

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÇÖZÜLEBİLİR KUANTUM SAÇILMA
SİSTEMLERİNİN GRUP METOTLARI
İLE İNCELENMESİ**

Nurşen SEÇKİN GÖRGÜN

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ

DOKTORA TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

Edirne-2002

Tez Yöneticisi: *Prof. Dr. Gül Mirza KERİMOV*

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

133 153

ÇÖZÜLEBİLİR KUANTUM SAÇILMA SİSTEMLERİNİN
GRUP METOTLARI İLE İNCELENMESİ

Nurşen SEÇKİN GÖRGÜN

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ
FİZİK BÖLÜMÜ
DOKTORA TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI
Edirne-2002

Tez Yöneticisi: *Prof. Dr. Gül Mirza KERİMOV*

133 153

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇÖZÜLEBİLİR KUANTUM SAÇILMA SİSTEMLERİNİN
GRUP METODLARI İLE İNCELENMESİ

Nurşen SEÇKİN GÖRGÜN

DOKTORA TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 06/09/2002 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından Kabul Edilmiştir.

Prof. Dr. Gül Mirza KERİMOV
Tez Yöneticisi

.....

Prof Dr. Askeri BARAN

.....

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

.....

ÖZET

ÇÖZÜLEBİLİR KUANTUM SAÇILMA SİSTEMLERİNİN GRUP METODLARI İLE İNCELENMESİ

Nurşen SEÇKİN GÖRGÜN

Doktora Tezi, Fizik Bölümü

Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Gül Mirza KERİMOV

Temmuz 2002, 90 sayfa

Bu tez çalışmasında bir-boyutlu kuantum saçılma sistemleri Kerimov [46] tarafından verilen cebirsel yöntem vasıtasıyla incelenmiştir. H Hamiltoniyeni ile $SO(2,1)$ grubunun Casimir operatörü arasında

$$[C - j(j+1)]_{\mathcal{H}_\mu} = Q(x)(H - E) \quad j = -\frac{1}{2} - i\rho \quad \mu = m, v, \lambda$$

ilişkisini sağlayan Hamiltonyenler araştırılmıştır [54], burada $\mathcal{H}_\mu$ $SO(2,1)$ grubunun temsil uzayının $SO(2,1) \supset SO(2)$, $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ veya $SO(2,1) \supset E(1)$ indirgemelerindeki bir-boyutlu alt uzaydır. ρ , m , v , λ parametreleri sırasıyla $SO(2,1)$, $SO(2)$, $SO(1,1)$ ve $E(1)$ 'in indirgenemez temsillerini belirtir. Ayrıca kullanılan ρ^2 , m^2 , v^2 , λ^2 parametreleri E enerjisinin lineer fonksiyonlarıdır. Buna göre $SO(2,1) \supset SO(2)$, $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ ve $SO(2,1) \supset E(1)$ indirgemelerine karşılık gelen potansiyel yapıları sınıflandırılmıştır. Bunlar sırasıyla hipergeometrik Natanzon, genelleştirilmiş Ginocchio ve konfluent hipergeometrik Natanzon potansiyel sınıflarıdır. Bu potansiyeller için sistemin saçılma matrisi ve dalga fonksiyonları grup yöntemiyle bulunmuştur.

ANAHTAR KELİMELELER: Saçılma teorisi, Cebirsel yaklaşım, Bir-boyutta saçılma.

ABSTRACT

A STUDY OF THE SOLVABLE QUANTUM SCATTERING SYSTEMS VIA THE GROUP METHODS

Nurşen SEÇKİN GÖRGÜN

Ph. D. in Physics

Supervisor: Gül Mirza KERİMOV

July 2002, 90 pages

In this thesis the one-dimensional quantum scattering systems is studied via algebraic method that is given by Kerimov [46]. The Hamiltonians which are proved the relation

$$[C - j(j+1)]_{\mathcal{H}_\mu} = Q(x)(H - E) \quad j = -\frac{1}{2} - i\rho \quad \mu = m, v, \lambda$$

between H Hamiltonian and C Casimir operator of $SO(2,1)$ group is investigated [54], here $\mathcal{H}_\mu$ is a one-dimensional subspace in the reductions $SO(2,1) \supset SO(2)$, $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ or $SO(2,1) \supset E(1)$ of representation of $SO(2,1)$ group. The parameters ρ , m , v and λ specify the irreducible representations of $SO(2,1)$, $SO(2)$, $SO(1,1)$ and $E(1)$, respectively. Furthermore, ρ^2 , m^2 , v^2 , λ^2 parameters that are used are linear functions of the energy E . Hence the potentials which correspond to reduction $SO(2,1) \supset SO(2)$, $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ and $SO(2,1) \supset E(1)$ are classified. Those are hypergeometric Natanzon, generalized Ginocchio and confluent hypergeometric Natanzon potentials classes, respectively. Scattering matrix and wave functions for these potentials are obtained using group method.

KEY WORDS: Scattering theory, Algebraic approach, One-dimensional scattering.

TEŞEKKÜR

Tez yöneticiliğimi üstlenerek bu tez çalışmasını yapmamı sağlayan, çalışmamın her aşamasında önerileri ve engin tecrübesi ile bana yol gösteren ve beni yönlendiren, planlı ve anlayarak çalışma zevkini veren çok değerli tez hocam sayın Prof. Dr. Gül Mirza Kerimov' a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Tez süresince Fizik Bölümünde ve T. Ü. Uluslararası Fizik ve Uygulamalı Matematik Araştırma Merkezi'nde bana her türlü kolaylığı sağlayan Bölüm Başkanım sayın Prof. Dr. Süleyman Askeri Baran'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Çalışmam esnasında benden yardımlarını esirgemeyen T. Ü. Fizik Bölümünün tüm öğretim üyesi ve elemanlarına teşekkürlerimi sunarım.

T. Ü. Uluslararası Fizik ve Uygulamalı Matematik Araştırma Merkezi'nde çalışmam esnasında benden yardımlarını ve desteğini esirgemeyen Uzman Dilek Kaya'ya ve diğer personele sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tezim süresince her türlü zorluğa katlanarak, bana her konuda anlayış gösterip, yardımcı olan eşim Ender Görgün'e ve benim bu günlere kadar gelmemde her türlü fedakarlığı yapıp, destek veren annem Şükran Seçkin ve babam Hulki Seçkin'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. $SO(2,1)$.GRUBU ve $SO(2,1)$.GRUBUNUN TEMSİLLERİ.....	9
2.1 $SO(2,1)$ Grubu ve İndirgenemez Temsilleri.....	10
2.2 Qasiregüler Temsiller.....	17
2.3 Qasiregüler Temsilinin Üreticileri.....	18
3. S-MATRİSİ ve INTERTWINING OPERATÖRLERİ.....	24
3.1 Saçılma Matrisi.....	27
3.2 Weyl-Özdeş Temel Temsillerinin Intertwining Operatörü.....	36
4. $SO(2,1)$.GRUBUNUN TEMEL SERİSİNE BAĞLI SAÇILMA SİSTEMLERİ.....	47
4.1. $SO(2,1) \supset SO(2)$ İndirgemesine Bağlı Potansiyeller.....	48
4.2. $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ İndirgemesine Bağlı Potansiyeller.....	61
4.3. $SO(2,1) \supset E(1)$ İndirgemesine Bağlı Potansiyeller.....	74
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	85
KAYNAKLAR.....	87
ÖZGEÇMİŞ.....	90

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Çarpışma olayları, fiziğin önemli bir araştırma alanıdır. Atomik ve moleküler çarpışma olaylarının incelenmesi sonucunda atomlar, moleküller veya elementer parçacıkların yapısı hakkında bilgiler edinilir. Elde edilen bu bilgiler gazların özellikleri, kimyasal reaksiyonlar teorisi ve astrofizikte çarpışma olayları gibi bir çok alanda büyük önem taşır. Çekirdek fiziği alanında çekirdek etkileşmelerine dair mevcut bilgilerimizin çoğu çekirdekler arası çarpışma olaylarının incelenmesi sonucudur. Bu incelemeler kuantum fiziğinde önemli bir deneysel teknik olan saçılma deneyi ile yapılmıştır. Örneğin, çekirdeğin Rutherford tarafından keşfi, ince metal tabakalardan saçılan α parçacıklarının incelenmesine dayanmıştır; atomik enerji düzeylerinin varlığı, Franck-Hertz deneyinde civa buharından saçılan elektronların incelenmesiyle tespit edilmiştir.

Kuantum fiziğinde karşılaşılan fiziksel sistemler genelde üç-boyutlu ve çok-parçacıklıdır. Bu sistemler için saçılma problemlerinin çok azı tam olarak çözülebilmektedir. Bundan ötürü, üç-boyutlu sistem hareketleri incelenirken, sistemin sahip olduğu simetriye uygun koordinat sistemi seçilerek sistemin Schrödinger denklemi bir boyuta indirgenir. Buna örnek olarak Hidrojen atomu problemi verilebilir [1, 2]. Bunun dışında, belirli koşullarda gerçekleşebilen kimyasal reaksiyonların modellenmesi bir-boyutlu potansiyeller vasıtasıyla mümkün olmuştur. Örneğin çekirdek fiziğinde Ginocchio potansiyeli kabuk modelinin çekirdek ortalama alanı olarak kullanılırken, Morse potansiyeli moleküler fizikte sık sık kullanılmaktadır. Böylece, bir-boyutlu tek-parçacıklı potansiyel modelleri sistemin dinamiğini açıklamak için iyi bir yaklaşıklık oluşturur. Bir-boyutlu sistem problemleri, klasik fizikte karşılığı olmayan, bir çok kuantum olayının en yalın haliyle görülmesi ve açıklanması bakımından da önemlidir. Örneğin saçılma deneylerinin kuantum mekaniksel olarak bir-boyutta incelenmesi tünelleme zamanları gibi bir çok gerçek fiziksel olayı açıklar bunun yanında bir-boyuta göre daha karmaşık olan üç-boyutlu sistemlerde çalışmayı kolaylaştırmak için gerekli olan kavrayışı kazandırır. Bunların dışında, bir-boyutlu modeller sadelikleri sebebiyle pedagoji ve araştırma vasıtası olarak da önem taşırlar.

Gereksiz bir çok zorluğa girmeksizin teorileri, yaklaşım metotlarını, yeni fikir ve hipotezleri test etmeyi kolaylaştırırlar. Bu nedenlerden dolayı, bir boyutlu modeller kuantum mekaniğinin temel problemlerini gözden geçirmede oldukça kullanışlıdır.

Saçılma deneylerinin analizi için kullanılan kuramsal araç saçılma teorisidir. Kuantum saçılma teorisi çarpışma olaylarını konu eder. Saçılma deneyi esnasında yapılan tüm ölçümler, çarpışma öncesindeki ve sonrasındaki parçacıklar üzerinde yapılır. Deney sonuçları, tesir kesitleri denilen nicelikler cinsinden ifade edilir. Kuantum saçılma teorisine göre: belirli bir S üniter operatörü vasıtasıyla çarpışma sonrasındaki dalga paketini çarpışma öncesindeki dalga paketine bağlamak mümkündür. Burada, S üniter operatörü saçılma operatörü olarak bilinir. Saçılma deneyi ile ilgili tüm bilgiler ve ayrıca, bağlı durumlar hakkındaki bilgiler de S saçılma operatöründe kapsanır. Böylece, deneysel olarak ölçülen saçılma tesir kesitleri, S operatörünün matris temsiliinin terimlerinde tamamen ifade edilmiş olur. Çarpışma türlerinden biri olan esnek saçılma problemi bir-boyut için, ilk kez ayrıntılı olarak Eberly tarafından, 1965 yılında [3] (üç-boyuttaki esnek saçılma problemine benzer tarzda) ele alınmıştır. Bu çalışma örnek alınarak esnek olmayan saçılma için gerekli yapı [4] de sunulmuştur. Bir-boyutlu saçılma problemi kısmi dalga analiziyle [3, 5] de, S matrisinin terimleri kullanılarak [5-8] de, integral denklemleri ele alınarak [9] da incelenmiştir. Çarpışma olaylarında belirlenebilecek zamana bağlı nicelikler de [10, 11] de konu edilmiştir. Ayrıca bir-boyutta ters saçılma problemi [6-8] de Newton tarafından ayrıntılarıyla ele alınmıştır.

Kuantum mekaniğinin başlangıcından bu yana grup teoriksel yöntemler kuantum teorisinde oldukça önemli rol oynamıştır. Bu yöntemler yardımıyla yeni hareket denklemlerinin türetilmesi ve bu denklemlerin çözümleri için gerekli araçlar açıklanabilmiştir. Böylece, verilen bir kuantum sisteminin enerji spektrumunun tamamen cebirsel olarak hesaplanması mümkün olmuştur. Cebirsel metotlar ilk kez yeni matris mekaniği genel durumunda ortaya çıkmıştır. Hidrojen atomunun 1926 yılında Pauli tarafından yapılan cebirsel yaklaşımı [12, 62, 63] ve Schrödinger'e göre diferansiyel denklem yaklaşımı hemen hemen aynı zamanda ortaya çıkmıştır. Ama o zaman için fizikçilerin daha çok faydalanabileceği diferansiyel denklem yaklaşımı ve mikroskobik dünyadaki simetri kavramlarının önemi taktir görmemiştir. Bu sebeple, Hidrojen atomunun enerji spektrumunun belirlenmesi için gerekli olan cebirsel yaklaşım büyük ölçüde unutulmuştur. Pauli'nin [12] deki çalışmasında Hidrojen atomu, açısal momentum ve Runge-Lenz operatörleri cinsinden üretilen cebre dayanarak

incelenmiştir. Üretilen bu cebir $SO(4)$ dinamik invaryans grubunun (dinamik dejenere grup da denir) $so(4)$ cebrine izomorfiktir. $so(4)$ cebrinin incelenmesiyle Hidrojen atomunun bağlı durum spektrumunu belirlenebilmiştir (cebirsal çözümün basitleştirilmesinde [13, 14, 62, 63] ün de katkısı büyüktür). Bu problemde sistemin Hamiltonyen operatörü $so(4)$ dinamik invaryans cebri (dinamik dejenere cebri)nin ikinci-dereceden Casimir operatörü cinsinden $H = \alpha/(C-1)$ ile ifade edilmiştir. Pauli'nin çalışmasından bu yana dinamik invaryans gruplar bir çok kuantum mekaniksel sistem için kullanılmıştır. Bu tür sistemlerin H Hamiltonyen operatörü (veya kütle operatörleri) G simetri grubunun C Casimir operatörü cinsinden

$$H = f(C) \quad (1.1)$$

ilişkisiyle ifade edilir.

Fiziksel model sisteminin tüm spektrumunu tarif eden grup, ilk kez 1959 da [15, 62] nükleer fizikte ortaya çıkmasına rağmen, önemsenmemiştir. 1965 yılında [16, 62] parçacıklar ve alanlar fiziğinde Dinamik Gruplar metodu (DG) veya Spektrum-Üreten Cebirlerin (SGA) ortaya atılması, grup teoriksel yöntemlerin gelişimindeki önemli keşiflerden biri olmuştur [17-20]. Spektrum-Üreten Cebirler (SGA) sistemin dinamik invaryans cebri bilinmese bile sistemin enerji spektrumunu tamamen belirtir. Dinamik Gruplar ise bileşik kuantum mekaniksel sistemin asıl enerji veya kütle spektrumunu veren (genelde noncompact olan) gruplardır. Dinamik simetriler çoğunlukla elementer parçacık fiziği, nükleer ve moleküler fiziğin çeşitli alanlarında bağlı durumları tanımlamak için kullanılmışlardır. Bu konudaki dikkate değer örnekler şöyledir: Gell-Mann-Okubo kütle formülüne yol gösteren Gell-Mann-Ne'eman $SU(3)$, bunun parçacık fiziğinde Gürsey ve Radicati tarafından $SU(6)$ ya genelleştirilmesi; nükleer fizikte etkileşen bozon modelinin [21-23] dinamik simetrileri $U(5)$, $SU(3)$ ve $SO(6)$; Coulomb potansiyelinin simetrisi $SO(4)$ [12-14, 62] ve bunun atom fiziğinde iki-elektronlu atomlara genelleştirilmesi; moleküler fizikte vibron modelinin [24, 25] simetrileri $U(3)$ ve $SO(4)$ verilebilir. Bağlı durum problemlerine uygulanan dinamik simetriler, sınıflama şemaları ve kütle formüllerinin meydana getirilmesini sağlamıştır. Bu durum, incelenen problemin daha iyi anlaşılıp genelleştirilmesine yol göstermiştir. Örneğin elementer parçacık fiziğinde alçak-düzey hadronik spektrumunun dinamik simetrisi olarak $SU(3)$ 'ün keşfi, kuark modeli ve kuantum kromodinamiğinin tespit

edilmesine önderlik etmiştir. Benzer şekilde, alçak-düzey nükleer spektrumunun dinamik simetrisi olarak $U(6)$ 'nın keşfi de etkileşen bozon modelinin tespit edilmesine ve ilişki kurulan çiftlerin terimlerinde çekirdeğin özelliklerinin yorumlanmasını sağlamıştır. Dinamik grupların çekirdekte kollektif durumlarda, moleküllerin dönme-titreşim spekturumunun belirlenmesi problemlerinde kullanılmasıyla cebirsel metotlar bağlı durum dışındaki gözlenebilen spektrumlara genişletilebilmiştir.

Cebirsel yaklaşımın saçılma problemlerine uygulanışının ilk örneği 1967 yılında Zwanziger'in [26] yaptığı $SO(3,1)$ simetri gruplu Coulomb potansiyeli ile relativistik olmayan saçılma problemi çalışmasıdır. Bu çalışmada izlenen yol ne yazık ki diğer saçılma problemlerine genişletilememiştir. Cebirsel yaklaşım konusundaki bu hayal kırıklığını ortadan kaldıran ve 1980'lerden sonra bu konuya olan ilgiyi yeniden canlandıran önemli bilgiler Yale grubu (Alhassid ve arkadaşları) ve diğerlerinin [27-34] çalışmalarında bulunmuştur. Cebirsel yaklaşımı diğer saçılma sistemlerine (atom-atom saçılması, iki atomlu moleküllerin ayrışımı, nükleer reaksiyonlarının incelenmesi vd.) genişletmek için [28] de potansiyel cebri adını alan bir başka cebirsel yapı öne sürülmüştür. Potansiyel cebrine göre: bir-boyutlu sistemlerin Hamiltonyenleri

$$H = f(C)|_{\mathcal{H}} \quad (1.2)$$

ilişkisiyle $\mathcal{g}$ noncompact cebrinin C Casimir operatörüne bağlıdır. Burada $\mathcal{H}$ temsil uzayının bir-boyutlu alt uzaylarıdır. (Her zamanki gibi, H Hamiltonyeni C Casimir operatörüyle lineer ilişkilidir ve $\mathcal{H}$ compact jeneratörlerin öz alt uzaylarıdır). Bundan dolayı, potansiyel cebri farklı potansiyel şiddetli bir-boyutlu sistemler ailesinin sabit enerji durumlarını belirtir. Potansiyel cebri düşük enerjili ağır-iyon çarpışmalarında [37, 38], nükleer reaksiyonlarda [39], relativistik sistemlerde Dirac-Coulomb saçılma problemlerinin incelenmesinde [40] kullanılmıştır. Saçılma sistemlerindeki cebirsel yaklaşım konusundaki bir sonraki adım Frank ve Wolf [32] tarafından atılmıştır. Yaptıkları çalışmada Pöschl-Teller potansiyeli [41] için S -matrisini belirlemek amacıyla $so(2,1)$ potansiyel cebri kullanmışlardır ama yine de açıkça koordinat realizasyonu yapmışlardır.

Sonradan, Alhassid ve arkadaşları [34] Frank ve Wolf'un [33] fikirlerini izleyerek $so(2,1)$ cebriyle birleşen S matrisinin tamamen cebirsel tanımını vermişlerdir. Bu tanıma göre: saçılma sisteminin dinamiğini tanımlayan cebir ile sistemin asimptotik özelliklerini tanımlayan Öklityen cebri arasındaki ilişkinin

bilinmesi, prensip olarak S matrisinin has cebirsel hesabına imkan tanımıştır. Öklityen bağlantı olarak adlandırılan bu teknik, aslında [42] grup deformasyonları teorisinde kullanılır. Bu noktada söyleyebiliriz ki [28, 30, 32-34] de tanıtılan yaklaşım Lie cebirlerine bağlı integrallenebilir kuantum sistemleri için Olshanetsky-Perelomov [43, 44] yaklaşımına benzerdir. (Bu yaklaşımda sistemlerin Hamiltonyenleri Casimir operatörünün radyal kısmı cinsinden belirtilir). O nedenle, Öklityen bağlantı metodu prensipte (yüksek reel-ranklı) Lie cebirlerine bağlı çok-parçacık problemlerinde saçılma matrisinin cebirsel değerlendirme metodu olarak genişletilebilir. Ne yazık ki, grup deformasyonları teorisi henüz arzu edildiği kadar gelişmemiştir. Bu sebeple, Öklityen bağlantı yöntemi kullanılarak çok-cisim saçılma problemleri için S matrisini türetmek oldukça zordur.

Yukarıda ifade edilen cebirsel yöntemlerin dışında, çözülebilir bağlı durum problemlerinin cebirsel olarak incelenmesi için farklı bir başka yöntem de, 1972 yılında Ghirardi tarafından [45] sunulmuştur. Bu yönteme göre sistemin H Hamiltonyeni, $so(2,1)$ cebirinin C Casimir operatörüne

$$Q(H - E) = [C - j(j+1)]_{\mathcal{H}} \quad (1.3)$$

ile bağlıdır. Burada j $so(2,1)$ cebirinin kesikli (discrete) seri temsillerini tanımlar ve $\mathcal{H}$ kompakt jeneratörün öz alt uzayıdır. ($Q(x) = \text{sabit}$ olduğunda potansiyel grup yapılı modellere karşılık gelir.)

Saçılma problemlerinin cebirsel olarak hesaplanması yönünde güncel bir metot 1998 yılında Kerimov tarafından [46] sunulmuştur. Bu metot invaryans cebir tanımını doğrudan kullanarak saçılma matrislerinin tam olarak hesaplanabileceğini gösterir. Bu metoda göre: G dinamik grubuna sahip problemler için S saçılma matrisi, G dinamik invaryans grubunun Weyl-özdeş temel serileri temsilleri arasındaki

$$AdU^x(X) = dU^{\tilde{x}}(X)A \quad \text{tüm } X \in \mathfrak{g} \text{ için} \quad (1.4)$$

veya

$$AU^x(g) = U^{\tilde{x}}(g)A \quad \text{tüm } g \in G \text{ için} \quad (1.5)$$

bağıntısını sağlayan A intertwining operatörü ile ilişkilidir. Burada dU^x ve $dU^{\tilde{x}}$ $\mathfrak{g}$ cebirinin Weyl-özdeş temel seri temsilleri iken, U^x ve $U^{\tilde{x}}$ $\mathfrak{g}$ cebirine sahip G

grubunun karşılık gelen temsillerini belirtir. (1.4) ve (1.5) denklemleri A matrisinin bir sabit farkıyla hesaplanmasına imkan tanır. Bundan dolayı, prensip olarak (1.4) ve (1.5) bağıntıları yardımıyla Schrödinger denklemini veya dalga fonksiyonlarını yazmadan hatta uzay ve zaman kavramlarından hiç söz etmeden bile S matris hesabı yapılabilir.

Eğer göz önüne alınan sistemin H Hamiltonyeni, G dinamik grubunun C Casimir operatörü cinsinden $H = f(C)$ olarak ifade edilirse, saçılma matrisi $S = A$ olur. Bu durumda dinamik sistemin dalga fonksiyonları G grubunun temsil uzayını oluşturur. Bunun dışında, eğer bir-boyutlu sistemlerin H Hamiltonyenlerinin G grubunun C Casimir operatörü ile ilişkisi $H = f(C)|_{\mathcal{H}}$ ise sistemin saçılma matrisi A intertwining operatörünün $G \supset G_1 \supset G_2 \dots$ zincirine karşılık gelen bazdaki (diyagonal) matrisinin bir elemanı ile tanımlanır. Burada $\mathcal{H}$ temsil uzayının bir-boyutlu alt uzayıdır ve $G_1, G_2, \dots$ grupları G 'nin alt gruplarıdır. Bu durumda sistemin dalga fonksiyonu G 'nin temsiline $G \supset G_1 \supset G_2 \dots$ zincirine karşılık gelen bir baz vektörüyle tanımlanır. Bu durum, intertwining operatörünün diyagonal elemanları ile belirlenen saçılma matrisi için bir-boyutlu potansiyellerin sınıflanabileceği fikrini verir. Bu tam olarak Olshanetsky-Perelomov [43, 44], Ghirardi [45], Alhassid ve arkadaşlarının [27-34] cebirsel yaklaşımlarında ne olduğu ile aynıdır. Bu suretle, temsil teorisiyle sağlanan alt grup zincirlerinin sayısı kuantum sistemlerinin sınıf sayısı ile aynı olmak zorundadır. Böylece, G grubuna bağlı tüm bir-boyutlu sistemlerin sınıflanması problemi G grubunun tüm alt grup zincirinin sıralanmasıyla daha sistematik bir probleme indirgenebilecektir. Bunun dışında, semi-simple Lie cebirleriyle alakalı çok-parçacık sistemleri için saçılma matrislerinin yapısı üzerindeki uyulması zorunlu koşulu bulmak, hatta bu koşulu tamamen belirlemek [47] amacıyla semi-simple Lie grupları için intertwining operatörlerinin iyi-tanımlı teorisi [48-52] kullanılmıştır.

