

T.C.
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

136727

SEİFERT MATRİSLERİ VE DÜĞÜM İNVARYANLARI

Filiz Ertem

Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Yrd. Doç. Dr. İsmet Altıntaş

Mayıs 2003

136727

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ

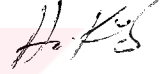
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne;

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI' nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Mammad İ. MUSTAFAYEV, Niğde Üniversitesi



Üye : Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE, Selçuk Üniversitesi



Üye : Yrd. Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ, Niğde Üniversitesi



ONAY:

Bu tez 14./05/2003 tarihinde, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından uygun görülmüş ve Enstitü yönetim Kurulu' nun kararıyla kabul edilmiştir.

21./05/2003



Doç. Dr. Aydın TOPÇU

Enstitü Müdürü

ÖZET

SEİFERT MATRİSLERİ VE DÜĞÜM İNVARYANTLARI

ERTEM, Filiz

Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ

Mayıs 2003, 59 sayfa

Bu çalışmada Seifert yüzeyler yardımıyla Alexander polinomları hesaplandı.

Önce Seifert yüzeyleri (bir düğüm tarafından sınırlanan yüzey) detaylı olarak incelendi. Seifert yüzeyinin varlığının bir ispatı verildikten sonra nasıl inşa edileceği anlatıldı. Bir düğümün yönlendirmesine göre farklı Seifert yüzeyleri olduğundan bunların birbirlerine denk olmasının şartları verildi. Bu yüzeylerin cinsi ve Euler karakteristikleri incelendi. Yüzey üzerindeki kapalı eğrilerin halkalanma sayılarına göre matrisler oluşturuldu. Bu matrislerin denkliği gösterildi.

Sonra M bir Seifert matrisi ise bu durumda determinant $|M+M^T|$ bir invaryanttır ve bunun yardımıyla düğümlerin Alexander polinomu hesaplandı.

Buna ilaveten Alexander-Conway polinomlarını bulmak için kullanılan ağaç diyagramı olarak adlandırılan algoritmayı kullanarak bazı düğümlerin Alexander-Conway polinomları hesaplandı.

Anahtar Kelimeler: Seifert Yüzeyleri, Seifert Matrisleri, Seifert Matrislerinin S-denklığı, Alexander Polinomları, Alexander-Conway Polinomları

ABSTRACT

SEIFERT MATRICES AND KNOT INVARIANTS

ERTEM, Filiz

Niğde University
Graduate School of Natural Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ

Mayıs 2003, 59 pages

In this study, Alexander polynomials have been calculated by means of Seifert surfaces.

Firstly, Seifert surfaces (a surface bounded by a knot) have been examined in detail. After a proof of the existence of a Seifert surface is given, it has been told how it will be constructed. Some conditions in which every Seifert surface must be equivalent to each other have been given. Since a knot has different Seifert surfaces depending on its orientation. The genus and Euler characteristics of these surfaces have been examined. The matrices have been constructed according to the linking numbers of the closed paths on the surface. The equivalency of these matrices has been shown.

Then, if M is a Seifert matrix, at this time determinant $|M+M^T|$ is an invariant and Alexander polynomials of the knots have been calculated by using this determinant.

In addition Alexander-Conway polynomials of some knots have been calculated by using the algorithm which is known as tree diagram used to find Alexander-Conway polynomials.

Key words: Seifert Surfaces, Seifert Matrices, S-equivalency of Seifert Matrices, The Alexander Polynomials, The Alexander-Conway Polynomials.

TEŞEKKÜR

Bu çalıőmanın her aőamasında bana her tŒrlŒ kolaylığı sağlayan ve yardımlarını esirgemeyen Niğde Őniversitesi, Fen Edebiyat FakŒltesi, Matematik BŒlŒm Baőkanı Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ' a, çalıőmalarım sırasında bana her zaman destek olan Hocalarım Prof. Dr. Gabil Aliyev' e ve Prof. Dr. Mammad İ. Musatafayev'e, ve Matematik BŒlŒmŒnŒn diğer bŒtŒn Őęretim elemanlarına teőekkŒr ederim.

Filiz ERTEM



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
BÖLÜM I. GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ.....	1
BÖLÜM II. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
BÖLÜM III. SEİFERT YÜZEYLERİ.....	5
3.1. Seifert Yüzeyi.....	5
3.2. Bir düğümün Cinsi.....	9
BÖLÜM IV SEİFERT MATRİSİ.....	14
4.1. Seifert Matrisi.....	14
4.2. Seifert Matrislerinin S-Denkliği.....	21
BÖLÜM V SEİFERT MATRİSLERİNDEN İNVARYANTLAR.....	35
5.1. Alexander Polinomu.....	35
5.2. Alexander-Conway polinomu.....	38
5.3. Alexander Polinomunun Temel Özellikleri.....	47
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	50
KAYNAKLAR.....	51

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.a. Yonca yaprağı düğümünün regüler diyagramı.....	3
Şekil 2.1.b. (3,2)-Türk düğümünün normal diyagramı.....	3
Şekil 2.2. Yönlendirme çeşitleri.....	3
Şekil 2.3. Reidemeister hareketleri.....	3
Şekil 3.1. Kavşak üzerinde ayırma işlemi.....	5
Şekil 3.2. Sekiz şekilli düğümün Seifert yüzeyi ve grafi.....	6
Şekil 3.3. Bir karenin burulması.....	6
Şekil 3.4.a. Tek burulmalı yüzey.....	7
Şekil 3.4.b. Çift burulmalı yüzey.....	7
Şekil 3.5. Bazı düğümlerin normal diyagramı.....	8
Şekil 3.6. Bazı düğüm ve halkaların yüzey ve grafları.....	8
Şekil 3.7. Cinsi 1 ve 2 olan yüzey.....	9
Şekil 3.8. Tor ve torun üçgenlemesi.....	11
Şekil 3.9. Bir delikli tor.....	11
Şekil 3.10. S^2 küresi.....	12
Şekil 3.11. Tek bantlı Seifert yüzeyi.....	12
Şekil 4.1. S^2 düğümünün Seifert yüzeyi ve grafi.....	14
Şekil 4.2. Eğrilerin yükselmesi.....	15
Şekil 4.3. Yüzeyin yükselmesi.....	15
Şekil 4.4. Sağ-el yonca yaprağı düğümünün Seifert yüzeyi ve grafi.....	17
Şekil 4.5. Şekil 4.4'deki yüzey eğrilerinin halkalanma durumları.....	17
Şekil 4.6. (3,2)-Türk düğümünün Seifert yüzeyi ve grafi.....	18
Şekil 4.7. (3,2)-Türk düğümünün denk Seifert yüzeyleri.....	18
Şekil 4.8. Kapalı eğri çiftleri.....	19
Şekil 4.9. Bağlantılı bir yüzey.....	23
Şekil 4.10. İki bant üzerine bir eğri yerleştirme.....	23
Şekil 4.11. Ω_1 Reidemeister hareketinin uygulanması.....	24

Şekil 4.12.	Ω_1 Reidemeister hareketinin uygulanması.....	25
Şekil 4.13.	Ω_2 Reidemeister hareketinin uygulanması.....	25
Şekil 4.14.	Kapalı eğriler.....	26
Şekil 4.15.	Ω_3 Reidemeister hareketinin uygulanması.....	27
Şekil 4.16.	Ω_3 hareketine karşılık gelen eğrileri.....	28
Şekil 4.17.	Ω_3 hareketinin uygulanması.....	29
Şekil 4.18.	Bir düz Seifert yüzeyi.....	29
Şekil 4.19.	Bir Seifert yüzeyi örneği.....	30
Şekil 4.20.	Şekil 4.19'daki yüzeydeki bant ve disklerin durumu.....	30
Şekil 4.21.	Şekil 4.19'daki yüzeyin düz Seifert yüzeyi.....	31
Şekil 4.22.	α, β eğrileri ve halkalanma sayıları.....	31
Şekil 4.23.	Bir düğüm, bir Seifert yüzeyi ve uzay grafi.....	33
Şekil 5.1.	Aşıkara düğüme denk olmayan bazı düğüm diyagramları	35
Şekil 5.2.	D_+, D_-, D_0 regüler diyagramları.....	38
Şekil 5.3.	D_+, D_-, D_0 yüzey diyagramları.....	39
Şekil 5.4.	$\Gamma_+, \Gamma_-, \Gamma_0$ graflarının kenar bölgeleri ve bu bölgenin ortak sınırının kenarları.....	40
Şekil 5.5.	Seifert matrislerinin girişleri.....	41
Şekil 5.6.	μ -bileşenli aşıkara halkalar.....	42
Şekil 5.7.	Yonca yaprağı düğümü için ağaç diyagramı.....	43
Şekil 5.8.	Sekiz şekilli düğüm için ağaç diyagramı.....	44
Şekil 5.9.	Borromean halkasının ağaç diyagramı.....	45
Şekil 5.10.	Bir tam düğüm.....	48
Şekil 5.11.	KT düğümü.....	49

BÖLÜM I

GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ

Düğümle ilgili çalışmalar 19. Yüzyılda başlamıştır. 1833 yılında Alman matematikçi Gauss ile başlayan düğüm teorisi ve 3-boyutlu manifoldlarla ilgili çalışmalar gelişerek devam etmektedir. Düğüm ve halka teorisi ile ilgili çalışmalar genellikle düğüm ve halka invaryantlarını bulma, bu invaryantlara göre düğüm ve halkayı sınıflandırma problemi ile ilgilidir. Bunlardan en önemlileri düğüm grubu ve Alexander polinomudur. Düğüm grubunu hesaplamak için Dehn ve Wirtinger tarafından ortaya konulmuş iki yöntem vardır (Rolfsen, 1976, Burde and Zieschang, 1985). Bu yöntemler kullanılarak bazı sınıflandırmalar yapılmıştır. Mesela Tor düğümleri, düğüm gruplarına göre tamamen sınıflandırılmıştır. 1928 yılında Alexander düğüm diyagramının herbir kavşağı için denklem yazdı. Bütün kavşaklar üzerinden elde ettiği denklemi katsayılar matrisinin determinantının bir Laurent polinomu olduğunu gördü(Alexander, 1928). Bu polinom birkaç istisna hariç düğüm tipini belirleyen önemli bir invaryanttır. Daha sonra Fox, 1965 yılında yazdığı bir kitapta düğüm grubunun bağlantıları üzerinde serbest türev adını verdiği yeni bir kavram geliştirdi (Fox, 1965). Serbest türevden yararlanarak Alexander polinomunun hesaplanması için yeni bir yöntem geliştirdi. Alexander polinomunun incelenmesi ve onun düğüm teorisinde anlatmak istediği hüküm tamamlanmıştır. Alexander polinomunun düğümün topolojik özelliği ile bağlantılı olduğundan düğüm teorisinde çok büyük bir etkiye sahiptir.

Bu çalışmada Alexander polinomu; Alexander'ın ve Fox'un metodlarından farklı olarak Seifert matrisleri yardımıyla hesaplanmıştır. Bu yüzden Seifert yüzeyleri ve Seifert matrisleri detaylı olarak incelenmiştir.

Bu tez giriş bölümü dahil 6 bölümden oluşmaktadır. II. Bölümde, diğer bölümde kullanılan düğüm teorisinin bazı temel kavramlarından bahsedildi. III. Bölümde Seifert çemberleri ve Euler karakteristiği gibi Seifert yüzeyleri ile ilgili konular anlaşılır bir şekilde anlatıldı. IV. Bölümde Seifert matrisleri incelendi. Seifert matrislerinin S-denklığı basit bir şekilde ele alınarak Seifert matrisleri üzerinde Reidemeister hareketlerinin etkisi dikkatle incelendi. Sonuçta M bir Seifert matrisi ise $|M-tM^T|$ ifadesinin topolojik bir invaryant olduğu görüldü. V. Bölümde $|M-tM^T|$ ifadesi kullanılarak düğümün Alexander polinomu hesaplandı. Ayrıca Alexander polinomunun Conway versiyonu da izah edildi ve Alexander polinomunu temel özellikleri anlatıldı.

BÖLÜM II

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanacağımız düğüm teorisinin bazı temel kavramlarından kısaca bahsedilecektir.

2.1. Tanım. X ve Y iki Hausdorff uzayı olsun. Eğer $f: X \rightarrow f(X)$ bir homeomorfizm ise $f: X \rightarrow Y$ dönüşümüne bir *yerleştirme* denir.

2.2. Tanım. $S^1 = \{(x,y): x^2+y^2 = 1; x,y \in \mathbb{R}\}$ birim çember olsun. S^1 ' in \mathbb{R}^3 veya $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ içine yerleştirmesine bir *düğüm* denir. $n \in \mathbb{N}$ için n tane düğümün ayrık birleşimine bir *halka* denir.

2.3. Tanım. K ve L , S^3 içinde yönlendirilmiş iki düğüm olsun. Eğer $h(K) = L$ olacak şekilde yönlendirmeyi koruyan bir $h: S^3 \rightarrow S^3$ homeomorfizmi varsa K düğümü L düğümüne *denktir* denir.

2.4. Not. İki düğümün denkliği tanımı; S^3 içindeki düğümler kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı verir. Bu bağıntı, söz konusu kümeyi ayrık denklik sınıflarına ayırır. Her denklik sınıfına bir düğüm tipi denir. Denk iki düğüm, aynı düğüm tipindedir (Burde and Zieschang, 1985).

2.5. Tanım. Yönlendirilmiş bir üçgen (veya çember) ile aynı tipte olan bir düğüme *düğümlememiş düğüm* denir

2.6. Tanım. $p: S^3 \rightarrow S^3$, $p(x, y, z) = (x, y, 0)$ ile tanımlanan fonksiyona *izdüşüm fonksiyonu* denir.

2.7. Tanım. K , S^3 içinde bir düğüm ve p , yukarıda geçen izdüşüm fonksiyonu olsun. $a \in p(K)$ için $p^{-1}(a) \cap K$, n tane ($n > 1$) noktadan ibaret ise, a 'ya $p(K)$ 'nin bir n -katlı noktası denir. Eğer $n = 2$ ise, a noktasına *kavşak noktası* denir.

2.8. Tanım. Bir kavşak noktası, K 'ya ait tam iki noktanın resmi olup, bu iki noktadan z koordinatı daha büyük olana *üst kavşak noktası* ve diğerine *alt kavşak noktası* denir.

2.9. Tanım. K bir düğüm ve p izdüşüm fonksiyonu olsun. Eğer,

i. $p(K)$ 'nin katlı noktaları sadece sonlu sayıda kavşak noktası ise,

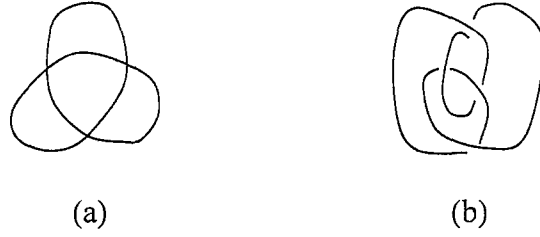
ii. Hiçbir kavşak noktası K 'ya ait bir köşe noktasının p altında resmi değilse,

$p(K)$ 'ya K 'nin *regüler izdüşümü* denir. Eğer $p(K)$ izdüşümü regüler ise, K düğümüne uzayda *regüler pozisyondadır* denir.

Bir düğümün regüler izdüşümüne, o düğümün *regüler diyagramı* da denir. Regüler diyagram; düğümün, uzayın yeteri kadar uzak ve uygun bir noktasından çizilen resmi gibidir (Rolfsen, 1976, Burde and Zieschang, 1985).

2.10. Tanım. Regüler pozisyonda bulunan bir K düğümü ile bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. K 'nın her alt kavşak noktasından uzaklığı ε 'dan küçük olan noktalarının kümesi A ise, $p(K-A)$ kümesine K düğümünün *normal diyagramı* denir.

Şekil 2.1(a), yonca yaprağı düğümünü regüler diyagramını, Şekil 2.1(b) (3-2) Türk düğümü normal diyagramını göstermektedir.



Şekil 2.1

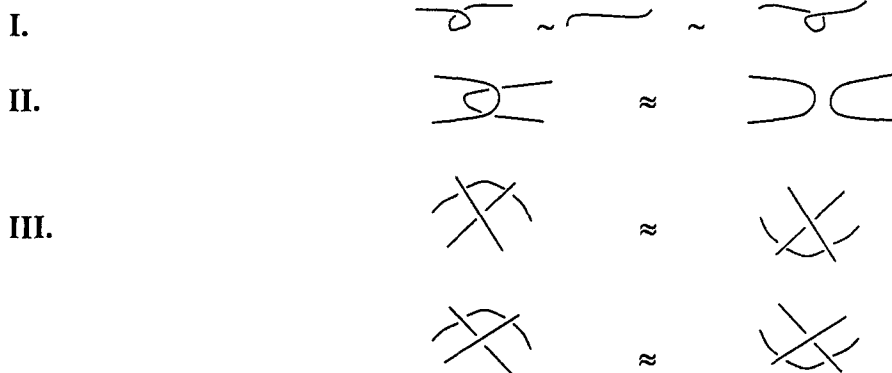
2.11. Tanım. Bir düğüm diyagramı üzerinde hareket yönü belirtilirse, o düğüm yönlendirilmiş olur. Böylece bir düğüm diyagramından yönlendirilmiş iki düğüm elde edilir.



Şekil 2.2

2.12. Tanım. Bir K düğümünün $r: S^3 \rightarrow S^3$; $r(x, y, z) = (x, y, -z)$ ile tanımlanan yansıma fonksiyonu altındaki görüntüsüne K 'nın *ayna görüntüsü* denir. Yansıma fonksiyonu, uzayın yönlendirmesini tersine çeviren bir homeomorfizmdir.

2.13. Reidemeister Hareketleri.



Şekil 2.3

İki poligonal düğümlerden biri, sonlu sayıda Reidemeister hareketiyle diğerine dönüşebiliyorsa bu düğümler aynı tiptendir. Yani, sonlu sayıda Reidemeister hareketinin uygulanmasıyla diyagramları birbirine dönüşebilen düğümler denktir (Kaufmann, 1991).

O halde, Reidemeister hareketleri ile değişmeyen özellikler, düğüm tipinin özellikleridir (Kaufmann, 1991).

2.14. Tanım. II. ve III. Reidemeister hareketleri ile doğurulan denklik bağıntısına *regüler izotopi* denir.

2.15. Tanım. Reidemeister hareketlerinin üçü ile doğurulan diyagramlar üzerindeki denklik bağıntısına *kuşatan izotopi* denir.

