ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SELFADJOİNT OLMAYAN DİSKRE DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

131361

Sevda SAĞIROĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

131361

ANKARA
2003

Her hakkı saklıdır

Yrd. Doç. Dr. Cafer COŞKUN danışmanlığında Sevda SAĞIROĞLU tarafından hazırlanan bu çalışma 17.07.2003 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı` nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan Prof. Dr. Öner ÇAKAR

Prof. Dr. Ziya ARGÜN

Yrd. Doç. Dr. Cafer COŞKUN

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Metin OLGUN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SELFADJOİNT OLMAYAN DİSKRE DIRAC OPERATÖRÜNÜN

SPEKTRAL ANALİZİ

Sevda SAĞIROĞLU

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Cafer COŞKUN

$l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^2)$ Hilbert uzayı üzerinde tanımlı diskre Dirac operatörünün spektral analizini konu alan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; bazı temel kavramlar ile spektral analizin temel tanım ve teoremleri verilmiştir.

İkinci bölümde; diskre Dirac operatörü tanımlanmış ve bu operatörün Jost çözümü ifade edilerek bu çözümün özellikleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde; diskre Dirac operatörünün resolvent operatörünün, spektrumunun ve spektral tekilliklerinin özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü ve son bölümde ise diskre Dirac operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklerine karşılık gelen esas vektörleri elde edilmiştir.

2003, 57 sayfa

ANAHTAR KELİMELER : Diskre Dirac operatörü, Jost çözümü, özdeğer, spektrum, resolvent, spektral analiz, esas vektör.

ABSTRACT

Master Thesis

SPECTRAL ANALYSIS OF THE NON-SELFADJOINT

DISCRETE DIRAC OPERATORS

Sevda SAĞIROĞLU

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Asist. Prof. Dr. Cafer COŞKUN

This thesis deals with the spectral analysis of discrete Dirac operators defined on the Hilbert space $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^2)$ and it consists four chapters.

In the first chapter, besides the basic definitions and theorems of spectral analysis some main concepts have been also given.

Second chapter is devoted to the Jost solutions of the discrete Dirac operators and its properties.

In the third chapter the spectrum and spectral singularities of the resolvent operators of discrete Dirac operators have been examined.

In the last chapter the fundamental vectors corresponding to the eigenvalues and spectral singularities of the discrete Dirac operator have been obtained.

2003, 57 pages

Key Words: Discrete Dirac operator, Jost solution, eigenvalue, spectrum, resolvent,spectral analysis, fundamental vectors.

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren ve çalışmalarım süresince görüş ve önerileriyle beni yönlendiren sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Cafer Coşkun (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'a, çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve katkısını gördüğüm sayın hocam Prof. Dr. Elgiz Bayram (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Ayrıca Araştırma Görevlisi arkadaşım sayın Dr. Murat Adıvar'a yardımları ve desteği için teşekkür ederim.

Sevda SAĞIROĞLU

Ankara, Temmuz 2003

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\operatorname{Im} z$	z kompleks sayısının sanal kısmı
$\mathbb{C}_+$	$\operatorname{Im} z > 0$ koşulunu gerçekleyen z kompleks sayıları
$\overline{\mathbb{C}_+}$	$\operatorname{Im} z \geq 0$ koşulunu gerçekleyen z kompleks sayıları
$\mathcal{D}(A)$	A operatörünün tanım kümesi
$\mathcal{R}(A)$	A operatörünün değer kümesi
$\mathcal{N}(A)$	A operatörünün sıfır uzayı
$\overline{\mathcal{D}(A)}$	A operatörünün tanım kümesinin kapanışı
A^*	A operatörünün Hilbert adjointi
I	Özdeşlik operatörü
Δ	İleri fark operatörü
$W[f, \varphi]$	f ve φ çözümlerinin Wronskiyeni
$R_\lambda(A)$	A operatörünün resolvent operatörü
$\rho(A)$	A operatörünün resolvent kümesi
$\sigma(A)$	A operatörünün spektrumu
$\sigma_d(A)$	A operatörünün diskre spektrumu
$\sigma_c(A)$	A operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_r(A)$	A operatörünün rezidü spektrumu
$\sigma_{ss}(A)$	A operatörünün spektral tekilliklerinin kümesi
$\mu(J)$	J aralığının Lebesgue ölçüsü
l_1	Mutlak yakınsak seri oluşturan diziler uzayı
l_2	İkinci dereceden mutlak yakınsak seri oluşturan diziler uzayı

1.GİRİŞ

1.1. Çalışmanın Kapsamı

Diferensiyel operatörlerin spektral analizi matematik, fizik ve fonksiyonel analizin birçok problemi için önem taşıdığından matematikçilerin dikkatini çekmiş ve bu konuda çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar, diferensiyel operatörlerin; spektrumlarının araştırılmasına, özfonksiyonlara göre spektral açılımlarınının bulunmasına yani spektral analizine ilişkindir.

İlk olarak; Naimark 1960 da selfadjoint olmayan sürekli ve diskre spektruma sahip Sturm-Liouville operatörünün spektral analizi ile ilgili çalışmaya başlamış ve Sturm-Liouville operatörünün spektrumunun; sürekli spektrum, diskre spektrum ve spektral tekilliklerden oluştuğunu ispatlamıştır. Daha sonra spektral tekilliklerin spektral analizdeki önemi Lyance tarafından ortaya konmuştur. E. Bairamov, Ö. Çakar ve A. M. Krall 2001 de yayınlanan "Non-selfadjoint difference operators and Jacobi matrices with spectral singularities " başlıklı çalışmalarında ikinci mertebeden selfadjoint olmayan fark denklemlerinin de spektral tekilliğe sahip olduğunu kanıtlamışlardır böylece; sürekli ve diskre (nokta) spektruma sahip selfadjoint olmayan fark denklemlerinin spektral analizi önem kazanmıştır. Self-adjoint fark denklemlerinin spektral analizi ile ilgili çalışmalar ise Agarwal ve Wong tarafından " Advanced Topics in Difference Equations " ve Berezanski tarafından " Expansion in Eigenfunctions of Self-adjoint Operators " adlı kitaplarda toplanmıştır.

Bu çalışmada ise

$$\langle y, u\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(y_n^{(1)} \overline{u_n^{(1)}} + y_n^{(2)} \overline{u_n^{(2)}} \right)$$

iç çarpımıyla birlikte bir Hilbert uzayı olan

$$y = \begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}}$$

kompleks vektör dizilerinin uzayı $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^2)$ ile, Δ ileri fark operatörü yani $\Delta y_n^{(i)} = y_{n+1}^{(i)} - y_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, $n \in \mathbb{N}$, $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompleks terimli diziler olmak üzere bu uzay üzerinde

$$(ly)_n = \begin{pmatrix} \Delta y_n^{(2)} + p_n y_n^{(1)} \\ -\Delta y_{n-1}^{(1)} + q_n y_n^{(2)} \end{pmatrix}, \; n \in \mathbb{N}$$

fark ifadesi ile tanımlı selfadjoint olmayan diskre Dirac operatörü de L ile gösterilmiş ve $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompleks terimli dizilerinin

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(|p_n| + |q_n|\right) < \infty$$

koşulunu sağlaması durumunda L operatörünün Jost çözümü, spektrumu ve resolventi incelenmiştir. Ayrıca, $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri için

$$\sup_{1\leq n<\infty} \left(|p_n| + |q_n|\right) \exp\left(\varepsilon\sqrt{n}\right) < \infty, \; \varepsilon > 0$$

koşulunun gerçeklenmesi durumunda da L operatörünün özdeğer ve spektral tekilllikleriyle ilgili bilgiler derlenmiştir.

1.2. Temel Kavramlar ve Sonuçlar

Tanım 1.2.1. X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki vektör uzay olmak üzere

$$A: \; \mathcal{D}(A) \subset X \;\longmapsto\; Y$$

operatörü verilsin. A operatörünün $\mathcal{D}(A)$ tanım bölgesi ve $\mathcal{R}(A)$ değer bölgesi sırasıyla X ve Y nin altvektör uzayları olsunlar. Eğer; $\forall x, y \in \mathcal{D}(A)$ ve $\forall \alpha, \gamma \in K$ için

$$A(\alpha x + \gamma y) = \alpha A(x) + \gamma A(y)$$

ise A operatörü lineerdir denir (A. L. Brown ve A. Page, 1970).

Tanım 1.2.2. X ve Y aynı bir K cismi üzerinde normlu iki uzay ve

$$A: \ X \ \longmapsto \ Y$$

lineer bir operatör olsun. Eğer; $\forall x \in X$ için

$$\|Ax\| \leq c\,\|x\|$$

olacak biçimde bir $c > 0$ sayısı varsa A ya sınırlı lineer bir operatör adı verilir (A. L. Brown ve A. Page, 1970).

Tanım 1.2.3. X ve Y iki normlu uzay ve $A : X \longmapsto Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer; X in sınırlı her altkümesinin A operatörü altındaki görüntüsü rölatif kompakt ise A ya kompakt operatör denir (A. L. Brown ve A. Page, 1970).

Teorem 1.2.4. (**$l_2(\mathbb{N})$ de Kompaktlık Kriteri**) $M \subset l_2(\mathbb{N})$ sınırlı bir küme olsun. Eğer; $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) \in M$ için $n > N_0$ oldukça

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \varepsilon^2$$

sağlanacak biçimde en az bir $N_0(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa M kompakttır (Lusternik ve Sobolev, 1968).

Tanım 1.2.5. X bir Hilbert uzayı, $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longmapsto X$ lineer bir operatör ve $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ olsun. $y \in X$ olmak üzere $\forall x \in \mathcal{D}(A)$ için

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$$

eşitliğini gerçekleyen A^* operatörüne A operatörünün Hilbert-adjoint operatörü denir (A. L. Brown ve A. Page, 1970).

Tanım 1.2.6. X bir Hilbert uzayı ve A, X üzerinde tanımlı lineer bir operatör olsun. Eğer; $\forall x, y \in \mathcal{D}(A)$ için

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

eşitliği gerçekleniyor ise A operatörüne Hermitian operatör denir (Naimark, 1968).

Tanım 1.2.7. X bir Hilbert uzayı olmak üzere tanım kümesi X de yoğun olan Hermitian bir operatöre simetrik operatör denir (Naimark, 1968).

Tanım 1.2.8. X bir Hilbert uzayı olmak üzere tanım kümesi X de yoğun olan lineer bir A operatörü için $A^* = A$ ise A ya self-adjoint operatör denir (Naimark, 1968).

Teorem 1.2.9. X bir Hilbert uzayı olsun ve $A : X \longmapsto X$ sınırlı lineer operatörü verilsin. A operatörünün self-adjoint olması için gerek ve yeter şart A nın simetrik olmasıdır (A. L. Brown ve A. Page, 1970).

1.3. Spektrum ve Resolvent

Bu kısımda, X'i $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde normlu bir vektör uzay olarak gözönüne alıp, θ ile X vektör uzayının sıfır elemanını ve I ile de X den X e tanımlı özdeşlik operatörünü göstereceğiz.

Tanım 1.3.1. $X \neq \{\theta\}$ ve $A : X \longmapsto X$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer; $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ mevcut, sınırlı ve X de yoğun bir küme üzerinde tanımlı ise $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına A nın bir regüler değeri denir. A nın bütün regüler değerlerinin oluşturduğu kümeye A nın resolventi denir ve $\rho(A)$ ile gösterilir.

$\rho(A)$ nın $\mathbb{C}$ kompleks düzlemindeki tümleyeni olan $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$ kümesine A nın spektrumu ve bir $\lambda \in \sigma(A)$ sayısına da A nın bir spektral değeri denir (Naimark, 1968).

Tanım 1.3.2. $A : X \longmapsto X$ lineer bir operatör olsun. Eğer; $Ax = \lambda x$ olacak biçimde X de bir $x \neq \theta$ elemanı varsa λ kompleks sayısına A nın bir özdeğeri ve $x \in X$ elemanına da bir özvektör denir.

Yukarıdaki tanımlardan aşağıdaki sonuçlar elde edilir :

(i) Eğer λ, A operatörünün bir özdeğeri ise $A - \lambda I$ operatörü birebir değildir. Dolayısıyla; $R_\lambda(A)$ mevcut olamayacağından $\lambda \in \sigma(A)$ olur. Yani her özdeğer bir spektral değerdir. Buna göre A operatörünün özdeğerlerinin kümesi $\sigma_d(A)$ ile gösterilirse $\sigma_d(A) \subset \sigma(A)$ olur ve $\sigma_d(A)$ kümesine A operatörünün diskre spektrumu (veya nokta spektrumu) adı verilir.

(ii) Eğer; $R_\lambda(A)$ mevcut, X de yoğun bir küme üzerinde tanımlı ancak sınırsız ise $\lambda \in \sigma(A)$ olur. Bu özelliğe sahip bütün λ ların kümesine A operatörünün sürekli spektrumu denir ve $\sigma_c(A)$ ile gösterilir.

(iii) $R_\lambda(A)$ mevcut ancak X de yoğun bir küme üzerinde tanımlı olmayacak şekildeki λ spektral değerlerinin oluşturduğu kümeye ise A operatörünün rezidü spektrumu denir ve $\sigma_r(A)$ ile gösterilir.

Diğer yandan, $\lambda \in \sigma(A)$ spektral değeri $\sigma_d(A), \sigma_c(A)$ ve $\sigma_r(A)$ kümelerinden en az birine aittir. Buna göre;

$$\sigma(A) = \sigma_d(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

yazılabilir. Ayrıca, $\rho(A), \sigma_d(A), \sigma_c(A)$ ve $\sigma_r(A)$ kümeleri ayrık olup birleşimleri tüm kompleks düzlemi verir (Naimark, 1968).

Teorem1.3.3. H kompleks bir Hilbert uzayı ve $A : H \longmapsto H$ sınırlı lineer, self-adjoint bir operatör olsun. Bu durumda; $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ dir (A. L. Brown ve A. Page, 1970).

Teorem1.3.4. H kompleks bir Hilbert uzayı ve $A : H \longmapsto H$ sınırlı lineer, self-adjoint bir operatör olsun. Bu durumda; A nın $\sigma_r(A)$ rezidü spektrumu boştur (A. L. Brown ve A. Page, 1970).

Teorem1.3.5. (Weyl-von Neuman Teoremi) Self-adjoint bir A_1 operatörü ve kompakt bir A_2 operatörü için $A = A_1 + A_2$ olsun. Bu durumda; $\sigma_c(A) = \sigma_c(A_1)$ olur (Glazman, 1965).

Tanım 1.3.6. $A : X \longmapsto X$ sınırlı lineer bir operatör olsun. A nın $R_\lambda(A)$ resolvent operatörünün kutup noktası olup A nın özdeğeri olmayan λ kompleks sayılarına A operatörünün spektral tekillikleri adı verilir. A nın spektral tekilliklerinin kümesi $\sigma_{ss}(A)$ ile gösterilir (Naimark, 1968).

Şimdi de analitik fonksiyonların özeliklerini karakterize eden ve bir operatörün spektrumunun incelenmesinde yararlı olan aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem1.3.7. (Privalov Birebirlik Teoremi) $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ yarı düzlemi üzerinde analitik olan kompleks değerli g fonksiyonunun reel sıfırlarının kümesi E ile gösterilsin. Eğer; $\overline{E} = E$ ve $\mu(E) > 0$ ise $\forall z \in \overline{\mathbb{C}_+}$ için $g \equiv 0$ dır (Privalov, 1956).

Teorem 1.3.8. $g : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ üzerinde analitik ve özdeş olarak sıfırdan farklı olsun. Bu durumda;

(i) g fonksiyonunun sıfır yerleri ayrıktır.

(ii) Eğer; z_0, g nin bir sonsuz katlı sıfırı ise z_0 $\mathcal{D}$ nin sınırındadır.

(iii) g fonksiyonunun sıfırlarının yığılma noktaları $\mathcal{D}$ nin sınırındadır.

(Dolzhenko, 1979).

2. DİSKRE DIRAC OPERATÖRÜ VE JOST ÇÖZÜMÜ

2.1. Diskre Dirac Operetörü

$l_2(\mathbb{N},\mathbb{C}^2)$ ile

$$\langle y,u\rangle=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(y_n^{(1)}\overline{u_n^{(1)}}+y_n^{(2)}\overline{u_n^{(2)}}\right)$$

iç çarpımına sahip

$$y=\begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}}$$

şeklindeki kompleks vektör dizilerinin Hilbert uzayı gösterilsin.

$l_2(\mathbb{N},\mathbb{C}^2)$ üzerinde $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompleks terimli diziler olmak üzere

$$(ly)_n=\begin{pmatrix} \Delta y_n^{(2)}+p_n y_n^{(1)} \\ -\Delta y_{n-1}^{(1)}+q_n y_n^{(2)} \end{pmatrix}_n,\ n\in\mathbb{N}$$

ifadesi yardımıyla tanımlanan L operatörüne Dirac operatörü adı verilir.

$$(Ly)_n=\lambda y_n\ ,n\in\mathbb{N}$$

denklemler sistemi

$$\begin{array}{ll} y_{n+1}^{(2)}-y_n^{(2)}+p_n y_n^{(1)} & =\lambda y_n^{(1)} \\ -y_n^{(1)}+y_{n+1}^{(1)}+q_n y_n^{(2)} & =\lambda y_n^{(2)} \end{array}\quad n=1,2,\ldots \tag{2.1.1}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, λ spektral parametredir.

(2.1.1) sistemi çok iyi bilinen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & q(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Dirac sisteminin diskre analoğu olduğundan, bu sisteme diskre Dirac sistemi denir.