[53] deki çalışmada $SO(2,1)$ grubuna $H = f(C)|_{\mathcal{H}}$ ilişkisiyle bağlı saçılma problemleri ele alınmıştır. Saçılma problemlerinin etkileşme potansiyel yapıları açıkça bilinmeksizin, grup teorisi vasıtasıyla tamamen çözülebildiği gösterilmiştir. Ayrıca $SO(2,1) \supset SO(2)$, $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ ve $SO(2,1) \supset E(1)$ alt grup indirgemelerine karşılık olarak $SO(2,1)$ grubuna bağlı bir-boyutlu saçılma problemlerinin üç sınıfının olduğu gösterilmiştir. Böyle sistemler için S matrislerinin aşağıdaki yapıya sahip olduğu gösterilmiştir:

(i) Sınıf 1 ($SO(2,1) \supset SO(2)$ indirgemesine bağlı)

$$S_m = c(\rho) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\rho + m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\rho + m\right)} \quad (1.6)$$

(ii) Sınıf 2 ($SO(2,1) \supset SO(1,1)$ indirgemesine bağlı)

$$S_v = \begin{pmatrix} R_v & T_v \\ T_v & R_v \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

burada

$$R_v = c(\rho) \frac{1}{\pi} \cosh(\pi v) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\rho + iv\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\rho - iv\right)$$

$$T_v = -c(\rho) \frac{1}{\pi} \sinh(\pi v) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\rho + iv\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\rho - iv\right)$$

olarak tanımlanır.

(iii) Sınıf 3 ($SO(2,1) \supset E(1)$ indirgemesine bağlı)

$$S_\lambda = c(\rho) |\lambda|^{-2i\rho}, \quad (1.8)$$

burada $c(\rho)$ keyfi bir faz çarpanıdır; ρ , m , v ve λ parametreleri sırasıyla $SO(2,1)$, $SO(2)$, $SO(1,1)$ ve $E(1)$ in indirgenemez temsillerini belirtir.

Bu tez çalışmasındaki amacımız, Ghirardi'nin [45] fikirlerini izleyerek, Hamiltonyenleri ile $SO(2,1)$ grubunun C Casimir operatörü arasında

$$[C - j(j+1)]_{\mathcal{H}_\mu} = Q(x)(H - E), \quad j = -\frac{1}{2} - i\rho, \quad \mu = m, v, \lambda \quad (1.9)$$

ilişkisini koruyan sistemler için etkileşme potansiyel yapısının ne olduğunu araştırmaktır. Burada $\mathcal{H}_\mu$, $SO(2,1)$ grubunun temsil uzayının $SO(2,1) \supset SO(2)$, $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ veya $SO(2,1) \supset E(1)$ indirgemelerindeki bir-boyutlu alt uzayı; ρ , m , v ve λ parametreleri ise sırasıyla $SO(2,1)$, $SO(2)$, $SO(1,1)$ ve $E(1)$ grubunun indirgenemez temsillerini belirtir. Kullanılan ρ^2 , m^2 , v^2 ve λ^2 parametrelerinin tümü E enerjisinin lineer fonksiyonları olduğunda (1.9) cebirsel yapısına sahip

$SO(2,1) \supset SO(2)$, $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ ve $SO(2,1) \supset E(1)$ indirgemelerine karşılık gelen sistem problemlerinin çözümünün grup teorisi çatısı altında [54] mümkün olup olmadığını göstermektedir.

Bu amaç doğrultusunda yaptığımız tez çalışmamız aşağıdaki düzende sunulmaktadır:

Bölüm 2 de $SO(2,1)$ grubunu, cebirini ve saçılma problemiyle ilgileneceğimizden dolayı $SO(2,1)$ grubunun üniter indirgenemez temel seri temsillerini tanıttık. (1.9) bağıntısını sağlayan sistemlerin Hamiltonyenlerini bulmak amacıyla $SO(2,1)$ 'in quaziregüler temsiliinin tanımını yaptık ve quaziregüler temsiliinin üreticilerini verdik.

Bölüm 3 de bir-boyut için geleneksel saçılma matris yapısının tanımını verdik. $SO(2,1)$ grubunun Weyl-özdeş temel temsillerinin intertwining operatörünün hesabını [46, 47, 53] sunduk.

Bölüm 4 de $SO(2,1)$ grubunun farklı indirgemelerine karşılık gelen bir-boyutlu saçılma sistemlerinin V etkileşme potansiyel yapıları ve H Hamiltonyenlerinin hesaplamasını verdik. $SO(2,1)$ grubunun $SO(2,1) \supset SO(2)$ indirgemesine karşılık gelen potansiyellerin Natanzon hipergeometrik potansiyel sınıfına; $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ indirgemesine karşılık gelen potansiyellerin genelleştirilmiş Ginocchio potansiyeller ailesine; $SO(2,1) \supset E(1)$ indirgemesine karşılık gelen potansiyellerin ise Natanzon konfluent hipergeometrik potansiyel yapısına ait olduğunu gösterdik. Ayrıca bu üç indirgeme durumu için sistemin dalga fonksiyonlarını hesapladık.

Bölüm 5 de elde edilen bulguları, daha önceki çalışmalarda elde edilenlerin ışığında, tartıştık ve sonuçları sunduk.

BÖLÜM 2

SO(2,1) GRUBU ve SO(2,1) GRUBUNUN TEMSİLLERİ

Lie grupları ve bu gruplarla ilgili Lie cebirleri kuantum mekaniğinde temel rol oynarlar [55-57]. Bunların uygulanma alanları olarak: kuantum alan teorileri, elementer parçacık simetrileri ve korunum yasaları, özel fonksiyonlar teorisi, açısal momentum teorisi, konfigürasyon etkileşimi için üniter grup yaklaşımının geliştirilmesi ve $so(4,2)$ Lie cebri yardımıyla yüksek dereceli pertürbasyon teorisinin sistematik çalışması verilebilir. Kuantum mekaniğindeki çalışmalarda asıl ilgilenilen Lie cebirleridir. Lie cebirleri, çeşitli kuantum mekaniksel işlemcilerin matris elemanlarının sistematik çalışması için bir araç olarak kullanılırlar.

Biz de bu çalışmada $so(2,1)$ Lie cebirini kullanarak, bu cebirin temel serisine bağlı bir-boyutlu potansiyellerden saçılan tek parçacık problemiyle ilgileneceğiz. Bu sebeple öncelikle ilk kısımda $SO(2,1)$ grubu ve $so(2,1)$ Lie cebirini tanıtacağız [17, 55, 56, 58]. Daha sonra $so(2,1)$ cebirinin üniter indirgenemez temsillerini belirteceğiz. Bu temsiller belirlenirken Hermityen olan $so(2,1)$ 'in jeneratörlerine ihtiyaç duyulur. $so(2,1)$ 'in tüm üniter indirgenemez temsilleri sonsuz boyutludur [17]. Bu temsiller basit kuantum sistemlerinin uygulamalarının [55, 56] büyük çoğunluğunda yer almalarına rağmen diğer cebirlerin üniter indirgenemez temsilleri (örneğin $so(3)$) kadar iyi bilinmezler. Oysa ki $so(2,1)$ 'in üniter indirgenemez temsillerinin kuantum mekaniğindeki uygulamaları pedagojik yönden oldukça faydalıdır. Fiziksel sistemlerde $so(2,1)$ cebirinin realizasyonlarına örnek olarak: non-relativistik Coulomb problemi, üç-boyutlu harmonik osilatör, relativistik Schrödinger denklemi (Klein-Gordon denklemi), Coulomb potansiyelli Dirac denkleminin çeşitli yapıları [56] ve üç-boyutlu Morse potansiyeli için s-durumları [55] verilebilir.

$SO(2,1)$ grubu ile ilgili olan bu çalışmamızdaki amacımız Hamiltonyeni ile $SO(2,1)$ grubunun C Casimir operatörü arasında

$$[C - j(j+1)]_{\mathcal{H}_\mu} = Q(x)(H - E), \quad j = -\frac{1}{2} - i\rho, \quad \mu = m, v, \lambda \quad (1.9)$$

ilişkisini koruyan sistemler için etkileşme potansiyel yapısının ne olduğunu belirlemektir. Burada $\mathcal{H}_\mu$, $SO(2,1)$ grubunun temsil uzayının $SO(2,1) \supset SO(2)$, $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ veya $SO(2,1) \supset E(1)$ indirgemelerindeki bir-boyutlu alt uzayı; ρ , m , v ve λ parametreleri ise sırasıyla $SO(2,1)$, $SO(2)$, $SO(1,1)$ ve $E(1)$ 'in indirgenemez temsillerini belirtir. Böyle sistemler için zamandan-bağımsız enerji öz fonksiyonu Ψ için

$$Q(x)(H - E)\Psi = [C_\mu - j(j+1)]_{\mathcal{H}_\mu} \Psi$$

bağıntısı sağlanır, burada $C_\mu = C|_{\mathcal{H}_\mu}$ dır. Buradan gözüktüğü gibi

$$H\Psi = E\Psi \quad (2.1)$$

Schrödinger enerji özdeğer denklemi

$$Cf = j(j+1)f, \quad j = -\frac{1}{2} - i\rho$$

bağıntısının sağlanmasını gerektirir. Dolayısıyla (2.1) özdeğer denklemi $SO(2,1)$ grubunun temsil uzayının indirgenemezlik koşulundan başka bir şey değildir. Buna göre birinci kısımda söz konusu sistemler için Hamiltonyenleri bulmak amacıyla üniter indirgenemez temsillerden temel serisini içeren $SO(2,1)$ grubunun indirgenebilir temsillerine bakacağız. İkinci kısımda $SO(2,1)$ 'in quaziregüler temsillerini [58] ve üçüncü kısımda da bu temsillerin üreticilerini sunacağız.

2.1. $SO(2,1)$ Grubu ve İndirgenemez Temsilleri

$R^{2,1}$ ile gösterilen uzay

$$[\xi, \eta] = \xi_0 \eta_0 - \xi_1 \eta_1 - \xi_2 \eta_2 \quad (2.1.1)$$

bilineer forma sahip, üç-boyutlu, reel, lineer psödo-Öklityen uzay olsun [59, 60]. Bilineer forma sahip $R^{2,1}$ deki uzaklık aşağıdaki gibi tanımlanır

$$r^2(\xi, \eta) = [\xi - \eta, \xi - \eta]. \quad (2.1.2)$$

Biz O orijininin, uzaydaki noktalara olan uzaklığın değişmediği; uzay yöneliminin korunduğu ve $[\xi, \xi] > 0$ konisinin her iki yarısının da kendilerine dönüştüğü lineer dönüşümler ile ilgileneceğiz. Bu dönüşümler, $R^{2,1}$ uzayının orijin etrafındaki hiperbolik dönmelerini ifade eder. İki hiperbolik dönmenin çarpımının yine bir hiperbolik dönme vermesi ve bu dönmeler için ters dönüşümün tanımlı olmasından dolayı, hiperbolik dönmeler bir grup yapısı oluştururlar. Oluşan bu grup $SO(2,1)$ ile adlandırılır. $SO(2,1)$ grubu: üç boyutlu, reel, (2.1.1) ünimodüler yapısına sahip, $d\xi = d\xi_0 d\xi_1 d\xi_2$ Öklityen ölçeğini invaryant bırakan hiperbolik dönmelerin oluşturduğu matrisler grubu olarak tanımlanır. Bu gruba aynı zamanda, 2+1 Lorentz dönüşümleri grubu da denir [17].

$R^{2,1}$ uzayındaki $SO(2,1)$ grubunun sabit lineer dönüşümlerini $g(t)$ ile tanıtalım. Bu lineer dönüşümler her bir ξ vektörüne karşılık olarak yine aynı uzaydaki

$$\xi' = \xi g(t)$$

vektörünü meydana getirirler. $g(t)$ lineer dönüşümleri üç koordinat ekseninin her biri etrafındaki bir t açısıyla yapılan psödo-dönmeler vasıtasıyla aşağıdaki formülle

$$\xi'_i = \sum_{j=0}^2 \xi_j g_{ji}(t), \quad i = 0,1,2 \quad (2.1.3)$$

tanımlanır [61], burada $\|g_{ji}(t)\|$ $i, j = 0,1,2$ birim determinantlı 3 mertebeli ortogonal matristir. Bu dönüşümler (2.1.1) yapısını invaryant bırakır. $\{g_{ji}(t)\}$ ile tanıtılan $SO(2,1)$ 'in bir parametrelili alt grupları $\xi_i - \xi_j$, $i \neq j$ düzlemlerinde dönmeleri veya psödo-dönmeleri meydana getirir. $SO(2,1)$ 'in $R^{2,1}$ uzayına sağdan etki ettiğini düşünersek buna uygun olarak uzaydaki vektörleri $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ satır yapısında yazarız. 1-2 düzlemindeki dönmeyi

$$\xi'_0 = \xi_0$$

$$\xi'_1 = \xi_1 \cos t - \xi_2 \sin t \quad (2.1.4)$$

$$\xi'_2 = \xi_1 \sin t + \xi_2 \cos t$$

dönüşümü ifade eder ve bu dönüşüme karşılık gelen matris

$$g_o(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad (2.1.5)$$

yapısındadır. 1 eksenı boyunca has Lorentz dönüşümü

$$\xi'_0 = \xi_0 \cosh t + \xi_1 \sinh t$$

$$\xi'_1 = \xi_0 \sinh t + \xi_1 \cosh t \quad (2.1.6)$$

$$\xi'_2 = \xi_2$$

olarak tanımlanır ve bu dönüşüme karşılık gelen matris aşağıdaki gibi verilir

$$g_1(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1.7)$$

2 eksenı boyunca has Lorentz dönüşümü ve bu dönüşüme karşılık gelen matris yapısı da, sırasıyla

$$\xi'_0 = \xi_0 \cosh t + \xi_2 \sinh t$$

$$\xi'_1 = \xi_1 \quad (2.1.8)$$

$$\xi'_2 = \xi_0 \sinh t + \xi_2 \cosh t$$

ve

$$g_2(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix} \quad (2.1.9)$$

dır.

Her $g_k(t)$, $k = 0,1,2$ matrisi

$$g_k(t) = e^{ta_k} = 1 + ta_k + \frac{t^2}{2!}a_k^2 + \frac{t^3}{3!}a_k^3 + \dots \quad (2.1.10)$$

formülüyle a_k sonsuz küçük matrisleri cinsinden ifade edilebilir, burada

$$a_k \equiv \left. \frac{d}{dt} g_k(t) \right|_{t=0}, \quad k = 0,1,2 \quad (2.1.11)$$

dır. Buna göre a_0 1-2 düzlemindeki g dönmesine, a_1 1 eksen boyunca has Lorentz dönüşümüne ve a_2 ise 2 eksen boyunca has Lorentz dönüşümüne karşılık gelir. Bu sonsuz küçük matrisler (2.1.11) denkleminde göre aşağıdaki formda tanımlanır

$$a_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.12)$$

(2.1.12) de verilen a_k sonsuz küçük matrisleri $SO(2,1)$ grubunun $so(2,1)$ Lie cebirinin bazlarını oluşturur. Bu bazlar aşağıdaki komütasyon bağıntılarını sağlar

$$[a_1, a_2] = a_0, \quad [a_2, a_0] = -a_1, \quad [a_0, a_1] = -a_2 \quad (2.1.13)$$

ve ayrıca $so(2,1)$ 'in ikinci dereceden Casimir operatörü

$$C = (a_0)^2 - (a_1)^2 - (a_2)^2 \quad (2.1.14)$$

ile aralarındaki

$$[C, a_0] = [C, a_1] = [C, a_2] = 0 \quad (2.1.15)$$

ilişki korunur.

a_k , $k = 0,1,2$ bazları vasıtasıyla üretilen $SO(2,1)$ grubunun bir parametreye sahip üç alt grubu vardır. Bu alt grupların ilki: $SO(2,1)$ 'in a_0 baz vektörünü invaryant bırakan ve $SO(2)$ grubuna isomorfik olan alt gruptur. Bu alt grup iki boyutlu Öklityen uzaydaki (E_2) dönmelerden meydana gelir ve $SO(2,1)$ 'in en büyük kompakt alt grubunu oluşturur. $SO(2)$ grubunun elemanları aşağıdaki matris yapısına sahiptir (2.1.5) ile verilen

$$g_o(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

İkinci alt grup: $SO(2,1)$ 'in a_1 baz vektörünün invaryant kaldığı ve $SO(1,1)$ grubuna isomorfik olan alt gruptur. $SO(1,1)$ grubu iki boyutlu uzayda hiperbolik dönmelerden meydana gelir. Bu grubun elemanları da (2.1.7) ile verilen

$$g_1(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

matris formundadır. $SO(1,1)$ 'in her bir üniter indirgenemez temsili $SO(2,1)$ 'in üniter indirgenemez temsiline temel serisinde iki kat dejeneredir.

Üçüncü alt grup ise $SO(2,1)$ 'in $a_o - a_2$ baz vektörünü invaryant bırakan ve $E(1)$ grubuna isomorfik olan alt gruptur. $E(1)$ grubu bir-boyutlu Öklityen uzaydaki ötelemelerden meydana gelir. Bu grubun elemanlarının matris yapısı aşağıda açıkça verilmektedir. $n = a_o - a_2$ olmak üzere n baz vektörü (2.1.12) den yararlanılarak

$$n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. (2.1.10) denklemini göz önüne alındığında

$$n(t) = e^n = 1 + tn + \frac{t^2}{2!}n^2 + \frac{t^3}{3!}n^3 + \dots$$

veya

$$n(t) = e^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & t \\ t & -t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2/2 & -t^2/2 & 0 \\ t^2/2 & -t^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eşitliğinden $E(1)$ grubunun elemanları için

$$n(t) = \begin{pmatrix} 1+t^2/2 & -t^2/2 & t \\ t^2/2 & 1-t^2/2 & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.16)$$

matris yapısı bulunur.

$SO(2,1) \approx SU(1,1)$ grubunun üniter indirgenemez temsilleri üç tür seri yapısında ifade edilir. Bunlar: temel (principal), bütünleyici (supplementary) ve ayrık (discrete) serileridir [62, 63]. İyi bilindiği gibi saçılma durumlarını yalnızca $SO(2,1)$ grubunun temel serisi tanımlar. Bir-boyutlu potansiyellerden saçılan bir-parçacık problemiyle ilgilendiğimizden dolayı, uygun üniter temsiller temel serisi olacaktır. Bu sebeple yaptığımız çalışmayı temel seri temsillerine kısıtlayacağız.

Şimdi $SO(2,1)$ 'in temel serisini daha ayrıntılı olarak sunalım. $SO(2,1)$ 'in temel serisi $\chi = (\rho, \varepsilon)$ ikilisiyle nitelendirilir. Burada $0 \leq \rho < \infty$ iken ε , 0 veya $\frac{1}{2}$ ye eşittir. $\chi = (\rho, \varepsilon)$ ve $\tilde{\chi} = (-\rho, \varepsilon)$ niteleyicileri ile belirtilen temsiller Weyl-özdeştir. Temel serisiyle birleşen $SO(2,1)$ 'in Lie cebri temsil operatörleri J_k^x , $k = 0,1,2$ ile tanımlanır. Burada J_o^x (2.1.5) ile verilen 1-2 düzlemindeki dönmelerin yerini tutan jeneratördür. J_1^x ve J_2^x ise, sırasıyla (2.1.7) ve (2.1.9) ile verilen 1 ve 2 eksenleri boyunca has Lorentz dönüşümlerinin yerini tutan jeneratörlerdir. J_k^x , $k = 0,1,2$ operatörleri Hermityen operatörlerdir, yani

$$(J_k^x)^\dagger = [(J_k^x)^*]^t = J_k^x$$

dır ve

$$[J_1^x, J_2^x] = -iJ_o^x, \quad [J_2^x, J_o^x] = iJ_1^x, \quad [J_o^x, J_1^x] = iJ_2^x \quad (2.1.17)$$

komütasyon bağıntılarını sağlarlar. Burada J_o^x operatörü eliptiktir, J_1^x ve J_2^x operatörleri ise hiperboliktir. Casimir operatörü

$$C = (J_o^x)^2 - (J_1^x)^2 - (J_2^x)^2 \quad (2.1.18)$$

tüm jeneratörlerle yer değiştirir ve $C = -\frac{1}{4} - \rho^2$ dır.

Çoğunlukla (2.1.17) ve (2.1.18) de belirtilen operatörlerin spektrum özellikleri incelenirken $J_{\pm}^x = iJ_1^x \mp J_2^x$ olarak belirlenen merdiven operatörleri kullanılır. Eğer J_o^x 'ın $|m\rangle$ özvektörleri baz olarak alınırsa, burada $m = \varepsilon + n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ile tanımlanır, J_+^x , J_-^x , J_o^x , $J_+^{\tilde{x}}$, $J_-^{\tilde{x}}$ ve $J_o^{\tilde{x}}$ operatörlerinin $|m\rangle$ baz vektörleri üzerine etkisi aşağıdaki gibidir

$$J_o^x |m\rangle = m |m\rangle \quad (2.1.19a)$$

$$J_+^x |m\rangle = \left(\frac{1}{2} - i\rho + m \right) |m+1\rangle \quad (2.1.19b)$$

$$J_-^x |m\rangle = \left(\frac{1}{2} - i\rho - m \right) |m-1\rangle \quad (2.1.19c)$$

ve

$$J_o^{\tilde{x}} |m\rangle = m |m\rangle \quad (2.1.20a)$$

$$J_+^{\tilde{x}} |m\rangle = \left(\frac{1}{2} + i\rho + m \right) |m+1\rangle \quad (2.1.20b)$$

$$J_-^{\tilde{x}} |m\rangle = \left(\frac{1}{2} + i\rho - m \right) |m-1\rangle. \quad (2.1.20c)$$

Burada J_+^x ve J_-^x işlemcileri m için, sırasıyla yükseltme ve alçaltma operatörleridir.

Daha önce de bahsettiğimiz gibi $SO(2,1)$ grubu $SO(2)$, $SO(1,1)$ ve $E(1)$ alt gruplarına sahiptir. Bu alt grupların matris elemanları sırasıyla, (2.1.5), (2.1.7) ve (2.1.17) bağıntılarıyla verilen matrislerden meydana gelir. Bu sebeple J_o^x , J_1^x ve $N^x = J_o^x - J_2^x$ operatör bazlarında, sırasıyla $SO(2)$, $SO(1,1)$ ve $E(1)$ 'deki $SO(2,1)$ grubunun temel serisiyle ilgileneceğiz. Burada J_o^x , J_1^x ve $N^x = J_o^x - J_2^x$ operatörleri diyagonaldır.

2.2. Quasiregüler Temsiller

Şimdi asıl amacımıza geri dönelim. (1.9) bağıntısını sağlayan Hamiltonyenleri kurmak istiyorduk. Daha öncede bahsettiğimiz gibi (1.9)'u sağlayan sistemlerin Schrödinger enerji özdeğer denklemi $SO(2,1)$ grubunun temsil uzayının indirgenemezlik koşulundan başka bir şey değildi. Bu sebeple, söz konusu sistemlerin Hamiltonyenlerini bulmak için $SO(2,1)$ grubunun üniter indirgenemez temsillerinden temel serisini içeren indirgenebilir temsillerini göz önüne alacağız. Örneğin, $SO(2)$ grubunun bir-boyutlu özdeş temsili tarafından üretilen $SO(2,1)$ 'in quasiregüler temsili düşünceğiz [58]. Quasiregüler temsil temel seri temsillerinin doğrudan integrali alınarak ayrışır. Bundan dolayı, temel seri temsilleri quasiregüler bir temsilin alt temsili gibi düşünülebilecektir.

$T(g)$ ile gösterilen $SO(2,1)$ 'in quasiregüler temsili $\Xi = SO(2,1)/SO(2)$ hiperboloidinin üst kolunda

$$\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 = 1, \quad \xi_0 > 0 \quad (2.2.1)$$

tanımlanan ve $d\mu$ quazi-invaryant hacim elemanına göre karesi integrallenebilen $f(\xi)$ fonksiyonlarının $L^2(\Xi, d\mu)$ Hilbert uzayında gerçekleştirilebilir. Bu temsil çoğunlukla, Ξ deki her bir $d\mu(\xi)$ quazi-invaryant ölçümlü $L^2(\Xi, d\mu)$ uzayını taşıyan quasiregüler temsilin kurulması için kullanılacaktır. Bu temsili kurarken $d\mu(\xi)$ quazi-invaryant hacim elemanını keyfi olarak seçebiliriz. $T(g)$ temsil işlemcileri ([58] de verilen) aşağıdaki gibi tanımlanır

$$T(g)f(\xi) = (d\mu(\xi g)/d\mu(\xi))^{1/2} f(\xi g) \quad (2.2.2)$$

ve ölçümün invaryanslığı

$$(f, f') = \int \overline{f(\xi)} f'(\xi) d\mu(\xi) \quad (2.2.3)$$

iç çarpımı vasıtasıyla verilir, burada $d\mu(\xi g)/d\mu(\xi)$ türevi Radon-Nikodym türevidir. Farklı ölçümlü temsiller üniter özdeşdir.