Böylece II. ve III. hareketler regüler izotopi, I., II., III. hareketler kuşatan izotopi invariantlarıdır (Kaufmann, 1991).

2.16. Tanım. $L = \{\alpha, \beta\}$, α ve β bileşenlerinden oluşan bir halka olsun. $lk(L) = lk(\alpha, \beta)$ *halkalanma sayısı*

$$lk(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon(p)$$

formülü ile tanımlanır. Burada $\alpha \cap \beta$, α ile β geçitlerinin (kendi kendini kesme hariç) kümesini ve $\varepsilon(p)$ ise kavşağın işaretini gösterir (Kauffman, 1991).

BÖLÜM III

SEİFERT YÜZEYLERİ

Fen'deki bilim dallarında dönüm noktaları olarak adlandırılan momentler vardır. Bunlar konunun anlaşılmasını kuvvetlendirir ve derinleştirir. Dönüm noktasının kesin olarak ne olduğu tartışma konusu olmaktadır. Düğüm teorisi pek çok dönüm noktasına da sahiptir, bunlardan biri , Alexander polinomudur.

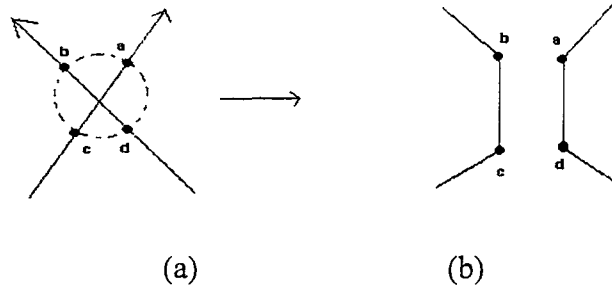
Alexander polinomu, J.W. Alexander tarafından 1928' de bulundu. Bu düğüm teorisinin köşetaşı olmuştur. Polinom, Alexander adını taşımasına rağmen, Reidemeister L-polinom olarak da adlandırılır. Her ne kadar Reidemeister' ın yaklaşımı Alexander' ın çalışmasından bağımsız olsada bu iki polinom aynı polinomlardır. L-polinomundaki L harfi, Laurent kısaltılmasıdır. Bu iki polinomun bazı terimleri negatif üs alabilir.

Bu bölümde Seifert yüzeyleri incelenecektir. Bu bize gelecek bölümde Seifert matrisleri olarak adlandırılan kavramı açıklamamıza ve daha sonra Alexander polinomunu hesaplamamıza yardımcı olacaktır.

3.1. Seifert Yüzeyi

Aşağıdaki temel teorem ile başlayalım.

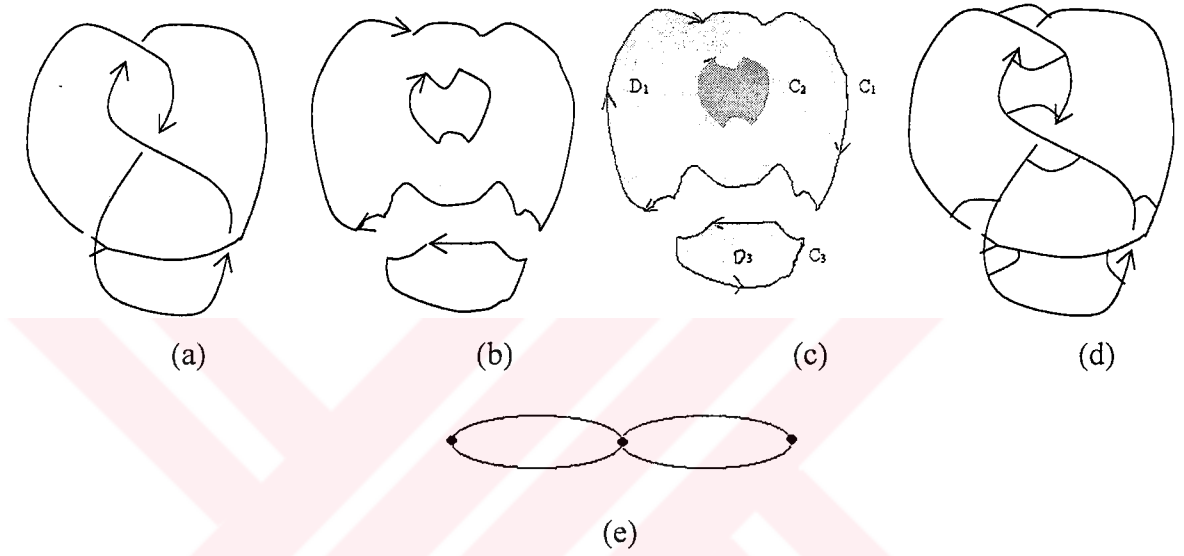
Teorem 3.1.1. Keyfi yönlendirilmiş bir K düğümü (veya halkası) verilsin. O zaman R^3 'te sınırı K olan bir yönlendirilebilir bağlantılı F yüzeyi vardır.



Şekil 3.1

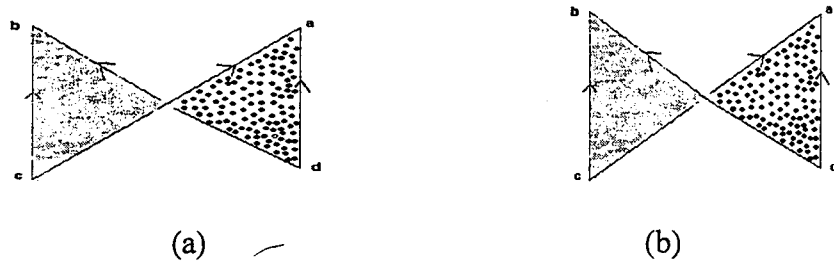
İspat. K , keyfi yönlendirilmiş bir düğüm (veya halka) ve D , K için bir regüler diagram olsun. Amacımız D' yi birkaç basit kapalı eğriye ayırmaktır. İlk olarak merkezi D' nin bir kavşak noktası olan bir küçük çember çizelim. Bu çember D' yi $a, b, c,$ ve d noktalarında keser (Şekil 3.1(a)). Şekil 3.1(b)' de gösterildiği gibi bu kavşak noktasını ayırılım ve a ile d' yi, b ile c' yi birbirine bağlayalım).

Bu değişikliği yaptığımızda ac ve bd orijinal doğru parçaları ad ve bc yeni doğru parçalarına ayrılır. Bu yolla D' nin çember içinde bulunan kavşak noktalarını kaldırabiliriz. Bu işleme D' nin bir kavşak noktasında K düğümünün ayrılması denir (yönlendirilmesine göre). Eğer D' nin her kavşak noktasında bu ayrılma işlemini yaparsak, o zaman D' den bütün kavşak noktalarını kaldırmış oluruz. Sonuç olarak D , birkaç basit kapalı eğriye ayrılmış olur, Şekil 3.2(b). Bu eğrilere Seifert eğrileri denir. D' nin kendisi bir düzlemde bir halkanın hiçbir kavşak noktası olmayan bir regüler diagrama dönüşür (aşıkark halka). Bu kapalı eğrilerin herbiri bir disk sınırlar.



Şekil 3.2

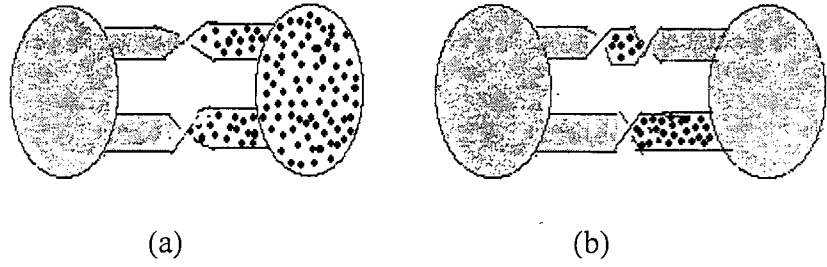
Şekil 3.2(b) durumunda ayırma yolu ile Şekil 3.2(c)' deki D_1 , D_2 , ve D_3 disklerini elde ederiz. D_i ' nin sınırı C_i Seifert eğrisidir. Şekil 3.2(c)' de D_2 ' nin D_1 ' in altında veya üstünde olma ihtimali vardır. Bu belirsizlik Bölüm IV' te bazı zorluklara neden olur (bakınız Örnek 4.1.3). Bununla birlikte bu zorluklar Teorem 4.2.1 ispatlandığı zaman çözülecektir. Son olarak, farklı disklerden bir tek yüzey oluşturmak için bu disklerin burulması olan küçük bantlarla birleştirebiliriz. Bunu yapmak için, ilk olarak, bir $abcd$ karesi alırız ve ona bir tek pozitif veya negatif burulma veririz. Şekil 3.3(a) ve (b), bu burulmuş karelerin, bantları gerektirdiğini gösterir.



Şekil 3.3

Pozitif (negatif) kavşak noktalarına karşılık gelen D' deki pozitif (negatif) bantları ayırmadan önce birbirine bağlarsak (Şekil 2.2), o zaman bir bağlantılı, yönlendirilebilir F yüzeyi elde ederiz, Şekil 3.2(d). (Bir K halkası durumunda K' nin izdüşümü bağlantılı olacak şekilde K' yi değiştirirsek, o zaman yukarıdaki metod ile bağlantılı bir yüzey elde edebiliriz). Bu F yüzeyinin sınırı, açıkça orijinali K düğümüdür.

Üstelik yukarıda söylenildiği gibi F' de yönlendirilebilir yüzeydir. Şekil 3.4(a)' da gösterildiği gibi yüzeyin önünü gölgeleme ve arkasını noktalama ile yüzeyin ön ve arkasını ayırt edebiliriz. Bu yüzeye bir yön verilmesine izin verir.



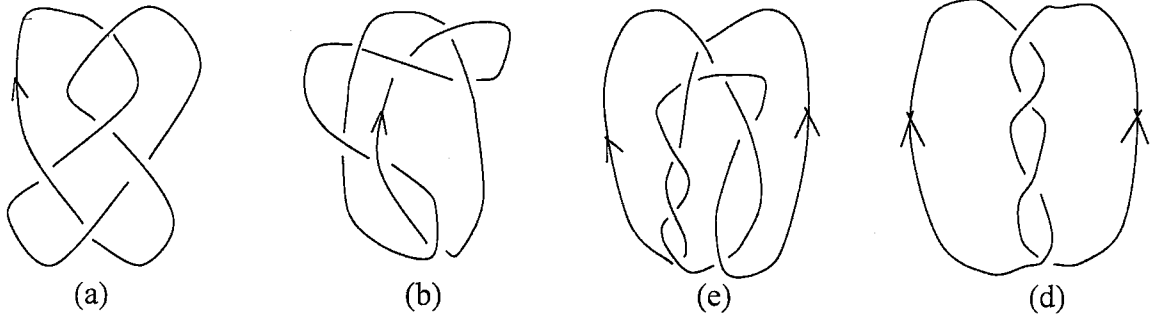
Şekil 3.4

Bununla birlikte Şekil 3.4(b)' deki gibi bantlardan bir tanesi çift burulmaya sahipse, o zaman yüzeyin ön ve arkasını ayırt etmemiz mümkün değildir.

Genellikle sınırı, yönlendirilmiş bir K düğümü (veya halkası) olan bir yönlendirilebilir bağlantılı yüzeye K' nin bir Seifert yüzeyi denir (Murasugi, 1996). F' nin yönlendirilmesi onun sınırı olan K düğümünün yönlendirilmesinden gelir. Yukarıdaki ispatta inşa edilen Seifert yüzeyi K' nin regüler D diyagramına bağlıdır. Buradan, Seifert yüzeyi, K' nin regüler diagramı olan D' den oluşmuştur demek daha doğrudur. Halka durumunda, bir bileşenin yönlendirilmesi değiştiğinde Seifert yüzeyinin yönlendirmesi tamamen değişir.

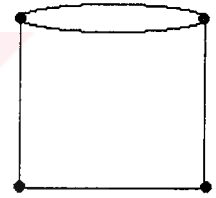
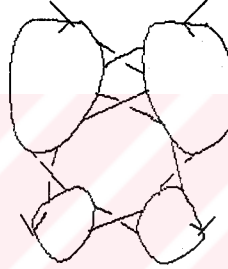
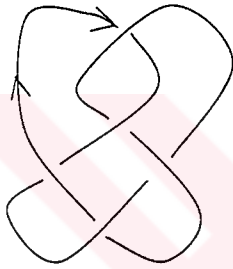
Şimdi kabul edelim ki bir F yüzeyi yukarıda tanımlanmış bantlar ve disklerden elde edilmiş bir K düğümünün Seifert yüzeyi olsun. Herbir diski bir noktaya bürzersek ve aynı zamanda bantların genişliğini bir eğri parçasına bürzersek o zaman bu noktalar ve eğri parçalarından uzayda bir graf oluşturulur. Böyle grafa K' nin (regüler D diagramının) Seifert grafi denir (Kawauchi, 1996). Gerçekte bu graflar düzlemde bulunur, yani bunlar düzlem graflarıdır. Şekil 3.2(e), köşeleri disklerle ve kenarları bantlara karşılık gelen Şekil 3.2(a)' daki sekiz şekilli düğümün Seifert grafidir.

Örnek 3.1.2. Şekil 3.5’de düğümler ve halkalar için Seifert yüzeylerini(regüler diagramdan elde edilmiş) geometrik olarak çizelim. Onların Seifert grafını belirleyelim. Bir önceki ile bu Seifert grafını karşılaştıralım.



Şekil 3.5

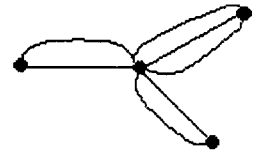
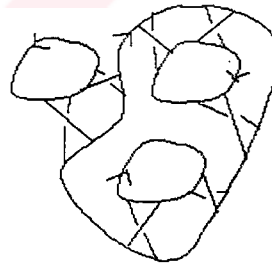
Çözüm. (a)



Yönlendirilebilir Seifert yüzeyi

Seifert grafi

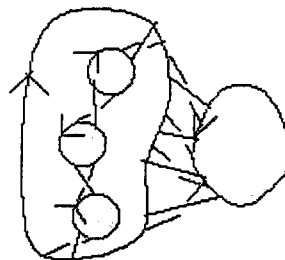
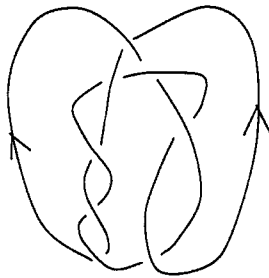
(b)



Seifert yüzeyi

Seifert grafi

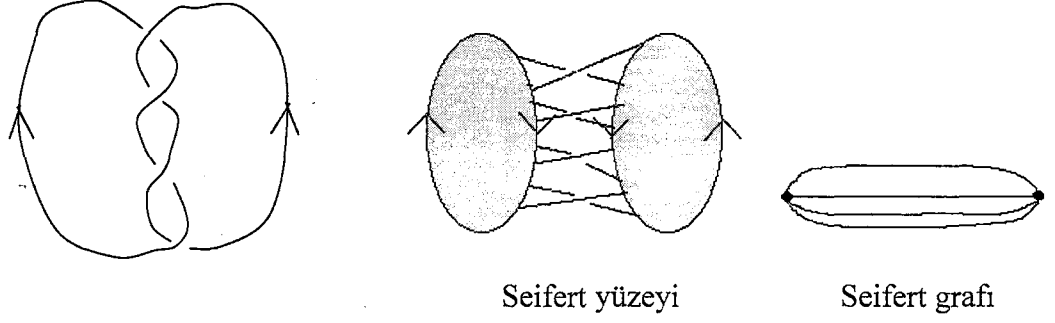
(c)



Seifert yüzeyi

Seifert grafi

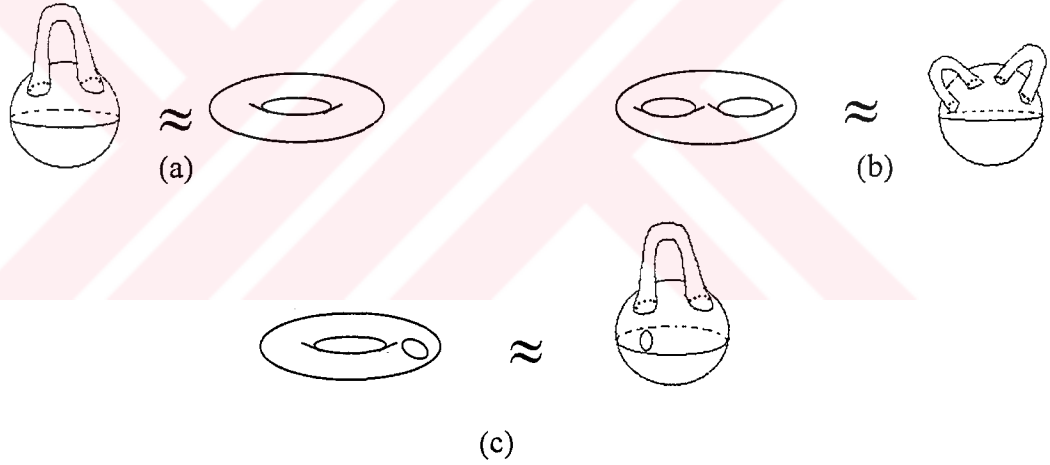
(d)



Şekil 3.6

3.2. Bir Düğümün Cinsi

Bu kısımda topolojide yüzeylerin sınıflandırılması ile ilgili çok iyi bilinen fundamental bir teoremi dikkate almamız gerekir. Bu teorem bir kapalı (yani kompakt ve sınırı olmayan) yönlendirilebilir F yüzeyinin, bir kürenin yüzeyine tutturulmuş birkaç kulpla elde edilen kulplu küreye topolojik olarak denk olduğunu (yani homeomorf olduğunu) ifade eder. Bu kulpların sayısına F 'nin cinsi denir ve $g(F)$ ile gösterilir (Hempel, 1976).



Şekil 3.7

Örnek 3.2.1. Şekil 3.7(a)'daki cinsi 1 olan yüzeye bir tor denir. Şekil 3.6(b)'deki yüzey cinsi 2 olan yüzeydir.

Şimdi bir düğümün F Seifert yüzeyinin cinsinin nasıl hesaplayacağımızı düşünelim. F bir sınıra sahip olduğundan, yukarıdaki teorem ile F , bir kulplu küreye, ayrıca küre üzerindeki deliklerin sınırları bir halkanın bileşenlerine karşılık gelecek şekilde bir delikli küreye homeomorftur Şekil 3.6(c).

