



T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ



GENELLEŞTİRİLMİŞ KAPALILIĞIN

İLİŞKİLERİ ÜZERİNE

Shamsıtdın IBRAGIMOV

Matematik Anabilim Dalı

ÇANAKKALE

T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ KAPALILIĞIN
İLİŞKİLERİ ÜZERİNE
Shamsıtdın IBRAGIMOV

Matematik Anabilim Dalı
Tezin Sunulduđu Tarih: 11/06/2019

Tez Danıőmanı:
Prof. Dr. Erdal EKİCİ

ÇANAKKALE

Shamsıtdın IBRAGIMOV tarafından Prof. Dr. Erdal EKİCİ yönetiminde hazırlanan ve **11/06/2019** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan “**Genelleştirilmiş Kapalılığın İlişkileri Üzerine**” başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

Prof. Dr. Erdal EKİCİ

.....

Başkan

Dr. Öğr. Üyesi Gülseli BURAK

.....

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Özlem ELMALI

.....

Üye

Prof. Dr. Levent GENÇ

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

Sıra No:.....

Bu çalışma Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimince Desteklenmiştir. Proje Numarası: FYL-2017-1337

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI



Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Shamsıtdın IBRAGIMOV

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Erdal EKİCİ'ye, çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen hayatımın her evresinde bana destek olan değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışma Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimince Desteklenmiştir. Proje Numarası: FYL-2017-1337. Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimine danışman hocam Prof. Dr. Erdal EKİCİ ve ben teşekkürlerimizi sunarız.

Shamsıtdın IBRAGIMOV
Çanakkale, Haziran 2019

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ KAPALILIĞIN İLİŞKİLERİ ÜZERİNE

Shamsıtdın IBRAGIMOV

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Prof. Dr. Erdal EKİCİ

11/06/2019, 56

Bu tezde topolojik uzaylarda genelleştirilmiş kapalılığın ilişkileri üzerinde durulmuştur. Topolojik uzaylarda genelleştirilmiş kapalı kümeler ile hemen hemen p-regüler topolojik uzayların özellikleri araştırılmıştır.

Topolojik uzaylarda genelleştirilmiş p-kapalı kümeler ve regüler genelleştirilmiş kapalı kümeler ile hemen hemen p-regüler topolojik uzaylar üzerine araştırmalar yapılmıştır.

Topolojik uzaylarda dönüşümler ile hemen hemen p-regüler topolojik uzaylar üzerine araştırmalar yapılmıştır.

Anahtar sözcükler: Genelleştirilmiş Kapalı, Hemen Hemen p-regüler Topolojik Uzay, Topolojik Dönüşüm, Regüler Uzay

ABSTRACT

ON THE RELATIONSHIPS OF GENERALIZED CLOSEDNESS

Shamsıtdın IBRAGIMOV

Çanakkale Onsekiz Mart University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Master of Science Thesis in Mathematics

Advisor : Prof. Dr. Erdal EKİCİ

11/06/2019, 56

In this thesis, the relationships of generalized closed sets in topological spaces are studied. Properties of generalized closed sets in topological spaces and almost p-regular topological spaces are investigated.

This thesis contains some investigations on generalized p-closed sets and regular generalized closed sets in topological spaces with almost p-regular topological spaces.

The investigations on maps in topological spaces and almost p-regular topological spaces are considered.

Keywords: Generalized Closed, Almost p-regular Topological Space, Topological Map, Regular Space

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

TEZ SINAVI SONUÇ FORMU	ii
İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI	ii
TEŞEKKÜR.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2	
ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
BÖLÜM 3	
GENELLEŞTİRİLMİŞ p -KAPALI KÜMELER VE HEMEN HEMEN p -REGÜLER UZAYLAR	9
BÖLÜM 4	
GENELLEŞTİRİLMİŞ p -KAPALI KÜMELER, HEMEN HEMEN p -REGÜLER UZAYLAR VE ÖZELLİKLER.....	18
BÖLÜM 5	
REGÜLER GENELLEŞTİRİLMİŞ KAPALI KÜME VE HEMEN HEMEN p -REGÜLER UZAY	25
BÖLÜM 6	
BAZI ARAŞTIRMALAR	34
BÖLÜM 7	
DÖNÜŞÜMLER VE HEMEN HEMEN p -REGÜLER UZAY	38
BÖLÜM 8	
BİREBİR EŞLEME VE HEMEN HEMEN p -REGÜLER UZAY.....	47
BÖLÜM 9	
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	53
KAYNAKLAR	54
ÖZGEÇMİŞ	I

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Topolojik uzaylarda genelleştirilmiş kapalı kümeler Levine (1970) tarafından, genelleştirilmiş p-kapalı kümeler Noiri, Maki ve Umehara (1998) tarafından çalışılmıştır.

Hemen hemen p-regüler topolojik uzaylar Malghan ve Navalagi (1990) tarafından çalışılmıştır.

Ayrıca topolojik uzaylarda dönüşümler önemli yere sahiptirler. Topolojik uzayların temel konularında karşımıza çıkmaktadır.

Son yıllarda topolojik uzaylarda önemli çalışmalar yer almaktadır. Bu çalışmalar topolojik uzaylara ve uygulamalarına büyük katkılar sağlamaktadır.

Bunlardan bazıları Caldas ve ark. (2008, 2009); Noiri (1998); Aurichi (2011); Ekici (2005, 2006, 2007, 2008, 2011, 2012, 2016); Levine (1970); Roy ve Ekici (2011); Malghan ve Navalagi (1990); Hung (2011); Ekici ve Noiri (2007); Dorsett (2012); Ekici ve Elmalı (2015) v.b. topolojide ki çalışmalarıdır.

Sunulan tezde hemen hemen p-regüler topolojik uzaylar ve genelleştirilmiş p-kapalı kümeler, regüler genelleştirilmiş kapalı kümeler üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Bu tezde topolojik uzaylarda genelleştirilmiş kapalılığın ilişkileri üzerinde durulmuştur.

Topolojik uzaylarda genelleştirilmiş kapalı kümeler ile hemen hemen p-regüler topolojik uzayların özellikleri araştırılmıştır.

Topolojik uzaylarda genelleştirilmiş p-kapalı kümeler ve regüler genelleştirilmiş kapalı kümeler ile hemen hemen p-regüler topolojik uzaylar üzerine araştırmalar yapılmıştır.

Topolojik uzaylarda dönüşümler ile hemen hemen p-regüler topolojik uzaylar üzerine araştırmalar yapılmıştır.

Bu tezde ikinci bölümde önceki çalışmalar verilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölümlerde topolojik uzaylarda genelleştirilmiş p-kapalı kümeler ve hemen hemen p-regüler uzaylar üzerine çalışmalar yapılmış, topolojik uzaylarda genelleştirilmiş p-kapalı kümeler ve hemen hemen p-regüler uzaylar üzerine yapılan çalışmalar ile elde edilen sonuçlar ve özellikler sunulmuştur.

Beşinci ve altıncı bölümlerde topolojik uzaylarda regüler genelleştirilmiş kapalı küme ve hemen hemen p-regüler topolojik uzaylar üzerine çalışılmış ve topolojik

uzaylarda regüler genelleştirilmiş kapalı küme ve hemen hemen p-regüler topolojik uzaylar üzerine yapılan çalışmalar ile elde edilen sonuçlar ve özellikler sunulmuştur.

Yedinci ve sekizinci bölümlerde topolojik uzaylarda dönüşümler ve hemen hemen p-regüler topolojik uzaylar üzerine çalışılmış ve topolojik uzaylarda dönüşümler ve hemen hemen p-regüler topolojik uzaylar üzerine yapılan çalışmalar ile elde edilen sonuçlar ve özellikler sunulmuştur.



BÖLÜM 2

ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde önceki çalışmalar, temel tanım ve teoremler verilmiştir.

G kümesi X topolojik uzayının bir alt kümesi olsun.

G kümesinin X topolojik uzayına göre kapanış kümesini

$$\bar{G}$$

ile göstereceğiz.

G kümesinin X topolojik uzayına göre iç kümesini

$$G^0$$

ile göstereceğiz.

TANIM 2.1. X bir topolojik uzay ve $K \subseteq X$ olsun. X uzayında

$$K \subseteq G$$

olmak üzere G açık alt kümeleri için

$$\bar{K} \subseteq G$$

ise K kümesine X in genelleştirilmiş kapalı alt kümesi denir (Levine, 1970)

UYARI 2.2: X bir topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun. X topolojik uzayında genelleştirilmiş kapalı bir G kümesini kısacası

g-kapalı

G kümesi olarak belirtilmektedir (Levine, 1970)

TANIM 2.3. X bir topolojik uzay olsun. G kümesi X topolojik uzayının bir alt kümesi olsun.

$$G^t$$

g-kapalı ise G kümesine X in genelleştirilmiş açık alt kümesi denir (Levine, 1970)

UYARI 2.4: X bir topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun. X topolojik uzayında genelleştirilmiş açık bir G kümesini kısacası

g-açık

G kümesi olarak belirtilmektedir (Levine, 1970)

TANIM 2.5. X bir topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun. Eğer

$$G = (\bar{G})^0$$

ise G kümesi X in regüler açık alt kümesi denir (Stone, 1937)

UYARI 2.6. X bir topolojik uzay olsun. X topolojik uzayının regüler açık alt kümelerinin ailesi

$$RO(X)$$

biçiminde gösterilir (Stone, 1937)

TANIM 2.7. X bir topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun. Eğer

$$G = \overline{(G^0)}$$

ise G kümesi X in regüler kapalı alt kümesi denir (Stone, 1937)

UYARI 2.8. X bir topolojik uzay olsun. X topolojik uzayının regüler kapalı alt kümelerinin ailesi

$$RC(X)$$

biçiminde gösterilir (Stone, 1937)

TANIM 2.9. X bir topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun. Eğer

$$G \subseteq (\bar{G})^0$$

ise G kümesine X in ön açık alt kümesi denir (Mashhour, 1982)

TANIM 2.10. X bir topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun. G kümesi X topolojik uzayının bir alt kümesi ve

$$G^t$$

ön açık ise G kümesine ön kapalı küme denir. (Mashhour, 1982)

TANIM 2.11. X bir topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun.

G kümesini bulunduran X 'in tüm ön kapalı alt kümelerinin kesişimine G 'nın ön kapanışı denir (El-Deep ve ark., 1983)

UYARI 2.12: X bir topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun. X topolojik uzayında bir G kümesinin ön kapanışını

$$\bar{G}^{\text{ön}}$$

şeklinde göstereceğiz.

TANIM 2.13. G kümesi X topolojik uzayının bir alt kümesi olsun.

G kümesi tarafından kapsanan X deki tüm ön açık kümelerinin birleşimine G 'nin ön içi denir (El-Deep ve ark., 1983)

UYARI 2.14: G kümesi X topolojik uzayının bir alt kümesi olsun.

G kümesi tarafından kapsanan X deki tüm ön açık kümelerinin birleşimi olan G 'nin ön içini

$$G^{\text{ö}}^{\text{ön}}$$

şeklinde göstereceğiz.