$SO(2,1)$ grubunun her bir elemanı için $d\mu(\xi)=d\xi$ durumu sağlanırsa $\Xi = SO(2,1)/SO(2)$ hiperboloidi invaryant ölçüme sahiptir. Burada $d\xi \equiv d\xi_1 d\xi_2 / \xi_0$ Ξ 'deki invaryant ölçümdür. $d\mu(\xi)=d\xi$ durumunda Radon-Nikodym türevi 1'e eşittir. Bu durumdaki quaziregüler temsil operatörünü ve dalga fonksiyonunu (2.2.2) ve (2.2.3) bağıntılarından farklı olması için $\check{T}$ ve $\check{f}$ ile gösterdik. Buna göre (2.2.2) temsil tanımı ve (2.2.3) ölçüm invaryanslığı aşağıdaki yapıda olur

$$\check{T}(g)\check{f}(\xi)=\check{f}(\xi g), \quad (2.2.4)$$

$$(\check{f}, \check{f}') = \int \overline{\check{f}(\xi)} \check{f}'(\xi) d\xi. \quad (2.2.5)$$

2.3. Quasiregüler Temsilinin Üreticileri

T temsili $SO(2,1)$ grubunun üniter indirgenemez temsillerinin temel ve ayrık serilerine ayrılabilir. Buna göre T temsili gibi $SO(2,1)$ grubunun temel serisi kurulabilir. Bu yapılırken temsil uzayının indirgenemez olması şart koşulur. Böyle bir koşul eğer tüm f fonksiyonları T 'nin $C = J_0^2 - J_1^2 - J_2^2$ Casimir operatörünün öz fonksiyonları ise

$$Cf = j(j+1)f, \quad j = -\frac{1}{2} - i\rho \quad (2.3.1)$$

ortaya çıkar, burada J_k (2.2.2) temsili için sonsuz küçük operatörleridir

$$J_k = i \frac{d}{dt} T(g_k(t)) \Big|_{t=0}, \quad k = 0, 1, 2. \quad (2.3.2)$$

Burada J_0 1-2 düzlemindeki (2.1.5)

$$g_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

dönmelerine karşılık gelen jeneratördür. J_1 ve J_2 ise sırasıyla, $g_1(t)$ dönüşümüyle 1 eksen ve $g_2(t)$ dönüşümüyle 2 eksen boyunca has Lorentz dönüşümlerini belirtir. Bu dönüşümler (2.1.7) ve (2.1.9) ile verilen aşağıdaki yapılardır

$$g_1(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_2(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix}.$$

$\tilde{T}$ temsil işlemcisinin sonsuz küçük operatörleri ve dolayısıyla Casimir operatörü de (2.3.2) den $\check{J}_0$, $\check{J}_1$, $\check{J}_2$ ve $\check{C}$ ile gösterilir. Şimdi $\tilde{T}(g)$ 'nin $\check{J}_0$, $\check{J}_1$, $\check{J}_2$ jeneratörlerini belirleyelim. $SO(2,1)$ 'in $\tilde{T}(g)$ quaziregüler temsili $\Xi = SO(2,1)/SO(2)$ hiperboloidinin üst kolunda

$$\xi_o^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 = 1, \quad \xi_o > 0$$

karesi integrallenebilir $\check{f}(\xi)$ fonksiyonlarının $L^2(\Xi, d\mu)$ Hilbert uzayında gerçekleşir. Burada ξ_o 'ı

$$\xi_o = \sqrt{1 + \xi_1^2 + \xi_2^2}$$

formunda yazarak ξ_1 ve ξ_2 bağımsız değişkenleri cinsinden tanımlayabiliriz. $L^2(\Xi, d\mu)$ Hilbert uzayında $SO(2,1)$ grubunun t açılı $g(t)$ lineer dönüşümleri her bir ξ vektörüne karşılık olarak yine aynı uzaydaki $\xi' = \xi g(t)$ vektörünü meydana getirir. Bu $g(t)$ lineer dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlanan üç koordinat ekseninin her biri etrafındaki bir t açısıyla yapılan psödo-dönmeler vasıtasıyla belirtilir

$$\xi' = \xi g(t)$$

veya

$$\xi'_i = \sum_{j=0}^2 \xi_j g_{ji}(t) \quad , \quad i = 0, 1, 2.$$

Burada $g_{ji}(t)$ $i, j = 0,1,2$ birim determinantlı 3 mertebeli ortogonal matristir. Dolayısıyla bu ifadeyi aşağıdaki yapıda yazarız

$$\begin{aligned}\xi_o' &= \xi_o g_{oo}(t) + \xi_1 g_{1o}(t) + \xi_2 g_{2o}(t) \\ \xi_1' &= \xi_o g_{o1}(t) + \xi_1 g_{11}(t) + \xi_2 g_{21}(t) \\ \xi_2' &= \xi_o g_{o2}(t) + \xi_1 g_{12}(t) + \xi_2 g_{22}(t).\end{aligned}\tag{2.3.3}$$

$g_k(t) \rightarrow \tilde{T}[g_k(t)]$ temsilinin temel sonsuz küçük operatörleri (2.3.2) den belirlenir. (2.3.2) den dolayı, $k = 0,1,2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\tilde{J}_k \tilde{f}(\xi) &= i \frac{d}{dt} \left\{ \tilde{T}[g_k(t)] \tilde{f}(\xi) \right\} \Big|_{t=0} \\ &= i \frac{d}{dt} \left[\tilde{f}(\xi') \right] \Big|_{t=0}\end{aligned}$$

buluruz, burada $\xi' = \xi g(t)$ dir. ξ_1 ve ξ_2 'nin bağımsız değişkenler olduğunu göz önüne alarak zincir kuralından

$$\tilde{J}_k \tilde{f}(\xi) = i \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1'} \tilde{f}(\xi') \Big|_{t=0} \frac{\partial \xi_1'}{\partial t} \Big|_{t=0} + \frac{\partial}{\partial \xi_2'} \tilde{f}(\xi') \Big|_{t=0} \frac{\partial \xi_2'}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) \tag{2.3.4}$$

yazarız. (2.3.3) bağıntısından

$$\frac{\partial \xi_1'}{\partial t} \Big|_{t=0} = \xi_o g'_{o1}(0) + \xi_1 g'_{11}(0) + \xi_2 g'_{21}(0) \tag{2.3.5a}$$

$$\frac{\partial \xi_2'}{\partial t} \Big|_{t=0} = \xi_o g'_{o2}(0) + \xi_1 g'_{12}(0) + \xi_2 g'_{22}(0) \tag{2.3.5b}$$

buluruz.

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i'} \tilde{f}(\xi') \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \tilde{f}(\xi) \tag{2.3.6}$$

eşitliğini kullanarak (2.3.5) ifadelerini (2.3.4) denkleminde yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned} \check{J}_k \check{f}(\xi) = & i \left\{ [\xi_o g'_{o1}(0) + \xi_1 g'_{11}(0) + \xi_2 g'_{21}(0)] \frac{\partial}{\partial \xi_1} \check{f}(\xi) \right. \\ & \left. + [\xi_o g'_{o2}(0) + \xi_1 g'_{12}(0) + \xi_2 g'_{22}(0)] \frac{\partial}{\partial \xi_2} \check{f}(\xi) \right\} \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \check{J}_k = & i \left\{ [\xi_o g'_{o1}(0) + \xi_1 g'_{11}(0) + \xi_2 g'_{21}(0)] \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right. \\ & \left. + [\xi_o g'_{o2}(0) + \xi_1 g'_{12}(0) + \xi_2 g'_{22}(0)] \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right\} \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

ifadesini buluruz.

Şimdi $\check{J}_o$, $\check{J}_1$ ve $\check{J}_2$ yi hesaplayalım. $\check{J}_o$ jeneratörü $g_o(t)$ dönmelerine karşılık gelir.

$$g_o(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

ve

$$g'_o(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.8)$$

göz önüne alarak (2.3.7) bağıntısından

$$\check{J}_o = i \left(\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) \quad (2.3.9)$$

buluruz. Benzer şekilde $g_1(t)$ dönüşümüyle verilen 1 eksen boyunca has Lorentz dönüşümlerine karşılık gelen $\check{J}_1$ jeneratörünü de

$$g_1(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$g'_1(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.10)$$

göz önüne alarak (2.3.7) den aşağıdaki gibi buluruz

$$\check{J}_1 = i\xi_o \frac{\partial}{\partial \xi_1}. \quad (2.3.11)$$

$\check{J}_2$ jeneratörü de $g_2(t)$ ile verilen 2 eksenli boyunca has Lorentz dönüşümlerine karşılık gelir.

$$g_2(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix}$$

dönüşümü ve

$$g'_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.12)$$

göz önüne alarak $\check{J}_2$ 'yi (2.3.7) den

$$\check{J}_2 = i\xi_o \frac{\partial}{\partial \xi_2} \quad (2.3.13)$$

olarak buluruz. Elde edilen $\check{J}_o$, $\check{J}_1$, $\check{J}_2$ jeneratörleri $SO(2,1)$ 'in quaziregüler temsilinin üreticileridir. $\check{J}_o$, $\check{J}_1$, $\check{J}_2$ jeneratörlerinden dolayı $\check{C}$ Casimir operatörü de

$$\check{C} = \check{J}_o^2 - \check{J}_1^2 - \check{J}_2^2$$

eşitliğinden bulunur. $\check{C}$ Casimir operatöründe (2.3.9), (2.3.11) ve (2.3.13) bağıntılarını yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned}\tilde{C} = & \left[i \left(\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) \right] \left[i \left(\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) \right] + \left(i \xi_o \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) \left(i \xi_o \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) \\ & + \left(i \xi_o \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) \left(i \xi_o \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right)\end{aligned}$$

buluruz. Operatör çarpımı yaparak

$$\tilde{C} = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \xi_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \xi_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + 2\xi_1 \xi_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + 2\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + 2\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}$$

veya

$$\tilde{C} = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right)^2 + \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}. \quad (2.3.14)$$

elde ederiz.

Yukarıda bahsettiğimiz gibi, farklı hacim elemanlı quaziregüler temsiller üniter özdeştir. Farklı hacim ölçülü temsiller matematiksel olarak eşdeğer olmalarına rağmen farklı fizik problemlerine bağlanabilirler. Bu sebeple, Bölüm 4 de $SO(2,1)$ 'in farklı alt grup indirgemelerine karşılık gelen sistemler için farklı hacim elemanlı quaziregüler temsilleri ele alacağız.

BÖLÜM 3

S-MATRİSİ ve INTERTWINING OPERATÖRLERİ

Çarpışma olayları, fizikte her zaman ilgi gören bir araştırma alanı olmuştur. Atomsal çarpışma olayları atom ve molekül fiziğinde temel öneme sahiptir ve lazer fiziği, plazma fiziği, astrofizik, kimya gibi alanlarda da önemli rol oynar. Bu olayların incelenmesi, kuantum fiziğinde önemli bir deneysel teknik olan, saçılma deneyi ile yapılır. Saçılma deneylerini en sade şekilde ya bir $V(r)$ potansiyel alanından A parçacığının saçılması yada bir B hedef parçacığından momentumu verilen bir A parçacığının saçılması olarak tarif edebiliriz. Saçılma deneylerinin analizinde kullanılan kuramsal araç kuantum saçılma teorisidir. Saçılma teorisi çarpışma olaylarının dışında bozunma olaylarının analizinde de kullanılır. Bozunma olaylarında çarpışma öncesi kısma önem verilmez, sistemin incelenmesi yalnızca etkileşme bölgesinde yapılır.

Çarpışma olayları analiz edilirken iki tür yaklaşım kullanılır. Bunlar zamana-bağlı ve zamandan-bağımsız yaklaşımlardır. Burada zamandan-bağımsız yaklaşım göz önüne alınacaktır. Bu yaklaşıma göre kuantum saçılma teorisindeki incelemeler zamandan-bağımsız Schrödinger denkleminin çözümlerine yoğunlaştırılır. Saçılma deneylerinin durağan kabul edilen durumlarda yapılması tesir kesitlerinin belirlenmesini sağlar. Ayrıca durağan saçılma durumları gerçek zamana bağlı çarpışmayı analiz etmek için bir temel teşkil eder. Saçılma deneyinde alınan tüm ölçümler çarpışma öncesindeki ve sonrasındaki parçacıklar üzerindedir. Deney sonuçları tesir kesitleri denilen nicelikler cinsinden ifade edilir. Kuantum saçılma teorisine göre bir S üniter operatörü vasıtasıyla çarpışma sonrasındaki dalga paketini çarpışma öncesindeki dalga paketine birleştirmek mümkündür. Burada S üniter operatörü saçılma operatörü olarak bilinir. Saçılma deneyi ile ilgili tüm bilgiler ve ayrıca bağlı durumlar hakkındaki bilgiler de S saçılma operatöründe kapsanır. Böylece deneysel olarak ölçülen saçılma tesir kesitleri S operatörünün matris terimlerinde tamamen ifade edilmiş olur.

Üç-boyutlu saçılma problemleri ile bir-boyutlu saçılma problemleri arasında karakteristik farklar vardır. Bu farklar şöyle belirtilebilir:

Üç-boyuttaki radyal saçılma problemleri r yarı eksenini, yani $0 < r < \infty$ aralığını, bir-boyuttaki saçılma problemleri ise x ekseninin tamamını, yani $-\infty < x < \infty$ aralığını içerir. Üç-boyuttaki saçılma problemlerinde saçılma yönü olarak bir çok yön seçilebilirken, bir-boyuttaki saçılma problemlerinde yalnızca iki yön seçilebilir ($0^\circ, 180^\circ$). Üç-boyutta S matrisi birim modüllü bir kompleks sayıdır, bir-boyutta ise S matrisi 2×2 'lik üniter matristir. Böyle olmasının asıl nedeni yarı eksen içeren durumdaki Schrödinger denkleminin spektrumunun basit olması, tüm eksen içeren durumdaki Schrödinger denkleminin spektrumunun ise 2 çarpanına sahip olmasıdır. Yarı eksen durumundaki Schrödinger denkleminin kabul edilebilir bir bağımsız çözümü varken, tüm eksen durumundaki Schrödinger denkleminin kabul edilebilir iki bağımsız çözümü vardır.

Kuantum saçılma sistemlerinin dinamik grup teorileriyle tanımlanmasından beri saçılma sisteminin S matrisi cebirsel olarak belirlenmeye çalışılmıştır. S matrisinin cebirsel hesabı için yapılan çalışmalarla [27-34] önemli bir gelişme elde edilmiştir. Bu çalışmalarda kullanılan Öklityen bağlantı adını alan cebirsel yöntem saçılma sisteminin S matrisini cebirsel olarak belirleyebilmiştir.

Saçılma problemlerinin cebirsel olarak hesaplanması yönünde güncel bir yöntem de Kerimov [46] tarafından sunulmuştur. Bu yöntem invaryans cebir tanımını doğrudan kullanarak saçılma matrislerinin tam olarak hesaplanabileceğini gösterir. Bu metoda göre G dinamik grubuna sahip problemler için S saçılma matrisi, G dinamik invaryans grubunun Weyl-özdeş temel seri temsilleri arasındaki

$$AdU^x(X) = dU^{\tilde{x}}(X)A \quad \text{tüm } X \in \mathfrak{g} \text{ için} \quad (1.4)$$

veya

$$AU^x(g) = U^{\tilde{x}}(g)A \quad \text{tüm } g \in G \text{ için} \quad (1.5)$$

bağıntısını sağlayan A intertwining operatörü ile ilişkilidir. Burada dU^x ve $dU^{\tilde{x}}$ $\mathfrak{g}$ cebirinin Weyl-özdeş temel seri temsilleri iken; U^x ve $U^{\tilde{x}}$ $\mathfrak{g}$ cebirine sahip G grubunun karşılık gelen temsillerini belirtir. (1.4) ve (1.5) denklemleri A matrisinin bir sabit farkıyla hesaplanmasına imkan tanır. Bundan dolayı, prensip olarak (1.4) ve (1.5) bağıntıları yardımıyla Schrödinger denklemini veya dalga fonksiyonlarını yazmadan hatta uzay ve zaman kavramlarından hiç söz etmeden bile S matris hesabı yapılabilir. Eğer göz önüne alınan sistemin H Hamiltonyeni G dinamik grubunun C Casimir

operatörü cinsinden $H = f(C)$ olarak ifade edilirse saçılma matrisi $S = A$ olur. Bu durumda dinamik sistemin dalga fonksiyonları G grubunun temsil uzayını oluşturur.

Bunun dışında, (1.4) veya (1.5) denklemlerinden görülür ki U temsil matrisi bir bazda diyagonal ise intertwining operatör matrisi de diyagonaldır. Bundan ötürü intertwining operatör matrisi indirgemeye meydana gelen bir-boyutlu alt uzayları karıştırmayacaktır. Eğer bir-boyutlu sistemlerin H Hamiltonyenlerinin G grubunun C Casimir operatörü ile ilişkisi $H = f(C)|_{\mathcal{H}}$ ise sistemin saçılma matrisi A intertwining operatörünün $G \supset G_1 \supset G_2 \dots$ zincirine karşılık gelen bazdaki (diyagonal) matrisinin bir elemanı ile tanımlanır. Burada $\mathcal{H}$, temsil uzayının bir-boyutlu alt uzayıdır ve $G_1, G_2, \dots$ grupları G 'nin alt gruplarıdır. Bu durumda sistemin dalga fonksiyonu G 'nin temsilinin $G \supset G_1 \supset G_2 \dots$ zincirine karşılık gelen bir baz vektörüyle tanımlanır. Bu durum, intertwining operatörünün diyagonal elemanları ile belirlenen saçılma matrisi için bir-boyutlu potansiyellerin sınıflanabileceği fikrini verir. Bu tam olarak Olshanetsky-Perelomov [43, 44], Ghirardi [45], Alhassid ve arkadaşlarının [27-34] cebirsel yaklaşımlarında ne olduğu ile aynıdır. Bu yüzden, temsil teorisiyle sağlanan alt grup zincirlerinin sayısı kuantum sistemlerinin sınıf sayısı ile aynı olmak zorundadır. Bu nedenle, G dinamik grubuna bağlı tüm bir-boyutlu sistemlerin sınıflanması problemi G grubunun tüm alt grup zincirinin belirlenmesiyle daha sistematik bir probleme indirgenebilecektir. Bunun dışında, semi-simple Lie cebirleriyle alakalı çok-parçacık sistemleri için saçılma matrislerinin yapısı üzerindeki uyulması zorunlu koşulu bulmak, hatta bu koşulu tamamen belirlemek [47] amacıyla semi-simple Lie grupları için intertwining operatörlerinin iyi-tanımlı teorisi [48] kullanılmıştır.

Bu bölümde saçılma matrisi konusunu gözden geçirirken öncelikle asimptotik ifadelerle işlem yapılan geleneksel saçılma matris hesabını kısaca hatırlatacağız. Daha sonra da $SO(2,1)$ grubunun Weyl-özdeş temel seri temsillerinin intertwining operatörlerinin hesabını vereceğiz.

3.1 Saçılma Matrisi

Bir-boyutta $V = V(x)$ potansiyelinin etkisi altında kalan m kütleli bir parçacığı düşünelim. Böyle bir sistem, potansiyel zamandan-bağımsız olduğu için korunumludur ve kararlı durumlara sahiptir. Kararlı durum için zamandan bağımsız Schrödinger denklemi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (3.1.1)$$

yapısındadır ve dalga fonksiyonunun genel yapısı

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar} \quad (3.1.2)$$

dır. $V(x)$ potansiyelinin her yerde reel olduğunu ve $|x| \rightarrow \infty$ iken $V(x)$ potansiyelinin yeterince hızlı bir şekilde $V(x) \rightarrow 0$ olduğunu farz edelim. $|x| \rightarrow \infty$ durumunda $\psi(x)$ serbest parçacık dalga fonksiyonu olup, serbest parçacık Schrödinger dalga denklemini

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) \quad (3.1.3)$$

sağlar. (3.1.3) denklemi ikinci dereceden diferansiyel denklem olduğundan $+x$ ve $-x$ yönlerinde ilerleyen dalgaları belirten iki çözüme sahiptir. Bu çözümleri kompleks üstel ifade kullanarak

$$\psi(x) = Ae^{\pm ikx}, \quad k = \sqrt{2mE}/\hbar \quad (3.1.4)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu durumda dalga fonksiyonunun (3.1.2) genel yapısı

$$\begin{aligned} \Psi(x,t) &= Ae^{\pm ikx} e^{-iEt/\hbar} \\ &= Ae^{-i(\mp kx + Et/\hbar)} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

olacaktır. (3.1.5) deki dalga fonksiyonunda $t > 0$ için $\psi(x) = Ae^{ikx}$ A genlikli sağa doğru giden dalgayı, $\psi(x) = Ae^{-ikx}$ ise A genlikli sola doğru giden dalgayı belirtir.

$|x| \rightarrow \infty$ iken asimptotik dalga fonksiyonu genel olarak

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \\ Fe^{ikx} + Ge^{-ikx} & x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (3.1.6)$$

yapısındadır. Asimptotik bölgede, yani $|x|$ in potansiyelin menzilinden daha büyük olduğu bölgede, $\psi(x)$ dalga fonksiyonunun gelen ve giden kısımları aşağıdaki gibidir

$$\psi_{gelen}(x) = A\theta(-x)e^{ikx} + G\theta(x)e^{-ikx} \quad (3.1.7)$$

$$\psi_{giden}(x) = F\theta(x)e^{ikx} + B\theta(-x)e^{-ikx}, \quad (3.1.8)$$

burada $x > 0$ ise $\theta(x)=1$ ve $x < 0$ ise $\theta(x)=0$ dır. Buradan

$x < 0$ için

$$\psi_{gelen}(x) = Ae^{ikx}$$

$$\psi_{giden}(x) = Be^{-ikx}$$

$x > 0$ için

$$\psi_{gelen}(x) = Ge^{-ikx}$$

$$\psi_{giden}(x) = Fe^{ikx}$$

olduğu belirlenir.

Saçılma teorisine göre belirli bir S operatörü vasıtasıyla ψ_{giden} dalga fonksiyonunu ψ_{gelen} dalga fonksiyonuyla aşağıdaki ifadeye göre birleştirmek mümkündür

$$\psi_{giden} = S\psi_{gelen} \quad (3.1.9)$$

S operatörünün matris temsili

$$S = \|S_{ij}\| = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, 2 \quad (3.1.10)$$

yapısındadır. Burada S operatörü saçılma operatörüdür ve bu operatöre karşılık gelen matris temsili de saçılma matrisi (veya S -matrisi) adını alır. $x \rightarrow +\infty$ durumu için

$V(x)$ potansiyeliyle etkileşme sonrasında giden (B ve F katsayılı) dalgaları etkileşme öncesinde gelen (A ve G katsayılı) dalgaların terimlerinde birleştiren (3.1.9) ifadesini açık olarak

$$\begin{pmatrix} B \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ G \end{pmatrix} \quad (3.1.11)$$

veya

$$B = S_{11}A + S_{12}G$$

$$F = S_{21}A + S_{22}G \quad (3.1.12)$$

yazabiliriz. Eğer $V(x) \rightarrow 0$ ise $B \rightarrow A$ ve $F \rightarrow G$ gider, böylece S birim matris olur.

Soldan saçılma özel durumunda dalga fonksiyonu

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \\ Fe^{ikx} & x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (3.1.13)$$

yapısındadır. $V(x)$ potansiyeliyle etkileşme sonrasında giden (B ve F katsayılı) dalgaları etkileşme öncesinde gelen (A katsayılı) dalgaların terimlerinde birleştiren matris gösterimi

$$\begin{pmatrix} B \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$$

dır. Buradan A 'nın terimlerinde B ve F katsayılarını ifade eden lineer bağıntılar aşağıdaki gibi olur

$$B = S_{11}A \quad (3.1.14)$$

$$F = S_{21}A.$$

Sağdan saçılma özel durumunda ise dalga fonksiyonu

$$\psi(x) = \begin{cases} Ge^{-ikx} + Fe^{ikx} & x \rightarrow +\infty \\ Be^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (3.1.15)$$

formunu alır. $V(x)$ potansiyeliyle etkileşme sonrasında giden (B ve F katsayılı) dalgaları etkileşme öncesinde gelen (G katsayılı) dalgaların terimlerinde birleştiren matris gösterimi de

$$\begin{pmatrix} B \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix}$$

yapısındadır. G 'nin terimlerinde B ve F katsayılarını ifade eden lineer denklemler

$$B = S_{12}G$$

(3.1.16)

$$F = S_{22}G$$

ile belirtilir.

Saçılma problemleri çözülürken sürekli kararlı durum fonksiyonları kullanılır. Sürekli kararlı durumların yorumlanmasında R ve T ile gösterilen, sırasıyla yansıma ve geçme katsayıları denilen iki büyüklük kullanılır. Bu büyüklüklere katsayılar denmesine rağmen, bunlar gerçekte olasılıktır. R (veya T) büyüklükleri örneğin soldan gelen E enerjili bir elektronun karşılaştığı $V(x)$ potansiyeli tarafından yansıtılma (veya geçirilme) olasılığının ne olacağını belirtir. R ve T katsayıları genelde yansıma veya geçme olasılık genlikleri ile verilir. Yansıma ve geçme katsayıları gelen, yansıyan ve geçen akılar cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanır

$$R = \frac{|\text{yansıyan akı}|}{|\text{gelen akı}|}$$

(3.1.17)

$$T = \frac{|\text{geçen akı}|}{|\text{gelen akı}|}.$$

Burada geçen akı: bir noktadan birim zamanda geçen parçacıkların ortalama sayısıdır. Yansıyan akı ve gelen akı tanımı da benzer şekildedir. Bir potansiyel bölgesine gelen her parçacığın ya yansması yada geçmesi gerektiğinden bu olasılıkların toplamı daima 1 olmalıdır yani

$$R + T = 1$$

(3.1.18)

ifadesi sağlanmalıdır.

Şimdi R ve T olasılık akı yoğunluklarını belirleyebilmek için $\psi(x)$ sürekli kararlı durum fonksiyonunun kısımlarını tanımlayalım.