Genel olarak bir düğümün Seifert yüzeyini gözünde canlandırmak kolay değildir. Örneğin sekiz şekilli düğümün Seifert yüzeyi Şekil 3.2(d)'de gösterilmişti, gerçekte bu topolojik olarak Şekil 3.2(c)'dekiyle aynı yüzeydir.

Bir önceki kısımda açıkladığımız metod, Seifert yüzeylerin varlığını kuvvetlendirmektedir ve böylece teoride her zaman verilen bir K düğümü için bütün Seifert yüzeylerinin cinsi minimum olanını göz önünde tutacağız. Bu minimum cinse K 'nın cinsi diyeceğiz ve $g(K)$ ile göstereceğiz. Cins bir düğüm invaryantıdır (Kawauchi, 1996). Keyfi bir düğüm için gerçekten onun cinsini hesaplamakta kullanılan bir algoritma vardır (Murasugi, 1996). Aslında keyfi bir düğümün cinsini hesaplamak oldukça zor bir iştir. Bununla beraber bazı düğüm tipleri için cinsin hesaplanması nispeten açık bir durumdur (Murasugi, 1996).

Keyfi bir düğümün cinsinin belirlenmesi zor olmasına rağmen geometrik olarak çizilmiş yönlendirilebilir yüzeyin cinsini belirlemek kolaydır. Hesaplama klasik bir invaryanttan Euler karakteristiğine dayanır (Singer and Thorpe, 1967).

Teorem 3.2.2. Bir kapalı yönlendirilebilir yüzeyi α_0 noktalarına, α_1 kenarlarına, α_2 yüzeylerine bölelim.

$$\chi(F) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$$

olsun. O zaman $\chi(F)$ 'nin bir tamsayı olması, F 'yi nasıl böldüğümüze bağlı değildir, yalnızca F 'ye bağlıdır. Bu tamsayıya F 'nin Euler karakteristiği denir. $\chi(F)$ Euler karakteristiği ve F 'nin cinsi, $g(F)$ aşağıdaki eşitliklerle birbiriyle bağlantılıdır (Rolfsen, 1976, Burde and Zieschang, 1985).

$$\chi(F) = 2 - 2g(F) \quad (3.1)$$

Buradan

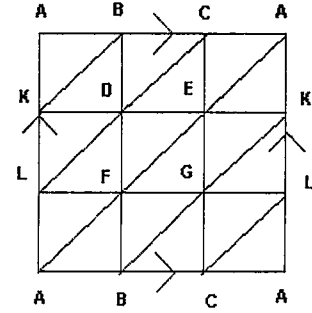
$$g(F) = \frac{2 - \chi(F)}{2}$$

dir. F 'nin sınırı varsa sınır birkaç nokta ve kenarlardan meydana geldiği için yukarıdaki formül

$$\chi(F) = 2 - \mu(F) - 2g(F) \quad (3.2)$$

şeklinde olur. Burada $\mu(F)$, F 'nin sınırını oluşturan kapalı eğrilerin sayısıdır.

Örnek 3.2.3. Şekil 3.8’de gösterildiği gibi bir toru bir karenin bölüm uzayı olarak alalım ve bu kareyi üçgenleyelim Böylece $\alpha_0 = 9$, $\alpha_1 = 27$, $\alpha_2 = 18$ olur. Buna göre $\chi(F) = 0$, $g(F) = 1$ elde edilir.



Şekil 3.8

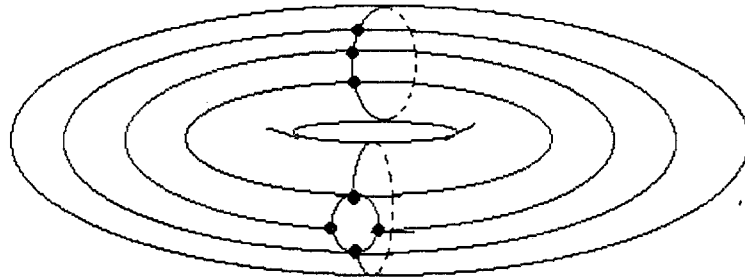
$$\alpha_0 = s\{A, B, C, D, E, F, G, K, L\} = 9$$

$$\alpha_1 = s\{AB, BC, AC, AK, AL, BK, BD, CD, CE, AE, KD, DE, EK, DL, DF, EF, EG, KG, LF, FG, GL, AF, BF, BG, CG, CL\} = 27$$

$$\alpha_2 = s\{ABK;BDK, BDC, CDE, ACE, AEK, KDL, DLF, DEF, EFG, EGK, GKL, LFA, FAB, FGB, BCG, GLC, CAL\} = 18$$

$$\chi(F) = 9 - 27 + 18 = 0 \quad g(F) = \frac{2 - \chi(F)}{2} = \frac{2 - 0}{2} = 1$$

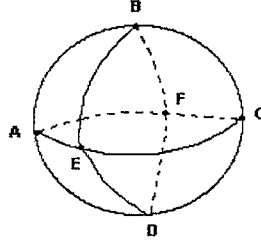
Ayrıca toru Şekil 3.8’deki gibi delikli tor olarak çizersek o zaman $\alpha_0 = 7$, $\alpha_1 = 14$, $\alpha_2 = 6$ olur. Buna göre $\chi(F) = -1$, $g(F) = 1$ elde edilir.



Şekil 3.9

Örnek 3.2.4. Uygun bir ayırma ile S^2 küresinin Euler karakteristiği $\chi(F) = 2$ olduğu gösterilebilir.

Gerçekten Şekil 3.10'daki S^2 küresini



Şekil 3.10

$\alpha_0 = 6$, $\alpha_1 = 12$, $\alpha_2 = 8$ olduğunda

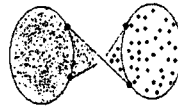
$$\chi(S^2) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 6 - 12 + 8 = 2$$

olur. Şimdi yukarıdaki Euler karakteristiğini daha önceden inşa ettiğimiz Seifert yüzeyine uygulayalım. F'nin bantlarını ve disklerini F'nin bir bölünmesi olarak düşünebiliriz. Bu bölünmede F'nin köşeleri bantların köşeleridir. F'nin kenarları, disklerin sınırları ve bantların köşe noktaları arasındaki poligonal eğrilerdir. F'nin yüzleri diskler ve bantlardır.

Örnek 3.2.5. d disklerin sayısı ve b bantların sayısı ise o zaman

$\alpha_0 = 4b$, $\alpha_1 = 6b$, $\alpha_2 = b+d$ olur.

Çözüm. b: Bir düğümün Seifert yüzeyinde minimum bantların sayısı ($b = 1$) olsun. Bu durumda en az iki disk vardır. Şimdi Şekil 3.11'deki grafiği köşelere, kenarlara ve yüzlere ayıralım. Bu durumda 4 köşe, 6 kenar ve 3 yüz vardır. O halde $\alpha_0 = 4 = 4b$, $\alpha_1 = 6 = 6b$ ve $\alpha_2 = 3 = b+d$ olduğu açıktır. Tümevarımla $\alpha_0 = 4b$, $\alpha_1 = 6b$ ve $\alpha_2 = b+d$ olduğu görülebilir.



Şekil 3.11

Buradan $\chi(F) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 4b - 6b + b + d = d - b$ olduğu Örnek 3.1.2.5'den çıkar. Bundan başka, $\mu(K)$, K halkasının bileşenlerinin sayısıdır.

$$2g(F) + \mu(F) - 1 = 1 - d + b$$

elde ederiz.

Özel olarak K düğüm ise, $\mu(K) = 1$ olduğundan $2g(F) = 1-d+b$ olduğu çıkar. Bölümün geri kalan kısmında bu sayıyı yani $1-d+b$ 'yi gözönünde bulunduracağız. $\Gamma(D)$ 'nin Şekil 3.2(e)'deki Seifert yüzeyinden inşa edilmiş Seifert grafi olduğunu kabul edelim. $\Gamma(D)$ düzlem grafi olduğundan S^2 'yi birkaç alana böler. S^2 'yi R^2 'ye sonsuzdaki noktanın birleşimi olarak düşünebiliriz. S^2 'nin bu parçalanışında noktaların sayısı d ve kenarların sayısı b 'dir. Yüzlerin sayısını f kabul edelim, o zaman Teorem 3.2.2 ve Örnek 3.2.1'den

$$2 = \chi(S^2) = d-b+f$$

elde ederiz. Buradan

$$f-1 = 1-d+b \quad (3.3)$$

dir. Yani $1-d+b$, sonsuzda noktayı ihtiva eden yüz hariç S^2 'nin bölünmesinin yüzlerinin sayısına eşittir.

Örnek 3.2.6. Örnek 3.1.2'deki düğümlerin ve halkaların herbir Seifert yüzeyinin cinsini hesaplayalım. Ayrıca bu yüzeylerden elde edilmiş Seifert grafi hakkında, yukarıda (3.3)'te elde edilen formülü doğrulayalım.

(a) $d = 4, b = 5, \quad 2g(F) = 1-d+b = 1-4+5 = 2 \quad g(F) = 1$

(b) $d = 4, b = 7 \quad 2g(F) = 1-4+7 = 4 \quad g(F) = 2$

(c) $d = 5, b = 8 \quad 2g(F) = 1-5+8 = 4 \quad g(F) = 2$

(d) $d = 2, b = 4 \quad 2g(F)+\mu(F)-1 = 1-d+b \quad 2g(F)+2-1 = 1-2+4 \quad 2g(F) = 2$
 $g(F) = 1$

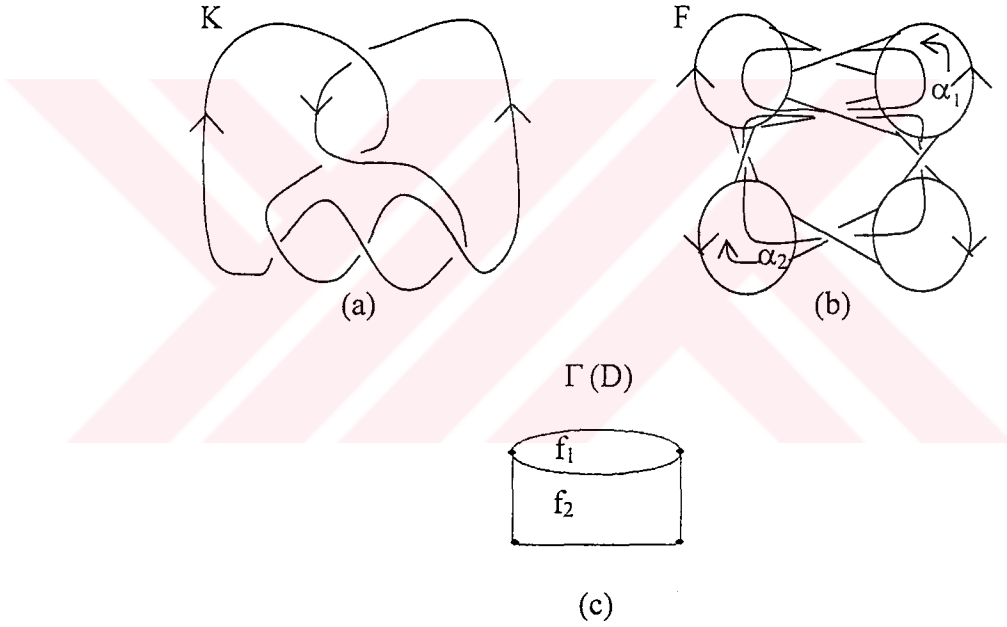
BÖLÜM IV

SEİFERT MATRİSLERİ

4.1. Seifert Matrisi

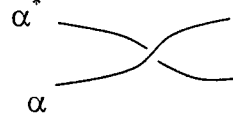
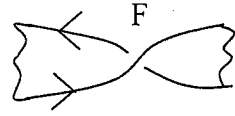
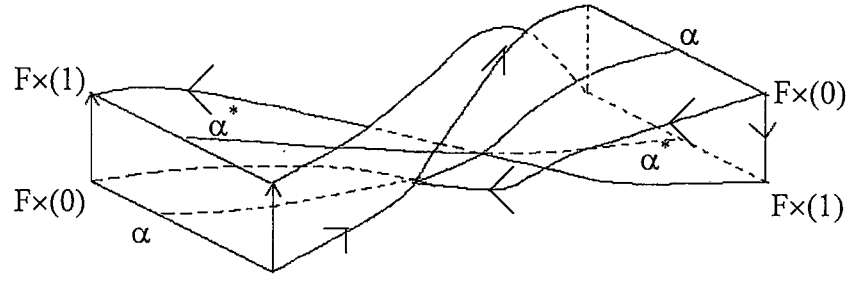
F , bir K düğümünün(veya halkasının) regüler D diagramında oluşturulmuş bir Seifert yüzeyi ve $\Gamma(D)$ onun Seifert grafi olsun. F üzerinde bulunan $2g(F)+\mu(F)-1$ kapalı eğrilerini elde etmek istiyoruz.

$\Gamma(D)$, S^2 'yi parçaladığı zaman, önceki bölümde $2g(F)+\mu(F)-1(=1-d+b = f-1)$ bölgelerin sayısına (∞ ' u ihtiva eden alan hariç) eşit olduğunu gösterdik. Bu bölgelerin(yüzlerin) her birinin sınırı $\Gamma(D)$ 'nin bir kapalı eğrisidir. Bundan dolayı, bu kapalı eğrilerden Seifert yüzeyi üzerinde kapalı eğriler oluşturabiliriz.

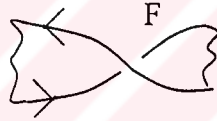
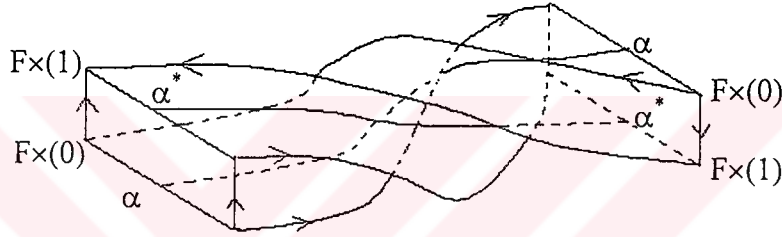


Şekil 4.1

Bu kapalı eğriler biraz ilginçtir, fakat kapalı eğrilerin bir koleksiyonu olarak bir düğüm invaryantını ispatlayacaktır. Örneğin α_1 ve α_2 kapalı eğrilerinden elde ettiğimiz Şekil 4.1(a)'daki K düğümü, cinsi 1 olan bir Seifert yüzeyi sınırlar. α_1 ve α_2 'nin kesişme noktalarına sahip olabilirler. α_1 ve α_2 'nin ortak noktalarının olması mümkündür fakat $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ bir halka değildir. Eğer yüzeyi biraz kaldırırsak o zaman α_2 eğrisine paralel olan yeni bir α_2^* eğrisi vardır. Kesişim noktalarını kaldırırsak buradan yapılan $\{\alpha_1, \alpha_2^*\}$ bir halkadır.



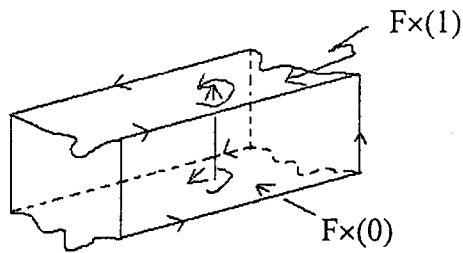
(a)



(b)

Şekil 4.2

Bu yapıları kolayca anlamak ve yükseltmeyi düzenli bir şekilde yapmak için, şekil 4.2'de gösterilmiş matematiksel yapıyı göz önüne alalım. İlk olarak, F 'yi kalınlaştırmamız gerekir, başka ifadeyle, $F \times [0,1]$ 'yi oluşturmalıyız, Şekil 4.2 bu kalınlaştırma yöntemi sırasında hem F hem de $[0,1]$ parçası sağ-el kuralı yönlendirmelerine sahiptir.



Şekil 4.3

Orijinal F yüzeyi $F \times (0)$ gibi düşünülebilir ve böylece hem α_1 hem de α_2 sırasıyla $\alpha_1 \times (0)$ ve $\alpha_2 \times (0)$ olarak alınabilir. Basitlik için orijinal notasyonu kullanacağız ve bu amaç doğrultusunda $\alpha_1 \times (1)$ ve $\alpha_2 \times (1)$ 'i sırasıyla α_1^* ve α_2^* ile göstereceğiz. α_1 ve α_2 'ye keyfi tarzda bir yönlendirme verebiliriz. Doğal olarak bu yönlendirmeler α_1^* ve α_2^* üzerinde yönlendirmeler oluşturur. Şimdi bu $lk(\alpha_1, \alpha_2^*)$ halkalanma sayısını hesaplamamıza izin verir. $lk(\alpha_2, \alpha_1^*)$, $lk(\alpha_1, \alpha_1^*)$ ve $lk(\alpha_2, \alpha_2^*)$ halkalanma sayılarını tanımlamakta mümkündür. Bu 4 halkalanma sayıları aşağıda 2×2 matrise yerleştirilebilir.

$$M = \begin{bmatrix} lk(\alpha_1, \alpha_1^*) & lk(\alpha_1, \alpha_2^*) \\ lk(\alpha_2, \alpha_1^*) & lk(\alpha_2, \alpha_2^*) \end{bmatrix}$$

Bu M matrisine, Şekil 4.1(a)'daki K düğümünün Seifert matrisi denir. Halkalanma sayıları tamsayı olduğundan M matrisi bir tamsayıdır (Bununla beraber, M matrisinin α_1 ve α_2 yönlendirmelerine bağlı olduğu dikkat edilmelidir, böylece matris K'nın bir invaryantı değildir).

