - \nabla \hat{P} + \nabla^2 \hat{U} - \frac{gH^3}{a\nu} KN \hat{\theta} \quad [4.73]$$

ifadesine ulaşılır. Rayleigh sayısı,

$$Ra = \frac{gKH^3}{a\nu} \quad [4.74]$$

bağıntısı ile tanımlanır. Eş. 4.74 kullanılarak, Eş. 4.73 ifadesinde $\hat{u}$ ve $\hat{v}$ hız bileşenleri ile $\hat{P}$ basınç terimleri ihmal edilerek,

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \tau} = - Ra N \hat{\theta} + \nabla^2 \hat{w} \quad [4.75]$$

denklemini elde edilir. Eş. 4.41 perturbasyon ifadesi Eş. 4.39 enerji denkleminde yerine koyularak,

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \tau} + \hat{u} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial y} + \hat{w} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial z} + \hat{w} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \nabla^2 \bar{\theta} + \nabla^2 \hat{\theta} \quad [4.76]$$

ifadesi elde edilir. Perturbasyon terimlerinin çarpımları diğer terimlere göre çok daha küçük değerli oldukları için bu terimlerin ihmal edilmesiyle,

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \tau} + \hat{w} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} + \nabla^2 \hat{\theta} \quad [4.77]$$

eşitliği elde edilir. Eş. 4.53'deki tek boyutlu sürekli şartlardaki ısı iletimi ifadesi Eş. 4.77'de yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \tau} - \hat{w} = \nabla^2 \hat{\theta} \quad [4.78]$$

bağıntısı elde edilir. Eş. 4.75 ve 4.78 numaralı eşitlikler düzenlenerek,

$$\left(\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \tau} - \nabla^2 \right) \nabla^2 \hat{w} = -RaN \nabla_z^2 \hat{\theta} \quad [4.79]$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \nabla^2 \right) \hat{\theta} = \hat{w} \quad [4.80]$$

denklemleri elde edilir.

5. ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Eş. 4.79 ve 4.80 lineer denklemler oldukları için $\hat{w}$ ve $\hat{\theta}$ fonksiyonları değişkenlerine ayrılabilen denklemler olarak yazılabilir. Bu sebeple hız ve sıcaklık perturbasyon fonksiyonları,

$$\hat{w} = F(z)H(x, y)\exp(\sigma\tau) \quad [5.1]$$

$$\hat{\theta} = G(z)H(x, y)\exp(\sigma\tau) \quad [5.2]$$

olarak tanımlanır. Eş. 5.1 ve 5.2 ifadeleri Eş. 4.80'de yerine yazılarak,

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \nabla^2\right)(G(z)H(x, y)e^{\sigma\tau}) = F(z)H(x, y)e^{\sigma\tau} \quad [5.3]$$

ifadeyi düzenlersek,

$$GH\sigma e^{\sigma\tau} - e^{\sigma\tau} \left[G \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + H \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \right] = FHe^{\sigma\tau} \quad [5.4]$$

eşitliği elde edilir. Eş. 5.4'ün her iki tarafı $\frac{1}{GHe^{\sigma\tau}}$ terimi ile çarpılarak,

$$\sigma - \left[\frac{1}{H} \nabla^2 H + \frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \right] = \frac{F}{G} \quad [5.5]$$

ifade düzenlenirse,

$$\frac{1}{H} \nabla^2 H = \sigma - \frac{F}{G} - \frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = -k^2 \quad [5.6]$$

eşitliği elde edilir. Burada $-k^2$ ifadesi ayırma sabitidir. Eş. 5.6 ifadesi,

$$\nabla_2^2 H + Hk^2 = 0 \quad [5.7]$$

şeklinde yazılarak dalga denklemi elde edilir. İfadede k terimi dalga sayısı olarak bilinir. Eş. 5.6 tekrar düzenlenerek,

$$[\sigma - (D^2 - k^2)]G = F \quad [5.8]$$

denklemi elde edilir. Benzer şekilde Eş. 5.1 ve 5.2 ifadeleri Eş. 4.79'de yerine yazılarak,

$$\left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \tau} - \nabla^2 \right) \nabla^2 (FHe^{\sigma\tau}) = -RaN\nabla_2^2 (GHe^{\sigma\tau}) \quad [5.9]$$

ifadesi düzenlenerek,

$$\left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \tau} - \nabla^2 \right) e^{\sigma\tau} \left(F\nabla_2^2 H + H \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) = -RaNe^{\sigma\tau} G\nabla_2^2 H \quad [5.10]$$

denklemi elde edilir. Eş. 5.7 ve 5.10 denklemlerinin birleştirilmesiyle,

$$e^{\sigma\tau} \left(\frac{\sigma}{Pr} - \nabla^2 \right) (-Fhk^2 + HD^2 F) = RaNe^{\sigma\tau} GHk^2 \quad [5.11]$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade,

$$\left(H \frac{\sigma}{Pr} - \nabla_2^2 H - D^2 H \right) (D^2 - k^2) F = RaNGHk^2 \quad [5.12]$$

şeklinde düzenlenerek,

$$\left(\frac{\sigma}{Pr} - (D^2 - k^2)\right)(D^2 - k^2)F = -Ra.N.G.k^2 \quad [5.13]$$

bağıntısı elde edilir. Eş. 5.8 ve 5.13 ifadeleri çözüm için kullanılacak genel denklemlerdir. Bu denklemler bir özdeğer problemidir. $F(z)$ ve $G(z)$ fonksiyonlarının çözümleri $\{\sigma, k, Ra\}$ ifadelerinin belli kombinasyonları için mevcuttur. Burada, $\sigma = 0$ özdeğer ifadesine “nötr kararlılık durumu” veya “marjinal kararlılık noktası” denir. Diğer bir değişle akışkan içerisindeki doğal taşınım başlangıcı $\sigma = 0$ değeri için geçerlidir. Eş. 5.8 ve 5.13 ifadeleri $\sigma = 0$ durumu için,

$$(D^2 - k^2)G = -F \quad [5.14]$$

$$(D^2 - k^2)^2 F = RaNGk^2 \quad [5.15]$$

şekline dönüştürülür. Her iki denklemin birleştirilmesiyle,

$$(D^2 - k^2)^3 G = -RaNGk^2 \quad [5.16]$$

bağıntısı elde edilir.

Yatay su tabakasının alt ve üst yüzeyleri geçirmezlik özelliğine sahip oldukları için bu yüzeylerde hız bileşenleri sıfırdır. Bu durum,

$$\hat{U}(x, y, 0, \tau) = \hat{U}(x, y, 1, \tau) = 0 \quad [5.17]$$

ifadesiyle gösterilir. $\hat{u} = \hat{v} = 0$ ve dolayısıyla $\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = 0$ olduğu için, Eş. 4.17 süreklilik denkleminde,

$$\left.\frac{\partial \hat{w}}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial \hat{w}}{\partial z}\right|_{z=1} = 0 \quad [5.18]$$

sonucu elde edilir. Her iki yüzeyde de her hangi bir akışkan hareketi gerçekleşmediği için bu yüzeylerde perturbasyon sıcaklık değişimleri de olmayacaktır. Bu durum,

$$\hat{\theta}(x, y, 0, \tau) = \hat{\theta}(x, y, 1, \tau) = 0 \quad [5.19]$$

ifadesiyle gösterilir. Değişkenlerine ayrılabilen denklemler olarak yazılan Eş. 5.1 ve 5.2 perturbasyon hız ve sıcaklık fonksiyonları sınır şartlarını her bir değişkeni için sağlaması gerektiğinden dolayı, Eş. 5.17 – 5.19 ifadeleri Eş. 5.1 ve 5.2 fonksiyonları için,

$$F(0) = F(1) = 0 \quad [5.20]$$

$$DF(0) = DF(1) = 0 \quad [5.21]$$

$$G(0) = G(1) = 0 \quad [5.22]$$

şeklinde düzenlenir. Denklemlerdeki “D” sembolü $\frac{d}{dz}$ diferansiyel operatörünü tanımlamaktadır. Eş. 5.20 ve 5.21 sınır şartlarının Eş. 5.14’de yerine konulmasıyla $z = 0$ ve $z = 1$ yüzeyleri için,

$$(D^2 - k^2)G = 0 \quad [5.23]$$

ve

$$D(D^2 - k^2)G = 0 \quad [5.24]$$

sınır şartları elde edilir. Çözüm için Eş. 5.16 ifadesi,

$$(D^6 - 3k^2D^4 + 3k^4D^2 - k^6)G = -RaNGk^2 \quad [5.25]$$

şeklinde düzenlenerek,

$$G^{VI} - 3k^2 G^{IV} + 3k^4 G^{II} - k^6 G = -RaNGk^2 \quad [5.26]$$

denklemini elde edilir. Burada G fonksiyonları için $Q(h^2)$ hata mertebesinde merkezi fark formülleri (30) yazılarak,

$$\begin{aligned} & \frac{G_{n+3} - 6G_{n+2} + 15G_{n+1} - 20G_n + 15G_{n-1} - 6G_{n-2} + G_{n-3}}{(\Delta z)^6} - \\ & 3k^2 \left[\frac{G_{n+2} - 4G_{n+1} + 6G_n - 4G_{n-1} + G_{n-2}}{(\Delta z)^4} \right] + \\ & 3k^4 \left[\frac{G_{n+1} - 2G_n + G_{n-1}}{(\Delta z)^2} \right] - k^6 G_n = \pm \left| \frac{1 - n(\Delta z) - R}{1 - R} \right|^{q-1} (-Ra)G_n k^2 \end{aligned} \quad [5.27]$$

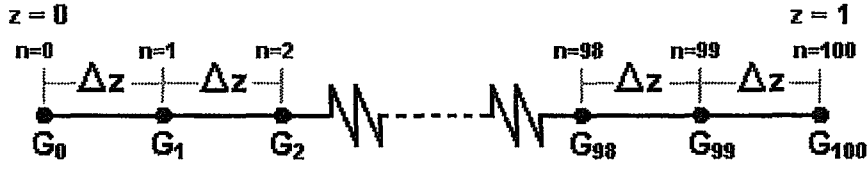
ifade genişletilir. Eş. 5.27 ifadesinin düzenlenmesiyle,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{k^2(\Delta z)^6} G_{n+3} + \frac{(6 + 3k^2(\Delta z)^2)}{k^2(\Delta z)^6} G_{n+2} - \frac{(15 + 12k^2(\Delta z)^2 + 3k^4(\Delta z)^4)}{k^2(\Delta z)^6} G_{n+1} + \\ & \frac{(20 + 18k^2(\Delta z)^2 + 6k^4(\Delta z)^4 + k^6(\Delta z)^6)}{k^2(\Delta z)^6} G_n - \frac{(15 + 12k^2(\Delta z)^2 + 3k^4(\Delta z)^4)}{k^2(\Delta z)^6} G_{n-1} + \\ & \frac{(6 + 3k^2(\Delta z)^2)}{k^2(\Delta z)^6} G_{n-2} - \frac{1}{k^2(\Delta z)^6} G_{n-3} = \pm \left| \frac{1 - n(\Delta z) - R}{1 - R} \right|^{q-1} RaG_n \end{aligned} \quad [5.28]$$

eşitliği elde edilir. Sayısal çözüm için, $z = 0 - 1$ aralığı 100 eşit aralığa (Ek.2) ayrılarak diskritize edilmiş ve her bir nokta arasındaki birim uzunluk,

$$\Delta z = \frac{1-0}{n} = 0.01 \quad [5.29]$$

olarak bulunmuştur. Şekil 5.1'de $n = 100$ için $G(z)$ fonksiyonları şematik olarak gösterilmiştir.



Şekil 5.1. $z = 0$ ve $z = 1$ aralığında 100 bölgeye ayrılan $G(z)$ fonksiyonunun noktasal gösterimi

Sistemin sınır şartları Eş. 5.22'den,

$z = 0$ ($n = 0$) için,

$$G_0 = 0 \quad [5.30]$$

$z = 1$ ($n = 100$) için,

$$G_{100} = 0 \quad [5.31]$$

olarak yazılabilir. Türev türü sınır şartları Eş. 5.23'den,

$z = 0$ ($n = 0$) için,

$$G''_0 = k^2 G_0 = 0 \quad [5.32]$$

$z = 1$ ($n = 100$) için,

$$G''_{100} = k^2 G_{100} = 0 \quad [5.33]$$

şeklinde yazılabilir. Eş. 5.32 ve 5.33 ifadeleri için $Q(h^2)$ hata mertebesinde ikinci dereceden merkezi fark formülü,

$$G'' = \frac{G_{n+1} - 2G_n + G_{n-1}}{(\Delta z)^2} \quad [5.34]$$

şeklindedir. Bu ifade,

$n = 0$ için,

$$G''_0 = \frac{G_1 - 2G_0 + G_{-1}}{(\Delta z)^2} = 0 \quad [5.35]$$

olarak yazılır. İfade Eş. 5.30'la düzenlenerek,

$$G_{-1} = -G_1 \quad [5.36]$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde $n = 100$ için,

$$G''_{100} = \frac{G_{101} - 2G_{100} + G_{99}}{(\Delta z)^2} = 0 \quad [5.37]$$

olarak yazılır. İfade Eş. 5.31'le düzenlenerek,

$$G_{101} = -G_{99} \quad [5.38]$$

eşitliği elde edilir. Diğer bir türev türü sınır şartı olan Eş. 5.24 ifadesi için $Q(h^2)$ hata mertebesinde merkezi fark formülleri düzenlenirse,

$$\frac{G_{n+2} - 2G_{n+1} + 2G_{n-1} - G_{n-2}}{2(\Delta z)^3} = k^2 \left[\frac{G_{n+1} - G_{n-1}}{2\Delta z} \right] \quad [5.39]$$

ifadesi elde edilir. Buradan, Eş. 5.39 ifadesi $n = 0$ için,

$$\frac{G_2 - 2G_1 + 2G_{-1} - G_{-2}}{2(\Delta z)^3} = k^2 \left[\frac{G_1 - G_{-1}}{2\Delta z} \right] \quad [5.40]$$

şeklinde yazılır. Eşitlik düzenlenerek,

$$G_{-2} = G_2 - (2k^2 (\Delta z)^2 + 4)G_1 \quad [5.41]$$

ifadesi elde edilir. Buradan, Eş. 5.39 ifadesi $n = 100$ için,

$$\frac{G_{102} - 2G_{101} + 2G_{99} - G_{98}}{2(\Delta z)^3} = k^2 \left[\frac{G_{101} - G_{99}}{2\Delta z} \right] \quad [5.42]$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade düzenlenerek,

$$G_{102} = G_{98} - (2k^2 (\Delta z)^2 + 4)G_{99} \quad [5.43]$$

ifadesi elde edilir. Sayısal çözüme uygun hale getirilen Eş. 5.28 ifadesi, Eş. 5.30, 5.31, 5.36, 5.38, 5.41 ve 5.43 sınır şartlarına uygun olarak bilgisayar programı yardımıyla çözülebilmesi için geliştirilen program Ek.1'de gösterilmiştir.

Geliştirilen bilgisayar programının amacı, Eş. 5.28 ifadesini sağlayan minimum Ra değerini bulmaktır. Bunun için, Eş. 5.28 denklemi $n = 1, 2, 3, \dots, 97, 98, 99$ olmak üzere n 'nin her bir değeri için yerine konulmasıyla 99 adet denklem elde edilir. Eş. 5.30, 5.31, 5.36, 5.38, 5.41 ve 5.43'de verilen sınır şartları ile denklemler düzenlenerek,

$$\begin{array}{ll} n = 1 \text{ için} & a_1 G_1 + b_1 G_2 + c_1 G_3 + d_1 G_4 = Ra \ G_1 \\ n = 2 \text{ için} & a_2 G_1 + b_2 G_2 + c_2 G_3 + d_2 G_4 + e_2 G_5 = Ra \ G_2 \\ n = 3 \text{ için} & a_3 G_1 + b_3 G_2 + c_3 G_3 + d_3 G_4 + e_3 G_5 + f_3 G_6 = Ra \ G_3 \\ \vdots & \vdots \\ n = 97 \text{ için} & a_{97} G_{94} + b_{97} G_{95} + c_{97} G_{96} + d_{97} G_{97} + e_{97} G_{98} + f_{97} G_{99} = Ra \ G_{97} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 n = 98 \text{ için} \quad & a_{98}G_{95} + b_{98}G_{96} + c_{98}G_{97} + d_{98}G_{98} + e_{98}G_{99} = Ra \ G_{98} \\
 n = 99 \text{ için} \quad & a_{99}G_{96} + b_{99}G_{97} + c_{99}G_{98} + d_{99}G_{99} = Ra \ G_{99}
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

ifadeleri elde edilir. Bu denklemler yeniden düzenlenerek,

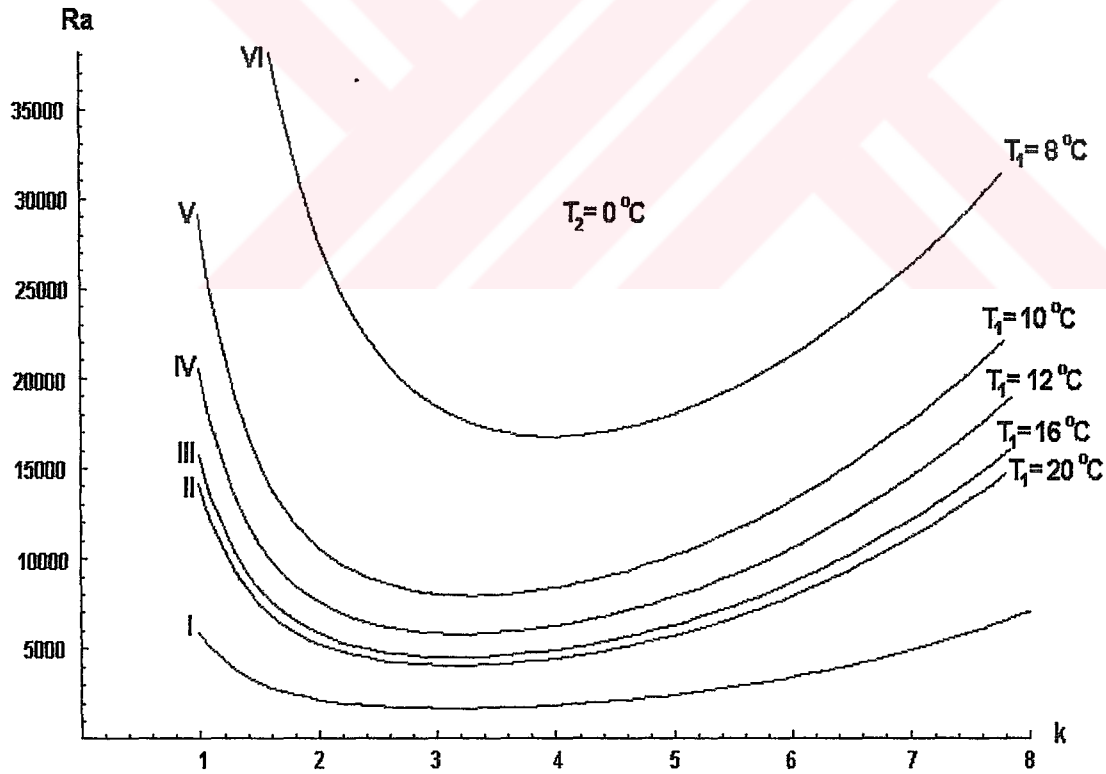
$$\begin{pmatrix}
 a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & f_4 & g_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \diagdown & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \diagdown & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \diagdown & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \diagdown & \diagdown & \diagdown & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \diagdown & \diagdown & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \diagdown & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \diagdown & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \diagdown & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \diagdown & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \diagdown & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \diagdown & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \diagdown & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \diagdown & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \diagdown
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 G_1 \\
 G_2 \\
 G_3 \\
 G_4 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 G_{96} \\
 G_{97} \\
 G_{98} \\
 G_{99}
 \end{pmatrix}
 = Ra
 \begin{pmatrix}
 G_1 \\
 G_2 \\
 G_3 \\
 G_4 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 G_{96} \\
 G_{97} \\
 G_{98} \\
 G_{99}
 \end{pmatrix}
 \tag{5.45}$$

şeklinde matris formuna dönüştürülür. Eş. 5.45 matris eşitliğini sağlayan Ra değerleri, ifadenin sol tarafındaki 99x99 boyutlarındaki matrisin özdeğerlerinin bulunmasıyla elde edilir. Bu işlemlerin dalga sayısı k'nın her bir değeri için tekrarlanmasıyla elde edilen minimum Ra değerleri ise kritik Rayleigh sayısını ifade eder.