TANIM 2.15. G kümesi X topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer K kümesi X topolojik uzayının regüler açık alt kümesi ve

$$G \subseteq K$$

olduğunda

$$\bar{G} \subseteq K$$

ise G kümesine regüler genelleştirilmiş kapalı küme denir (Palaniappan ve Rao, 1993)

UYARI 2.16: G kümesi X topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. X topolojik uzayında regüler genelleştirilmiş kapalı bir G kümesini kısaca rg-kapalı

G kümesi olarak belirtilmektedir (Palaniappan ve Rao, 1993)

TANIM 2.17. G kümesi X topolojik uzayının bir alt kümesi olsun.

Eğer

$$G^t$$

regüler genelleştirilmiş kapalı küme ise G kümesine regüler genelleştirilmiş açık küme denir (Palaniappan ve Rao, 1993)

UYARI 2.18: G kümesi X topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. X topolojik uzayında regüler genelleştirilmiş açık bir G kümesini kısaca

$$\text{rg-açık}$$

G kümesi olarak belirtilmektedir (Palaniappan ve Rao, 1993)

TEOREM 2.19. X bir topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun.

G kümesi genelleştirilmiş açıktır ancak ve ancak $K \subseteq G$ ve K kapalı küme için

$$K \subseteq G^o$$

dir (Levine, 1970)

TEOREM 2.20. X bir topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun.

G kümesi regüler genelleştirilmiş açıktır ancak ve ancak $K \subseteq G$ ve K regüler kapalı küme için

$$K \subseteq G^o$$

dir (Palaniappan ve Rao, 1993; Noiri, 1998)

TANIM 2.21. X bir topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun. Eğer

$$G \subseteq K$$

olan X in K açık alt kümeleri için

$$\bar{G}^{\text{ön}} \subseteq K$$

ise G kümesine genelleştirilmiş p-kapalı küme denir (Noiri ve ark., 1998)

UYARI 2.22: X bir topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun. X topolojik uzayının genelleştirilmiş p -kapalı G kümesini kısacası

gp -kapalı

G kümesi olarak belirtilmektedir (Noiri ve ark., 1998)

TANIM 2.23. G kümesi X topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer

$$G \subseteq K$$

ve K regüler açık olmak üzere

$$\overline{G}^{\text{ön}} \subseteq K$$

ise G kümesine regüler genelleştirilmiş p -kapalı küme denir (Noiri, 1998)

UYARI 2.24: G kümesi X topolojik uzayının bir alt kümesi olsun.

X topolojik uzayının regüler genelleştirilmiş p -kapalı G kümesini kısacası

rgp -kapalı

G kümesi olarak belirtilmektedir (Noiri, 1998)

TANIM 2.25. G kümesi X topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer

$$G^t$$

kümesi genelleştirilmiş p -kapalı ise G kümesine genelleştirilmiş

p -açık

küme denir (Noiri ve ark., 1998)

UYARI 2.26: G kümesi X topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. X topolojik uzayının genelleştirilmiş p -açık G kümesini kısacası

gp -açık

G kümesi olarak belirtilmektedir (Noiri ve ark., 1998)

TANIM 2.27. X bir topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun. Eğer

$$G^t$$

kümesi regüler genelleştirilmiş p -kapalı ise G kümesine

regüler genelleştirilmiş p -açık

küme denir (Noiri, 1998)

UYARI 2.28. X bir topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun. Eğer

$$G^t$$

kümesi regüler genelleştirilmiş p -kapalı ise G kümesi

rgp -açık

küme olarak belirtilmektedir (Noiri, 1998)

TANIM 2.29. G kümesi X topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer K kümesi X topolojik uzayının regüler açık alt kümesi ve

$$G \subseteq K$$

olduğunda

$$\bar{G} \subseteq K$$

ise G kümesine regüler genelleştirilmiş kapalı küme denir (Palaniappan ve Rao, 1993)

TEOREM 2.30. X bir topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun.

G kümesi genelleştirilmiş p -açıktır ancak ve ancak G kümesinin kapalı K alt kümeleri için

$$K \subseteq G^{o\bar{o}n}$$

dır (Noiri, 1998)

TEOREM 2.31. X bir topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun.

G kümesi regüler genelleştirilmiş p -açıktır ancak ve ancak G kümesinin regüler kapalı K alt kümeleri için

$$K \subseteq G^{o\bar{o}n}$$

dır (Noiri, 1998)

TANIM 2.32. X bir topolojik uzay olsun. Eğer her regüler kapalı G ve her $x \in G^t$ için

$$x \in K_1,$$

$$G \subseteq K_2$$

ve

$$K_1 \cap K_2 = \emptyset$$

özelliklerini sağlayan X 'in K_1 ve K_2 açık alt kümeleri varsa, X uzayına hemen hemen regüler uzay denir (Singal ve ark., 1969)

TANIM 2.33. X bir topolojik uzay olsun. Eğer her G kapalı kümesi ve $x \in G^t$ için

$$x \in K_1,$$

$$G \subseteq K_2$$

ve

$$K_1 \cap K_2 = \emptyset$$

özelliklerinin sağlayan ön açık K_1, K_2 kümeleri varsa, X uzayına p -regüler uzay denir (El-Deep ve ark., 1983)

TANIM 2.34. X bir topolojik uzay olsun. Eğer her regüler kapalı küme G ve $x \in G^t$ için

$$x \in K_1,$$

$$G \subseteq K_2$$

ve

$$K_1 \cap K_2 = \emptyset$$

özelliklerinin sağlayan ön açık K_1, K_2 kümeleri varsa, X uzayına hemen hemen p -regüler uzay denir (Malghan ve ark., 1990)

TANIM 2.35. X topolojik uzayı, Y topolojik uzayı ve f , X den Y ye bir fonksiyon olsun.

Her regüler açık G için $f^{-1}(G)$ regüler açık ise f fonksiyonuna R -dönüşüm denir (Carnahan, 1973).

TANIM 2.36. X topolojik uzayı, Y topolojik uzayı ve f , X den Y ye bir fonksiyon olsun.

Her regüler açık G için $f^{-1}(G)$ açık ise f fonksiyonuna hemen hemen sürekli denir (Singal and Singal, 1968).

TEOREM 2.37. X bir topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun. G açık alt uzay olsun. $K \subset G$ alalım.

Bu durumda

$$\bar{K}^{ön}_G = G \cap \bar{K}^{ön}$$

olur (Malghan ve Navalagi, 1990).

BÖLÜM 3

GENELLEŞTİRİLMİŞ p-KAPALI KÜMELER VE HEMEN HEMEN p-REGÜLER UZAYLAR

Bu bölümde topolojik uzaylarda genelleştirilmiş p-kapalı kümeler ve hemen hemen p-regüler uzaylar üzerine çalışmalar yapılmış, topolojik uzaylarda genelleştirilmiş p-kapalı kümeler ve hemen hemen p-regüler uzaylar üzerine yapılan çalışmalar ile elde edilen sonuçlar ve özellikler sunulmuştur.

TEOREM 3.1. X bir topolojik uzay olarak verilsin. X uzayı hemen hemen p-regüler olsun.

X topolojik uzayıdaki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$x \notin K_1,$$

$$K_2 \subseteq G$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak şekilde ön kapalı bir K_1 kümesi ve genelleştirilmiş p-kapalı bir K_2 kümesi X topolojik uzayında vardır.

İspat:

X bir topolojik uzay olarak verilsin. X hemen hemen p-regüler olsun.

X deki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$x \notin K_1,$$

$$K_2 \subseteq G$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak şekilde ön kapalı bir K_1 kümesi ve genelleştirilmiş p-kapalı bir K_2 kümesi var olduğunu göstermeliyiz.

X de bir G regüler açık kümesi ve $x \in G$ verilsin. Bu durumda G^t regüler kapalı ve $x \notin G^t$ dir.

Hemen hemen p-regüler uzay tanımından

$$x \in K_1,$$

$$G^t \subseteq K_2,$$

ve

$$K_1 \cap K_2 = \emptyset$$

olacak biçimde ön açık K_1 ve K_2 kümeleri mevcuttur.

$$x \in K_1,$$

$$G^t \subseteq K_2,$$

ve

$$K_1 \cap K_2 = \emptyset$$

olma durumunu kullanacağız.

Buradan

$$K_1^t$$

ve

$$K_2^t$$

kümelerinin birleşimleri X 'i oluşturur.

Dolayısıyla

$$x \notin K_1^t \text{ ve } K_1^t$$

ön kapalı, K_2^t genelleştirilmiş p-kapalıdır.

Ayrıca

$$K_2^t \subseteq G$$

olacaktır.

X bir topolojik uzay ve hemen hemen p-regüler olduğunda, X deki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$x \notin K_1,$$

$$K_2 \subseteq G$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak şekilde ön kapalı bir K_1 kümesi ve genelleştirilmiş p-kapalı bir K_2 kümesi var olduğunu göstermiş olduk.

TEOREM 3.2. X bir topolojik uzay olarak verilsin.

X ' deki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$x \notin K_1,$$

$$K_2 \subseteq G$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak şekilde ön kapalı bir K_1 kümesi ve genelleştirilmiş p-kapalı bir K_2 kümesi var olsun.

X hemen hemen p-regüler uzaydır.

İspat:

X bir topolojik uzay olarak verilsin. X deki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$x \notin K_1,$$

$$K_2 \subseteq G$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak biçimde ön kapalı bir K_1 kümesi ve genelleştirilmiş p-kapalı bir K_2 kümesi var olduğunda X'in hemen hemen p-regüler uzay olduğunu göstermeliyiz.

G kümesi X de regüler kapalı bir küme ve x elemanı G^t 'ye ait olsun. Bu halde

$$G^t,$$

X de regüler açık ve $x \in G^t$ dır.

Hipotezden K_1 ön kapalı ve $K_2 \subseteq G^t$ olan bir genelleştirilmiş p-kapalı vardır ve

$$x \notin K_1,$$

ve

$$K_1 \cup K_2$$

kümesi X'i verecektir.

$$K_1 \cup K_2$$

kümesinin X'i verme durumunu kullanacağız.

O zaman

$$x \notin K_1,$$

$$\overline{K_2}^{\text{ön}} \subseteq G^t$$

ve

$$K_1 \cup \overline{K_2}^{\text{ön}}$$

kümesi X'i verecektir.

Buradan

$$x \notin K_1,$$

$$\overline{K_2}^{\text{ön}} \subseteq G^t$$

ve

$$K_1 \cup \overline{K_2}^{\text{ön}}$$

kümesinin X 'i vermesini ele alacağız.

$$x \in K_1^t,$$

ve

$$K_1^t$$

kümesi X 'de ön açık bir küme olduğunu kullanarak

$$G \subseteq (K_2^t)^{\text{öön}}$$

elde ederiz.

Ayrıca

$$K_1^t \text{ ve } (K_2^t)^{\text{öön}}$$

kümeleri ayrıktır.