Bir düğümün (veya halkanın) F Seifert yüzeyinin cinsi $g(F)$ ise o zaman F üzerinde

$2g(F) + \mu(F) - 1 (= m)$ sayıda $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ kapalı eğrileri vardır. Yukarıda ana hatları çizilerek anlatılmış yöntem genişletilirse, bu kapalı eğrilere verilen keyfi yönlendirmeler ile onların değişik halkalanma sayılarını hesaplayabiliriz. Yukarıdaki gibi, bir $m \times m$ matrisinin girişleri anlamında onları

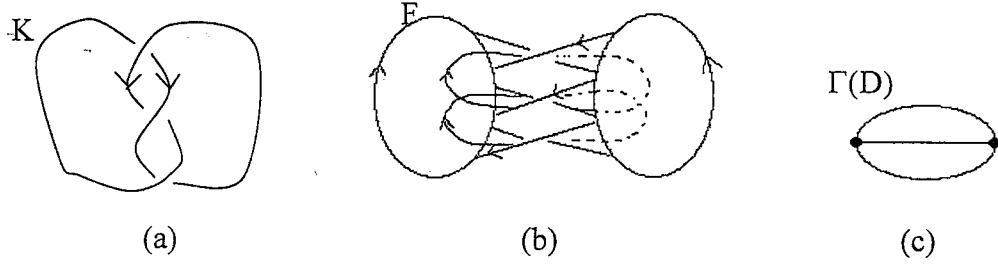
$$M = [lk(\alpha_i, \alpha_j^*)]_{i,j=1,2,\dots,m}$$

biçiminde formüle edebiliriz. Buradan regüler D diagramından bir tam matrisi elde edebiliriz. Bununla beraber bu matrisin $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ yönlendirmelerine bağlı olduğuna dikkat etmeliyiz. Bu matrise (K'nın regüler diagramından elde edilmiş) K'nın Seifert matrisi denir (Murasugi, 1996). Genellikle halkalanma sayıları $lk(\alpha_i, \alpha_j^*)$ ve $lk(\alpha_j, \alpha_i^*)$ eşit değildir. Bu yüzden M matrisi simetrik matris değildir.

Ayrıca $g(F) = 0$ durumunda, K'nın Seifert matrisi boş matris olarak tanımlanır (K, bahsettiğimiz gibi aşıkardır).

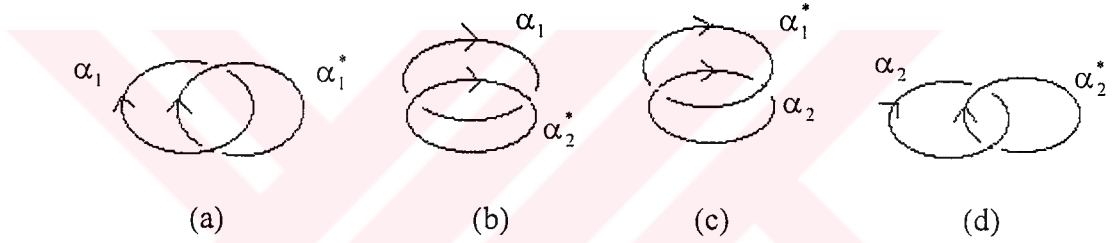
Şimdi pratikte bir düğümün Seifert matrisinin nasıl hesaplanacağını gösteren birkaç örnek verelim.

Örnek 4.1.1. Eğer sağ-el yonca yaprağı düğümünün regüler diagramını Şekil 4.4(a)'daki diagrama dönüştürürsek, o zaman onun Seifert yüzeyinin Şekil 4.4(b)'deki diagram olduğunu ve Seifert grafinin Şekil 4.4(c)'deki gibi olduğunu görmek kolaydır.



Şekil 4.4

Şekil 4.4(b)'den Seifert yüzeyi üzerinde α_1 ve α_2 kapalı eğrilerinin varolduğu çıkar. α_1 , α_2 , α_1^* , ve α_2^* arasındaki ortak ilgi Şekil 4.5(a)~(d)'de gösterilmiştir.



Şekil 4.5

Bu 4 diagramdan $lk(\alpha_1, \alpha_1^*) = -1$, $lk(\alpha_2, \alpha_1^*) = 1$, $lk(\alpha_1^*, \alpha_2) = 1$ çıkar. Diğer durumda halkalanma sayısı sifira eşittir.

Böylece sağ-el yonca yaprağı düğümü için Seifert matrisi

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

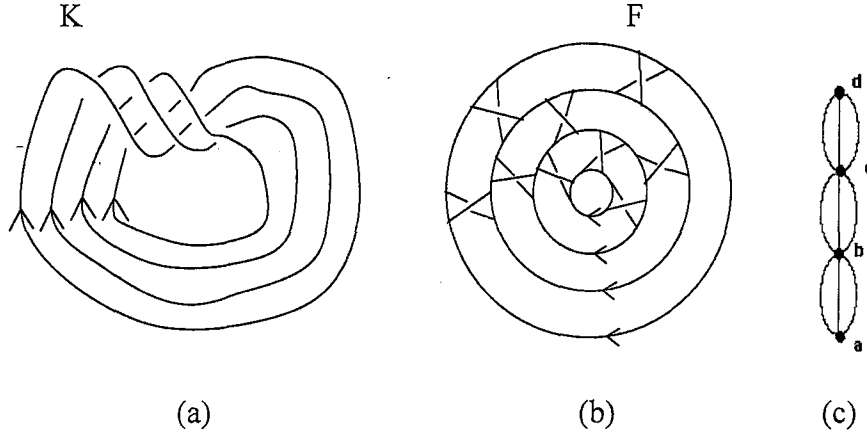
olur.

Örnek 4.1.2. Benzer biçimde sol-el yonca yaprağının Seifert matrisine dikkat edersek aşağıdaki matrisi elde ederiz.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

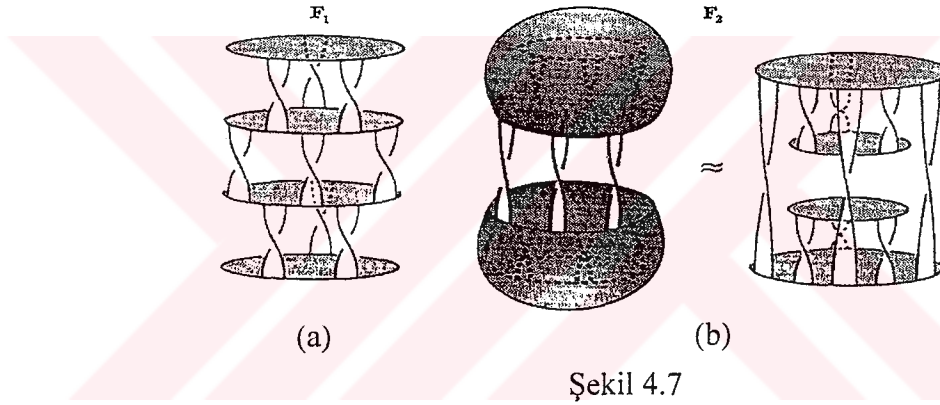
şeklindedir.

Örnek 4.1.3. Şimdi Şekil 4.6(a)'da ki K düğümünü göz önüne alalım.



Şekil 4.6.

Çeşitli Seifert yüzeyleri bu diagramda inşa edilebilir. Özel olarak, Şekil 4.7(a) ve (b)'deki iki durumu düşüneceğiz.



Şekil 4.7

Seifert yüzeyinin cinsi 3 olduğundan onun Seifert matrisi 6×6 matrisidir ve karşılıklı olarak yüzey üzerinde 6 kapalı eğri vardır. İlkinde (a) durumunu gözönüne aldık. Bunu kavrayabilmek için daha çok halkalanma sayısını çift eğriler ile sembolize edeceğiz.

Şimdi F_1 üzerinde $\Gamma(D)$ grafının a ve b köklerine karşılık gelen α_1 ve α_2 çifti ile başlayalım. Şekil 4.7(a)'ya bakılırsa bu eğri çifti F_1 üzerinde üstteki disk(birinci disk), alttaki diske (yani ikinci diske) bağlayan bantlardan teşkil edilmiştir (bakınız Şekil 4.7). Bu iki diski kendisine bağlayan bantlardan da şekillenir.

Şekil 4.5'dekine benzer bir yolla aşağıdaki formülü elde edebiliriz:

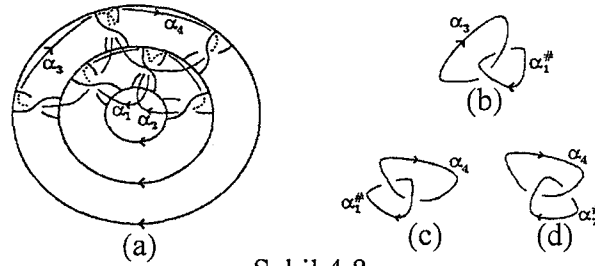
$$lk(\alpha_1, \alpha_1^*) = -1, lk(\alpha_2, \alpha_1^*) = 1, lk(\alpha_2, \alpha_2^*) = -1$$

Şimdi $\Gamma(D)$ içinde köşeleri bir c olan basit kapalı eğrilere karşılık gelen F_1 üzerindeki α_3 ve α_4 çiftlerini gözönüne alalım. Bu kapalı eğri çiftleri F_1 'in ikinci ve üçüncü diskleri ve

bu diskleri birbirine bağlayan bantlar üzerinde bulunur. Bu çift için $\alpha_3, \alpha_3^*, \alpha_4$ ve α_4^* arasında halkalanma sayısının hesaplanması okuyucuya bırakılmıştır. Bir sonraki adım, kapalı eğrilerin iki çifti yani α_1, α_2 ve α_3, α_4 arasındaki karşılıklı halkalanma sayısını hesaplamak içindir. Diyagramların bazıları Şekil 4.8(b)~(d)'de gösterilmiştir.

Sonuçlanan hesaplamalar $lk(\alpha_3, \alpha_1^*) = 1, lk(\alpha_4, \alpha_1^*) = -1, lk(\alpha_4, \alpha_2^*) = 1$ ile verilir.

Bu kapalı eğri çiftleri arasındaki bütün diğer halkalanma sayılarının sıfır olduğunu görmek zor değildir.



Şekil 4.8

Bu şekilde devam edersek kapalı eğrilerin son çiftini ilgili halkalanma sayılarını hesaplayabiliriz. Bu açıkça basittir ve böylece direkt hesaplamalar yapmadan halkalanma sayılarının matrisini yani K'nın Seifert matrisini vereceğiz. Bu matris

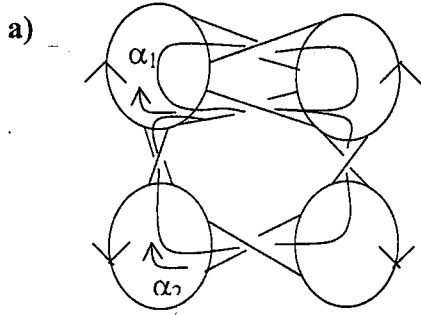
$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Şekil 4.7(b)'den, benzer hesaplamalarla F_2 Seifert yüzeyinden

$$M' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Seifert matrisi elde edilir.

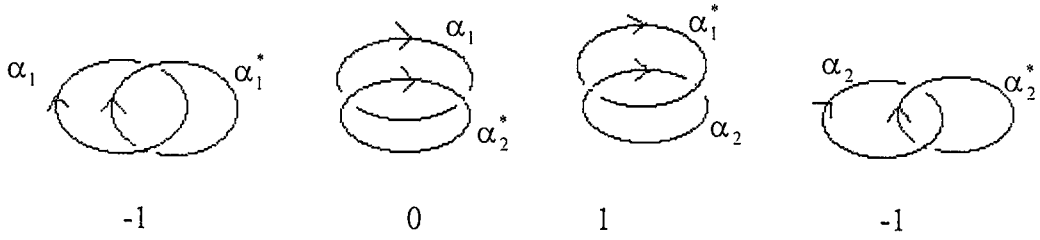
Örnek 4.1.4. Şekil 3.5(a) ve (b)'deki düğümler için Seifert matrisini belirleyelim. Özel olarak, Şekil 3.5(b)'deki düğüm için, Örnek 4.1.3'te açıklanmış metodu uygulayarak iki Seifert matrisi buluruz. Gerçekten



$$d = 4, b = 5$$

$$m = 1 - d + b = 1 - 4 + 5 = 2$$

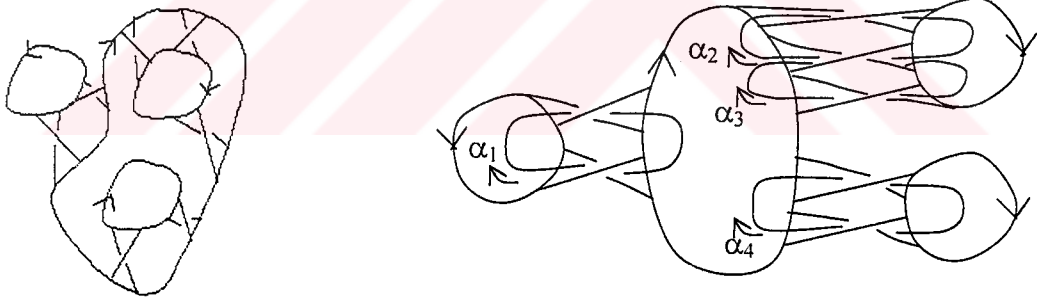
$$m = 2$$



$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$d = 4, b = 7, m = 1 - d + b = 1 - 4 + 7 = 4 (m = 4)$$



$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olur. Yukarıdaki örnekte dikkat edilirse bir düğümün Seifert matrisi tek değildir. Gerçekten ya yönlendirmeyi ya da $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ kapalı eğrilerinin sırasını değiştirmeyi sabit tuttuğumuzda Seifert matrisinin değişmesine neden olabiliriz. Bu yüzden Seifert matrisinden bir düğümün invariantını elde etmek için aynı düğümün Seifert matrisleri arasındaki bağlantıyı incelememiz gerekir. Anlatılmak istenen ana fikir kısaca söylenirse asıl cümle iki kare matrisin S-denklidir.

4.2. Seifert Matrislerinin S-Denkliği

Yukarıda bahsedilen Seifert inşası kullandığımız regüler diagrama bağlıdır.

Bir regüler diagramı bir başka denk regüler diagrama Reidemeister hareketlerinin peşpeşe uygulanmasıyla dönüştürülebilir. Böylece düğüm invaryantlarını tanımlamak için Seifert matrisi üzerinde Reidemeister hareketinin etkisini dikkatle incelemeliyiz.

Teorem 4.2.1. İki denk düğümden (veya halkadan) elde edilen iki Seifert matrisi, aşığıdaki Λ_1 ve Λ_2 operatörlerini ve onların terslerini sonlu defa uygulanmasıyla birini diğerine dönüştürebiliriz (Murasugi, 1996).

$$\Lambda_1 = M_1 \rightarrow PM_1P^T,$$

burada P , $\det(P) = \pm 1$ ($\det P$, P 'nin alışılmış bildiğimiz determinantıdır) ve tersi olan bir tam matristir ve P^T , P 'nin transpoz matrisini gösterir.

$$\Lambda_2 = M_1 \rightarrow M_2 = \begin{bmatrix} * & 0 \\ M_1 & \vdots & \vdots \\ * & 0 \\ 0 \dots 0 & 0 & 1 \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_1 & \vdots & \vdots \\ * \dots * & 0 & 0 \\ 0 \dots 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

burada $*$ keyfi bir tamsayıyı gösterir.

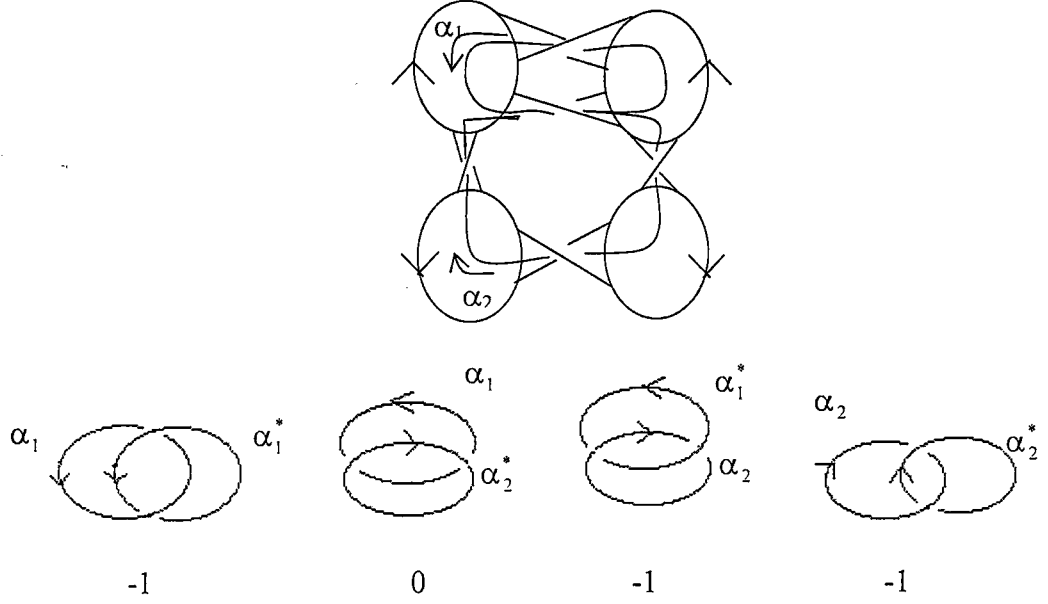
Yukarıdaki matematiksel düşünce teoremin (tam belirli) olması için esastır, ancak bu terminolojideki bazı terimleri ve bir matris üzerindeki iki işleme etkisini anlamaya çalışacağız.

Λ_1 operasyonu ya iki satırın diyelim ki i . ve j . satırların yerlerini değiştirir ve i . ve j . sütunların yerlerini değiştirir ; veya k ile i . satrı çarpıp j . satıra ekler, ve sonra k ile i . sütunu çarpar ve j . sütuna ekler. Bu operasyona elementer simetrik matris operasyonu diyeceğiz. Operasyon öyle bir yolla tanımlanmıştır ki kapalı eğrilerin sırasını veya yönlendirmesini diğer eğriler ile değiştirilmesine karşılık gelir. Diğer taraftan Λ_2 operasyonu düğüm teorisine has bir matris operasyonudur. Bu operasyon Reidemeister hareketine göre Seifert yüzeyinin cinsindeki değişikliğe karşılık gelecek şekilde tanımlanmıştır, yani bu Seifert matrisini daha küçük veya daha büyük yapar.

Örnek 4.2.2. Örnek 4.1.4'deki α_1 'in yönlendirmesini (ve buradan α_1^* 'in yönlendirmesini) tersine çeviriniz ve M' Seifert matrisini belirleyiniz. M ve M' 'nü karşılaştırınız ve M' 'nün M 'de 1. satır ve 1. sütunu (-1) 'le çarpılmasından elde edildiğini doğrulayınız.