Soldan saçılma özel durumunda dalga fonksiyonu

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \\ Fe^{ikx} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

ile verilmişti. Burada Ae^{ikx} A genlikli gelen dalgayı; Be^{-ikx} 'de B genlikli yansıyan dalgayı belirtir. Fe^{ikx} ise etkileşme sonrasındaki F genlikli geçen dalgayı belirtir. Bu özel durum için R yansıma olasılığı

$$R_{sol} = |S_{11}|^2 = \left| \frac{B}{A} \right|^2 \quad (3.1.19)$$

ve T geçme olasılığı

$$T_{sol} = |S_{21}|^2 = \left| \frac{F}{A} \right|^2 \quad (3.1.20)$$

olarak tanımlanır.

Sağdan saçılma özel durumunda ise dalga fonksiyonu

$$\psi(x) = \begin{cases} Ge^{-ikx} + Fe^{ikx} & x \rightarrow +\infty \\ Be^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

yapısındaydı. Burada Ge^{-ikx} terimi G genlikli gelen dalgayı, Fe^{ikx} terimi ise F genlikli yansıyan dalgayı belirtir. Be^{-ikx} terimi de B genlikli geçen dalgaya karşılık gelir. Bu özel durumda da R yansıma olasılığı

$$R_{sağ} = |S_{22}|^2 = \left| \frac{F}{G} \right|^2 \quad (3.1.21)$$

ve T geçme olasılığı

$$T_{sağ} = |S_{12}|^2 = \left| \frac{B}{G} \right|^2 \quad (3.1.22)$$

yapısında tanımlanır.

Bu özel durumlardan yararlanarak diyebiliriz ki (3.1.11) ifadesinde

$$\begin{pmatrix} A \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} A \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

özel durumları uygulandığında (3.1.11) denklemi aşağıdaki eşitliğe izin verir

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{sol} & t_{sağ} \\ t_{sol} & r_{sağ} \end{pmatrix}. \quad (3.1.23)$$

Burada

$$R_{sol} = |r_{sol}|^2, \quad R_{sağ} = |r_{sağ}|^2$$

$$T_{sol} = |t_{sol}|^2, \quad T_{sağ} = |t_{sağ}|^2$$

ilişkisi vardır.

S matrisi dört kompleks matris elemanı içerir. $S^\dagger = \tilde{S}^*$, S matrisinin Hermityen eşleniğini belirtmek üzere olasılığın korunumu

$$S^\dagger S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{12} & S_{22} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

veya

$$S^\dagger S = 1 \quad (3.1.24)$$

matris elemanlarındaki

$$|S_{11}| = |S_{22}| \text{ ve } |S_{12}| = |S_{21}| \quad (3.1.25a)$$

$$|S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 1 \quad (3.1.25b)$$

$$S_{11}S_{12}^* + S_{12}S_{22}^* = 0 \quad (3.1.25c)$$

durumları belirten S matrisinin üniterliğini invaryant bırakır. (3.1.25b) denklemi açıkça soldan veya sağdan saçılma durumları için

$$R + T = 1 \quad (3.1.26)$$

denkleminde eşittir. (3.1.25a) denklemi de aşağıdaki ifadeye eşdeğerdir

$$|R_{sol}| = |R_{sağ}| \quad (3.1.27)$$

$$|T_{sol}| = |T_{sağ}|.$$

Fakat $R_{sol}T_{sağ}^* + T_{sol}R_{sağ}^* = 0$ demek olan (3.1.25c) denklemi böyle açık değildir.

Potansiyel reel olduğunda zaman tersinirliği invaryant kalır. Bu demektir ki, zamandan-bağımsız Schrödinger denkleminin genel yapıdaki (3.1.7) çözümü dışında $\psi^*(x)$ ile gösterilen zaman tersinir dalga fonksiyonu da bir çözümdür. $\psi^*(x)$ çözümü (3.1.7) denkleminde $A \leftrightarrow B^*$, $G \leftrightarrow F^*$ koyulmasıyla

$$\psi^*(x) = \begin{cases} B^* e^{ikx} + B e^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \\ F e^{ikx} + F^* e^{-ikx} & x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (3.1.28)$$

elde edilebilir. $\psi^*(x)$ çözümüne göre giden dalgayı gelen dalga terimlerinde birleştiren matris gösterimi

$$\begin{pmatrix} B^* \\ F^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ F \end{pmatrix}$$

yapısındadır. Bu denklemden

$$S_{11} = S_{22}$$

yani,

$$R_{sol} = R_{sağ} \quad (3.1.29)$$

bulunur.

Eğer $V(x)$ potansiyeli orijin etrafında simetrik, yani $V(x) = V(-x)$ ise bu kez zamandan bağımsız Schrödinger denkleminin genel yapıdaki (3.1.7) çözümüne ilave olarak $\psi(-x)$ de bir çözüm olacaktır. $\psi(-x)$ çözümü (3.1.7) de x yerine $-x$ koyulmasıyla

$$\psi(-x) = \begin{cases} A e^{-ikx} + B e^{ikx} & x \rightarrow +\infty \\ F e^{-ikx} + G e^{ikx} & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (3.1.30)$$

bulunur. (3.1.7) ile (3.1.30) çözümlerini karşılaştırdığımızda parçacığın hareket doğrultusunun tersine döndüğü görürüz. Bu çözümde soldan saçılma özel durumu için Ge^{ikx} potansiyel bölgesine gelen dalgayı, Be^{ikx} geçen dalgayı ve Fe^{-ikx} ise yansıyan dalgayı belirtir. Sağdan saçılma özel durumu için ise Ae^{-ikx} potansiyel bölgesine gelen dalgayı, Fe^{-ikx} geçen dalgayı ve Be^{ikx} ise yansıyan dalgayı belirtir. Bu durumda $A \leftrightarrow G$, $B \leftrightarrow F$ değişimi yapılırsa matris gösterimiyle

$$\begin{pmatrix} F \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ A \end{pmatrix}$$

eşitliği bulunur. Bu ifade

$$\begin{pmatrix} B \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{22} & S_{21} \\ S_{12} & S_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ G \end{pmatrix}$$

olarak da yazılabilir. Buradan

$$S_{12} = S_{21}$$

yani,

$$T_{sol} = T_{sağ} \quad (3.1.31)$$

bulunur. Bundan ötürü simetri bağıntıları yansıma altında invaryanstır yani, değişmeden kalır. Tüm bahsedilenlerin ışığında üniter olan saçılma matrisinin genel yapısı

$$S = \begin{pmatrix} R & T \\ T & R \end{pmatrix} \quad (3.1.32)$$

olarak tanımlanır.

Saçılma deneylerinin sonuçları tesir kesitleri cinsinden verilir. Bir-boyutta olasılık akısı yerine tesir kesiti bakış açısının kullanımı pedagojik olarak çok avantajlıdır. Örneğin saçılma hakkında tüm boyutlar için aynı ifade tarzını kullanmak saçılma konusunu öğrenmeye çalışırken üç-boyutlu potansiyel saçılmasıyla ilgili küresel Bessel fonksiyonları, Legendre polinomları ve analitik malzemenin geri kalanlarıyla karşılaşmadan önce kuantum saçılma analizine aşına olunmasını sağlar. Bir-boyutlu saçılmada olasılık akısı ile tesir kesitleri arasında sıkı bir ilişki vardır. Bu ilişki şöyledir: bir-boyuttaki saçılma gelen dalgadaki parçacık akısıyla orantılıydı. Birim parçacık akısı olan dalgadaki bir parçacığın saçılma olasılığı yani, bir noktadan bir

parçacığın birim zamandaki geçişi saçılma tesir kesiti olarak bilinir ve $\sigma(\varepsilon)$, $\varepsilon = +, -$ ile gösterilir. Burada + ve - saçılmanın incelendiği yarı eksenin yönünü belirtir. Genellikle saçılma problemlerinde saçılma matrisini belirlemek için bulunmak istenen toplam saçılma olasılığı ile birlikte parçacıkların özel bir yöndeki saçılma olasılığıdır. Saçılma yönü olarak üç-boyutta özel olarak seçebileceğimiz bir çok yön varken, bir-boyutta yalnızca iki yön $(0^\circ, 180^\circ)$ vardır.

Saçılma tesir kesiti, parçacık akısına sahip soldan gelen bir dalga için

$$\sigma(\varepsilon) = |f(\varepsilon)|^2 \quad (3.1.33)$$

olarak tanımlanır. Burada $f(\varepsilon)$ niceliği pozitif veya negatif yarı ekseninde saçılan dalgaların göreceli genliklerini belirtir. Potansiyelle etkileştikten sonra pozitif yarı eksen boyunca ilerleyen dalganın saçılma olasılık genliği

$$f(+) = \frac{F}{A},$$

geriye doğru (negatif yarı eksen boyunca) yansıyan dalganın saçılma olasılık genliği olarak da

$$f(-) = \frac{B}{A}$$

alındığında toplam saçılma tesir kesiti

$$\sigma_{top.} = |f(+)|^2 + |f(-)|^2, \quad (3.1.34)$$

yani

$$\sigma_{top.} = \left| \frac{F}{A} \right|^2 + \left| \frac{B}{A} \right|^2$$

olur. Buradan (3.1.26) göz önüne alınarak toplam saçılma tesir kesiti

$$\sigma_{top.} = T + R = 1 \quad (3.1.32)$$

olarak ifade edilir.

3.2 Weyl-Özdeş Temel Temsillerin Intertwining Operatörü

$SO(2,1)$ 'in Weyl-özdeş temel temsillerinin intertwining operatörlerinin hesabına geçmezden önce Bölüm 2.1'de verilen $SO(2,1)$ 'in temel seri temsillerini kısaca hatırlayalım. $SO(2,1)$ 'in temel serisi $\chi = (\rho, \varepsilon)$ ikilisiyle nitelendirilir. Burada $0 \leq \rho < \infty$ iken ε , 0 veya $\frac{1}{2}$ ye eşittir. $\chi = (\rho, \varepsilon)$ ve $\tilde{\chi} = (-\rho, \varepsilon)$ niteleyicileri ile belirtilen temsiller Weyl-özdeştir. Bu özdeşlik A operatörleri ile veriliyorsa

$$AdU^\chi(X) = dU^{\tilde{\chi}}(X)A \quad \text{tüm } X \in \mathfrak{g} \text{ için} \quad (1.4)$$

veya

$$AU^\chi(g) = U^{\tilde{\chi}}(g)A \quad \text{tüm } g \in G \text{ için} \quad (1.5)$$

bağıntıları sağlanır. Burada dU^χ ve $dU^{\tilde{\chi}}$ $\mathfrak{g}$ cebirinin Weyl-özdeş temel seri temsilleri iken; U^χ ve $U^{\tilde{\chi}}$ $\mathfrak{g}$ cebirine sahip G grubunun karşılık gelen temsillerini belirtir. Burada A operatörü intertwining operatörüdür. (1.4) ve (1.5) bağıntıları o kadar kısıtlayıcıdır ki eğer temsiller verilmişse (1.4) ve (1.5) denklemleri A matrisinin bir sabit farkıyla hesaplanmasına imkan tanır.

A intertwining operatörünün matris elemanlarının hesabı iki farklı yolla yapılabilir.

Birinci yol: eğer genel saçılma bazlarında $so(2,1)$ cebirinin temel serisi biliniyorsa (1.4) denkleminin her iki yanı baz vektörlerine uygulanarak intertwining operatörünün matris elemanları için rekürans bağıntıları elde edilir. Rekürans bağıntıları çözülerek $so(2,1)$ cebirinin temsilini belirleyen parametrelerin fonksiyonu olarak intertwining operatörünün matrisinin açık yapısı bulunur [46, 53].

İkinci yol: (1.5) denkleminin kullanılmasıdır. Belirli fonksiyonların uygun Hilbert uzaylarında $so(2,1)$ cebirinin temel seri realizasyonu kullanılarak (1.5) denklemini vasıtasıyla intertwining operatörünün çekirdeği için fonksiyonel bağıntılar türetilir. Bu yaklaşım intertwining operatörünün matris elemanları için integral ifadesinin bulunmasına izin verir.

Birinci yolu örneklemek için (Bölüm 2.1’de ifade edildiği gibi) (1.4) bağıntısını göz önüne alalım. Baz vektörleri olarak $so(2,1)$ cebirinin a_o bazına karşılık gelen

$$J_o^x \equiv dU^x(a_o)$$

J_o^x baz vektörünün $|m\rangle$ özvektörlerini baz olarak alalım, burada $m = \varepsilon + n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ile tanımlanır. J_o^x , J_1^x , J_2^x ve C operatörlerinin spektrum özellikleri incelenirken

$$J_{\pm}^x = iJ_1^x \mp J_2^x$$

olarak belirlenen merdiven operatörleri kullanılır. J_+^x , J_-^x , J_o^x , $J_+^{\tilde{x}}$, $J_-^{\tilde{x}}$ ve $J_o^{\tilde{x}}$ operatörlerinin $|m\rangle$ baz vektörleri üzerine etkisi aşağıdaki gibidir

$$J_o^x |m\rangle = m |m\rangle \quad (2.1.19a)$$

$$J_+^x |m\rangle = \left(\frac{1}{2} - i\rho + m \right) |m+1\rangle \quad (2.1.19b)$$

$$J_-^x |m\rangle = \left(\frac{1}{2} - i\rho - m \right) |m-1\rangle \quad (2.1.19c)$$

ve

$$J_o^{\tilde{x}} |m\rangle = m |m\rangle \quad (2.1.20a)$$

$$J_+^{\tilde{x}} |m\rangle = \left(\frac{1}{2} + i\rho + m \right) |m+1\rangle \quad (2.1.20b)$$

$$J_-^{\tilde{x}} |m\rangle = \left(\frac{1}{2} + i\rho - m \right) |m-1\rangle. \quad (2.1.20c)$$

Burada J_+^x ve J_-^x işlemcileri m için, sırasıyla yükseltme ve alçaltma operatörleridir (kolaylık için $\varepsilon = 0$ olduğu temsilleri düşündük).

Bu yolla S matrisinin hesaplanması için (1.4) bağıntısını açıkça yazalım

$$SJ_o^x = J_o^{\tilde{x}} S \quad (3.2.1)$$

$$SJ_+^x = J_+^{\tilde{x}} S \quad (3.2.2)$$

$$SJ_-^z = J_-^z S. \quad (3.2.3)$$

Eğer (3.2.1) eşitliğinin her iki yanına $|m\rangle$ baz vektörü uygulanırsa

$$SJ_o^z|m\rangle = J_o^z S|m\rangle$$

veya

$$mS|m\rangle = J_o^z S|m\rangle \quad (3.2.4)$$

elde edilir. (3.2.4) den $S|m\rangle$ 'nin de J_o^z 'nin bir özvektörü olduğu görülür. $S|m\rangle$ özvektörü $|m\rangle$ özvektöründen

$$S|m\rangle = S_m|m\rangle \quad (3.2.5)$$

bir sabit kadar farklıdır. Bu nedenle, $|m\rangle$ bazında S operatör matrisi

$$\langle m'|S|m\rangle = S_m \delta_{m'm} \quad (3.2.6)$$

köşegendir. Bu matrisin köşegen elemanlarının değeri (3.2.2) veya (3.2.3) den elde edilir. Örneğin, (3.2.2) denkleminin her iki yanı $|m\rangle$ baz vektörüne uygulandığında

$$SJ_+^z|m\rangle = J_+^z S|m\rangle$$

veya

$$\left(\frac{1}{2} - i\rho + m\right) S|m+1\rangle = J_+^z S|m\rangle$$

bulunur. (3.2.5) bağıntısından dolayı

$$\left(\frac{1}{2} - i\rho + m\right) S_{m+1}|m+1\rangle = J_+^z S_m|m\rangle$$

veya J_+^z için (2.1.20b) bağıntısı göz önüne alınarak

$$\left(\frac{1}{2} - i\rho + m\right) S_{m+1}|m+1\rangle = S_m \left(\frac{1}{2} + i\rho + m\right) |m+1\rangle$$

bulunur. Bu eşitlikten

$$\left(\frac{1}{2} - i\rho + m\right) S_{m+1} = \left(\frac{1}{2} + i\rho + m\right) S_m$$

rekürans bağıntısı belirlenir. Bu eşitlik

$$S_{m+1} = \frac{\left(\frac{1}{2} + i\rho + m\right)}{\left(\frac{1}{2} - i\rho + m\right)} S_m$$

veya

$$S_m = \frac{\left(\frac{1}{2} + i\rho + m - 1\right)}{\left(\frac{1}{2} - i\rho + m - 1\right)} S_{m-1} \quad (3.2.7)$$

formunda ifade edilir. (3.2.7) rekürans formunun çözümü

$$S_m = c(\rho) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\rho + m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\rho + m\right)} \quad (3.2.8)$$

gibi yazılabilir. Burada $c(\rho)$ modül = 1'li bir sabittir. Enerjiye bağlı ρ parametresi, H Hamiltonyeni ve C Casimir operatörü arasındaki ilişkiyi belirler.

Şimdi de ikinci yolu örnekleyelim. Bu yol için (1.5) denklemi göz önüne alınacaktır. Bölüm 2.1'de bahsedildiği gibi $SO(2,1)$ grubu üç alt gruba sahiptir. Bunlar sırasıyla J_0 , J_1 ve $N = J_0 - J_2$ ile üretilen $SO(2)$, $SO(1,1)$ ve $E(1)$ gruplarıdır. [53] de $SO(2)$, $SO(1,1)$ ve $E(1)$ gruplarına göre $SO(2,1)$ grubunun indirgemelerine karşılık gelen $SO(2,1)$ grubunun bir-boyutlu saçılma problemlerinin üç sınıfı olduğu gösterilmişti. Şimdi böyle sistemler için $SO(2,1) \supset SO(2)$, $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ ve $SO(2,1) \supset E(1)$ indirgemelerine karşılık gelen bazlarda intertwining operatörünün matris yapısının hesabını sunalım [53]. Ama önce $SO(2,1)$ grubunun U^χ elemanter (veya üniter olmayan temel seri) temsillerini kısaca tanımlayalım.

U^χ temsillerini j , $j \in \mathbb{C}$ dereceli homojen, $\zeta_0^2 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2 = 0$, $\zeta_0 > 0$ iki boyutlu koninin üst kolunda $F(\zeta)$ sonsuz kez türevlenebilen fonksiyonların uzayında düşünelim [59]

$$F(a\zeta) = a^j F(\zeta), \quad a > 0. \quad (3.2.9)$$

$SO(2,1)$ grubunun U^z temsil operatörü

$$U^z(g)F(\zeta) = F(\zeta g) \quad (3.2.10)$$

ile tanımlanır. $SO(2,1)$ grubunun,

$$[\zeta, n] = \zeta_o n_o - \zeta_1 n_1 - \zeta_2 n_2$$

bilineer forma sahip, üç boyutlu, reel, lineer $R^{2,1}$ psödo-Öklityen uzayına sağdan etki ettiği düşünüldüğünde buna uygun olarak uzaydaki vektörler $\zeta = (\zeta_o, \zeta_1, \zeta_2)$ satır yapısında yazılır.

Genel olarak, koni üzerinde bir çok farklı koordinat sistemi seçilebilir. Ayrılabilir ortogonal koordinat sistemlerinin farklı seçimleri $SO(2,1)$ grubunun farklı alt grup indirgemelerine götürür. Şimdi $SO(2,1)$ grubunun $SO(2)$, $SO(1,1)$ ve $E(1)$ alt grup indirgemeleri için intertwining operatörünün matris yapısının hesabını verebiliriz [53].

$SO(2,1) \supset SO(2)$ indirgemesi:

Konideki küresel koordinatların tanıtılması $SO(2,1) \supset SO(2)$ grup indirgemesini belirtir. $SO(2,1) \supset SO(2)$ indirgemesi için uygun küresel koordinat sistemi

$$\zeta = \omega n, \quad n = (1, \cos \varphi, \sin \varphi) \quad (3.2.11)$$

ile verilir, burada $0 \leq \omega < \infty$, $0 < \varphi < 2\pi$ dir. Gerçekten, bu koordinatlarda (3.2.10) temsiliinin J_o sonsuz küçük operatörü

$$J_o = -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (3.2.12)$$

dir. (3.2.9) denkleminde izlendiği gibi, homojen fonksiyon $\zeta_o = 1$ düzlemiyle $\zeta_o^2 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2 = 0$, $\zeta_o > 0$ konisinin kesiti olan $n \in S^1$, $n = (1, \cos \varphi, \sin \varphi)$ çemberi

üzerindeki değerleri vasıtasıyla tanımlanır. Bu sebeple $SO(2,1)$ grubunun elemanter (üniter olmayan temel seri) temsilleri S^1 de $f(n) \equiv F(1, \cos \varphi, \sin \varphi)$ sonsuz kez türevlenebilen fonksiyonların C^∞ uzayında düşünülebilecektir. Bu temsilleri açıkça ifade edebiliriz. (3.2.10) bağıntısında (3.2.11)'deki $\zeta = \omega n$ eşitliğini kullanarak

$$U^\chi(g)f(\omega n) = f(\omega_g n_g)$$

veya

$$U^\chi(g)f(\omega n) = (\omega_g)^j f(n_g)$$

yazabiliriz. Ayrıca (3.2.10) bağıntısını da

$$U^\chi(g)f(\omega n) = (\omega)^j U^\chi(g)f(n)$$

formunda ifade edebiliriz. Son iki bağıntının eşitliğinden yukarıda sözü edilen temsiller

$$U^\chi(g)f(n) = \left(\frac{\omega_g}{\omega} \right)^j f(n_g) \quad (3.2.13)$$

olarak bulunur. Burada ω_g ve n_g , $\zeta_g = \zeta g$ 'nin (3.2.11) parametrizasyonundan

belirlenir. $j = -\frac{1}{2} + i\rho$ için (3.2.13) formülü

$$(f, f') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(\varphi)} f'(\varphi) d\varphi$$

iç çarpıma sahip $L^2(S^1)$ Hilbert uzayında $SO(2,1)$ 'in U^χ , $\chi = (\rho, 0)$ temel serisini tanımlar. Açık ki, χ ve $\tilde{\chi}$ (j ve $-1-j$) ile sınıflanan temsiller özdeşdir.

U^χ ve $U^{\tilde{\chi}}$ temsilleri arasındaki A intertwining operatörü çekirdek teoreminden dolayı

$$(Af)(n) = \int_{S^1} K(n, n') f(n') dn' \quad (3.2.14)$$

şeklinde gösterilir. Burada $dn \equiv d\varphi$ S^1 deki invaryant ölçümdür.

$$AU^\chi(g) = U^{\tilde{\chi}}(g)A$$

$$(AU^\chi(g)f)(n) = (U^{\tilde{\chi}}(g)Af)(n) \quad (3.2.16)$$

yazabiliriz. U^x ve $U^{\tilde{x}}$ tanımını göz önüne alırsak (bak (3.2.13) ifadesi) $K(n, n')$ çekirdeği için

$$K(n_g, n'_g) = \left(\frac{\omega_g}{\omega}\right)^{1+j} \left(\frac{\omega'_g}{\omega'}\right)^{1+j} K(n, n') \quad (3.2.17)$$

fonksiyonel bağıntıyı buluruz. (3.2.17) denklemini elde ederken

$$dn_g = \left(\frac{\omega_g}{\omega}\right)^{-1} dn$$

ilişkisini kullandık. (3.2.17) den dolayı K çekirdeği

$$K(n, n') = \kappa(j) [n, n']^{1-j} \quad (3.2.18)$$

ile verilir. Burada $[n, n'] = n_o n'_o - n_1 n'_1 - n_2 n'_2$, $\kappa(j)$ de j 'ye bağlı herhangi bir sabittir. (3.2.18) bağıntısının doğrulanması

$$[n_g, n'_g] = \left(\frac{\omega_g}{\omega}\right)^{-1} \left(\frac{\omega'_g}{\omega'}\right)^{-1} [n, n'] \quad (3.2.19)$$

ilişkisine dayanır. Son ifade iyi bilinen $[\zeta_g, \zeta'_g] = [\zeta, \zeta']$ eşitliğinin sonucudur, burada $[\cdot, \cdot]$ (2.1.1) ile tanımlanır ve $\zeta_g = \zeta g$, $\zeta'_g = \zeta' g$ dir.

$\kappa(j)$ sabitinin modülü

$$|\kappa|^2 = \frac{1}{2\pi} \rho \tanh \pi \rho \quad (3.2.20)$$

verilen normalizasyon bağıntısıyla belirlenir. Böylece

$$(Af)(\varphi) = \frac{2^j}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1+j)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-j\right)} c \int_0^{2\pi} d\varphi' [1 - \cos(\varphi - \varphi')]^{1-j} f(\varphi') \quad (3.2.21)$$

dir. Burada c faz çarpanıdır. Gösterim kolaylığı için $n = (1, \cos \varphi, \sin \varphi)$ deki f fonksiyonunun değeri $f(\varphi)$ ile tanıtılır.

$|m\rangle = e^{im\varphi}$ fonksiyonlarının $L^2(S^1)$ de $SO(2)$ grubunun bazları yapısında olduğu göz önüne alınarak

$$\langle m' | A | m \rangle = \delta_{mm'} S_m \quad (3.2.22)$$

elde edilir, burada S_m aşağıdaki yapıya sahiptir

$$S_m = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1+j)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-j\right)} c \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|^{-2-2j} e^{-im\varphi} d\varphi. \quad (3.2.23)$$

(3.2.23) deki integralin çözümü için [64] ün 3.829(1) formülü kullanılarak

$$S_m = c \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\rho + m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\rho + m\right)} \quad (3.2.24)$$

bulunur.