Bundan sonraki işlemlerimizde, $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompleks terimli dizileri için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(|p_n|+|q_n|\right)<\infty \tag{2.1.2}$$

koşulunun gerçeklendiğini kabul edelim. (2.1.1) sistemini

$$y_0^{(1)}=0 \tag{2.1.3}$$

koşuluyla gözönüne alalım ve Jost çözümünün özeliklerini inceleyelim.

Bundan sonra, $\mathbb{C}_+$ ve $\overline{\mathbb{C}_+}$ ile sırasıyla pozitif üst yarı düzlemi ve kapalı üst yarı düzlemi gösterelim.

$l_2\left(\mathbb{N},\mathbb{C}^2\right)$ üzerinde

$$(l_1 y)_{n\in\mathbb{N}}=\begin{pmatrix} y_{n+1}^{(2)}-y_n^{(2)} \\ -y_n^{(1)}+y_{n-1}^{(1)} \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ve} \quad (l_2 y)_{n\in\mathbb{N}}=\begin{pmatrix} p_n y_n^{(1)} \\ q_n y_n^{(2)} \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}}$$

fark ifadeleriyle tanımlanan operatörler sırasıyla L_1 ve L_2 ile gösterilirse $L=L_1+L_2$ olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca L_1 ve L_2 için aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 2.1.1. L_1 operatörü lineer, sınırlı ve self-adjointtir.

İspat. $\forall\, u=\begin{pmatrix} u_n^{(1)} \\ u_n^{(2)} \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $v=\begin{pmatrix} v_n^{(1)} \\ v_n^{(2)} \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}} \in l_2\left(\mathbb{N},\mathbb{C}^2\right), \forall\alpha,\gamma\in\mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} L_1(\alpha u+\gamma v) &= \begin{pmatrix} \alpha u_{n+1}^{(2)}+\gamma v_{n+1}^{(2)}-\alpha u_n^{(2)}-\gamma v_n^{(2)} \\ -\alpha u_n^{(1)}-\gamma v_n^{(1)}+\alpha u_{n-1}^{(1)}+\gamma v_{n-1}^{(1)} \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha u_{n+1}^{(2)}-\alpha u_n^{(2)} \\ -\alpha u_n^{(1)}+\alpha u_{n-1}^{(1)} \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}}+\begin{pmatrix} \gamma v_{n+1}^{(2)}-\gamma v_n^{(2)} \\ -\gamma v_n^{(1)}+\gamma v_{n-1}^{(1)} \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \alpha L_1(u)+\gamma L_1(v) \end{aligned}$$

olduğundan L_1 operatörü lineerdir.

Diğer yandan, $\forall u = \begin{pmatrix} u_n^{(1)} \\ u_n^{(2)} \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}} \in l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^2)$ için

$$
\begin{aligned}
\|(L_1u)_n\| &= \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|u_{n+1}^{(2)} - u_n^{(2)}\right|^2 + \left|u_{n-1}^{(1)} - u_n^{(1)}\right|^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\left(\left|u_{n+1}^{(2)}\right|^2 + \left|u_n^{(2)}\right|^2\right) + 2\left(\left|u_{n-1}^{(1)}\right|^2 + \left|u_n^{(1)}\right|^2\right)\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\{\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\left|u_n^{(1)}\right|^2 + \left|u_n^{(2)}\right|^2\right) + 2\left(\left|u_{n-1}^{(1)}\right|^2 + \left|u_{n+1}^{(2)}\right|^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\{\sum_{n=1}^{\infty}4\left(\left|u_n^{(1)}\right|^2 + \left|u_n^{(2)}\right|^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\|u_n\|
\end{aligned}
$$

olduğuna göre L_1 sınırlıdır ve $\forall u = \begin{pmatrix} u_n^{(1)} \\ u_n^{(2)} \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $v = \begin{pmatrix} v_n^{(1)} \\ v_n^{(2)} \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}} \in l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^2)$

için

$$
\begin{aligned}
\langle L_1u, v\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(L_1u)_n^{(1)}\,\overline{v_n^{(1)}} + (L_1u)_n^{(2)}\,\overline{v_n^{(2)}}\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(\Delta u)_n^{(2)}\,\overline{v_n^{(1)}} - (\Delta u)_{n-1}^{(1)}\,\overline{v_n^{(2)}}\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{u_n^{(1)}\overline{(\Delta v)_n^{(1)}} + u_n^{(2)}\overline{(\Delta v)_n^{(2)}}\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{u_n^{(1)}\overline{(L_1v)_n^{(1)}} + u_n^{(2)}\overline{(L_1v)_n^{(2)}}\right\} \\
&= \langle u, L_1v\rangle
\end{aligned}
$$

olduğundan L_1 simetriktir. Dolayısıyla sınırlı lineer L_1 operatörü simetrik olduğundan Teorem 1.2.9. gereğince self-adjoint, yani $L_1^* = L_1$ dir.

Teorem 2.1.2. L_2 operatörü kompakttır.

İspat. X , $l_2(\mathbb{N},\mathbb{C}^2)$ de sınırlı bir küme olsun ve $Y = L_2(X)$ diyelim. Bu durumda; Tanım 1.2.3. gereğince ispat için

$$Y = \{y : u \in X,\ y = L_2 u\}$$

kümesinin $l_2(\mathbb{N},\mathbb{C}^2)$ nin kompakt bir altkümesi olduğunu göstermek yeterlidir.
$\forall y \in Y$ için $y = L_2 u$ olacak biçimde $\exists u = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} u_n^{(1)} \\ u_n^{(2)} \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}} \in X \subset l_2(\mathbb{N},\mathbb{C}^2)$ dizisi vardır. (2.1.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \|L_2 u\|^2 \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\left|p_n u_n^{(1)}\right|^2 + \left|q_n u_n^{(2)}\right|^2 \right) \\ &\leqslant C \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\left|u_n^{(1)}\right|^2 + \left|u_n^{(2)}\right|^2 \right) = C\|u\|^2 < \infty \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

elde edilir. Ayrıca, $u \in X \subset l_2(\mathbb{N},\mathbb{C}^2)$ olduğundan $\forall\varepsilon > 0$ için $n > N_0$ oldukça

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\left|u_k^{(1)}\right|^2 + \left|u_k^{(2)}\right|^2 \right) < \frac{\varepsilon^2}{C} \tag{2.1.5}$$

gerçeklenecek şekilde $\exists N_{0(\varepsilon)} > 0$ sayısı vardır. O halde, (2.1.4) ve (2.1.5) den $\forall n > N_0$ için

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\left|y_k^{(1)}\right|^2 + \left|y_k^{(2)}\right|^2 \right) < \varepsilon^2$$

gerçeklenir. Dolayısıyla, Teorem 1.2.4. gereğince Y kümesi kompakttır. Bu ise istenileni verir.

2.2. Diskre Dirac Operatörünün Jost Çözümü

Teorem 2.2.1. Eğer; $\lambda = 2\sin\frac{z}{2}$ ise (2.1.1) sistemi, (2.1.2) koşulu altında $\mathbb{C}_+$ da analitik ve $\overline{\mathbb{C}_+}$ da sürekli bir tek çözüme sahiptir. Bu çözüm; $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve

$K_{nm} = \begin{pmatrix} K_{nm}^{11} & K_{nm}^{12} \\ K_{nm}^{21} & K_{nm}^{22} \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$, $m = 1, 2, \ldots$ olmak üzere

$$f_0^{(1)}(z) = e^{i\frac{z}{2}}\left[1+\sum_{m=1}^{\infty} K_{0m}^{11} e^{imz}\right] - i\sum_{m=1}^{\infty} K_{0m}^{12} e^{imz} \tag{2.2.1}$$

ve $n = 1, 2, \ldots$ için

$$f_n(z) = \begin{pmatrix} f_n^{(1)}(z) \\ f_n^{(2)}(z) \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\left[E_2 + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} e^{imz}\right] \begin{pmatrix} e^{i\frac{z}{2}} \\ -i \end{pmatrix} e^{inz}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{2.2.2}$$

biçimindedir. Ayrıca $\left[\frac{m}{2}\right]$, $\frac{m}{2}$ sayısının tam kısmı ve

$$a(n) = \sum_{i=n}^{\infty} (|p_i| + |q_i|) \tag{2.2.3}$$

olmak üzere $i, j = 1, 2$ için

$$\left|K_{nm}^{ij}\right| \leq O(1)\, a\left(n + \left[\frac{m}{2}\right]\right) \tag{2.2.4}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Bairomov, E. and Çelebi, A. O. , 1999).

İspat. $n = 1, 2, \ldots$ için

$$\begin{aligned} f(z) &= \begin{pmatrix} f_n^{(1)}(z) \\ f_n^{(2)}(z) \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} K_{nm}^{11} & K_{nm}^{12} \\ K_{nm}^{21} & K_{nm}^{22} \end{pmatrix} e^{imz}\right\} \begin{pmatrix} e^{i\frac{z}{2}} \\ -i \end{pmatrix} e^{inz} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} e^{i\frac{z}{2}} \\ -i \end{pmatrix} + \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} K_{nm}^{11} e^{i\frac{z}{2}} - iK_{nm}^{12} \\ K_{nm}^{21} e^{i\frac{z}{2}} - iK_{nm}^{22} \end{pmatrix} e^{imz}\right\} e^{inz} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$f_n^{(1)}(z) = \left\{e^{i\frac{z}{2}} + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{11} e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)z} - i\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{12} e^{imz}\right\} e^{inz} \tag{2.2.5}$$

$$f_n^{(2)}(z) = \left\{-i + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{21} e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)z} - i\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{22} e^{imz}\right\} e^{inz} \tag{2.2.6}$$

T.C. YUKSEKOGRETIM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

biçiminde düzenlenebilir. Bu ifadeler (2.1.1) sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&-e^{inz} + e^{i(n+1)z} + ip_n e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z} + i\sum_{m=1}^{\infty} K^{21}_{n+1,m} e^{i\left(m+n+\frac{3}{2}\right)z} + \sum_{m=1}^{\infty} K^{22}_{n+1,m} e^{i(m+n+1)z} \\
&-i\sum_{m=1}^{\infty} \left[K^{21}_{nm} - p_n K^{11}_{nm}\right] e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)z} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[p_n K^{12}_{nm} - K^{22}_{nm}\right] e^{i(m+n)z} \\
&= -e^{inz} + e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z} + \sum_{m=1}^{\infty} K^{11}_{nm} e^{i(m+n+1)z} - \sum_{m=1}^{\infty} K^{11}_{nm} e^{i(m+n)z} \\
&-i\sum_{m=1}^{\infty} K^{12}_{nm} e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)} + i\sum_{m=1}^{\infty} K^{12}_{nm} e^{i\left(m+n-\frac{1}{2}\right)z}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&ie^{i\left(n-\frac{1}{2}\right)z} - ie^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z} + q_n e^{inz} - i\sum_{m=1}^{\infty} \left[K^{11}_{nm} - q_n K^{21}_{nm}\right] e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)z} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[q_n K^{22}_{nm} - K^{12}_{nm}\right] e^{i(m+n)z} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[K^{12}_{n-1,m} + iK^{11}_{n-1,m}\right] e^{i\left(m+n-\frac{1}{2}\right)z} \\
&= ie^{i\left(n-\frac{1}{2}\right)z} - ie^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z} + \sum_{m=1}^{\infty} K^{21}_{nm} e^{i(m+n+1)z} - i\sum_{m=1}^{\infty} K^{22}_{nm} e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)z} \\
&- \sum_{m=1}^{\infty} K^{21}_{nm} e^{i(m+n)z} + i\sum_{m=1}^{\infty} K^{22}_{nm} e^{i\left(m+n-\frac{1}{2}\right)z}
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerde, e^{inz} nin kuvvetleri karşılıklı olarak eşitlenirse

$$\begin{aligned}
K^{12}_{n1} &= p_n \\
K^{11}_{n1} &= K^{22}_{n1} - p_n K^{12}_{n1} \\
-K^{21}_{n1} &= -p_n K^{11}_{n1} - K^{12}_{n1} + K^{12}_{n2} \\
K^{22}_{n+1,1} &= K^{22}_{n2} - p_n K^{12}_{n2} + K^{11}_{n1} - K^{11}_{n2} \\
K^{21}_{n+1,1} &= K^{21}_{n2} - p_n K^{11}_{n2} - K^{12}_{n2} + K^{12}_{n3} \\
-K^{22}_{nm} &= -p_n K^{12}_{nm} - K^{11}_{nm} + K^{11}_{n,m-1} - K^{22}_{n+1,m-1} \\
-K^{21}_{nm} &= -p_n K^{11}_{nm} - K^{12}_{nm} - K^{21}_{n+1,m-1} + K^{12}_{n,m+1}
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

ve

$$\begin{aligned}
K^{12}_{n-1,1} &= -q_n \\
K^{11}_{n-1,1} &= K^{22}_{n1} \\
-K^{12}_{n1} &= -K^{12}_{n-1,2} - q_n K^{22}_{n1} - K^{21}_{n1} \\
-K^{11}_{n1} &= -K^{11}_{n-1,2} - q_n K^{21}_{n1} - K^{22}_{n1} + K^{22}_{n2} \\
-K^{12}_{n2} &= -K^{12}_{n-1,3} - q_n K^{22}_{n2} + K^{21}_{n1} - K^{21}_{n2} \\
K^{22}_{nm} &= K^{11}_{n-1,m} + q_n K^{21}_{n,m-1} - K^{11}_{n,m-1} + K^{22}_{n,m-1} \\
-K^{12}_{nm} &= -K^{12}_{n-1,m+1} - q_n K^{22}_{nm} + K^{21}_{n,m-1} - K^{21}_{nm}
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

elde edilir. (2.2.7) ve (2.2.8) ile verilen denklemler yardımıyla

$$
\begin{aligned}
K_{n1}^{12} &= -\sum_{k=n+1}^{\infty}(p_k+q_k)\\
K_{n1}^{11} &= \sum_{k=n+1}^{\infty}p_kK_{k1}^{12}\\
K_{n1}^{22} &= \sum_{k=n}^{\infty}p_kK_{k1}^{12}\\
K_{n2}^{12} &= -q_{n+1}K_{n1}^{11}-\sum_{k=n+1}^{\infty}(p_k+q_{k+1})\,K_{k1}^{11}\\
K_{n1}^{21} &= p_nK_{n1}^{11}+K_{n1}^{12}-K_{n2}^{12}\\
K_{n2}^{11} &= -K_{n+1,1}^{22}-\sum_{k=n+1}^{\infty}(q_kK_{k1}^{21}-p_kK_{k2}^{12})\\
K_{n2}^{22} &= K_{n1}^{22}-K_{n1}^{11}+K_{n-1,2}^{11}+q_nK_{n1}^{21}\\
K_{n2}^{21} &= K_{n2}^{12}+\sum_{k=n}^{\infty}\left(p_kK_{k2}^{11}+q_{k+1}K_{k+1,2}^{22}\right)\ ,\ n\in\mathbb{N}
\end{aligned}
$$

ve $m\geq 3$, $n\in\mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
K_{nm}^{12} &= K_{nm}^{21}-\sum_{k=n}^{\infty}(p_kK_{km}^{11}-q_kK_{km}^{22})\\
K_{nm}^{11} &= -K_{n+1,m-1}^{22}-\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(q_kK_{k,m-1}^{21}-p_kK_{km}^{12}\right)\\
K_{nm}^{22} &= K_{n+1,m-1}^{22}+p_nK_{nm}^{12}-K_{n,m-1}^{11}+K_{nm}^{11}\\
K_{nm}^{21} &= p_nK_{nm}^{11}+K_{nm}^{12}+K_{n+1,m-1}^{21}-K_{n,m+1}^{12}
\end{aligned}
$$

bulunur.