6. SONUÇLAR

6.1. Sonuçların Değerlendirilmesi

Farklı alt ve üst yüzey sıcaklıklarına sahip yatay su tabakasında doğal taşınım başlangıcının bir göstergesi olan kritik Rayleigh sayıları Eş. 5.16 ifadesinin, Eş. 5.22 – 5.24’de verilen sınır şartlarına bağlı olarak sayısal çözümünün incelenmesiyle bulunmuştur. Bunun için, denklemler sonlu farklar yöntemi kullanılarak Eş. 5.28 genel denklemi ve Eş. 5.30, 5.31, 5.36, 5.38, 5.41 ve 5.43 sınır şartlarına bağlı olarak düzenlenmiştir. Düzenlenen denklem bilgisayar programı yardımıyla sayısal olarak çözülmüştür. Elde edilen veriler Şekil 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, 6.8, 6.9, 6.10, 6.11 ve 6.12’deki grafiklerle gösterilmiştir.

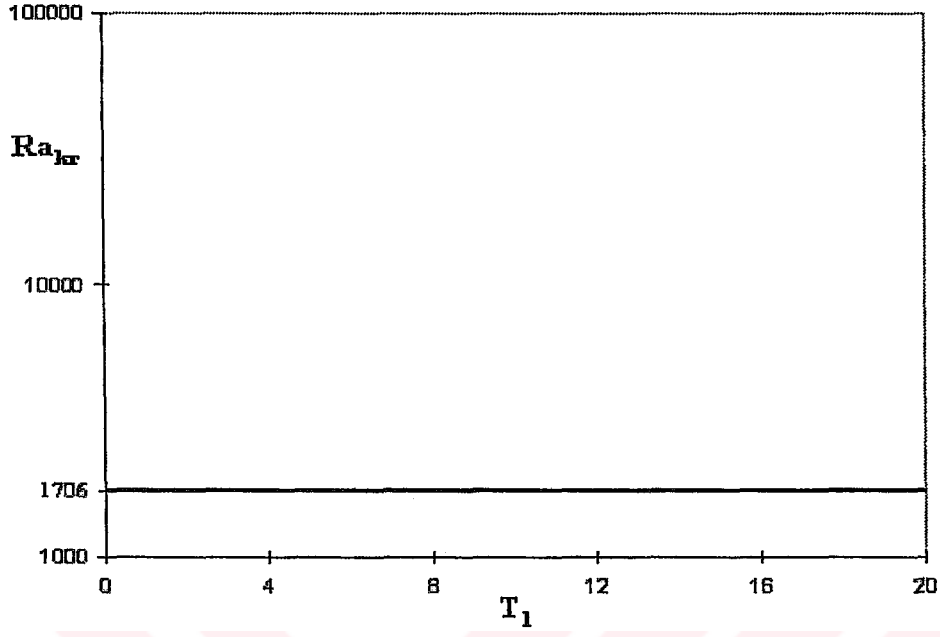


Şekil 6.1. Rayleigh sayısının dalga sayısına göre değişimi

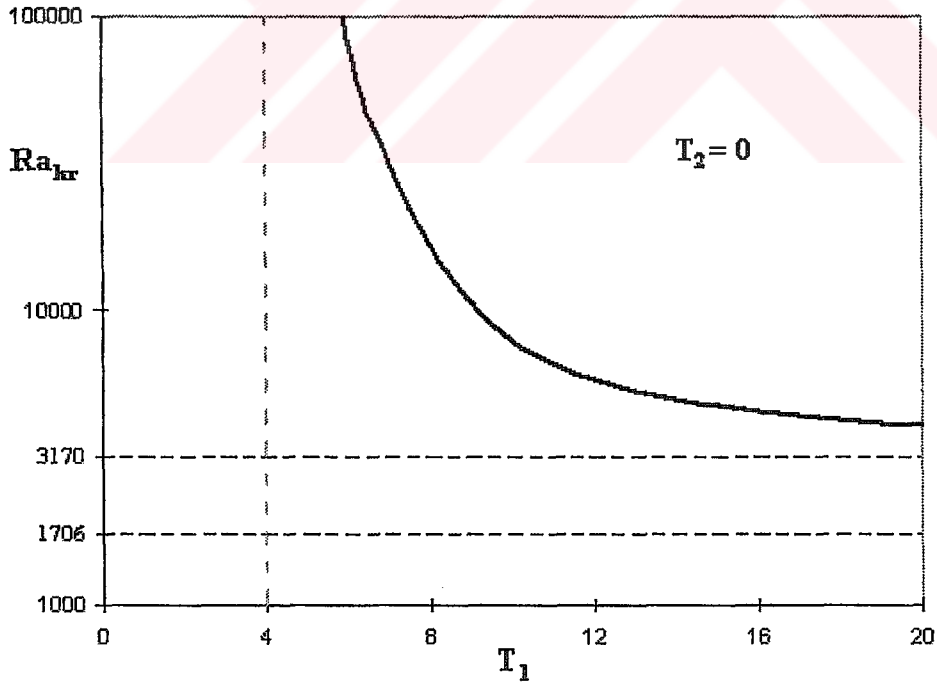
Şekil 6.1’de gösterilen I, II, III, IV, V ve VI eğrileri yatay akışkan tabakasında Rayleigh sayısının, sabit üst yüzey sıcaklığı ($T_2 = 0$) ve farklı alt yüzey sıcaklıkları için dalga sayısına göre değişimini göstermektedir. I eğrisi yoğunluk – sıcaklık ilişkisi doğrusal olan akışkanlar için geçerlidir. Diğer eğriler ise yoğunluğu sıcaklıkla doğrusal olarak değişmeyen, diğer bir deyişle yoğunluğu $\rho = \rho_m (1 - \alpha|T - T_m|^q)$ bağıntısıyla tanımlanan bir akışkan olan su için geçerlidir. Burada, 1 bar basınçtaki saf su için $\alpha = 9,297173 \text{ } ^\circ\text{C}^{-q}$ ve $q = 1,894816$ değerleri alınmıştır.

I eğrisi için kritik Rayleigh sayısı yaklaşık 1706 değerindedir. Rayleigh sayısının 1706 değerini geçmesi durumunda akışkan içinde doğal taşınım olayı başlar. Bu değer, sıcaklık farkı ile akışkan içerisinde oluşan kaldırma kuvvetinin viskoz kuvvetleri yendiği noktadır. Kritik değere kadar olan süreçte akışkan hareketsizdir. Bu kararlı akışkan bölgesidir ve grafiklerde eğrinin altında kalan bölge ile gösterilir. Kritik değerin aşılmasıyla akışkan tabakası kararsız hale gelir. Bu durum ise eğrinin üstünde kalan bölgeyi ifade eder.

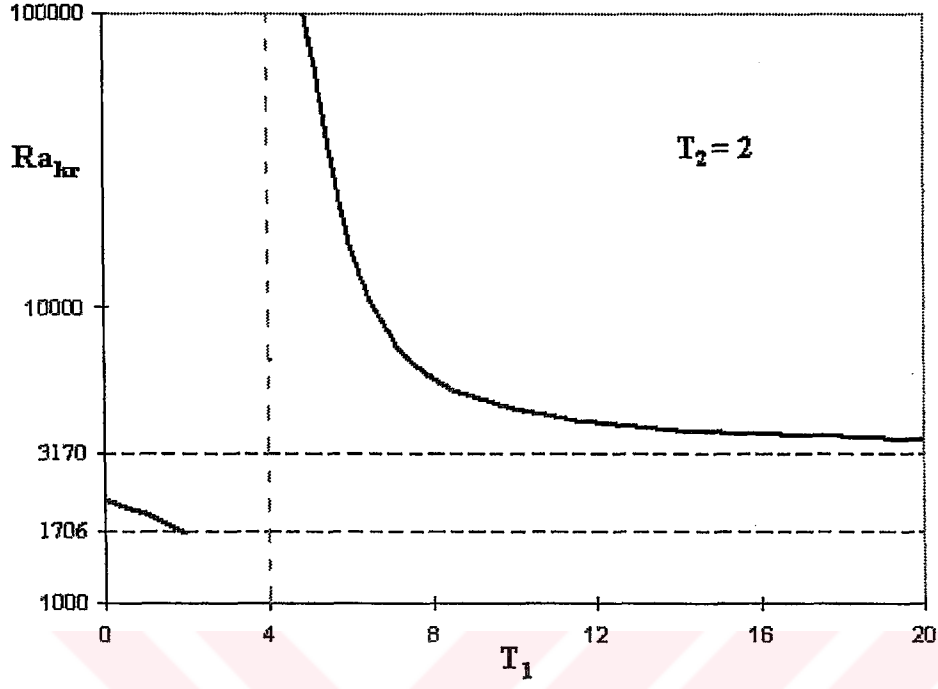
Şekil 6.1’de görüldüğü gibi, su için farklı yüzey sıcaklıklarında kritik Rayleigh sayısı değişirken, yoğunluk – sıcaklık ilişkisi doğrusal olan akışkanlarda bu değer sabittir. Suyun yoğunluğundaki bu anormalliğin akışkan tabakasında kararlaştırmacı bir etkiye sahip olduğu görülmektedir. Eğri altında kalan bölge, su için diğer akışkanlara göre daha büyüktür. Kararlı akışkan bölgesi, $T_2 = 0$ sabit olmak üzere T_1 sıcaklığının artmasıyla I nolu eğriye doğru yaklaşır.



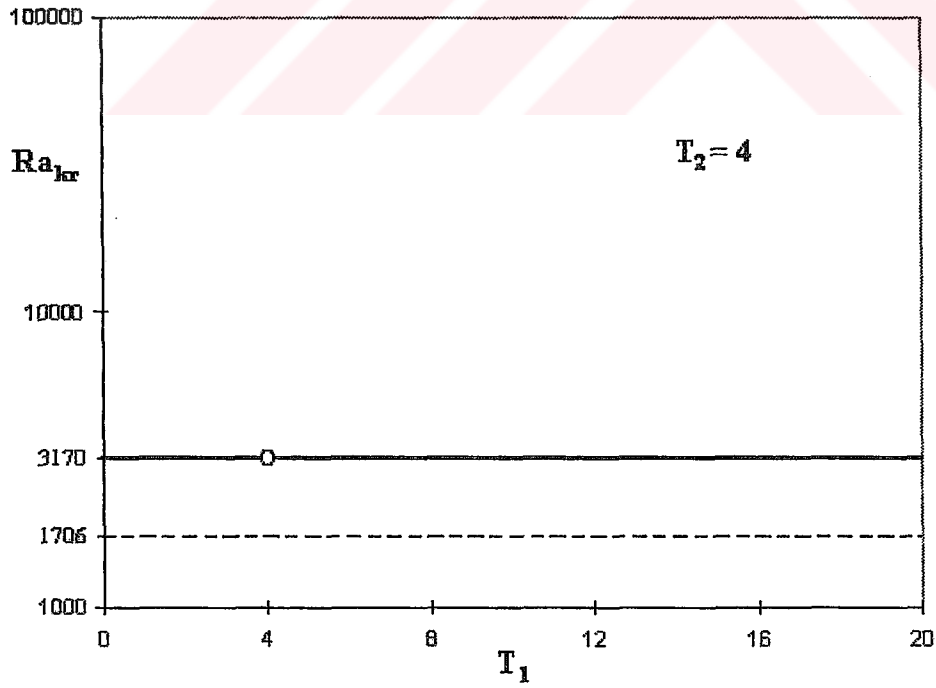
Şekil 6.2. Yoğunluğu sıcaklıkla doğrusal olarak değişen akışkanlar için kritik Rayleigh sayısının farklı yüzey sıcaklıklarına göre değişimi



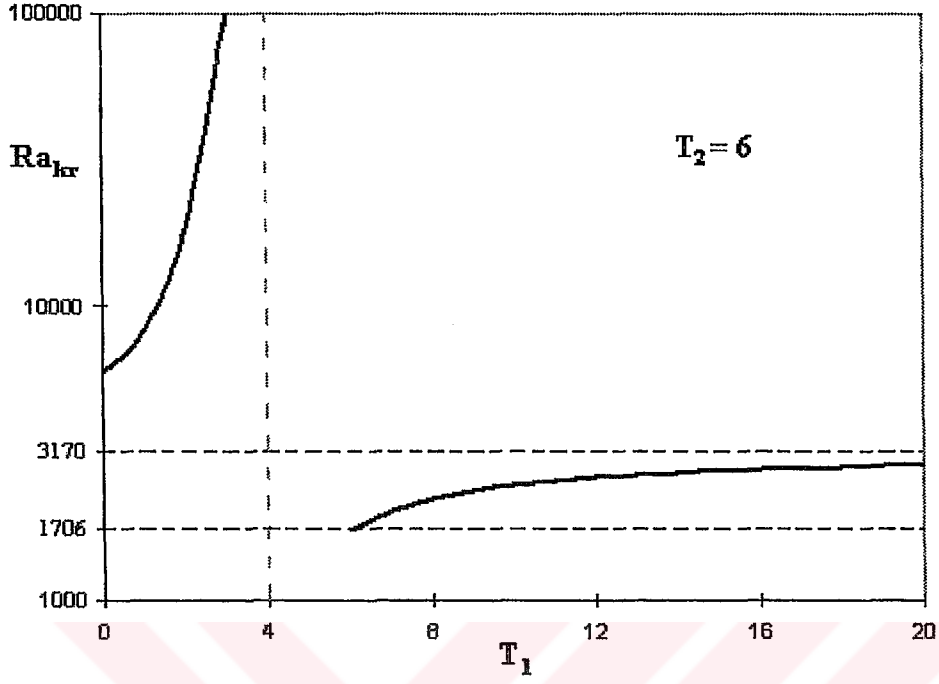
Şekil 6.3. Kritik Rayleigh sayısının yatay su tabakasının yüzey sıcaklıklarına göre değişimi ($0 \leq T_1 \leq 20$ ve $T_2 = 0$)



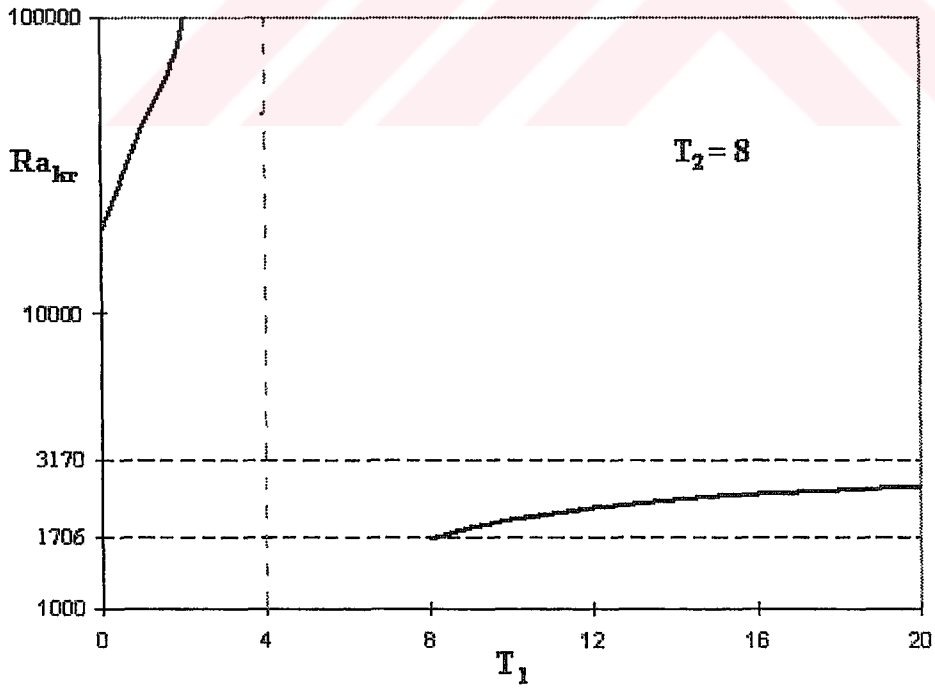
Şekil 6.4. Kritik Rayleigh sayısının yatay su tabakasının yüzey sıcaklıklarına göre değişimi ($0 \leq T_1 \leq 20$ ve $T_2 = 2$)



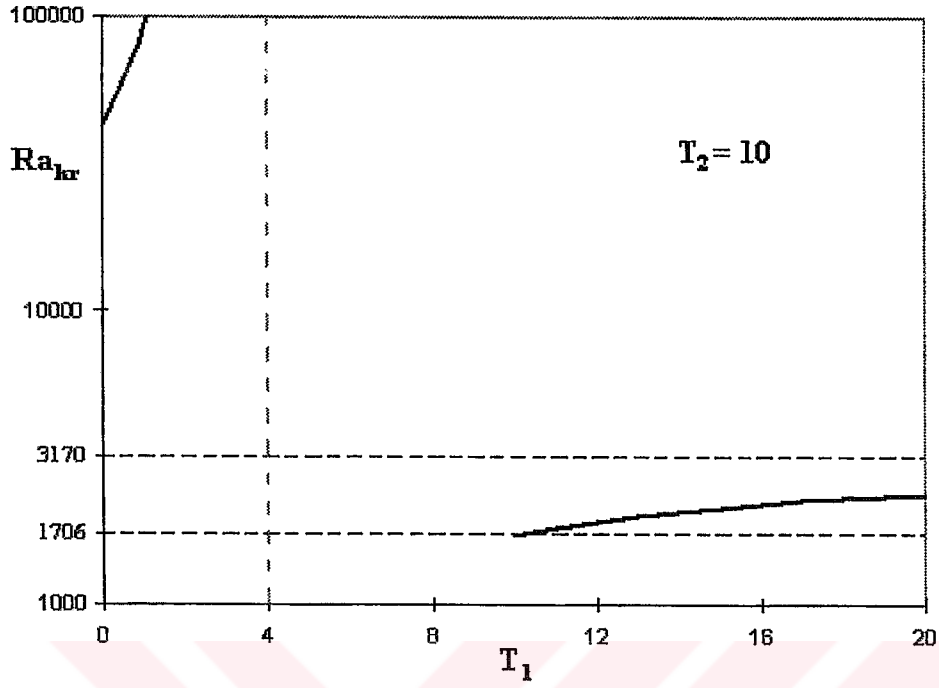
Şekil 6.5. Kritik Rayleigh sayısının yatay su tabakasının yüzey sıcaklıklarına göre değişimi ($0 \leq T_1 \leq 20$ ve $T_2 = 4$)



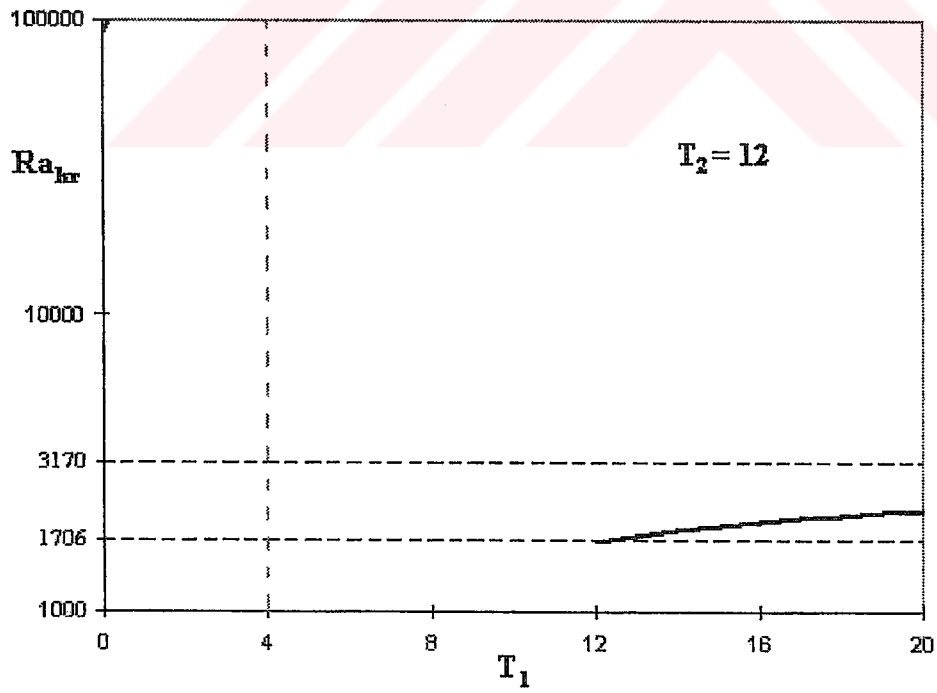
Şekil 6.6. Kritik Rayleigh sayısının yatay su tabakasının yüzey sıcaklıklarına göre değişimi ($0 \leq T_1 \leq 20$ ve $T_2 = 6$)



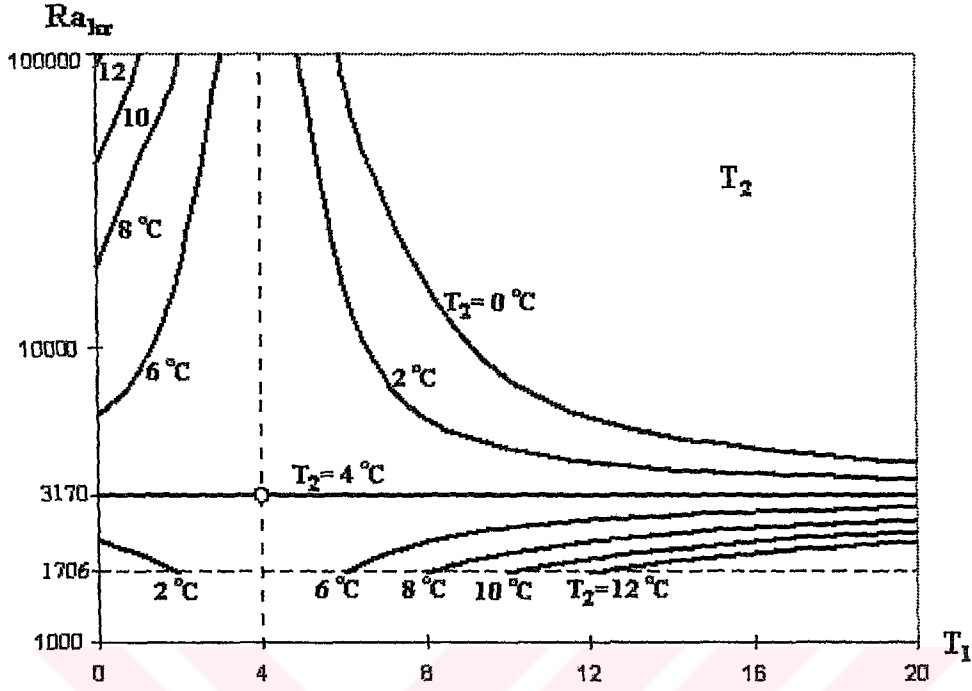
Şekil 6.7. Kritik Rayleigh sayısının yatay su tabakasının yüzey sıcaklıklarına göre değişimi ($0 \leq T_1 \leq 20$ ve $T_2 = 8$)



Şekil 6.8. Kritik Rayleigh sayısının yatay su tabakasının yüzey sıcaklıklarına göre değişimi ($0 \leq T_1 \leq 20$ ve $T_2 = 10$)



Şekil 6.9. Kritik Rayleigh sayısının yatay su tabakasının yüzey sıcaklıklarına göre değişimi ($0 \leq T_1 \leq 20$ ve $T_2 = 12$)



Şekil 6.10. Yatay su tabakasının farklı alt ve üst yüzey sıcaklıklarına göre kritik Rayleigh sayısının değişimi

Şekil 6.2'deki grafikte yoğunluğu sıcaklıkla doğrusal olarak değişen akışkanlar için kritik Rayleigh sayısının akışkan tabakasının farklı yüzey sıcaklıklarına göre değişimi gösterilmektedir. Grafikten de görüleceği gibi yoğunluk – sıcaklık ilişkisi doğrusal olan akışkanlar için kritik Rayleigh sayısı, yatay akışkan tabakasının alt ve üst yüzey sıcaklıklarından bağımsızdır ve sabit bir değeri vardır.