Yada;

G kümesi X de regüler kapalı bir küme ve x elemanı G^t 'ye ait olsun.

O zaman G^t , X de regüler açık ve

$$x \in G^t$$

olacaktır.

Hipotezden x elemanın bulundurmayan bir K_1 ön kapalı ve

$$K_2 \subseteq G^t$$

olan bir genelleştirilmiş p-kapalı vardır ve

$$K_1 \cup K_2$$

kümesi X 'i verecektir.

K_1 ön kapalı ve

$$K_2 \subseteq G^t$$

olan bir genelleştirilmiş p-kapalı ve

$$K_1 \cup K_2$$

kümesinin X 'i vermesini ele alacağız.

Bu durumda

$$x \in K_1^t,$$

$$K_1^t$$

ön açık bir kümedir ve

$$G \subseteq K_2^t,$$

K_2^t genelleştirilmiş p-açık bir kümedir.

Buradan $x \in K_1^t, K_1^t$ ön açık bir kümedir ve

$$G \subseteq K_2^t,$$

K_2^t genelleştirilmiş p-açık bir küme olmasını kullanacağız.

Ayrıca K_1^t ve K_2^t ayrıktır.

Bu eldeki bilgilerle Noiri (1998) den X topolojik uzayı hemen hemen p-regüler olduğuna ulaşılır.

X bir topolojik uzay olarak verilsin. X deki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$x \notin K_1,$$

$$K_2 \subseteq G$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak biçimde ön kapalı bir K_1 kümesi ve genelleştirilmiş p-kapalı bir K_2 kümesi var olduğunda X 'in hemen hemen p-regüler uzay olduğunu göstermiş olduk.

TEOREM 3.3. X bir topolojik uzay olarak verilsin.

X hemen hemen p-regüler uzaydır ancak ve ancak X deki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$x \notin K_1,$$

$$K_2 \subseteq G$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak şekilde ön kapalı bir K_1 kümesi ve genelleştirilmiş p-kapalı bir K_2 kümesi var olmasıdır.

İspat:

($\Rightarrow$)

X bir topolojik uzay olarak verilsin. X hemen hemen p-regüler olsun.

X deki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$x \notin K_1,$$

$$K_2 \subseteq G$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak şekilde ön kapalı bir K_1 kümesi ve genelleştirilmiş p-kapalı bir K_2 kümesi var olduğunu göstermeliyiz.

X de bir G regüler açık kümesi ve $x \in G$ verildiğinde bu durumda

$$G^t$$

regüler kapalı ve

$$x \notin G^t$$

olduğunu ve buradan;

hemen hemen p-regüler uzay tanımından

$$x \in K_1,$$

$$G^t \subseteq K_2,$$

ve

$$K_1 \cap K_2 = \emptyset$$

olacak biçimde ön açık K_1 ve K_2 kümeleri mevcut olduğunu elde etmiştik.

$$x \in K_1,$$

$$G^t \subseteq K_2,$$

ve

$$K_1 \cap K_2 = \emptyset$$

olma durumunu kullanarak;

$$K_1^t \text{ ve } K_2^t$$

kümelerinin birleşimleri X'i oluşturduğunu ve dolayısıyla

$$x \notin K_1^t$$

ve K_1^t ön kapalı, K_2^t genelleştirilmiş p-kapalı olduğunu ve

ayrıca

$$K_2^t \subseteq G$$

olduğunu görmüştük.

X bir topolojik uzay ve hemen hemen p-regüler olduğunda, X deki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$x \notin K_1,$$

$$K_2 \subseteq G$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak şekilde ön kapalı bir K_1 kümesi ve genelleştirilmiş p-kapalı bir K_2 kümesi var olduğunu elde ettik.

($\Leftarrow$:)

X bir topolojik uzay olarak verilsin.

X deki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$x \notin K_1,$$

$$K_2 \subseteq G$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak biçimde ön kapalı bir K_1 kümesi ve genelleştirilmiş p-kapalı bir K_2 kümesi var olduğunda X'in hemen hemen p-regüler uzay olduğunu göstereceğiz.

G kümesi X de regüler kapalı bir küme ve x elemanı G^t 'ye ait olsun. Bu halde G^t , X de regüler açık ve

$$x \in G^t$$

dır.

Hipotezden K_1 ön kapalı ve $K_2 \subseteq G^t$ olan bir genelleştirilmiş p-kapalıdır ve

$$x \notin K_1,$$

ve

$$K_1 \cup K_2$$

kümesi X'i verecektir.

$$K_1 \cup K_2$$

kümesinin X'i verme durumunu kullanacağız.

Buradan

$$x \notin K_1,$$

$$\overline{K_2}^{\text{ön}} \subseteq G^t$$

ve

$$K_1 \cup \overline{K_2}^{\text{ön}}$$

kümesi X'i verdiğini elde etmiştik.

Üstelik

$$x \notin K_1,$$

$$\overline{K_2}^{\text{ön}} \subseteq G^t$$

ve

$$K_1 \cup \overline{K_2}^{\text{ön}}$$

kümesinin X'i vermesini ele alarak

$$x \in K_1^t,$$

ve

$$K_1^t$$

kümesi X 'de ön açık bir küme olduğunu kullanarak ve ayrıca

$$G \subseteq (K_2^t)^{öñ}$$

elde etmiştik.

Ayrıca

$$K_1^t$$

ve

$$(K_2^t)^{öñ}$$

kümeleri ayrık olduğunu görmüştük.

Yada;

G kümesi X de regüler kapalı bir küme ve x elemanı G^t 'ye ait olsun.

O zaman G^t , X de regüler açık ve

$$x \in G^t$$

olacaktır.

Hipotezden x elemanın bulundurmayan bir K_1 ön kapalı ve

$$K_2 \subseteq G^t$$

olan bir genelleştirilmiş p-kapalıdır ve

$$K_1 \cup K_2$$

kümesi X 'i vereceğini bulmuştuk.

K_1 ön kapalı ve

$$K_2 \subseteq G^t$$

olan bir genelleştirilmiş p-kapalı ve

$$K_1 \cup K_2$$

kümesinin X 'i vermesini ele alarak;

bu durumda $x \in K_1^t, K_1^t$ ön açık bir küme olduğunu ve

$$G \subseteq K_2^t,$$

K_2^t genelleştirilmiş p-açık bir küme olduğunu gördük.

Buradan

$$x \in K_1^t,$$

K_1^t ön açık bir kümedir ve

$$G \subseteq K_2^t,$$

K_2^t genelleştirilmiş p-açık bir küme olmasını kullanarak;

ayrıca K_1^t ve K_2^t ayrık olduğu kullanılarak;

bu eldeki bilgilerle Noiri (1998) den X topolojik uzayı hemen hemen p -regüler olduğuna ulaştık.

X bir topolojik uzay olarak verilsin. X deki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$x \notin K_1,$$

$$K_2 \subseteq G$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak biçimde ön kapalı bir K_1 kümesi ve genelleştirilmiş p -kapalı bir K_2 kümesi var olduğunda X 'in hemen hemen p -regüler uzay olduğunu göstermiş olduk.



BÖLÜM 4
GENELLEŞTİRİLMİŞ p-KAPALI KÜMELER,
HEMEN HEMEN p-REGÜLER UZAYLAR
VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde topolojik uzaylarda genelleştirilmiş p-kapalı kümeler ve hemen hemen p-regüler uzaylar üzerine çalışmalar yapılmış, topolojik uzaylarda genelleştirilmiş p-kapalı kümeler ve hemen hemen p-regüler uzaylar üzerine yapılan çalışmalar ile elde edilen sonuçlar ve özellikler sunulmuştur.

TEOREM 4.1. X bir topolojik uzay olsun. X hemen hemen p-regüler olarak verilsin.

G_1 , X de regüler açık bir küme olsun.

$$G_2 \subseteq G_1$$

olan G_2 genelleştirilmiş p-kapalı kümeleri için

$$G_2^O \text{ ön}$$

kümelerinin birleşimi G_1 kümesini verir.

İspat:

X bir topolojik uzay olsun. X hemen hemen p-regüler olarak verilsin.

G_1 , X de regüler açık bir küme olduğunda, $G_2 \subseteq G_1$ olan G_2 genelleştirilmiş p-kapalı kümeleri için

$$G_2^O \text{ ön}$$

kümelerinin birleşimi G_1 kümesine eşit olduğunu göstermeliyiz.

G_1 , X de regüler açık bir küme olsun.

Her

$$G_2 \subseteq G_1$$

olan G_2 genelleştirilmiş p-kapalı kümeleri için

$$G_2^O \text{ ön}$$

kümelerinin birleşimi G_1 kümesinin içinde kalacaktır.

Diğer yandan G_1 kümesinde bir x elemanını alalım.

Hipotezden

$$x \notin K_1,$$

ve

$$K_2 \subseteq G_1$$

olan K_1 ön kapalı kümesi ve K_2 genelleştirilmiş p-kapalı kümesi bulunur ve K_1 ve K_2 kümelerinin birleşimi X 'i verecektir.

$$x \notin K_1,$$

ve

$$K_2 \subseteq G_1$$

olan K_1 ön kapalı kümesi ve K_2 genelleştirilmiş p-kapalı kümesi ve K_1 ve K_2 kümelerinin birleşimi X 'i vermesini kullanılacaktır.

Buradan da K_1^t kümesi x elemanını bulundurur ve bu küme için

$$K_1^t \subseteq K_2$$

olur.

Dolayısıyla

$$K_2 \subseteq G_1$$

olduğundan

$$K_2^O \text{ ön}$$

kümesi x elemanını bulunduracaktır.

X bir topolojik uzay olsun. X hemen hemen p-regüler olarak verilmesi ile G_1 , X de regüler açık bir küme olduğunda,

$$G_2 \subseteq G_1$$

olan G_2 genelleştirilmiş p-kapalı kümeleri için

$$G_2^O \text{ ön}$$

kümelerinin birleşimi G_1 kümesine eşit olduğunu göstermiş olduk.

TEOREM 4.2. X bir topolojik uzay olarak verilsin.

G_1 , X de regüler açık küme olsun.

$$G_2 \subseteq G_1$$

olan G_2 genelleştirilmiş p-kapalı kümeleri için

$$G_2^O \text{ ön}$$

kümelerinin birleşimi G_1 kümesini versin.

X hemen hemen p-regüler olur.

İspat:

X bir topolojik uzay olarak verilsin. G_1 , X de regüler açık küme olsun.

$G_2 \subseteq G_1$ olan G_2 genelleştirilmiş p-kapalı kümeleri için

$$G_2^O \text{ ön}$$

kümelerinin birleşimi G_1 kümesini verdiğinde X hemen hemen p -regüler olduğunu göstermeliyiz.

G kümesi X topolojik uzayında regüler kapalı ve G^t kümesine ait bir x elemanı verilsin.

Bu durumda x elemanı

$$K \subseteq G^t$$

olan genelleştirilmiş p -kapalı K kümeleri için $K^{O\text{ön}}$ kümelerinin birleşiminin içindedir.