Çözüm.

a)



$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Tanım 4.2.3. M ve M' iki kare matris olsun. Biri diğerinden Λ_1 , Λ_2 ve Λ_2^{-1} operasyonlarının sonlu sayıda uygulamasıyla elde edilsin. O zaman bu iki matrise S-denktir diyeceğiz ve $M \stackrel{S}{\sim} M'$ ile göstereceğiz ("S" Seifert anlamındadır) (Murasugi, 1996).

Eğer matrisin biri sonlu defa Λ_1 operasyonu işlemi uygulanmasıyla diğerinden elde edilmişse bu iki matrise Λ_1 -denktir deriz.

Şimdi iki denk düğümden(veya halkadan) elde edilen iki Seifert matrisi Teorem 4.2.1'den dolayı S-denktir. Teorem 4.2.1'in ispatına başlamadan önce bir sonraki paragrafta anlatılmış durumu önlemek için, önceki fikirlerimizin bazılarını genelleştirelim ve düzenleyelim.

Tanımdan bir Seifert yüzeyi bir bağlantılı yüzeydir. Verilen bir regüler D diagramı bağlantılı değilse, onu Ω_2 Reidemeister hareketi uygulayarak bir bağlantılı regüler \hat{D} diagramına dönüştürmemiz gerekir. Böylece şimdi bir uygun bağlantılı yüzey inşa

edilebilir. Ayrıca orijinal regüler diagramımızı bir denk regüler diagrama dönüştürmek için kalan Reidemeister hareketlerini uygulamamız mümkündür, buna rağmen Seifert yüzeyi bağlantılı olmuyorsa, yani Seifert yüzeyinin bağlantısız olması durumunda, Seifert matrisini yeniden tanımlamalıyız öyle ki Seifert matrisi Seifert yüzeyinin bağlantılı veya bağlantısız olup olmamasından bağımsız olmalıdır.

Bunun için D , p tane bağlantılı $D(1), D(2), \dots, D(p)$, ($p \geq 1$) bileşeni olan bir regüler diagramı olsun. Bahsettiğimiz metodu kullanarak her bir $D(i)$ 'den $F(i)$ Seifert yüzeyi ve sonradan $F(i)$ 'den $i = 1, 2, \dots, p$ olmak üzere bir $M(i)$ Seifert matrisi inşa edebiliriz.

Tanım 4.2.4. Bir bağlantısız $F(1) \cup F(2) \cup \dots \cup F(p)$ Seifert yüzeyinin M Seifert matrisi, $M(1), M(2), \dots, M(p)$ ile $p-1$. mertebeli O_{p-1} sıfır matrisinin direk toplamı olarak tanımlanır, yani bu tanımın sonucu

$$M = \begin{bmatrix} M(1) & & & & \\ & M(2) & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & & M(p) & \\ & & & & O_{p-1} \end{bmatrix}$$

olur.

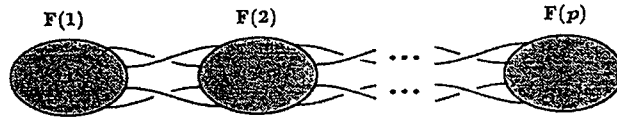
Şimdi aşağıdaki önermenin bu tanımın aşikar bir sonucu önerme olarak verelim.

Önerme 4.2.5. \hat{F} , $F(i)$ ve $F(i+1)$, $i = 1, 2, \dots, p-1$ arasında bir ters burulmalı iki banta eklenmesiyle $F(1) \cup F(2) \cup \dots \cup F(p)$ 'den elde edilmiş bağlantılı bir yüzey olsun. Bakınız

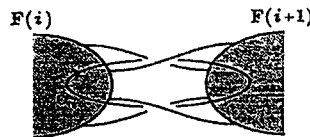
Şekil 4.9 (Böylece \hat{F} bir bağlantılı \hat{D} diagramından inşa edilmiş bir Seifert yüzeyidir). Bu

durumda \hat{F} 'den elde edilmiş \hat{M} matrisi Tanım 4.2.4'de tanımlanmış matrise Λ_1 -denktir ;

buradan, $\hat{M} \stackrel{s}{\sim} M$ olur.



Şekil 4.9



Şekil 4.10

İspat. Bu yeni bantların bir çifti üzerine, bu yeni basit kapalı α_i eğrisi, $i = 1, 2, \dots, p-1$ olmak üzere yerleştirin, bakınız Şekil 4.10.

Her bir orijinal basit kapalı $\alpha_{j,k}$ eğrisi $F(j)$ üzerine inşa edildiğinde $lk(\alpha_{j,k}, \alpha_i^*) = 0$ ve $lk(\alpha_i, \alpha_{j,k}^*) = 0$ [elbette $lk(\alpha_i, \alpha_i^*) = 0$ 'dır], \hat{M} , M' 'ye Λ_1 -denk olduğunu biliyoruz (Dikkat: \hat{M} ve M arasındaki tek fark $\alpha_{j,k}$ 'nın her birinin sayısının bir değişikliğidir veya yönlendirilmedeki bir değişikliktir).

Şimdi Teorem 4.2.1'in ispatına bakmak için daha iyi bir durumdayız.

Teoremi ispatlamak için ilk olarak Reidemeister hareketlerinin herbirini uyguladığımızda Seifert yüzey değişikliklerinin nasıl değiştiğine bakmamız ve bunun sonucu olarak, bir sonuç olarak Seifert matrisinin nasıl değiştiğini incelememiz gerekir. Gerçekten, aşağıdaki önermeye göre, yüzeyin yalnızca lokal değişikliğini düşünerek ispatı kısıtlayabiliriz.

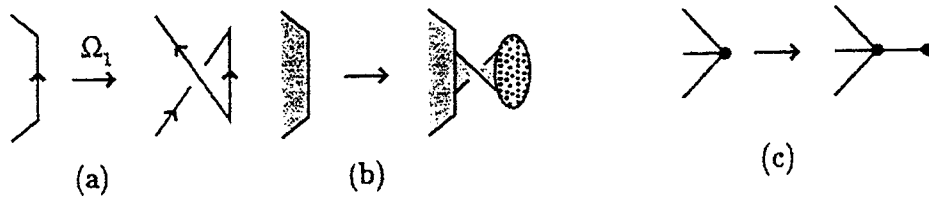
Önerme 4.2.6. D bir regüler diagram ve D' , yalnızca bir tek Reidemeister hareketinin uygulanmasıyla D 'den elde edilmiş regüler diagram olsun. Ayrıca F , D 'den inşa edilmiş bir Seifert yüzeyi olsun. Benzer olarak D' 'den bir F' inşa edebiliriz, fakat bu yapırsa F ve F' yalnızca Reidemeister hareketi ile uygulandığı kısımlarda farklıdır (Diğer bir ifadeyle F ve F' birkaç yer hariç özdeştir). Sırasıyla F ve F' 'den elde edilmiş M ve M' Seifert matrisleri S -denktir (Gerçekte F 'nin iyi inşa edilmesiyle M' , M 'ye birkaç sütun ve satır hariç özdeştir).

İspat. İspat oldukça açıktır, bu yalnızca birkaç mümkün durumun kontrolünü gerektirir. Bu yüzden bu durumların bazılarını bakacağız ve geriye kalanları alıştırmaya bırakacağız.

Ω_1 Reidemeister Hareketinin Uygulanması

Bu Reidemeister hareketi ile ilgili olarak iki durumu gözönünde bulunduracağız.

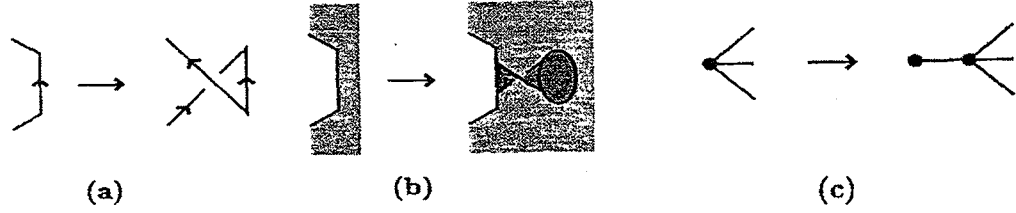
(i). Şekil 4.11(b)'de olduğu gibi her seferinde bantların ve disklerin sayılarından sadece birini arttıracacağız.



Şekil 4.11

Bu durumda yüzeyin cinsi değişmez ve karşılık gelen Seifert grafi yalnızca bir tek köşe ve kenar ilave eder, Şekil 4.11(c). Böylece, yeni bir alan olmadığından Seifert matrisi değişmeden kalacaktır.

(ii) Hareket Şekil 4.12'deki gibi gösterilmiştir.



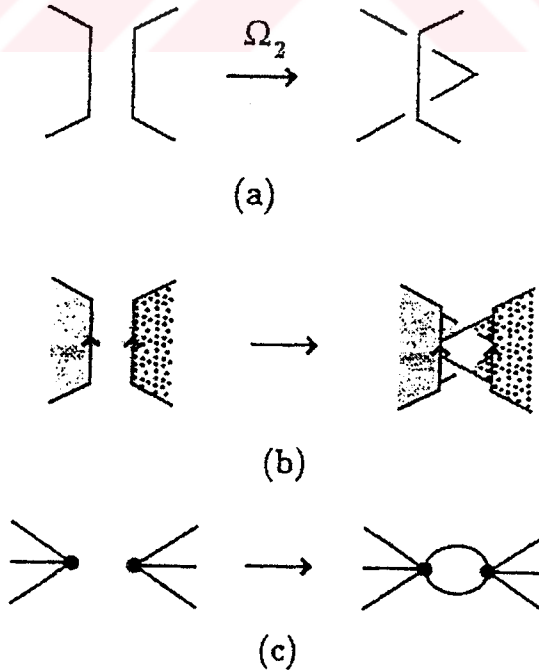
Şekil 4.12

Bununla birlikte, bu durum, (i)'ye benzerdir ve böylece Seifert matrisi değişmez.

Ω_2 Reidemeister Hareketinin Uygulanması

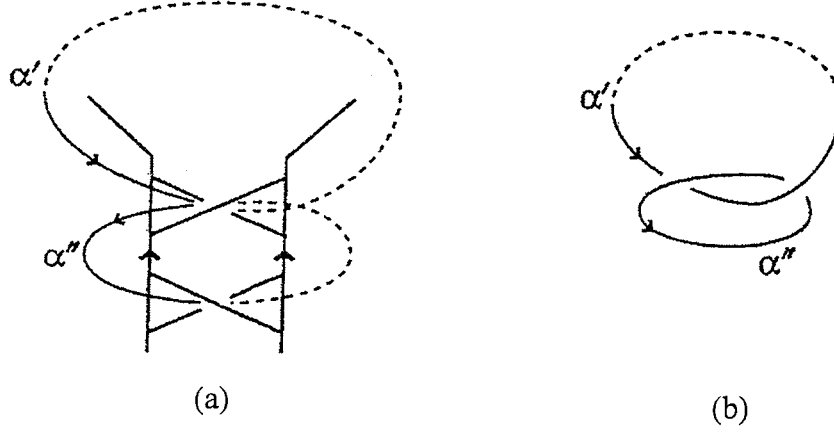
Bu hareketin uygulanmasında, herbir parçanın yönlendirmesine bağlı olarak düşünülecek birkaç durum vardır. Sadece bazı tipik durumlara bakacağız.

(i). Şekil 4.13 durumunda disklerin sayısı değişmez fakat bantların sayısı 2 tane artar.



Şekil 4.13

Orijinal F Seifert yüzeyi bağlantılı değilse, ancak yeni yüzey F' bağlantılıysa o zaman $M \sim M'$ olduğu Önerme 4.2.5'den çıkar. Bu yüzden F'nin bağlantılı olduğunu kabul edelim. O zaman F'nün cinsi $g(F') = g(F)+1$ ile verilir. Burada F ile karşılaştırılan F' fazladan iki kapalı eğriye sahiptir. Bunlar α' ve α'' ile göstereceğiz.



Şekil 4.14

Yeni meydana gelmiş iki bant D' ve D'' disklerini bağlayan son bantlar olarak düşünebiliriz (Eğer gerekirse, kapalı eğrilerin numaralandırmasını değiştirebiliriz). M ile karşılaştırılan yeni M' matrisi aşağıda gösterildiği gibi fazladan 2 tane satır ve sütuna sahiptir. $lk(\alpha', \alpha''^*) = 1$ olduğuna dikkat ediniz, bakınız Şekil 4.14(b).

$$M' = \begin{bmatrix} & & & b_1 & 0 \\ & M & & \vdots & \vdots \\ & & & b_m & 0 \\ b'_1 & \cdots & b'_m & b & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Burada b_i , F üzerinde bulunan α_i ve α_i^* arasındaki halkalanma sayısıdır, b'_i , α' ve α_i^* arasındaki halkalanma sayısıdır, sonuç olarak $b = lk(\alpha', \alpha''^*)$ 'dir.

Λ_1 'i M' 'ye uygularsak

$$M'' = \begin{bmatrix} & & & b_1 & 0 \\ & M & & \vdots & \vdots \\ & & & b_m & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

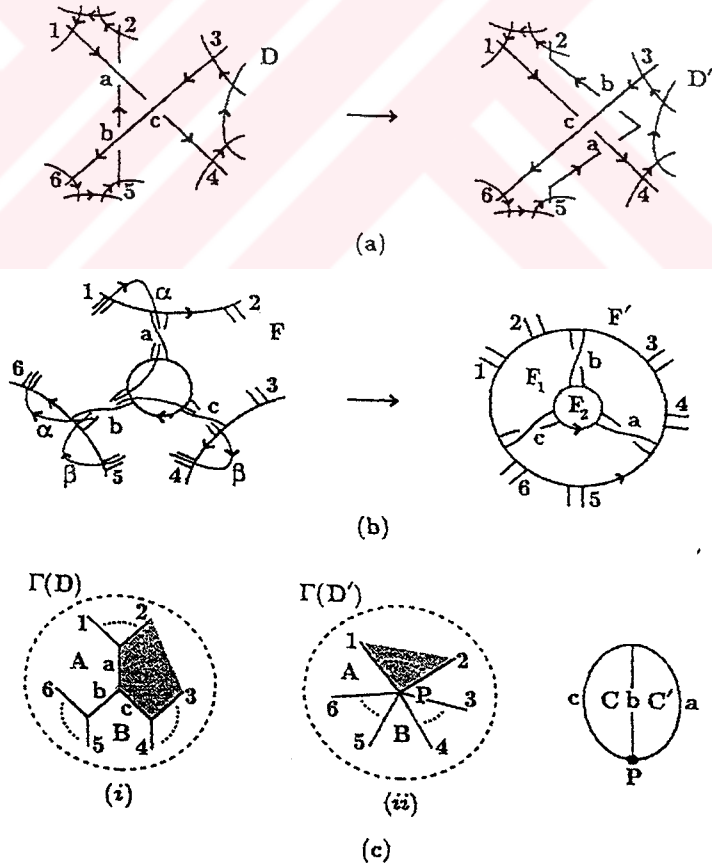
elde edeceğiz.

M' Seifert matrisinin, F' 'den inşa edildiğini gördük. Bu Λ_2 'yi F 'nin Seifert matrisi M' 'ye uygulanmasıyla da elde edilebilir ve sonra Λ_1 birkaç kez uygulanır. Böylece F ve F' 'den elde edilen Seifert matrisleri denktir. Aynı zamanda Reidemeister hareketleri üzerindeki diğer varyasyonlarla ilgili Seifert matrislerinin S-denkliliğini vermek içinde (ayrı yazılacak) gösterilebilir.

Ω_3 Reidemeister Hareketinin Uygulanması

Yalnızca Şekil 4.15(a)'de gösterilen simgesel durumu göz önünde tutacağız. Şekil 4.15'de 1,2,...,6 sayıları ve a,b,c harfleri kavşak noktalarını gösterir ve $\Gamma(D)$ ve $\Gamma(D')$ Seifert grafları içerisindeki kesik çemberler hariç özdeştir.

Şimdi F' 'nin inşasından birkaç yerde hariç, F ve F' 'nün özdeş olduğunu kabul edebiliriz. Bu yerlerin tam mahiyeti en iyisi onların Seifert graflarından gözönünde canlandırılır, onlar kesik çemberlerin içlerine kesin olarak karşılık geldiğinden, Şekil 4.15(c)'den F ve F' 'nün aynı bant numaralarına sahip olduğunu görmek kolaydır ($\Gamma(D)$ veya $\Gamma(D')$ içinde bir köşeye diskin ve bir kenara bir bantın karşılık geldiğine dikkat ediniz).



Şekil 4.15

Taralı alanı sınırlandırılmamış bölgeye karşılık tutarsak o zaman F_2 diski F_1 üzerinde bulunduğundan Seifert matrisleri

$$M = \begin{bmatrix} N & N' & \\ N'' & p & 0 \\ & -1 & q \end{bmatrix}$$

formunda olduğu görülebilir, bakınız Şekil 4.16.

$$M_{F'} = \begin{bmatrix} N & N' & 0 \\ N'' & p & 0 \\ & 0 & q \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Burada $M_{F'}$ 'nin son 4 satırı (ve son 4 sütunu) $\Gamma(D')$ ile A, B, C, C' bölgelerini sınırlandıran basit kapalı $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eğrilerine karşılık geldiği zaman $M_{F'}$ 'nin son iki satırı (ve son iki sütunu) sınırı $\Gamma(D)$ içinde A, B bölgelerini sınırlandıran basit kapalı α ve β eğrilerine karşılık gelir, bakınız Şekil 4.15(c) ve Şekil 4.16(b).

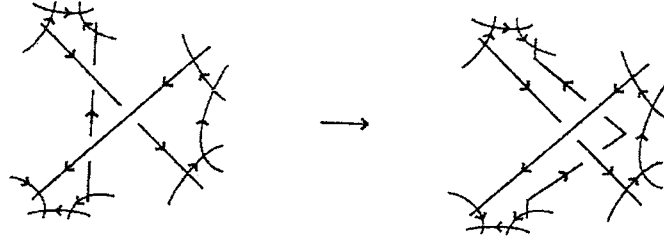


Şekil 4.16

Şimdi $M_{F'}$ 'nin soldan ikinci satırını (γ 'ya karşılık gelen), soldan üçüncü satırından (β 'ya karşılık gelen) çıkarırsak ve aynı şeyi kolonlar için yaparsak

$$M_{F'} = \begin{bmatrix} N & N' & 0 \\ N'' & p & 0 \\ & -1 & q \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

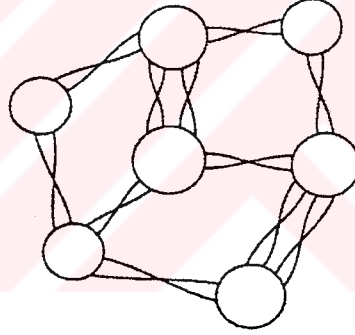
elde ederiz. Bu matris açık olarak M_F 'ye Λ_2^{-1} uygulanmasıyla indirgenebilir ve böylece $M_F \sim^s M_{F'}$ 'dir. F_2, F_1 'in altında olduğu zaman aynı çelişkiye varılır.