(2.1.2) koşulu altında $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri sınırlı olduğundan, $\forall n\in\mathbb{N}$ için $|p_n|<c_1$ ve $|q_n|<c_2$ olacak biçimde $c_1>0$ ve $c_2>0$ sayıları vardır. Diğer yandan; $a(n)$ azalan olduğundan $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
|K_{n1}^{12}| &= \left|-\sum_{k=n+1}^{\infty}(p_k+q_k)\right|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}(|p_k|+|q_k|)\\
&= a(n+1)\leq O(1)\,a(n)\\
|K_{n1}^{11}| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}p_kK_{k1}^{12}\right|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}|p_k|\,|K_{k1}^{12}|\leq O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}|p_k|\,a(k)\\
&\leq O(1)\,a(n+1)\sum_{k=n+1}^{\infty}|p_k|\leq O(1)\,a(n+1)\leq O(1)\,a(n)\\
|K_{n1}^{22}| &= |K_{n-1,1}^{11}|\leq O(1)\,a(n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|K_{n2}^{12}| &= \left|-q_{n+1}K_{n1}^{11} - \sum_{k=n+1}^{\infty}(p_k+q_k)\,K_{k1}^{11}\right| \\
&\leq O(1)\,a(n)\,|q_{n+1}| + O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}(|p_k|+|q_k|)\,a(k) \\
&\leq O(1)\,c_1a(n) + O(1)\,a(n+1)\sum_{k=n+1}^{\infty}(|p_k|+|q_k|) \leq O(1)\,a(n+1) \\
|K_{n1}^{21}| &= |p_nK_{n1}^{11} + K_{n1}^{12} - K_{n2}^{12}| \leq (c_1O(1)+O(1)+O(1))\,a(n) \leq O(1)\,a(n) \\
|K_{n2}^{11}| &= \left|-K_{n+1,1}^{22} - \sum_{k=n+1}^{\infty}(q_kK_{k1}^{21} - p_kK_{k2}^{12})\right| \\
&\leq O(1)\,a(n+1) + O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}a(k)\,(|p_k|+|q_k|) \\
&\leq O(1)\,a(n+1) + O(1)\,a(n+1)\sum_{k=n+1}^{\infty}(|p_k|+|q_k|) \leq O(1)\,a(n+1) \\
|K_{n2}^{22}| &= |K_{n1}^{22} - K_{n1}^{11} + K_{n-1,2}^{11} + q_nK_{n1}^{21}| \\
&\leq (O(1)\,a(n) + O(1)\,a(n) + c_2O(1)\,a(n))\,a(n+1) \leq O(1)\,a(n+1) \\
|K_{n2}^{21}| &= \left|K_{n2}^{12} + \sum_{k=n}^{\infty}(p_kK_{k2}^{11} + q_{k+1}K_{k+1,2}^{22})\right| \\
&\leq O(1)\,a(n+1) + \sum_{k=n}^{\infty}(|p_k|\,|K_{k2}^{11}| + |q_k|\,|K_{k2}^{22}|) \\
&\leq O(1)\,a(n+1) + O(1)\sum_{k=n}^{\infty}a(k+1)\,(|p_k|+|q_k|) \\
&\leq O(1)\,a(n+1) + O(1)\,a(n+2)\sum_{k=n}^{\infty}(|p_k|+|q_k|) \leq O(1)\,a(n+1)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$ ve $i,j = 1,2$ için (2.2.4) eşitsizliğinin gerçeklendiğini tümevarım yönteminden faydalanarak gösterelim;

$$|K_{nm}^{ij}| \leq O(1)\,a\left(n + \left[\frac{m}{2}\right]\right)$$

gerçeklensin, buna göre

$$
\begin{aligned}
\left|K_{n,m+1}^{12}\right| &= \left|K_{nm}^{12} + K_{n+1,m-1}^{21} - K_{nm}^{21} + p_nK_{nm}^{11}\right| \\
&\leq \left|K_{nm}^{12}\right| + \left|K_{n+1,m-1}^{21}\right| + \left|K_{nm}^{21}\right| + \left|p_nK_{nm}^{11}\right| \\
&\leq O(1)\,a\left(n + \left[\frac{m}{2}\right]\right) + O(1)\,a\left(n+1+\left[\frac{m-1}{2}\right]\right) \\
&\quad + O(1)\,a\left(n + \left[\frac{m}{2}\right]\right) + c_1O(1)\;a\left(n + \left[\frac{m}{2}\right]\right) \\
&\leq O(1)\,a\left(n + \left[\frac{m}{2}\right]\right) + O(1)\,a\left(n + \left[\frac{m+1}{2}\right]\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq O(1)\left[c_1+c_2+\sum_{k=n+1+\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty}\left(|p_k|+|q_k|\right)\right]+O(1)\,a\left(n+\left[\frac{m+1}{2}\right]\right)\\
&= O(1)\left[c_1+c_2+a\left(n+\left[\frac{m+2}{2}\right]\right)\right]+O(1)\,a\left(n+\left[\frac{m+1}{2}\right]\right)\\
&\leq O(1)\,a\left(n+\left[\frac{m+1}{2}\right]\right)
\end{aligned}
$$

olup benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
\left|K^{11}_{n,m+1}\right| &= \left|-K^{22}_{n+1,m}-\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(q_kK^{21}_{k,m}-p_kK^{12}_{k,m+1}\right)\right|\\
&\leq \left|K^{22}_{n+1,m}\right|+\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\left|q_kK^{21}_{k,m}\right|+\left|p_kK^{12}_{k,m+1}\right|\right)\\
&\leq O(1)\,a\left(n+1+\left[\frac{m}{2}\right]\right)+c_2O(1)\,a\left(n+1+\left[\frac{m}{2}\right]\right)\\
&\quad +c_1O(1)\,a\left(n+1+\left[\frac{m+1}{2}\right]\right)\\
&\leq O(1)\,a\left(n+\left[\frac{m+1}{2}\right]\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|K^{22}_{n,m+1}\right| &= \left|K^{22}_{nm}+q_nK^{21}_{nm}-K^{11}_{nm}+K^{11}_{n-1,m+1}\right|\\
&\leq \left|K^{22}_{nm}\right|+\left|q_nK^{21}_{nm}\right|+\left|K^{11}_{nm}\right|+\left|K^{11}_{n-1,m+1}\right|\\
&\leq O(1)\,a\left(n+\left[\frac{m}{2}\right]\right)+c_2O(1)\,a\left(n+\left[\frac{m}{2}\right]\right)\\
&\quad +O(1)\,a\left(n+\left[\frac{m}{2}\right]\right)+O(1)\,a\left(n-1+\left[\frac{m+1}{2}\right]\right)\\
&\leq O(1)\,a\left(n+\left[\frac{m+1}{2}\right]\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|K^{21}_{n,m+1}\right| &= \left|K^{21}_{nm}+K^{12}_{n,m+1}-K^{12}_{n-1,m+2}-q_nK^{22}_{n,m+1}\right|\\
&\leq \left|K^{21}_{nm}\right|+\left|K^{12}_{n,m+1}\right|+\left|K^{12}_{n-1,m+2}\right|+\left|q_nK^{22}_{n,m+1}\right|\\
&\leq O(1)\,a\left(n+\left[\frac{m}{2}\right]\right)+O(1)\,a\left(n+\left[\frac{m+1}{2}\right]\right)\\
&\quad +O(1)\,a\left(n-1+\left[\frac{m+2}{2}\right]\right)+c_2O(1)\,a\left(n+\left[\frac{m+1}{2}\right]\right)\\
&\leq O(1)\,a\left(n+\left[\frac{m+1}{2}\right]\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Lemma 2.2.2. $\forall m \in \mathbb{N}$ ve $i, j = 1, 2$ için $\{K_{nm}^{ij}\}_{n\in\mathbb{N}} \in l_1$ dir (Bairomov, E. and Çelebi, A. O. , 1999).

İspat. (2.1.2) ve (2.2.4) den

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left|K_{n1}^{ij}\right| &\leq C\sum_{n=1}^{\infty} a(n) = C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=n}^{\infty}(|p_i| + |q_i|) \\
&= C\sum_{n=1}^{\infty} n(|p_n| + |q_n|) < \infty \\
\sum_{n=1}^{\infty} \left|K_{n2}^{ij}\right| &\leq C\sum_{n=1}^{\infty} a(n+1) = C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=n+1}^{\infty}(|p_i| + |q_i|) \\
&= C\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(|p_n| + |q_n|) < \infty
\end{aligned}$$

$m \geq 3$ ise $m = 2k$ veya $m = 2k-1$, $k \geq 2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left|K_{nm}^{ij}\right| &\leq C\sum_{n=1}^{\infty} a\left(n + \left[\frac{m}{2}\right]\right) = C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=n+\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty}(|p_i| + |q_i|) \\
&= C\sum_{n=k}^{\infty}(n-k+1)(|p_n| + |q_n|) < \infty
\end{aligned}$$

olur, o halde $\{K_{nm}^{ij}\}_{n\in\mathbb{N}} \in l_1$ olduğu görülür.

(2.2.1) ve (2.2.2) ile tanımlı f_n fonksiyonlarının (2.1.2) ve (2.2.4) yardımıyla $\overline{\mathbb{C}_+}$ da sürekli ve $\mathbb{C}_+$ da analitik olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Lemma 2.2.3. (2.1.1) sisteminin; (2.2.1) ve (2.2.2) ile verilen $f(z) = \{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ çözümü için

$$\begin{pmatrix} f_n^{(1)}(z) \\ f_n^{(2)}(z) \end{pmatrix} = [E_2 + o(1)] \begin{pmatrix} e^{i\frac{z}{2}} \\ -i \end{pmatrix} e^{inz}, z \in \overline{\mathbb{C}_+}, n \to \infty \qquad (2.2.9)$$

ve

$$\begin{pmatrix} f_n^{(1)}(z) \\ f_n^{(2)}(z) \end{pmatrix} = [E_2 + o(1)] \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{2}} \\ -i \end{pmatrix} e^{inz},\ n \in \mathbb{N},\ z \in \overline{\mathbb{C}_+},\ \operatorname{Im} z \to \infty \tag{2.2.10}$$

eşitlikleri gerçeklenir (Adıvar M. and Bairomov, E. , 2001).

İspat. Sırasıyla (2.2.5) ve (2.2.6) ile verilen

$$f_n^{(1)}(z) = e^{inz}\left\{e^{i\frac{\pi}{2}} + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{11} e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)z} - i\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{12} e^{imz}\right\}$$

ve

$$f_n^{(2)}(z) = e^{inz}\left\{-i + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{21} e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)z} - i\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{22} e^{imz}\right\}$$

eşitlikleri gözönüne alınırsa, Lemma 2.2.2 gereğince . $\forall m \in \mathbb{N}$ ve $i, j = 1, 2$ için $\{K_{nm}^{ij}\}_{n\in\mathbb{N}} \in l_1$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} K_{nm}^{ij} = 0$ dır. O halde

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(1)}(z)\, e^{-inz} = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} f_n^{(2)}(z)\, e^{-inz} = -i$$

bulunur, bu ise (2.2.9) eşitliğini verir.

Diğer yandan, $z = \eta + i\tau \in \overline{\mathbb{C}_+}$ için

$$\begin{aligned} \left|K_{nm}^{ij} e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)z}\right| &\leq \left|K_{nm}^{ij}\right| \left|e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)\eta}\right| \left|e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau}\right| \\ &\leq Ca\left(n + \left[\frac{m}{2}\right]\right) \end{aligned}$$

ve (2.1.2) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} a\left(n + \left[\frac{m}{2}\right]\right) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=n+\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty} (|p_k| + |q_k|) \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} [2(n-k)+1](|p_k| + |q_k|) \\ &\leq 2\sum_{k=n}^{\infty} n(|p_k| + |q_k|) + \sum_{k=n}^{\infty} (|p_k| + |q_k|) < \infty \end{aligned}$$

olduğundan Weierstrass testi (Hahn, L. and Epstein, B. 1996) gereğince $\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{ij} e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)z}$ serisi $\overline{\mathbb{C}_+}$ üzerinde düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla, $\operatorname{Im} z > 0$ için

$$\lim_{\tau\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{ij} e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)z} = \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{ij} \left(\lim_{\tau\to\infty} e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)z}\right) = 0$$

ve benzer şekilde

$$\lim_{\tau\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{ij} e^{imz} = \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{ij} \left(\lim_{\tau\to\infty} e^{imz}\right) = 0$$

olacağından (2.2.10) gerçeklenir.

(2.2.2) ile verilen $f(z) = \{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ çözümü Dirac sisteminin Jost çözümü olarak adlandırılır.

3. DİSKRE DIRAC OPERATÖRÜNÜN RESOLVENTİ VE SPEKTRUMU

Bu bölümde L operatörünün resolvent operatörünün, sürekli ve diskre spektrumu ile spektral tekilliklerinin özelikleri incelenecektir.

$P_0 = \{z : z = \eta + i\tau,\ \tau > 0,\ 0 \leq \eta < 4\pi\}$ ve $P = P_0 \cup [0, 4\pi)$ olsun. L operatörünü $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ kümesi üzerinde gözönüne alalım. P_0 şeridinin $\lambda = 2\sin\frac{z}{2}$ dönüşümü altındaki görüntüsü $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ olacağından

$$\begin{array}{ll} y_{n+1}^{(2)} - y_n^{(2)} + p_n y_n^{(1)} & = 2\sin\frac{z}{2} y_n^{(1)} \\ -y_n^{(1)} + y_{n-1}^{(1)} + q_n y_n^{(2)} & = 2\sin\frac{z}{2} y_n^{(2)} \end{array} ,n \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

$$y_0^{(1)} = 0 \tag{3.2}$$

sistemiyle verilen L operatörünün özeliklerini $z \in P$ için inceleyebiliriz.

(3.1) sisteminin

$$\varphi_0^{(1)}(\lambda) = 0 \quad \text{ve} \quad \varphi_1^{(2)}(\lambda) = 1 \tag{3.3}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(\lambda)$ ile gösterilsin. Bu durumda, (3.1) sisteminin

$$\widehat{\varphi}_0^{(1)}(z) = 0 \quad \text{ve} \quad \widehat{\varphi}_1^{(2)}(z) = 1 \tag{3.4}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü de $\widehat{\varphi}(z)$ ile gösterilirse

$$\varphi\left(2\sin\frac{z}{2}\right) = \widehat{\varphi}(z) \ \ ,z \in P$$

olacağı açıktır.

Tanım 3.1. (3.1) sisteminin $u(z) = (u_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ ve $v(z) = (v_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ çözümlerinin Wronskiyeni

$$W[u(z), v(z)]_{n\in\mathbb{N}} := \left\{u_n^{(1)}(z)\, v_{n+1}^{(2)}(z) - u_{n+1}^{(2)}(z)\, v_n^{(1)}(z)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{3.5}$$

biçiminde tanımlanır (Bairomov, E. and Çelebi, A. O. , 1999).

Lemma 3.2. (3.5) ifadesiyle tanımlanan Wronskiyen n den bağımsızdır (Bairomov, E. and Çelebi, A. O. , 1999).

İspat. (3.1) den

$$\begin{aligned} v_{n+1}^{(2)}(z) - v_n^{(2)}(z) &= (\lambda - p_n)\, v_n^{(1)}(z) \\ u_{n+1}^{(2)}(z) - u_n^{(2)}(z) &= (\lambda - p_n)\, u_n^{(1)}(z) \\ v_n^{(1)}(z) - v_{n-1}^{(1)}(z) &= (q_n - \lambda)\, v_n^{(2)}(z) \\ u_n^{(1)}(z) - u_{n-1}^{(1)}(z) &= (q_n - \lambda)\, u_n^{(2)}(z) \end{aligned}$$

eşitlikleri kolaylıkla elde edilir. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \Delta\left(W[u,v]\right)_{n-1} &= W[u,v]_n - W[u,v]_{n-1} \\ &= u_n^{(1)}(z)\, v_{n+1}^{(2)}(z) - u_{n+1}^{(2)}(z)\, v_n^{(1)}(z) \\ &\quad - u_{n-1}^{(1)}(z)\, v_n^{(2)}(z) + u_n^{(2)}(z)\, v_{n-1}^{(1)}(z) \\ &= u_n^{(1)}(z)\left(v_{n+1}^{(2)}(z) - v_n^{(2)}(z)\right) \\ &\quad - v_n^{(1)}(z)\left(u_{n+1}^{(2)}(z) - u_n^{(2)}(z)\right) \\ &\quad - u_n^{(2)}(z)\left(v_n^{(1)}(z) - v_{n-1}^{(1)}(z)\right) \\ &\quad + v_n^{(2)}(z)\left(u_n^{(1)}(z) - u_{n-1}^{(1)}(z)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur ki, bu da $\forall n \in \mathbb{N}$ için $W[u,v]_n = W[u,v]_{n-1}$ olduğunu gösterir.Dolayısıyla, (3.1) sisteminin herhangi iki çözümünün Wronskiyeninin n den bağımsız olduğu sonucu elde edilir.

Sonuç 3.3. (3.1) sisteminin (2.2.1) ve (2.2.2) ile verilen $f(z)$ ve (3.4) başlangıç koşullarını sağlayan $\widehat{\varphi}(z)$ çözümlerinin Wronskiyeni

$$W\left[f(z), \widehat{\varphi}(z)\right]_{n\in\mathbb{N}} = f_0^{(1)}(z) \tag{3.6}$$

dir (Bairomov, E. and Çelebi, A. O. , 1999).

İspat. (3.1) sisteminin $f(z)$ ve $\widehat{\varphi}(z)$ çözümleri için (3.4), (3.5) ve Lemma 3.2. den

$$W[f(z),\widehat{\varphi}(z)]_{n\in\mathbb{N}} = W[f(z),\widehat{\varphi}(z)]_{n=0} = f_0^{(1)}(z)\,\widehat{\varphi}_1^{(2)}(z) - f_1^{(2)}(z)\,\widehat{\varphi}_0^{(1)}(z) = f_0^{(1)}(z)$$

bulunur.

(3.1) sisteminin

$$u(z) = \{u_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} u_n^{(1)}(z) \\ u_n^{(2)}(z) \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ve} \quad v(z) = \{v_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} v_n^{(1)}(z) \\ v_n^{(2)}(z) \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}}$$

şeklinde verilen herhangi iki çözümünün lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart

$$W[u(z),v(z)]_n = 0$$

olmasıdır (Agnew, R. P. , 1960).

Bu durumda; $f_0^{(1)}(z) \neq 0$ ise (3.1) sisteminin $f(z)$ ve $\widehat{\varphi}(z)$ çözümleri lineer bağımsızdır. O halde, $f_0^{(1)}$ fonksiyonunun sıfırları bizim için önemlidir.

Şimdi;

$$\beta(z) = f_0^{(1)}(z)\,e^{-i\frac{z}{2}} \tag{3.7}$$

biçiminde tanımlanan β fonksiyonunu gözönüne alalım. β ve $f_0^{(1)}$ fonksiyonlarının $z \neq \infty$ için sıfır yerleri aynıdır. Ayrıca, aşağıdaki lemma β fonksiyonunun bazı özelliklerini vermektedir.

Lemma 3.4. (3.7) ile tanımlanan β fonksiyonu, P_0 yarı şeridinde analitik ve P üzerinde süreklidir. Ayrıca;

$$\beta(z) = 1 + o(1) \ , z \in P \ , |z| \to \infty \tag{3.8}$$

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

eşitliği gerçeklenir ve $\forall z \in \mathbb{C}$ için

$$\beta(z+4\pi)=\beta(z)$$

yani β fonksiyonu $4\pi-$periyotludur (Bairomov, E. and Çelebi, A. O. , 1999).