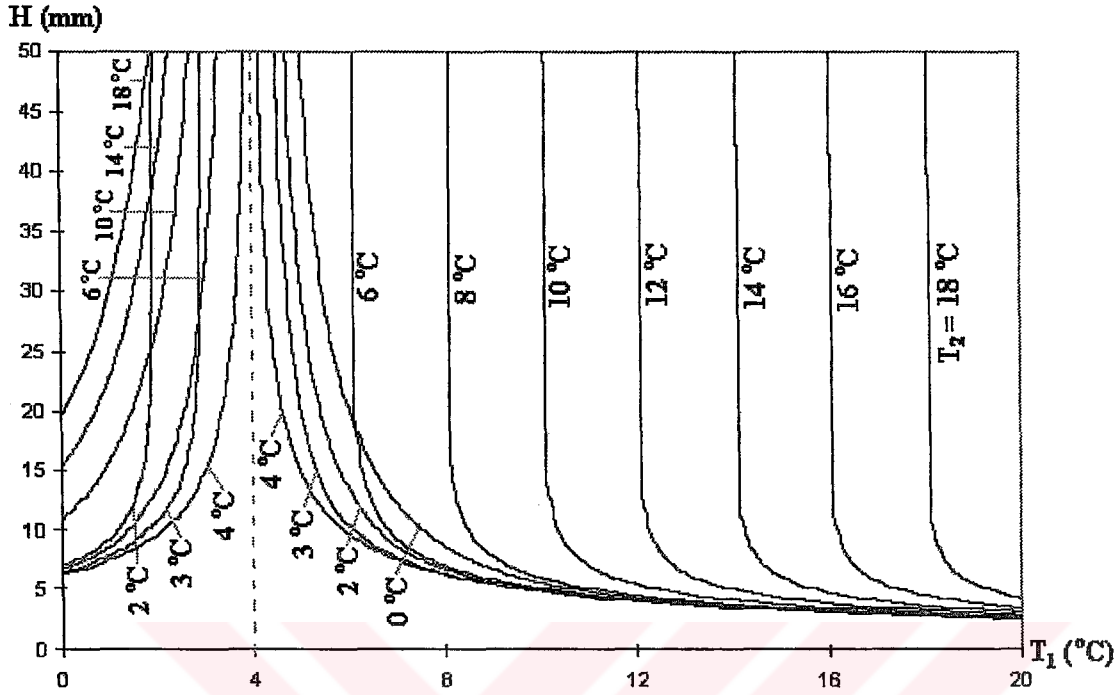
Şekil 6.10'da görülen grafikte $Ra_{kr} = 3170$ eksenini altında kalan bölge, akışkan tabakası boyunca yoğunluk değişiminin maksimum bir noktaya ulaşmadığı durumu ifade etmektedir. Yoğunluk yatay su tabakasının alt yüzeyinden üst yüzeyine doğru artmakta ve üst yüzeyde maksimum değerine ulaşmaktadır. Bu sebeple su tabakası tamamıyla kararsız bir yapıya sahiptir. Bu durumda yoğunluk profilinin eğiminin zayıf olduğu söylenebilir. Burada sıcaklık farkının kritik Rayleigh sayısına olan etkisi düşüktür. Yoğunluk profili doğrusallığa yaklaştıkça kritik Rayleigh sayısı da yoğunluk – sıcaklık ilişkisi doğrusal olan akışkanlar için geçerli değere ($Ra_{kr} = 1706$)

yaklaşır. Bu bölgede kritik Rayleigh sayısı 1706 ile 3170 değerleri arasında değişmektedir.

Grafiklerde $Ra_{kr} = 3170$ eksenini üstünde kalan bölge, yatay su tabakasının alt ve üst yüzeyleri arasında akışkan yoğunluğunun maksimum bir değere ulaştığı bölgeyi ifade etmektedir. Su yoğunluğu akışkan tabakasının alt yüzeyinden üst yüzeyine doğru artarak sıcaklığın $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ olduğu noktada maksimum değerine ulaşmakta ve bu noktadan üst yüzeye kadar olan bölgede azalmaktadır. Bu sebeple akışkan tabakasının yalnızca $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ sıcaklık eksenini altında kalan bölümü kararsız yapıdadır. Doğal taşınım bu bölge için geçerlidir. $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ sıcaklık eksenini ile üst yüzey arasında kalan bölgede doğal taşınım gerçekleşmez. Bu durumda yoğunluk profilinin eğiminin kuvvetli olduğu söylenebilir. Burada sıcaklık farkının kritik Rayleigh sayısına olan etkisi yüksektir. Yoğunluk profili doğrusallıktan uzaklaştıkça kritik Rayleigh sayısı da yüksek değerlere yaklaşır.

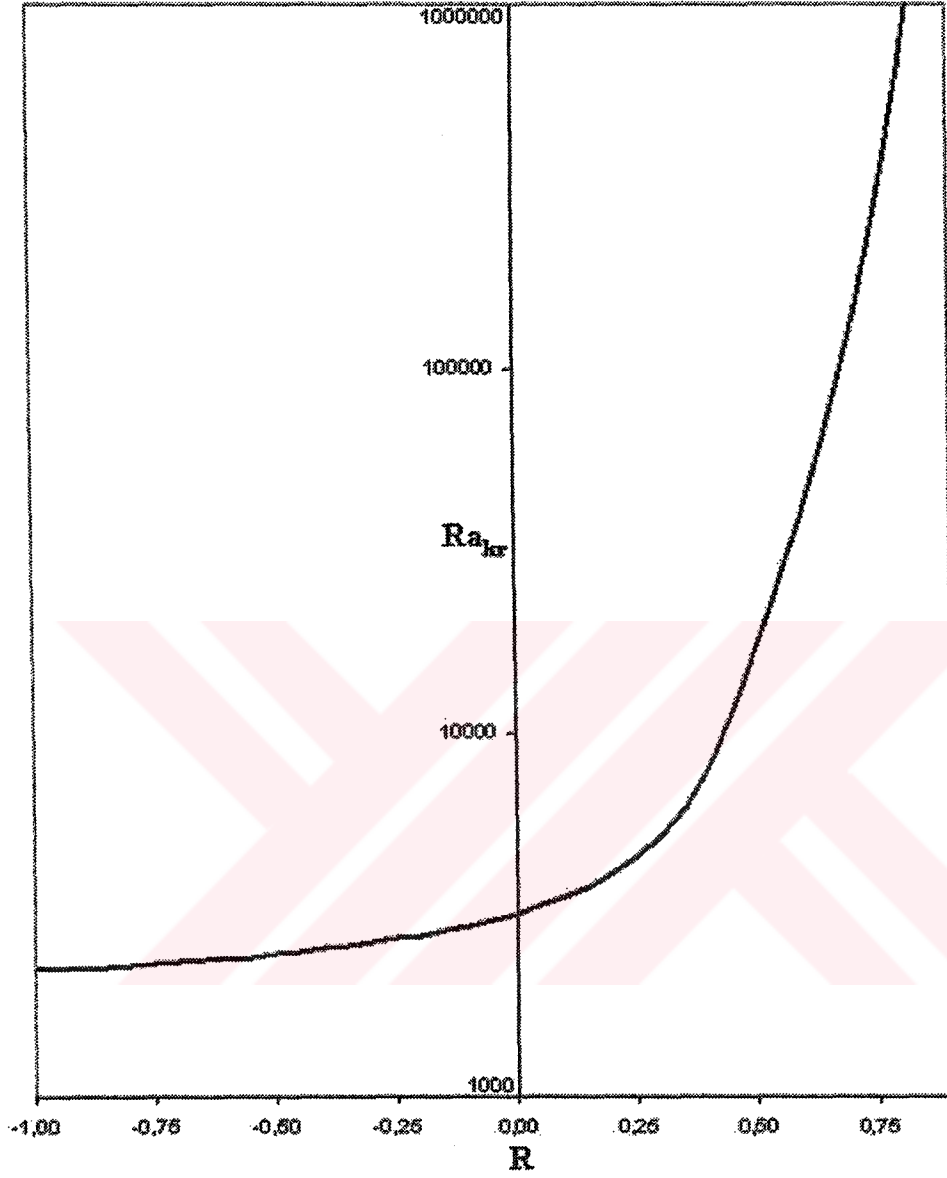
Su tabakasının üst yüzey sıcaklığının $T_2 < 4\text{ }^{\circ}\text{C}$ olduğu durumda (örneğin $T_2 = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$), eğer su tabakasının alt yüzey sıcaklığı $0 \leq T_1 \leq 4\text{ }^{\circ}\text{C}$ aralığında ise su tabakasında doğal taşınım olayı gerçekleşmez. Eğer T_1 sıcaklığı $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ ' den daha büyük olursa, su tabakasında kısmi olarak doğal taşınım oluşur. Bu hareketli bölge $Ra_{kr} = 3170$ ekseninin üstünde kalan bölümdür. Bu durum için akışkan tabakasının alt ve üst yüzeyleri arasında yoğunluğun maksimum bir değeri vardır.

Su tabakasının üst yüzey sıcaklığının $T_2 > 4\text{ }^{\circ}\text{C}$ olduğu durumda (örneğin $T_2 = 8\text{ }^{\circ}\text{C}$); eğer alt yüzey sıcaklığı $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ ' den küçükse, maksimum yoğunluğun olduğu eksen ile üst yüzey arasındaki akışkan tabakası hareketsizken, bu eksen ile alt yüzey arasındaki bölgede doğal taşınım oluşur. Alt yüzey sıcaklığı $4 \leq T_1 \leq 8\text{ }^{\circ}\text{C}$ değerleri için su tabakasının tamamında herhangi bir akış hareketi gerçekleşmez. T_1 sıcaklığının $8\text{ }^{\circ}\text{C}$ 'den büyük olması durumunda ise akışkan tabakasının tamamında doğal taşınım başlar. Bu bölge için kritik Rayleigh sayısının değeri 1706 ile 3170 aralığında değişmektedir.



Şekil 6.11. Farklı alt ve üst yüzey sıcaklıklarına göre doğal taşınımın oluşumu için gerekli minimum su tabakası yükseklik değerleri

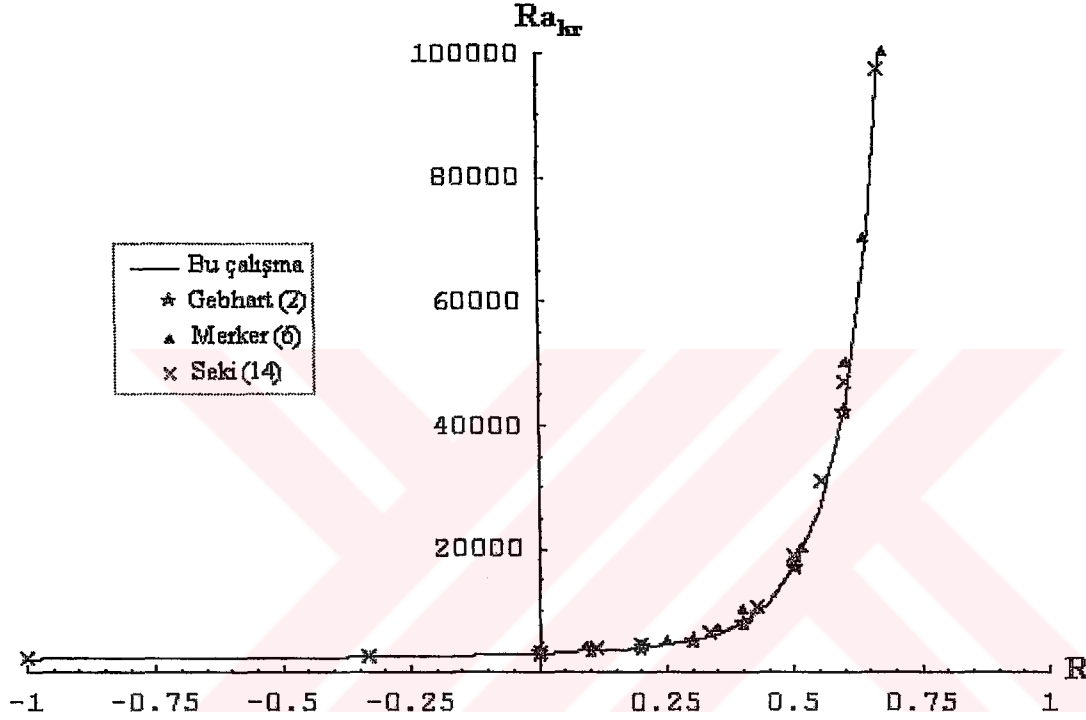
Şekil 6.11'de yatay su tabakasının farklı alt ve üst yüzey sıcaklıklarına göre doğal taşınımın gerçekleşebilmesi için gerekli minimum akışkan tabakası yükseklik değerleri gösterilmiştir. Grafikten görüleceği gibi akışkan tabakasının alt yüzey sıcaklığının 4 °C olduğu durumda doğal taşınım gerçekleşmemektedir. Dolayısıyla T₁ sıcaklığı 4 °C'ye yaklaştıkça H yükseklik değeri de + ∞ değerine doğru yaklaşır. Akışkan tabakasının alt ve üst yüzey sıcaklıkları arasındaki fark yükseldikçe doğal taşınımın oluşumu için gerekli minimum akışkan tabakası yükseklik değeri azalacaktır. Diğer bir değişle, bu durum lineersizlik parametresi R'nin sifıra yaklaştığını gösterir.



Şekil 6.12. Kritik Rayleigh sayısının Lineersizlik Parametresine göre değişimi

Şekil 6.12’de yatay su tabakasının alt ve üst yüzey sıcaklıklarına bağlı olarak değişen lineersizlik parametresi R ’nin kritik Rayleigh sayısı ile olan ilişkisi gösterilmektedir. $R \leq 0$ durumunda akışkan tabakası tamamiyle kararsızdır. $R \rightarrow -\infty$ değerine yaklaşırken kritik Rayleigh sayısı 1706 değerine yaklaşmaktadır. Bu bir anlamda suyun anormallikten uzaklaşıp, yoğunluk-sıcaklık ilişkisinin doğrusal olduğu akışkan özelliklerine yaklaştığını ifade etmektedir. $0 < R < 1$ durumunda akışkan tabakası kısmi olarak kararlı yapıdadır. Bu bölgede maksimum yoğunluğun olduğu eksen ile

üst yüzey arasındaki tabaka kararlı, bu eksen ile alt yüzey arasındaki tabaka ise kararsızdır. R değeri 1'e yaklaştıkça ($Ra_{kr} \rightarrow +\infty$) kararlı tabaka yüksekliği artar ve $R \geq 1$ için akışkan tabakası tamamıyla kararlı bir yapıya dönüşür ve bu durumda taşınım olayı gerçekleşmez.



Şekil 6.13. Sonuçların literatürdeki bazı çalışmalarla karşılaştırılması

Şekil 6.13'de kritik Rayleigh sayısının lineersizlik parametresine göre değişimi farklı çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Sonuçların literatürdeki değerlerle uyum içerisinde olduğu görülmektedir.

Elde edilen bu sonuçlardan açıkça görülmektedir ki; diğer akışkanlardan farklı olarak su için kritik Rayleigh sayısının tek bir değeri yoktur. Bu değer yatay su tabakasının yüksekliğinden bağımsız fakat sınır sıcaklıklarına bağlı olarak değişmektedir. Suyun yoğunluğunda görülen anormalliğin, yatay akışkan tabakasında kararlaştırıcı bir özelliği vardır. Diğer bir deyişle, suyun yoğunluk anormalliği yatay su tabakasında doğal taşınım oluşumunu zorlaştıran bir etkiye sahiptir.

6.2. Öneriler

Bu çalışmada, suyun yoğunluğundaki anormalliğin göz önüne alındığı, alt ve üst yüzeylerle sınırlandırılmış yatay su tabakasında doğal taşınımın oluşumu incelenmiştir. Yatay su tabakasının alt ve üst yüzey sıcaklıkları 0°C ile 20°C arasında değişmektedir. Diğer sıvılardan farklı olarak, suyun yoğunluk – sıcaklık ilişkisi doğrusal değildir. Çalışmada su için yoğunluğunun sıcaklıkla değişimi parabolik bir denklemle ifade edilmiştir. Bu konuyla ilgili ileride yapılacak çalışmalarda yatay su tabakasının alt ve üst yüzey sıcaklık farkları daha yüksek değerlerde alınarak inceleme genişletilebilir. Sıcaklık farkının yüksek değerlere ulaşmasıyla sıcaklığa bağlı olarak ifade edilen yoğunluk fonksiyonu da yüksek dereceden polinomlarla ifade edilerek daha hassas değerler elde edilebilir.

Çalışmada, süreklilik ve momentum denklemleri Boussinesq yaklaşımına bağlı olarak değerlendirilmiştir. Bu yaklaşıma göre temel denklemlerde bulunan yoğunluk terimi gövde kuvveti dışındaki bütün terimlerde sabit alınmıştır. Sıcaklık farkının yüksek olmasıyla oluşacak büyük yoğunluk farkları Boussinesq yaklaşımı ile elde edilecek çözümlerde hassas sonuç vermeyecektir. İleride yapılacak çalışmalarda bu durum göz önüne alınmalıdır.

Bu çalışmada, akışkan tabakası başlangıçta durgun olarak düşünülmüştür. Farklı bir çalışma ile yatay su tabakasının başlangıçta akış halinde olduğu düşünülerek kritik Rayleigh sayısının değişimi incelenebilir. Bu incelemeyi farklı sınır şartlarının göz önüne alınmasıyla genişletmek mümkündür. Su tabakasının üst yüzeyinin atmosfere açık olması, akışkan tabakanın yatay eksenlerde sınırlandırılması, tabakanın farklı eğimlerle konumlandırılması veya sınır sıcaklıklarının değişken olması gibi farklı sınır şartlarına sahip sistemler için de çözümler elde edilerek karşılaştırma yapılabilir. Ayrıca bundan sonra yapılacak olan çalışmalarla suyun yoğunluğundaki bu anormal davranışın uygulama alanları araştırılarak uygulanabilirliği tartışılabilir.