Şekil 4.17

Geriye kalan durum Önerme 4.2.6'nın ispatını gerektirir. Şekil 4.17'ye bakınız.

Önerme 4.2.6'ya ek olarak, S-denk Seifert matrislerine sahip aynı regüler diagramlardan inşa edilen iki farklı Seifert yüzeyinin var olduğunu ispatlayabilirsek Teorem 4.2.1'in ispatı tamamlanacaktır. Gerçekten bu bir sonraki önermeyle çelişir.



Şekil 4.18

Önerme 4.2.7. F bir regüler D diagramından inşa edilmiş Seifert yüzeylerinden biri olsun.

O zaman bir D_0 diagramı vardır öyleki

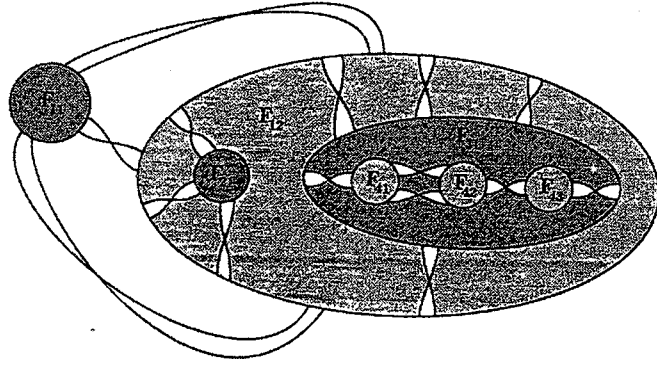
(1) D_0, D 'ye denktir.

(2) Yalnızca bir F_0 Seifert yüzeyi D_0 'dan inşa edilmiştir, yani, bütün diskler aynı seviyededir, bakınız Şekil 4.18 (bir F_0 yüzeyi bazen düz olarak adlandırılır).

(3) F_0 'ın M_{F_0} Seifert matrisi M_F 'ye Λ_1 -denktir ve böylece $M_{F_0} \sim^s M_F$ 'dir.

İspat. Burada kolaylık olsun diye sadece diagramlar anlamında bir geometrik ispat vereceğiz. Detayları okuyucuya bırakıyoruz.

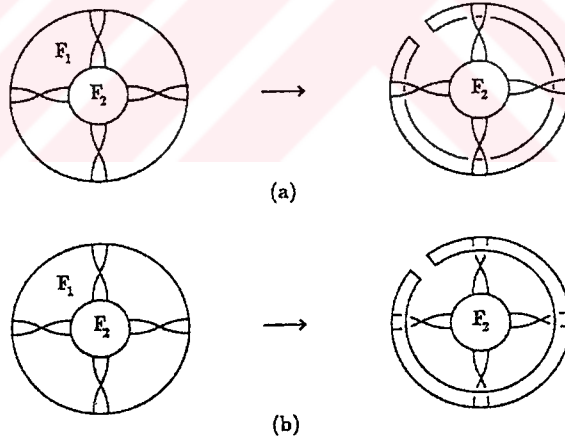
Şekil 4.19'da gösterilen yüzeyle çalışalım.



Şekil 4.19

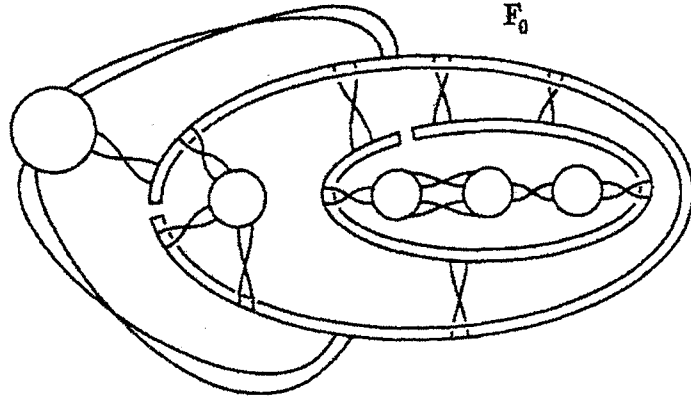
Bir disk başka disklerin içinde olduğunda, belirsiz anlam ve buradan da problem ortaya çıkar. Şekil 4.19'daki örneğimizde F_{12} ve F_{31} gibi böyle iki disk vardır. Strateji bu önermeyi ispatlamak için böyle bir disk Reidemeister hareketlerinin uygulanmasıyla küçük bir disk ile değiştirmektir.

Bu öyle bir yolla yapılacaktır ki eğer F_2 , F_1 üzerine bulunuyorsa o zaman sonuçlara disk F_1 ve F_2 'yi bağlayan bütün bantların altında bulunur, Şekil 4.20(b).



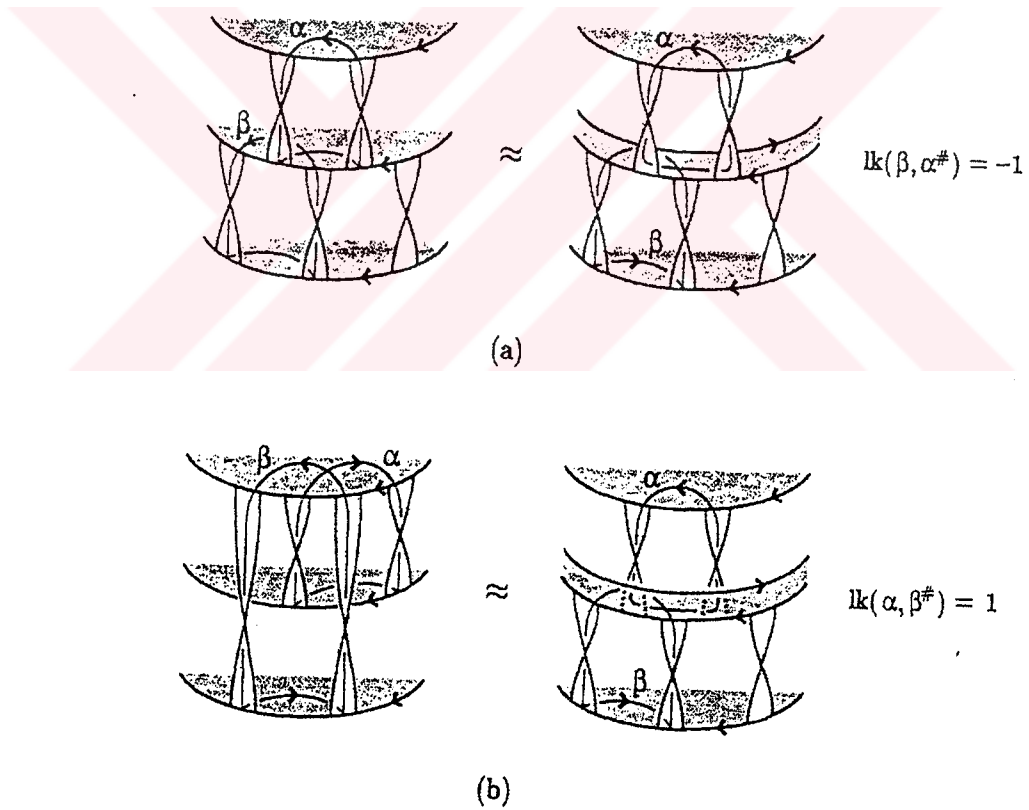
Şekil 4.20

Bu yöntemi tekrarlayarak en sonunda bir düz yüzeyi elde edeceğiz. Örneğin Şekil 4.19'da F_{21} 'in F_{12} üzerinde bulunduğunu F_{31} 'in F_{12} altında bulunduğunu ve F_{41} , F_{42} , F_{43} hepsinin F_{31} üzerinde bulunduğunu kabul edelim. O zaman en uygun dönüştürülmüş F_0 düz yüzeyi, Şekil 4.21'de gösterilmiştir (bunun nasıl yapılacağı okuyucuya bırakılmıştır).



Şekil 4.21

F_0 'ın F ile aynı Seifert yüzeyine sahip olduğunu görmek kolaydır (Λ_1 -denklik farkı ile) bakınız Şekil 4.22.



Şekil 4.22

NOT 4.2.8. Teorem 4.2.6 ve 4.2.7, Teorem 4.2.1'in ispatından çıkar.

Örnek 4.2.9. Örnek 4.1.3'deki M ve M' Seifert matrisleri S-denktir (Gerçekte onlar Λ_1 -denktir).

Çözüm.

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1. M' 'de 2. satırla 4. satır toplanıp 4. satıra yazılır
2. 1. satırla 3. satır toplanıp 3. Satıra yazılır
3. 1. sütunla 3. sütun toplanıp 3. Sütuna yazılır
4. 1. sütun (-1) ile çarpılıp 4. sütunla toplanıp 4. sütuna yazılır
5. 2. sütunla 3. Sütun toplanıp 3. Sütuna yazılırsa

$$M' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu da M ve M' 'nün S-denk olduğunu gösterir.

Bir K düğümünün (veya halkasının) bir regüler diagramından bir Seifert yüzeyi oluşturabiliriz, ve o zaman bu bir Seifert matrisi oluşturur. Bununla birlikte, Seifert matrisini hesaplamak için zamandan kazanmak açısından bu yöntemi kullanmayabiliriz ve $m(= 2g(F)+\mu(F)-1)$ kapalı eğrilerinin yer aldığı diskler ve bantlardan ibaret bir Seifert yüzeyi inşa edebiliriz. Bununla birlikte F 'den elde edilmiş Γ Seifert grafi bir düzlem grafi olmayabilir. Bu yüzden bu durum sağlanmadan önceki duruma gitmek mümkündür. Bununla birlikte bir sonraki teorem yardımınıza yetişecektir.

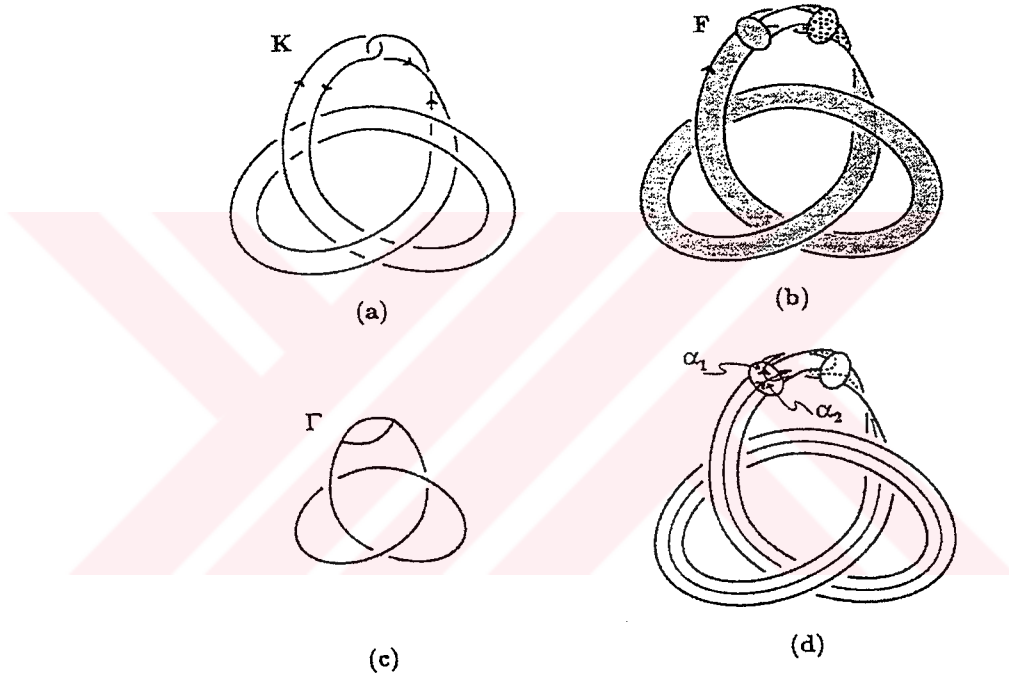
Teorem 4.2.10. M_1 ve M_2 'nin K 'nın F_1 ve F_2 Seifert yüzeylerinden elde edilmiş iki Seifert matrisi olduğunu kabul edelim. O zaman M_1 ve M_2 S-denktir (Trotter, 1962).

Şimdi yukarıdaki incelemede kısaca bahsedilmiş Seifert yüzey tipinin bir örneğini vereceğiz.

Örnek 4.2.11. Şekil 4.23(b)'deki üç banttın (bunlardan birinin düğümlenmiş olduğuna dikkat ediniz) ve iki diskten inşa edilmiş F yüzeyini K için Seifert yüzeyi olarak düşünebiliriz, Şekil 4.23(a). Bununla beraber F'nin Γ Seifert grafi bir düzlem grafi değildir, Şekil 4.23(c). Buna rağmen α_1 ve α_2 kapalı eğrilerini yerleştirebiliriz, Şekil 4.23(d). Burada halkalanma sayılarını hesaplamak kolaydır ve buradan Seifert matrisi,

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olur. Bu matrisin regüler diagramdan elde edilmiş Seifert matrisine S-denk olduğu Bölüm III~IV'te verilen metodlarla gösterilebilir, Şekil 4.23(a).



Şekil 4.23

Kesinlik olması için Seifert matrisinin bir K düğümünün F Seifert yüzeyinden inşa edildiği söylenmelidir. Genelde K'nın Seifert matrisini basitleştirmeliyiz. Bu durumda Teorem 4.2.13'ü aşağıdaki gibi yeniden yazabiliriz. K'nın iki Seifert matrisi S-denktir. Bununla birlikte K'nın bir D regüler diagramından elde edilmiş bir Seifert matrisi aldığımızda bu ifade açıktır. Sezgisel olarak bu Seifert matrisini Bölüm III~IV'te özetlenmiş olan metodları kullanarak inşa edebiliriz. Seifert matrislerinin iki özelliğini ispatlayarak bu bölüme tekrar döneceğiz. Bir K düğümünün (veya halkasının) Seifert matrisini M_K ile göstereceğiz.

Önerme 4.2.12. K 'nın bir yönlendirilmiş düğüm (veya halka) ve $-K$, K 'nın yönlendirilmesinin tersine çevrilmesiyle elde edilen bir düğüm olsun(halka durumunda yönlendirilme bütün bileşenler üzerinde tersine çevrilmiştir). O zaman $M_{-K} \stackrel{s}{\sim} M_K^T$ olduğu çıkar.

Önerme 4.2.13. K^* 'ın bir K düğümünün(veya halkasının) ayna görüntüsü olduğunu kabul edelim, o zaman $M_{K^*} \stackrel{s}{\sim} -M_K^T$ 'dir.

İspat. K^* 'ın bir regüler D diagramını K 'dan kavşaklarını değiştirerek yani herbir kavşakta alt geçiti üst geçit, üst geçiti alt geçit yaparak elde edebiliriz.

Böylece kapalı eğriler için D ve D^* 'dan çıkan alt ve üst geçit bağıntılar tamamen birbirinin tersi olduğundan $M_{K^*} \stackrel{s}{\sim} -M_K^T$ olduğu çıkar (Örnek 4.1.1 ve Örnek 4.1.2 ile karşılaştırınız).



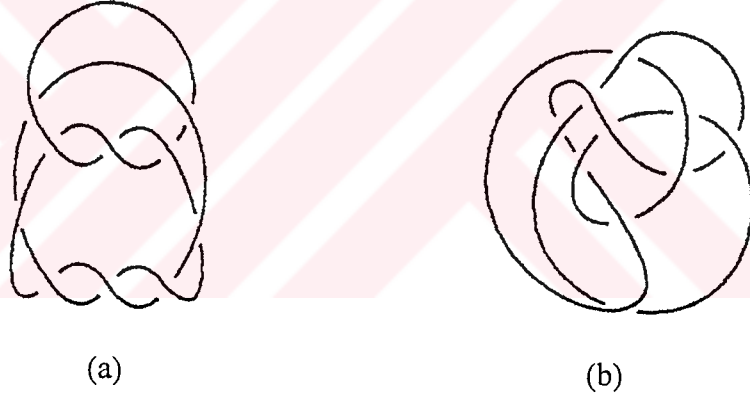
BÖLÜM V

SEİFERT MATRİSLERİNDEN İNVARYANTLAR

Bir Seifert matrisinden bir düğüm(veya halka) invaryantı bulmak için Teorem 4.2.1'de tanımlanmış Λ_1 ve $\Lambda_2^{\pm 1}$ işlemleri altında değişmeyecek invaryantları bulmaya ihtiyacımız vardır. Bu bölümde Alexander polinomunu böyle bir invaryant olduğunu göreceğiz. Alexander polinomu sadece Seifert matrisinden çıkarabileceğimiz önemli bir invaryant değil aynı zamanda onu bir halkanın işaretinden de tanımlayabiliriz. Ayrıca bu iki invaryantı tanımlayarak bazı temel karakteristikleri ispatlayacağız. Özel olarak bu bölümde bütün düğüm ve halkaları yönlendirilmiş kabul edeceğiz.

5.1. Alexander Polinomu

Bir K düğümünün M Seifert matrisinin determinantını $\det M$ 'nin bir düğüm invaryantı değildir (Kawauchi, 1996). Bununla beraber $M+M^T$ 'nin determinantının mutlak değerinin bir düğüm (halka) invaryantı olduğunu bir önerme olarak verelim.



Şekil 5.1

Önerme 5.1.1. M , bir K düğümünün (veya halkasının) Seifert matrisi ise, o zaman $|\det(M+M^T)|$, K düğümünün bir invaryantıdır. Bu invaryanta K 'nin determinantı denir.

K düğümünün invaryantı K 'nin yönlendirilmesinden tamamen bağımsızdır (Kawauchi, 1996).

Aşık düğümün determinantı 1 olduğundan bazı düğümlerin aşık düğüm olmadığını ispatlamak için determinantına bakılabilir. Ancak determinantı 1 olan fakat aşık düğümüne denk olmayan düğümlerde vardır. Böylece bu invaryant düğümleri sınıflandırmada yeterli değildir.