İspat. (2.2.1) den β fonksiyonu

$$\beta(z)=f_0^{(1)}(z)\,e^{-i\frac{z}{2}}=1+\sum_{m=1}^{\infty}K_{0m}^{11}e^{imz}-i\sum_{m=1}^{\infty}K_{0m}^{12}e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z}$$

olup

$$\left|K_{om}^{11}e^{imz}\right|\leq\left|K_{om}^{11}\right|\left|e^{imz}\right|=\left|K_{om}^{11}\right|\left|e^{-\operatorname{Im}(mz)}\right|$$

ve $z\in P\subset\overline{\mathbb{C}_+}$ olduğundan,

$$\left|K_{om}^{11}e^{imz}\right|\leq\left|K_{om}^{11}\right|$$

elde edilir. Diğer yandan; (2.2.4) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\left|K_{om}^{11}\right| &\leq C\sum_{m=1}^{\infty}a\left(\left[\frac{m}{2}\right]\right)\\ &= C\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty}\left(|p_i|+|q_i|\right)\\ &= C\sum_{n=1}^{\infty}\left(|p_n|+|q_n|\right)+2C\sum_{n=1}^{\infty}n\left(|p_n|+|q_n|\right)<\infty\end{aligned}$$

olduğuna göre Weierstrass testi (Hahn, L. and Epstein, B. , 1996) gereğince $\sum\limits_{m=1}^{\infty}K_{om}^{11}e^{imz}$ serisi düzgün yakınsaktır ve benzer şekilde $\sum\limits_{m=1}^{\infty}K_{om}^{12}e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z}$ serisinin düzgün yakınsak olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Diğer yandan, β fonksiyonunun $\overline{\mathbb{C}_+}$ da türevlenebilir olduğu (2.1.2) ve (2.2.4) yardımıyla kolayca görülebilir. Dolayısıyla, β fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}_+}$ da sürekli ve $\mathbb{C}_+$ da analitiktir.

Ayrıca, $\operatorname{Im} z=\tau$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\lim_{|z|\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}K_{om}^{11}e^{imz} &= \lim_{\tau\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}K_{om}^{11}e^{imz} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}K_{om}^{11}\left(\lim_{\tau\to\infty}e^{imz}\right)=0
\end{aligned}$$

dır. Benzer şekilde

$$\lim_{|z|\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}K_{om}^{12}e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z}=\lim_{\tau\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}K_{om}^{12}e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z}=0$$

olur. Böylece (3.8) eşitliğinin gerçeklendiği açıktır.

Son olarak, $\beta\left(z+4\pi\right)=\beta\left(z\right)$ olduğunu gösterelim.

$$e^{im(z+2\pi)}=e^{imz} \quad \text{ve} \quad e^{-i\left(m-\frac{1}{2}\right)(z+4\pi)}=e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\beta\left(z+4\pi\right) &= 1+\sum_{m=1}^{\infty}K_{0m}^{11}e^{im(z+4\pi)}-i\sum_{m=1}^{\infty}K_{0m}^{12}e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)(z+4\pi)} \\
&= 1+\sum_{m=1}^{\infty}K_{0m}^{11}e^{imz}e^{i4m\pi}-i\sum_{m=1}^{\infty}K_{0m}^{12}e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z}e^{i4\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi} \\
&= 1+\sum_{m=1}^{\infty}K_{0m}^{11}e^{imz}-i\sum_{m=1}^{\infty}K_{0m}^{12}e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z}
\end{aligned}$$

olur, o halde β fonksiyonu 4π periyotludur.

Kompleks değişkenli β fonksiyonuna L operatörüne ilişkin Jost fonksiyonu da denir.

L operatörünün resolventine ilişkin Green fonksiyonu; (3.1) sisteminin (3.4) ile verilen başlangıç koşullarını gerçekleyen $\widehat{\varphi}$ çözümü, (2.2.1) ve (2.2.2) ile verilen Jost çözümü ve Jost fonksiyonu cinsinden

$$G_{n,m}(z)=\frac{1}{f_0^{(1)}(z)}\begin{cases}\widehat{\varphi}_m(z)\,f_n(z) & ,0\le m\le n-1\\ f_m(z)\,\widehat{\varphi}_n(z) & ,m\ge n\end{cases} \tag{3.9}$$

şeklinde ifade edilir (Naimark, 1968). Şimdi, L nin $R_\lambda(L)$ resolvent operatörünü elde edelim.

Teorem 3.5. L operatörünün $R_\lambda(L)$ resolvent operatörü, $\lambda = 2\sin\frac{z}{2} \in \rho(L)$, $f_0^{(1)}(z) \neq 0$ ve

$$\Omega := \begin{pmatrix}\Omega_n^{(1)}\\ \Omega_n^{(2)}\end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}} \in l_2(\mathbb{N},\mathbb{C}^2)$$

için (3.9) dan

$$\begin{aligned}(R_\lambda(L)\,\Omega)_n &= \sum_{m\in\mathbb{N}} G_{n,m}\Omega_m\\ &= -\frac{1}{\beta(z)}\sum_{m=0}^{n-1}\begin{pmatrix}\Omega_m^{(1)} & \Omega_{m+1}^{(2)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_m^{(1)}(z)\\ \widehat{\varphi}_{m+1}^{(2)}(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_n^{(1)}(z)\\ f_n^{(2)}(z)\end{pmatrix}\\ &\quad -\frac{1}{\beta(z)}\sum_{m=n}^{\infty}\begin{pmatrix}\Omega_m^{(1)} & \Omega_{m+1}^{(2)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_m^{(1)}(z)\\ f_{m+1}^{(2)}(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_n^{(1)}(z)\\ \widehat{\varphi}_n^{(2)}(z)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.10}$$

şeklindedir (Adıvar, M. and Bairomov, E. ,2001).

İspat. $\beta(z) \neq 0$ için $f(z)$ ve $\widehat{\varphi}(z)$ birinci basamaktan (3.1) sisteminin lineer bağımsız iki çözümü olur. Buna göre

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1}^{(2)} - y_n^{(2)} + p_n y_n^{(1)} - \lambda y_n^{(1)} &= \Omega_n^{(1)}\\ -y_n^{(1)} + y_{n-1}^{(1)} + q_n y_n^{(2)} - \lambda y_n^{(2)} &= \Omega_n^{(2)}\end{aligned}\right., \; n\in\mathbb{N} \tag{3.11}$$

homogen olmayan denklemler sisteminin bir çözümü

$$\psi := \begin{pmatrix}\psi_n^{(1)}\\ \psi_n^{(2)}\end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}}$$

$i = 1,2$ olarak alınırsa

$$\psi_n^{(i)} = c_n f_n^{(i)}(z) + d_n \widehat{\varphi}_n^{(i)}(z) \tag{3.12}$$

olacak şekilde $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri vardır. Buradan

$$\begin{aligned} \psi_{n-1}^{(i)} &= c_{n-1} f_{n-1}^{(i)}(z) + d_{n-1}\widehat{\varphi}_{n-1}^{(i)}(z) \\ &= -\left(c_n - c_{n-1}\right) f_{n-1}^{(i)}(z) - \left(d_n - d_{n-1}\right)\widehat{\varphi}_{n-1}^{(i)}(z) \\ &\quad + c_n f_{n-1}^{(i)}(z) + d_n \widehat{\varphi}_{n-1}^{(i)}(z) \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}^{(i)} &= c_{n+1} f_{n+1}^{(i)}(z) + d_{n+1}\widehat{\varphi}_{n+1}^{(i)}(z) \\ &= \left(c_{n+1} - c_n\right) f_{n+1}^{(i)}(z) + \left(d_{n+1} - d_n\right)\widehat{\varphi}_{n+1}^{(i)}(z) \\ &\quad + c_n f_{n+1}^{(i)}(z) + d_n \widehat{\varphi}_{n+1}^{(i)}(z) \end{aligned} \tag{3.14}$$

bulunur. (3.12), (3.13) ve (3.14) ifadeleri (3.11) sisteminde yerine yazılırlarsa,

$$\left(c_{n+1} - c_n\right) f_{n+1}^{(2)}(z) + \left(d_{n+1} - d_n\right)\widehat{\varphi}_{n+1}^{(2)}(z) = \Omega_n^{(1)}$$

$$\left(c_{n+1} - c_n\right) f_n^{(1)}(z) + \left(d_{n+1} - d_n\right)\widehat{\varphi}_n^{(1)}(z) = -\Omega_{n+1}^{(2)}$$

elde edilir. Cramer yönteminden (Stanton R.G. and Fryer K. D. , 1965) faydalanılırsa

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \frac{\begin{vmatrix} \Omega_n^{(1)} & \widehat{\varphi}_{n+1}^{(2)}(z) \\ -\Omega_{n+1}^{(2)} & \widehat{\varphi}_n^{(1)}(z) \end{vmatrix}}{f_{n+1}^{(2)}(z)\,\widehat{\varphi}_n^{(1)}(z) - f_n^{(1)}(z)\,\widehat{\varphi}_{n+1}^{(2)}(z)} \\ &= -\frac{1}{f_0^{(1)}(z)}\left\{\Omega_n^{(1)}\widehat{\varphi}_n^{(1)}(z) + \Omega_{n+1}^{(2)}\widehat{\varphi}_{n+1}^{(2)}(z)\right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n &= \frac{\begin{vmatrix} f_{n+1}^{(2)}(z) & \Omega_n^{(1)} \\ f_n^{(1)}(z) & -\Omega_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix}}{f_{n+1}^{(2)}(z)\,\widehat{\varphi}_n^{(1)}(z) - f_n^{(1)}(z)\,\widehat{\varphi}_{n+1}^{(2)}(z)} \\ &= \frac{1}{f_0^{(1)}(z)}\left\{\Omega_n^{(1)} f_n^{(1)}(z) + \Omega_{n+1}^{(2)} f_{n+1}^{(2)}(z)\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan fark ifadeleri çözülürse, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$c_n = -\frac{1}{\beta(z)} \sum_{m=0}^{n-1} \left\{ \Omega_m^{(1)} \widehat{\varphi}_m^{(1)}(z) + \Omega_{m+1}^{(2)} \widehat{\varphi}_{m+1}^{(2)}(z) \right\}$$

$$d_n = -\frac{1}{\beta(z)} \sum_{m=n}^{\infty} \left\{ \Omega_m^{(1)} f_m^{(1)}(z) + \Omega_{m+1}^{(2)} f_{m+1}^{(2)}(z) \right\}$$

bulunur. Böylece, (3.11) sisteminin $\psi(z)$ çözümü elde edilir ve $(R_\lambda(L)\Omega)_n := \psi(z)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
(R_\lambda(L)\Omega)_n &= \psi(z) = c_n \begin{pmatrix} f_n^{(1)}(z) \\ f_n^{(2)}(z) \end{pmatrix} + d_n \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_n^{(1)}(z) \\ \widehat{\varphi}_n^{(2)}(z) \end{pmatrix} \\
&= -\tfrac{1}{\beta(z)} \sum_{m=0}^{n-1} \left\{ \Omega_m^{(1)} \widehat{\varphi}_m^{(1)}(z) + \Omega_{m+1}^{(2)} \widehat{\varphi}_{m+1}^{(2)}(z) \right\} \begin{pmatrix} f_n^{(1)}(z) \\ f_n^{(2)}(z) \end{pmatrix} \\
&\quad -\tfrac{1}{\beta(z)} \sum_{m=n}^{\infty} \left\{ \Omega_m^{(1)} f_m^{(1)}(z) + \Omega_{m+1}^{(2)} f_{m+1}^{(2)}(z) \right\} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_n^{(1)}(z) \\ \widehat{\varphi}_n^{(2)}(z) \end{pmatrix} \\
&= -\tfrac{1}{\beta(z)} \sum_{m=0}^{n-1} \begin{pmatrix} \Omega_m^{(1)} & \Omega_{m+1}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_m^{(1)}(z) \\ \widehat{\varphi}_{m+1}^{(2)}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n^{(1)}(z) \\ f_n^{(2)}(z) \end{pmatrix} \\
&\quad -\tfrac{1}{\beta(z)} \sum_{m=n}^{\infty} \begin{pmatrix} \Omega_m^{(1)} & \Omega_{m+1}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_m^{(1)}(z) \\ f_{m+1}^{(2)}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_n^{(1)}(z) \\ \widehat{\varphi}_n^{(2)}(z) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

biçiminde düzenlenebilir.

Weyl teoremi gereğince, self-adjoint bir L_1 operatörü ile kompakt bir L_2 operatörü için $L = L_1 + L_2$ gerçekleniyor ise L operatörünün sürekli spektrumu ile L_1 operatörünün sürekli spektrumu çakışır. O halde L_1 operatörünün sürekli spektrumunu belirleyen aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.6. $\sigma(L_1) = \sigma_c(L_1) = [-2, 2]$ dir (Bairomov, E. and Çelebi, A. O. , 1999).

İspat.

$$(l_1 y)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} y_{n+1}^{(2)} - y_n^{(2)} \\ -y_n^{(1)} + y_{n-1}^{(1)} \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}}$$

ifadesiyle tanımlanan L_1 operatörü için

$$(l_1 y)_n = \lambda y_n \ , \ n \in \mathbb{N}$$

yani

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{(2)} - y_n^{(2)} &= \lambda y_n^{(1)} \\ -y_n^{(1)} + y_{n-1}^{(1)} &= \lambda y_n^{(2)} \end{aligned} \ , \ n \in \mathbb{N} \tag{3.15}$$

denklemler sistemini ele alalım. $\lambda = 2\sin\frac{z}{2}$ ve $z \in \overline{\mathbb{C}_+}$ olmak üzere (2.2.1) e benzer şekilde, (3.15) sisteminin Jost çözümü $e(z)$ ile gösterilirse

$$e(z) = \{e_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{ e^{inz} \begin{pmatrix} e^{i\frac{z}{2}} \\ -i \end{pmatrix} \right\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{3.16}$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\widehat{e}(z) = \{\widehat{e}_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{ e^{-inz} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{z}{2}} \\ i \end{pmatrix} \right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{ ie^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)z} \begin{pmatrix} -i \\ e^{i\frac{z}{2}} \end{pmatrix} \right\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{3.17}$$

olmak üzere $\widehat{e}(z)$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ için (3.15) sisteminin Jost çözümüdür. Bu iki çözümün Wronskiyeni ise

$$\begin{aligned} W[e(z), \widehat{e}(z)]_n &= e_0^{(1)}(z)\,\widehat{e}_1^{(2)}(z) - \widehat{e}_0^{(1)}(z)\,e_1^{(2)}(z) \\ &= e^{i\frac{z}{2}}\left(ie^{-iz}\right) - e^{-i\frac{z}{2}}\left(-ie^{iz}\right) \\ &= 2i\cos\frac{z}{2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. $\lambda \notin [-2, 2]$ için $W[e(z), \widehat{e}(z)]_n \neq 0$ dır.

Şimdi, L_1 operatörünün resolvent operatörünü elde edelim. $\lambda = 2\sin\frac{z}{2} \in \rho(L_1)$ ve

$$\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} \omega_n^{(1)} \\ \omega_n^{(2)} \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}}$$

olmak üzere L_1 operatörünün resolvent operatörü

$$\left(R_\lambda\left(L_1\right)\omega\right)_n := \sum_{m\in\mathbb{N}} G_{n,m}\omega_m$$

olup, burada

$$G_{n,m} = \frac{1}{2i\cos\frac{z}{2}}\begin{cases} e_n(z)\,\widehat{e}_m(z) & ;\ 0\le m\le n-1 \\ e_m(z)\,\widehat{e}_n(z) & ;\ m\ge n \end{cases}$$

dir.

Eğer; $\forall m\in\mathbb{N}$ için

$$g_m(z) = \begin{cases} \overline{\widehat{e}_m(z)} & ;\ 1\le m\le n-1 \\ 0 & ;\ m\ge n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan g_m fonksiyonları gözönüne alınırsa $g = (g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi için

$$\begin{aligned}
\|g(z)\|^2 &= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\left|g_m^{(1)}(z)\right|^2 + \left|g_m^{(2)}(z)\right|^2\right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\left|\widehat{e}_m^{(1)}(z)\right|^2 + \left|\widehat{e}_m^{(2)}(z)\right|^2\right) \\
&= \sum_{m=0}^{n-1}\left(\left|e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)z}\right|^2 + \left|-ie^{-imz}\right|^2\right) < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir ki; bu da $g\in l_2\left(\mathbb{N},\mathbb{C}^2\right)$ sonucunu verir. Ayrıca, $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left(R_\lambda\left(L_1\right)g\right)_n(z) &= \sum_{m\in\mathbb{N}}\left(G_{n,m}g_m\right)(z) \\
&= \frac{1}{2i\cos\frac{z}{2}}\sum_{m=0}^{n-1} e_n(z)\,\widehat{e}_m(z)\,\overline{\widehat{e}_m(z)} \\
&= \frac{e_n(z)}{2i\cos\frac{z}{2}}\sum_{m=0}^{n-1}\left|\widehat{e}_m(z)\right|^2 \\
&= \frac{e_n(z)}{2i\cos\frac{z}{2}}\left\|g_m(z)\right\|^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\left(R_\lambda\left(L_1\right)g\right)_n^{(1)}(z)=\frac{\|g(z)\|^2}{2i\cos\frac{z}{2}}e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z}$$

$$\left(R_\lambda\left(L_1\right)g\right)_n^{(2)}(z)=\frac{\|g(z)\|^2}{2i\cos\frac{z}{2}}ie^{inz}$$

olacağından

$$\left\|\left(R_\lambda\left(L_1\right)g\right)_n(z)\right\|^2=\frac{\|g(z)\|^4}{\left|2i\cos\frac{z}{2}\right|^2}\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\left|e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z}\right|^2+\left|e^{inz}\right|^2\right)$$

dir. Diğer yandan,

$$\left|e^{inz}\right|>\frac{1}{2}e^{-\operatorname{Im}(nz)}$$

olduğuna göre

$$\begin{aligned}\left\|\left(R_\lambda\left(L_1\right)g\right)_n(z)\right\|^2 &= \frac{\|g(z)\|^4}{\left|2\cos\frac{z}{2}\right|^2}\sum_{n\in\mathbb{N}}\left\{\left|e^{i\frac{z}{2}}\right|^2+1\right\}\left|e^{inz}\right|^2\\ &\geq \frac{\|g(z)\|^4}{\left|2\cos\frac{z}{2}\right|^2}\sum_{n\in\mathbb{N}}\left|e^{inz}\right|^2\\ &\geq \frac{1}{4}\frac{\|g(z)\|^4}{\left|2\cos\frac{z}{2}\right|^2}\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(e^{-\operatorname{Im}(nz)}\right)^2\\ &\geq \frac{1}{4}\frac{\|g(z)\|^4}{\left|2\cos\frac{z}{2}\right|^2}\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(e^{-2\operatorname{Im}z}\right)^n \qquad (3.18)\end{aligned}$$

dir. O halde (3.18) den

$$\left\|R_\lambda\left(L_1\right)\right\|\geq\frac{\left\|\left(R_\lambda\left(L_1\right)g\right)_n(z)\right\|}{\|g(z)\|}\geq\frac{1}{2}\frac{\|g(z)\|\,e^{-\operatorname{Im}z}}{\left|2\cos\frac{z}{2}\right|\sqrt{1-e^{-2\operatorname{Im}z}}} \qquad (3.19)$$

elde edilir. Bu durumda, $\operatorname{Im}\lambda\to0$ için $\left\|R_\lambda\left(L_1\right)\right\|\to\infty$ olur. Bu ise $R_\lambda\left(L_1\right)$ operatörünün $\operatorname{Im}\lambda=0$ için sınırsız olduğunu gösterir.