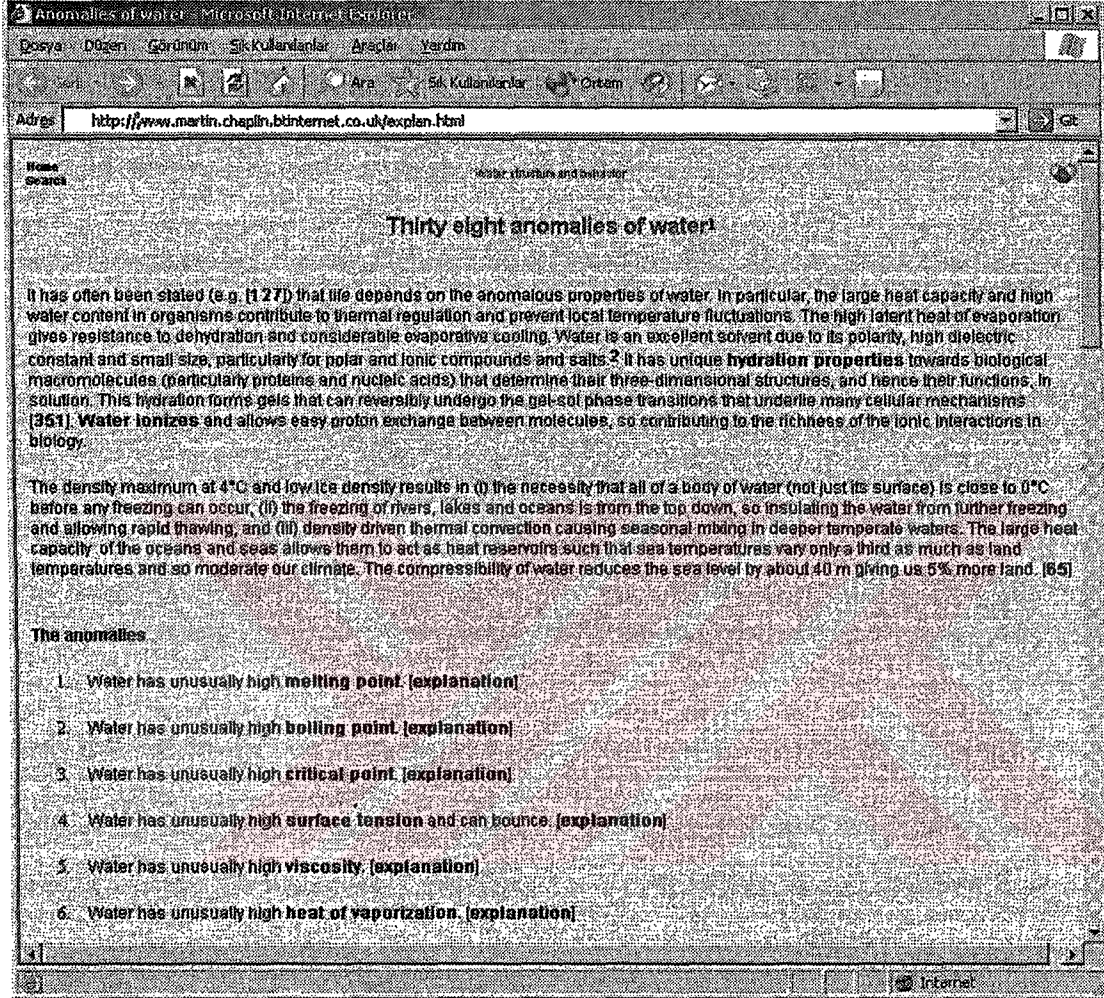
KAYNAKLAR

1. Chaplin, M., "Water structure and behavior", <http://www.martin.chaplin.btinter.net.co.uk/explan.html> (21.01.2003).
2. Gebhart, B., et. al., "Bouyancy Induced Flows and Transport", *Hemisphere Pub. Texbook Ed.*, New York, p 699-719 (1988).
3. Merker, G.P., Waas, P., Straub und Grigull, U., "Einsetzen der konvektion in einer von unten gekühlten wasserschicht bei temperaturen unter 4 °C ", *Wärme- und Stoffübertragung*, 9, p 99-110 (1976).
4. Merker, G.P., "Einfluß der dichte-anomalie von wasser auf das einsetzen der konvektion einer von unten beheizten bzw. gekühlten halbunendlichen schicht", *Wärme- und Stoffübertragung*, 10, p 255-267 (1977).
5. Merker, G.P., Grigull, U., "Onset of convection in a semi-infinite layer with non-linear density-temperature relation", *Proceedings of the 6th Int. Heat Transfer Conference*, Toronto, NC-7, p 223-228 (1978).
6. Merker, G.P., Waas, P. and Grigull, U., "Onset of convection in a horizontal water layer with maximum density effects", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.22, No.4, p 505-515 (1979).
7. Oertel, H., Jr., "Steady and time dependent convection in a rectangular box", *Proceedings of the 6th Int. Heat Transfer Conference*, Toronto, NC-17, p 281-286 (1978).
8. Mahler, E.G., Schechter, R.S. and Wissler, E.H., "Stability of a fluid layer with time – dependent density gradients", *The Physics of Fluids*, Vol.11, No.9, p 1901-1912 (1968).
9. Sugawara, M., Fukusako, S., Seki, N., "Experimental studies on the melting of a horizontal ice layer", *Bulletin of the JSME*, Vol.18, No.121, p 714-721 (1975).
10. Boger, D.V., Westwater, J.W., "Effect of buoyancy on the melting and freezing process", *Journal of Heat Transfer*, p 81-89 (1967).
11. Yen, Y.-C., "Onset of convection in a layer of water formed by melting ice from below", *The Physics of Fluids*, Vol.11, No.6, p 1263-1270 (1968).
12. Yen, Y.-C. and Galea, F., "Onset of convection in a water layer formed continuously by melting ice", *The Physics of Fluids*, Vol.12, No.3, p 509-516 (1969).

13. Cheng, K.C. and Ou, J.-W., "Maximum density effects on forced laminar convection in horizontal water pipes with near freezing wall temperature", *Proceedings of the 6th Int. Heat Transfer Conference*, Toronto, MC-12, p 67-72 (1978).
14. Seki, N., Fukusako, S. and Sugawara, M., "Free convection heat transfer and criterion of onset of free convection in a horizontal melt layer of ice heated by rigid surface", *Wärme- und Stoffübertragung*, 10, p 269-279 (1977).
15. Foster, T.D., "Onset of convection in a layer of fluid cooled from above", *The Physics of Fluids*, Vol.8, No.10, p 1770-1774 (1965).
16. Foster, T.D., 1969, "Onset of manifest convection in a layer of fluid with a time-dependent surface temperature", *The Physics of Fluids*, Vol.12, No.12, p 2482-2487 (1969).
17. Kalabin, E.V., Sviridov, E.M. and Zubkov, P.T., "Numerical investigation of natural convection of cold water in ring cavity", *Proceedings of the 2nd International Conference on Computational Heat and Mass Transfer*, Rio de Janeiro (2001).
18. Tankin, R.S. and Farhadieh, R., "Effects of thermal convection currents on formation of ice", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.14, p 953-961 (1971).
19. Suo-Anttila, A.J., Catton, I., "The effect of a stabilizing temperature gradient on heat transfer from a molten fuel layer with volumetric heating", *ASME Paper*, New York, 74-WA/HT-45 (1975).
20. Forbes, R.E., Cooper, J.W., "Natural convection in a horizontal layer of water cooled from above to near freezing", *Journal of Heat Transfer*, p 47-53 (1975).
21. Matsumoto, R., Nakajima, T., Yamaguchi, M., "Effect of thermal insatability on fully developed laminar flow with internal heat generation between two horizontal parallel plates", *Proceedings of the 6th Int. Heat Transfer Conference*, Toronto, MC-11, p 61-66 (1978).
22. Onat, K. und Grigull, U., "Das einsetzen der konvektion in flüssigkeiten über einer beheizten waagerechten platte", *Wärme- und Stoffübertragung*, 3, p 103-113 (1970).
23. Genceli, O.F. and Onat, K., "The onset of natural convection in a horizontal air layer heated from below", *Wärme- und Stoffübertragung*, 7, No.4, p 248-256 (1974).
24. Legros, J.C., Longree, D. and Thomaes, G., "Benard problem in a water near 4 °C", *Physica*, 12, p 410-414 (1974).

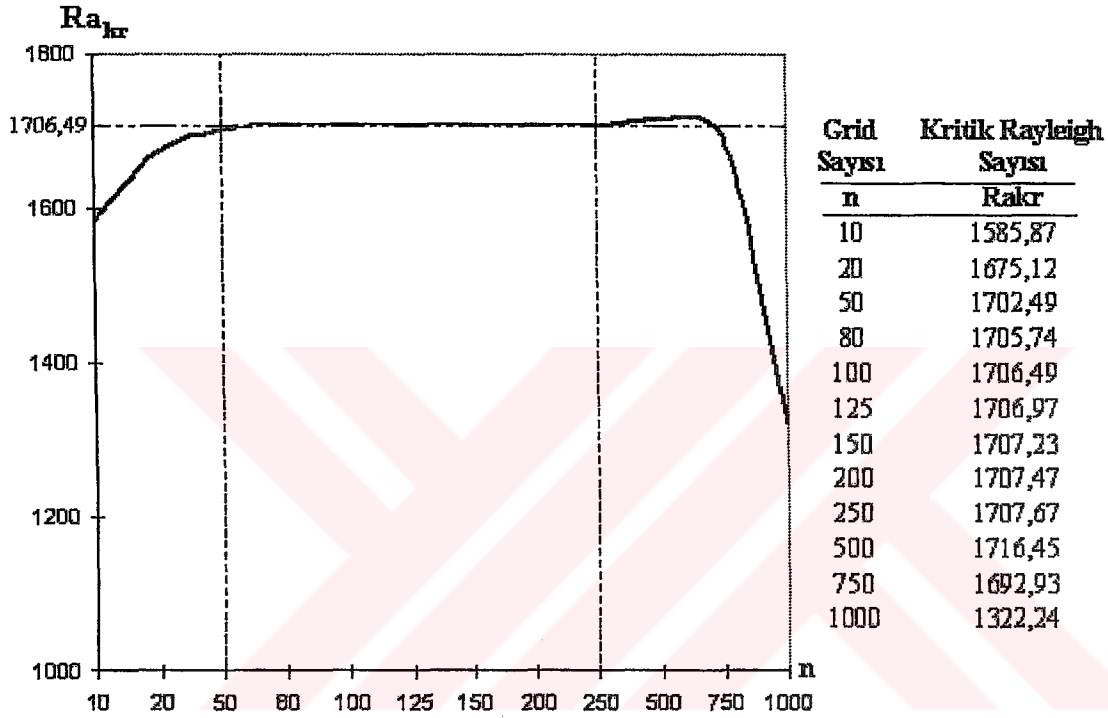
25. Catton, I., "Natural convection in enclosures", *Proceedings of the 6th Int. J. Heat Transfer*, Toronto, vol.6, p 13-31 (1978).
26. Kim, M.C., Kim, L.H., Choi, C.K., "Onset of convective motion in a horizontal fluid layer heated from below and cooled from above with constant heat flux", *Int. Symp. on Transient Convection Heat and Mass Transfer in Single and Two-Phase Flows*, Çeşme, 31(6), p 837-846 (2003).
27. Kim, M.C., Chung, T.J. and Choi, C.K., 2004, "Onset of buoyancy-driven convection in the horizontal fluid layer heated from below with time-dependent manner", *Korean J. Chem. Eng.*, 21(1), p 69-74 (2004).
28. Nadolin, K.A., "Numerical study of the onset of natural convection based on Lyapunov-Schmidt Method", *Proceedings of the Int. Symp. Advanced in Computational Heat Transfer*, Çeşme, p 395-402 (1997).
29. Currie, I.G., "Fundamental Mechanics of Fluids", *McGraw-Hill Book Companies*, p 312-315 (1974).
30. Hornbeck, R.W., "Numerical Methods", *Quantum Publishers Inc.*, New York, p 16-23 (1975).
31. Don, E., "Theory and Problems of Mathematica", *McGraw-Hill Book Companies*, New York (2001).

Ek – 1. Suyun Anormallikleri (İnternet Kaynağı)



Ek – 2. Grid Sayısının Belirlenmesi

Farklı n değerleri için kritik Rayleigh Sayılarının değişimi grafik ve tablo halinde aşağıda gösterilmiştir ($R \rightarrow -\infty$).



$$n = 250 \text{ için } n = 50' \text{ e göre hata oranı } \rightarrow \frac{1707,67 - 1702,49}{1707,67} = \%0,3033$$

$$n = 250 \text{ için } n = 80' \text{ e göre hata oranı } \rightarrow \frac{1707,67 - 1705,74}{1707,67} = \%0,1130$$

$$n = 250 \text{ için } n = 100' \text{ e göre hata oranı } \rightarrow \frac{1707,67 - 1706,49}{1707,67} = \%0,0691$$

$$n = 250 \text{ için } n = 125' \text{ e göre hata oranı } \rightarrow \frac{1707,67 - 1706,97}{1707,67} = \%0,0409$$

$$n = 250 \text{ için } n = 150' \text{ e göre hata oranı } \rightarrow \frac{1707,67 - 1707,23}{1707,67} = \%0,0257$$

$$n = 250 \text{ için } n = 200' \text{ e göre hata oranı } \rightarrow \frac{1707,67 - 1707,47}{1707,67} = \%0,0117$$

$n = 100$ için hata oranı $\rightarrow \%0,0691 < \%0,1$ olduğu için grid sayısı $n = 100$ olarak kabul edilmiştir.

Ek – 3. Bilgisayar Programı

<< Statistics`DataManipulation`

<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`

h := 0.01

M1 := Table[f_n, {n, 1, 99, 1}]

M2 := Table[k, {k, 1, 5, 0.1}]

$$\begin{aligned} \text{eq1} = & (-f_{n+3}/(k^2 h^6) + f_{n+2}(6 + 3 k^2 h^2)/(k^2 h^6) - \\ & f_{n+1}(15 + 12 k^2 h^2 + 3 k^4 h^4)/(k^2 h^6) + f_n(20 + 18 k^2 h^2 + 6 k^4 h^4 + k^6 h^6)/(k^2 h^6) - \\ & f_{n-1}(15 + 12 k^2 h^2 + 3 k^4 h^4)/(k^2 h^6) + f_{n-2}(6 + 3 k^2 h^2)/(k^2 h^6) - f_{n-3}/(k^2 h^6)) \\ & - \frac{1 \times 10^{12} f_{-3+n}}{k^2} + \frac{1 \times 10^{12} (6 + 0.0003 k^2) f_{-2+n}}{k^2} - \frac{1 \times 10^{12} (15 + 0.0012 k^2 + 3 \times 10^{-8} k^4) f_{-1+n}}{k^2} + \\ & \frac{1 \times 10^{12} (20 + 0.0018 k^2 + 6 \times 10^{-8} k^4 + 1 \times 10^{-12} k^6) f_n}{k^2} - \\ & \frac{1 \times 10^{12} (15 + 0.0012 k^2 + 3 \times 10^{-8} k^4) f_{1+n}}{k^2} + \frac{1 \times 10^{12} (6 + 0.0003 k^2) f_{2+n}}{k^2} - \frac{1 \times 10^{12} f_{3+n}}{k^2} \end{aligned}$$

eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f₀ -> 0, f₁₀₀ -> 0, f₋₁ -> -f₁, f₁₀₁ -> -f₉₉,
f₋₂ -> f₂ - (2 h² k² + 4) f₁, f₁₀₂ -> f₉₈ - (2 h² k² + 4) f₉₉}], M1], {n, 1, 99, 1}]

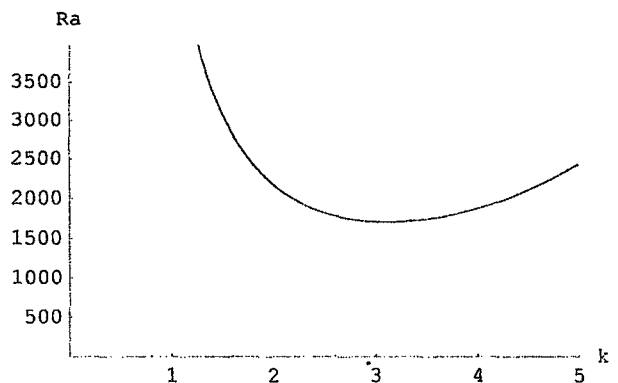
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 1, 5, 0.1}]

{5849.03, 4979.28, 4320.43, 3810.45, 3408.63, 3087.38, 2827.45, 2615.1, 2440.32, 2295.66, 2175.5,
2075.54, 1992.45, 1923.62, 1866.97, 1820.87, 1783.98, 1755.24, 1733.76, 1718.85, 1709.92,
1706.49, 1708.18, 1714.66, 1725.68, 1741.03, 1760.54, 1784.07, 1811.54, 1842.85, 1877.96,
1916.84, 1959.47, 2005.84, 2055.98, 2109.91, 2167.65, 2229.27, 2294.8, 2364.33, 2437.9}

P1 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]

{{1, 5849.03}, {1.1, 4979.28}, {1.2, 4320.43}, {1.3, 3810.45}, {1.4, 3408.63}, {1.5, 3087.38}, {1.6, 2827.45},
{1.7, 2615.1}, {1.8, 2440.32}, {1.9, 2295.66}, {2., 2175.5}, {2.1, 2075.54}, {2.2, 1992.45}, {2.3, 1923.62},
{2.4, 1866.97}, {2.5, 1820.87}, {2.6, 1783.98}, {2.7, 1755.24}, {2.8, 1733.76}, {2.9, 1718.85}, {3., 1709.92},
{3.1, 1706.49}, {3.2, 1708.18}, {3.3, 1714.66}, {3.4, 1725.68}, {3.5, 1741.03}, {3.6, 1760.54},
{3.7, 1784.07}, {3.8, 1811.54}, {3.9, 1842.85}, {4., 1877.96}, {4.1, 1916.84}, {4.2, 1959.47}, {4.3, 2005.84},
{4.4, 2055.98}, {4.5, 2109.91}, {4.6, 2167.65}, {4.7, 2229.27}, {4.8, 2294.8}, {4.9, 2364.33}, {5., 2437.9}}

```
G1 = ListPlot[P1, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> {{0, 5}, {0, Automatic}}, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra1 = Min[M3]
```

```
1706.49
```

```
N1 = Abs[(1 - n * h - R) / (1 - R)] ^ 0.894816
```

```
Abs[ $\frac{1 - 0.01 n - R}{1 - R}$ ] ^ 0.894816
```

```
F = If[1 - n * h < R, -N1, N1]
```

```
If[1 - 0.01 n < R, -N1, N1]
```

```
eq1 = (-f_{n+3} / (k^2 h^6) + f_{n+2} (6 + 3 k^2 h^2) / (k^2 h^6) -
  f_{n+1} (15 + 12 k^2 h^2 + 3 k^4 h^4) / (k^2 h^6) + f_n (20 + 18 k^2 h^2 + 6 k^4 h^4 + k^6 h^6) / (k^2 h^6) -
  f_{n-1} (15 + 12 k^2 h^2 + 3 k^4 h^4) / (k^2 h^6) + f_{n-2} (6 + 3 k^2 h^2) / (k^2 h^6) - f_{n-3} / (k^2 h^6)) / F
```

```
(-  $\frac{1 \times 10^{12} f_{-3+n}}{k^2}$  +  $\frac{1 \times 10^{12} (6 + 0.0003 k^2) f_{-2+n}}{k^2}$  -  $\frac{1 \times 10^{12} (15 + 0.0012 k^2 + 3 \times 10^{-8} k^4) f_{-1+n}}{k^2}$  +
 $\frac{1 \times 10^{12} (20 + 0.0018 k^2 + 6 \times 10^{-8} k^4 + 1 \times 10^{-12} k^6) f_n}{k^2}$  -  $\frac{1 \times 10^{12} (15 + 0.0012 k^2 + 3 \times 10^{-8} k^4) f_{1+n}}{k^2}$  +
 $\frac{1 \times 10^{12} (6 + 0.0003 k^2) f_{2+n}}{k^2}$  -  $\frac{1 \times 10^{12} f_{3+n}}{k^2}$ ) / If[1 - 0.01 n < R, -N1, N1]
```

```
R := -∞
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f_0 -> 0, f_{100} -> 0, f_{-1} -> -f_1, f_{101} -> -f_{99},
  f_{-2} -> f_2 - (2 h^2 k^2 + 4) f_1, f_{102} -> f_{98} - (2 h^2 k^2 + 4) f_{99}}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

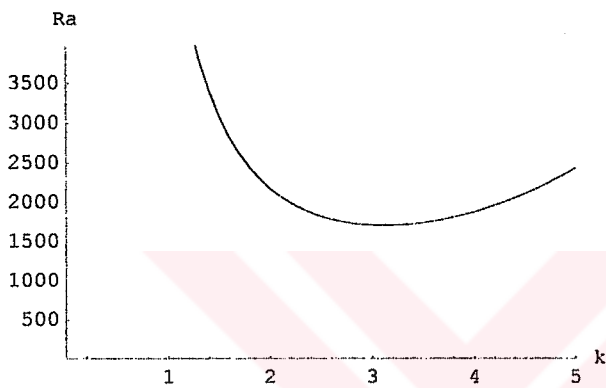
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 1, 5, 0.1}]
```

```
{5849.03, 4979.28, 4320.43, 3810.45, 3408.63, 3087.37, 2827.45, 2615.1, 2440.32, 2295.66, 2175.5,
  2075.54, 1992.45, 1923.62, 1866.98, 1820.87, 1783.53, 1755.24, 1733.76, 1718.85, 1709.92,
  1706.49, 1708.18, 1714.66, 1725.68, 1741.03, 1760.54, 1784.07, 1811.54, 1842.85, 1877.96,
  1916.84, 1959.47, 2005.84, 2055.98, 2109.91, 2167.65, 2229.27, 2294.81, 2364.33, 2437.9}
```