$SO(2,1) \supset SO(1,1)$ indirgemesi:

Konideki hiperbolik koordinatların tanıtılması $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ grup indirgemesini belirtir. $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ indirgemesi için uygun hiperbolik koordinat sistemi

$$\zeta = \omega(\cosh \alpha, \sinh \alpha, \tau) \quad (3.2.25)$$

ile verilir. Burada $0 \leq \omega < \infty$, $-\infty < \alpha < \infty$ ve

$$\tau = \begin{cases} 1 & \text{eğer } \zeta_2 > 0 \text{ ise} \\ -1 & \text{eğer } \zeta_2 < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dır. Bu koordinatlarda (3.2.10) temsiline J_1 sonsuz küçük operatörü

$$J_1 = i \frac{\partial}{\partial \alpha} \quad (3.2.26)$$

dir. (3.2.9) denkleminde izlendiği gibi, homojen fonksiyon $\zeta_2 = \pm 1$ düzlemleriyle $\zeta_0^2 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2 = 0$, $\zeta_0 > 0$ konisinin kesiti olan hiperboloidin üst kolu üzerindeki değerleri vasıtasıyla tanımlanır. Bu sebeple, (3.2.9) homojenlik durumuna uyan, $SO(2,1)$ grubunun elemanter temsilleri $(f_+(\alpha), f_-(\alpha))$, $f_\tau(\alpha) = F(\cosh \alpha, \sinh \alpha, \tau)$ fonksiyonlarının uzayında gerçekleştirilebilecektir. Bu realizasyonda $U^x(g)$ operatörleri

$$(U^x(g)f)_\tau(\alpha) = \left(\frac{\omega_g}{\omega}\right)^j f_{\tau'}(\alpha_g), \quad j = -\frac{1}{2} + i\rho \quad (3.2.27)$$

ile verilir, burada ω_g , α_g ve τ' $\zeta_g = \zeta g$ nin (3.2.25) parametrizasyonundan belirlenir ve iç çarpım

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_\tau(\alpha)} g_\tau(\alpha) d\alpha \quad (3.2.28)$$

yapısındadır. (3.2.21) ifadesini bulmak için kullanılanlara benzer düşüncelerle bu gerçekleştirilmedeki A operatörü

$$(Af)_\tau(\alpha) = \frac{2^j}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1+j)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-j\right)} c \sum_{\tau'=\pm 1} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha' [\cosh(\alpha - \alpha') - \tau\tau']^{1-j} f_{\tau'}(\alpha') \quad (3.2.29)$$

olarak yazılabilir. Burada c faz çarpanıdır.

$$|\mu+\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\mu\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\mu-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\mu\alpha} \end{pmatrix} \quad (3.2.30)$$

göz önüne alınarak

$$\langle \mu'\tau' | A | \mu\tau \rangle = \delta(\mu - \mu') S_{\tau\tau'} \quad (3.2.31)$$

elde edilir. Burada

$$S_{++} = S_{--} = \frac{2^j}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1+j)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-j\right)} c \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha (\cosh \alpha - 1)^{1-j} e^{-i\mu\alpha} \quad (3.2.32)$$

$$S_{-+} = S_{+-} = \frac{2^j}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1+j)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-j\right)} c \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha (\cosh \alpha + 1)^{-1-j} e^{-i\mu\alpha} \quad (3.2.33)$$

yapısındadır. $S_{\alpha\alpha'}$ için açık ifade [64] ün 3.542(1) formülünden yararlanılarak

$$S_{++} = S_{--} = \frac{c}{\pi} \cosh(\pi\mu) \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\rho + i\mu\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\rho - i\mu\right) \quad (3.2.34)$$

$$S_{-+} = S_{+-} = -i \frac{c}{\pi} \sinh(\pi\rho) \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\rho + i\mu\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\rho - i\mu\right) \quad (3.2.35)$$

bulunur.

$SO(2,1) \supset E(1)$ indirgemesi:

Konideki parabolik (horispherical) koordinatların tanıtılması $SO(2,1) \supset E(1)$ grup indirgemesini belirtir. $SO(2,1) \supset E(1)$ indirgemesi için uygun parabolik koordinat sistemi

$$\zeta = W \left(\frac{1+x^2}{2}, \frac{1-x^2}{2}, x \right) \quad (3.2.36)$$

ile verilir, burada $0 \leq W < \infty$, $-\infty < x < \infty$ dir. Bu koordinatlarda (3.2.10) temsiliinin N sonsuz küçük operatörü

$$N = -i \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.2.37)$$

dir. (3.2.9) denkleminde izlendiği gibi, homojen fonksiyon $\zeta_o + \zeta_1 = 1$ düzlemiyle $\zeta_o^2 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2 = 0$, $\zeta_o > 0$ konisinin kesitindeki değerleri vasıtasıyla tanımlanır. Bu sebeple $SO(2,1)$ grubunun temel serisi karesi integrallenebilir

$$f(x) \equiv F \left(\frac{1+x^2}{2}, \frac{1-x^2}{2}, x \right)$$

fonksiyonunun $L^2(R)$ Hilbert uzayında realize edilebilir. İç çarpım

$$(f, f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} f'(x) dx \quad (3.2.38)$$

yapısındadır. (3.2.9) ve (3.2.10) denklemlerinden izlendiği gibi temsil operatörleri

$$(U^z(g)f)(x) = \left(\frac{W_g}{W} \right)^j f(x_g) \quad (3.2.39)$$

yapısını alır. Burada W_g ve x_g , $\zeta_g = \zeta g$ nin (3.2.36) parametrizasyonundan belirlenir.

Bu gerçeekte A operatörü

$$(Af)(x) = \frac{2^j}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1+j)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-j\right)} \int_{-\infty}^{\infty} |x-x'|^{-2-2j} f(x') dx' \quad (3.2.40)$$

ile verilir. Böylece (3.2.40) ifadesiyle $E(1)$ bazlarında A 'nın matris elemanının integral temsili bulunabilir. $E(1)$ 'deki A 'nın matris elemanı $|\lambda\rangle$ bazlarında aşağıdaki gibi verilir

$$\langle \lambda' | A | \lambda \rangle = \delta(\lambda - \lambda') S_\lambda. \quad (3.2.41)$$

Burada

$$S_\lambda = \frac{2^j}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1+j)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-j\right)} c \int_{-\infty}^{\infty} dx |x|^{-2-2j} e^{-i\lambda x} \quad (3.2.42)$$

yapısındadır. İntegralin çözümü için [64] ün 3.761(9) bağıntısından yararlanılarak

$$S_\lambda = c \lambda^{2ip} \quad (3.2.43)$$

bulunur.

BÖLÜM 4

SO(2,1) GRUBUNUN TEMEL SERİSİNE BAĞLI SAÇILMA SİSTEMLERİ

Bu bölümde $SO(2,1)$ dinamik grubuna bağlı saçılma sistemlerini ele alarak H Hamiltonyenleri ile $SO(2,1)$ grubunun C Casimir operatörü arasında

$$[C - j(j+1)]_{\mathcal{H}_\mu} = Q(x)(H - E), \quad j = -\frac{1}{2} - i\rho \quad (1.9)$$

ilişkisini koruyan Hamiltonyenleri bulmaya çalışacağız. Böyle sistemler için Schrödinger enerji özdeğer denklemi

$$Cf = j(j+1)f, \quad j = -\frac{1}{2} - i\rho$$

bağıntısının sağlanmasını gerektirir. Dolayısıyla Schrödinger enerji özdeğer denklemi $SO(2,1)$ grubunun temsil uzayının indirgenemezlik koşulundan başka bir şey değildir. Bu yüzden (1.9) ilişkisini sağlayan Hamiltonyenleri bulurken temel serisinin üniter indirgenemez temsillerini kapsayan $SO(2,1)$ grubunun indirgenebilir temsiline ($SO(2,1)$ grubunun quasiergüler temsili) bakıldı. Böylece temel seri temsilleri $SO(2,1)$ grubunun quasiergüler temsilinin alt temsili gibi düşünüldü. Quasiergüler temsil $\Xi = SO(2,1)/SO(2)$ hiperboloidinin

$$\xi_o^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 = 1, \quad \xi_o > 0$$

üst kolunda karesi integrallenebilir fonksiyonların $L^2(\Xi, d\mu)$ Hilbert uzayında gerçekleşti. Farklı hacim elemanlı quasiergüler temsiller matematiksel olarak üniter özdeş olmalarına rağmen, farklı fiziksel problemlerle ilgili olabilirler. Bu nedenle farklı hacim elemanlı quasiergüler temsilleri düşündük. Burada $SO(2,1)$ grubunun temsil uzayının $SO(2,1) \supset SO(2)$, $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ ve $SO(2,1) \supset E(1)$ indirgemelerindeki

potansiyelleri ve dalga fonksiyonlarını belirleyeceğiz. Bunu yaparken birinci kısımda $SO(2,1)$ grubunun temsil uzayının $SO(2,1) \supset SO(2)$ indirgemesinde $d\mu$ hacim elemanını $SO(2)$ dönüşümleri altında, ikinci kısımda $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ indirgemesinde $d\mu$ quasi-invaryant hacim elemanını $g_1(t) \in SO(1,1)$ dönüşümleri altında, üçüncü kısımda ise $SO(2,1) \supset E(1)$ indirgemesinde $d\mu$ quasi-invaryant hacim elemanını $n(t) \in E(1)$ dönüşümleri altında invaryant olacak şekilde seçtik.

4.1. $SO(2,1) \supset SO(2)$ İndirgemesine Bağlı Potansiyeller Sınıfı

Bu indirgemeye uygun olarak $d\mu$ hacim elemanını $SO(2)$ dönüşümleri altında invaryant olacak şekilde seçeceğiz. Bundan ötürü hacim elemanını, genelliği bozmadan,

$$d\mu(\xi) = v(\xi_o) d\xi \quad (4.1.1)$$

alacağız. Burada

$$v(\xi_o) = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1/2}$$

yapısındadır ve $d\xi \in$ hiperboloidi üzerindeki invaryant hacim elemanıdır. Bu hacim elemanı yalnızca

$$v(\xi_o) \geq 0 \quad (4.1.2)$$

durumunda quasi-invaryant hacim elemanına karşılık gelir. Böyle tanımlı, T ile adlandırdığımız quaziregüler temsil tabii ki $\check{T}$ temsiline üniter olarak özdeştir. Bu özdeşlik W üniter tasviri ile aşağıdaki gibi verilir

$$W : f \rightarrow \check{f} = v^{1/2} f. \quad (4.1.3)$$

Gerçekten (2.2.2) ve (2.2.3) den görülür ki , T ile $\check{T}$ temsilleri üniter olarak özdeştir. Şimdi bunu gösterelim.

$$(f, f') = \int \overline{f(\xi)} f'(\xi) d\mu(\xi)$$

ifadesinde

$$T(g)f(\xi) = f(\xi g)$$

temsil tanımını kullanırsak

$$(T(g)f, T(g)f') = \int \overline{f(\xi g)} f'(\xi g) d\mu(\xi) = \int \overline{\check{f}(\xi g)} \check{f}'(\xi g) d\mu(\xi)$$

buluruz. Burada (4.1.3) tasvirini göz önüne aldığımızda

$$(T(g)f, T(g)f') = \int \overline{v^{1/2} f(\xi g)} v^{1/2} f'(\xi g) d\mu(\xi)$$

$$(T(g)f, T(g)f') = \int f[(\xi g)^{-1}] v^{-1/2} v^{1/2} f'[(\xi g)^{-1}] d\mu(\xi)$$

$$(T(g)f, T(g)f') = \int f[(\xi g)^{-1}] f'[(\xi g)^{-1}] d\mu(\xi)$$

$$(T(g)f, T(g)f') = \int \overline{\check{f}(\xi g)} \check{f}'(\xi g) d\mu(\xi)$$

$$(T(g)f, T(g)f') = \int \overline{T(g)f(\xi)} T(g)f'(\xi) d\mu(\xi)$$

elde ederiz. Buradan yine

$$(f, f') = \int \overline{f(\xi)} f'(\xi) d\mu(\xi)$$

buluruz. Böylece görünür ki T ile $\check{T}$ temsilleri üniter olarak özdeştir.

Quasiregüler temsilin J_1 , J_2 , J_o üreticileri ve C Casimir operatörü için

$$v^{-1/2}(\xi_o) \circ \check{J}_i \circ v^{1/2}(\xi_o) = J_i, \quad i = 0, 1, 2$$

$$v^{-1/2}(\xi_o) \circ \check{C} \circ v^{1/2}(\xi_o) = C$$

eşitliklerini ve $\check{J}_o$, $\check{J}_1$, $\check{J}_2$ ve $\check{C}$ nin sırasıyla (2.3.9), (2.3.11), (2.3.13) ve (2.3.14) denklemlerini kullanarak aşağıdaki ifadeleri açıkça buluruz.

$$J_o = v^{-1/2}(\xi_o) \circ \check{J}_o \circ v^{1/2}(\xi_o)$$

ifadesinde (2.3.9) bağıntısını kullanıp,

$$J_o = v^{-1/2}(\xi_o) \left(i\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - i\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) v^{1/2}(\xi_o)$$

operatör çarpımı yaptığımızda

$$J_o = i\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - i\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + i \frac{1}{2v} \left(\xi_2 \frac{\partial v}{\partial \xi_1} - \xi_1 \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \right) \quad (4.1.4a)$$

buluruz. Benzer şekilde J_1 için

$$J_1 = v^{-1/2}(\xi_o) \circ \check{J}_1 \circ v^{1/2}(\xi_o)$$

ifadesinde (2.3.11) eşitliğini kullanıp, operatör çarpımı yaptığımızda

$$J_1 = v^{-1/2}(\xi_o) \left(i\xi_o \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) v^{1/2}(\xi_o)$$

$$J_1 = i\xi_o \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{i\xi_o}{2v} \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \quad (4.1.4b)$$

elde ederiz. Yine aynı yolla J_2 için

$$J_2 = v^{-1/2}(\xi_o) \circ \check{J}_2 \circ v^{1/2}(\xi_o)$$

bağıntısında (2.3.13)'i kullandığımızda

$$J_2 = v^{-1/2}(\xi_o) \left(i\xi_o \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) v^{1/2}(\xi_o)$$

$$J_2 = i\xi_o \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{i\xi_o}{2v} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \quad (4.1.4c)$$

buluruz. C Casimir operatörü için de benzer yol izlenerek

$$C = v^{-1/2}(\xi_o) \circ \check{C} \circ v^{1/2}(\xi_o)$$

ifadesinde (2.3.14) bağıntısını kullandığımızda

$$C = v^{-1/2}(\xi_o) \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right)^2 + \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right] v^{1/2}(\xi_o)$$

ve operatör çarpımı yaptığımızda

$$\begin{aligned}
C = & \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right)^2 + \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\xi_o^2}{\xi_1 v} \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) \\
& + \frac{\xi_o^2 (\xi_o^2 - 1)}{4 \xi_1 v} \left[\frac{1}{\xi_2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \frac{1}{\xi_1 v} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi_1} \right)^2 - \frac{2(1 - 3\xi_o^2)}{\xi_o^2 (\xi_o^2 - 1)} \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \right]
\end{aligned} \quad (4.1.5)$$

elde ederiz.

ξ_1 ve ξ_2 değişkenlerini Ξ hiperboloidi üzerinde bağımsız değişkenler olarak seçtiğimizden dolayı (bak bölüm 2.3)

$$\frac{\partial v(\xi_o)}{\partial \xi_2} = \frac{\xi_2}{\xi_1} \frac{\partial v(\xi_o)}{\partial \xi_1} \quad (4.1.6)$$

simetrisinden yararlanarak (4.1.4) üreticilerini ve (4.1.5) Casimir operatörünü

$$J_o = i\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - i\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \quad (4.1.7a)$$

$$J_1 = i\xi_o \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{i\xi_o}{2v} \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \quad (4.1.7b)$$

$$J_2 = i\xi_o \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{i\xi_o \xi_2}{2\xi_1 v} \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \quad (4.1.7c)$$

ve

$$\begin{aligned}
C = & \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \left(\frac{\xi_o^2}{\xi_1 v} \frac{\partial v}{\partial \xi_1} + 1 + \Lambda \right) \Lambda + \frac{\xi_o^2 (\xi_o^2 - 1)}{4v} \\
& \times \left[\frac{1}{\xi_1 \xi_2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \frac{1}{\xi_1^2 v} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi_1} \right)^2 - \frac{2(1 - 3\xi_o^2)}{\xi_1 \xi_o^2 (\xi_o^2 - 1)} \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \right]
\end{aligned} \quad (4.1.8)$$

yapısında yeniden düzenleriz, burada

$$\Lambda = \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}$$

dır.

J_o jeneratörünü diyagonal seçmek istediğimizden dolayı, ξ_1 ve ξ_2 değişkenlerinden aşağıdaki gibi tanımlı yeni x ve φ değişkenlerine geçeriz

$$\begin{aligned}\xi_o &= \frac{1+z(x)}{1-z(x)}, \\ \xi_1 &= \frac{2\sqrt{z(x)}}{1-z(x)} \cos \varphi, \\ \xi_2 &= \frac{2\sqrt{z(x)}}{1-z(x)} \sin \varphi.\end{aligned}\tag{4.1.9}$$

Burada φ ve x sırasıyla, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq x < \infty$ aralığında değişir. $z(x)$ $[0,1]$ aralığında değer alan R^+ da türevlenebilen bir fonksiyondur. Yaptığımız değişken değişimi sonucunda ξ_1 ve ξ_2 'ye göre türev operatörleri aşağıdaki yapıya sahip olur,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi_1} &= \frac{(1-z)^2 \sqrt{z}}{z(1+z)} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} - \frac{(1-z)}{2\sqrt{z}} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} &= \frac{(1-z)^2 \sqrt{z}}{z(1+z)} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} - \frac{(1-z)}{2\sqrt{z}} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}.\end{aligned}$$

Böylece x ve φ değişkenlerine bağlı olarak (4.1.7) deki üreticiler

$$J_o = -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{4.1.10a}$$

$$J_1 = i \left[\frac{\sqrt{z}(1-z)}{z} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1+z}{2\sqrt{z}} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \tag{4.1.10b}$$

$$J_2 = i \left[\frac{\sqrt{z}(1-z)}{z} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1+z}{2\sqrt{z}} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]. \tag{4.1.10c}$$

yapısında olur. (2.3.9) bağıntısındaki $\check{J}_o$ jeneratöründe (4.1.9) daki değişken değişimi kullanıldığında $\check{J}_o$ ile J_o arasında

$$J_o = \check{J}_o = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

ilişkisi olduğu görülür. (4.1.8) deki Casimir operatörü de

$$\frac{\partial v}{\partial \xi_1} = \frac{(1-z)^2 \sqrt{z}}{\dot{z}(1+z)} \cos \varphi \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi_2} = \frac{(1-z)^2 \sqrt{z}}{\dot{z}(1+z)} \sin \varphi \frac{\partial v}{\partial x}$$

olduğu göz önüne alınarak

$$C = \frac{z(1-z)^2}{\dot{z}^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\dot{v}}{v} - \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} + \frac{\dot{z}}{z} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\dot{z}^2}{4z^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{2v} \left[\dot{v} - \frac{v^2}{2v} - \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} - \frac{\dot{z}}{z} \right) v \right] \right\} \quad (4.1.11)$$

yapısında bulunur. Burada (ve daha sonraki ifadelerde) üs olarak yazılan noktalar x 'e göre türevi ifade eder yani, $\dot{z} = \frac{dz}{dx}$, $\ddot{z} = \frac{d^2z}{dx^2}$, ... vs. dır. (4.1.11) denklemiyle verilen C Casimir operatöründeki birinci türevi içeren terimi yok etmek için

$$\frac{\dot{v}}{v} - \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} + \frac{\dot{z}}{z} = 0 \quad (4.1.12)$$

şartını koyarız. Bu denklemi çözdüğümüzde

$$v = \pm \dot{z} z^{-1}$$

buluruz. v 'nin (4.1.2) den dolayı pozitif olması gerektiğinden $\dot{z} > 0$ alırsak. Böylece

$$v = \dot{z} z^{-1} \quad (4.1.13)$$

olur. (4.1.13) denklemini (4.1.11) de yerine yazıp düzenleme yaptığımızda

$$C = \frac{z(1-z)^2}{\dot{z}^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right)^2 + \frac{\dot{z}^2}{4z^2} \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right] \quad (4.1.14)$$

elde ederiz. Böylece, $SO(2)$ bazlarında $SO(2,1)$ grubunun temel serisi C ve J_0 işlemcilerinin öz fonksiyonları tarafından gerilen Hilbert uzayında gerçekleştirilebilir

$$C f_m^{(1)} = \left(-\frac{1}{4} - \rho^2 \right) f_m^{(1)} \quad (4.1.15)$$

$$J_o f_m^{(1)} = m f_m^{(1)}. \quad (4.1.16)$$

Burada C Casimir operatörü (4.1.14) denklemleriyle verilir ve

$$J_o = -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (4.1.10a)$$

dır. Verilen m için $f_m^{(1)}$ fonksiyonunun gerdiği bir-boyutlu alt uzayı $\mathcal{H}_m$ ile gösterelim. Ayrıca C işlemcisinin bu alt uzaya kısıtlanmasını da C_m ile belirtelim. Böylece (4.1.14) de, (4.1.16) ve (4.1.10a) bağıntılarını göz önüne alarak

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} f_m^{(1)} = -m^2 f_m^{(1)}$$

eşitliğini kullandığımızda $\mathcal{H}_m$ ye kısıtlanan C Casimir işlemcisi yalnızca x 'e bağlı bir diferansiyel işlemci olur. Bu durumda C işlemcisi aşağıdaki yapıya sahip olur

$$C f_m^{(1)} = \frac{z(1-z)^2}{\dot{z}^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right)^2 + \frac{\dot{z}^2}{4z^2} \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right] f_m^{(1)}$$

$$C_m = \frac{z(1-z)^2}{\dot{z}^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right)^2 + \frac{\dot{z}^2(1-m^2)}{4z^2} \right]. \quad (4.1.17)$$

Artık şunu söyleyebiliriz ki eğer

$$\frac{z(1-z)^2}{\dot{z}^2} = 1 \quad (4.1.18)$$

ise C_m operatörü Schrödinger tipindedir. (4.1.18) denklemden $\dot{z} > 0$ koşulunu göz önüne alarak z 'yi

$$z = \tanh^2 \frac{x}{2} \quad (4.1.19)$$

buluruz. Bu çözümü (4.1.17) de yerine koyup düzenleme yaptığımızda C_m operatörü ile

H_m Hamiltoniyeni arasındaki ilişkinin $H_m = -\left(C_m + \frac{1}{4}\right)$ olduğunu görürüz. Burada H_m

($2M = \hbar = 1$ kullanılarak)

$$H_m = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 x} \quad (4.1.20)$$

Pöschl-Teller Hamiltonyenidir. Bu suretle, (4.1.20) Pöschl-Teller Hamiltonyeni $SO(2,1)$ grup yapısına sahiptir. Aynı enerjili ama farklı potansiyel şiddetine sahip saçılma durumları $SO(2,1)$ grubunun temel serisinin üniter indirgenemez temsiliyle ilişkilidir. Ama, Hamiltonyenlerin bu sınıfı için (1.9) bağıntısı enerjinin bir fonksiyonu olan m^2 ve ρ^2 'nin uygun seçimiyle sağlanabilecektir. Bunun için

$$C_m - j(j+1), \quad j = -\frac{1}{2} - i\rho \text{ ifadesini}$$

$$C_m + \frac{1}{4} + \rho^2 = \frac{z(1-z)^2}{\dot{z}^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right)^2 + \frac{\dot{z}^2}{4z^2(1-z)^2} \right. \\ \left. \times \left[(1-z)^2 - (1-z^2)m^2 - 4z \left(\frac{1}{4} + \rho^2 \right) \right] \right\} \quad (4.1.21)$$

olarak buluruz. Burada m^2 ve ρ^2 için

$$1 - m^2 = c_o E - h_o \quad (4.1.22a)$$

$$1 + 4\rho^2 = c_1 E - h_1 \quad (4.1.22b)$$

bağıntılarını alıp düzenleme yaptığımızda

$$C_m + \frac{1}{4} + \rho^2 = \frac{z(1-z)^2}{\dot{z}^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{\dot{z}^2}{4z^2(1-z)^2} \left[E(c_o z^2 + (c_1 - 2c_o)z + c_o) - (h_o z^2 + (h_1 - 2h_o)z + h_o) \right] \right\}$$

elde ederiz. Buradan

$$\left(C_m + \rho^2 + \frac{1}{4} \right) = -\frac{z(1-z)^2}{\dot{z}^2} [H - E] \quad (4.1.23)$$

ilişkisi olduğunu görürüz. Bu ilişkiyi değişmez bırakan Hamiltonyenler aşağıdaki formdadır

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{h_o z^2 + (h_1 - 2h_o)z + h_o + 1}{R} + \frac{z^2(1-z)^2}{R^2} \times \left(c_o + \frac{2(c_1 - c_o)z + 2c_o - c_1}{z(z-1)} - \frac{5\Delta}{4R} \right) \quad (4.1.24)$$

burada

$$R(z) = c_o z^2 + (c_1 - 2c_o)z + c_o,$$

$$\Delta = c_1^2 - 4c_o c_1$$

yapısındadır ve $z(x)$

$$\dot{z} = \frac{2z(1-z)}{\sqrt{R(z)}} \quad (4.1.25)$$

bağıntısını sağlar.