Örnek 5.1.2. Yonca yaprağı düğümünün Seifert matrisinin determinanı 3 olduğundan, bu aşikar düğümüne denk değildir. Bununla beraber Şekil 5.1(a) ve (b)'de verilen düğümlerin determinantları da olduğu halde aşikar düğümüne denk olmayan düğümlerdir.

Aşağıdaki önermenin ispatını daha sonraya bırakacağız, İspat 5.2.14 önermesinin kolay bir sonucu olduğundan, biraz sonra ispatlanacaktır.

Önerme 5.1.3. M bir K düğümünün (bir halka değil) Seifert matrisi olsun o zaman $\det(M - M^T) = 1$ dir (Kawauchi, 1996).

Bu bölümde yukarıdaki determinanttın M 'nin karakteristik polinomuna benzeyen $\det(M - tM^T)$ polinomunu hesaplamaya direk olarak geçeceğiz. Bu yeni determinant t değişkenli bir polinomdur. Bir sonraki uygun adım bu polinomun Λ_1 ve $\Lambda_2^{\pm 1}$ 'i uyguladığımızda nasıl değiştiğini incelemektir. İlk olarak,

$$\det P = \det P^T = \pm 1$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \det \Lambda_1(M - tM^T) &= \det [P(M - tM^T)P^T] \\ &= \det (M - tM^T) \end{aligned} \quad (5.1)$$

olur. Bu yüzden o, Λ_1 işleminden etkilenmez. Bununla birlikte eğer Λ_2 'yi uygularsak,

$$\begin{aligned} \det (\Lambda_2(M - tM^T)) &= \det \begin{bmatrix} M - tM^T & \begin{matrix} b_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ b_m & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -b_1 t \dots - b_m t \\ 0 \dots 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -t & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} M - tM^T & \begin{matrix} b_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ b_m & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \dots 0 & 0 & 1 \\ 0 \dots 0 & -t & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \\ &= t \det (M - tM^T) \end{aligned} \quad (5.2)$$

elde ederiz.

Benzer olarak $\det (\Lambda_2^{-1}(M_2 - tM_2^T)) = t^{-1} \det (M_1 - tM_1^T)$ elde edebiliriz. Bu üç formül bizi aşağıdaki teoreme götürür.

Teorem 5.1.4. M_1 ve M_2 bir K düğümü (veya halka) için Seifert matrisleri olsun. Ayrıca r ve s , sırasıyla M_1 ve M_2 'nin mertebeleri olsun, o zaman aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$t^{\frac{r}{2}} \det(M_1 - tM_1^T) = t^{-\frac{s}{2}} \det(M_2 - tM_2^T)$$

Buradan, eğer M , K 'nin k . mertebeden bir Seifert matrisi ise o zaman $t^{-\frac{k}{2}} \det(M-tM^T)$ K 'nin bir invaryantıdır. Bu invaryant K 'nin Alexander polinomu olarak bilinmektedir ve $\Delta_K(t)$ ile gösterilir.

Önceki tartışmalardan $k = 2g(F) + \mu(K) - 1$ olduğu direkt çıkar, burada önceden olduğu gibi F , M 'den inşa edilmiş Seifert yüzeyidir, ve $\mu(K)$, K halkasının bileşenlerinin sayısıdır. Pek çok durumda $\Delta_K(t)$ 'yi uygun bir çarpan ile çarparsak, o zaman yalnızca pozitif üslü bir polinom elde edebiliriz. Çoğu zaman $\Delta_K(t)$ 'nin böyle bir yorumu ile çalışmak tercih edilir. Eğer K , çift sayılı bileşene sahip bir halka ise o zaman k tekdir. Böylece, böyle halkalar için $\Delta_K(t)$, $t^{\frac{1}{2}} (= \sqrt{t})$ veya $t^{-\frac{1}{2}} (= \frac{1}{\sqrt{t}})$ 'nin kuvveti terimleriyle bir polinomdur. Bu

durumlarda $\left(t^{\frac{1}{2}}\right)^2 = t$ alırız.

Şimdi Alexander polinomunun önemli bir özelliğini ispatlayacağız.

Teorem 5.1.5. K bir düğüm olsun; o zaman $\Delta_K(t)$ bir simetrik Laurent polinomudur, yani,

$$\begin{aligned} \Delta_K(t) &= a_{-n} t^{-n} + a_{-(n-1)} t^{-(n-1)} + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n \quad \text{ve} \\ a_{-n} &= a_n, a_{-(n-1)} = a_{n-1}, \dots, a_{-1} = a_1 \end{aligned} \quad (5.1)$$

olur.

İspat. M , K 'nin bir Seifert matrisi olsun ve k 'da M 'nin mertebesi olsun. K bir düğüm olduğundan k 'nında çift olması gerekir. Böylece,

$$\begin{aligned} \Delta_K(t^{-1}) &= t^{-\frac{k}{2}} \det(M^T - t^{-1} M^T) = t^{-\frac{k}{2}} \det(tM - M^T) \\ &= (-1)^k t^{-\frac{k}{2}} \det(M^T - tM) = t^{-\frac{k}{2}} \det(M - tM^T)^T \\ &= t^{-\frac{k}{2}} \det(M - tM^T) = \Delta_K(t) \end{aligned}$$

olur. Teorem 5.1.4'ün bundan direkt çıktığını görmek kolaydır.

Önerme 5.1.6. $|\Delta_K(-1)|$ bir K düğümünün determinantına eşittir.

İspat. $|\Delta_K(-1)| = \left| (-1)^{-\frac{k}{2}} \det(M + M^T) \right| = \det(M + M^T)$ 'dir.

Örnek 5.1.7. K aşık bir düğüm ise, o zaman $\Delta_K(t) = 1$ 'dir.

Örnek 5.1.8. K sağ-el yonca yaprağı düğümü ise (bakınız Örnek 4.1.1) o zaman

$$\begin{aligned} |\Delta_K(t)| &= t^{-1} \det(M-M^T) = t^{-1} \det \begin{bmatrix} -(1-t) & -t \\ 1 & -(1-t) \end{bmatrix} \\ &= t^{-1} - 1 + t \end{aligned}$$

olur.

Örnek 5.1.9. Örnek 4.1.3'teki düğümün Alexander polinomu

$$|\Delta_K(t)| = t^{-\frac{6}{2}} \det(M-M^T) = t^3 + t^2 - 11t + 16 - 10t^{-1} + 4t^{-2} - 2t^{-3}$$

şeklindedir.

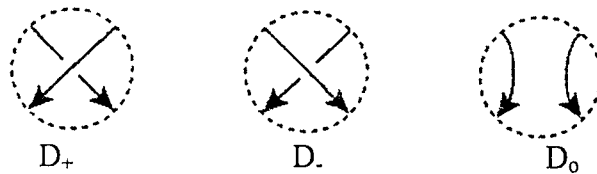
5.2. Alexander-Conway Polinomu

Kısım 5.1'deki yöntem kullanılarak düğüm ve halkaların Alexander polinomu hesaplanabilir. Eğer bir kısmi düğüm tablosunun Alexander polinomu elde etmek istersek yukarıdaki işlem pek kullanışlı değildir. Bununla beraber bu probleme bir çözüm bulunabilir.

Tanım 5.2.1. Bir yönlendirilmiş K düğümü (veya halkası) verilsin, o zaman aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir z değişkenli $\nabla_K(z)$ Laurent polinomu vardır. Bu polinoma Alexander-Conway polinomu denir.

Aksiyom 1. K aşık bir düğüm ise, o zaman $\nabla_K(z) = 1$ olur.

Aksiyom 2. D_+, D_-, D_0 'ı, sırasıyla K_+, K_-, K_0 üç düğümün (veya halkanın) regüler diagramı olsun. Bu regüler diagramlar bir kavşak noktasının bir komşuluğu hariç tamamen birbirinin aynısıdır. Bu komşulukta, regüler diagramlar Şekil 5.2'de gösterilmiş biçimde farklıdır. (Not: $D_+(D_-)$ durumunda bu komşuluğun içinde, sadece bir pozitif(negatif) kavşak vardır).



Şekil 5.2

O zaman üç düğümün(veya halkanın) Laurent polinomları aşağıdaki gibi birbiriyle ilişkilidir.

$$\nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z \nabla_{K_0}(z) \quad (5.2)$$

Yukarıdaki gibi şekillenmiş D_+, D_-, D_0 regüler diagramlarına skein diagramları denir. Bir işlemle, D_+, D_-, D_0 'lardan birini diğer ikisiyle yer değiştirildiği için buna bir skein işlemi denir.

K_+, K_-, K_0 düğümleri ve onların kendi D_+, D_-, D_0 regüler diagramları arasında sınıflandırma yapmaya gerek olmadığından $\nabla_{K_+}(z)$ 'nin yerine $\nabla_{D_+}(z)$ 'yi yazacağız.

K_+ bir μ -bileşenli halka ise o zaman K_- 'de bir μ -bileşenli halka, fakat K_0 bir $\mu-1$ bileşenli (veya $\mu+1$ bileşenli) halka olduğu açıktır.

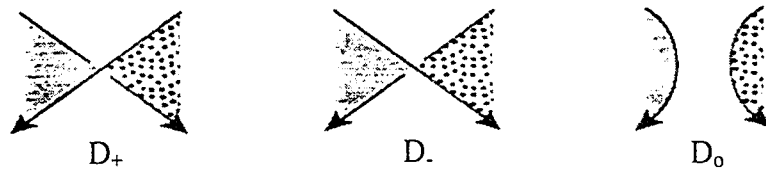
Gerçekten Aksiyom 1 ve 2'yi sağlayan, iyi tanımlanmış ve tek, $\nabla_K(z)$ Laurent polinomunu göstermek biraz zahmetlidir. Bunun ispatı için (Lickorish, 1995) bakılabilir. Bununla birlikte, $\nabla_K(z)$ 'nin iyi tanımlı olduğunu ve tekliğini kabul edersek, o zaman aşağıdaki teorem ile $\nabla_K(z)$ ve Alexander polinomunun aynı olduğunu gösterebiliriz.

Teorem 5.2.2.
$$\Delta_K(t) = \nabla_K\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

olur.

Başka bir ifadeyle, z yerine $\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$ yazarsak meydana gelen dönüşüm Alexander polinomunu elde ederiz. Buradaki $\nabla_K(z)$ 'ye Alexander Conway polinomu denir.

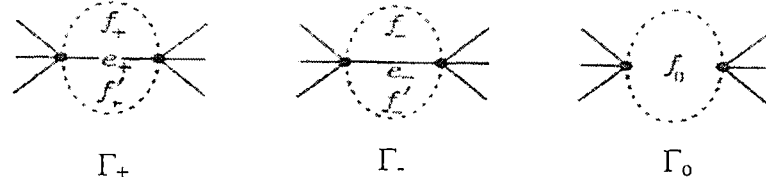
İspat. Örnek 5.1.7'de Alexander polinomunun Aksiyom 1'yi sağladığını üstü kapalı göstermiştik, bu yüzden, $z = \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$ yer değiştirmesiyle hesabı alınan yalnızca Aksiyom 2'yi sağladığını ispatlamamız gerekir.



Şekil 5.3

İlk olarak skein diagramlarını ele alalım, Şekil 5.3. Eğer F_+, F_-, F_0 sırasıyla D_+, D_-, D_0 'a karşılık gelen Seifert yüzeyleri ve $\Gamma_+, \Gamma_-, \Gamma_0$ 'a karşılık gelen graflar ise o zaman bir önceki bölümün metodlarını kullanarak onların Seifert matrisleri M_+, M_-, M_0 'ı belirleyebiliriz.

Γ_+ grafında (Γ_-) kavşak noktası bir pozitif(negatif) $e_+(e_-)$ kenarına karşılık gelirken, bakınız Şekil 5.4, D_+ 'nın kavşak noktaları (sırası ile D_- 'ninde) F_+ 'da pozitif bir banta karşılık gelsin (sırası ile F_-), bakınız Şekil 5.4.



Şekil 5.4

$f_+(f_-)$, $\Gamma_+(\Gamma_-)$ 'nin $e_+(e_-)$ kenarını ihtiva eden bölgesi olsun. $e_+(e_-)$ 'yi $f_+(f_-)$ ve $f_+'(f_-')$ 'nin ortak sınırının kenarlarından biri olduğunu kabul edelim, Şekil 5.4. f_+ ve f_+' 'nin aynı yüz olması mümkündür(ve aynı zamanda f_- ve f_-' 'ninde). Bu durumda Γ_0 bağlantısızdır ve D_0 bağlantılı değildir. Tanım 4.2.4 ve Önerme 4.2.5'den

$$\Delta_{K_0}(t) = 0 \text{ ve } \Delta_{K_0}(z) = 0$$

olması gerekir. Diğer taraftan bu durumda bunlar iki düğümün(veya halkanın) bağlantılı toplamı olduğundan K_+ ve K_- denktir. Bu yüzden $\Delta_K(t) = \Delta_{K_-}(t)$ 'dir ve buradan $\Delta_K(t)$ Aksiyom 2'yi sağlar. Böylece $f_+(f_-)$ ve $f_+'(f_-')$ 'nin farklı olduğunu kabul edelim. Şimdi M_+ ve M_- 'nin mertebesi k olsun. O zaman $f_+(f_-)$ ve $f_+'(f_-')$ 'nin sırasıyla $(k-1)$. satır (ve sütun) ve son k . satıra(ve sütuna) karşılık geldiğini kabul edelim. $\Gamma_+(\Gamma_-)$ içindeki $f_+(f_-)$ ve $f_+'(f_-')$, Γ_0 içinde birleştirilmiş olduğundan, M_0 , $k-1$. mertebededir.

$a_{ij}(+)$, $a_{ij}(-)$, $a_{ij}(0)$, sırasıyla M_+, M_-, M_0 'ın girişlerini gösterebiliriz. O zaman bu girişler aşağıdaki Şekil 5.5'deki gibi birbirleriyle ilişkilidir.



Şekil 5.5

(A)Eğer $i, j \neq k-1, k$ ise o zaman

$$(1) a_{i,j}(+) = a_{i,j}(-) = a_{i,j}(0) \text{ 'dir.}$$

(B)Eğer $i \neq k-1$ ise

$$(1) a_{i, k-1}(0) = a_{i, k-1}(+) + a_{i, k-1}(-)$$

$$(2) a_{k-1, i}(0) = a_{k-1, i}(+) + a_{k-1, i}(-) \text{ 'dir.} \quad (5.3)$$

(C)Eğer $i = k-1$ veya k ise,

$$(1) a_{i,i}(+) = a_{i,i}(-) - 1$$

$$(2) a_{k-1, k}(+) = a_{k-1, k}(-) + 1$$

$$a_{k, k-1}(+) = a_{k, k-1}(-) + 1$$

$$(3) a_{k-1, k-1}(0) = \sum_{i, j=k-1, k} \{a_{i,j}(+) + a_{i,+}(+)\} \text{ 'dir.}$$

Örnek 5.2.3. (5.3)'ü kullanarak, basit bir hesaplamayla

$$\det(M_+ - tM_+^T) - \det(M_- - tM_-^T) = (-1)(1-t)\det(M_0 - tM_0^T) \text{ olduğu görülebilir.}$$

Böylece eğer bunu $\Delta_K(t)$ 'yi hesaplamak için kullanırsak,

$$\begin{aligned} \Delta_K(t) &= t^{\frac{k}{2}} \det(M_+ - tM_+^T) \\ &= t^{\frac{k}{2}} \det((M_- - tM_-^T) + t^{\frac{k}{2}}(t-1)\det(M_0 - tM_0^T)) \\ &= \Delta_{K-}(t) + (t^{\frac{k}{2}} - t^{\frac{k}{2}}) \Delta_{K_0}(t) \text{ 'yi} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu Teorem 5.2.2'nin ispatını tamamlar.

Alexander polinomunu hesaplamak için skein bağıntısını kullanmadan önce aşağıdaki önermeyi ispatlayacağız.

Önerme 5.2.4. μ -bileşenli ($\mu \geq 2$) aşikar halkanın Alexander polinomu sıfırdır. (Bundan böyle O_μ ile aşikar halkayı göstereceğiz).

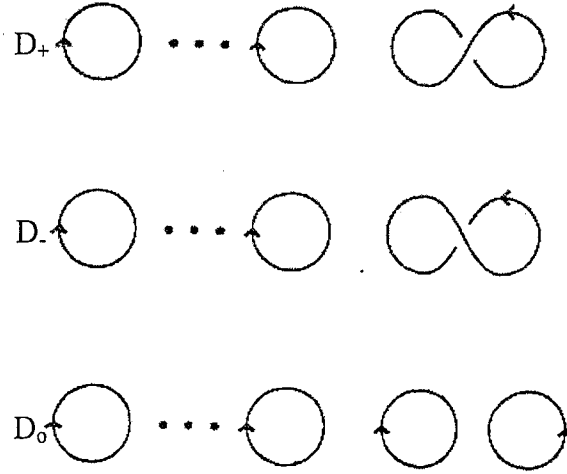
İspat. Şekil 5.6'daki diagramlara karşılık gelen skein formülü

$$\nabla_{D_+}(z) - \nabla_{D_-}(z) = z \nabla_{D_0}(z)$$

olur.

D_+ ve D_- her ikisinde aşikar $\mu-1$ bileşenli halkalar olduğundan $\nabla_{D_+}(z) = \nabla_{D_-}(z)$ 'dir.

Buradan $0 = z \nabla_{D_0}(z)$, yani $\nabla_{D_0}(z) = 0$ 'dır.



Şekil 5.6

O_μ Seifert matrisi $\mu-1$ mertebeli sıfır matrisini ihtiva ettiğinden Önerme 5.2.4, Tanım 4.2.4'ünde bir sonucudur.

Genellikle Conway polinomunu hesaplamakta en etkili yol, skein ağaç diagramını kullanmaktır. Bu bir hesaplama yardımıyla yapıldığından bunu bir örnekle açıklayacağız.

Bir sonraki hesaplamalar kolaylaştırmak için (5.2)'yi aşağıdaki gibi tekrar yazacağız.