Buradan

$$x \in K^{O\text{ön}}$$

ve

$$K \subseteq G^t$$

olan genelleştirilmiş p -kapalı K kümesini alalım.

Bu halde

$$G \subseteq (K^t)^{O\text{ön}}$$

olacaktır.

Sonuç olarak

$$(K^t)^{O\text{ön}}$$

kümesi ve

$$K^{O\text{ön}}$$

kümesi elde edilmiş olur.

$$(K^t)^{O\text{ön}}$$

kümesi ve

$$K^{O\text{ön}}$$

kümesi bizi sonuca götürür.

Ya da

G kümesi X topolojik uzayında regüler kapalı ve G^t kümesine ait bir x elemanı verilsin.

O zaman x elemanı

$$K \subseteq G^t$$

olan genelleştirilmiş p -kapalı K kümeleri için

$$K^{O\text{ön}}$$

kümeleri birleşiminin içindedir.

Bu elde ettiklerimiz

$$\overline{(K^t)}^{\text{ön}}$$

kümelerinin kesişimleri G kümesinin içinde olduğunu verir.

Sonuç olarak Noiri (1998) den X topolojik uzayının hemen hemen p -regüler olduğuna ulaşılır.

Dolayısıyla, X bir topolojik uzay olarak verildiğinde G_1 , X de regüler açık bir küme olduğunda

$$G_2 \subseteq G_1$$

olan G_2 genelleştirilmiş p -kapalı kümeleri için

$$G_2^{O \text{ ön}}$$

kümelerinin birleşimi G_1 kümesini verdiğinde X hemen hemen p -regüler olduğunu göstermiş olduk.

TEOREM 4.3. X bir topolojik uzay olsun. X hemen hemen p -regülerdir ancak ve ancak G_1 , X de regüler açık küme olmak üzere

$$G_2 \subseteq G_1$$

olan G_2 genelleştirilmiş p -kapalı kümeleri için

$$G_2^{O \text{ ön}}$$

kümelerinin birleşimi G_1 kümesini verir.

İspat:

($\Rightarrow$)

X bir topolojik uzay olsun. X hemen hemen p -regüler olarak verilsin.

G_1 , X de regüler açık bir küme olduğunda, $G_2 \subseteq G_1$ olan G_2 genelleştirilmiş p -kapalı kümeleri için

$$G_2^{O \text{ ön}}$$

kümelerinin birleşimi G_1 kümesine eşit olduğunu göstereceğiz.

G_1 , X de regüler açık bir küme olsun.

Her

$$G_2 \subseteq G_1$$

olan G_2 genelleştirilmiş p -kapalı kümeleri için

$$G_2^{O \text{ ön}}$$

kümelerinin birleşimi G_1 kümesinin içinde kalacağını söylemiştik.

Diğer yandan G_1 kümesinde bir x elemanını alalım.

Hipotezden

$$x \notin K_1,$$

ve

$$K_2 \subseteq G_1$$

olan K_1 ön kapalı kümesi ve K_2 genelleştirilmiş p-kapalı kümesi bulunduğunu ve K_1 ve K_2 kümelerinin birleşimi X 'i vereceğini görmüştük.

$$x \notin K_1,$$

ve

$$K_2 \subseteq G_1$$

olan K_1 ön kapalı kümesi ve K_2 genelleştirilmiş p-kapalı kümesi ve K_1 ve K_2 kümelerinin birleşimi X 'i vermesini kullanarak;

Buradan da K_1^t kümesi x elemanını bulundurur ve bu küme için

$$K_1^t \subseteq K_2$$

olur.

Dolayısıyla $K_2 \subseteq G_1$ olduğundan

$$K_2^{O \text{ ön}}$$

kümesi x elemanını bulunduracağını gördük.

X bir topolojik uzay olsun. X hemen hemen p-regüler olarak verilmesi ile G_1 , X de regüler açık bir küme olduğunda,

$$G_2 \subseteq G_1$$

olan G_2 genelleştirilmiş p-kapalı kümeleri için

$$G_2^{O \text{ ön}}$$

kümelerinin birleşimi G_1 kümesine eşit olduğunu göstermiş olduk.

($\Leftarrow$.)

X bir topolojik uzay olarak verilsin. G_1 , X de regüler açık küme olsun.

$$G_2 \subseteq G_1$$

olan G_2 genelleştirilmiş p-kapalı kümeleri için

$$G_2^{O \text{ ön}}$$

kümelerinin birleşimi G_1 kümesini verdiğinde X hemen hemen p-regüler olduğunu göstereceğiz.

G kümesi X topolojik uzayında regüler kapalı ve G^t kümesine ait bir x elemanı verilsin.

Bu durumda x elemanı

$$K \subseteq G^t$$

olan genelleştirilmiş p-kapalı K kümeleri için $K^{O \text{ ön}}$ kümelerinin birleşiminin içinde olduğunu gördük.

Buradan

$$x \in K^{O \text{ ön}}$$

ve

$$K \subseteq G^t$$

olan genelleştirilmiş p-kapalı K kümesini aldığımızda;

Bu halde

$$G \subseteq (K^t)^{O \text{ ön}}$$

olacağını ve;

Sonuç olarak

$$(K^t)^{O \text{ ön}}$$

kümesi ve

$$K^{O \text{ ön}}$$

kümesi elde edilmiş idi.

$$(K^t)^{O \text{ ön}}$$

kümesi ve

$$K^{O \text{ ön}}$$

kümesi bizi sonuca götürecektir.

Ya da

G kümesi X topolojik uzayında regüler kapalı ve G^t kümesine ait bir x elemanı verilsin.

O zaman x elemanı

$$K \subseteq G^t$$

olan genelleştirilmiş p-kapalı K kümeleri için

$$K^{O \text{ ön}}$$

kümeleri birleşiminin içindedir.

Bu elde ettiklerimiz

$$\overline{(K^t)}^{O \text{ ön}}$$

kümelerinin kesişimleri G kümesinin içinde olduğunu ifade etmiştik.

Sonuç olarak Noiri (1998) den X topolojik uzayının hemen hemen p -regüler olduğuna ulaşılır.

Dolayısıyla, X bir topolojik uzay olarak verildiğinde G_1 , X de regüler açık bir küme olduğunda

$$G_2 \subseteq G_1$$

olan G_2 genelleştirilmiş p -kapalı kümeleri için

$$G_2^{o \text{ ön}}$$

kümelerinin birleşimi G_1 kümesini verdiğinde X hemen hemen p -regüler olduğunu göstermiş olduk.



BÖLÜM 5

REGÜLER GENELLEŞTİRİLMİŞ KAPALI KÜME VE HEMEN HEMEN P-REGÜLER UZAY

Bu bölümde topolojik uzaylarda regüler genelleştirilmiş kapalı küme ve hemen hemen p-regüler topolojik uzaylar üzerine çalışılmış ve topolojik uzaylarda regüler genelleştirilmiş kapalı küme ve hemen hemen p-regüler topolojik uzaylar üzerine yapılan çalışmalar ile elde edilen sonuçlar ve özellikler sunulmuştur.

TANIM 5.1. G kümesi X topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer K kümesi X topolojik uzayının regüler açık alt kümesi ve

$$G \subseteq K$$

olduğunda

$$\overline{G} \subseteq K$$

ise G kümesine regüler genelleştirilmiş kapalı küme denir (Palaniappan ve Rao, 1993)

TANIM 5.2. A kümesi X topolojik uzayının bir alt kümesi olsun.

Eğer

$$G^t$$

regüler genelleştirilmiş kapalı küme ise G kümesine regüler genelleştirilmiş açık küme denir (Palaniappan ve Rao, 1993)

UYARI 5.3. X bir topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun. X topolojik uzayında regüler genelleştirilmiş açık bir G kümesini kısaca

rg-açık

G kümesi olarak belirtilmektedir (Palaniappan ve Rao, 1993)

UYARI 5.4. X bir topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun. X topolojik uzayında regüler genelleştirilmiş kapalı bir G kümesini kısaca

rg-kapalı

G kümesi olarak belirtilmektedir (Palaniappan ve Rao, 1993)

TEOREM 5.5. X bir topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun.

G kümesi regüler genelleştirilmiş p-açıktır ancak ve ancak G kümesinin regüler kapalı K alt kümeleri için

$$K \subseteq G^{o \text{ ön}}$$

dır (Noiri, 1998)

TEOREM 5.6. X bir topolojik uzay olarak verilsin. X ' deki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$x \notin K_1,$$

$$K_2 \subseteq G$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak şekilde ön kapalı bir K_1 kümesi ve regüler genelleştirilmiş kapalı bir K_2 kümesi var olsun.

X hemen hemen p -regüler uzaydır.

İspat:

X bir topolojik uzay olarak verilsin. X deki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$x \notin K_1,$$

$$K_2 \subseteq G$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak biçimde ön kapalı bir K_1 kümesi ve regüler genelleştirilmiş kapalı bir K_2 kümesi var olduğunda X 'in hemen hemen p -regüler uzay olduğunu göstermeliyiz.

G kümesi X de regüler kapalı bir küme ve x elemanı G^t 'ye ait olsun. Bu halde G^t , X de regüler açık ve $x \in G^t$ dır.

Hipotezden K_1 ön kapalı ve

$$K_2 \subseteq G^t$$

olan bir regüler genelleştirilmiş kapalıdır ve

$$K_1 \cup K_2$$

kümesi X 'i verecektir.

Bu durumda

$$K_1 \cup K_2$$

kümesinin X 'i verme durumunu kullanacağız.

O zaman

$$x \notin K_1,$$

$$\overline{K_2} \subseteq G^t$$

ve

$$K_1 \cup \overline{K_2}^{\text{ön}}$$

kümesi X 'i verecektir.

$$x \in K_1^t,$$

$$K_1^t$$

kümesi X 'de ön açık bir küme olduğunu kullanarak

$$G \subseteq (K_2^t)^{\text{öñ}}$$

elde ederiz.

Ayrıca

$$K_1^t$$

ve

$$(K_2^t)^{\text{öñ}}$$

kümeleri ayrıktır.

Yada;

G kümesi X de regüler kapalı bir küme ve x elemanı G^t 'ye ait olsun. O zaman G^t , X de regüler açık ve $x \in G^t$ olacaktır.

Hipotezden x elemanın bulundurmayan bir K_1 ön kapalı ve

$$K_2 \subseteq G^t$$

olan bir regüler genelleştirilmiş kapalı ve

$$K_1 \cup K_2$$

kümesi X 'i verecektir.

K_1 ön kapalı ve

$$K_2 \subseteq G^t$$

olan bir regüler genelleştirilmiş kapalı ve

$$K_1 \cup K_2$$

kümesinin X 'i vermesini ele alacağız.

Bu durumda

$$x \in K_1^t,$$

$$K_1^t$$

ön açık bir kümedir ve

$$G \subseteq K_2^t,$$

K_2^t regüler genelleştirilmiş açık bir kümedir.

Ayrıca K_1^t ve K_2^t ayrıktır.