Sonuç olarak $H \neq f(C)|_{\mathcal{H}_m}$ ilişkisinden dolayı (4.1.24) Hamiltonyenlerinin simetri kırılmasına sahip olduğunu söyleyebiliriz. Fakat, bunun yanı sıra (4.1.24) Hamiltonyenleri bir başka cebirsel yapıya sahiptir yani, (4.1.23) den

$$\left(C + \rho^2 + \frac{1}{4} \right)_{\mathcal{H}_m} = Q(x)(H - E)$$

olduğunu görürüz. Burada m ve ρ (4.1.22) ile verilmişti ve

$$Q(x) = -\frac{z(1-z)^2}{\dot{z}^2}$$

yapısındadır. (4.1.24) denklemiyle verilen Hamiltonyenler sınıfı özel bir durumda yani, $c_o = 0$, $c_1 = 4$ ve $h_1 = -1$ olduğunda Pöschl-Teller Hamiltonyenini içerir

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{h_o + \frac{3}{4}}{\sinh^2 x}.$$

Pöschl-Teller Hamiltonyeninin potansiyel grubu olarak $SO(2,1)$ grubuna sahip olduğu zaten bilinmektedir. Aynı zamanda, (işlem yaparken [65, 66] nın notasyonunu kapalı bir şekilde izlendiğimiz) (4.1.24) ile verilen etkileşme potansiyelleri f , h_o , h_1 , a , c_o ve c_1

parametrelerine bağı olan Natanzon hipergeometrik potansiyelleri sınıfına aittir [29, 67-69]. Natanzon hipergeometrik potansiyelleri [65, 66]

$$U(x) = \frac{fz(z-1) + h_o(1-z) + h_1z}{R} + \frac{z^2(1-z)^2}{R^2} \left\{ a + \left[a + \frac{(c_1 - c_o)(2z-1)}{z(z-1)} - \frac{5\Delta}{4R} \right] \right\}$$

yapısındadır. Burada

$$R(z) = az(z-1) + c_o(1-z) + c_1z$$

veya bir başka şekilde, $b_o = c_1 - c_o - a$ ve $b_1 = a + c_1 - c_o$ olmak üzere

$$R(z) = az^2 + b_o z + c_o = a(z-1)^2 + b_1(z-1) + c_1$$

$$\Delta = (a - c_1 - c_o)^2 - 4c_1c_o = b_o^2 - 4ac_o = b_1^2 - 4ac_1$$

ile tanımlanır. Bu potansiyelde $a = c_o$ ve $f = h_o$ alındığımızda (4.1.24) de bulduğumuz potansiyelleri elde ederiz.

Bu suretle, dört parametreye bağı olan Natanzon hipergeometrik potansiyellerinin kısıtlı sınıfının S matrisi, (3.2.24) deki intertwining matrisinin

$$S_m = c(\rho) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\rho + m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\rho + m\right)}, \quad j = -\frac{1}{2} - i\rho \text{ için}$$

diyagonal elemanları ile belirlenirken, dalga fonksiyonları $f_m^{(1)}(\xi)$ baz fonksiyonlarına bağıdır. $f_m^{(1)}(\xi)$ baz fonksiyonlarının hesabına geçmezden önce (2.2.2) tarafından üretilen temel seri temsillerinin baz fonksiyonları için integral temsilini verelim.

$SO(2,1)$ grubunun en küçük parabolik alt grubu ile üretilen $SO(2,1)$ grubunun temel serileri ile başlayalım. Bu gerçekleştirme için baz fonksiyonları özellikle basit bir yapıya sahiptir. Bu halde bu gerçekleştirmeler arasındaki ilişki baz fonksiyonları için integral temsilini bulmamıza izin verir. Şimdi Bölüm 3.2'deki $SO(2,1)$ grubunun temel seri temsilleri hakkındaki birkaç ifadeyi tekrar hatırlayarak $f_m^{(1)}(\xi)$ baz fonksiyonlarının hesabına geçelim.

$\chi = (\rho, 0)$, $0 \leq \rho < \infty$ vasıtasıyla sınıflanan $SO(2,1)$ 'in U^χ temel seri temsillerini $j = -\frac{1}{2} - i\rho$ dereceli homojen

$$F(a\zeta) = a^j F(\zeta), \quad a > 0 \quad (3.2.9)$$

$\zeta_o^2 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2 = 0$, $\zeta_o > 0$ iki boyutlu koninin üst kolunda $F(\zeta)$ sonsuz kez türevlenebilen fonksiyonların uzayında düşünelim. U^χ temsili

$$U^\chi(g)F(\zeta) = F(\zeta g) \quad (3.2.10)$$

ile tanımlanır. Konideki homojen fonksiyonlar bir noktada her bir Γ eğrisiyle kesişen koniyi oluşturan her bir doğrulardaki değerleri vasıtasıyla belirlenir. Bu nedenle, U^χ bu eğrilerdeki fonksiyonların uzaylarında gerçekleşebilecektir. (bak [45] in eki). (2.2.2) denklemi vasıtasıyla üretilen temel seri temsili ve bu temsil arasındaki karşılıklı ilişki

$$\check{f}(\xi) = \int_{\Gamma} [n, \xi]^{\frac{1}{2} + i\rho} F(n) dn \equiv (IF)(\xi) \quad (4.1.26)$$

Gelfand-Graev integral dönüşümüyle [53] verilir. Burada $[\cdot, \cdot]$ (2.1.1) ile tanımlanır. Γ eğrisi koniyi oluşturan her bir doğruyu bir kez kesen konideki keyfi eğridir ve dn Γ 'daki quasi-invaryant ölçümdür. Ayrıca aşağıdaki intertwining bağıntısı

$$IU = \check{T}I \quad (4.1.27)$$

değişmeden kalır. Böylece, (4.1.26) denklemi (2.2.2) ile üretilen temel seri temsillerinin baz fonksiyonları için integral temsiliinin bulunmasına izin verir.

$SO(2,1) \supset SO(2)$ indirgemesi için (4.1.26) da $\Gamma = \Gamma_s$ alalım, burada Γ_s $\zeta_o = 1$ düzlemiyle koninin kesitini tanımlar. Bu kesit bir çemberdir. Konideki küresel koordinatları (3.2.11) de belirtildiği gibi

$$\zeta = \omega n, \quad n = (1, \cos \varphi, \sin \varphi)$$

olarak tanımlayalım, burada $0 \leq \omega < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ dir. (3.2.9) dan $F(\zeta)$ fonksiyonlarının

$$\Gamma_s = \{n = (1, \cos \varphi, \sin \varphi) | 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

çemberindeki değerleriyle belirlendiği izlenir.

$$U^x(g)F(n) = (\omega_g)^j F(n_g) \quad (4.1.28)$$

burada ω_g ve n_g $n.g$ nin (3.2.11) parametrizasyonundan yani $n.g = \omega_g n_g$ den belirlenir. (3.2.10) temsilinin Casimir operatörü $C \equiv -\rho^2 - \frac{1}{4}$ birim katsayısıyla aynıdır. (4.1.28) temsilinin taşındığı uzayda uygun bazlar $SO(2,1) \supset SO(2)$ indirgemesiyle verilir. $J_o = -i \frac{\partial}{\partial \theta}$ olduğundan dolayı, uygun baz fonksiyonları $F_m^{(1)}(n) = e^{im\theta}$ dır. O halde, (4.1.26) ifadesine uygun olarak, (2.2.2) vasıtasıyla üretilen temel seri temsillerinin baz fonksiyonları için integral temsili

$$\check{f}_m^{(1)}(\xi) = \int_0^{2\pi} [n, \xi]^{-1-j} e^{im\theta} d\theta \quad (4.1.29)$$

olur. $\check{f}_m^{(1)}$ baz fonksiyonları gerçekten $\check{C}$ ve $\check{J}_o$

$$\check{C}\check{f}_m^{(1)} = j(j+1)\check{f}_m^{(1)}, \quad j = -\frac{1}{2} + i\rho \quad (4.1.30)$$

$$\check{J}_o \check{f}_m^{(1)} = m\check{f}_m^{(1)} \quad (4.1.31)$$

komütasyon operatörler kümesinin öz fonksiyonlarıdır. Burada $\check{C}$, (2.3.14) ile verilen $\check{T}$ 'nin Casimir operatörüdür ve $\check{J}_o$ 'da (2.3.9) ile verilen $SO(2)$ ye karşılık gelen $\check{T}$ 'nin sonsuz küçük operatörüdür.

(4.1.29) denkleminde $n = (1, \cos\theta, \sin\theta)$ ve $\xi = (\xi_o, \xi_1, \xi_2)$ aldığımızda

$$\check{f}_m^{(1)}(\xi) = \int_0^{2\pi} (\xi_o - \xi_1 \cos\theta - \xi_2 \sin\theta)^{-1-j} e^{im\theta} d\theta \quad (4.1.32)$$

buluruz. (4.1.9) daki koordinatları (4.1.32) de yazıp düzenleme yaptığımızda

$$\check{f}_m^{(1)}(\xi) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+z'}{1-z'} - \frac{2\sqrt{z'}}{1-z'} \cos(\theta - \varphi) \right)^{-1-j} e^{im\theta} d\theta$$

elde ederiz. (4.1.3) deki W tasvirini kullandığımızda $f_m^{(1)}(\xi)$ baz fonksiyonlarını aşağıdaki yapıda buluruz

$$f_m^{(1)}(\xi) = \left(\frac{z}{\dot{z}} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+z'}{1-z'} - \frac{2\sqrt{z'}}{1-z'} \cos(\theta - \varphi) \right)^{-1-j} e^{im\theta} d\theta. \quad (4.1.33)$$

(4.1.33) deki integralin çözümü için

$$y = \frac{1+z'}{1-z'}, \quad \sqrt{y^2 - 1} = \frac{-2\sqrt{z'}}{1-z'}$$

seçimini yaptığımızda

$$f_m^{(1)}(\xi) = \left(\frac{z}{\dot{z}} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \left[y + \sqrt{y^2 - 1} \cos(\theta - \varphi) \right]^{-1-j} e^{im\theta} d\theta$$

buluruz. [70] de (cilt I sayfa 157, (16) bağıntısı) verilen yapıya uygun olarak integralin çözümü

$$\int_0^{2\pi} \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \cos(\theta - \varphi) \right)^{-1-j} e^{im\theta} d\theta = 2\pi \frac{\Gamma(-j)}{\Gamma(-j-m)} e^{im\varphi} P_{-1-j}^m(y) \quad (4.1.34)$$

dır. Burada $P_{-1-j}^m(y)$ birinci tip Legendre fonksiyonudur. [70] de (cilt I sayfa 140, (1),(2); sayfa 124 (14); sayfa 102 (18); sayfa 105 (4)) ifadelerini kullanarak ve $P_{-1-j}^m(y)$ fonksiyonunun standart hipergeometrik fonksiyonları cinsinden

$$P_{-1-j}^m(y) = \frac{z^{m/2} (1-z)^{1+j}}{\Gamma(1+m)} {}_2F_1(1+j, 1+j+m; 1+m; z), \quad j = -\frac{1}{2} - i\rho$$

ifadesini kullanarak, $f_m^{(1)}(\xi)$ baz fonksiyonları için aşağıdaki yapıyı elde ederiz

$$f_m^{(1)}(\xi) = 2\pi (\dot{z})^{-1/2} z^{\frac{1+m}{2}} (1-z)^{1+j} e^{im\varphi} \frac{\Gamma(-j)}{\Gamma(-j-m)\Gamma(1+m)} {}_2F_1(1+j, 1+j+m; 1+m; z). \quad (4.1.35)$$

Bu ifadeyi

$$f_m^{(1)}(\xi) = e^{im\varphi} \Psi(x)$$

olarak yazabiliriz. Burada

$$\Psi(x) = 2\pi (\dot{z})^{-1/2} z^{\frac{1+m}{2}} (1-z)^{1+j} \frac{\Gamma(-j)}{\Gamma(-j-m)\Gamma(1+m)^2} {}_2F_1(1+j, 1+j+m; 1+m; z) \quad (4.1.36)$$

yapısındadır. Bundan dolayı, (4.1.24) de verilen kısıtlı Natanzon potansiyellerinin dalga fonksiyonları için

$$\Psi(x) \propto (\dot{z})^{-1/2} z^{\frac{1+m}{2}} (1-z)^{1+j} {}_2F_1(1+j, 1+j+m; 1+m; z) \quad (4.1.37)$$

ilişkisini buluruz.

4.2. $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ İndirgemesine Bağlı Potansiyeller Sınıfı

Bu indirgemedede $d\mu$ quazi-invaryant hacim elemanın aşağıda verilen $g_1(t) \in SO(1,1)$ dönüşümleri altında invaryant olmasını istiyoruz

$$g_1(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bunun için, hacim elemanını

$$d\mu = v(\xi_2) d\xi \quad (4.2.1)$$

alırız. Burada $v(\xi_2)$

$$v(\xi_2) = (1 + \xi_2^2)^{-1/2}$$

yapısındadır. İfade kolaylığı sağlamak için, bu durumun quasiregüler temsil jeneratörlerini ve Casimir operatörünü sırasıyla J_0 , J_1 , J_2 ve C ile tanıtacağız. J_0 , J_1 , J_2 ve C için

$$J_i = v^{-1/2}(\xi_2) \circ \check{J}_i \circ v^{1/2}(\xi_2), \quad i = 0, 1, 2$$

$$C = v^{-1/2}(\xi_2) \circ \check{C} \circ v^{1/2}(\xi_2)$$

eşitliklerinden yararlanarak (Bölüm 4.1' de yapıłana benzer olarak) ařağıdaki ifadeleri buluruz

$$J_o = i\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - i\xi_1 \left(\frac{1}{2v} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) \quad (4.2.2a)$$

$$J_1 = i\xi_o \frac{\partial}{\partial \xi_1} \quad (4.2.2b)$$

$$J_2 = i\xi_o \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{i\xi_o}{2v} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \quad (4.2.2c)$$

ve

$$C = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right)^2 + \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \left[\xi_1 \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + (1 + \xi_2^2) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right] \\ + \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{(1 + \xi_2^2)}{2v} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_2^2} - \frac{1}{2v} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi_2} \right)^2 + \frac{2\xi_2}{1 + \xi_2^2} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \right]. \quad (4.2.3)$$

J_1 işlemcisini diyagonal seçmek istediğimizden dolayı, ξ_1 ve ξ_2 değişkenlerinden aşağıdaki yapıya sahip yeni x , β değişkenlerine geçeriz

$$\xi_o = \frac{\cosh \beta}{\sqrt{1 - z^2(x)}}, \\ \xi_1 = \frac{\sinh \beta}{\sqrt{1 - z^2(x)}}, \\ \xi_2 = \frac{z(x)}{\sqrt{1 - z^2(x)}}, \quad (4.2.4)$$

burada β ve x , $-\infty < \beta < \infty$ ve $-\infty < x < \infty$ aralığında değişir; $z(x)$ $[-1, 1]$ aralığında değer alan, R de türevlenebilir bir fonksiyondur. Yaptığımız değişken değişimi sonucunda ξ_1 ve ξ_2 değişkenlerine göre türev operatörü yeni x , β değişkenleri cinsinden aşağıdaki yapıya sahip olur

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} = \frac{\sqrt{1-z^2}}{\cosh \beta} \frac{\partial}{\partial \beta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} = \frac{(1-z^2)^{3/2}}{\dot{z}} \frac{\partial}{\partial x} - z\sqrt{1-z^2} \tanh \beta \frac{\partial}{\partial \beta}.$$

Böylece x ve β değişkenlerine bağlı olarak, (4.2.2) deki jeneratörleri bu diferansiyel işlemciler vasıtasıyla

$$J_0 = i \left(-\sinh \beta \frac{\partial}{\partial x} + z \cosh \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right), \quad (4.2.5a)$$

$$J_1 = i \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad (4.2.5b)$$

$$J_2 = i \left(\cosh \beta \frac{\partial}{\partial x} - z \sinh \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \quad (4.2.5c)$$

buluruz. (4.2.3) denklemiyle verilen Casimir işlemcisinde

$$\frac{\partial v}{\partial \xi_1} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi_2} = \frac{(1-z^2)^{3/2}}{\dot{z}} \frac{\partial v}{\partial x}$$

bağıntılarını göz önüne alıp, düzenleme yaptığımızda

$$C = \frac{(1-z^2)^2}{\dot{z}^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\dot{v}}{v} - \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} - \frac{\dot{z}\dot{z}}{1-z^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right. \\ \left. + \frac{\dot{z}^2}{1-z^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1}{2v} \left[\ddot{v} - \frac{\dot{v}^2}{2v} - \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} + \frac{\dot{z}\dot{z}}{1-z^2} \right) \dot{v} \right] \right\} \quad (4.2.6)$$

elde ederiz. Burada (ve daha sonraki ifadelerde) üs olarak yazılan noktalar x 'e göre

türevi ifade eder yani, $\dot{z} = \frac{dz}{dx}$, $\ddot{z} = \frac{d^2z}{dx^2}$, ... vs. dır. (4.2.6) denklemiyle verilen C

Casimir operatöründe x 'e göre birinci türevi içeren terimi yok etmek için

$$\frac{\dot{v}}{v} - \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} - \frac{\dot{z}\dot{z}}{1-z^2} = 0 \quad (4.2.7)$$

koşulunu koyarız. (4.2.7) bağıntısından v fonksiyonunu

$$v = \pm \dot{z}(1 - z^2)^{-1/2}$$

buluruz. Burada v 'nin (4.1.2) den dolayı pozitif olması gerekir. Bu nedenle $\dot{z} > 0$ olmalıdır. Dolayısıyla

$$v = \dot{z}(1 - z^2)^{-1/2} \quad (4.2.8)$$

olur. (4.2.8) çözümünü (4.2.6) Casimir operatöründe yerine yazıp, düzenleme yaptığımızda

$$C = \frac{(1 - z^2)^2}{\dot{z}^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right)^2 + \frac{\dot{z}^2(2 + z^2)}{4(1 - z^2)^2} + \frac{\dot{z}^2}{1 - z^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] \quad (4.2.9)$$

elde ederiz. Böylece $SO(2,1)$ grubunun temel serisinin $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ indirgemesine karşı gelen baz fonksiyonları C ve J_1 işlemciler kümesinin öz fonksiyonlarıdır

$$C f_{v\tau}^{(2)} = \left(-\frac{1}{4} - \rho^2 \right) f_{v\tau}^{(2)} \quad (4.2.10a)$$

$$J_1 f_{v\tau}^{(2)} = v f_{v\tau}^{(2)}. \quad (4.2.10b)$$

Burada

$$J_1 = i \frac{\partial}{\partial \beta} \quad (4.2.5b)$$

idi ve C Casimir işlemcisi de (4.2.9) ile verilmişti. v ve τ ile belirlenen $f_{v\tau}^{(2)}$ fonksiyonunun gerdiği bir-boyutlu alt uzayı $\mathcal{H}_v$ ile gösterelim. Ayrıca C işlemcisinin bu alt uzaya kısıtlanmasını da C_v ile tanıtalım. O halde (4.2.9) da

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} f_{v\tau}^{(2)} = -v^2 f_{v\tau}^{(2)}$$

eşitliğini kullandığımızda $\mathcal{H}_v$ 'ye kısıtlanan Casimir işlemcisi yalnızca x 'e bağlı bir diferansiyel işlemci olur ve aşağıdaki yapıyı alır

$$Cf_{vr}^{(2)} = \frac{(1-z^2)^2}{\dot{z}^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right)^2 + \frac{\dot{z}^2(2+z^2)}{4(1-z^2)^2} + \frac{\dot{z}^2}{1-z^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] f_{vr}^{(2)}$$

$$C_v = \frac{(1-z^2)^2}{\dot{z}^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right)^2 + \frac{\dot{z}^2(2+z^2)}{z^2(1-z^2)^2} - \frac{\dot{z}^2 v^2}{1-z^2} \right]. \quad (4.2.11)$$

(4.2.11) den diyebiliriz ki, eğer

$$\frac{(1-z^2)^2}{\dot{z}^2} = 1 \quad (4.2.12)$$

ise C_v işlemcisi Schrödinger tipindedir. (4.2.12) denkleminde $\dot{z} > 0$ koşulunu göz önüne alarak z 'yi

$$z = \tanh x \quad (4.2.13)$$

elde ederiz. Bu z çözümünü (4.2.11) ile verilen C_v de yerine yazıp, düzenleme yaparsak

$$C_v = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{v^2 + \frac{1}{4}}{\cosh^2 x} - \frac{1}{4} \quad (4.2.14)$$

buluruz. Bundan dolayı Pöschl-Teller Hamiltonyeni ($2M = \hbar = 1$ kullanılarak)

$$H_v = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{v^2 + \frac{1}{4}}{\cosh^2 x}$$

ile C_v Casimir işlemcisi arasında aşağıdaki ilişkiyi buluruz

$$H_v = -\left(C + \frac{1}{4} \right)_{\mathcal{H}_v}.$$

Hamiltonyenlerin bu sınıfı için (1.9) ilişkisi v^2 ve ρ^2 'nin uygun seçimiyle sağlanabilecektir. Bu seçim v^2 ve ρ^2 'nin E enerjisinin lineer bir fonksiyonu olduğu göz önüne alınarak aşağıdaki gibidir

$$1 + v^2 = a_1 E + b_1 \quad (4.2.15a)$$

$$1 + \rho^2 = a_2 E + b_2. \quad (4.2.15b)$$

Buna göre $C_v - j(j+1)$, $j = -\frac{1}{2} - i\rho$ ifadesini

$$C_v + \frac{1}{4} + \rho^2 = \frac{(1-z^2)^2}{\dot{z}^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right)^2 + \frac{\dot{z}^2}{4(1-z^2)^2} \right. \\ \left. \times \left[2 + z^2 - 4(1-z^2)v^2 + 4 \left(\frac{1}{4} + \rho^2 \right) \right] \right\} \quad (4.2.16)$$

yapısında buluruz. Burada v^2 ve ρ^2 için (4.2.15) de verilen bağıntıları kullanırsak

$$C_v + \frac{1}{4} + \rho^2 = \frac{(1-z^2)^2}{\dot{z}^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{\dot{z}^2}{z^2(1-z^2)^2} \left[(a_1 z^4 + (a_2 - a_1) z^2) E - \left(\left(b_1 + \frac{3}{4} \right) z^2 (z^2 - 1) - b_2 z^2 \right) \right] \right\}$$

ifadesinde,

$$\left(C_v + \rho^2 + \frac{1}{4} \right) = -\frac{(1-z^2)^2}{\dot{z}^2} [H - E] \quad (4.2.17)$$

ilişkisinin sağlandığını görürüz. Bu ilişkiyi değişmez bırakan Hamiltonyenler aşağıdaki gibidir

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{b_1 z^2 (1-z^2) - \frac{3}{4} (1-z^2) - b_2 z^2 + 1}{R} \\ + \frac{z^4 (1-z^2)^2}{R^2} \left(a_1 + \frac{a_1 + a_2 (2z^2 - 1)}{z^2 (z^2 - 1)} - \frac{5\Delta}{4R} \right). \quad (4.2.18)$$

Burada

$$R(z) = a_1 z^4 + (a_2 - a_1) z^2 \quad (4.2.19)$$

$$\Delta = (a_1 - a_2)^2$$

yapısındadır. Bu tür sistemler

$$\dot{z} = \frac{z(1-z^2)}{\sqrt{R(z)}} \quad (4.2.20)$$

diferansiyel denklemini sağlayan $z(x)$ için (4.2.17) bağıntısını değiştirmeden bıraktığı düşüncesiyle $SO(2,1)$ 'e bağlıdır.

Sonuç olarak $H \neq f(C)|_{\mathcal{H}_v}$ ilişkisinden dolayı (4.2.18) Hamiltonyenlerinin de simetri kırılmasına sahip olduğunu söyleyebiliriz. Ancak, (4.2.18) Hamiltonyenleri de bir başka cebirsel yapıya sahiptir, yani (4.2.17) den

$$\left(C + \rho^2 + \frac{1}{4} \right)_{\mathcal{H}_v} = Q_2(x)(H - E)$$

olduğu görülür. Burada v ve ρ (4.2.15) ile verilmişti ve

$$Q_2(x) = -\frac{(1-z^2)^2}{\dot{z}^2}$$

yapısındadır.

Çözülebilir potansiyellerin bu sınıfı özel bir durum olarak Ginocchio potansiyeller [71] ailesini kapsar. Ginocchio potansiyelleri

$$V(x) = \left\{ -\gamma^2 \delta(\delta+1) + \frac{1}{4}(1-\gamma^2) \left[5(1-\gamma^2)y^4 - (7-\gamma^2)y^2 + 2 \right] \right\} (1-y^2)$$

yapısındadır. Bu potansiyeller orijinde sonlu, sonsuzda sıfır, orijin etrafında simetriktir.