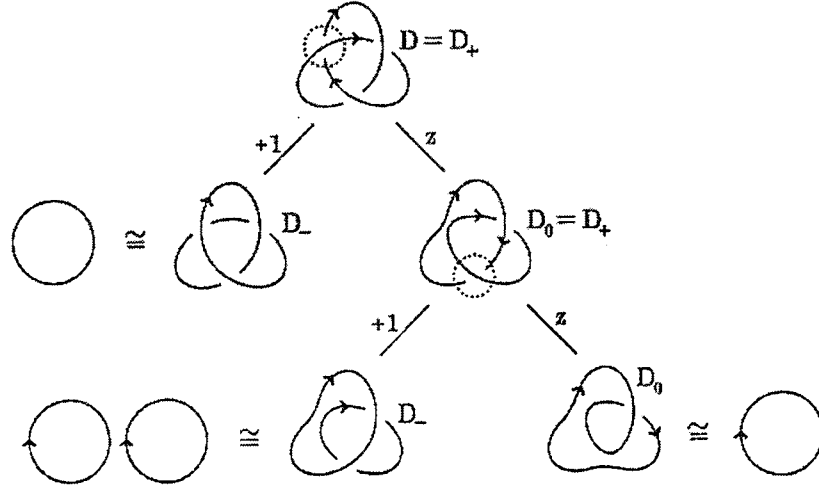
$$\left. \begin{aligned} \nabla_{D_+}(z) &= \nabla_{D_-}(z) + z \nabla_{D_0}(z) \\ \nabla_{D_-}(z) &= \nabla_{D_+}(z) - z \nabla_{D_0}(z) \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Örnek 5.2.5. K sağ-el yonca yaprağı düğümü ve D , K 'nın bir regüler diagramı olsun, Şekil 5.7'deki diagram.

D üzerinde noktalı çemberin içinde bir skein operatörü uygulayacağız. Bu çemberin içinde kavşak noktası pozitif olduğundan, bu regüler diagramı D_+ olarak tekrar isimlendirirsek daha iyi olur. Skein operatörü uygulanırsa, D_+ diğer iki regüler diagrama dönüştürülür, biri, D_- , orijinal pozitif kavşak noktasını negatif kavşak noktasıyla yer değiştirmesi ile elde edilmiş regüler diagramdır; diğeri, D_0 , pozitif kavşak noktasıyla yer değiştirmeye (bu kavşak noktasında regüler diagramı ucuca eklemeye) elde edilir, bakınız Şekil 5.7.

Şimdi D_+ dan D_- 'ye $+1$ ile, D_+ ve D_0 'a geçişi z ile gösterelim. Bu ayırma işlemine düğüm veya halka elde edilinceye kadar devam edelim.

Uygun ayırma, $\nabla_{D_-}(z)$ ve $\nabla_{D_0}(z)$ 'nin katsayılarının isimlendirilmesiyle, doğrudan (5.4)'ten çıkar. Böylece skein ağaç diagramımız için dalların ilk çiftine sahibiz ve onlar $\nabla_{D_+}(z)$ 'nin değerlendirmesi içinde $1 \nabla_{D_-}(z) + z \nabla_{D_0}(z)$ 'ye karşılık gelir.



Şekil 5.7

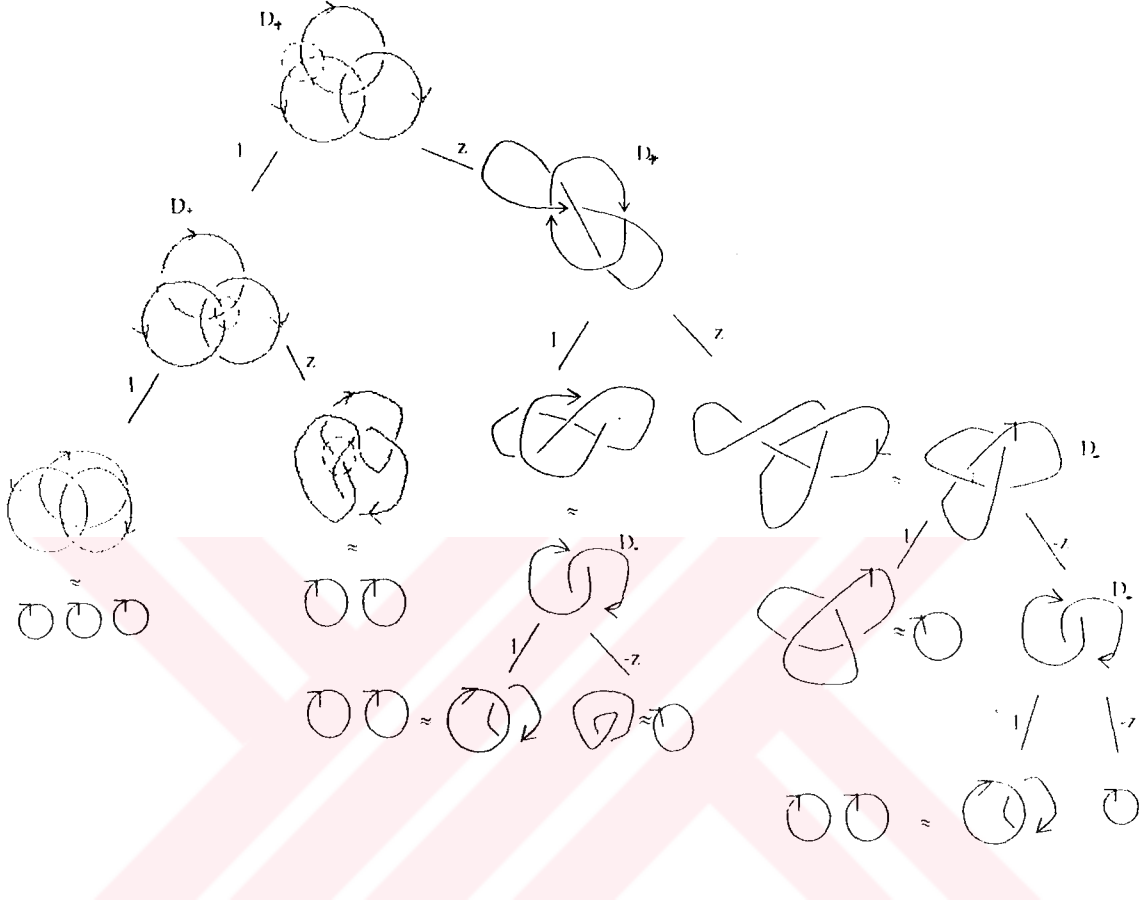
D aşıkâr düğümüne denk olduğunu ve buradan da $\nabla_{D_-}(z) = 1$ olduğunu görmek açıktır. Bu yüzden, D_- başka bir dal üretmeyecektir, yani burada bir alt skein operatörü inşa edemiyoruz. Bununla birlikte D_0 , aşıkâr düğüm veya halkalara denk değildir, ve böylece başka noktalı bir daire içinde bir skein operatörü inşa edebiliriz. Bu dairenin içinden dolayı kavşak noktası pozitifdir, bakınız Şekil 5.7, D_0 'ı D_+ diyelim. O zaman, önceki gibi sol-el diagramını sağ-el diagramını D_0 ile gösterelim. Tekrar, doğru parçaları çizelim ve onlara (5.4)'teki gibi katsayıları toplayalım, bakınız Şekil 5.7. D ve D_0 'ın sırasıyla aşıkâr 2 bileşenli halka ve düğüm olduklarını görmek kolaydır. Buradan diğer hiçbir dal teşkil edilemez ve K için skein ağaç diagramımız tamamlanmış olur.

$\nabla_K(z)$, K 'nin orjinal regüler D diagramı ile başlayan ve inşa etmeyle' bu aşıkâr düğüm (veya halkanın) regüler diagramı ile biten (tek olarak belirlenmiş) dal eğrisi boyunca katsayıların çarpımı ile, çarpılmış herbir sonlanan aşıkâr düğümün (veya halkanın) Conway polinomunun toplamı olarak hesaplanabilir.

Böylece yukarıdaki örnekte aşağıdaki toplamı elde ederiz:

$$\nabla_K(z) = 1 \nabla_{D_0}(z) + z \nabla_{D_{00}}(z) + z^2 \nabla_{D_0}(z)$$

5.2.8. Borromean halkaları(Şekil 5.9) ve Şekil 3.5(a)'daki düğüm için Alexander ve Conway polinomlarını belirleyelim.



Şekil 5.9. Borromean halkasının ağaç diyagramı

Borromean halkasının Alexander-Conway polinomu

$$\begin{aligned}
 \nabla_K(z) &= \nabla_{ooo}(z) + z\nabla_{oo} + z\nabla_{oo} - z^2\nabla_o + z^2\nabla_o - z^3\nabla_{oo} + z^4\nabla_o \\
 &= 0+0+0 - z^2 + z^2 - 0 + z^4 \\
 &= z^4
 \end{aligned}$$

olur.

Alexander polinomu ise z yerine $\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$ yazarsak

$$\Delta_K(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^4$$

olur.

Teorem 5.2.9. İki ipli ve n -kavşaklı $(2,n)$ tor halkasının Alexander-Conway polinomu $n \geq 2$ için;

$$\nabla_{(2,n)}(z) = \nabla_{(2,n-2)}(z) + z \nabla_{(2,n-1)}(z)$$

olur.

İspat.



Önerme 5.4.2'den $\nabla_{(2,0)}(z) = 0$ ve Tanım 5.2.1'den $\nabla_{(2,1)}(z) = 1$ olduğundan tümevarım hipotezinden $n = 2$ için

$$\begin{aligned} \nabla_{(2,2)}(z) &= \nabla_{(2,0)}(z) + z \nabla_{(2,1)}(z) \\ &= 0 + z \cdot 1 \\ &= z \end{aligned}$$

bulunur.

$n = 3$ için

$$\begin{aligned} \nabla_{(2,3)}(z) &= \nabla_{(2,1)}(z) + z \nabla_{(2,2)}(z) \\ &= 1 + z \cdot z \\ &= 1 + z^2 \end{aligned}$$

doğrudur (bakınız Örnek 5.2.5)

Bu şekilde devam edilirse

$$\nabla_{(2,n)}(z) = \nabla_{(2,n-2)}(z) + z \nabla_{(2,n-1)}(z)$$

bulunur.

Bu bölümde keyfi bir düğüm(veya halka) için Alexander polinomunu hesaplayan oldukça kullanışlı bir metod tarif ettik. Gerçekte bu metod Conway tarafından ilk bulunduğundan beri büyük ilgi gördü ve hesaplanamayan Alexander polinomları hesaplandı. Araştırmalarımızda bir özel düğümün (veya halkanın) Alexander polinomunu hesaplamak istersek bu metodu kullanmak elverişlidir. 1960'larda Alexander polinomu (düğümün veya halkaların) global özelliklerini bulmak için son aşamada kullanılmaktaydı. Denilebilir ki keyfi büyük sayıda kavşak noktası olan düğümler (veya halkalar) için Alexander polinomunu hesaplamak için alıştırmayı devam ettirmenin yararsız olduğu görülecektir (Burde and Zieschang, 1985), bu mümkün olduğundan düğümün (veya halkanın) global özellikleri toplanacaktır. Conway metodunu takdim ettikten 15 yıl sonra metodunu orijinal Alexander polinomuna ilave edilebileceğini de görmekteydi, onun yaklaşımı "yeni" düğüm invaryantlarını hesaplamakta çok kullanışlıdır.

5.3. Alexander Polinomunun Temel Özellikleri

Bu bölümde Alexander polinomunun birkaç önemli özelliğini ispatlayacağız.

Önerme 5.3.1. K bir düğüm ise o zaman $\Delta_K(1) = 1$ 'dir.

İspat. Alexander polinomunda $t = 1$ alırsak o zaman $\Delta_K(1) = \nabla_K(0)$ olur. Diğer taraftan (5.2) ile eğer $z = 0$ alırsak o zaman $\nabla_{D_+}(0) = \nabla_{D_-}(0)$ elde ederiz. Böylece K 'ya bir düğümlenme operatörü uygularsak $\nabla_K(0)$ 'ın değeri değişmez. Bununla birlikte, K 'ya birkaç defa düğümlenme operatörü uygularsak, sonunda K aşık bir düğüme dönüştürülür. Buradan $\nabla_K(0) = \nabla_O(0)$ sonucuna varırız.

Örnek 5.3.2. L , μ -bileşenli ($\mu \geq 2$) bir halka ise o zaman $\nabla_L(1) = 0$ olur.

İspatı Önerme 5.3.1 ve Teorem 5.1.5'den çıkar.

Teorem 5.3.3. $f(t)$ 'nin aşağıdaki gibi iki şartı sağlayan bir Laurent polinomu olduğunu kabul edelim.

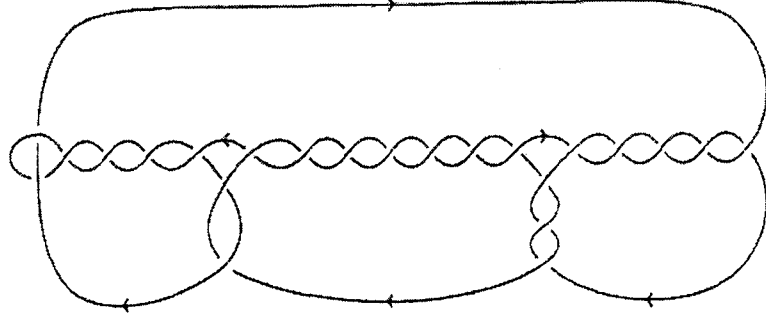
$$(1) f(1) = 1$$

$$(2) f(t) = f(t^{-1}) \tag{5.5}$$

O zaman Alexander polinomun $f(t)$ olan bir düğümü vardır. Buna denk olarak eğer $g(0) = 1$ 'le $g(z) = z^2$ değişkenli bir tam polinom ise, o zaman Alexander polinomu $g(z)$ olan bir K düğümü vardır.

İspat, $t^{-\frac{k}{2}} \det(M-tM^T) = f(t)$ 'yi sağlayan k mertebeden M Seifert matrisli bir uygun yönlendirilebilir F yüzeyinin bulunmasını gerektirir. Detaylar için (Murasugi, 1996) bakılabilir.

Örnek 5.3.4. Şekil 5.10'daki düğüm bu özelliğe sahip bir düğümdür. Bu düğümün Alexander polinomu $f(t) = 2t^2 - 10t + 17 - 10t + 2t^2 = 1 - 2z^2 + 2z^4$ şeklindedir. Alexander polinomuna sahip düğümlerden biri çizilmiştir.



Şekil 5.10

Teorem 5.3.5. K bir düğüm olsun.

- (1) $-K$, K 'nın yönlendirilmesini ters çevrilmesiyle K 'dan elde edilmiş bir düğüm ise, o zaman

$$\Delta_K(t) = \Delta_{-K}(t)$$

olur.

- (2) K^* , K 'nın ayna görüntüsü olsun, o zaman

$$\Delta_{K^*}(t) = \Delta_K(t)$$

olur.

İspat. (1) Önerme 4.2.12'in ispatından, $M_{-K} = M_K^T$ kabul edebiliriz. M_K , $2g$ mertebeden ise, o zaman M_{-K} 'da $2g$ mertebededir. Böylece,

$$\Delta_K(t) = t^{-g} \det(M_K - tM_K^T)$$

$$\Delta_{-K}(t) = t^{-g} \det(M_{-K}^T - tM_{-K})$$

$$\Delta_K(t) = t^{-g} \det(M_{-K} - tM_{-K}^T) = \Delta_{-K}(t)$$

(2) $M_K \sim -M_K^T$ 'den ve Önerme 4.2.13'ün ispatından $M_K = -M_K^T$ 'yi kabul edebiliriz. Bu hesaplama (1)'e benzer şekilde çıkar.

$$\begin{aligned}\Delta_K(t) &= t^{-g} \det(M_K - tM_K^T) \\ &= t^{-g} \det(-M_K^T + tM_K) \\ &= (-1)^{2g} t^{-g} \det(M_K - tM_K^T) = \Delta_K(t) \text{ 'dir.}\end{aligned}$$

Aşık düğümün Alexander polinomu 1'dir; tersi doğru değildir. Yani, Alexander polinomu 1 olan aşık olmayan düğümlerde vardır. Böyle bir düğümün bir örneği Şekil 5.11'da verilmiştir; bu düğüm Kinoshita-Terasaka düğümü olarak bilinir.



Şekil 5.11: KT Düğümü

Alexander polinomu özellikle düğümlerin (veya halkaların) sınıflandırmasının global problemi hususunda çok yararlıdır. Bununla birlikte, lokal problemlerin sonuca bağlanmasında etkili değildir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Alexander polinomları, düğüm teorisinin önemli invariantlarından biridir. Bu polinomu hesaplamının değişik yöntemleri vardır. Bu yöntemlerin bazıları şunlardır: Serbest türev, düğüm diyagramı üzerinde elde edilen matris yöntemi, ağaç diyagramı yöntemi, düğümün işareti yardımıyla Alexander polinomu bulunması ve Seifert yüzeyleri yardımıyla polinomun hesaplanması.

Bu çalışmada Seifert yüzeyleri yardımıyla Alexander polinomu hesaplandı.

Şüphesiz Alexander polinomunun dışında, Kaufmann polinomu, Jones polinomu, HOMFLY polinomu gibi polinomal invariantlar da vardır.

Alexander polinomu ile diğer polinomlar arasında ne gibi ilişkilerin olduğu araştırılabilir.



KAYNAKLAR

- Alexander, J. W., 1928, Topological Invariants of Knots and Links, Trans. Amer. Math. Soc. 30.
- Burde, G. and Zieschang, H., 1985, Knots, Walter de Gruyter, Berlin-New York.
- Fox, R. H. and Crowell, R. H., 1965, Introduction to Knot Theory, Blaisdell Pub. Com. New York.
- Hempel, J., 1976, 3 Manifolds, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Hosokawa, F. 1958, On ∇ -Polynomials of Links, Osaka Math. J. 10 273-282.
- Kauffman, L. H., 1991, Knots of Physics, World Scientific Pub,
- Kawauchi, A., 1996, A Survey of Knot Theory, Birkhäuser-Verlag, Boston.
- Lickorish, W. B. R., Millett, K. C., 1995, A Polynomial Invariant of Oriented Links, Topology 26, 107-141.
- Murasugi, K., 1996, Knot Theory and Its Applicants, Birkhäuser, Boston.
- Rolfsen, D., 1976, Knots and Links, Mathematics Lecture Series 7, Boston.
- Singer, J. M., Thorpe, J. A., 1967, Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry, Springer-Verlag, New York.
- Trotter, H. F., 1962, Homology of groups Systems with Applications to Knot Theory, Ann. of Math. 76, 464-498.