Diğer yandan; $\forall\lambda\in[-2,2]$ için (3.15) sisteminin $e(z)$ çözümünün $l_2\left(\mathbb{N},\mathbb{C}^2\right)$ ye ait olmadığı kolaylıkla gösterilebilir. Dolayısıyla, (3.15) sistemi tarafından üretilen L_1 operatörü için

$$\mathcal{N}(L_1 - \lambda I) = \{\theta\}$$

olur. L_1 self-adjoint olduğundan $\mathcal{N}(L_1 - \lambda I) = \mathcal{N}(L_1^* - \lambda I) = \{\theta\}$ dır. Ayrıca, $\mathcal{R}(L_1 - \lambda I)^{\perp} = \mathcal{N}(L_1^* - \lambda I)$ eşitliği kullanılırsa

$$\overline{\mathcal{D}(R_\lambda(L_1))} = \overline{\mathcal{R}(L_1 - \lambda I)} = l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^2) \tag{3.20}$$

olduğu görülür. O halde

$$\sigma_c(L_1) = [-2, 2] \tag{3.21}$$

dir.

Ayrıca, Teorem 1.3.3. den sınırlı lineer, self-adjoint L_1 operatörünün spektrumu reeldir. Ancak, $\operatorname{Im}\lambda = 0$ için $R_\lambda(L_1)$ mevcut olduğundan L_1 operatörünün diskre spektrumu boştur. Diğer yandan; L_1 operatörü sınırlı lineer ve self-adjoint olduğundan Teorem 1.3.4. gereğince L_1 operatörünün rezidü spektrumu da boş küme olacağından

$$\sigma(L_1) = \sigma_c(L_1)$$

elde edilir.

Teorem 2.1.1. , Teorem 2.1.2. ve Teorem 3.6. da elde edilen sonuçlar yardımıyla Teorem 1.3.5. den self-adjoint L_1 operatörüyle kompakt L_2 operatörünün toplamından oluşan $L = L_1 + L_2$ operatörünün sürekli spektrumu için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.7. $\sigma_c(L) = \sigma_c(L_1) = [-2, 2]$ dir (Bairomov, E. and Çelebi, A. O. , 1999).

Teorem 3.8.

$$\sigma_d(L) = \left\{\lambda : \lambda = 2\sin\frac{z}{2}\ ,\ z \in P_0\ ,\ f_0^{(1)}(z) = 0\right\} \setminus \{\infty\}$$

dır (Bairomov, E. and Çelebi, A. O. , 1999).

İspat. $\beta(z) = f_0^{(1)}(z)\, e^{-i\frac{z}{2}}$ eşitliği gözönüne alınırsa

$$\left\{\lambda : \lambda = 2\sin\frac{z}{2},\ z \in P_0,\ f_0^{(1)}(z) = 0\right\} \backslash \{\infty\} = \left\{\lambda : \lambda = 2\sin\frac{z}{2},\ z \in P_0,\ \beta(z) = 0\right\}$$

biçiminde ifade edilebilir.

$$M = \left\{\lambda : \lambda = 2\sin\frac{z}{2}\ ,\ z \in P_0\ ,\ \beta(z) = 0\right\}$$

olsun. Bu durumda, $M = \sigma_d(L)$ olduğunu göstermeliyiz.

$\lambda \in M$ ise $\lambda = 2\sin\frac{z}{2}$ olacak biçimde en az bir $z \in P_0$ vardır öyle ki $\beta(z) = 0$ gerçeklenir. $f_0^{(1)}(z) = \beta(z)\, e^{i\frac{z}{2}}$ olduğundan $f_0^{(1)}(z) = 0$ dır. Diğer yandan; (3.6) gereğince $W[f(z), \widehat{\varphi}(z)]_n = f_0^{(1)}(z) = 0$ elde edilir. O halde, $f(z)$ ve $\widehat{\varphi}(z)$ çözümleri lineer bağımlı olup

$$\widehat{\varphi}(z) = cf(z)\ ;\ z \in P_0$$

olacak biçimde bir $c \neq 0$ sayısı vardır. Bu durumda, $\widehat{\varphi}(z) \in l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^2)$ ve $\lambda \in \sigma_d(L)$ olduğu elde edilir.

Karşıt olarak $\lambda \in \sigma_d(L)$ olsun. Bu durumda $\lambda = 2\sin\frac{z}{2}$ olmak üzere (3.1) sisteminin bu özdeğere karşılık, $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^2)$ ye ait bir $u = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \neq \theta$ çözümü vardır. Diğer yandan, λ özdeğerine karşılık gelen özvektörler lineer bağımlı olacağından

$$f(z) = c_1 u(z) \quad \text{ve} \quad \widehat{\varphi}(z) = c_2 u(z)$$

olacak biçimde $c_1 \neq 0$ ve $c_2 \neq 0$ sabitleri vardır. Buradan

$$u(z) = c_1 f(z), c_1 \neq 0 \quad \text{ve} \quad \widehat{\varphi}(z) = c_2 u(z), c_2 \neq 0$$

elde edilir. Bu durumda $f(z) = c_3\widehat{\varphi}(z)$, $c_3 \neq 0$ yani $W[f(z), \widehat{\varphi}(z)]_n = 0$ elde edilir. Bu ise, (3.6) eşitliğinden $f_0^{(1)}(z) = 0$ sonucunu verir. $f_0^{(1)}$ fonksiyonu 4π periyotlu olduğundan ve $\operatorname{Im}\lambda > 0$ olacağından $z \in P_0$ ve $\lambda \in M$ bulunur.

Teorem 3.9. L operatörünün spektral tekilliklerinin kümesi

$$\sigma_{ss}(L) = \left\{\lambda : \lambda = 2\sin\frac{z}{2}\ ,\ z \in [0, 4\pi)\ ,\ f_0^{(1)}(z) = 0\right\}$$

dır. Ayrıca, $\sigma_{ss}(L) \subset \sigma_c(L)$ dir (Bairomov, E. and Çelebi, A. O. , 1999).

İspat. $\beta(z) = f_0^{(1)}(z)\, e^{-i\frac{z}{2}}$ eşitliği gözönüne alınırsa

$$\left\{\lambda : \lambda = 2\sin\frac{z}{2}, z \in [0, 4\pi), f_0^{(1)}(z) = 0\right\} = \left\{\lambda : \lambda = 2\sin\frac{z}{2}, z \in [0, 4\pi), \beta(z) = 0\right\}$$

biçiminde ifade edilebilir.

$$M = \left\{\lambda : \lambda = 2\sin\frac{z}{2}\ ,\ z \in [0, 4\pi)\ , \beta(z)\ = 0\right\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu durumda, $M = \sigma_{ss}(L)$ olduğunu göstermeliyiz.

$\lambda \in M$ olsun. Bu durumda, $\lambda = 2\sin\frac{z}{2}$ olacak biçimde en az bir $z \in [0, 4\pi)$ vardır öyle ki $\beta(z) = 0$ gerçeklenir. Dolayısıyla, Teorem 3.5. gereğince $R_\lambda(L)$ mevcut değildir. Diğer yandan, $\lambda \in [-2, 2]$ olduğundan Teorem 3.8. gereğince $\lambda \notin \sigma_d(L)$ dir. O halde, $\lambda \in \sigma_{ss}(L)$ dir.

Karşıt olarak $\lambda \in \sigma_{ss}(L)$ olsun. Tanım 1.3.6 dan L operatörünün spektral tekillikleri, $R_\lambda(L)$ resolvent operatörünün reel eksendeki kutup noktalarıdır. Bu durumda, Teorem 3.5. gereğince $f_0^{(1)}(z) = 0$ olmalıdır. Bu ise $\lambda \in M$ sonucunu verir.

Lemma 3.10. $\sigma_d(L)$ sınırlıdır, sayılabilirdir ve limit noktaları $[-2, 2]$ kapalı aralığında yer alır (Bairomov, E. and Çelebi, A. O. , 1999).

İspat. L operatörü $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^2)$ üzerinde sınırlı olduğundan $\sigma_d(L)$ nin sınırlılığı açıktır. Diğer yandan, şayet λ_0, $\sigma_d(L)$ nin bir yığılma noktası ise $\forall n \in \mathbb{N}$, için $\lambda_n \in \sigma_d(L)$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0$ olacak biçimde bir $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. Bu durumda $\lambda = 2\sin\frac{z}{2}$.

eşitliğinden; $\forall n \in \mathbb{N}$, için $z_n \in P_0, \beta(z_n) = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 = 2\arcsin\frac{\lambda_0}{2}$ olacak biçimde bir $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. Ayrıca; (3.7) ile tanımlı β fonksiyonu özdeş olarak sıfırdan farklı ve 4π periyotlu olup, $\overline{\mathbb{C}_+}$ da sürekli ve $\mathbb{C}_+$ da analitiktir. β fonksiyonu (3.8) eşitliğini gerçeklediğinden Teorem 1.3.8. (iii) gereğince eğer; z_0, β fonksiyonunun sıfırlarının bir yığılma noktası ise $\operatorname{Im} z_0 = 0$ dır. O halde; β, 4π periyotlu olduğundan $z_0 \in [0, 4\pi)$ olur ve $\lambda_0 = 2\sin\frac{z_0}{2}$ olduğundan $\lambda_0 \in [-2, 2]$ olacaktır. Ayrıca analitiklik bölgesinde özdeş olarak sıfırdan farklı olan fonksiyonun sıfır yerleri ayrık olacağından β nın P_0 yarı şeridi içindeki sıfırları sayılabilirdir. Dolayısıyla $\sigma_d(L)$ sayılabilirdir.

Teorem 3.11. $\sigma_{ss}(L) = \overline{\sigma_{ss}(L)}$ ve $\mu(\sigma_{ss}(L)) = 0$ dır (Adıvar, M. and Bairomov, E. ,2001).

İspat. β fonksiyonu $\operatorname{Im}\lambda = 0$ için sürekli olduğundan $\{z : z \in [0, 4\pi), \ \beta(z) = 0\}$ kümesi kapalıdır. O halde; $\sigma_{ss}(L) = \left\{\lambda : \lambda = 2\sin\frac{z}{2}\ , \ z \in [0, 4\pi), \ f_0^{(1)}(z) = 0\right\}$ kapalıdır. Ayrıca, Privalov teoreminden özdeş olarak sıfırdan farklı analitik bir fonksiyonun reel sıfırlarının Lebesgue ölçüsü sıfır olduğundan

$$\mu(\sigma_{ss}(L)) = \mu(\{z : z \in [0, 4\pi), \ \beta(z) = 0\}) = 0$$

dır.

Şimdi, $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompleks terimli dizileri

$$\sup_{1\le n<\infty} (|p_n| + |q_n|)\exp\left(\varepsilon\sqrt{n}\right) < \infty \ , \ \varepsilon > 0 \tag{3.22}$$

koşulunu gerçeklemek üzere; β fonksiyonunun $\mathbb{C}_+$ da analitik ve $\overline{\mathbb{C}_+}$ da her mertebeden sürekli türevlere sahip olduğunu gösteren aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.12. $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompleks terimli dizileri için (3.22) koşulu gerçeklensin. C pozitif bir sabit ve $z \in \overline{\mathbb{C}_+}$ olmak üzere

$$\left|\beta^{(k)}(z)\right| \leq 2^k C \sum_{m=1}^{\infty} m^{k+1} \exp\left(-\varepsilon\sqrt{m}\right) = C_k \ , \ k = 1, 2, \ldots \tag{3.23}$$

dir (Bairomov, E. and Çelebi, A. O. , 1999).

İspat. (3.7) den

$$\beta(z) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} K_{0m}^{11} e^{imz} - i \sum_{m=1}^{\infty} K_{0m}^{12} e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z}$$

dır. Eğer,

$$F(z) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} K_{0m}^{11} e^{imz}$$

ve

$$G(z) = \sum_{m=1}^{\infty} K_{0m}^{12} (-i) e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z}$$

alınırsa

$$\frac{d^k}{dz^k}[\beta(z)] = \frac{d^k}{dz^k}[F(z)] + \frac{d^k}{dz^k}[G(z)] \tag{3.24}$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned} F'(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} K_{0m}^{11} (im) e^{imz} \\ F''(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} K_{0m}^{11} (im)^2 e^{imz} \\ &\vdots \\ F^{(k)}(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} K_{0m}^{11} (im)^k e^{imz} \end{aligned}$$

olduğuna göre

$$\begin{aligned} \left|F^{(k)}(z)\right| &= \left|\sum_{m=1}^{\infty} K_{0m}^{11} (im)^k e^{imz}\right| \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} m^k \left|K_{0m}^{11}\right| \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} m^k C \sum_{i=\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty} \left(|p_i| + |q_i|\right) \end{aligned}$$

$$= C\sum_{m=1}^{\infty}(2m-1)^{k+1}\left(|p_{m-1}|+|q_{m-1}|\right)$$

elde edilir ve $2m-1 \leq 2m$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left|F^{(k)}(z)\right| &\leq 2^{k+1}C\sum_{m=1}^{\infty}m^{k+1}\left(|p_{m-1}|+|q_{m-1}|\right) \\ &= 2^{k+1}C\sum_{m=1}^{\infty}m^{k+1}\left(|p_{m-1}|+|q_{m-1}|\right)e^{\varepsilon\sqrt{m}}e^{-\varepsilon\sqrt{m}} \\ &\leq 2^{k}C_1\sum_{m=1}^{\infty}m^{k+1}\exp\left(-\varepsilon\sqrt{m}\right) \end{aligned} \tag{3.25}$$

dir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} G'(z) &= \sum_{m=1}^{\infty}K_{0m}^{12}\left[-i^{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)\right]e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z} \\ G''(z) &= \sum_{m=1}^{\infty}K_{0m}^{12}\left[-i^{3}\left(m-\frac{1}{2}\right)^{2}\right]e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z} \\ &\vdots \\ G^{(k)}(z) &= \sum_{m=1}^{\infty}K_{0m}^{12}\left[-i^{k+1}\left(m-\frac{1}{2}\right)^{k}\right]e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z} \end{aligned}$$

olduğuna göre

$$\begin{aligned} \left|G^{(k)}(z)\right| &= \left|\sum_{m=1}^{\infty}K_{0m}^{12}\left[-i^{k+1}\left(m-\frac{1}{2}\right)^{k}\right]e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z}\right| \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty}\left(m-\frac{1}{2}\right)^{k}\left|K_{0m}^{12}\right| \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty}m^{k}\left|K_{0m}^{12}\right| \\ &\leq C\sum_{m=1}^{\infty}m^{k}\sum_{i=\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty}\left(|p_i|+|q_i|\right) \\ &\leq 2^{k+1}C\sum_{m=1}^{\infty}m^{k+1}\left(|p_{m-1}|+|q_{m-1}|\right)e^{\varepsilon\sqrt{m}}e^{-\varepsilon\sqrt{m}} \\ &\leq 2^{k}C_2\sum_{m=1}^{\infty}m^{k+1}\exp\left(-\varepsilon\sqrt{m}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\left|G^{(k)}(z)\right| \leq 2^k C_2 \sum_{m=1}^{\infty} m^{k+1} \exp\left(-\varepsilon\sqrt{m}\right) \tag{3.26}$$

dır. Bu durumda (3.24), (3.25) ve (3.26) dan

$$\left|\beta^{(k)}(z)\right| \leq 2^k c \sum_{m=1}^{\infty} m^{k+1} \exp\left(-\varepsilon\sqrt{m}\right) = C_k$$

elde edilir.