Gerçekten, $\gamma \leq 1$, $\delta(\delta+1) \geq \frac{1}{4}$ olmak üzere (4.2.18) de

$$a_1 = \frac{1}{\gamma^4} - \frac{1}{\gamma^2}, \quad a_2 = \frac{1}{\gamma^4}, \quad b_2 = 1, \quad b_1 = \delta(\delta+1) + \frac{3}{4} \quad (4.2.21)$$

alındığında ve

$$y = \frac{z}{\sqrt{z^2 + \gamma^2(1-z^2)}} \quad (4.2.22)$$

eşitliği ile Ginocchio' nun notasyonundaki y değişkenine geçildiğinde

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \gamma^2 \delta(\delta+1)(1-y^2) + \frac{(1-y^2)(1-\gamma^2)}{4} [2 - y^2(7-\gamma^2) + 5(1-\gamma^2)y^4] \quad (4.2.23)$$

elde edilir. (4.2.20) ve (4.2.22) den

$$\frac{dy}{dx} = (1 - y^2)[1 - (1 - \gamma^2)y^2] \quad (4.2.24)$$

olduğu izlenir. Eğer $\gamma = 1$ seçilirse (4.2.23) deki Hamiltonyenler potansiyel grubu olarak $SO(2,1)$ grubuna sahip Pöschl-Teller Hamiltonyenine sadeleşir

$$V(x) = \frac{\delta(\delta + 1)}{\cosh^2 x}.$$

Diğer cebirsel yapılara nazaran, burada kullandığımız cebirsel yapı (4.1.26) da verilen dalga fonksiyonları için integral temsilini sağlar. Bu sınıflamadaki (4.1.26) integral dönüşümünde Γ eğrisi olarak $\Gamma = \Gamma_H$ alacağız. Burada $\Gamma_H: \zeta_2 = \pm 1$ düzlemleriyle $\zeta_o^2 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2 = 0$, $\zeta_o > 0$ konisinin kesitidir, yani H^1 hiperboloidinin üst koludur. Buna göre, konideki hiperbolik koordinat sistemi aşağıdaki yapıdadır

$$\zeta = \omega n_\tau, \quad n_\tau = (\cosh \alpha, \sinh \alpha, \tau), \quad (4.2.25)$$

burada $0 \leq \omega < \infty$, $-\infty \leq \alpha < \infty$ ve $\tau \equiv \text{sign} \zeta_2$ dır. (3.2.9) dan $F(\zeta)$ fonksiyonlarının

$$\Gamma_H = \{n_\tau = (\cosh \alpha, \sinh \alpha, \tau) | -\infty \leq \alpha < \infty, \tau \equiv \text{sign} \zeta_2\}$$

hiperbolündeki değerleriyle belirlendiği izlenir. Γ_H uzayındaki U^χ , $\chi = (\rho, 0)$ temsili aşağıdaki bağıntıyı sağlar

$$U^\chi(g)F(n) = (\omega_g)^J F(n_g)$$

burada ω_g ve n_g ng nin (4.2.25) parametrizasyonundan, yani $ng = \omega_g n_g$ den

belirlenir. (3.2.9) temsiline Casimir operatörü $C \equiv -\rho^2 - \frac{1}{4}$ dır. U^χ temsiline

taşındığı uzayda uygun bazlar $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ indirgemesiyle verilir. $J_1 = i \frac{\partial}{\partial \beta}$

olduğundan dolayı, (4.1.26) daki uygun baz fonksiyonları $F_{\nu\tau}^{(2)}(n) = e^{-i\nu\alpha}$ dır. (4.1.26)

ifadesine uygun olarak, (2.2.2) vasıtasıyla üretilen temel seri temsillerinin baz fonksiyonları için integral temsili aşağıdaki gibi olur

$$\tilde{f}_{\nu\tau}^{(2)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} [\xi, n_\tau]^{-1-j} e^{-i\nu\alpha} d\alpha. \quad (4.2.26)$$

$\tilde{f}_{\nu\tau}^{(2)}$ baz fonksiyonları gerçekten birbirleriyle yer değiştirebilen $\tilde{C}$ ve $\tilde{J}_1$ operatör çiftinin, yani $\{\tilde{C}, \tilde{J}_1\}$ kümesinin öz fonksiyonlarıdır. Burada $\tilde{C}$, (2.3.14) ile verilen $\tilde{T}$ 'nin Casimir operatörüdür ve $\tilde{J}_1$, (2.3.11) ile verilen $g_1(t)$ has Lorentz dönüşümüne karşılık gelen $\tilde{T}$ 'nin sonsuz küçük operatörüdür. Ayrıca $\tilde{C}$ ve $\tilde{J}_1$ operatörleri aşağıdaki bağıntıları sağlar:

$$\tilde{C}\tilde{f}_{\nu\tau}^{(2)} = j(j+1)\tilde{f}_{\nu\tau}^{(2)}, \quad j = -\frac{1}{2} + i\rho \quad (4.2.27)$$

$$\tilde{J}_1\tilde{f}_{\nu\tau}^{(2)} = \nu\tilde{f}_{\nu\tau}^{(2)}. \quad (4.2.28)$$

(4.2.26) denkleminde $n_\tau = (\cosh\alpha, \sinh\alpha, \tau)$ ve $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ yi yazdığımızda

$$\tilde{f}_{\nu\tau}^{(2)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi_0 \cosh\alpha - \xi_1 \sinh\alpha - \xi_2 \tau)^{-1-j} e^{-i\nu\alpha} d\alpha \quad (4.2.29)$$

buluruz. (4.2.29) da

$$\xi_0 = \frac{\cosh\beta}{\sqrt{1-z^2(x)}}, \quad \xi_1 = \frac{\sinh\beta}{\sqrt{1-z^2(x)}}, \quad \xi_2 = \frac{z(x)}{\sqrt{1-z^2(x)}} \quad (4.2.4)$$

burada $-\infty < \beta < \infty$ ve $-\infty < x < \infty$ aralığında değişir, koordinatlarını yerine yazıp düzenleme yaptığımızda

$$\tilde{f}_{\nu\tau}^{(2)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\cosh\alpha}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{z\tau}{\sqrt{1-z^2}} \right)^{-1-j} e^{-i\nu(\alpha+\beta)} d\alpha \quad (4.2.30)$$

elde ederiz. (4.1.3) deki W tasvirine göre $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ indirgemesi için $v = z(1-z^2)^{-1/2}$ tanımını kullandığımızda

$$\tilde{f}_{\nu\tau}^{(2)} = z^{1/2} (1-z^2)^{-1/4} f_{\nu\tau}^{(2)} \quad (4.2.31)$$

buluruz. (4.2.31) ifadesini (4.2.30) da yazarsak

$$f_{v\tau}^{(2)}(\xi) = \frac{(1-z^2)^{1/4}}{\sqrt{z}} e^{-iv\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\cosh \alpha}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{z\tau}{\sqrt{1-z^2}} \right)^{-1-j} e^{-iv\alpha} d\alpha \quad (4.2.32)$$

elde ederiz. $\tilde{f}_{v\tau}^{(2)}$ baz fonksiyonlarını

$$f_{v\tau}^{(2)}(\xi) = e^{-iv\beta} \Psi_{\tau}(x) \quad (4.2.32)$$

olarak yazabiliriz, burada

$$\Psi_{\tau}(x) = \frac{(1-z^2)^{1/4}}{\sqrt{z}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\cosh \alpha}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{z\tau}{\sqrt{1-z^2}} \right)^{-1-j} e^{-iv\alpha} d\alpha \quad (4.2.33)$$

yapısındadır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\cosh \alpha}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{z\tau}{\sqrt{1-z^2}} \right)^{-1-j} e^{-iv\alpha} d\alpha = 2 \int_0^{\infty} \left(\frac{\cosh \alpha}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{z\tau}{\sqrt{1-z^2}} \right)^{-1-j} \cosh iv\alpha d\alpha$$

eşitliğini kullandığımızda (4.2.32) denklemini

$$f_{v\tau}^{(2)}(\xi) = \frac{(1-z^2)^{1/4}}{\sqrt{z}} 2e^{-iv\beta} \int_0^{\infty} \left(\frac{\cosh \alpha}{\sqrt{1-z^2}} \right)^{-1-j} \left(1 - \frac{z\tau}{\cosh \alpha} \right)^{-1-j} \cosh iv\alpha d\alpha.$$

haline gelir. Burada [59] da (sayfa 345) ki bağıntıya göre

$$\left(1 - \frac{z\tau}{\cosh \alpha} \right)^{-1-j} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+j+\kappa)}{\Gamma(1+j)\kappa!} \left(\frac{z\tau}{\cosh \alpha} \right)^{\kappa}$$

$$0 \leq \frac{\tau}{\cosh \alpha} \leq 1, \quad |z| < 1$$

eşitliğini kullanarak düzenleme yaptığımızda

$$f_{v\tau}^{(2)}(\xi) = \frac{(1-z^2)^{2j+3/4}}{\sqrt{z}} 2e^{-iv\beta} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+j+\kappa)}{\Gamma(1+j)\kappa!} (z\tau)^{\kappa} \int_0^{\infty} (\cosh \alpha)^{-1-j-\kappa} \cosh iv\alpha d\alpha \quad (4.2.34)$$

buluruz. Bu ifadedeki integralin çözümü [64] de 3.512 den

$$\int_0^{\infty} (\cosh \alpha)^{-1-j-\kappa} \cosh iv\alpha d\alpha = 4^{\frac{j+\kappa-1}{2}} B\left(\frac{1+j+\kappa+iv}{2}, \frac{1+j+\kappa-iv}{2}\right)$$

yapısındadır. Burada,

$$B\left(\frac{1+j+\kappa+iv}{2}, \frac{1+j+\kappa-iv}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1+j+\kappa+iv}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+j+\kappa-iv}{2}\right)}{\Gamma(1+j+\kappa)}$$

[64] deki 8.384-1 tanımını kullanırsak integralimiz aşağıdaki çözüme sahip olur:

$$\int_0^\infty (\cosh \alpha)^{-1-j-\kappa} \cosh iv \alpha d\alpha = 2^{j+\kappa-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1+j+\kappa+iv}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+j+\kappa-iv}{2}\right)}{\Gamma(1+j+\kappa)}. \quad (4.2.35)$$

(4.2.35) çözümünü (4.2.32) de yerine yazıp, düzenleme yaptığımızda

$$f_{v\tau}^{(2)}(\xi) = \frac{(1-z^2)^{\frac{2j+3}{4}} e^{-iv\beta} 2^j}{\sqrt{z}} \frac{1}{\Gamma(1+j)} D$$

(4.2.35)

buluruz. Burada D

$$D = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\tau^\kappa (2z)^\kappa}{\kappa!} \Gamma\left(\frac{1+j+\kappa+iv}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+j+\kappa-iv}{2}\right)$$

olarak tanımlanır. D ’deki κ üzerinden toplama işlemini κ ’nın tek ve çift değerleri için ayrı ayrı yazıp; κ ’nın çift değerleri için κ ’yı $2m$ ile, κ ’nın tek değerleri için κ ’yı $2m+1$ ile nitelendirirsek D için aşağıdaki yapıyı buluruz:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tau^{2m} (2z)^{2m}}{(2m)!} \Gamma\left(\frac{1+j+iv}{2} + m\right) \Gamma\left(\frac{1+j-iv}{2} + m\right) \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tau^{2m+1} (2z)^{2m+1}}{(2m+1)!} \Gamma\left(1 + \frac{j+iv}{2} + m\right) \Gamma\left(1 + \frac{j-iv}{2} + m\right). \end{aligned} \quad (4.2.37)$$

[64] deki 8.335 ifadesini kullandığımızda

$$\begin{aligned} D &= \pi^{1/2} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tau^{2m} (2z)^{2m}}{m! \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{1+j+iv}{2} + m\right) \Gamma\left(\frac{1+j-iv}{2} + m\right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tau^{2m+1} (2z)^{2m+1}}{m! \Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right)} \Gamma\left(1 + \frac{j+iv}{2} + m\right) \Gamma\left(1 + \frac{j-iv}{2} + m\right) \right] \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

elde ederiz. Gamma fonksiyonları ile ${}_2F_1$ hipergeometrik fonksiyonlar arasındaki ilişkiden dolayı

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{m! \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{1+j+iv}{2} + m\right) \Gamma\left(\frac{1+j-iv}{2} + m\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1+j+iv}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \times \Gamma\left(\frac{1+j-iv}{2}\right) {}_2F_1\left(\frac{1+j+iv}{2}, \frac{1+j-iv}{2}; \frac{1}{2}; z^2\right) \quad (4.2.39a)$$

ve

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{m! \Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right)} \Gamma\left(1 + \frac{j+iv}{2} + m\right) \Gamma\left(1 + \frac{j-iv}{2} + m\right) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{j+iv}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \times \Gamma\left(1 + \frac{j-iv}{2}\right) {}_2F_1\left(1 + \frac{j+iv}{2}, 1 + \frac{j-iv}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right). \quad (4.2.39b)$$

yazabiliriz. (4.2.39) denklemini (4.2.38) denkleminde yazarak düzenleme yaptığımızda

$$D = \tau^{2m} \Gamma\left(\frac{1+j+iv}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+j-iv}{2}\right) {}_2F_1\left(\frac{1+j+iv}{2}, \frac{1+j-iv}{2}; \frac{1}{2}; z^2\right) + \tau^{2m+1} 2z \Gamma\left(1 + \frac{j+iv}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{j-iv}{2}\right) {}_2F_1\left(1 + \frac{j+iv}{2}, 1 + \frac{j-iv}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) \quad (4.2.40)$$

buluruz. (4.2.40) ifadesini (4.2.36) da yerine yazarsak $f_{\nu\tau}^{(2)}(\xi)$ fonksiyonlarını

$$f_{\nu\tau}^{(2)}(\xi) = \frac{(1-z^2)^{\frac{2j+3}{4}}}{\sqrt{z}} \frac{e^{-iv\beta} 2^j}{\Gamma(1+j)} \times \left[\Gamma\left(\frac{1+j+iv}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+j-iv}{2}\right) {}_2F_1\left(\frac{1+j+iv}{2}, \frac{1+j-iv}{2}; \frac{1}{2}; z^2\right) + \tau 2z \Gamma\left(1 + \frac{j+iv}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{j-iv}{2}\right) {}_2F_1\left(1 + \frac{j+iv}{2}, 1 + \frac{j-iv}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) \right] \quad (4.2.41)$$

buluruz. Böylece (4.2.33) de tanımlanan $\Psi_{\tau}(x)$, $\tau = \pm 1$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned}
\Psi_r(x) &\propto (\dot{z})^{-\frac{1}{2}} (1-z^2)^{\frac{2j+3}{4}} \\
&\times \left\{ \Gamma\left(\frac{j+iv+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{j-iv+1}{2}\right) {}_2F_1\left(\frac{j+iv+1}{2}, \frac{j-iv+1}{2}; \frac{1}{2}; z^2\right) \right. \\
&\quad \left. + 2\tau z \Gamma\left(\frac{j+iv+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{j-iv+2}{2}\right) {}_2F_1\left(\frac{j+iv+2}{2}, \frac{j-iv+2}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) \right\}
\end{aligned} \tag{4.2.42}$$

ilişkisini buluruz.

Sonuç olarak diyebiliriz ki: bu sınıfa ait potansiyel fonksiyonları enerjinin her pozitif değeri için dalga fonksiyonunun iki kat dejenereliğine sahiptir. Gerçekte $SO(1,1)$ grubunun her bir üniter indirgenemez temsiline karşılık gelen iki kat dejenerelik, $SO(2,1)$ 'in üniter indirgenemez temsiline temel serilerindeki iki kat dejenereliktir. Bu yüzden, potansiyel tarafından kısmi olarak geçirilen ve kısmi olarak yansıtılan dalga paketleri düzenlenebilir. Ψ_{-1} fonksiyonu soldan gelen dalgayı temsil eder. Potansiyel engelinde yansıma olur ama aynı zamanda sağa doğru geçiş de olur. Ψ_{+1} fonksiyonu için yorum benzer şekildedir. Bu fonksiyon sağdan gelen dalgayı temsil eder. Potansiyel engelinden yansıma olmasına rağmen sola doğru geçiş de olur. (3.1.32) den

$$S_v = \begin{pmatrix} R_v & T_v \\ T_v & R_v \end{pmatrix}$$

ifadesine göre, yansıma ve geçme katsayıları aşağıdaki gibidir

$$|R|^2 = \frac{\cosh^2 \pi v}{\cosh^2 \pi v + \sinh^2 \pi \rho} \tag{4.2.43}$$

$$|T|^2 = \frac{\sinh^2 \pi \rho}{\cosh^2 \pi v + \sinh^2 \pi \rho}. \tag{4.2.44}$$

4.3. $SO(2,1) \supset E(1)$ İndirgemesine Bağlı Potansiyellerin Sınıfı

$SO(2,1) \supset E(1)$ indirgemesi için (2.2.2) deki quazi-invaryans hacim elemanını, $\xi_+ = \xi_o + \xi_1$ olmak üzere

$$d\mu = v(\xi_+) d\xi \quad (4.3.1)$$

olarak seçelim, burada

$$v(\xi_+) = (\xi_o + \xi_1)^{-1}$$

yapısındadır. Böyle bir ölçüm aşağıda verilen dönüşüm altında invarianttır

$$n(t) = \begin{pmatrix} 1+t^2/2 & -t^2/2 & t \\ t^2/2 & 1-t^2/2 & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix}.$$

Bu realizasyonda quasiregüler temsil jeneratörlerini ve Casimir operatörünü sırasıyla J_o , J_1 , J_2 ve C ile tanıtaçğız. J_o , J_1 , J_2 jeneratörleri için

$$v^{-1/2}(\xi_2) \circ \tilde{J}_i \circ v^{1/2}(\xi_2) = J_i, \quad i = 0, 1, 2$$

$$v^{-1/2}(\xi_2) \circ \tilde{C} \circ v^{1/2}(\xi_2) = C$$

eşitliklerinden yararlanarak (Bölüm 4.1 dekine benzer olarak) aşağıdaki ifadeleri buluruz

$$J_o = i\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - i\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{i}{2v} \left(\xi_2 \frac{\partial v}{\partial \xi_1} - \xi_1 \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \right) \quad (4.3.2a)$$

$$J_1 = i\xi_o \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{i\xi_o}{2v} \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \quad (4.3.2b)$$

$$J_2 = i\xi_o \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{i\xi_o}{2v} \frac{\partial v}{\partial \xi_2}. \quad (4.3.2c)$$

$v(\xi_+)$ nın ξ_1 ve ξ_2 değişkenlerine göre diferansiyellerini göz önüne aldığımızda

$$\frac{\partial v(\xi_+)}{\partial \xi_1} = \frac{\xi_+}{\xi_2} \frac{\partial v(\xi_+)}{\partial \xi_2} \quad (4.3.3)$$

ilişkisini buluruz. (4.3.3) bağıntısını kullanarak (4.3.2) quasiregüler temsil jeneratörlerini

$$J_o = i\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - i\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{i\xi_o}{2v} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \quad (4.3.4a)$$

$$J_1 = i\xi_o \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{i\xi_o \xi_+}{2\xi_2 v} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \quad (4.3.4b)$$

$$J_2 = i\xi_o \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{i\xi_o}{2v} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \quad (4.3.4c)$$

ve dolayısıyla ve C Casimir operatörünü

$$\begin{aligned} C = & \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \left[\frac{\xi_o(\xi_o + \xi_1)}{\xi_2 v} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} + \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + 1 \right] \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) \\ & + \frac{\xi_o}{\xi_2 v} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\xi_o^2(\xi_o + \xi_1)}{2\xi_2 v} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \frac{(\xi_o + \xi_1)}{2\xi_2 v} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi_2} \right)^2 + \frac{(2\xi_o + \xi_1)}{\xi_o^2} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \right]. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

buluruz. $n(t)$ dönüşümlerine göre $N = J_o - J_2$ den

$$N = i \left(\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \xi_+ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) \quad (4.3.6)$$

sonsuz küçük operatörünü diyagonalleştirmek istiyoruz. Bu sebeple, ξ_1 ve ξ_2 değişkenlerinden $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \beta < \infty$ aralıklarında değişen yeni x ve β değişkenlerine geçelim

$$\begin{aligned} \xi_o &= \frac{1 + z^2(x) + \beta^2}{2z(x)}, \\ \xi_1 &= \frac{1 - z^2(x) - \beta^2}{2z(x)}, \\ \xi_2 &= \frac{\beta}{z(x)} \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Burada $z(x)$, R^+ daki değerleriyle R de diferansiyellenebilir bir fonksiyondur. Yaptığımız değişken değişimi sonucunda ξ_1 ve ξ_2 'ye göre diferansiyel operatörleri aşağıdaki yapıya sahip olur

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} = -\frac{2z^2}{\dot{z}(1+z^2+\beta^2)} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2z\beta}{(1+z^2+\beta^2)} \frac{\partial}{\partial \beta} \quad (4.3.8a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} = -\frac{2z^2\beta}{\dot{z}(1+z^2+\beta^2)} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{z(1+z^2-\beta^2)}{(1+z^2+\beta^2)} \frac{\partial}{\partial \beta}. \quad (4.3.8b)$$

x ve β değişkenlerine bağlı olarak (4.3.4) jeneratörlerini yeniden yazalım

$$J_o = -i \left[\frac{z\beta}{\dot{z}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(1-z^2+\beta^2)}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \quad (4.3.9a)$$

$$J_1 = -i \left(\frac{z}{\dot{z}} \frac{\partial}{\partial x} - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \quad (4.3.9b)$$

$$J_2 = i \left[-\frac{z\beta}{\dot{z}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(1+z^2-\beta^2)}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \right]. \quad (4.3.9c)$$

Bu durumda $N = J_o - J_2$ sonsuz küçük operatörü

$$N = -i \frac{\partial}{\partial \beta} \quad (4.3.10)$$

yapısında olur. (4.3.5) deki C Casimir operatörü

$$\frac{\partial v}{\partial \xi_1} = -\frac{2z^2}{\dot{z}(1+z^2+\beta^2)} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi_2} = -\frac{2z^2\beta}{\dot{z}(1+z^2+\beta^2)} \frac{\partial v}{\partial x}$$

olduğu göz önüne alınarak

$$C = \frac{z^2}{\dot{z}^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\dot{v}}{v} - \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \dot{z}^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1}{2v} \left[\ddot{v} - \frac{\dot{v}^2}{2v} - \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \dot{v} \right] \right\} \quad (4.3.11)$$

yapısında bulunur. Burada (ve daha sonraki ifadelerde) üs olarak yazılan noktalar x 'e göre türevi ifade eder yani, $\dot{z} = \frac{dz}{dx}$, $\ddot{z} = \frac{d^2z}{dx^2}$ vs.. (4.3.11) denklemiyle verilen C Casimir operatöründeki birinci türevi içeren terimi yok etmek için

$$\frac{\dot{v}}{v} - \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} = 0 \quad (4.1.12)$$

koşulunu koyarız. Bu koşulu sağlayan v çözümü

$$v = \pm \dot{z}$$

dır. Burada v nin azalan olduğu

$$v = -\dot{z} \quad (4.3.13)$$

çözümünü seçeceğiz. Çünkü (4.1.2) den dolayı v nin pozitif olması koşulu $\dot{z} < 0$ olmasını gerektirir. (4.3.13) çözümünü (4.3.11) denkleminde yazıp, düzenleme yaparsak

$$C = \frac{z^2}{\dot{z}^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right)^2 + \dot{z}^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] \quad (4.3.14)$$

elde ederiz. Böylece $SO(2,1)$ grubunun temel serilerinin $SO(2,1) \supset E(1)$ indirgemesine karşılık gelen baz fonksiyonları C ve N işlemciler kümesinin öz fonksiyonlarıdır

$$C f_{\lambda}^{(3)} = \left(-\frac{1}{4} - \rho^2 \right) f_{\lambda}^{(3)} \quad (4.3.15)$$

$$N f_{\lambda}^{(3)} = \lambda f_{\lambda}^{(3)}, \quad (4.3.16)$$

burada $N = -i \frac{\partial}{\partial \beta}$ idi ve C Casimir işlemcisi de (4.3.14) ile verilmişti. $SO(2,1) \supset E(1)$

indirgemesine karşılık gelen bazlarda verilen λ için $f_{\lambda}^{(3)}$ fonksiyonunun gerdiği bir boyutlu alt uzayı $\mathcal{H}_{\lambda}$ ile gösterelim. Ayrıca C işlemcisinin bu alt uzaya kısıtlanmasını da C_{λ} ile belirtelim. Böylece (4.3.14) de (4.3.16) ve (4.3.10) bağıntıları göz önüne alarak

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} f_{\lambda}^{(3)} = -\lambda^2 f_{\lambda}^{(3)}$$

eşitliğini kullandığımızda $\mathcal{H}_\lambda$ ya kısıtlanan Casimir işlemcisi yalnızca x 'e bağlı bir diferansiyel işlemci olur ve aşağıdaki yapıyı alır

$$Cf_\lambda^{(3)} = \frac{z^2}{\dot{z}^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right)^2 + \dot{z}^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] f_\lambda^{(3)}$$

$$C_\lambda = \frac{z^2}{\dot{z}^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right)^2 - \lambda^2 \dot{z}^2 \right]. \quad (4.3.17)$$

Eğer

$$\frac{z^2}{\dot{z}^2} = 1 \quad (4.3.18)$$

ise C_λ işlemcisi Schrödinger tipindedir. (4.3.18) denkleminde $\dot{z} < 0$ koşulu göz önüne alınarak z çözüldüğünde

$$z = e^{-x} \quad (4.3.19)$$

bulunur. Bu çözümü (4.3.17) de yerine yazıp, düzenleme yaptığımızda C_λ Casimir operatörü ile H_λ Hamiltonyeni arasında

$$H_\lambda = - \left(C_\lambda + \frac{1}{4} \right)$$

ilişkisini buluruz, burada

$$H_\lambda = - \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\lambda^2}{e^{2x}} \quad (4.3.20)$$

Toda Hamiltonyenidir. Bu sebeple, H_λ Toda Hamiltonyeni $SO(2,1)$ grup yapısına sahiptir. Aynı enerjili ama farklı potansiyel şiddetine sahip saçılma durumları $SO(2,1)$ grubunun temel serisinin üniter indirgenemez temsilleriyle ilişkilidir. Ancak (1.9) bağıntısını sağlayan Hamiltonyenler sınıfı için enerjinin bir fonksiyonu olarak λ^2 ve ρ^2 'nin seçimi aşağıdaki gibidir:

$$4\lambda^2 = g_2 - \sigma_2 E \quad (4.3.21a)$$

$$1 + 4\rho^2 = c_o E - h_o. \quad (4.3.21b)$$

Buna göre (1.9) daki $C_\lambda - j(j+1)$, $j = -\frac{1}{2} + i\rho$ ifadesinde

$$C_\lambda + \frac{1}{4} + \rho^2 = \frac{z^2}{\dot{z}^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right)^2 - \frac{\dot{z}^2}{4z^2} \left[-\lambda^2 + \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{4} + \rho^2 \right) \right] \right\}$$

(4.3.21) bağıntılarını kullanırsak

$$C_\lambda + \frac{1}{4} + \rho^2 = \frac{z^2}{\dot{z}^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right)^2 - \frac{\dot{z}^2}{4z^2} \left[(c_o + \sigma_2 z^2) E - (h_o + g_2 z^2) \right] \right\} \quad (4.3.22)$$

$$C_\lambda + \rho^2 + \frac{1}{4} = -\frac{z^2}{\dot{z}^2} (H - E) \quad (4.3.23)$$

ilişkisinin sağlandığını görürüz. (4.3.23) bağıntısını değişmez bırakan Hamiltonyenler

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x),$$

$$V(x) = \frac{g_2 z^2 + h_o + 1}{R} + \frac{z^2}{R^2} \left(-\sigma_2 + \frac{5\sigma_2 c_o}{R} \right) \quad (4.3.24)$$

yapısındadır. Burada

$$R(z) = c_o + \sigma_2 z^2$$

dır ve $z(x)$

$$\dot{z} = \frac{2z}{\sqrt{R(z)}}, \quad (4.3.25)$$

bağıntısını sağlar.