Bu eldeki bilgilerle Noiri (1998) den X topolojik uzayı hemen hemen p -regüler olduğuna ulaşılır.

X bir topolojik uzay olarak verilsin. X deki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$x \notin K_1,$$

$$K_2 \subseteq G$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak biçimde ön kapalı bir K_1 kümesi ve regüler genelleştirilmiş kapalı bir K_2 kümesi var olduğunda X 'in hemen hemen p -regüler uzay olduğunu göstermiş olduk.

TEOREM 5.7. X bir topolojik uzay olarak verilsin.

G_1 , X de regüler açık bir küme olsun. $G_2 \subseteq G_1$ olan G_2 regüler genelleştirilmiş kapalı kümeleri için

$$G_2^{O \text{ ön}}$$

kümelerinin birleşimi G_1 kümesini versin.

X hemen hemen p -regüler olur.

İspat:

X bir topolojik uzay olarak verilsin. G_1 , X de regüler açık bir küme olsun.

$G_2 \subseteq G_1$ olan G_2 regüler genelleştirilmiş kapalı kümeleri için

$$G_2^{O \text{ ön}}$$

kümelerinin birleşimi G_1 kümesini verdiğinde X hemen hemen p -regüler olduğunu göstermeliyiz.

G kümesi X topolojik uzayında regüler kapalı ve G^t kümesine ait bir x elemanı verilsin.

Bu durumda x elemanı

$$K \subseteq G^t$$

olan regüler genelleştirilmiş kapalı K kümeleri için $K^{O \text{ ön}}$ kümelerinin birleşiminin içindedir.

Buradan

$$x \in K^{O \text{ ön}}$$

ve

$$K \subseteq G^t$$

olan regüler genelleştirilmiş kapalı K kümesini alalım.

Bu halde

$$G \subseteq (K^t)^O$$

olacaktır.

Sonuç olarak

$$(K^t)^{O \text{ ön}}$$

kümesi ve

$$K^{O \text{ ön}}$$

kümesi elde edilmiş olur.

$$(K^t)^{O \text{ ön}}$$

kümesi ve

$$K^{O \text{ ön}}$$

kümesi bizi sonuca götürür.

Ya da

G kümesi X topolojik uzayında regüler kapalı ve G^t kümesine ait bir x elemanı verilsin.

O zaman x elemanı

$$K \subseteq G^t$$

olan regüler genelleştirilmiş kapalı K kümeleri için

$$K^{O \text{ ön}}$$

kümeleri birleşiminin içindedir.

Bu elde ettiklerimiz

$$\overline{(K^t)^{O \text{ ön}}}$$

kümelerinin kesişimleri G kümesini verir.

Sonuç olarak Noiri (1998) den X topolojik uzayının hemen hemen p-regüler olduğuna ulaşılır.

Dolayısıyla, X bir topolojik uzay olarak verilsin. G_1 , X de regüler açık bir küme olsun.

$$G_2 \subseteq G_1$$

olan G_2 regüler genelleştirilmiş kapalı kümeleri için

$$G_2^{O \text{ ön}}$$

kümelerinin birleşimi G_1 kümesini verildiğinde X hemen hemen p-regüler olduğunu göstermiş olduk.

TEOREM 5.8. X bir topolojik uzay olarak verilsin. X ' deki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$x \notin K_1,$$

$$K_2 \subseteq G$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak şekilde ön kapalı bir K_1 kümesi ve genelleştirilmiş kapalı bir K_2 kümesi var olsun. X hemen hemen p -regüler uzaydır.

İspat:

X bir topolojik uzay olarak verilsin. X deki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$x \notin K_1,$$

$$K_2 \subseteq G$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak biçimde ön kapalı bir K_1 kümesi ve genelleştirilmiş kapalı bir K_2 kümesi var olduğunda X 'in hemen hemen p -regüler uzay olduğunu göstermeliyiz.

G kümesi X de regüler kapalı bir küme ve x elemanı G^t 'ye ait olsun. Bu halde G^t , X de regüler açık ve $x \in G^t$ dır.

Hipotezden K_1 ön kapalı ve

$$K_2 \subseteq G^t$$

olan bir genelleştirilmiş kapalıdır ve

$$K_1 \cup K_2$$

kümesi X 'i verecektir.

$$K_1 \cup K_2$$

kümesinin X 'i verme durumunu kullanacağız.

O zaman

$$x \notin K_1,$$

$$\overline{K_2} \subseteq G^t$$

ve

$$K_1 \cup \overline{K_2}^{\text{ön}}$$

kümesi X 'i verecektir.

$$x \in K_1^t,$$

$$K_1^t$$

kümesi X 'de ön açık bir küme olduğunu kullanarak

$$G \subseteq (K_2^t)^{öön}$$

elde ederiz.

Ayrıca

$$K_1^t$$

ve

$$(K_2^t)^{öön}$$

kümeleri ayrıktır.

Yada;

G kümesi X de regüler kapalı bir küme ve x elemanı G^t 'ye ait olsun. O zaman G^t , X de regüler açık ve $x \in G^t$ olacaktır.

Hipotezden x elemanın bulundurmayan bir K_1 ön kapalı ve

$$K_2 \subseteq G^t$$

olan bir genelleştirilmiş kapalıdır ve

$$K_1 \cup K_2$$

kümesi X 'i verecektir.

K_1 ön kapalı ve

$$K_2 \subseteq G^t$$

olan bir genelleştirilmiş kapalı ve

$$K_1 \cup K_2$$

kümesinin X 'i vermesini ele alacağız.

Bu durumda $x \in K_1^t, K_1^t$ ön açık bir kümedir ve

$$G \subseteq K_2^t,$$

K_2^t genelleştirilmiş açık bir kümedir.

Ayrıca K_1^t ve K_2^t ayrıktır.

Bu eldeki bilgilerle Noiri (1998) den X topolojik uzayı hemen hemen p -regüler olduğuna ulaşılır.

X bir topolojik uzay olarak verilsin. X deki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$x \notin K_1,$$

$$K_2 \subseteq G$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak biçimde ön kapalı bir K_1 kümesi ve genelleştirilmiş kapalı bir K_2 kümesi var olduğunda X 'in hemen hemen p-regüler uzay olduğunu göstermiş olduk.

TEOREM 5.9. X bir topolojik uzay olarak verilsin.

G_1 , X de regüler açık bir küme olsun. $G_2 \subseteq G_1$ olan G_2 genelleştirilmiş kapalı kümeleri için

$$G_2^{O \text{ ön}}$$

kümelerinin birleşimi G_1 kümesini versin.

X hemen hemen p-regüler olur.

İspat:

X bir topolojik uzay olarak verilsin. G_1 , X de regüler açık bir küme olsun.

$G_2 \subseteq G_1$ olan G_2 genelleştirilmiş kapalı kümeleri için

$$G_2^{O \text{ ön}}$$

kümelerinin birleşimi G_1 kümesini verdiğinde X hemen hemen p-regüler olduğunu göstermeliyiz.

G kümesi X topolojik uzayında regüler kapalı ve G^t kümesine ait bir x elemanı verilsin.

Bu durumda x elemanı

$$K \subseteq G^t$$

olan genelleştirilmiş kapalı K kümeleri için $K^{O \text{ ön}}$ kümelerinin birleşiminin içindedir.

$$x \in K^{O \text{ ön}}$$

ve

$$K \subseteq G^t$$

olan genelleştirilmiş kapalı K kümesini alalım.

Bu halde

$$G \subseteq (K^t)^O$$

olacaktır.

Sonuç olarak

$$(K^t)^{O \text{ ön}}$$

kümesi ve

$$K^{O \text{ ön}}$$

kümesi elde edilmiş olur.

$$(K^t)^{O\ddot{on}}$$

kümesi ve

$$K^{O\ddot{on}}$$

kümesi bizi sonuca götürür.

Ya da

G kümesi X topolojik uzayında regüler kapalı ve G^t kümesine ait bir x elemanı verilsin.

O zaman x elemanı

$$K \subseteq G^t$$

olan genelleştirilmiş kapalı K kümeleri için

$$K^{O\ddot{on}}$$

kümeleri birleşiminin içindedir.

Bu elde ettiklerimiz

$$\overline{(K^t)^{O\ddot{on}}}$$

kümelerinin kesişimleri G kümesini verir.

Sonuç olarak Noiri (1998) den X topolojik uzayının hemen hemen p -regüler olduğuna ulaşılır.

Dolayısıyla, X bir topolojik uzay olarak verilsin. G_1 , X de regüler açık bir küme olsun. $G_2 \subseteq G_1$ olan G_2 genelleştirilmiş kapalı kümeleri için

$$G_2^{O\ddot{on}}$$

kümelerinin birleşimi G_1 kümesini verdiğinde X hemen hemen p -regüler olduğunu göstermiş olduk.

BÖLÜM 6

BAZI ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde topolojik uzaylarda genelleştirilmiş kapalı küme ve hemen hemen p-regüler topolojik uzaylar üzerine araştırmalar yapılmış ve topolojik uzaylarda genelleştirilmiş kapalı küme ve hemen hemen p-regüler topolojik uzaylar üzerine yapılan araştırmalar ile elde edilen sonuçlar ve özellikler sunulmuştur.

TEOREM 6.1. X bir topolojik uzay olarak verilsin. X uzayı hemen hemen p-regüler olsun.

X uzayıdaki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$x \notin K_1,$$

$$K_2 \subseteq \overline{G}^{\text{ön}}$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak şekilde genelleştirilmiş p-kapalı bir K_1 kümesi ve genelleştirilmiş p-kapalı bir K_2 kümesi vardır.

İspat:

X bir topolojik uzay olarak verilsin. X hemen hemen p-regüler olsun.

X deki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$x \notin K_1,$$

$$K_2 \subseteq \overline{G}^{\text{ön}}$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak şekilde genelleştirilmiş p-kapalı bir K_1 kümesi ve genelleştirilmiş p-kapalı bir K_2 kümesi var olduğunu göstermeliyiz.

X de bir G regüler açık kümesi ve $x \in G$ verilsin. Bu durumda G^t regüler kapalı ve $x \notin G^t$ dır.

Hemen hemen p-regüler uzay tanımından

$$x \in K_1,$$

$$G^t \subseteq K_2,$$

ve

$$K_1 \cap K_2 = \emptyset$$

olacak biçimde ön açık K_1 ve K_2 kümeleri mevcuttur.

Buradan

$$\begin{aligned}x &\in K_1, \\ G^t &\subseteq K_2, \\ K_1 \cap K_2 &= \emptyset\end{aligned}$$

olma durumunu kullanacağız.

Buradan da

$$K_1^t$$

ve

$$K_2^t$$

kümelerinin birleşimleri X 'i oluşturur. Dolayısıyla

$$x \notin K_1^t$$

ve

$$K_1^t$$

genelleştirilmiş p-kapalı, K_2^t genelleştirilmiş p-kapalıdır.

Ayrıca

$$K_2^t \subseteq \overline{G}^{\text{ön}}$$

olacaktır.