Şimdi de β fonksiyonunun P şeridi içindeki sıfırlarının özeliklerini araştıralım. Bunun için; β fonksiyonunun; P_0 şeridi içindeki sıfırlarının kümesini Q_1, reel eksendeki sıfırlarının kümesini Q_2, sonsuz katlı sıfırlarının kümesini Q_3, üst yarı düzlemdeki sıfırlarının limit noktalarının kümesini Q_4 ve son olarak reel eksendeki sıfırlarının limit noktalarının kümesini Q_5 ile gösterelim. Buna göre;

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \{z : z \in P_0 \, , \, \beta(z) = 0\} \\
Q_2 &= \{z : \, z \in [0, 4\pi) \, , \, \beta(z) = 0\} \\
Q_3 &= \left\{z : z \in P \, , \, \tfrac{d^k}{dz^k}\beta(z) = 0 \, , \, k = 0, 1, 2, \ldots\right\} \\
Q_4 &= \left\{z : \exists \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset P_0 \, , \, \beta(z_n) = 0 \, , \, n \to \infty \text{ için } z_n \to z\right\} \\
Q_5 &= \left\{z : \exists \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, 4\pi) \, , \, \beta(z_n) = 0 \, , \, n \to \infty \text{ için } z_n \to z\right\}
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Aşağıdaki lemmalar Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 ve Q_5 kümelerinin bazı özeliklerini vermektedir.

Lemma 3.13.

$$Q_1 \cap Q_3 = \emptyset \tag{3.27}$$

ve

$$Q_3 \subset Q_2 \, , \, Q_4 \subset Q_2 \, , \, Q_5 \subset Q_2 \tag{3.28}$$

dir (Bairomov, E. and Çelebi, A. O. , 1999).

İspat. β fonksiyonu P_0 şeridi içinde analitiklik ve özdeş olarak sıfırdan farklı olduğundan Teorem 1.3.8. (ii) gereğince β fonksiyonun P_0 şeridi içinde sonsuz katlı sıfırı yoktur. Bu da

$$Q_1 \cap Q_3 = \emptyset$$

ve

$$Q_3 \subset Q_2$$

olduğunu gösterir.

β nın P_0 içindeki sıfırları Teorem 1.3.8. (i) gereğince ayrık olduğundan, analitiklik bölgesi içindeki sıfırlarının oluşturduğu dizilerin yığılma noktaları analitiklik bölgesinin sınırındadır. Bu durumda; $\forall z \in Q_4$ için $z \in [0, 4\pi)$ olup $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $z_n \in P_0$ ve $\beta(z_n) = 0$ olacak biçimde bir $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. β fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}_+}$ da sürekli olduğundan

$$0 = \lim_{n\to\infty} \beta(z_n) = \beta\left(\lim_{n\to\infty} z_n\right) = \beta(z)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $z \in Q_2$ dir.

Son olarak, $Q_5 \subset Q_2$ olduğunu gösterelim. $\forall z \in Q_5$ için $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $z_n \in [0, 4\pi)$ ve $\beta(z_n) = 0$ olacak biçimde bir $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. β fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}_+}$ da sürekli olduğundan

$$0 = \lim_{n\to\infty} \beta(z_n) = \beta\left(\lim_{n\to\infty} z_n\right) = \beta(z)$$

elde edilir. O halde, $z \in Q_2$ dir.

Lemma 3.14. $Q_4 \subset Q_3$ ve $Q_5 \subset Q_3$ dır (Bairomov, E. and Çelebi, A. O. , 1999).

İspat. $Q_4 \nsubseteq Q_3$ olduğunu kabul edelim. Yani, $z_0 \notin Q_3$ olacak biçimde en az bir $z_0 \in Q_4$ var olsun. Bu durumda; z_0, β fonksiyonunun sonsuz katlı sıfırı değildir. O halde, $\left\{\frac{d^k}{dz^k}\beta(z)\right\}_{z=z_0} \neq 0$ olacak biçimde bir k tamsayısı vardır ve dolayısıyla

$$\beta(z) = (z - z_0)^k g(z) \ , \ g(z_0) \neq 0$$

biçiminde ifade edilebilir.

$$g(z) = \frac{\beta(z)}{(z - z_0)^k}$$

olmak üzere, g fonksiyonu $\mathbb{C}_+$ da analitik ve $\overline{\mathbb{C}_+}$ da süreklidir. Ayrıca, $z_0 \in Q_4$ olduğundan $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $z_n \in P_0$ ve $\beta(z_n) = 0$ olacak biçimde bir $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır. Bu durumda

$$g(z_n) = \frac{\beta(z_n)}{(z_n - z_0)^k} = 0$$

bulunur ve g, P_0 da sürekli olduğundan

$$0 = \lim_{n \to \infty} g(z_n) = g\left(\lim_{n \to \infty} z_n\right) = g(z_0)$$

elde edilir. Ancak, $g(z_0) \neq 0$ alındığından bu sonuç bir çelişki doğurur. O halde kabulümüz yanlıştır. Benzer şekilde, $Q_5 \subset Q_3$ olduğuda kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 3.15. $\mathbb{C}_+$ da analitik, $\overline{\mathbb{C}_+}$ da her mertebeden türevleri sürekli olan 4π periyotlu bir h fonksiyonu için

$$\sup_{z \in P} \left| h^{(k)}(z) \right| \leq C_k \ , \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

eşitsizliği gerçeklensin. G, h fonksiyonunun P yarı şeridindeki sonsuz katlı sıfırlarının kümesi olsun. Eğer;

$$F(s) = \inf_k \frac{C_k s^k}{k!} \ , \ k = 0, 1, 2, \ldots \ ,$$

$\mu(G_s)$, G nin s-komşuluğunun Lebesgue ölçüsü ve $a \in (0, 4\pi)$ keyfi bir sabit olmak üzere

$$\int_0^a \ln F(s) \, d\mu(G_s) = -\infty$$

gerçekleniyorsa, $\overline{\mathbb{C}_+}$ bölgesinde $h(z) \equiv 0$ dır (Bairomov, E. and Çelebi, A. O. , 2001).

Lemma 3.16. $Q_3 = \emptyset$ dir (Bairomov, E. and Çelebi, A. O. , 1999).

İspat. Q_3, β fonksiyonunun sonsuz katlı sıfırlarının kümesidir. β fonksiyonu analitiklik bölgesi içinde özdeş olarak sıfırdan farklı olduğundan sonsuz katlı sıfırları analitiklik bölgesinin sınırındadır. Ayrıca; β fonksiyonu analitiklik bölgesi içinde özdeş olarak sıfırdan farklı, $Q_2 \subset [0, 4\pi)$ ve Q_2 kompakt olduğundan Teorem 1.3.7. gereğince $\mu(Q_2) = 0$ dır. Diğer yandan, $\mathbb{C}_+$ da analitik ve $\overline{\mathbb{C}_+}$ da sürekli 4π-periyotlu β fonksiyonu için (3.23) den

$$\sup_{z \in P} \left| \beta^{(k)}(z) \right| \leq C_k \ , \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

yazılabilir. Bu durumda, Teorem 3.15. den $F(s) = \inf\limits_{k} \frac{C_k s^k}{k!}$, $\mu(Q_{3,s})$, Q_3 kümesinin s-komşuluğunun Lebesgue ölçüsü ve $a \in (0, 4\pi)$ olmak üzere

$$\int_0^a \ln F(s) \, d\mu(Q_{3,s}) > -\infty$$

olacaktır.

$$\begin{aligned} C_k &= 2^k C \sum_{m=1}^{\infty} m^{k+1} \exp\left(-\varepsilon\sqrt{m}\right) \\ &\leq 2^k C \int_0^{\infty} t^{k+1} e^{-\varepsilon t^{\frac{1}{2}}} dt \end{aligned}$$

$\varepsilon t^{\frac{1}{2}} = y$ dönüşümü yapılırsa $dt = \frac{2}{\varepsilon^2} y dy$ olup

$$C_k \leq 2^{k+1} C \frac{1}{\varepsilon^{2k+4}} \int_0^{\infty} y^{2k+3} e^{-y} dy$$

elde edilir. $I = \int\limits_0^{\infty} y^{2k+3} e^{-y} dy$ integraline $2k+1$ kez kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\int_0^{\infty} y^{2k+3} e^{-y} dy = (2k+3)(2k+2)(2k+1)\ldots 3 \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy$$

olup $\int_0^\infty y^2 e^{-y} dy = \Gamma(3)$ sonludur. O halde;

$$\begin{aligned} C_k &\leq C_1 \frac{2^{k+1}}{\varepsilon^{2k+4}} (2k+3)(2k+2)(2k+1)\ldots 2 \\ &\leq C_1 \frac{2^{k+2}}{\varepsilon^{2k+4}} (2k+3)^{2k+1} \\ &= C_1 \frac{2^{k+2}}{\varepsilon^{2k+4}} \left(1+\frac{3}{2k}\right)^{2k} (2k)^{2k} (2k+3) \\ &\leq C_1 \frac{2^{k+2}}{\varepsilon^{2k+4}} e^3 e^k k! k^k 4 e^k \\ &\leq C_2 \varepsilon^{-4} e^3 8^k \varepsilon^{-2k} e^{2k} k! k^k \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $B = C_2\varepsilon^{-4}e^3$ ve $b = 8e^2\varepsilon^{-2}$ alınırsa

$$C_k \leq B b^k k^k k! \tag{3.29}$$

yazılabilir. F fonksiyonunun tanımından,

$$F(s) = \inf_k \frac{C_k s^k}{k!} \leq B \inf_k \left\{ b^k s^k k^k \right\}$$

olmak üzere $t(x) = (bsx)^x$ şeklinde tanımlanan t fonksiyonunun infimumunu hesaplayalım. $\ln t(x) = x \ln(bsx)$ olacağından

$$\frac{t'(x)}{t(x)} = \ln(bsx) + x\frac{bs}{bsx}$$

$$\Rightarrow t'(x) = t(x)\ln(bsx) + t(x)$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} t'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow t(x)\ln(bsx) + t(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (bsx)^x \ln(bsx) + (bsx)^x = 0 \\ &\Leftrightarrow (bsx)^x \{\ln(bsx) + 1\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(bsx) = -1 \\ &\Leftrightarrow x = b^{-1}s^{-1}e^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$t'(x) = (bsx)^x \ln (bsx)^x + (bsx)^x = (bsx)^x \left[\ln (bsx) + 1\right]$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \ln t'(x) &= x \ln (bsx) + \ln \left[\ln (bsx) + 1\right] \\ \Rightarrow \frac{t''(x)}{t'(x)} &= \ln (bsx) + 1 + \frac{1}{x \ln (bsx) + x} \\ \Rightarrow t''(x) &= (bsx)^x \left\{\left[\ln (bsx) + 1\right]^2 + \frac{1}{x}\right\} \end{aligned}$$

elde edilir ve

$$t''\left(b^{-1}s^{-1}e^{-1}\right) = bse^{1-b^{-1}s^{-1}e^{-1}} \geq 0$$

olduğuna göre t fonksiyonu $x = b^{-1}s^{-1}e^{-1}$ noktasında bir yerel minimuma sahiptir. Bu durumda

$$F(s) = \inf_k \frac{C_k s^k}{k!} \leq B \exp\left(-b^{-1}s^{-1}e^{-1}\right)$$

yazılabilir. Son olarak $\ln F(s) \leq \ln B - \frac{1}{bse}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_0^a \ln F(s)\, d\mu\left(Q_{3,s}\right) &\leq \int_0^a \left(\ln B - \frac{1}{bse}\right) d\mu\left(Q_{3,s}\right) \\ &= \int_0^a \ln\left(Ce^3\varepsilon^{-4}\right) d\mu\left(Q_{3,s}\right) - \frac{1}{be} \int_0^a \frac{1}{s} d\mu\left(Q_{3,s}\right) \end{aligned}$$

olduğuna göre her s için

$$\int_0^a \frac{1}{s} d\mu\left(Q_{3,s}\right) < \infty$$

olur. Bu ise, ancak ve yalnız $\mu\left(Q_{3,s}\right) = 0$ ve dolayısıyla $Q_3 = \emptyset$ olmasıyla mümkündür.

Ayrıca $Q_4 \subset Q_3$ ve $Q_5 \subset Q_3$ olduğuna göre

$$Q_4 = \emptyset \quad \text{ve} \quad Q_5 = \emptyset$$

dir.

Böylece; $Q_4 = \emptyset$ ve $Q_5 = \emptyset$ olduğundan Bolzano-Weierstrass Teoremi [Knopp K. 1928] gereğince, β fonksiyonu P şeridi içinde sonlu sayıda sıfıra sahiptir. Diğer yandan; $Q_3 = \emptyset$ olduğundan sözkonusu sıfırlar sonlu katlıdır. O halde L operatörünün özdeğer ve spektral tekillikleri için aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 3.17. L operatörü

$$\sup_{1\leq n<\infty} (|p_n| + |q_n|) \exp\left(\varepsilon\sqrt{n}\right) < \infty \ , \ \varepsilon > 0$$

koşulu altında sonlu sayıda özdeğer ve spektral tekilliğe sahiptir. Ayrıca özdeğer ve spektral tekilliklerinin her biri sonlu katlıdır (Bairomov, E. and Çelebi, A. O. , 1999).

4. DİSKRE DIRAC OPERATÖRÜNÜN ESAS VEKTÖRLERİ

Bu bölümde L operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklerine karşılık gelen esas vektörleri elde edilecektir.

$P_0 = \{z : z = \eta + i\tau,\ \tau > 0,\ 0 \leq \eta < 4\pi\}$ ve $P = P_0 \cup [0, 4\pi)$ olmak üzere P_0 yarı şeridinin $\lambda = 2\sin\frac{z}{2}$ dönüşümü altındaki görüntüsü $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ olduğundan $f(z) = \begin{pmatrix} f_n^{(1)}(z) \\ f_n^{(2)}(z) \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}}$ (2.2.1) ve (2.2.2) ile verilmek üzere (2.1.2) koşulu altında

$$\widehat{f}_0^{(1)}(\lambda) = f_0^{(1)}\left(2\arcsin\frac{\lambda}{2}\right), \lambda \in \mathcal{D} \tag{4.1}$$

$$\widehat{f}(\lambda) = \begin{pmatrix} \widehat{f}_n^{(1)}(\lambda) \\ \widehat{f}_n^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} f_n^{(1)}\left(2\arcsin\frac{\lambda}{2}\right) \\ f_n^{(2)}\left(2\arcsin\frac{\lambda}{2}\right) \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}}, \ \lambda \in \mathcal{D} \tag{4.2}$$

ve $\beta(z) = f_0^{(1)}(z)\, e^{-i\frac{z}{2}}$ olmak üzere

$$\widehat{\beta}(\lambda) = \beta\left(2\arcsin\frac{\lambda}{2}\right), \ \lambda \in \mathcal{D} \tag{4.3}$$

fonksiyonları D bölgesinde analitik ve D nin sınırına dek süreklidirler. $\widehat{f}(\lambda)$ nın (2.1.1) sisteminin bir çözümü olduğu açıktır ve

$$W\left[\widehat{f}(\lambda), \varphi(\lambda)\right] = \widehat{\beta}(\lambda) \tag{4.4}$$

yazılabilir. Ayrıca, Teorem 3.2.5. ve Teorem 3.2.6. gereğince

$$\sigma_d(L) = \left\{\lambda : \lambda \in D\ ,\ \widehat{\beta}(\lambda) = 0\right\}$$

$$\sigma_{ss}(L) = \left\{\lambda : \lambda \in [-2, 2]\ ,\ \widehat{\beta}(\lambda) = 0\right\}$$

olur.

(3.24) koşulu altında Teorem 3.17. den $\widehat{\beta}$ fonksiyonunun $\mathcal{D}$ kümesi ve $[-2, 2]$ aralığı içinde sonlu sayıda sıfırı vardır ve bu sıfırların her biri sonlu katlıdır.

Diğer yandan; $\arcsin\frac{\lambda}{2} = -i\ln\left[\frac{1}{2}\left(i\lambda+\sqrt{4-\lambda^2}\right)\right]$ olduğuna göre (2.2.1) ve (2.2.2) den

$$\begin{aligned}\widehat{f}_0^{(1)}(\lambda) &= f_0^{(1)}\left(-2i\ln\left(\frac{1}{2}\left(i\lambda+\sqrt{4-\lambda^2}\right)\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(i\lambda+\sqrt{4-\lambda^2}\right)\left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}K_{om}^{11}\left[\frac{1}{2}\left(i\lambda+\sqrt{4-\lambda^2}\right)\right]^{2m}\right.\\ &\quad\left.-i\sum_{m=1}^{\infty}K_{om}^{12}\left[\frac{1}{2}\left(i\lambda+\sqrt{4-\lambda^2}\right)\right]^{2m-1}\right\} \qquad (4.5)\end{aligned}$$

ve $n\geq 1$ için

$$\begin{aligned}\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda) &= \left\{\frac{1}{2}\left(i\lambda+\sqrt{4-\lambda^2}\right)+\sum_{m=1}^{\infty}K_{nm}^{11}\left[\frac{1}{2}\left(i\lambda+\sqrt{4-\lambda^2}\right)\right]^{2m+1}\right.\\ &\quad\left.-i\sum_{m=1}^{\infty}K_{nm}^{12}\left[\frac{1}{2}\left(i\lambda+\sqrt{4-\lambda^2}\right)\right]^{2m}\right\}\left[\frac{1}{2}\left(i\lambda+\sqrt{4-\lambda^2}\right)\right]^{2n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{f}_n^{(2)}(\lambda) &= \left\{-i+\sum_{m=1}^{\infty}K_{nm}^{21}\left[\frac{1}{2}\left(i\lambda+\sqrt{4-\lambda^2}\right)\right]^{2m+1}\right.\\ &\quad\left.-i\sum_{m=1}^{\infty}K_{nm}^{22}\left[\frac{1}{2}\left(i\lambda+\sqrt{4-\lambda^2}\right)\right]^{2m}\right\}\left[\frac{1}{2}\left(i\lambda+\sqrt{4-\lambda^2}\right)\right]^{2n}\end{aligned}$$

bulunur. (4.3) ve (4.5) birlikte ele alınırsa

$$\widehat{\beta}(\lambda) = 1+\sum_{m=1}^{\infty}K_{0m}^{11}\left[\frac{1}{2}\left(i\lambda+\sqrt{4-\lambda^2}\right)\right]^{2m}-i\sum_{m=1}^{\infty}K_{0m}^{12}\left[\frac{1}{2}\left(i\lambda+\sqrt{4-\lambda^2}\right)\right]^{2m-1}$$

biçiminde ifade edilebilir

(3.22) koşulu altında, Teorem 3.17. gereğince diskre Dirac operatörü sonlu sayıda özdeğere ve spektral tekilliğe sahiptir ve bunların her biri sonlu katlıdır. Aşağıdaki lemma ve teoremler bu özdeğerlere ve spektral tekilliklere karşılık gelen esas vektörlerle ilgilidir.