P2 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]

```
{1, 5849.03}, {1.1, 4979.28}, {1.2, 4320.43}, {1.3, 3810.45}, {1.4, 3408.63}, {1.5, 3087.37}, {1.6, 2827.45},
{1.7, 2615.1}, {1.8, 2440.32}, {1.9, 2295.66}, {2., 2175.5}, {2.1, 2075.54}, {2.2, 1992.45}, {2.3, 1923.62},
{2.4, 1866.98}, {2.5, 1820.87}, {2.6, 1783.53}, {2.7, 1755.24}, {2.8, 1733.76}, {2.9, 1718.85}, {3., 1709.92},
{3.1, 1706.49}, {3.2, 1708.18}, {3.3, 1714.66}, {3.4, 1725.68}, {3.5, 1741.03}, {3.6, 1760.54},
{3.7, 1784.07}, {3.8, 1811.54}, {3.9, 1842.85}, {4., 1877.96}, {4.1, 1916.84}, {4.2, 1959.47}, {4.3, 2005.84},
{4.4, 2055.98}, {4.5, 2109.91}, {4.6, 2167.65}, {4.7, 2229.27}, {4.8, 2294.81}, {4.9, 2364.33}, {5., 2437.91}
```

**G2 = ListPlot[P2, AxesOrigin → {0, 0},
PlotRange → {{0, 5}, {0, Automatic}}, PlotJoined → True, AxesLabel → {"k", "Ra"}]**



- Graphics -

Ra₂ = Min[M3]

1706.49

R := -100

**eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f₀ → 0, f₁₀₀ → 0, f₋₁ → -f₁, f₁₀₁ → -f₉₉,
f₋₂ → f₂ - (2 h² k² + 4) f₁, f₁₀₂ → f₉₈ - (2 h² k² + 4) f_{99}}], M1], {n, 1, 99, 1}]}**

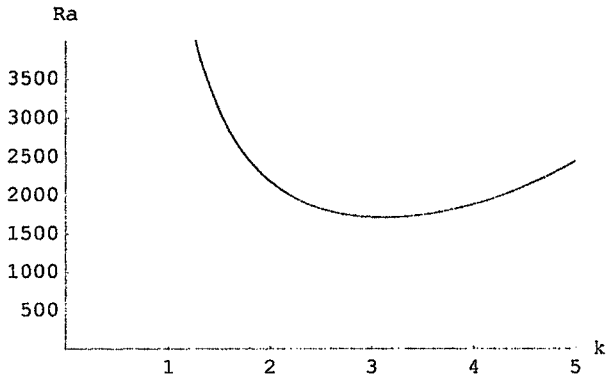
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 1, 5, 0.1}]

```
{5875.07, 5001.44, 4339.66, 3827.41, 3423.8, 3101.12, 2840.03, 2626.74, 2451.18, 2305.87, 2185.18,
2084.78, 2001.32, 1932.18, 1875.28, 1828.98, 1791.92, 1763.05, 1741.48, 1726.5, 1717.53,
1714.08, 1715.78, 1722.29, 1733.36, 1748.78, 1768.37, 1792.01, 1819.6, 1851.05, 1886.32,
1925.37, 1968.19, 2014.77, 2065.13, 2119.3, 2177.3, 2239.25, 2305.02, 2374.85, 2448.75}
```

P3 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]

```
{1, 5875.07}, {1.1, 5001.44}, {1.2, 4339.66}, {1.3, 3827.41}, {1.4, 3423.8}, {1.5, 3101.12}, {1.6, 2840.03},
{1.7, 2626.74}, {1.8, 2451.18}, {1.9, 2305.87}, {2., 2185.18}, {2.1, 2084.78}, {2.2, 2001.32}, {2.3, 1932.18},
{2.4, 1875.28}, {2.5, 1828.98}, {2.6, 1791.92}, {2.7, 1763.05}, {2.8, 1741.48}, {2.9, 1726.5}, {3., 1717.53},
{3.1, 1714.08}, {3.2, 1715.78}, {3.3, 1722.29}, {3.4, 1733.36}, {3.5, 1748.78}, {3.6, 1768.37},
{3.7, 1792.01}, {3.8, 1819.6}, {3.9, 1851.05}, {4., 1886.32}, {4.1, 1925.37}, {4.2, 1968.19}, {4.3, 2014.77},
{4.4, 2065.13}, {4.5, 2119.3}, {4.6, 2177.3}, {4.7, 2239.25}, {4.8, 2305.02}, {4.9, 2374.85}, {5., 2448.75}
```

```
G3 = ListPlot[P3, AxesOrigin → {0, 0},
  PlotRange → {{0, 5}, {0, Automatic}}, PlotJoined → True, AxesLabel → {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra3 = Min[M3]
```

```
1714.08
```

```
R := -50
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f-1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f-2 -> f2 - (2 h^2 k^2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h^2 k^2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

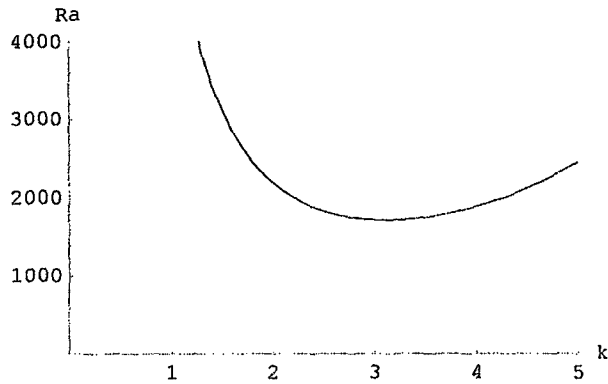
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 1, 5, 0.1}]
```

```
{5900.83, 5023.37, 4358.69, 3844.19, 3438.81, 3114.71, 2852.48, 2638.26, 2461.93, 2315.99, 2194.76,
  2093.92, 2010.09, 1940.65, 1883.51, 1836.99, 1799.78, 1770.78, 1749.11, 1734.07, 1725.06,
  1721.6, 1723.3, 1729.84, 1740.96, 1756.44, 1776.13, 1799.87, 1827.58, 1859.17, 1894.59,
  1933.81, 1976.82, 2023.6, 2074.19, 2128.59, 2186.85, 2249.01, 2315.12, 2385.26, 2459.49}
```

```
P4 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]
```

```
{{1, 5900.83}, {1.1, 5023.37}, {1.2, 4358.69}, {1.3, 3844.19}, {1.4, 3438.81}, {1.5, 3114.71}, {1.6, 2852.48},
  {1.7, 2638.26}, {1.8, 2461.93}, {1.9, 2315.99}, {2., 2194.76}, {2.1, 2093.92}, {2.2, 2010.09}, {2.3, 1940.65},
  {2.4, 1883.51}, {2.5, 1836.99}, {2.6, 1799.78}, {2.7, 1770.78}, {2.8, 1749.11}, {2.9, 1734.07},
  {3., 1725.06}, {3.1, 1721.6}, {3.2, 1723.3}, {3.3, 1729.84}, {3.4, 1740.96}, {3.5, 1756.44}, {3.6, 1776.13},
  {3.7, 1799.87}, {3.8, 1827.58}, {3.9, 1859.17}, {4., 1894.59}, {4.1, 1933.81}, {4.2, 1976.82}, {4.3, 2023.6},
  {4.4, 2074.19}, {4.5, 2128.59}, {4.6, 2186.85}, {4.7, 2249.01}, {4.8, 2315.12}, {4.9, 2385.26}, {5., 2459.49}}
```

```
G4 = ListPlot[P4, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> {{0, 5}, {0, Automatic}}, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra4 = Min[M3]
```

```
1721.6
```

```
R := -20
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f-1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f-2 -> f2 - (2 h^2 k^2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h^2 k^2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

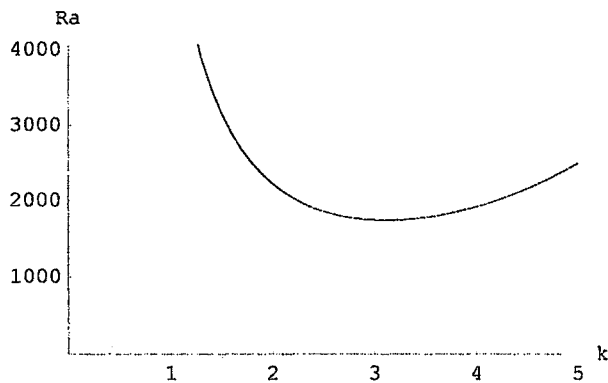
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 1, 5, 0.1}]
```

```
{5976.53, 5087.82, 4414.61, 3893.51, 3482.93, 3154.67, 2889.08, 2672.1, 2493.51, 2345.7, 2222.92,
  2120.78, 2035.88, 1965.55, 1907.67, 1860.56, 1822.87, 1793.5, 1771.55, 1756.32, 1747.19,
  1743.68, 1745.41, 1752.03, 1763.29, 1778.98, 1798.91, 1822.96, 1851.02, 1883.01, 1918.89,
  1958.62, 2002.17, 2049.56, 2100.79, 2155.89, 2214.89, 2277.85, 2344.81, 2415.85, 2491.03}
```

```
P5 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]
```

```
{{1, 5976.53}, {1.1, 5087.82}, {1.2, 4414.61}, {1.3, 3893.51}, {1.4, 3482.93}, {1.5, 3154.67}, {1.6, 2889.08},
  {1.7, 2672.1}, {1.8, 2493.51}, {1.9, 2345.7}, {2., 2222.92}, {2.1, 2120.78}, {2.2, 2035.88}, {2.3, 1965.55},
  {2.4, 1907.67}, {2.5, 1860.56}, {2.6, 1822.87}, {2.7, 1793.5}, {2.8, 1771.55}, {2.9, 1756.32}, {3., 1747.19},
  {3.1, 1743.68}, {3.2, 1745.41}, {3.3, 1752.03}, {3.4, 1763.29}, {3.5, 1778.98}, {3.6, 1798.91},
  {3.7, 1822.96}, {3.8, 1851.02}, {3.9, 1883.01}, {4., 1918.89}, {4.1, 1958.62}, {4.2, 2002.17}, {4.3, 2049.56},
  {4.4, 2100.79}, {4.5, 2155.89}, {4.6, 2214.89}, {4.7, 2277.85}, {4.8, 2344.81}, {4.9, 2415.85}, {5., 2491.03}}
```

```
G5 = ListPlot[P5, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> {{0, 5}, {0, Automatic}}, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra5 = Min[M3]
```

1743.68

```
R := -10
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f_1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f_2 -> f2 - (2 h^2 k^2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h^2 k^2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

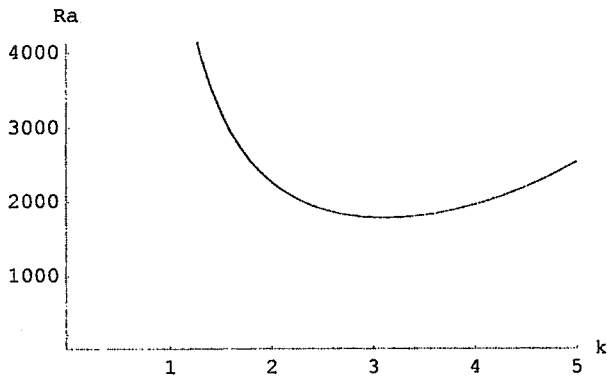
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 1, 5, 0.1}]
```

```
{6097.67, 5190.94, 4504.09, 3972.43, 3553.53, 3218.62, 2947.64, 2726.26, 2544.05, 2393.24, 2267.97,
  2163.76, 2077.14, 2005.38, 1946.33, 1898.27, 1859.81, 1829.84, 1807.45, 1791.91, 1782.6,
  1779.02, 1780.78, 1787.54, 1799.02, 1815.02, 1835.36, 1859.89, 1888.52, 1921.17, 1957.77,
  1998.3, 2042.73, 2091.08, 2143.35, 2199.56, 2259.76, 2323.99, 2392.31, 2464.78, 2541.48}
```

```
P6 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]
```

```
{{1, 6097.67}, {1.1, 5190.94}, {1.2, 4504.09}, {1.3, 3972.43}, {1.4, 3553.53}, {1.5, 3218.62}, {1.6, 2947.64},
  {1.7, 2726.26}, {1.8, 2544.05}, {1.9, 2393.24}, {2., 2267.97}, {2.1, 2163.76}, {2.2, 2077.14}, {2.3, 2005.38},
  {2.4, 1946.33}, {2.5, 1898.27}, {2.6, 1859.81}, {2.7, 1829.84}, {2.8, 1807.45}, {2.9, 1791.91}, {3., 1782.6},
  {3.1, 1779.02}, {3.2, 1780.78}, {3.3, 1787.54}, {3.4, 1799.02}, {3.5, 1815.02}, {3.6, 1835.36},
  {3.7, 1859.89}, {3.8, 1888.52}, {3.9, 1921.17}, {4., 1957.77}, {4.1, 1998.3}, {4.2, 2042.73}, {4.3, 2091.08},
  {4.4, 2143.35}, {4.5, 2199.56}, {4.6, 2259.76}, {4.7, 2323.99}, {4.8, 2392.31}, {4.9, 2464.78}, {5., 2541.48}}
```

```
G6 = ListPlot[P6, AxesOrigin → {0, 0},
  PlotRange → {{0, 5}, {0, Automatic}}, PlotJoined → True, AxesLabel → {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra6 = Min[M3]
```

```
1779.02
```

```
R := -8
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f-1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f-2 -> f2 - (2 h^2 k^2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h^2 k^2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

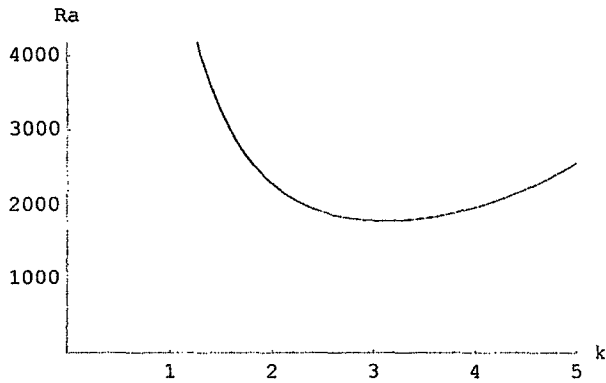
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 1, 5, 0.1}]
```

```
{6156.01, 5240.61, 4547.18, 4010.43, 3587.52, 3249.4, 2975.84, 2752.34, 2568.39, 2416.13, 2289.67,
  2184.46, 2097.01, 2024.57, 1964.95, 1916.42, 1877.6, 1847.34, 1824.74, 1809.05, 1799.64,
  1796.03, 1797.81, 1804.63, 1816.23, 1832.38, 1852.91, 1877.68, 1906.58, 1939.53, 1976.49,
  2017.4, 2062.26, 2111.07, 2163.83, 2220.58, 2281.35, 2346.2, 2415.17, 2488.33, 2565.76}
```

```
P7 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]
```

```
{{1, 6156.01}, {1.1, 5240.61}, {1.2, 4547.18}, {1.3, 4010.43}, {1.4, 3587.52}, {1.5, 3249.4}, {1.6, 2975.84},
  {1.7, 2752.34}, {1.8, 2568.39}, {1.9, 2416.13}, {2., 2289.67}, {2.1, 2184.46}, {2.2, 2097.01}, {2.3, 2024.57},
  {2.4, 1964.95}, {2.5, 1916.42}, {2.6, 1877.6}, {2.7, 1847.34}, {2.8, 1824.74}, {2.9, 1809.05}, {3., 1799.64},
  {3.1, 1796.03}, {3.2, 1797.81}, {3.3, 1804.63}, {3.4, 1816.23}, {3.5, 1832.38}, {3.6, 1852.91},
  {3.7, 1877.68}, {3.8, 1906.58}, {3.9, 1939.53}, {4., 1976.49}, {4.1, 2017.4}, {4.2, 2062.26}, {4.3, 2111.07},
  {4.4, 2163.83}, {4.5, 2220.58}, {4.6, 2281.35}, {4.7, 2346.2}, {4.8, 2415.17}, {4.9, 2488.33}, {5., 2565.76}}
```

```
G7 = ListPlot[P7, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> {{0, 5}, {0, Automatic}}, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra7 = Min[M3]
```

```
1796.03
```

```
R := -6
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f-1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f-2 -> f2 - (2 h^2 k^2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h^2 k^2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

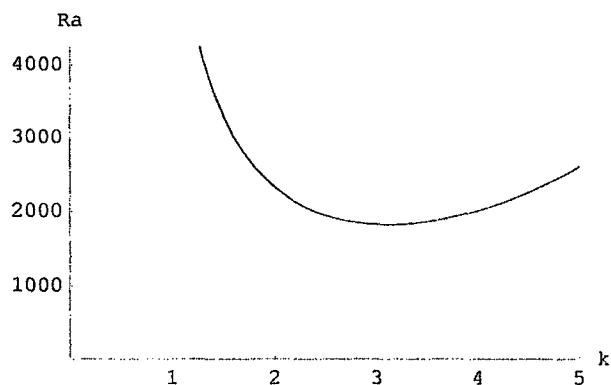
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 1, 5, 0.1}]
```

```
{6250.12, 5320.71, 4616.69, 4071.74, 3642.36, 3299.07, 3021.32, 2794.41, 2607.65, 2453.06, 2324.66,
  2217.85, 2129.06, 2055.51, 1994.98, 1945.71, 1906.29, 1875.57, 1852.63, 1836.69, 1827.14,
  1823.48, 1825.28, 1832.2, 1843.97, 1860.37, 1881.21, 1906.36, 1935.7, 1969.16, 2006.67,
  2048.21, 2093.75, 2143.3, 2196.87, 2254.48, 2316.18, 2382.01, 2452.03, 2526.31, 2604.92}
```

```
P8 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]
```

```
{{1, 6250.12}, {1.1, 5320.71}, {1.2, 4616.69}, {1.3, 4071.74}, {1.4, 3642.36}, {1.5, 3299.07}, {1.6, 3021.32},
  {1.7, 2794.41}, {1.8, 2607.65}, {1.9, 2453.06}, {2., 2324.66}, {2.1, 2217.85}, {2.2, 2129.06}, {2.3, 2055.51},
  {2.4, 1994.98}, {2.5, 1945.71}, {2.6, 1906.29}, {2.7, 1875.57}, {2.8, 1852.63}, {2.9, 1836.69},
  {3., 1827.14}, {3.1, 1823.48}, {3.2, 1825.28}, {3.3, 1832.2}, {3.4, 1843.97}, {3.5, 1860.37}, {3.6, 1881.21},
  {3.7, 1906.36}, {3.8, 1935.7}, {3.9, 1969.16}, {4., 2006.67}, {4.1, 2048.21}, {4.2, 2093.75}, {4.3, 2143.3},
  {4.4, 2196.87}, {4.5, 2254.48}, {4.6, 2316.18}, {4.7, 2382.01}, {4.8, 2452.03}, {4.9, 2526.31}, {5., 2604.92}}
```

```
G8 = ListPlot[P8, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> {{0, 5}, {0, Automatic}}, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra8 = Min[M3]
```

```
1823.48
```

```
R := -4
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f-1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f-2 -> f2 - (2 h^2 k^2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h^2 k^2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

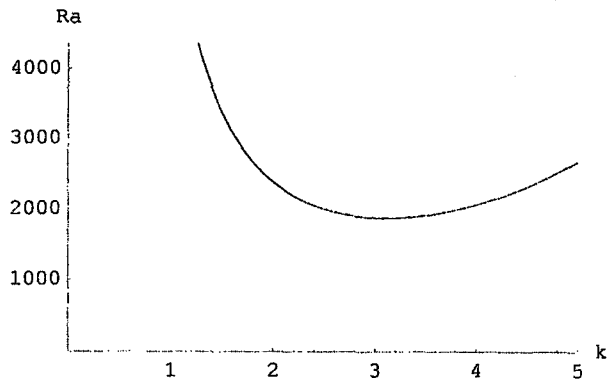
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 1, 5, 0.1}]
```

```
{6427.44, 5471.68, 4747.67, 4187.26, 3745.69, 3392.67, 3107.03, 2873.69, 2681.62, 2522.65, 2390.6,
  2280.76, 2189.45, 2113.81, 2051.56, 2000.89, 1960.35, 1928.76, 1905.16, 1888.77, 1878.95,
  1875.18, 1877.02, 1884.14, 1896.24, 1913.1, 1934.53, 1960.39, 1990.56, 2024.96, 2063.53,
  2106.24, 2153.07, 2204.01, 2259.09, 2318.33, 2381.77, 2449.46, 2521.45, 2597.82, 2678.65}
```

```
P9 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]
```

```
{{1, 6427.44}, {1.1, 5471.68}, {1.2, 4747.67}, {1.3, 4187.26}, {1.4, 3745.69}, {1.5, 3392.67}, {1.6, 3107.03},
  {1.7, 2873.69}, {1.8, 2681.62}, {1.9, 2522.65}, {2., 2390.6}, {2.1, 2280.76}, {2.2, 2189.45}, {2.3, 2113.81},
  {2.4, 2051.56}, {2.5, 2000.89}, {2.6, 1960.35}, {2.7, 1928.76}, {2.8, 1905.16}, {2.9, 1888.77},
  {3., 1878.95}, {3.1, 1875.18}, {3.2, 1877.02}, {3.3, 1884.14}, {3.4, 1896.24}, {3.5, 1913.1}, {3.6, 1934.53},
  {3.7, 1960.39}, {3.8, 1990.56}, {3.9, 2024.96}, {4., 2063.53}, {4.1, 2106.24}, {4.2, 2153.07}, {4.3, 2204.01},
  {4.4, 2259.09}, {4.5, 2318.33}, {4.6, 2381.77}, {4.7, 2449.46}, {4.8, 2521.45}, {4.9, 2597.82}, {5., 2678.65}}
```

```
G9 = ListPlot[P9, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> {{0, 5}, {0, Automatic}}, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra9 = Min[M3]
```

```
1875.18
```

```
R := -2
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f_1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f_-2 -> f2 - (2 h^2 k^2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h^2 k^2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

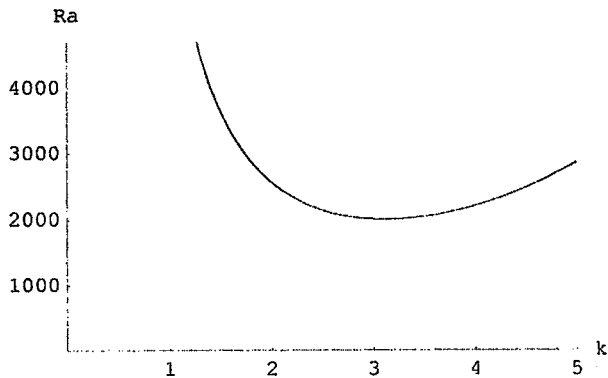
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 1, 5, 0.1}]
```

```
{6886.02, 5862.04, 5086.38, 4485.98, 4012.9, 3634.68, 3328.66, 3078.66, 2872.89, 2702.57, 2561.1,
  2443.41, 2345.58, 2264.53, 2197.84, 2143.55, 2100.11, 2066.25, 2040.96, 2023.39, 2012.85,
  2008.8, 2010.76, 2018.37, 2031.32, 2049.37, 2072.31, 2099.98, 2132.28, 2169.11, 2210.41,
  2256.13, 2306.27, 2360.81, 2419.78, 2483.21, 2551.12, 2623.59, 2700.66, 2782.42, 2868.95}
```

```
P10 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]
```

```
{{1, 6886.02}, {1.1, 5862.04}, {1.2, 5086.38}, {1.3, 4485.98}, {1.4, 4012.9}, {1.5, 3634.68}, {1.6, 3328.66},
  {1.7, 3078.66}, {1.8, 2872.89}, {1.9, 2702.57}, {2., 2561.1}, {2.1, 2443.41}, {2.2, 2345.58}, {2.3, 2264.53},
  {2.4, 2197.84}, {2.5, 2143.55}, {2.6, 2100.11}, {2.7, 2066.25}, {2.8, 2040.96}, {2.9, 2023.39},
  {3., 2012.85}, {3.1, 2008.8}, {3.2, 2010.76}, {3.3, 2018.37}, {3.4, 2031.32}, {3.5, 2049.37}, {3.6, 2072.31},
  {3.7, 2099.98}, {3.8, 2132.28}, {3.9, 2169.11}, {4., 2210.41}, {4.1, 2256.13}, {4.2, 2306.27}, {4.3, 2360.81},
  {4.4, 2419.78}, {4.5, 2483.21}, {4.6, 2551.12}, {4.7, 2623.59}, {4.8, 2700.66}, {4.9, 2782.42}, {5., 2868.95}}
```

```
G10 = ListPlot[P10, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> {{0, 5}, {0, Automatic}}, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra10 = Min[M3]
```