X bir topolojik uzay ve hemen hemen p-regüler olduğunda, X deki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$\begin{aligned}x &\notin K_1, \\ K_2 &\subseteq \overline{G}^{\text{ön}}\end{aligned}$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak şekilde genelleştirilmiş p-kapalı bir K_1 kümesi ve genelleştirilmiş p-kapalı bir K_2 kümesi var olduğunu göstermiş olduk.

TEOREM 6.2. X bir topolojik uzay olarak verilsin.

X ' deki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$\begin{aligned}x &\notin K_1, \\ K_2 &\subseteq G\end{aligned}$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak şekilde kapalı bir K_1 kümesi ve genelleştirilmiş p-kapalı bir K_2 kümesi var olsun.

X hemen hemen p-regüler uzaydır.

İspat:

X bir topolojik uzay olarak verilsin. X deki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$x \notin K_1,$$

$$K_2 \subseteq G$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak biçimde kapalı bir K_1 kümesi ve genelleştirilmiş p-kapalı bir K_2 kümesi var olduğunda X 'in hemen hemen p-regüler uzay olduğunu göstermeliyiz.

G kümesi X de regüler kapalı bir küme ve x elemanı G^t 'ye ait olsun. Bu halde G^t , X de regüler açık ve $x \in G^t$ dır.

Hipotezden K_1 kapalı ve

$$K_2 \subseteq G^t$$

olan bir genelleştirilmiş p-kapalıdır ve

$$K_1 \cup K_2$$

kümesi X 'i verecektir.

$$K_1 \cup K_2$$

kümesinin X 'i verme durumunu kullanacağız.

O zaman

$$x \notin K_1,$$

$$\overline{K_2}^{\text{ön}} \subseteq G^t$$

ve

$$K_1 \cup \overline{K_2}^{\text{ön}}$$

kümesi X 'i verecektir.

$$x \in K_1^t,$$

$$K_1^t$$

kümesi X 'de önaçık bir küme olduğunu kullanarak

$$G \subseteq (K_2^t)^{\text{ön}}$$

elde ederiz.

Ayrıca K_1^t ve $(K_2^t)^{\text{ön}}$ kümeleri ayrıktır.

Yada;

G kümesi X de regüler kapalı bir küme ve x elemanı G^t 'ye ait olsun. O zaman G^t , X de regüler açık ve $x \in G^t$ olacaktır.

Hipotezden x elemanın bulundurmayan bir K_1 kapalı ve

$$K_2 \subseteq G^t$$

olan bir genelleştirilmiş p-kapalı vardır ve

$$K_1 \cup K_2$$

kümesi X 'i verecektir.

K_1 kapalı ve

$$K_2 \subseteq G^t$$

olan bir genelleştirilmiş p-kapalı ve

$$K_1 \cup K_2$$

kümesinin X 'i vermesini ele alacağız.

Bu durumda $x \in K_1^t, K_1^t$ ön açık bir kümedir ve

$$G \subseteq K_2^t,$$

K_2^t genelleştirilmiş p-açık bir kümedir.

Ayrıca K_1^t ve K_2^t ayrıktır.

Bu eldeki bilgilerle Noiri (1998) den X topolojik uzayı hemen hemen p-regüler olduğuna ulaşılır.

X bir topolojik uzay olarak verilsin. X deki her regüler açık G kümesi ve her $x \in G$ için

$$x \notin K_1,$$

ve

$$K_2 \subseteq G$$

ve

$$K_1 \cup K_2 = X$$

olacak biçimde kapalı bir K_1 kümesi ve genelleştirilmiş p-kapalı bir K_2 kümesi var olduğunda X 'in hemen hemen p-regüler uzay olduğunu göstermiş olduk.

BÖLÜM 7

DÖNÜŞÜMLER

VE HEMEN HEMEN P-REGÜLER UZAY

Bu bölümde topolojik uzaylarda dönüşümler ve hemen hemen p-regüler topolojik uzaylar üzerine çalışılmış ve topolojik uzaylarda dönüşümler ve hemen hemen p-regüler topolojik uzaylar üzerine yapılan çalışmalar ile elde edilen sonuçlar ve özellikler sunulmuştur.

TANIM 7.1. X topolojik uzayı ve $G \subseteq X$ olsun. G kümesi tarafından kapsanan X in regüler açık kümelerinin birleşimine G kümesinin δ -içi denir (Velicko, 1968)

UYARI 7.2. X topolojik uzayı ve $G \subseteq X$ olsun. X topolojik uzayının G alt kümesinin δ -içini

$$G^{\circ \delta}$$

biçiminde göstereceğiz.

UYARI 7.3. X topolojik uzayının G alt kümesinin δ -kapanışını

$$\bar{G}^{\delta}$$

şeklinde göstereceğiz.

TANIM 7.4. X topolojik uzayı ve $G \subseteq X$ olsun. Eğer

$$G = G^{\circ \delta}$$

ise G alt kümeye δ -açık küme denir (Velicko, 1968)

TANIM 7.5. X topolojik uzayı ve $G \subseteq X$ olsun. Eğer

$$\bar{G}^{\delta} = \{x \in X : G \cap (\bar{K})^{\circ} \neq \emptyset\} \text{ (K açık ve } x \in K)$$

iken,

$$G = \bar{G}^{\delta}$$

ise X uzayının G alt kümesine δ -kapalı küme denir (Velicko, 1968)

TANIM 7.6. X topolojik uzayı, Y topolojik uzayı ve f , X den Y ye bir fonksiyon olsun.

Her regüler açık G için $f^{-1}(G)$ regüler açık ise f fonksiyonuna R -dönüşüm denir (Carnahan, 1973).

TEOREM 7.7. X topolojik uzayından Y topolojik uzayına bir g fonksiyonu verilsin.

Ön açıkların görüntüsü açık olsun. R -dönüşüm ve regüler genelleştirilmiş p -kapalıların görüntüleri δ -kapalı ve örten olsun.

X hemen hemen p -regüler ise Y de hemen hemen p -regülerdir.

İspat:

X topolojik uzayından Y topolojik uzayına bir g fonsiyonu verilsin.

Ön açıkların görüntüsü açık olsun. R-dönüşüm ve regüler genelleştirilmiş p-kapalıların görüntüleri δ -kapalı ve örten olsun.

X hemen hemen p-regüler iken Y uzayının da hemen hemen p-regüler olduğunu göstermeliyiz.

Y uzayında K regüler kapalı ve K^t de bir y noktası verilsin. X uzayından bir

$$x \in g^{-1}(y)$$

noktasını alalım ve

$$x \notin g^{-1}(K)$$

olacaktır.

G_1 ve G_2 ön açıklarını

$$x \in G_1,$$

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset,$$

ve

$$g^{-1}(K) \subseteq G_2$$

olacak biçimde buluruz.

$$y \in g(G_1),$$

ve

$g(G_1)$, $g(G_2)$ açıklar olur.

Noiri 1998 i kullanarak,

$$K \subseteq K^*$$

ve

$$g^{-1}(K^*) \subseteq G_2$$

olan K^* regüler genelleştirilmiş p-açık kümesi vardır.

Noiri 1998 den Y hemen hemen p-regülerdir.

X topolojik uzayından Y topolojik uzayına bir g fonsiyonu verildiğinde ön açıkların görüntüsü açık olarak, g nin R-dönüşüm ve regüler genelleştirilmiş p-kapalıların görüntüleri δ -kapalı ve örten olarak aldığımızda;

X hemen hemen p-regüler iken Y uzayının da hemen hemen p-regüler olduğunu göstermiş olduk.

TEOREM 7.8. X topolojik uzayından Y topolojik uzayına g fonksiyonu verilsin. Regüler genelleştirilmiş p -kapalı kümelerin görüntüleri δ -kapalı ve örten olsun.

$$g^{-1}(K) \subseteq G$$

olan Y nin K alt kümesi ve X in G regüler genelleştirilmiş p -açık kümesi için bir A δ -açık kümesi

$$K \subseteq A$$

ve

$$g^{-1}(A) \subseteq G$$

olacak biçimde bulunur.

İspat:

X topolojik uzayından Y topolojik uzayına g fonksiyonu verilsin.

X uzayındaki regüler genelleştirilmiş p -kapalı kümelerin görüntüleri δ -kapalı ve örten olsun.

$g^{-1}(K) \subseteq G$ olan Y nin K alt kümesi ve X in G regüler genelleştirilmiş p -açık kümesi için bir A δ -açık kümesi

$$K \subseteq A$$

ve

$$g^{-1}(A) \subseteq G$$

olacak biçimde bulunacağını göstermeliyiz.

$$g^{-1}(K) \subseteq G$$

olan Y nin K alt kümesi ve X in G regüler genelleştirilmiş p -açık kümesi olsun.

$$(g(G^t))^t$$

alalım.

$$K \subseteq (g(G^t))^t$$

olur.

Üstelik

$$\begin{aligned} g^{-1}((g(G^t))^t) \\ \subseteq G \end{aligned}$$

olacaktır.

Böylece

$$g^{-1}(K) \subseteq G$$

olan Y nin K alt kümesi ve X in G regüler genelleştirilmiş p -açık kümesi için bir A δ -açık kümesi

$$K \subseteq A$$

ve

$$g^{-1}(A) \subseteq G$$

olacak biçimde bulunacağını göstermiş olduk.

TEOREM 7.9. X topolojik uzayından Y topolojik uzayına örten bir g fonksiyonu verilsin.

$g^{-1}(K) \subseteq G$ olan Y nin K alt kümesi ve X in G regüler genelleştirilmiş p -açık kümesi için bir A δ -açık kümesi

$$K \subseteq A$$

ve

$$g^{-1}(A) \subseteq G$$

olacak biçimde bulunsun.

Bu durumda regüler genelleştirilmiş p -kapalıların görüntüleri δ -kapalıdır.

İspat:

X topolojik uzayından Y topolojik uzayına örten bir g fonksiyonu verilsin.

$$g^{-1}(K) \subseteq G$$

olan Y nin K alt kümesi ve X in G regüler genelleştirilmiş p -açık kümesi için bir A δ -açık kümesi

$$K \subseteq A$$

ve

$$g^{-1}(A) \subseteq G$$

olacak şekilde bulunduğunda regüler genelleştirilmiş p -kapalıların görüntüleri δ -kapalı olduğunu göstermeliyiz.

X uzayının K alt kümesi regüler genelleştirilmiş p -kapalı olarak verilsin.

$$g^{-1}((g(K))^t)$$

kümesi K^t in alt kümesidir.

$$(g(K))^t \subseteq G$$

olan ve

$$g^{-1}(G) \subseteq K^t$$

olan Y uzayının G δ -açık kümesi vardır.

$$g(K)=G^t$$

olur.