Lemma 4.1. L operatörünün $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ spektral tekillikleri ve $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_m$ özdeğerleri, sırasıyla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ve $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_m$ katlarına sahip olsun. Bu durumda, $j = 1, 2, \ldots, m$ ve $s = 0, 1, \ldots, \alpha_{j-1}$ için

$$\left\{ \frac{d^s}{d\lambda^s} W\left[\widehat{f}(\lambda), \varphi(\lambda)\right] \right\}_{\lambda=\lambda_j} = \left\{ \frac{d^s}{d\lambda^s} \widehat{\beta}(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_j} = 0 \tag{4.6}$$

eşitliği gerçeklenir (Adıvar, M. and Bairomov, E. ,2001).

İspat.

$$W\left[\widehat{f}(\lambda), \varphi(\lambda)\right] = \widehat{f}_0^{(1)}(\lambda)\, \varphi_1^{(2)}(\lambda) - \widehat{f}_1^{(2)}(\lambda)\, \varphi_0^{(1)}(\lambda) = \widehat{f}_0^{(1)}(\lambda)$$

ve

$$\widehat{f}_0^{(1)}(\lambda) = \left[\frac{1}{2} \left(i\lambda + \sqrt{4 - \lambda^2} \right) \right] \widehat{\beta}(\lambda)$$

olmak üzere $\frac{1}{2}\left(i\lambda + \sqrt{4-\lambda^2}\right) = 0$ denkleminin kökü yoktur. Dolayısıyla; L operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklerinin kümesini Q ile gösterirsek, Q kümesi üzerinde $\widehat{f}_0^{(1)}$ ve $\widehat{\beta}$ fonksiyonlarının sıfır yerleri aynıdır. $j = 1, 2, \ldots, k$ olmak üzere λ_j spektral tekillikleri için $\widehat{\beta}(\lambda_j) = 0$ ve $j = k+1, k+2, \ldots m$ olmak üzere λ_j özdeğerleri için $\widehat{f}(\lambda_j)$ ile $\varphi(\lambda_j)$ çözümleri lineer bağımlı yani $W\left[\widehat{f}(\lambda_j), \varphi(\lambda_j)\right] = 0$ olacağından (4.4) den

$$W\left[\widehat{f}(\lambda_j), \varphi(\lambda_j)\right] = \widehat{\beta}(\lambda_j) = 0$$

yazılabilir.

Diğer yandan; $j = 1, 2, \ldots, k, k+1, k+2, \ldots m$ için λ_j, $\widehat{\beta}$ nın α_j katlı sıfırı ise $s = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_{m-1}$ için

$$\left\{ \frac{d^s}{d\lambda^s} \widehat{\beta}(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_j} = 0$$

elde edilir, böylece (4.4) den (4.6) nın gerçeklendiği görülür.

Teorem 4.2. $j = 1, 2, \ldots k, k+1, \ldots, m$ ve $s = 0, 1, \ldots, \alpha_{j-1}$ için

$$\varphi^{(s)}(\lambda_j) = \left\{\frac{d^s}{d\lambda^s}\varphi(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j} = \begin{pmatrix} \varphi_{n,s}^{(1)}(\lambda_j) \\ \varphi_{n,s}^{(2)}(\lambda_j) \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}}$$

$$= \sum_{v=0}^{s} \begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} a_{s-v} \left\{\frac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j}, \; n\in\mathbb{N} \tag{4.7}$$

olacak biçimde λ_j ye bağlı $a_0, a_1, \ldots, a_k$ sabitleri vardır (Adıvar, M. and Bairomov, E. ,2001).

İspat. Tümevarım yönteminden faydalanalım. $s=0$ için (4.6) dan

$$W\left[\varphi(\lambda_j), \widehat{f}(\lambda_j)\right] = \widehat{\beta}(\lambda_j) = 0$$

olacağından $\varphi(\lambda_j)$ ve $\widehat{f}(\lambda_j)$ lineer bağımlıdır. O halde

$$\varphi(\lambda_j) = a_0\widehat{f}(\lambda_j) \tag{4.8}$$

gerçeklenecek biçimde λ_j ye bağlı bir a_0 sabiti vardır.

$s=1$ için (4.7) nin gerçeklendiğini gösterelim. (2.1.1) sisteminin bir $u(\lambda)$ çözümü için

$$(L-\lambda I)\left\{\frac{d}{d\lambda}u(\lambda)\right\} = u(\lambda) \tag{4.9}$$

eşitliği gerçeklenir. (4.9) $\varphi(\lambda)$ ve $\widehat{f}(\lambda)$ çözümleri için yazılırsa

$$\frac{d}{d\lambda}\varphi_{n+1}^{(2)}(\lambda) - \frac{d}{d\lambda}\varphi_n^{(2)}(\lambda) + p_n\frac{d}{d\lambda}\varphi_n^{(1)}(\lambda) - \lambda\frac{d}{d\lambda}\varphi_n^{(1)}(\lambda) = \varphi_n^{(1)}(\lambda) \tag{4.10}$$

$$-\frac{d}{d\lambda}\varphi_n^{(1)}(\lambda) + \frac{d}{d\lambda}\varphi_{n-1}^{(1)}(\lambda) + q_n\frac{d}{d\lambda}\varphi_n^{(2)}(\lambda) - \lambda\frac{d}{d\lambda}\varphi_n^{(2)}(\lambda) = \varphi_n^{(2)}(\lambda) \tag{4.11}$$

ve

$$\frac{d}{d\lambda}\widehat{f}_{n+1}^{(2)}(\lambda) - \frac{d}{d\lambda}\widehat{f}_n^{(2)}(\lambda) + p_n\frac{d}{d\lambda}\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda) - \lambda\frac{d}{d\lambda}\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda) = \widehat{f}_n^{(1)}(\lambda) \tag{4.12}$$

$$-\frac{d}{d\lambda}\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda) + \frac{d}{d\lambda}\widehat{f}_{n-1}^{(1)}(\lambda) + q_n\frac{d}{d\lambda}\widehat{f}_n^{(2)}(\lambda) - \lambda\frac{d}{d\lambda}\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda) = \widehat{f}_n^{(2)}(\lambda) \tag{4.13}$$

elde edilir. (4.12) ve (4.13) a_0 ile çarpılır; (4.10) dan (4.12), (4.11) den (4.13) çıkarılırsa

$$\begin{aligned}&\left[\frac{d}{d\lambda}\varphi_{n+1}^{(2)}(\lambda)-a_0\frac{d}{d\lambda}\widehat{f}_{n+1}^{(2)}(\lambda)\right]-\left[\frac{d}{d\lambda}\varphi_n^{(2)}(\lambda)-a_0\frac{d}{d\lambda}\widehat{f}_n^{(2)}(\lambda)\right]\\&+p_n\left[\frac{d}{d\lambda}\varphi_n^{(1)}(\lambda)-a_0\frac{d}{d\lambda}\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda)\right]-\lambda\left[\frac{d}{d\lambda}\varphi_n^{(1)}(\lambda)-a_0\frac{d}{d\lambda}\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda)\right]\\=\;&\varphi_n^{(1)}(\lambda)-a_0\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}&-\left[\frac{d}{d\lambda}\varphi_n^{(1)}(\lambda)-a_0\frac{d}{d\lambda}\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda)\right]+\left[\frac{d}{d\lambda}\varphi_{n-1}^{(1)}(\lambda)-a_0\frac{d}{d\lambda}\widehat{f}_{n-1}^{(1)}(\lambda)\right]\\&+q_n\left[\frac{d}{d\lambda}\varphi_n^{(2)}(\lambda)-a_0\frac{d}{d\lambda}\widehat{f}_n^{(2)}(\lambda)\right]-\lambda\left[\frac{d}{d\lambda}\varphi_n^{(2)}(\lambda)-a_0\frac{d}{d\lambda}\widehat{f}_n^{(2)}(\lambda)\right]\\=\;&\varphi_n^{(2)}(\lambda)-a_0\widehat{f}_n^{(2)}(\lambda)\end{aligned}$$

olur. Bu durumda, $\lambda=\lambda_j$, $j=1,2,\ldots,m$ için (4.8) ve son iki eşitlikten

$$g(\lambda_j)=\left\{\frac{d}{d\lambda}\varphi(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j}-a_0\left\{\frac{d}{d\lambda}\widehat{f}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j}$$

olmak üzere

$$(L-\lambda I)\,g(\lambda_j)=0$$

elde edilir. Diğer yandan; (4.8) gereğince $\varphi(\lambda_j)=a_0\widehat{f}(\lambda_j)$ olduğundan

$$\begin{aligned}W\left[g(\lambda_j),\widehat{f}(\lambda_j)\right]&=W\left[\left\{\tfrac{d}{d\lambda}\varphi(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j}-a_0\left\{\tfrac{d}{d\lambda}\widehat{f}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j},\widehat{f}(\lambda_j)\right]\\&=W\left[\left\{\tfrac{d}{d\lambda}\varphi(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j},\widehat{f}(\lambda_j)\right]\\&\quad-W\left[\left\{\tfrac{d}{d\lambda}\widehat{f}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j},a_0\widehat{f}(\lambda_j)\right]\end{aligned}\tag{4.14}$$

ve

$$\begin{aligned}\left\{\frac{d}{d\lambda}W\left[\widehat{f}(\lambda),\varphi(\lambda)\right]\right\}_{\lambda=\lambda_j}&=\left\{\frac{d}{d\lambda}\left(\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda)\,\varphi_{n+1}^{(2)}(\lambda)-\widehat{f}_{n+1}^{(2)}(\lambda)\,\varphi_n^{(1)}(\lambda)\right)\right\}_{\lambda=\lambda_j}\\&=\left\{\frac{d}{d\lambda}\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j}\varphi_{n+1}^{(2)}(\lambda_j)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda_j)\left\{\tfrac{d}{d\lambda}\varphi_{n+1}^{(2)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j}-\left\{\tfrac{d}{d\lambda}\widehat{f}_{n+1}^{(2)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j}\varphi_n^{(1)}(\lambda_j) \\
&-\widehat{f}_{n+1}^{(2)}(\lambda_j)\left\{\tfrac{d}{d\lambda}\varphi_n^{(1)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j}=0
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

bulunur. (4.14) ve (4.15) den

$$
W\left[g(\lambda_j),\widehat{f}(\lambda_j)\right]=\left\{\frac{d}{d\lambda}W\left[\widehat{f}(\lambda),\varphi(\lambda)\right]\right\}_{\lambda=\lambda_j}=0 \tag{4.16}
$$

olup

$$
g(\lambda_j)=a_1\widehat{f}(\lambda_j)
$$

olacak biçimde λ_j ye bağlı bir a_1 sabiti vardır. Bu durumda

$$
\varphi^{(1)}(\lambda_j)=\left\{\frac{d}{d\lambda}\varphi(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j}=a_1\widehat{f}(\lambda_j)+a_0\left\{\frac{d}{d\lambda}\widehat{f}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j}
$$

bulunur.

$2\leq s_0\leq\alpha_{j-2}$ için (4.7) gerçeklensin. Bu durumda;

$$
\varphi^{(s_0)}(\lambda_j)=\left\{\frac{d^{s_0}}{d\lambda^{s_0}}\varphi(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j}=\sum_{v=0}^{s_0}\left(\begin{array}{c}s_0\\ v\end{array}\right)a_{s_0-v}\left\{\frac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j} \tag{4.17}
$$

olur. Şimdi, (4.7) ifadesinin s_0+1 için de doğru olduğunu gösterelim. Eğer, $u(\lambda)$ (2.1.1) sisteminin bir çözümü ise

$$
(L-\lambda I)\left\{\frac{d^s}{d\lambda^s}u(\lambda)\right\}=s\left\{\frac{d^{s-1}}{d\lambda^{s-1}}u(\lambda)\right\} \tag{4.18}
$$

eşitliği gerçeklenir. (2.1.1) sisteminin $\varphi(\lambda)$ ve $\widehat{f}(\lambda)$ çözümleri için

$$
\varphi_{n+1}^{(2)}(\lambda)-\varphi_n^{(2)}(\lambda)+p_n\varphi_n^{(1)}(\lambda)-\lambda\varphi_n^{(1)}(\lambda)=0 \tag{4.19}
$$

$$
-\varphi_n^{(1)}(\lambda)+\varphi_{n-1}^{(1)}(\lambda)+q_n\varphi_n^{(2)}(\lambda)-\lambda\varphi_n^{(2)}(\lambda)=0 \tag{4.20}
$$

ve

$$
\widehat{f}_{n+1}^{(2)}(\lambda)-\widehat{f}_n^{(2)}(\lambda)+p_n\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda)-\lambda\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda)=0 \tag{4.21}
$$

$$-\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda)+\widehat{f}_{n-1}^{(1)}(\lambda)+q_n\widehat{f}_n^{(2)}(\lambda)-\lambda\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda)=0 \tag{4.22}$$

olup (4.18) den, $s=s_0$ alınırsa

$$\frac{d^{s_0}}{d\lambda^{s_0}}\varphi_{n+1}^{(2)}(\lambda)-\frac{d^{s_0}}{d\lambda^{s_0}}\varphi_n^{(2)}(\lambda)+p_n\frac{d^{s_0}}{d\lambda^{s_0}}\varphi_n^{(1)}(\lambda)-\lambda\frac{d^{s_0}}{d\lambda^{s_0}}\varphi_n^{(1)}(\lambda)=s_0\frac{d^{s_0-1}}{d\lambda^{s_0-1}}\varphi_n^{(1)}(\lambda) \tag{4.23}$$

$$-\frac{d^{s_0}}{d\lambda^{s_0}}\varphi_n^{(1)}(\lambda)+\frac{d^{s_0}}{d\lambda^{s_0}}\varphi_{n-1}^{(1)}(\lambda)+q_n\frac{d^{s_0}}{d\lambda^{s_0}}\varphi_n^{(2)}(\lambda)-\lambda\frac{d^{s_0}}{d\lambda^{s_0}}\varphi_n^{(2)}(\lambda)=s_0\frac{d^{s_0-1}}{d\lambda^{s_0-1}}\varphi_n^{(2)}(\lambda) \tag{4.24}$$

ve

$$\frac{d^{s_0}}{d\lambda^{s_0}}\widehat{f}_{n+1}^{(2)}(\lambda)-\frac{d^{s_0}}{d\lambda^{s_0}}\widehat{f}_n^{(2)}(\lambda)+p_n\frac{d^{s_0}}{d\lambda^{s_0}}\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda)-\lambda\frac{d^{s_0}}{d\lambda^{s_0}}\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda)=s_0\frac{d^{s_0-1}}{d\lambda^{s_0-1}}\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda) \tag{4.25}$$

$$-\frac{d^{s_0}}{d\lambda^{s_0}}\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda)+\frac{d^{s_0}}{d\lambda^{s_0}}\widehat{f}_{n-1}^{(1)}(\lambda)+q_n\frac{d^{s_0}}{d\lambda^{s_0}}\widehat{f}_n^{(2)}(\lambda)-\lambda\frac{d^{s_0}}{d\lambda^{s_0}}\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda)=s_0\frac{d^{s_0-1}}{d\lambda^{s_0-1}}\widehat{f}_n^{(2)}(\lambda). \tag{4.26}$$

elde edilir. (4.23)-(4.24) de (4.17) kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\sum_{v=0}^{s_0}\binom{s_0}{v}a_{s_0-v}\left\{\tfrac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}_{n+1}^{(2)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j}-\sum_{v=0}^{s_0}\binom{s_0}{v}a_{s_0-v}\left\{\tfrac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}_n^{(2)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j}\\
&+p_n\sum_{v=0}^{s_0}\binom{s_0}{v}a_{s_0-v}\left\{\tfrac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j}\\
&-\lambda\sum_{v=0}^{s_0}\binom{s_0}{v}a_{s_0-v}\left\{\tfrac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j}\\
=\;&s_0\sum_{v=0}^{s_0-1}\binom{s_0-1}{v}a_{s_0-1-v}\left\{\tfrac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

ve

$$\begin{aligned}
&-\sum_{v=0}^{s_0}\binom{s_0}{v}a_{s_0-v}\left\{\frac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j}+\sum_{v=0}^{s_0}\binom{s_0}{v}a_{s_0-v}\left\{\frac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}_{n-1}^{(1)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j}\\
&+q_n\sum_{v=0}^{s_0}\binom{s_0}{v}a_{s_0-v}\left\{\frac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}_n^{(2)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j}\\
&-\lambda\sum_{v=0}^{s_0}\binom{s_0}{v}a_{s_0-v}\left\{\frac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}_n^{(2)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j}
\end{aligned}$$

$$= \quad s_0 \sum_{v=0}^{s_0-1} \begin{pmatrix} s_0-1 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0-1-v} \left\{ \tfrac{d^v}{d\lambda^v} \widehat{f}_n^{(2)}(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_j} \tag{4.28}$$