2008.8

```
R := -1
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f-1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f-2 -> f2 - (2 h^2 k^2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h^2 k^2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

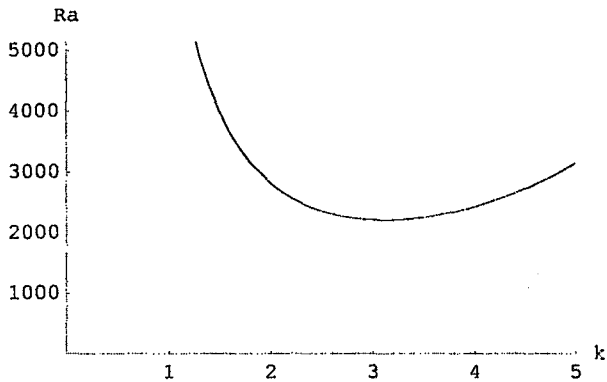
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 1, 5, 0.1}]
```

```
{7567.79, 6442.41, 5589.92, 4930.05, 4410.12, 3994.44, 3658.11, 3383.34, 3157.17, 2981.62, 2814.48,
  2685.12, 2577.59, 2488.5, 2415.18, 2355.49, 2307.73, 2270.49, 2242.66, 2223.32, 2211.71,
  2207.22, 2209.34, 2217.66, 2231.85, 2251.63, 2276.78, 2307.14, 2342.57, 2382.97, 2428.27,
  2478.44, 2533.44, 2593.29, 2657.98, 2727.56, 2802.07, 2881.56, 2966.11, 3055.8, 3150.7}
```

```
P11 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]
```

```
{{1, 7567.79}, {1.1, 6442.41}, {1.2, 5589.92}, {1.3, 4930.05}, {1.4, 4410.12}, {1.5, 3994.44}, {1.6, 3658.11},
  {1.7, 3383.34}, {1.8, 3157.17}, {1.9, 2981.62}, {2., 2814.48}, {2.1, 2685.12}, {2.2, 2577.59}, {2.3, 2488.5},
  {2.4, 2415.18}, {2.5, 2355.49}, {2.6, 2307.73}, {2.7, 2270.49}, {2.8, 2242.66}, {2.9, 2223.32}, {3., 2211.71},
  {3.1, 2207.22}, {3.2, 2209.34}, {3.3, 2217.66}, {3.4, 2231.85}, {3.5, 2251.63}, {3.6, 2276.78},
  {3.7, 2307.14}, {3.8, 2342.57}, {3.9, 2382.97}, {4., 2428.27}, {4.1, 2478.44}, {4.2, 2533.44}, {4.3, 2593.29},
  {4.4, 2657.98}, {4.5, 2727.56}, {4.6, 2802.07}, {4.7, 2881.56}, {4.8, 2966.11}, {4.9, 3055.8}, {5., 3150.7}}
```

```
G11 = ListPlot[P11, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> {{0, 5}, {0, Automatic}}, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra11 = Min[M3]
```

```
2207.22
```

```
R := -0.8
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f_1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f_2 -> f2 - (2 h^2 k^2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h^2 k^2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

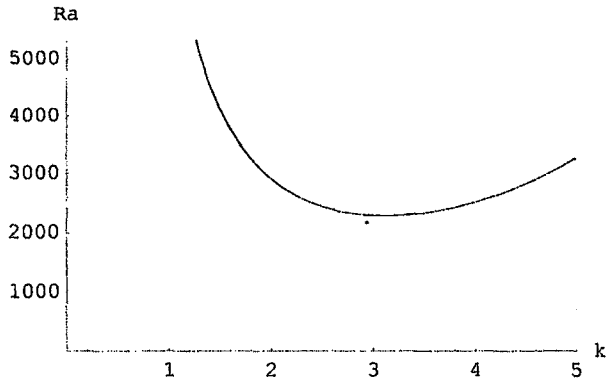
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 1, 5, 0.1}]
```

```
{7828.25, 6664.13, 5782.28, 5099.69, 4561.86, 4131.86, 3783.94, 3499.71, 3265.75, 3072.11, 2911.25,
  2777.43, 2666.19, 2574.02, 2498.16, 2436.41, 2386.99, 2348.46, 2319.66, 2299.63, 2287.61,
  2282.94, 2285.11, 2293.7, 2308.35, 2328.78, 2354.77, 2386.14, 2422.75, 2464.5, 2511.32,
  2563.17, 2620.02, 2681.87, 2748.73, 2820.64, 2897.64, 2979.79, 3067.16, 3159.84, 3257.92}
```

```
P12 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]
```

```
{{1, 7828.25}, {1.1, 6664.13}, {1.2, 5782.28}, {1.3, 5099.69}, {1.4, 4561.86}, {1.5, 4131.86}, {1.6, 3783.94},
  {1.7, 3499.71}, {1.8, 3265.75}, {1.9, 3072.11}, {2., 2911.25}, {2.1, 2777.43}, {2.2, 2666.19}, {2.3, 2574.02},
  {2.4, 2498.16}, {2.5, 2436.41}, {2.6, 2386.99}, {2.7, 2348.46}, {2.8, 2319.66}, {2.9, 2299.63},
  {3., 2287.61}, {3.1, 2282.94}, {3.2, 2285.11}, {3.3, 2293.7}, {3.4, 2308.35}, {3.5, 2328.78}, {3.6, 2354.77},
  {3.7, 2386.14}, {3.8, 2422.75}, {3.9, 2464.5}, {4., 2511.32}, {4.1, 2563.17}, {4.2, 2620.02}, {4.3, 2681.87},
  {4.4, 2748.73}, {4.5, 2820.64}, {4.6, 2897.64}, {4.7, 2979.79}, {4.8, 3067.16}, {4.9, 3159.84}, {5., 3257.92}}
```

```
G12 = ListPlot[P12, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> {{0, 5}, {0, Automatic}}, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra12 = Min[M3]
```

```
2282.94
```

```
R := -0.6
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f-1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f-2 -> f2 - (2 h^2 k^2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h^2 k^2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

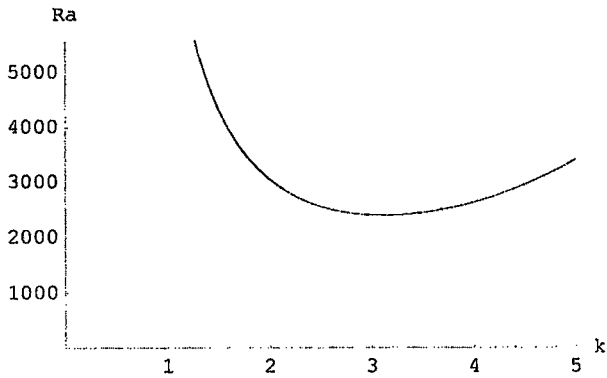
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 1, 5, 0.1}]
```

```
{8182.01, 6965.25, 6043.53, 5330.08, 4767.93, 4318.48, 3954.83, 3657.74, 3413.19, 3210.78, 3042.64,
  2902.76, 2786.47, 2690.12, 2610.82, 2546.26, 2494.58, 2454.29, 2424.16, 2403.2, 2390.6,
  2385.69, 2387.93, 2396.86, 2412.13, 2433.44, 2460.55, 2493.28, 2531.49, 2575.07, 2623.93,
  2678.05, 2737.38, 2801.93, 2871.71, 2946.76, 3027.12, 3112.86, 3204.04, 3300.76, 3403.1}
```

```
P13 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]
```

```
{{1, 8182.01}, {1.1, 6965.25}, {1.2, 6043.53}, {1.3, 5330.08}, {1.4, 4767.93}, {1.5, 4318.48}, {1.6, 3954.83},
  {1.7, 3657.74}, {1.8, 3413.19}, {1.9, 3210.78}, {2., 3042.64}, {2.1, 2902.76}, {2.2, 2786.47}, {2.3, 2690.12},
  {2.4, 2610.82}, {2.5, 2546.26}, {2.6, 2494.58}, {2.7, 2454.29}, {2.8, 2424.16}, {2.9, 2403.2}, {3., 2390.6},
  {3.1, 2385.69}, {3.2, 2387.93}, {3.3, 2396.86}, {3.4, 2412.13}, {3.5, 2433.44}, {3.6, 2460.55},
  {3.7, 2493.28}, {3.8, 2531.49}, {3.9, 2575.07}, {4., 2623.93}, {4.1, 2678.05}, {4.2, 2737.38}, {4.3, 2801.93},
  {4.4, 2871.71}, {4.5, 2946.76}, {4.6, 3027.12}, {4.7, 3112.86}, {4.8, 3204.04}, {4.9, 3300.76}, {5., 3403.1}}
```

```
G13 = ListPlot[P13, AxesOrigin → {0, 0},
  PlotRange → {{0, 5}, {0, Automatic}}, PlotJoined → True, AxesLabel → {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra13 = Min[M3]
```

```
2385.69
```

```
R := -0.4
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f-1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f-2 -> f2 - (2 h^2 k^2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h^2 k^2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

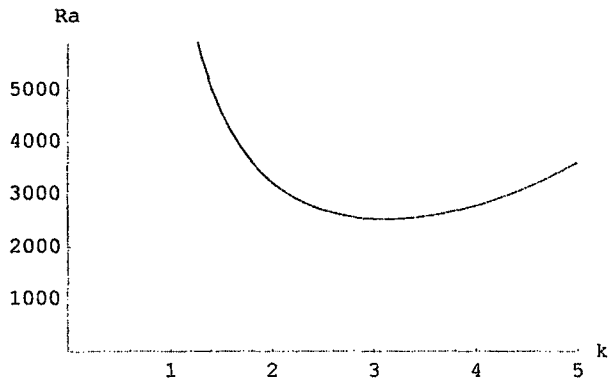
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 1, 5, 0.1}]
```

```
{8690.33, 7397.93, 6418.91, 5661.1, 5063.99, 4586.59, 4200.32, 3884.75, 3624.98, 3409.97, 3231.35,
  3082.75, 2959.21, 2856.85, 2772.59, 2703.97, 2649.05, 2606.21, 2574.16, 2551.85, 2538.42,
  2533.14, 2535.45, 2544.87, 2561.01, 2583.56, 2612.26, 2646.93, 2687.4, 2733.56, 2785.33,
  2842.66, 2905.53, 2973.92, 3047.85, 3127.37, 3212.5, 3303.33, 3399.92, 3502.36, 3610.76}
```

```
P14 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]
```

```
{{1, 8690.33}, {1.1, 7397.93}, {1.2, 6418.91}, {1.3, 5661.1}, {1.4, 5063.99}, {1.5, 4586.59}, {1.6, 4200.32},
  {1.7, 3884.75}, {1.8, 3624.98}, {1.9, 3409.97}, {2., 3231.35}, {2.1, 3082.75}, {2.2, 2959.21}, {2.3, 2856.85},
  {2.4, 2772.59}, {2.5, 2703.97}, {2.6, 2649.05}, {2.7, 2606.21}, {2.8, 2574.16}, {2.9, 2551.85}, {3., 2538.42},
  {3.1, 2533.14}, {3.2, 2535.45}, {3.3, 2544.87}, {3.4, 2561.01}, {3.5, 2583.56}, {3.6, 2612.26},
  {3.7, 2646.93}, {3.8, 2687.4}, {3.9, 2733.56}, {4., 2785.33}, {4.1, 2842.66}, {4.2, 2905.53}, {4.3, 2973.92},
  {4.4, 3047.85}, {4.5, 3127.37}, {4.6, 3212.5}, {4.7, 3303.33}, {4.8, 3399.92}, {4.9, 3502.36}, {5., 3610.76}}
```

```
G14 = ListPlot[P14, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> {{0, 5}, {0, Automatic}}, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra14 = Min[M3]
```

```
2533.14
```

```
R := -0.2
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f_1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f_2 -> f2 - (2 h^2 k^2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h^2 k^2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

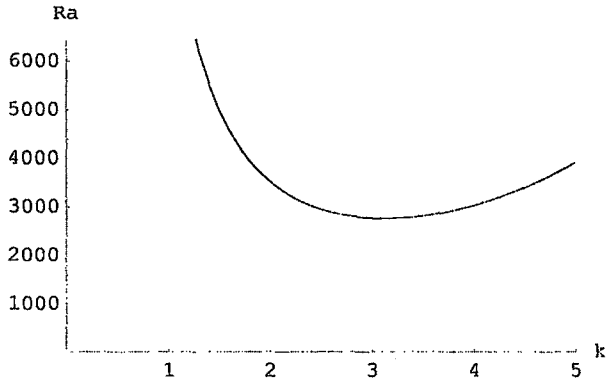
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 1, 5, 0.1}]
```

```
{9483.52, 8073.05, 7004.59, 6177.54, 5525.87, 5004.84, 4583.25, 4238.82, 3955.29, 3720.59,
  3525.62, 3363.39, 3228.51, 3116.91, 3024.71, 2949.76, 2889.73, 2842.89, 2807.82, 2783.36,
  2768.58, 2762.7, 2765.08, 2775.2, 2792.65, 2817.07, 2848.2, 2885.81, 2929.74, 2979.86, 3036.08,
  3098.34, 3166.61, 3240.88, 3321.17, 3407.51, 3499.95, 3598.56, 3703.41, 3814.61, 3932.25}
```

```
P15 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]
```

```
{{1, 9483.52}, {1.1, 8073.05}, {1.2, 7004.59}, {1.3, 6177.54}, {1.4, 5525.87}, {1.5, 5004.84}, {1.6, 4583.25},
  {1.7, 4238.82}, {1.8, 3955.29}, {1.9, 3720.59}, {2., 3525.62}, {2.1, 3363.39}, {2.2, 3228.51}, {2.3, 3116.91},
  {2.4, 3024.71}, {2.5, 2949.76}, {2.6, 2889.73}, {2.7, 2842.89}, {2.8, 2807.82}, {2.9, 2783.36},
  {3., 2768.58}, {3.1, 2762.7}, {3.2, 2765.08}, {3.3, 2775.2}, {3.4, 2792.65}, {3.5, 2817.07}, {3.6, 2848.2},
  {3.7, 2885.81}, {3.8, 2929.74}, {3.9, 2979.86}, {4., 3036.08}, {4.1, 3098.34}, {4.2, 3166.61}, {4.3, 3240.88},
  {4.4, 3321.17}, {4.5, 3407.51}, {4.6, 3499.95}, {4.7, 3598.56}, {4.8, 3703.41}, {4.9, 3814.61}, {5., 3932.25}}
```

```
G15 = ListPlot[P15, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> {{0. 5}, {0, Automatic}}, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra15 = Min[M3]
```