Bu durumda

$$(g(K))^t \subseteq G$$

olan ve

$$g^{-1}(G) \subseteq K^t$$

olan Y uzayının G δ -açık kümesi varlığını ve

$$g(K)=G^t$$

olmasını kullanırsak sonuç olarak $g(K)$ δ -kapalıdır.

$$g^{-1}(K) \subseteq G$$

olan Y nin K alt kümesi ve X in G regüler genelleştirilmiş p-açık kümesi için bir A δ -açık kümesi

$$K \subseteq A$$

ve

$$g^{-1}(A) \subseteq G$$

olacak şekilde bulunduğunda regüler genelleştirilmiş p-kapalıların görüntüleri δ -kapalı olduğunu göstermiş olduk.

TEOREM 7.10. X topolojik uzayından Y topolojik uzayına bir g fonksiyonu verilsin.

Ön açıkların görüntüsü δ -açık olsun. R-dönüşüm ve regüler genelleştirilmiş p-kapalıların görüntüleri δ -kapalı ve örten olsun.

X hemen hemen p-regüler ise Y de hemen hemen p-regülerdir.

İspat:

X topolojik uzayından Y topolojik uzayına bir g foksiyonu verilsin.

Ön açıkların görüntüsü δ -açık olsun. R-dönüşüm ve regüler genelleştirilmiş p-kapalıların görüntüleri δ -kapalı ve örten olsun.

X hemen hemen p-regüler iken Y uzayının da hemen hemen p-regüler olduğunu göstermeliyiz.

Y uzayında K regüler kapalı ve K^t de bir y noktası verilsin. X uzayından bir

$$x \in g^{-1}(y)$$

noktasını alalım ve

$$x \notin g^{-1}(K)$$

olacaktır.

G_1 ve G_2 ön açıklarını

$$x \in G_1,$$
$$G_1 \cap G_2 = \emptyset,$$

ve

$$g^{-1}(K) \subseteq G_2$$

olacak biçimde buluruz.

$$y \in g(G_1),$$

ve

$g(G_1)$, $g(G_2)$ δ -açıklar olur.

Noiri 1998 i kullanarak,

$$K \subseteq K^*$$

ve

$$g^{-1}(K^*) \subseteq G_2$$

olan K^* regüler genelleştirilmiş p-açık kümesi vardır.

Noiri 1998 den Y hemen hemen p-regülerdir.

X topolojik uzayından Y topolojik uzayına bir g foksionu verildiğinde ön açıkların görüntüsü δ -açık olarak, g nin R-dönüşüm ve regüler genelleştirilmiş p-kapalıların görüntüleri δ -kapalı ve örten olarak aldığımızda;

X hemen hemen p-regüler iken Y uzayının da hemen hemen p-regüler olduğunu göstermiş olduk.

TEOREM 7.11. X topolojik uzayından Y topolojik uzayına örten bir g fonksiyonu verilsin.

$$g^{-1}(K) \subseteq G$$

olan Y nin K alt kümesi ve X in G regüler genelleştirilmiş p-açık kümesi için bir A δ -açık kümesi

$$K \subseteq A$$

ve

$$g^{-1}(A) \subseteq G$$

olacak biçimde olması için gerek ve yeter şart regüler genelleştirilmiş p-kapalıların görüntüleri δ -kapalı olmasıdır.

İspat:

X topolojik uzayından Y topolojik uzayına g fonksiyonu verilsin. X uzayındaki regüler genelleştirilmiş p-kapalı kümelerin görüntüleri δ -kapalı ve örten olsun.

$$g^{-1}(K) \subseteq G$$

olan Y nin K alt kümesi ve X in G regüler genelleştirilmiş p-açık kümesi için bir A δ -açık kümesi

$$K \subseteq A$$

ve

$$g^{-1}(A) \subseteq G$$

olacak biçimde bulunacağını göstermeliyiz.

$g^{-1}(K) \subseteq G$ olan Y nin K alt kümesi ve X in G regüler genelleştirilmiş p-açık kümesi için

aldığımızda

$$(g(G^t))^t$$

olur.

$$K \subseteq (g(G^t))^t$$

Ayrıca

$$g^{-1}((g(G^t))^t) \subseteq G$$

olacağını göstermiştik.

Diğer taraftan, X topolojik uzayından Y topolojik uzayına örten bir g fonksiyonu verilsin.

$$g^{-1}(K) \subseteq G$$

olan Y nin K alt kümesi ve X in G regüler genelleştirilmiş p-açık kümesi için bir A δ -açık kümesi

$$K \subseteq A$$

ve

$$g^{-1}(A) \subseteq G$$

olacak şekilde bulunduğunda regüler genelleştirilmiş p-kapalıların görüntüleri δ -kapalı olduğunu göstermeliyiz.

X uzayının K alt kümesi regüler genelleştirilmiş p-kapalı olarak verildiğinde

$$g^{-1}((g(K))^t)$$

kümesi K^t in alt kümesi olduğunu,

$$(g(K))^t \subseteq G$$

olan ve

$$g^{-1}(G) \subseteq K^t$$

olan Y uzayının G δ -açık kümesi var olduğunu,

$$g(K)=G^t$$

ve

$$g(K)$$

δ -kapalı olduğunu göstermiştik.

TANIM 7.12. X topolojik uzayından Y topolojik uzayına g fonksiyonu verilsin.

X uzayındaki G açık kümeleri için $g(G)$ ön açık oluyorsa g fonksiyonu ön açıktır denir (Mashhour ve ark., 1982)

TANIM 7.13. X topolojik uzayı, Y topolojik uzayı ve f, X den Y ye bir fonksiyon olsun.

Her regüler açık G için $f^{-1}(G)$ açık ise f fonksiyonuna hemen hemen sürekli denir (Singal and Singal, 1968).

TEOREM 7.14. X topolojik uzayından Y topolojik uzayına g fonksiyonu örten olarak verilsin.

g ön açık ve hemen hemen sürekli bir fonksiyon olsun. X topolojik uzayında regüler genelleştirilmiş p-kapalı alt kümelerinin g altındaki görüntüleri δ -kapalı olsun.

X uzayı regüler uzay olarak alınırsa Y uzayı hemen hemen p-regüler uzay olur.

İspat:

X topolojik uzayından Y topolojik uzayına g fonksiyonu örten olarak verilsin. g ön açık ve hemen hemen sürekli bir fonksiyon olsun.

X topolojik uzayında regüler genelleştirilmiş p-kapalı alt kümelerinin g altındaki görüntüleri δ -kapalı olsun.

X uzayı regüler uzay olarak alınırsa Y uzayının hemen hemen p-regüler uzay olacağını göstermeliyiz.

Y topolojik uzayında K regüler kapalı alt küme olsun. K^t de bir y noktası verilsin.

$$x \in g^{-1}(y)$$

alalım.

Buradan da

$$x \notin g^{-1}(K)$$

olur.

X uzayında

$$x \in G_1,$$

$$g^{-1}(K) \subseteq G_2,$$

ve

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset$$

olan G_1 ve G_2 açık alt kümeleri vardır.

$$y \in g(G_1),$$

$g(G_1)$ ön açıktır.

Y uzayında A δ -açık alt kümesi

$$K \subseteq A,$$

ve

$$g^{-1}(A) \subseteq G_2$$

ve

$$g(G_1) \cap A = \emptyset$$

olacak biçimde vardır.

X topolojik uzayından Y topolojik uzayına g fonksiyonu örten olarak verildiğinde g ön açık ve hemen hemen sürekli bir fonksiyon olması durumunda X topolojik uzayında regüler genelleştirilmiş p-kapalı alt kümelerinin g altındaki görüntüleri δ -kapalı olarak aldığımızda X uzayı regüler uzay olması bize Y uzayının hemen hemen p-regüler uzay olacağını göstermemizi sağlamıştır.

BÖLÜM 8

BİREBİR EŞLEME

VE HEMEN HEMEN p-REGÜLER UZAY

Bu bölümde topolojik uzaylarda dönüşümler ve hemen hemen p-regüler topolojik uzaylar üzerine çalışılmış ve topolojik uzaylarda dönüşümler ve hemen hemen p-regüler topolojik uzaylar üzerine yapılan çalışmalar ile elde edilen sonuçlar ve özellikler sunulmuştur.

TEOREM 8.1. X topolojik uzayından Y topolojik uzayına bir g fonksiyonu verilsin.

Önkapalıların görüntüsü kapalı olsun. R-dönüşüm ve regüler genelleştirilmiş p-açık kümelerin görüntüleri δ -açık ve birebir eşleme olsun.

X hemen hemen p-regüler ise Y de hemen hemen p-regülerdir.

İspat:

X topolojik uzayından Y topolojik uzayına bir g foksionu verilsin.

R-dönüşüm ve regüler genelleştirilmiş p-açıkların görüntüleri δ -açık ve birebir eşleme olsun.

X hemen hemen p-regüler iken Y uzayının da hemen hemen p-regüler olduğunu göstermeliyiz.

Y uzayında K regüler kapalı ve K^t de bir y noktası verilsin. X uzayından bir

$$x \in g^{-1}(y)$$

noktasını alalım ve

$$x \notin g^{-1}(K)$$

olacaktır.

G_1 ve G_2 ön açıklarını

$$x \in G_1, \\ G_1 \cap G_2 = \emptyset,$$

ve

$$g^{-1}(K) \subseteq G_2$$

olacak biçimde buluruz.

$$y \in g(G_1),$$

ve

$$g(G_1), g(G_2)$$

açıklar olur.

Noiri 1998 i kullanarak,

$$K \subseteq K^*$$

ve

$$g^{-1}(K^*) \subseteq G_2$$

olan K^* regüler genelleştirilmiş p-açık kümesi vardır.

Noiri 1998 den Y hemen hemen p-regülerdir.

X topolojik uzayından Y topolojik uzayına bir g fonsiyonu verildiğinde g nin önkapalıların görüntüsü kapalı, R-dönüşüm ve regüler genelleştirilmiş p-açıkların görüntüleri δ -açık ve birebir eşleme olarak aldığımızda;

X hemen hemen p-regüler iken Y uzayının da hemen hemen p-regüler olduğunu göstermiş olduk.

TEOREM 8.2. X topolojik uzayından Y topolojik uzayına g fonksiyonu birebir eşleme olarak verilsin.

Kapalıların görüntüsü önkapalı, g hemen hemen sürekli bir fonksiyon olsun.

X topolojik uzayında regüler genelleştirilmiş p-açık alt kümelerinin g altındaki görüntüleri δ -açık olsun.

X uzayı regüler uzay olarak alınırsa Y uzayı hemen hemen p-regüler uzay olur.

İspat:

X topolojik uzayından Y topolojik uzayına g fonksiyonu birebir eşleme olarak verilsin.

g hemen hemen sürekli bir fonksiyon olsun.

X topolojik uzayında regüler genelleştirilmiş p-açık alt kümelerinin g altındaki görüntüleri δ -açık olsun.

X uzayı regüler uzay olarak alınırsa Y uzayının hemen hemen p-regüler uzay olacağını göstermeliyiz.

Y topolojik uzayında K regüler kapalı alt küme olsun. K^t de bir y noktası verilsin.

$$x \in g^{-1}(y)$$

alalım.