Elde ettiğimiz potansiyel yapısı ([65, 66] da verilen notasyona yakın bir notasyon izleyerek) h_o , c_o , g_2 , σ_2 parametrelerinin terimlerinde tanımlanan sınırlı konfluent Natanzon hipergeometrik potansiyeller sınıfına aittir. Konfluent Natanzon hipergeometrik potansiyeli [65, 66]

$$U[\zeta(x)] = \frac{g_2 \zeta^2 + g_1 \zeta + h_o + 1}{R} + \frac{\zeta^2}{R^2} \left[\frac{\sigma_1}{\zeta} - \sigma_2 - \frac{5\Delta}{4R} \right]$$

yapısındadır. Burada

$$R(\zeta) = \sigma_2 \zeta^2 + \sigma_1 \zeta + c_o$$

$$\Delta = \sigma_1^2 - 4\sigma_2 c_o$$

olarak tanımlanır. Edindiğimiz bulgular ışığında $H \neq f(C)|_{\mathcal{H}_\lambda}$ ilişkisinden dolayı

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \text{ tam çözülebilir Hamiltonyenlerin simetri kırılmasına sahip olduğu}$$

söylenebilir. Fakat bu Hamiltonyenler

$$\left(C + \rho^2 + \frac{1}{4} \right)_{\mathcal{H}_\lambda} = Q_3(x)(H - E)$$

yapısındaki bir başka cebirsel yapıya sahiptir. Burada λ ve ρ (4.3.21) bağıntılarıyla verilmişti ve

$$Q_3(x) = -\frac{z^2}{\dot{z}^2}$$

yapısındadır. (4.3.24) de özel bir durum olarak $\sigma_2 = 0$, $c_o = 4$ ve $h_o = -1$ seçtiğimizde

$$z(x) = e^{-x}$$

olur. $V(x)$ de

$$V(x) = \frac{g_2}{4} e^{-2x} \quad (4.3.26)$$

Toda potansiyelini sağlar.

Böylece dört parametreye bağlı Natanzon konfluent hipergeometrik potansiyelinin kısıtlı sınıfının S -matrisi intertwining matrisinin (3.2.43) deki

$$S_\lambda = c(\rho) |\lambda|^{-2ip}$$

diyagonal elemanları ile belirlenirken, dalga fonksiyonları $f_\lambda^{(3)}(\xi)$ baz fonksiyonlarına bağlıdır.

Diğer cebirsel yapılara nazaran, burada kullandığımız cebirsel yapı (4.1.26) da verilen dalga fonksiyonları için integral temsilini sağlar. Bu sınıflamadaki (4.1.26) integral dönüşümünde Γ eğrisi olarak $\Gamma = \Gamma_p$ alacağız. Burada $\Gamma_p: \zeta_o + \zeta_1 = 1$ düzlemiyle $\zeta_o^2 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2 = 0$, $\zeta_o > 0$ konisinin kesitidir, yani R^1 dir. Buna göre, konideki parabolik (veya horispherical) koordinat sistemi

$$\zeta = \omega n, \quad n = \left(\frac{1+t^2}{2}, \frac{1-t^2}{2}, t \right), \quad (4.3.27)$$

olarak tanıtlır, burada $0 \leq \omega < \infty$, $-\infty < t < \infty$ dir. (3.2.9) dan $F(\zeta)$ fonksiyonlarının

$$\Gamma_p = \left\{ n = \left(\frac{1+t^2}{2}, \frac{1-t^2}{2}, t \right) \mid -\infty < t < \infty \right\}$$

deki değerleriyle tek olarak belirlendiği izlenir. Γ_p uzayındaki U^χ , $\chi = (\rho, 0)$ temsili aşağıdaki bağıntıyı sağlar

$$U^\chi(g)F(n) = (\omega_g)^j F(n_g),$$

burada ω_g ve n_g ng nin (4.3.27) parametrizasyonundan yani $ng = \omega_g n_g$ den belirlenir.

(3.2.10) temsiliinin Casimir operatörü $C \equiv -\rho^2 - \frac{1}{4}$ dir. U^χ temsiliinin taşındığı uzayda uygun bazlar $SO(2,1) \supset E(1)$ indirgemesiyle verilir.

$$N = -i \frac{\partial}{\partial \beta} \quad (4.3.10)$$

olduğundan dolayı, (4.1.26) daki uygun baz fonksiyonları $F_\lambda^{(3)}(n) = e^{i\lambda t}$ dir. (4.1.26) ifadesine uygun olarak, (2.2.2) vasıtasıyla üretilen temel seri temsillerinin baz fonksiyonları için integral temsili aşağıdaki yapıdadır

$$\tilde{f}_\lambda^{(3)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} [\xi, n]^{-1-j} e^{i\lambda t} dt. \quad (4.3.28)$$

$\tilde{f}_\lambda^{(3)}$ baz fonksiyonları aslında birbirleriyle yer değiştirebilen $\tilde{C}$ ve $\tilde{N}$ operatör çiftinin, öz fonksiyonlarıdır. Burada $\tilde{C}$, $\tilde{T}$ 'nin Casimir operatörüdür ve $\tilde{N}$ $g_2(t)$ has Lorentz dönüşümüne karşılık gelen $\tilde{T}$ 'nin sonsuz küçük operatörüdür; ayrıca $\tilde{C}$ ve $\tilde{N}$ işlemcileri

$$\tilde{C}\tilde{f}_\lambda^{(3)} = j(j+1)\tilde{f}_\lambda^{(3)}, \quad j = -\frac{1}{2} - i\rho \quad (4.3.29)$$

$$\tilde{N}\tilde{f}_\lambda^{(3)} = \lambda\tilde{f}_\lambda^{(3)}. \quad (4.3.30)$$

bağıntılarını sağlar. Burada $\tilde{C}$ (2.3.14) ile verilmişti ve $\tilde{N}$ (4.3.10) ile tanımlanmıştı.

(4.3.28) denkleminde $n = \left(\frac{1+t^2}{2}, \frac{1-t^2}{2}, t \right)$ ve $\xi = (\xi_o, \xi_1, \xi_2)$ yi yerine yazdığımızda

$$\tilde{f}_\lambda^{(3)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1+t^2}{2} \xi_o - \frac{1-t^2}{2} \xi_1 - t\xi_2 \right)^{-1-j} e^{i\lambda t} dt \quad (4.3.31)$$

buluruz. (4.3.31) de

$$\xi_o = \frac{1+z^2(x)+\beta^2}{2z(x)}, \quad \xi_1 = \frac{1-z^2(x)-\beta^2}{2z(x)}, \quad \xi_2 = \frac{\beta}{z(x)} \quad (4.3.7)$$

$$-\infty < \beta < \infty, \quad -\infty < x < \infty;$$

koordinatlarını yerine yazıp, düzenleme yaptığımızda

$$\tilde{f}_\lambda^{(3)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{z^2}{2z} + \frac{(\beta-t)^2}{2z} \right)^{-1-j} e^{i\lambda t} dt \quad (4.3.32)$$

elde ederiz. (4.1.3) deki W tasvirine göre $SO(2,1) \supset E(1)$ indirgemesi için $v = -\dot{z}$ tanımını kullandığımızda

$$\tilde{f}_\lambda^{(3)} = (-\dot{z})^{1/2} f_\lambda^{(3)} \quad (4.3.33)$$

olur ve (4.3.33) ifadesini (4.3.32) de yazdığımızda

$$f_\lambda^{(3)}(\xi) = (-\dot{z})^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{z^2}{2z} + \frac{(\beta-t)^2}{2z} \right)^{-1-j} e^{i\lambda t} dt$$

buluruz. Burada $\beta - t = r$ dönüşümü yapıldığında

$$f_{\lambda}^{(3)}(\xi) = (-z)^{1/2} (2z)^{1+j} e^{i\lambda\beta} \int_{-\infty}^{\infty} (z^2 + r^2)^{-1-j} e^{-i\lambda r} dr$$

elde ederiz. İntegral içindeki r değişkenini t olarak adlandıralım ve $f_{\lambda}^{(3)}$ fonksiyonlarını

$$f_{\lambda}^{(3)}(\xi) = e^{i\lambda\beta} \Psi_{\lambda}(x) \quad (4.3.34)$$

olarak yazalım, burada

$$\Psi_{\lambda}(x) = (-z)^{1/2} (2z)^{1+j} \int_{-\infty}^{\infty} (z^2 + r^2)^{-1-j} e^{-i\lambda r} dr \quad (4.3.35)$$

dır. (4.3.34) denkleminde

$$\int_{-\infty}^{\infty} (z^2 + t^2)^{-1-j} e^{-i\lambda t} dt = 2 \int_0^{\infty} (z^2 + t^2)^{-1-j} \cos \lambda t dt$$

eşitliğini kullandığımızda

$$f_{\lambda}^{(3)}(\xi) = (-z)^{1/2} z^{1+j} 2^{2+j} e^{i\lambda\beta} \int_0^{\infty} (z^2 + t^2)^{-1-j} \cos \lambda t dt \quad (4.3.36)$$

buluruz. Burada λ 'nın iki durumu söz konusudur: $\lambda > 0$ ve $\lambda < 0$.

$\lambda > 0$ için:

(4.3.36) ifadesindeki integralde $\lambda t = y$ dönüşümü yapalım. O zaman, integralimiz

$$\int_0^{\infty} (z^2 + t^2)^{-1-j} \cos \lambda t dt = \lambda^{1+2j} \int_0^{\infty} (\lambda^2 z^2 + y^2)^{-1-j} \cos y dy \quad (4.3.37)$$

haline gelir. [70] (II. Cilt sayfa 83, (27)) den (4.3.37) nin çözümü

$$\int_0^{\infty} (\lambda^2 z^2 + y^2)^{-1-j} \cos y dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1+j)(2\lambda z)^{1/2+j}} K_{\frac{1}{2}+j}(\lambda z) \quad (4.3.38)$$

yapısındadır. Burada K_ν üçüncü tür değiştirilmiş Bessel fonksiyonlarıdır. Bu çözümü (6.3.34) de yazıp, düzenleme yaptığımızda

$$f_\lambda^{(3)}(\xi) = 2^{3/2} \sqrt{\pi} \frac{(\lambda)^{\frac{1}{2}+j} e^{i\lambda\beta}}{\Gamma(1+j)} \left(-\frac{z}{\dot{z}}\right)^{1/2} K_{\frac{1}{2}+j}(\lambda z), \quad \lambda > 0 \quad (6.3.39)$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} + j\right) > -\frac{1}{2}, \quad |\arg \lambda z| < \frac{\pi}{2}$$

elde ederiz.

$\lambda < 0$ için:

(4.3.36) daki integralde $\cos(\lambda t) = \cos(-\lambda t)$ alabileceğimizden bu durum için integralin çözümü $\lambda > 0$ için bulunan çözümle aynıdır. Bu sebeple (4.3.34) ün çözümü

$$f_\lambda^{(3)}(\xi) = 2^{3/2} \sqrt{\pi} \frac{(-\lambda)^{\frac{1}{2}+j} e^{i\lambda\beta}}{\Gamma(1+j)} \left(-\frac{z}{\dot{z}}\right)^{1/2} K_{\frac{1}{2}+j}(-\lambda z), \quad \lambda < 0 \quad (4.3.40)$$

olur. Bu iki durumu da içeren genel ifade

$$f_\lambda^{(3)}(\xi) = 2^{3/2} \sqrt{\pi} \frac{|\lambda|^{\frac{1}{2}+j} e^{i\lambda\beta}}{\Gamma(1+j)} \left(-\frac{z}{\dot{z}}\right)^{1/2} K_{\frac{1}{2}+j}(|\lambda|z) \quad (4.3.41)$$

yapısına sahiptir. Böylece Ψ dalga fonksiyonu için

$$\Psi \propto \left(-\frac{z}{\dot{z}}\right)^{1/2} K_{\frac{1}{2}+j}(|\lambda|z) \quad (4.3.42)$$

olduğunu belirtebiliriz.

BÖLÜM 5

TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde Hamiltonyenleri (1.9) bağıntısını sağlayan saçılma sistemlerini araştırdık. $SO(2,1)$ grubunun quasideğerler temsillerinin Casimir operatörünü hesaplayarak (1.9) bağıntısını sağlayan Hamiltonyenlerin genel yapısını (4.1.24), (4.2.18), (4.3.24) olarak bulduk. Elde edilen sistemlerin potansiyelleri dört parametreye bağlıdır. (1.9) bağıntısından dolayı bu sistemlerin nicelikleri: saçılma matrisi, dalga fonksiyonu vs. grup yöntemiyle hesaplanabilir. Buna göre, [46] da sunulan güncel metodu kullanarak (4.1.24), (4.2.18), (4.3.24) Hamiltonyenleri için saçılma matrislerini hesapladık. Ayrıca grup yöntemiyle, bu Hamiltonyenlerin öz fonksiyonları için integral temsiller bulduk ve onları özel fonksiyonlar cinsinden hesapladık. Bununla birlikte, $SO(2,1)$ grubuna bağlı saçılma problemlerinin üç sınıfa ayrıldığını tespit ettik. Bu sınıflar Casimir operatörünün $SO(2,1) \supset SO(2)$, $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ ve $SO(2,1) \supset E(1)$ indirgemelerine karşılık gelmektedir.

$SO(2,1) \supset SO(2)$ indirgemesine bağlı (4.1.24) potansiyellerin, Natanzon hipergeometrik potansiyeller ailesine ait olduğunu belirledik. Ayrıca bu potansiyellere bağlı parametrelerin özel değerlerinde Pöschl-Teller [41] potansiyelini elde ettik. Bu potansiyel fizikteki değişik problemlerde: Korteweg-de Vries denkleminin soliton çözümlerinde [72], sine-Gordon denkleminin nonrelativistik limitinde [73] ve integrallenebilir çok-parçacıklı bir-boyutlu Calogero-Sutherland sistemlerinde [74] iki-parçacık etkileşme potansiyeli olarak ortaya çıkar.

$SO(2,1) \supset SO(1,1)$ indirgemesine bağlı (4.2.18) potansiyellerin, Ginocchio potansiyeller ailesinin [71] bir genelleştirilmesi olduğunu tespit ettik. Belirtelim ki, Ginocchio potansiyelleri çekirdeklerin özelliklerinin incelenmesinde kullanılır [75, 76].

$SO(2,1) \supset E(1)$ indirgemesine bağlı (4.3.24) potansiyellerin, Natanzon konfluent hipergeometrik potansiyeller ailesine ait olduğunu belirledik. Dört parametreye bağlı olan bu potansiyellerin parametrelerin özel bir değerinde Toda potansiyeline indirgendığını gösterdik. Bu potansiyel, bir-boyutlu çok-parçacıklı Toda sisteminde iki-parçacık etkileşmesini tanımlar [77, 78].

Elde ettiğimiz üç sınıf saçılma sistemleri arasındaki yapısal farklılık, şöyle ifade edilebilir. $SO(2,1) \supset SO(2)$ ve $SO(2,1) \supset E(1)$ indirgemelerine karşılık gelen sistemlerin saçılma matrisi modülü bir olan kompleks sayıdır. Dolayısıyla bu tür sistemlerde potansiyel bölgesine gelen parçacık yalnızca yansır, potansiyelden geçiş yapmaz. $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ indirgemesine bağlı sistemlerin S matrisi 2×2 lik üniter matristir. Bu yüzden bu tür sistemlerde potansiyel bölgesine gelen parçacıkların bir kısmı yansır ve bir kısmı da potansiyel engelini aşar. Ayrıca belirtelim ki, (4.1.24), (4.2.18) ve (4.3.24) deki potansiyeller için bağlı durum çözümleri yoktur.



KAYNAKLAR

- [1] Merzbacher E., 1970, Quantum Mechanics, Singapore, Wiley
- [2] Flügge S., 1974, Practical Quantum Mechanics, New York, Springer-Verlag
- [3] Eberly J. H., 1965, Am. J. Phys., **33**, 771
- [4] Kamal A. N., 1984, Am. J. Phys., **52**, 46
- [5] Nogami Y. ve Ross C. K., 1996, Am. J. Phys., **64**, 923
- [6] Newton R. G., J. Math. Phys., 1980, **21**, 493
- [7] Newton R. G., J. Math. Phys., 1983, **24**, 2152
- [8] Newton R. G., J. Math. Phys., 1984, **25**, 2991
- [9] Barlette V. E., Leite M. M., vd. , 2001, Am. J. Phys., **69**, 1010
- [10] Muga J. G., 2001, To appear in 'Time in quantum Mechanics', Edited by Muga J. G., Sala Mayato R. and Egusquiza I. L., Springer-Verlag
- [11] Kiers K. A. ve Van Dijk W., 1996, J. Math. Phys., **37**, 6033
- [12] Pauli W., 1926, Z. Phys., **36**, 336
- [13] Fock V., 1935, Z. Phys., **98**, 145
- [14] Bargman V., 1936, Z. Phys., **99**, 576
- [15] Goshen (Goldstein) S., ve Lipkin H. J., 1959, Ann. Phys., **6**, 301
- [16] Barut A. O. ve Bohm A., 1965, Phys. Rev., **139B**, 1107
- [17] Barut A. O. ve Fronsdal C., 1965, Proc. Roy. Soc., **A287**, 532
- [18] Cordero P. ve Ghirardi G. C., 1971, Nuovo Cimento, **2A**, 217
- [19] Cordero P. ve Ghirardi G. C., 1972, Fortschr. Phys., **20**, 105
- [20] Cordero P. ve Hojman S., 1970, Lett. Nuovo Cimento, **4**, 1123
- [21] Arima A. ve Iachello F., 1976, Ann. Phys. (N. Y.), **99**, 253
- [22] Arima A. ve Iachello F., 1978, Ann. Phys. (N. Y.), **111**, 201
- [23] Arima A. ve Iachello F., 1979, Ann. Phys. (N. Y.), **123**, 468
- [24] Iachello F., 1981, Chem. Phys. Lett., **78**, 581
- [25] Iachello F. ve Levine R. D., 1982, J. Chem. Phys., **77**, 3046
- [26] Zwanziger D., J. Math. Phys., 1967, **8**, 1858
- [27] Alhassid Y., Gürsey F., vd., 1983, Phys. Rev. Lett., **50**, 873
- [28] Alhassid Y., Gürsey F., vd., 1983, Ann. Phys. (N.Y.), **148**, 346
- [29] Wu J., Alhassid Y., vd., 1989, Ann. Phys. (N.Y.), **196**, 163
- [30] Alhassid Y., Gürsey F., vd., 1986, Ann. Phys. (N.Y.), **167**, 181

- [31] Wu J., Iachello F., vd., 1987, Ann. Phys. (N.Y.), **173**, 68
- [32] Frank A. ve Wolf K. B., 1984, Phys. Rev. Lett., Vol. 52, No:20, 1737
- [33] Frank A. ve Wolf K. B., 1985, J. Math. Phys., **26**, 973
- [34] Alhassid Y., Engel J., vd., 1984, Phys. Rev. Lett., Vol. 53, No:1, 17
- [35] Frank A., Alhassid Y., vd., 1986, Phys. Rev. A, **94**, 677
- [36] Alhassid Y., Iachello F., vd., 1986, Phys. Rev. Lett., **56**, 271
- [37] Alhassid Y. ve Iachello F., 1989, Nuclear Phys., **A501**, 585
- [38] Lichtenthaler Filho R., Villari A.C.C., vd., 1991, Phys. Lett. B,(North-Holland), **269**,49
- [39] Lepine-Szily A., Obuti M. M., vd., 1990, Phys. Lett. B, Vol. 243, No:1,2, 23
- [40] Wu J., Stahlhofen A., vd., 1987, J. Phys. A: Math.Gen., **20**, 4633 (Printed in the UK)
- [41] Pöschl G. ve Teller E., 1933, Z. Phys., **83**, 143
- [42] Gilmore R., 1974, Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications (New York: Wiley)
- [43] Olshanetsky M. A. ve Perelomov A. M., 1977, Lett. Math. Phys., **2**, 7
- [44] Olshanetsky M. A. ve Perelomov A. M., 1983, Phys. Rep., **94**, 313
- [45] Ghirardi G. C., 1972, Nuovo Cimento, Vol. 10A, No:1, 97
- [46] Kerimov G.A., 1998, Phys. Rev. Lett., Vol. 80, No:14, 2976
- [47] Kerimov G.A., 2002, Phys. Lett. A, **294**, 278
- [48] Kunze R. A., ve Stein E. M., 1967, Am. J. Math. **89**, 385
- [49] Schiffman G. 1971, Bull. Soc. Math. France, **99**, 3
- [50] Knapp A. W. ve Stein E. M. 1971, Ann. Math., **99**, 489
- [51] Knapp A. W. ve Stein E. M. 1980, Invent. Math., **60**, 9
- [52] Knapp A. W. ve Stein E. M. 1976, Intertwining operators for $SL(n, \mathbb{R})$, in Studies in Mathematical Physics, sayfa 239-267 (Princeton: Princeton University Press)
- [53] Kerimov G.A. ve Sezgin M., 1998, J. Phys. A: Math.Gen., **31**, 7901 (Printed in the UK)
- [54] Kerimov G. A. ve Seckin-Gorgun N., 2002, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 6659 (Printed in the UK)
- [55] Wybourne B. G., 1974, Classical Groups for Physicists, New York:Wiley
- [56] Barut A. O., 1971, Dynamical Group and Generalized Symmetries in Quantum Theory, New Zealand, Christchurch, University of Cantenbury
- [57] Schiff, L.I., 1968, Quantum Mechanics, 3rd ed., New York, McGraw-Hill
- [58] Barut A.O. ve Raczka R., 1980, Theory of Group Representations and Applications,

(Warszawa: Polish Scientific Publishers)

- [59] Vilenkin N. JA., Special Functions and The Theory of Group Representations, 1968, Rhode Island, American Mathematical Society
- [60] Vilenkin N. Ja. ve Klimyk A. U., 1993, Representation of Lie Groups and Special Functions, Vol. 1, Netherlands, Kluwer Academic Publishers
- [61] Naimark M. A., Linear Representations of the Lorentz Group, 1964, New York, Macmillian, (Pergamon)
- [62] Bohm A, Néeman Y. vd., 1988, Dynamical Groups and Spectrum Generating Algebras Vol. 1, Singapore, World Scientific Publishing
- [63] Bohm A, Néeman Y. vd., 1988, Dynamical Groups and Spectrum Generating Algebras Vol. 2, Singapore, World Scientific Publishing
- [64] Gradshtyen I. S. ve Ryzhik I. M., 1980, Table of Integrals, Series and Products, New York, Academic
- [65] Natanzon G. A., 1971, Vestn. Leningr. Univ., No:10, 22
- [66] Natanzon G. A., 1979, Theoret. Mat. Fiz., **38**,146 (English transl.)
- [67] Wu J., Alhassid Y., 1990, J. Math. Phys., **31**, 557
- [68] Cooper F., Ginocchio J. N., vd., 1987, Phys. Rev. D, Vol. 36, No:8, 2548
- [69] Cordero P. ve Salomo S., 1994, J. Math. Phys., Vol.35, No.7, 3301
- [70] Bateman H., 1953, Higher Transcendental Functions Vol. I, sayfa: 102, 105, 124, 140, New York: McGraw-Hill.
- [71] Ginocchio J., 1984, Ann Phys. (N.Y), **152**, 203
- [72] Lax P., 1968, Commun. Pure Appl. Math., **27**, 97
- [73] Zamolodchicov A. B. ve Zamolodchicov A. B., 1979, Ann. Phys. (N.Y.), **120**, 253
- [74] Calogero F., 1975, Lett. Nuovo Cim. **13**, 411
- [75] Negele J. N.,1970, Phys. Rev. C **1**, 1260
- [76] Woods R. D. ve Saxon D. S., 1954, Phys. Rev., **95**, 577
- [77] Gutzwiller M.C., 1980, Ann. Phys., **124**, No:2, 347
- [78] Gutzwiller M.C., 1981, Ann. Phys., **133**, 304

ÖZGEÇMİŞ

14.05.1970 yılında Edirne’de doğdu. İlk öğrenimini 1977-1981 yılları arasında Kurtuluş İlkokulu’nda, orta öğrenimini 1981-1987 yılları arasında Atatürk Ortaokulu ve Edirne Lisesi’nde yaptı. Lisans eğitimini 1987-1991 yılları arasında Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünde yaparak Fizikçi unvanını aldı. 1991 yılında Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü Genel Fizik Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. Yüksek Lisans eğitimini 1991-1994 yılları arasında T. Ü. Fen-Bilimleri Enstitüsü’nde tamamlayarak Uzman unvanını aldı. Doktora eğitimine 1994 yılında T. Ü. Fen-Bilimleri Enstitüsü’nde başladı. 1998 yılında evlendi. Halen T. Ü. Fen- Edeb. Fak. Fizik Bölümü Genel Fizik Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

Nurşen SEÇKİN GÖRGÜN