2762.7

```
R := -0.1
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f-1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f-2 -> f2 - (2 h^2 k^2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h^2 k^2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

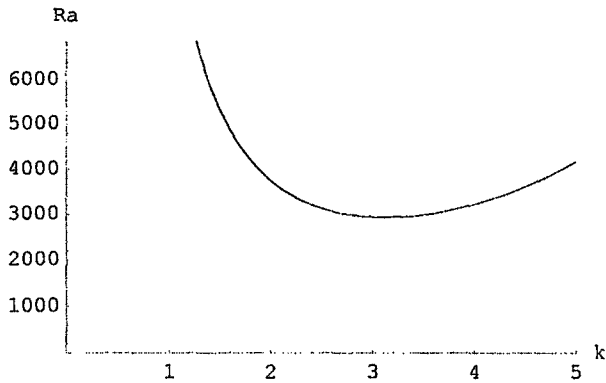
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 1, 5, 0.1}]
```

```
{10074.6, 8576.14, 7441., 6562.33, 5869.98, 5316.41, 4868.49, 4502.53, 4201.28, 3951.9, 3744.72,
  3572.32, 3428.97, 3310.15, 3212.32, 3132.62, 3068.77, 3018.92, 2981.57, 2955.48, 2939.67,
  2933.29, 2935.68, 2946.29, 2964.66, 2990.43, 3023.31, 3063.05, 3109.49, 3162.49, 3221.94,
  3287.78, 3359.99, 3438.54, 3523.45, 3614.76, 3712.51, 3816.78, 3927.64, 4045.19, 4169.54}
```

```
P16 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]
```

```
{{1. 10074.6}, {1.1, 8576.14}, {1.2, 7441.}, {1.3, 6562.33}, {1.4, 5869.98}, {1.5, 5316.41}, {1.6, 4868.49},
  {1.7, 4502.53}, {1.8, 4201.28}, {1.9, 3951.9}, {2., 3744.72}, {2.1, 3572.32}, {2.2, 3428.97}, {2.3, 3310.15},
  {2.4, 3212.32}, {2.5, 3132.62}, {2.6, 3068.77}, {2.7, 3018.92}, {2.8, 2981.57}, {2.9, 2955.48}, {3., 2939.67},
  {3.1, 2933.29}, {3.2, 2935.68}, {3.3, 2946.29}, {3.4, 2964.66}, {3.5, 2990.43}, {3.6, 3023.31},
  {3.7, 3063.05}, {3.8, 3109.49}, {3.9, 3162.49}, {4., 3221.94}, {4.1, 3287.78}, {4.2, 3359.99}, {4.3, 3438.54},
  {4.4, 3523.45}, {4.5, 3614.76}, {4.6, 3712.51}, {4.7, 3816.78}, {4.8, 3927.64}, {4.9, 4045.19}, {5., 4169.54}}
```

```
G16 = ListPlot[P16, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> {{0, 5}, {0, Automatic}}, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra16 = Min[M3]
```

```
2933.29
```

```
R := 0
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f-1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f-2 -> f2 - (2 h^2 k^2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h^2 k^2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

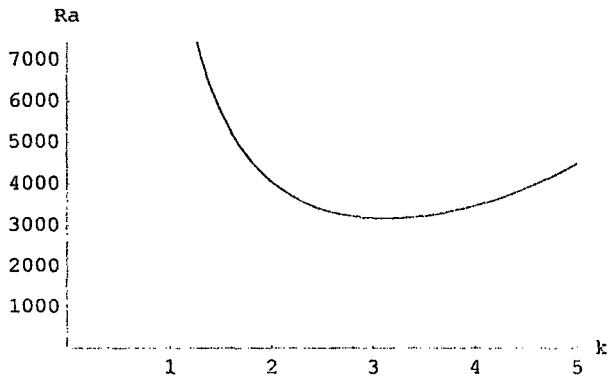
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 1, 5, 0.1}]
```

```
{10897.9, 9276.8, 8048.75, 7098.14, 6349.1, 5750.19, 5265.57, 4869.61, 4543.63, 4273.77, 4049.56,
  3862.97, 3707.79, 3579.14, 3473.19, 3386.83, 3317.61, 3263.53, 3222.95, 3194.55, 3177.23,
  3170.11, 3172.45, 3183.66, 3203.24, 3230.81, 3266.03, 3308.65, 3358.47, 3415.35, 3479.18,
  3549.88, 3627.41, 3711.75, 3802.92, 3900.96, 4005.9, 4117.82, 4236.8, 4362.94, 4496.35}
```

```
P17 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]
```

```
{{1, 10897.9}, {1.1, 9276.8}, {1.2, 8048.75}, {1.3, 7098.14}, {1.4, 6349.1}, {1.5, 5750.19}, {1.6, 5265.57},
  {1.7, 4869.61}, {1.8, 4543.63}, {1.9, 4273.77}, {2., 4049.56}, {2.1, 3862.97}, {2.2, 3707.79}, {2.3, 3579.14},
  {2.4, 3473.19}, {2.5, 3386.83}, {2.6, 3317.61}, {2.7, 3263.53}, {2.8, 3222.95}, {2.9, 3194.55}, {3., 3177.23},
  {3.1, 3170.11}, {3.2, 3172.45}, {3.3, 3183.66}, {3.4, 3203.24}, {3.5, 3230.81}, {3.6, 3266.03},
  {3.7, 3308.65}, {3.8, 3358.47}, {3.9, 3415.35}, {4., 3479.18}, {4.1, 3549.88}, {4.2, 3627.41}, {4.3, 3711.75},
  {4.4, 3802.92}, {4.5, 3900.96}, {4.6, 4005.9}, {4.7, 4117.82}, {4.8, 4236.8}, {4.9, 4362.94}, {5., 4496.35}}
```

```
G17 = ListPlot[P17, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> {{0, 5}, {0, Automatic}}, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra17 = Min[M3]
```

```
3170.11
```

```
R := 0.1
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f-1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f-2 -> f2 - (2 h^2 k^2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h^2 k^2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

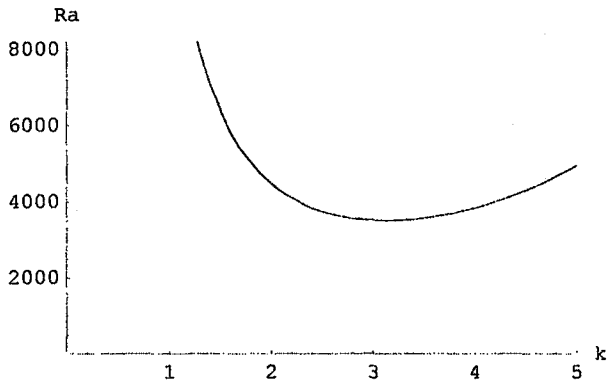
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 1, 5, 0.1}]
```

```
{12168.2, 10296.3, 8950.34, 7939.68, 7071.09, 6418.77, 5858.01, 5399.06, 5063.86, 4740.43, 4494.37,
  4293.87, 4125.23, 3984.75, 3856.32, 3766.28, 3691.06, 3633.14, 3579.33, 3553.51, 3535.22,
  3522.53, 3521.47, 3533.51, 3558.93, 3585.26, 3628.54, 3673.22, 3728.5, 3793.78, 3858.47,
  3936.81, 4023.25, 4117.57, 4215.5, 4323.96, 4436.29, 4559.28, 4690.56, 4829.23, 4976.78}
```

```
P18 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]
```

```
{{1, 12168.2}, {1.1, 10296.3}, {1.2, 8950.34}, {1.3, 7939.68}, {1.4, 7071.09}, {1.5, 6418.77}, {1.6, 5858.01},
  {1.7, 5399.06}, {1.8, 5063.86}, {1.9, 4740.43}, {2., 4494.37}, {2.1, 4293.87}, {2.2, 4125.23}, {2.3, 3984.75},
  {2.4, 3856.32}, {2.5, 3766.28}, {2.6, 3691.06}, {2.7, 3633.14}, {2.8, 3579.33}, {2.9, 3553.51}, {3., 3535.22},
  {3.1, 3522.53}, {3.2, 3521.47}, {3.3, 3533.51}, {3.4, 3558.93}, {3.5, 3585.26}, {3.6, 3628.54},
  {3.7, 3673.22}, {3.8, 3728.5}, {3.9, 3793.78}, {4., 3858.47}, {4.1, 3936.81}, {4.2, 4023.25}, {4.3, 4117.57},
  {4.4, 4215.5}, {4.5, 4323.96}, {4.6, 4436.29}, {4.7, 4559.28}, {4.8, 4690.56}, {4.9, 4829.23}, {5., 4976.78}}
```

```
G18 = ListPlot[P18, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> {{0, 5}, {0, Automatic}}, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra18 = Min[M3]
```

```
3521.47
```

```
R := 0.2
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f-1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f-2 -> f2 - (2 h^2 k^2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h^2 k^2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

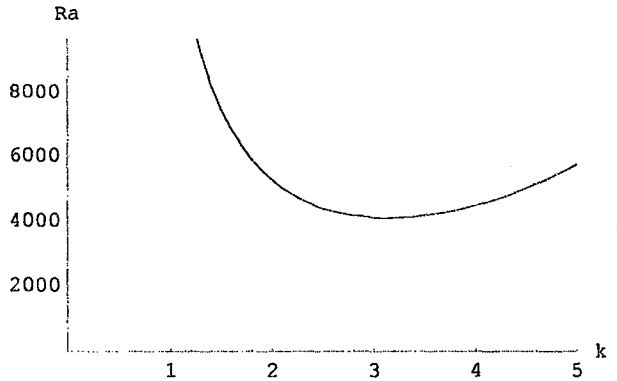
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 1, 5, 0.1}]
```

```
{14202.2, 12117.6, 10510.6, 9255.1, 8244.5, 7454.53, 6814.19, 6330.26, 5901.7, 5551.36, 5265.24,
  5002.43, 4814.21, 4638.01, 4501.7, 4385.19, 4302.13, 4234.91, 4176.54, 4144.22, 4105.72,
  4094.87, 4105.83, 4114.27, 4137.04, 4178.76, 4218.76, 4265.51, 4325.37, 4397.3, 4477.76,
  4571.1, 4659.7, 4768.1, 4886.12, 5006.13, 5133.77, 5274.11, 5424.38, 5579.59, 5744.66}
```

```
P19 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]
```

```
{{1, 14202.2}, {1.1, 12117.6}, {1.2, 10510.6}, {1.3, 9255.1}, {1.4, 8244.5}, {1.5, 7454.53}, {1.6, 6814.19},
  {1.7, 6330.26}, {1.8, 5901.7}, {1.9, 5551.36}, {2., 5265.24}, {2.1, 5002.43}, {2.2, 4814.21}, {2.3, 4638.01},
  {2.4, 4501.7}, {2.5, 4385.19}, {2.6, 4302.13}, {2.7, 4234.91}, {2.8, 4176.54}, {2.9, 4144.22}, {3., 4105.72},
  {3.1, 4094.87}, {3.2, 4105.83}, {3.3, 4114.27}, {3.4, 4137.04}, {3.5, 4178.76}, {3.6, 4218.76},
  {3.7, 4265.51}, {3.8, 4325.37}, {3.9, 4397.3}, {4., 4477.76}, {4.1, 4571.1}, {4.2, 4659.7}, {4.3, 4768.1},
  {4.4, 4886.12}, {4.5, 5006.13}, {4.6, 5133.77}, {4.7, 5274.11}, {4.8, 5424.38}, {4.9, 5579.59}, {5., 5744.66}}
```

```
G19 = ListPlot[P19, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> {{0, 5}, {0, Automatic}}, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra19 = Min[M3]
```

```
4094.87
```

```
R := 0.3
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f-1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f-2 -> f2 - (2 h^2 k^2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h^2 k^2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

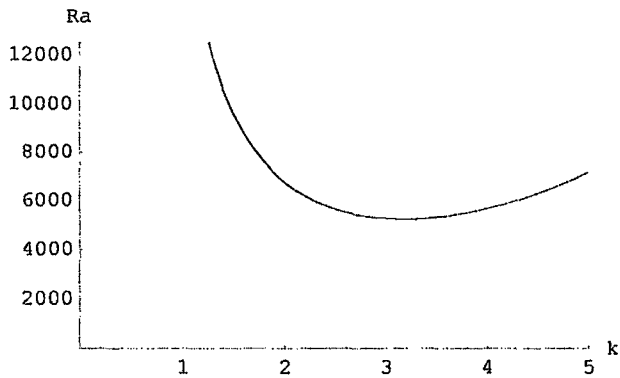
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 1, 5, 0.1}]
```

```
{18208.2, 15575.8, 13480.9, 11870.2, 10638.7, 9611.6, 8805.23, 8134.94, 7588.63, 7120.72,
  6749.43, 6422.79, 6190.45, 5950.39, 5775.03, 5623.41, 5495.66, 5406.44, 5340.29, 5283.58,
  5250.96, 5227.2, 5222.69, 5235.11, 5257.4, 5299.31, 5351.02, 5412.84, 5482.02, 5567.5, 5659.26,
  5760.78, 5878.06, 6004.01, 6136.77, 6279.12, 6435.06, 6602.79, 6777.19, 6964.08, 7158.11}
```

```
P20 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]
```

```
{{1, 18208.2}, {1.1, 15575.8}, {1.2, 13480.9}, {1.3, 11870.2}, {1.4, 10638.7}, {1.5, 9611.6}, {1.6, 8805.23},
  {1.7, 8134.94}, {1.8, 7588.63}, {1.9, 7120.72}, {2., 6749.43}, {2.1, 6422.79}, {2.2, 6190.45}, {2.3, 5950.39},
  {2.4, 5775.03}, {2.5, 5623.41}, {2.6, 5495.66}, {2.7, 5406.44}, {2.8, 5340.29}, {2.9, 5283.58},
  {3., 5250.96}, {3.1, 5227.2}, {3.2, 5222.69}, {3.3, 5235.11}, {3.4, 5257.4}, {3.5, 5299.31}, {3.6, 5351.02},
  {3.7, 5412.84}, {3.8, 5482.02}, {3.9, 5567.5}, {4., 5659.26}, {4.1, 5760.78}, {4.2, 5878.06}, {4.3, 6004.01},
  {4.4, 6136.77}, {4.5, 6279.12}, {4.6, 6435.06}, {4.7, 6602.79}, {4.8, 6777.19}, {4.9, 6964.08}, {5., 7158.11}}
```

```
G20 = ListPlot[P20, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> {{0, 5}, {0, Automatic}}, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra20 = Min[M3]
```

```
5222.69
```

```
M2 := Table[k, {k, 2, 6, 0.1}]
```

```
R := 0.4
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f-1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f-2 -> f2 - (2 h^2 k^2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h^2 k^2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

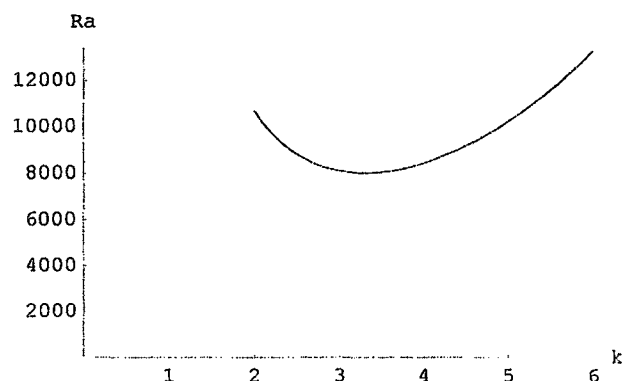
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 2, 6, 0.1}]
```

```
{10733.4, 10209.7, 9766.96, 9385.4, 9082.77, 8820.79, 8636.63, 8437.42, 8303.83, 8195.28, 8123.7,
  8057.56, 8038.07, 8022.94, 8031.32, 8062.63, 8101.71, 8164.67, 8249., 8340.17, 8439.26,
  8561.42, 8705.98, 8850.6, 9005.93, 9181.2, 9363.44, 9563.67, 9779.09, 9998.18, 10237.3,
  10479., 10747.1, 11017.5, 11301.4, 11600.2, 11914.1, 12235.3, 12570.6, 12922.9, 13282.4}
```

```
P21 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]
```

```
{{2, 10733.4}, {2.1, 10209.7}, {2.2, 9766.96}, {2.3, 9385.4}, {2.4, 9082.77}, {2.5, 8820.79}, {2.6, 8636.63},
  {2.7, 8437.42}, {2.8, 8303.83}, {2.9, 8195.28}, {3., 8123.7}, {3.1, 8057.56}, {3.2, 8038.07}, {3.3, 8022.94},
  {3.4, 8031.32}, {3.5, 8062.63}, {3.6, 8101.71}, {3.7, 8164.67}, {3.8, 8249.}, {3.9, 8340.17}, {4., 8439.26},
  {4.1, 8561.42}, {4.2, 8705.98}, {4.3, 8850.6}, {4.4, 9005.93}, {4.5, 9181.2}, {4.6, 9363.44}, {4.7, 9563.67},
  {4.8, 9779.09}, {4.9, 9998.18}, {5., 10237.3}, {5.1, 10479.}, {5.2, 10747.1}, {5.3, 11017.5}, {5.4, 11301.4},
  {5.5, 11600.2}, {5.6, 11914.1}, {5.7, 12235.3}, {5.8, 12570.6}, {5.9, 12922.9}, {6., 13282.4}}
```

```
G21 = ListPlot[P21, AxesOrigin → {0, 0},
  PlotRange → {{0, 6}, {0, Automatic}}, PlotJoined → True, AxesLabel → {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra21 = Min[M3]
```

```
8022.94
```

```
R := 0.5
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f-1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f-2 -> f2 - (2 h2 k2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h2 k2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

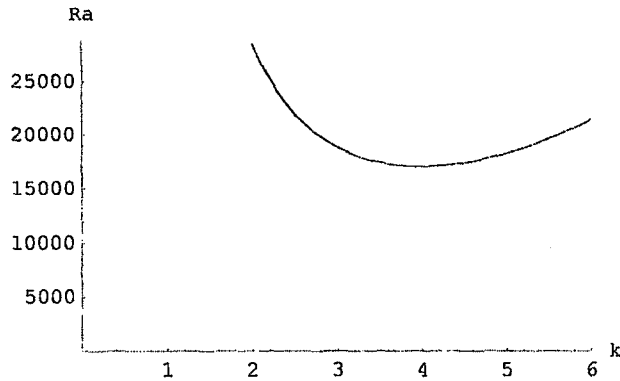
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 2, 6, 0.1}]
```

```
{28633.7, 26904.5, 25374.1, 24089.1, 23005.9, 22034.3, 21209., 20481.6, 19875.8, 19329.7,
  18880.6, 18483.3, 18146., 17861.2, 17627.8, 17449.6, 17297.5, 17197.2, 17109.1, 17067.8,
  17051.2, 17072.4, 17111.7, 17181.3, 17273.2, 17394., 17524.8, 17682., 17862.2, 18060.2, 18282.,
  18518.3, 18777.5, 19052.8, 19344.7, 19662., 19989.6, 20338.5, 20705.1, 21087., 21490.1}
```

```
P22 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]
```

```
{{2, 28633.7}, {2.1, 26904.5}, {2.2, 25374.1}, {2.3, 24089.1}, {2.4, 23005.9}, {2.5, 22034.3}, {2.6, 21209.},
  {2.7, 20481.6}, {2.8, 19875.8}, {2.9, 19329.7}, {3., 18880.6}, {3.1, 18483.3}, {3.2, 18146.}, {3.3, 17861.2},
  {3.4, 17627.8}, {3.5, 17449.6}, {3.6, 17297.5}, {3.7, 17197.2}, {3.8, 17109.1}, {3.9, 17067.8},
  {4., 17051.2}, {4.1, 17072.4}, {4.2, 17111.7}, {4.3, 17181.3}, {4.4, 17273.2}, {4.5, 17394.}, {4.6, 17524.8},
  {4.7, 17682.}, {4.8, 17862.2}, {4.9, 18060.2}, {5., 18282.}, {5.1, 18518.3}, {5.2, 18777.5}, {5.3, 19052.8},
  {5.4, 19344.7}, {5.5, 19662.}, {5.6, 19989.6}, {5.7, 20338.5}, {5.8, 20705.1}, {5.9, 21087.}, {6., 21490.1}}
```

```
G22 = ListPlot[P22, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> {{0, 6}, {0, Automatic}}, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra22 = Min[M3]
```

```
17051.2
```

```
M2 := Table[k, {k, 3, 8, 0.1}]
```

```
R := 0.6
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f102 -> f2 - (2 h^2 k^2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h^2 k^2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

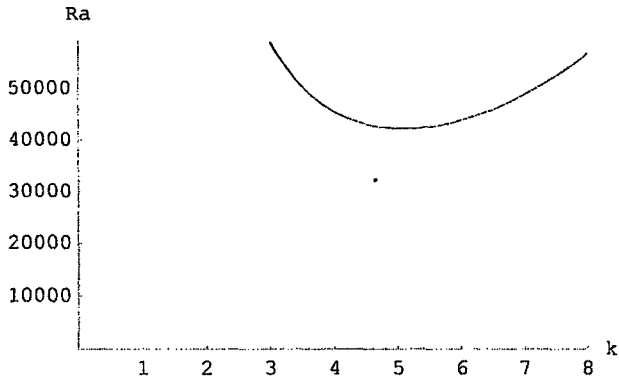
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 3, 8, 0.1}]
```

```
{59008., 56831.6, 54948.1, 53242.8, 51704.5, 50352.6, 49144.9, 48062.7, 47088.6, 46239.9,
  45490.9, 44831.9, 44259.7, 43768.4, 43358.3, 42998.4, 42724.4, 42487.4, 42324.8, 42203.2,
  42139.6, 42115., 42136.7, 42204.7, 42319.9, 42462.5, 42658.6, 42878., 43146.6, 43443.7, 43772.,
  44143., 44539., 44963.8, 45423.4, 45914.4, 46436.5, 46987.7, 47568.5, 48178.5, 48815.2,
  49486.9, 50181., 50909.6, 51662.7, 52444.1, 53254.5, 54092.7, 54959.2, 55854.6, 56781.3}
```

```
P23 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]
```

```
{{3, 59008.}, {3.1, 56831.6}, {3.2, 54948.1}, {3.3, 53242.8}, {3.4, 51704.5}, {3.5, 50352.6}, {3.6, 49144.9},
  {3.7, 48062.7}, {3.8, 47088.6}, {3.9, 46239.9}, {4., 45490.9}, {4.1, 44831.9}, {4.2, 44259.7},
  {4.3, 43768.4}, {4.4, 43358.3}, {4.5, 42998.4}, {4.6, 42724.4}, {4.7, 42487.4}, {4.8, 42324.8},
  {4.9, 42203.2}, {5., 42139.6}, {5.1, 42115.}, {5.2, 42136.7}, {5.3, 42204.7}, {5.4, 42319.9}, {5.5, 42462.5},
  {5.6, 42658.6}, {5.7, 42878.}, {5.8, 43146.6}, {5.9, 43443.7}, {6., 43772.}, {6.1, 44143.}, {6.2, 44539.},
  {6.3, 44963.8}, {6.4, 45423.4}, {6.5, 45914.4}, {6.6, 46436.5}, {6.7, 46987.7}, {6.8, 47568.5},
  {6.9, 48178.5}, {7., 48815.2}, {7.1, 49486.9}, {7.2, 50181.}, {7.3, 50909.6}, {7.4, 51662.7},
  {7.5, 52444.1}, {7.6, 53254.5}, {7.7, 54092.7}, {7.8, 54959.2}, {7.9, 55854.6}, {8., 56781.3}}
```

```
G23 = ListPlot[P23, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> {{0, 8}, {0, Automatic}}, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra23 = Min[M3]
```

```
42115.
```

```
M2 := Table[k, {k, 4, 9, 0.1}]
```

```
R := 0.7
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f-1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f-2 -> f2 - (2 h^2 k^2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h^2 k^2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

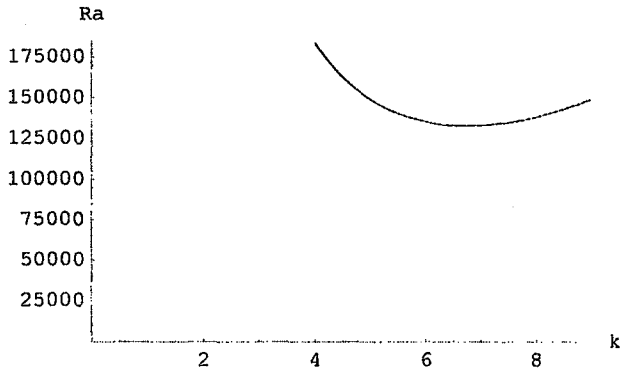
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 4, 9, 0.1}]
```

```
{184507., 179458., 174835., 170586., 166686., 163108., 159817., 156803., 154044., 151510., 149194.,
  147082., 145149., 143403., 141820., 140384., 139095., 137950., 136931., 136036., 135255.,
  134590., 134028., 133564., 133202., 132927., 132746., 132649., 132634., 132700., 132839.,
  133055., 133342., 133703., 134126., 134618., 135175., 135797., 136477., 137220., 138025.,
  138885., 139803., 140779., 141808., 142895., 144035., 145230., 146476., 147779., 149128.}
```

```
P24 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]
```

```
{{4, 184507.}, {4.1, 179458.}, {4.2, 174835.}, {4.3, 170586.}, {4.4, 166686.}, {4.5, 163108.}, {4.6, 159817.},
  {4.7, 156803.}, {4.8, 154044.}, {4.9, 151510.}, {5., 149194.}, {5.1, 147082.}, {5.2, 145149.}, {5.3, 143403.},
  {5.4, 141820.}, {5.5, 140384.}, {5.6, 139095.}, {5.7, 137950.}, {5.8, 136931.}, {5.9, 136036.}, {6., 135255.},
  {6.1, 134590.}, {6.2, 134028.}, {6.3, 133564.}, {6.4, 133202.}, {6.5, 132927.}, {6.6, 132746.},
  {6.7, 132649.}, {6.8, 132634.}, {6.9, 132700.}, {7., 132839.}, {7.1, 133055.}, {7.2, 133342.},
  {7.3, 133703.}, {7.4, 134126.}, {7.5, 134618.}, {7.6, 135175.}, {7.7, 135797.}, {7.8, 136477.},
  {7.9, 137220.}, {8., 138025.}, {8.1, 138885.}, {8.2, 139803.}, {8.3, 140779.}, {8.4, 141808.},
  {8.5, 142895.}, {8.6, 144035.}, {8.7, 145230.}, {8.8, 146476.}, {8.9, 147779.}, {9., 149128.}}
```

```
G24 = ListPlot[P24, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> {{0, 9}, {0, Automatic}}, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra24 = Min[M3]
```

```
132634.
```

```
M2 := Table[k, {k, 8, 12, 0.1}]
```

```
R := 0.8
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f12 -> f2 - (2 h^2 k^2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h^2 k^2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

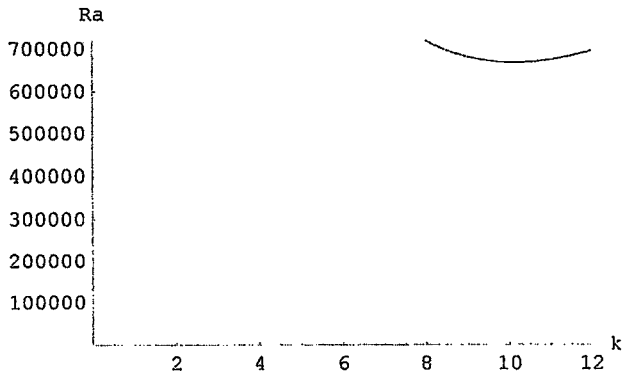
```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 8, 12, 0.1}]
```