Buradan da

$$x \notin g^{-1}(K)$$

olur.

X uzayında $x \in G_1$,

$$\begin{aligned} g^{-1}(K) \\ \subseteq G_2, \end{aligned}$$

ve

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset$$

olan G_1 ve G_2 açık alt kümeleri vardır.

$$y \in g(G_1),$$

ve $g(G_1)$ ön açıktır.

Y uzayında A δ -açık alt kümesi

$$K \subseteq A,$$

ve

$$g^{-1}(A) \subseteq G_2$$

ve

$$\begin{aligned} g(G_1) \cap A \\ = \emptyset \end{aligned}$$

olacak biçimde vardır.

X topolojik uzayından Y topolojik uzayına g fonksiyonu birebir eşleme olarak, kapalıların görüntüsü önkapalı verildiğinde g hemen hemen sürekli bir fonksiyon olması durumunda X topolojik uzayında regüler genelleştirilmiş p-açık alt kümelerinin g altındaki görüntüleri δ -açık olarak aldığımızda X uzayı regüler uzay olması bize Y uzayının hemen hemen p-regüler uzay olacağını göstermemizi sağlamıştır.

TEOREM 8.3. X topolojik uzayından Y topolojik uzayına g fonksiyonu verilsin. Regüler genelleştirilmiş p-kapalı küme görüntüleri regüler kapalı ve örten olsun.

$$g^{-1}(K) \subseteq G$$

olan Y nin K alt kümesi ve X in G regüler genelleştirilmiş p-açık kümesi için bir A δ -açık kümesi

$$K \subseteq A$$

ve

$$\begin{aligned} g^{-1}(A) \\ \subseteq G \end{aligned}$$

olacak biçimde bulunur.

İspat:

X topolojik uzayından Y topolojik uzayına g fonksiyonu verilsin.

X uzayındaki regüler genelleştirilmiş p-kapalı kümelerin görüntüleri regüler kapalı ve örten olsun.

$$\begin{aligned} g^{-1}(K) \\ \subseteq G \end{aligned}$$

olan Y nin K alt kümesi ve X in G regüler genelleştirilmiş p-açık kümesi için bir A δ -açık kümesi

$$K \subseteq A$$

ve

$$g^{-1}(A) \subseteq G$$

olacak biçimde bulunacağını göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} g^{-1}(K) \\ \subseteq G \end{aligned}$$

olan Y nin K alt kümesi ve X in G regüler genelleştirilmiş p-açık kümesi olsun.

$$(g(G^t))^t$$

alalım.

$$K \subseteq (g(G^t))^t$$

olur.

Üstelik

$$\begin{aligned} g^{-1}((g(G^t))^t) \\ \subseteq G \end{aligned}$$

olacaktır.

Böylece

$$\begin{aligned} g^{-1}(K) \\ \subseteq G \end{aligned}$$

olan Y nin K alt kümesi ve X in G regüler genelleştirilmiş p-açık kümesi için bir A δ -açık kümesi

$$K \subseteq A$$

ve

$$g^{-1}(A) \subseteq G$$

olacak biçimde bulunacağını göstermiş olduk.

TEOREM 8.4. X topolojik uzayından Y topolojik uzayına örten bir g fonksiyonu verilsin.

$$g^{-1}(K) \subseteq G$$

olan Y nin K alt kümesi ve X in G regüler genelleştirilmiş p-açık kümesi için bir A regüler açık kümesi

$$K \subseteq A$$

ve

$$g^{-1}(A) \subseteq G$$

olacak biçimde bulunsun.

Bu durumda regüler genelleştirilmiş p-kapalıların görüntüleri δ - kapalıdır.

İspat:

X topolojik uzayından Y topolojik uzayına örten bir g fonksiyonu verilsin.

$$g^{-1}(K) \subseteq G$$

olan Y nin K alt kümesi ve X in G regüler genelleştirilmiş p-açık kümesi için bir A regüler açık kümesi $K \subseteq A$ ve

$$g^{-1}(A) \subseteq G$$

olacak şekilde bulunduğunda regüler genelleştirilmiş p-kapalıların görüntüleri δ -kapalı olduğunu göstermeliyiz.

X uzayının K alt kümesi regüler genelleştirilmiş p-kapalı olarak verilsin.

$$g^{-1}((g(K))^t)$$

kümesi K^t in alt kümesidir.

$$(g(K))^t \subseteq G$$

olan ve

$$g^{-1}(G)$$

$$\subseteq K^t$$

olan Y uzayının G regüler açık kümesi vardır.

$$g(K) = G^t$$

olur.

Sonuç olarak $g(K)$ δ -kapalıdır.

$$g^{-1}(K) \subseteq G$$

olan Y nin K alt kümesi ve X in G regüler genelleştirilmiş p-açık kümesi için bir A regüler açık kümesi

$$K \subseteq A$$

ve

$$g^{-1}(A) \subseteq G$$

olacak şekilde bulunduğunda regüler genelleştirilmiş p-kapalıların görüntüleri δ -kapalı olduğunu göstermiş olduk.



BÖLÜM 9

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde topolojik uzaylarda genelleştirilmiş kapalılığın ilişkileri üzerinde durulmuştur. Topolojik uzaylarda genelleştirilmiş kapalı kümeler ile hemen hemen p -regüler topolojik uzayların özellikleri araştırılmıştır.

Topolojik uzaylarda genelleştirilmiş p -kapalı kümeler ve regüler genelleştirilmiş kapalı kümeler ile hemen hemen p -regüler topolojik uzaylar üzerine araştırmalar yapılmıştır.

Topolojik uzaylarda dönüşümler ile hemen hemen p -regüler topolojik uzaylar üzerine araştırmalar yapılmıştır.

KAYNAKLAR

- Aurichi L. F., 2011. D-spaces, Separation Axioms and Covering Properties. Houston J. Math., 37 (3): 1035-1042.
- Caldas M., Ekici E., Jafari S., Moshokoa S. P., 2009. On Weakly BR-closed Functions Between Topological Spaces, Mathematical Communications, 14 (1): 67-73.
- Caldas M., Ekici E., Jafari S., Moshokoa S. P., 2008. On (δ, p) -US Spaces, Univ. Bacau Stud. Cerc. St. Ser. Mat., 18: 31-38.
- Carnahan D., 1973. Some Properties Related to Compactness in Topological Spaces, PhD. Thesis, Univ. of Arkansas.
- Dorsett C., 2012. Characterizations of Finite and Countable Sets Using Equivalences of Separation Axioms, Questions Answers Gen. Topology, 30 (1); 79-84.
- Ekici E., 2016. On an Openness Which is Placed Between Topology and Levine's Openness, Jordan Journal of Mathematics and Statistics, 9 (4): 303-313.
- Ekici E. 2012. Generalized Submaximal Spaces, Acta Mathematica Hungarica, 134 (1-2): 132-138.
- Ekici E., Elmalı Ö., 2015. On Decompositions via Generalized Closedness in Ideal Spaces, Filomat, 29 (4): 879-886.
- Ekici E. 2008. On e-open Sets, DP*-sets and DPE*-sets and Decompositions of Continuity, Arabian Journal for Science and Engineering, Volume 33, Number 2A: 269-282.
- Ekici E., Noiri T., 2007. On Separation Axioms and Sequences, Mathematica Moravica, Vol. 11: 39-46.
- Ekici E., 2005. On R Spaces, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 25 (2) : 163-172.
- Ekici E., 2005. On δ -semiopen Sets and a Generalization of Functions, Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica, (3s.) v. 23 (1-2) : 73-84.
- Ekici E., 2005. On γ -US Spaces, Indian Journal of Mathematics, Vol. 47 (2-3) : 131-138.

- Ekici E., 2006. On an Extension for Functions, *Demonstratio Mathematica*, Vol. XXXIX (3) : 657-670.
- Ekici E., 2007. On Separated Sets and Connected Spaces, *Demonstratio Mathematica*, Vol. XL (1) : 209-217.
- Ekici E., 2008. A Note on α -open Sets and e^* -open Sets, *Filomat*, 22 (1) : 89-96.
- Ekici E. 2005. On γ -Urysohn Spaces, *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, 11 (2): 219-226.
- Ekici E., 2008. On Locally Closedness and Continuity, *Chaos, Solitons and Fractals*, 36 : 1244-1255.
- Ekici E., 2011. Generalized Hyperconnectedness, *Acta Mathematica Hungarica*, 133 (1-2) : 140-147.
- Ekici E., 2012. On Weak Structures due to Csaszar, *Acta Mathematica Hungarica*, 134 (4) : 565-570.
- Ekici E., 2007. On γ -normal Spaces, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie*, Tome 50 (98) No. 3: 259-272.
- El-Deep S. N., Hasanein I. A., Mashhour A. S., Noiri T., 1983. On p -regular Spaces, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie*, 27 (75) : 311-315.
- Hung H. H., 2011. Weak Separation Axioms and Weak Covering Properties, *Topology Appl.*, 158 (15): 1997-2004.
- Levine N., 1970. Generalized Closed Sets in Topology, *Renol Circ. Mat. Palermo* (2), 19: 89-96.
- Mashhour A. S., Abd El-Monsef M. E., El-Deep S. N., 1982. On Precontinuous and Weak Precontinuous Mappings, *Proc. Math. Phys. Soc. Egypt*, 53 : 47-53.
- Malghan S. R., Navalagi G. B., 1990. Almost p -regular, p -completely Regular and Almost p -completely Regular Spaces, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie*, 34 (82) : 317-326.
- Noiri T., Maki H., Umehara J., 1998. Generalized Preclosed Functions, *Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A Math.*, 19 : 13-20.

- Noiri T., 1998. Almost p -regular Spaces and Some Functions, Acta Math. Hungar., 79 (3) :207-216.
- Palaniappan N., Rao K. C., 1993. Regular Generalized Closed Sets, Kyungpook Math. J., 33: 211-219.
- Roy B., Ekici E., 2011. On (Λ, μ) -closed Sets in Generalized Topological Spaces, Methods of Functional Analysis and Topology, 17 (2): 174-179.
- Stone M. H., 1937. Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology, TAMS, 41 : 375-381.
- Singal M. K., Arya S. P., 1969. On Almost-regular Spaces, Glasnik Mat., 4 (24) : 89-99.
- Singal M. K., Singal A. R., 1968. Almost-continuous Mappings, Yokohama Math. J., 16: 63-73.
- Velicko N.V., 1968. H-closed Topological Spaces, Amer. Math. Soc. Transl., 78 : 103-118.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Shamsıtdın IBRAGIMOV

Doğum Yeri : TÜRKMENİSTAN

Doğum Tarihi : 19.06.1985

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen-Ed. Fak.
Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen
Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Bildiği Yabancı Diller : Türkmençe, Özbekçe, Rusça, İngilizce ve
Türkçe

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

- a) Yayınlar -SCI -Diğer
- b) Bildiriler -Uluslararası -Ulusal
- c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl :

İLETİŞİM

E-posta Adresi : shamsitdin.ibragimov@mail.ru