yazılabilir. (4.21) ve (4.22) a_{s_0} ile çarpılıp (4.21), (4.27) den ve (4.22), (4.28) den çıkartılırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{v=1}^{s_0} \begin{pmatrix} s_0 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0-v} \left\{ \tfrac{d^v}{d\lambda^v} \widehat{f}_{n+1}^{(2)}(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_j} - \sum_{v=1}^{s_0} \begin{pmatrix} s_0 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0-v} \left\{ \tfrac{d^v}{d\lambda^v} \widehat{f}_n^{(2)}(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_j} \\
&+p_n \sum_{v=1}^{s_0} \begin{pmatrix} s_0 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0-v} \left\{ \tfrac{d^v}{d\lambda^v} \widehat{f}_n^{(1)}(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_j} \\
&-\lambda \sum_{v=1}^{s_0} \begin{pmatrix} s_0 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0-v} \left\{ \tfrac{d^v}{d\lambda^v} \widehat{f}_n^{(1)}(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_j} \\
= \quad & s_0 \sum_{v=0}^{s_0-1} \begin{pmatrix} s_0-1 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0-1-v} \left\{ \tfrac{d^v}{d\lambda^v} \widehat{f}_n^{(1)}(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_j}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

ve

$$\begin{aligned}
&-\sum_{v=1}^{s_0} \begin{pmatrix} s_0 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0-v} \left\{ \tfrac{d^v}{d\lambda^v} \widehat{f}_n^{(1)}(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_j} + \sum_{v=1}^{s_0} \begin{pmatrix} s_0 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0-v} \left\{ \tfrac{d^v}{d\lambda^v} \widehat{f}_{n-1}^{(1)}(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_j} \\
&+q_n \sum_{v=1}^{s_0} \begin{pmatrix} s_0 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0-v} \left\{ \tfrac{d^v}{d\lambda^v} \widehat{f}_n^{(2)}(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_j} \\
&-\lambda \sum_{v=1}^{s_0} \begin{pmatrix} s_0 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0-v} \left\{ \tfrac{d^v}{d\lambda^v} \widehat{f}_n^{(2)}(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_j} \\
= \quad & s_0 \sum_{v=1}^{s_0-1} \begin{pmatrix} s_0-1 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0-1-v} \left\{ \tfrac{d^v}{d\lambda^v} \widehat{f}_n^{(2)}(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_j}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

olur. Şimdi, (4.23)-(4.24) ve (4.29)-(4.30) ifadeleri $s = s_0 + 1$ için yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{d^{s_0+1}}{d\lambda^{s_0+1}} \varphi_{n+1}^{(2)}(\lambda) - \frac{d^{s_0+1}}{d\lambda^{s_0+1}} \varphi_n^{(2)}(\lambda) + p_n \frac{d^{s_0+1}}{d\lambda^{s_0+1}} \varphi_n^{(1)}(\lambda) - \lambda \frac{d^{s_0+1}}{d\lambda^{s_0+1}} \varphi_n^{(1)}(\lambda) \\
= \quad & (s_0+1) \frac{d^{s_0}}{d\lambda^{s_0}} \varphi_n^{(1)}(\lambda)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$-\frac{d^{s_0+1}}{d\lambda^{s_0+1}} \varphi_n^{(1)}(\lambda) + \frac{d^{s_0+1}}{d\lambda^{s_0+1}} \varphi_{n-1}^{(1)}(\lambda) + q_n \frac{d^{s_0+1}}{d\lambda^{s_0+1}} \varphi_n^{(2)}(\lambda) - \lambda \frac{d^{s_0+1}}{d\lambda^{s_0+1}} \varphi_n^{(2)}(\lambda)$$

$$= (s_0+1)\frac{d^{s_0}}{d\lambda^{s_0}}\varphi_n^{(2)}(\lambda) \tag{4.32}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\sum_{v=1}^{s_0+1}\begin{pmatrix} s_0+1 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0+1-v}\left\{\frac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}_{n+1}^{(2)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j} \\
&-\sum_{v=1}^{s_0+1}\begin{pmatrix} s_0+1 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0+1-v}\left\{\frac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}_{n}^{(2)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j} \\
&+p_n\sum_{v=1}^{s_0+1}\begin{pmatrix} s_0+1 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0+1-v}\left\{\frac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}_{n}^{(1)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j} \\
&-\lambda\sum_{v=1}^{s_0+1}\begin{pmatrix} s_0+1 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0+1-v}\left\{\frac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}_{n}^{(1)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j} \\
= \; & (s_0+1)\sum_{v=0}^{s_0}\begin{pmatrix} s_0 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0-v}\left\{\frac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}_{n}^{(1)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
&-\sum_{v=1}^{s_0+1}\begin{pmatrix} s_0+1 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0+1-v}\left\{\frac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}_{n}^{(1)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j} \\
&+\sum_{v=1}^{s_0+1}\begin{pmatrix} s_0+1 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0+1-v}\left\{\frac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}_{n-1}^{(1)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j} \\
&+q_n\sum_{v=1}^{s_0+1}\begin{pmatrix} s_0+1 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0+1-v}\left\{\frac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}_{n}^{(2)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j} \\
&-\lambda\sum_{v=1}^{s_0+1}\begin{pmatrix} s_0+1 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0+1-v}\left\{\frac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}_{n}^{(2)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j} \\
= \; & (s_0+1)\sum_{v=0}^{s_0}\begin{pmatrix} s_0 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0-v}\left\{\frac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}_{n}^{(2)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

elde edilir. (4.33) den (4.31) ve (4.34) den (4.32) ifadesi çıkartılıp, (4.17) kullanılırsa

$$(L-\lambda I)\,h(\lambda_j)=0$$

öyle ki

$$h(\lambda_j) = \left\{ \frac{d^{s_0+1}}{d\lambda^{s_0+1}} \varphi(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_j} - \sum_{v=1}^{s_0+1} \begin{pmatrix} s_0+1 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0+1-v} \left\{ \frac{d^v}{d\lambda^v} \widehat{f}(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_j} \tag{4.35}$$

elde edilir, (4.6) ve (4.8) den

$$W\left[\widehat{f}(\lambda_j), h(\lambda_j)\right] = \left\{ \frac{d^{s_0+1}}{d\lambda^{s_0+1}} W\left[\widehat{f}(\lambda), \varphi(\lambda)\right] \right\}_{\lambda=\lambda_j} = 0$$

olduğundan

$$h(\lambda_j) = a_{s_0+1} \widehat{f}(\lambda_j)$$

olacak biçimde λ_j ye bağlı bir a_{s_0+1} sabiti vardır. Bu durumda,

$$\varphi^{(s_0+1)}(\lambda_j) = \left\{ \frac{d^{s_0+1}}{d\lambda^{s_0+1}} \varphi(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_j} = \sum_{v=0}^{s_0+1} \begin{pmatrix} s_0+1 \\ v \end{pmatrix} a_{s_0+1-v} \left\{ \frac{d^v}{d\lambda^v} \widehat{f}(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_j}$$

olur ve böylece ispat tamamlanır.

Eğer,

$$A_{s-v}(\lambda_j) = \frac{a_{s-v}}{(s-v)!}$$

denirse (4.7) ifadesi

$$\frac{1}{s!} \left\{ \frac{d^s}{d\lambda^s} \varphi(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_j} = \sum_{v=0}^{s} A_{s-v}(\lambda_j) \frac{1}{v!} \left\{ \frac{d^v}{d\lambda^v} \widehat{f}(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_j} \tag{4.36}$$

biçiminde yazılabilir.

Tanım 4.3. $\lambda = \lambda_0$, L operatörünün bir özdeğeri olsun. $s = 0, 1, \ldots, k$ olmak üzere

$$y^{(s)} = \frac{d^s}{d\lambda^s} y = \{y_{n,s}\}_{n\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} y_{n,s}^{(1)} \\ y_{n,s}^{(2)} \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}}$$

vektörleri $\lambda = \lambda_0$ için

$$\left(Ly^{(0)}\right)_n - \lambda_0 y_{n,0} = 0$$

$$\left(Ly^{(s)}\right)_n - \lambda_0 y_{n,s} - y_{n,s-1} = 0 \ , \ s = 1,2,\ldots,k \tag{4.37}$$

eşitliklerini gerçekliyorsa $y = y^{(0)}$ vektörüne $\lambda = \lambda_0$ özdeğerine karşılık gelen özvektör veya özfonksiyon denir. Ayrıca, $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(k)}$ vektörlerine de $\lambda = \lambda_0$ özdeğerine karşılık gelen birleşik vektörler adı verilir. $\lambda = \lambda_0$ özdeğerine karşılık gelen özvektör ve birleşik vektörlerin tümüne $\lambda = \lambda_0$ özdeğerine karşılık gelen esas vektörler veya esas fonksiyonlar denir. L operatörünün spektral tekilliklerine karşılık gelen esas vektörler de benzer biçimde tanımlanır (Adıvar, M. and Bairomov, E. ,2001).

Sonuç 4.4. $j = 1,2,\ldots,k,k+1,\ldots,m, s = 0,1,\ldots,\alpha_{j-1}$ olmak üzere

$$V^{(s)}(\lambda_j) = \frac{1}{s!}\left\{\frac{d^s}{d\lambda^s}\varphi(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j} = \sum_{v=0}^{s} A_{s-v}(\lambda_j)\frac{1}{v!}\left\{\frac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j} \tag{4.38}$$

veya

$$V^{(s)}(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s!}\varphi_{n,s}^{(1)}(\lambda) \\ \frac{1}{s!}\varphi_{n,s}^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix}_{\lambda=\lambda_j} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{v=0}^{s} A_{s-v}(\lambda_j)\frac{1}{v!}\left\{\frac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}_n^{(1)}(\lambda)\right\} \\ \sum\limits_{v=0}^{s} A_{s-v}(\lambda_j)\frac{1}{v!}\left\{\frac{d^v}{d\lambda^v}\widehat{f}_n^{(2)}(\lambda)\right\} \end{pmatrix}, \ n \in \mathbb{N} \tag{4.39}$$

şeklinde tanımlanan $V^{(s)}(\lambda_j) := \{V_{n,s}(\lambda_j)\}_{n\in\mathbb{N}}$ vektörleri sırasıyla L operatörünün spektral tekillikleri ve özdeğerlerine karşılık gelen esas vektörleridir (Adıvar, M. and Bairomov, E. ,2001).

İspat. $j = 1,2,\ldots,k,k+1,\ldots,m$ olmak üzere (4.7), (4.19) ve (4.20) den

$$\left(LV^{(0)}(\lambda_j)\right)_n - \lambda_j V_{n,0}(\lambda_j) = 0$$

ve (4.23)-(4.24) ve (4.27)-(4.28) den

$$\left(LV^{(s)}(\lambda_j)\right)_n - \lambda_j V_{n,s}(\lambda_j) - V_{n,s-1}(\lambda_j) = 0, n \in \mathbb{N}$$

elde edilir. O halde; (4.37) denklemleri gerçeklendiğinden $V^{(s)}(\lambda_j), j = 1,2,\ldots,k$, $s = 0,1,\ldots,\alpha_{j-1}$ ve $V^{(s)}(\lambda_j)$, $j = k+1,k+2,\ldots,m$, $s = 0,1,\ldots,\alpha_{j-1}$ vektörleri sırasıyla L operatörünün spektral tekillikleri ve özdeğerlerine karşılık gelen esas vektörleridir.

Teorem 4.5. $j = k+1, k+2, \ldots, m$, $s = 0, 1, \ldots, \alpha_{j-1}$ için $V^{(s)}(\lambda_j) \in l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^2)$ ve $j = 1, 2, \ldots, k$, $s = 0, 1, \ldots, \alpha_{j-1}$ ve için $V^{(s)}(\lambda_j) \notin l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^2)$ dir (Adıvar, M. and Bairomov, E. ,2001).

İspat. $\widehat{f}(\lambda) = f\left(\arcsin \frac{\lambda}{2}\right)$ olduğu gözönüne alınırsa (4.17) den $j = 1, 2, \ldots, m$, $z_j \in P = P_0 \cup [0, 4\pi]$, $\lambda_j = 2\sin\frac{z_j}{2}$ ve c_v^+ da λ_j ye bağlı bir sabit olmak üzere

$$\left\{\frac{d^s}{d\lambda^s}\varphi(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_j} = \sum_{v=0}^{s} c_v^+ \left\{\frac{d^v}{dz^v} f(z)\right\}_{z=z_j}$$

yazılabilir. (2.1.2) den dolayı

$$\left\{\frac{d^v}{dz^v} f(z)\right\}_{z=z_j} = \left\{\begin{pmatrix} f_{n,v}^{(1)}(z) \\ f_{n,v}^{(2)}(z) \end{pmatrix}\right\}_{z=z_j}, \quad n \in \mathbb{N}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \left\{f_{n,v}^{(1)}(z)\right\}_{z=z_j} &= \left\{\frac{d^v}{dz^v} f_n^{(1)}(z)\right\}_{z=z_j} \\ &= e^{inz_j}\left\{\left[i\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^v e^{i\frac{z_j}{2}} + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{11}\left[i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)\right]^v e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)z_j}\right. \\ &\quad \left. -i\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{12}\left[i(m+n)\right]^v e^{imz_j}\right\} \end{aligned} \tag{4.40}$$

ve

$$\begin{aligned} \left\{f_{n,v}^{(2)}(z)\right\}_{z=z_j} &= \left\{\frac{d^v}{dz^v} f_n^{(2)}(z)\right\}_{z=z_j} \\ &= e^{inz_j}\left\{-i(in)^v + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{11}\left[i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)\right]^v e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)z_j}\right. \\ &\quad \left. -i\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{12}\left[i(m+n)\right]^v e^{imz_j}\right\} \end{aligned} \tag{4.41}$$

dir. $j = k+1, k+2, \ldots, m$ ve $s = 0, 1, \ldots, \alpha_{j-1}$ için $\lambda_j = 2\sin\frac{z_j}{2}$ özdeğerlerine karşılık gelen

$$V^{(s)}(\lambda_j)=\begin{pmatrix}\frac{1}{s!}\varphi_{n,s}^{(1)}(\lambda)\\ \frac{1}{s!}\varphi_{n,s}^{(2)}(\lambda)\end{pmatrix}_{\lambda=\lambda_j},\quad n\in\mathbb{N}$$

esas vektörleri ele alınırsa

$$\begin{aligned}\left\|V^{(s)}(\lambda_j)\right\|^2 &=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{1}{s!}\varphi_{n,s}^{(1)}(\lambda)\right|^2+\left|\frac{1}{s!}\varphi_{n,s}^{(2)}(\lambda)\right|^2\right)_{\lambda=\lambda_j}\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{1}{s!}\sum_{v=0}^{s}c_v^{+}\left\{\frac{d^v}{dz^v}f_n^{(1)}(z)\right\}_{z=z_j}\right|^2\right.\\ &\quad\left.+\left|\frac{1}{s!}\sum_{v=0}^{s}c_v^{+}\left\{\frac{d^v}{dz^v}f_n^{(2)}(z)\right\}_{z=z_j}\right|^2\right)\end{aligned}\tag{4.42}$$

olur. L operatörünün $\lambda_j=2\sin\frac{z_j}{2}$ özdeğerleri için $\operatorname{Im} z_j>0$ olduğundan (4.40) ve (4.41) den (4.42) serisinin yakınsak olduğu açıktır. Şayet (4.42) $j=1,2,\ldots,k$ olmak üzere $\lambda_j=2\sin\frac{z_j}{2}$ spektral tekillikleri için ele alınırsa $\operatorname{Im} z_j=0$ olacağından yine (4.40) ve (4.41) yardımıyla (4.42) serisinin ıraksak olduğu görülür.

KAYNAKLAR

Adıvar, M. and Bairomov, E. 2001. Spectral properties of non-selfadjoint difference operators. Journal of Math. Analysis and Aplications. 261, 461-478.

Agnew, R. P. 1960. Differential Equations. McGraw-Hill Inc. New-York.

Bairamov, E. and Çelebi, A. O. 1999. Spectrum and spectral expansion for a non-selfadjoint discrete Dirac operators. Quart. J. Math. Oxford. Ser. (2) 50, 371-384.

Bairamov, E. , Çakar, Ö. and Krall, A. M. 2001. Non-selfadjoint difference operators and Jacobi matrices with spectral singularities. Math. Nachr. 229, 5-14.

Dolzhenko, E. P. 1979. Boundary Value Uniqueness Theorems for Analytic Functions.

Glazman, I. M. 1965. Direct Methods of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators. Jerusalem.

Hahn, L. and Epstein, B. 1996. Classical Complex Analysis. Jones and Bartlett Publishers, London.

Knopp, K. 1928. Theory and Application of Infinite Series. Blackie and Son Limited, London and Glasgow.

Lusternik, L. A. and Sobolev, V. J. 1968. Elements of Functional Analysis. Gordon and Breach, Science Publishers.

Naimark, M. N. 1960. Investigation of the spectrum and the expansion in eigen functions of a non-selfadjoint operators of second order on a semi-axis. AMS Trans. 2, (16), 103-193.

Naimark, M. N. 1968. Lineer Differential Operators I, II. Ungar, New-York.

Stanton, R. G. and Fryer, K. D. 1965. Algebra and Vector Geometry. Holt, Rinehart and Winston of Canada, Limited Toronto.

ÖZGEÇMİŞ

Kilis'te 1976 yılında doğdu. İlk öğrenimini Kilis'te, orta ve lise öğrenimini Gaziantep Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 1995 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2000 yılında Matematikçi ünvanıyla mezun oldu. Eylül 2000 de Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans sınavını kazandı. Şubat 2002 de Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nce açılan araştırma görevliliği sınavını kazandı. Halen aynı bölümde bu görevine devam etmektedir.