```
{719217., 714001., 709131., 704590., 700356., 696441., 692822., 689493., 686425., 683619., 681093.,
  678790., 676748., 674929., 673338., 671964., 670797., 669854., 669113., 668559., 668183.,
  668005., 668008., 668201., 668556., 669081., 669766., 670624., 671636., 672808., 674142.,
  675614., 677244., 679011., 680923., 682987., 685187., 687514., 689989., 692584., 695325.}
```

```
P25 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]
```

```
{{8, 719217.}, {8.1, 714001.}, {8.2, 709131.}, {8.3, 704590.}, {8.4, 700356.}, {8.5, 696441.},
  {8.6, 692822.}, {8.7, 689493.}, {8.8, 686425.}, {8.9, 683619.}, {9., 681093.}, {9.1, 678790.},
  {9.2, 676748.}, {9.3, 674929.}, {9.4, 673338.}, {9.5, 671964.}, {9.6, 670797.}, {9.7, 669854.},
  {9.8, 669113.}, {9.9, 668559.}, {10., 668183.}, {10.1, 668005.}, {10.2, 668008.}, {10.3, 668201.},
  {10.4, 668556.}, {10.5, 669081.}, {10.6, 669766.}, {10.7, 670624.}, {10.8, 671636.},
  {10.9, 672808.}, {11., 674142.}, {11.1, 675614.}, {11.2, 677244.}, {11.3, 679011.}, {11.4, 680923.},
  {11.5, 682987.}, {11.6, 685187.}, {11.7, 687514.}, {11.8, 689989.}, {11.9, 692584.}, {12., 695325.}}
```

```
G25 = ListPlot[P25, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> {{0, 12}, {0, Automatic}}, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra25 = Min[M3]
```

```
668005.
```

```
M2 := Table[k, {k, 17, 23, 0.1}]
```

```
R := 0.9
```

```
eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f0 -> 0, f100 -> 0, f-1 -> -f1, f101 -> -f99,
  f-2 -> f2 - (2 h^2 k^2 + 4) f1, f102 -> f98 - (2 h^2 k^2 + 4) f99}], M1], {n, 1, 99, 1}]
```

```
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 17, 23, 0.1}]
```

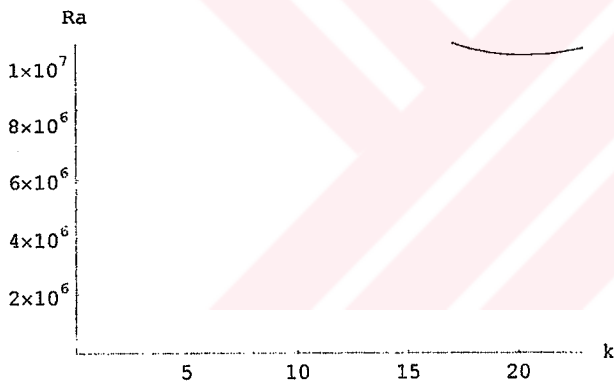
```
{1.08331 × 107, 1.08048 × 107, 1.07776 × 107, 1.07514 × 107, 1.07264 × 107, 1.07025 × 107, 1.06795 × 107,
  1.06577 × 107, 1.06368 × 107, 1.06169 × 107, 1.0598 × 107, 1.05801 × 107, 1.05632 × 107, 1.05471 × 107,
  1.0532 × 107, 1.05178 × 107, 1.05044 × 107, 1.0492 × 107, 1.04804 × 107, 1.04697 × 107, 1.04598 × 107,
  1.04507 × 107, 1.04425 × 107, 1.04351 × 107, 1.04284 × 107, 1.04226 × 107, 1.04175 × 107, 1.04131 × 107,
  1.04096 × 107, 1.04067 × 107, 1.04046 × 107, 1.04033 × 107, 1.04026 × 107, 1.04027 × 107, 1.04034 × 107,
  1.04049 × 107, 1.0407 × 107, 1.04098 × 107, 1.04133 × 107, 1.04174 × 107, 1.04222 × 107, 1.04276 × 107,
  1.04337 × 107, 1.04404 × 107, 1.04478 × 107, 1.04557 × 107, 1.04643 × 107, 1.04735 × 107, 1.04833 × 107,
  1.04937 × 107, 1.05047 × 107, 1.05163 × 107, 1.05284 × 107, 1.05412 × 107, 1.05545 × 107,
  1.05684 × 107, 1.05828 × 107, 1.05978 × 107, 1.06134 × 107, 1.06295 × 107, 1.06462 × 107}
```

P26 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]

{ {17, 1.08331×10^7 }, {17.1, 1.08048×10^7 }, {17.2, 1.07776×10^7 }, {17.3, 1.07514×10^7 }, {17.4, 1.07264×10^7 },
 {17.5, 1.07025×10^7 }, {17.6, 1.06795×10^7 }, {17.7, 1.06577×10^7 }, {17.8, 1.06368×10^7 },
 {17.9, 1.06169×10^7 }, {18., 1.0598×10^7 }, {18.1, 1.05801×10^7 }, {18.2, 1.05632×10^7 },
 {18.3, 1.05471×10^7 }, {18.4, 1.0532×10^7 }, {18.5, 1.05178×10^7 }, {18.6, 1.05044×10^7 },
 {18.7, 1.0492×10^7 }, {18.8, 1.04804×10^7 }, {18.9, 1.04697×10^7 }, {19., 1.04598×10^7 },
 {19.1, 1.04507×10^7 }, {19.2, 1.04425×10^7 }, {19.3, 1.04351×10^7 }, {19.4, 1.04284×10^7 },
 {19.5, 1.04226×10^7 }, {19.6, 1.04175×10^7 }, {19.7, 1.04131×10^7 }, {19.8, 1.04096×10^7 },
 {19.9, 1.04067×10^7 }, {20., 1.04046×10^7 }, {20.1, 1.04033×10^7 }, {20.2, 1.04026×10^7 },
 {20.3, 1.04027×10^7 }, {20.4, 1.04034×10^7 }, {20.5, 1.04049×10^7 }, {20.6, 1.0407×10^7 },
 {20.7, 1.04098×10^7 }, {20.8, 1.04133×10^7 }, {20.9, 1.04174×10^7 }, {21., 1.04222×10^7 },
 {21.1, 1.04276×10^7 }, {21.2, 1.04337×10^7 }, {21.3, 1.04404×10^7 }, {21.4, 1.04478×10^7 },
 {21.5, 1.04557×10^7 }, {21.6, 1.04643×10^7 }, {21.7, 1.04735×10^7 }, {21.8, 1.04833×10^7 },
 {21.9, 1.04937×10^7 }, {22., 1.05047×10^7 }, {22.1, 1.05163×10^7 }, {22.2, 1.05284×10^7 },
 {22.3, 1.05412×10^7 }, {22.4, 1.05545×10^7 }, {22.5, 1.05684×10^7 }, {22.6, 1.05828×10^7 },
 {22.7, 1.05978×10^7 }, {22.8, 1.06134×10^7 }, {22.9, 1.06295×10^7 }, {23., 1.06462×10^7 }}

G26 = ListPlot[P26, AxesOrigin $\rightarrow$ {0, 0},

PlotRange $\rightarrow$ {{0, 23}, {0, Automatic}}, PlotJoined $\rightarrow$ True, AxesLabel $\rightarrow$ {"k", "Ra"}]



- Graphics -

Ra₂₆ = Min[M3]

1.04026×10^7

M2 := Table[k, {k, 1, 5, 1}]

R := 1.0

**eq2 := Table[Coefficient[FullSimplify[eq1 /. {f₀ $\rightarrow$ 0, f₁₀₀ $\rightarrow$ 0, f₋₁ $\rightarrow$ -f₁, f₁₀₁ $\rightarrow$ -f₉₉,
 f₋₂ $\rightarrow$ f₂ - (2 h² k² + 4) f₁, f₁₀₂ $\rightarrow$ f₉₈ - (2 h² k² + 4) f₉₉}], M1], {n, 1, 99, 1}]**

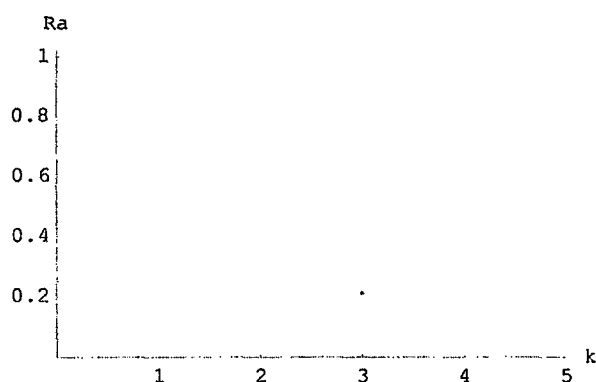
M3 = Table[Min[Select[Eigenvalues[eq2], #1 > 0 &]], {k, 1, 5, 1}]

{ ∞ , ∞ , ∞ , ∞ , ∞ }

P27 = Transpose[AppendColumns[{M2}, {M3}]]

{ {1, ∞ }, {2, ∞ }, {3, ∞ }, {4, ∞ }, {5, ∞ }}

```
G27 = ListPlot[P27, AxesOrigin → {0, 0},
  PlotRange → {{0, 5}, {0, Automatic}}, PlotJoined → True, AxesLabel → {"k", "Ra"}]
```



- Graphics -

```
Ra27 = Min[M3]
```

∞

```
Show[G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10, G11, G12, G13,
  G14, G15, G16, G17, G18, G19, G20, G21, G22, G23, G24, G25, G26, G27,
  AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → {{0, 10}, {0, 80000}}, AxesLabel → {"R", "RaKr"}]
```



- Graphics -

```
L1 = Table[Raj, {j, 2, 27, 1}]
```

```
{1706.49, 1714.08, 1721.6, 1743.68, 1779.02, 1796.03, 1823.48, 1875.18,
  2008.8, 2207.22, 2282.94, 2385.69, 2533.14, 2762.7, 2933.29, 3170.11, 3521.47,
  4094.87, 5222.69, 8022.94, 17051.2, 42115., 132634., 668005., 1.04026 × 107, ∞}
```

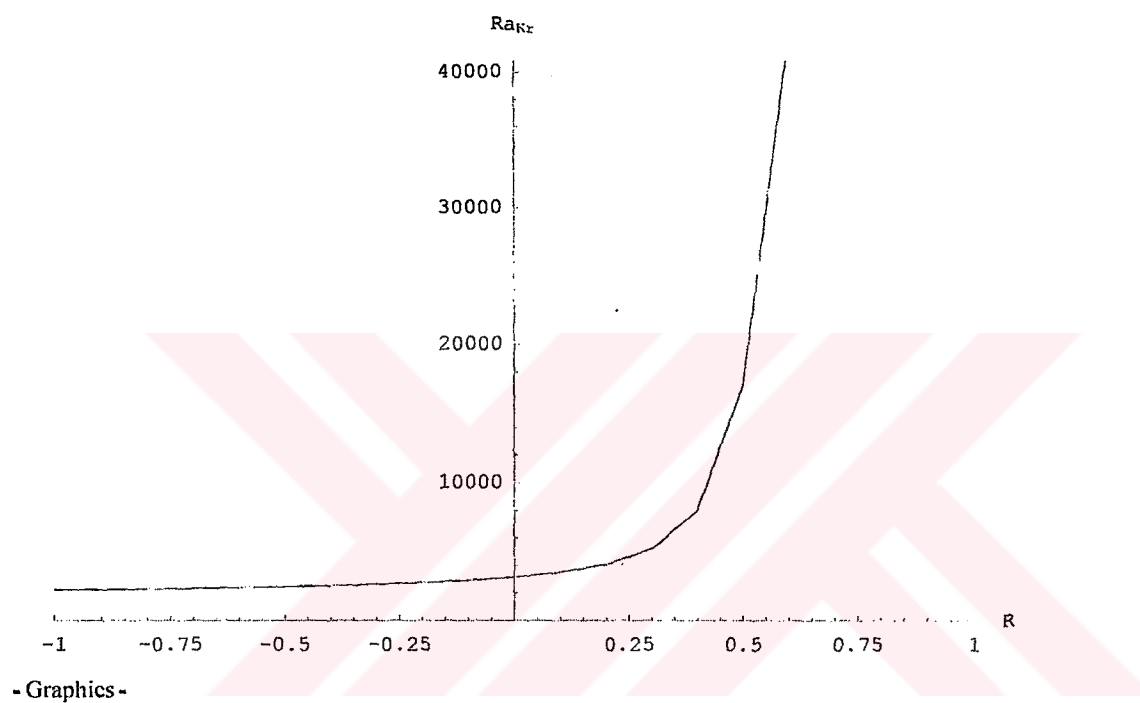
```
L2 = {-∞, -100, -50, -20, -10, -8, -6, -4, -2, -1,
  -0.8, -0.6, -0.4, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0}
```

```
{-∞, -100, -50, -20, -10, -8, -6, -4, -2, -1, -0.8,
  -0.6, -0.4, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0}
```

L3 = Transpose[AppendColumns[{L2}, {L1}]]

$\{(-\infty, 1706.49), (-100, 1714.08), (-50, 1721.6), (-20, 1743.68), (-10, 1779.02), (-8, 1796.03),$
 $\{-6, 1823.48\}, \{-4, 1875.18\}, \{-2, 2008.8\}, \{-1, 2207.22\}, \{-0.8, 2282.94\}, \{-0.6, 2385.69\},$
 $\{-0.4, 2533.14\}, \{-0.2, 2762.7\}, \{-0.1, 2933.29\}, \{0, 3170.11\}, \{0.1, 3521.47\}, \{0.2, 4094.87\}, \{0.3, 5222.69\},$
 $\{0.4, 8022.94\}, \{0.5, 17051.2\}, \{0.6, 42115.\}, \{0.7, 132634.\}, \{0.8, 668005.\}, \{0.9, 1.04026 \times 10^7\}, \{1., \infty\}\}$

**ListPlot[L3, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, PlotRange $\rightarrow \{-1, 1\}, \{0, \text{Automatic}\}$,
 PlotJoined $\rightarrow \text{True}$, AxesLabel $\rightarrow \{\text{"R"}, \text{"Ra}_{Kr}\}$]**



ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Söke’de doğan Ömer DOĞANCI, ilköğretim ve lise eğitimini Ankara’da tamamladı. 2001 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Makine Mühendisliği bölümünden lisans derecesinde mezun oldu. 2002 yılında Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim dalında başladığı yüksek lisans eğitimine devam etmektedir.

