



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜLERİ
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Nur Dilek
DURMUŞOĞLU**

**RLW DENKLEMİNİN
HAREKETLİ EN KÜÇÜK KARELER
SIRALAMA YÖNTEMİ İLE
SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OSMANİYE – 2019

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**RLW DENKLEMİNİN HAREKETLİ EN KÜÇÜK KARELER
SIRALAMA YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ**



Nur Dilek DURMUŞOĞLU

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**OSMANİYE
Temmuz-2019**

TEZ ONAYI

RLW DENKLEMİNİN HAREKETLİ EN KÜÇÜK KARELER SIRALAMA YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Nur Dilek DURMUŞOĞLU tarafından Dr. Öğr. Üyesi Ayşe Gül KAPLAN danışmanlığında, Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalı'nda hazırlanan bu çalışma, aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği/çokluğu ile **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ayşe Gül KAPLAN
Matematik Anabilim Dalı, OKÜ

.....

Üye: Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM
Matematik Anabilim Dalı, KSÜ

.....

Üye: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR
Matematik Anabilim Dalı, AIÇÜ

.....

Yukarıdaki jüri kararı Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve/..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Coşkun ÖZALP
Enstitü Müdürü, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

.....

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, bu çalışma sonucunda elde edilmeyen her türlü bilgi ve ifade için ilgili kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını ve bu tezin Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Nur Dilek DURMUŞOĞLU



ÖZET

RLW DENKLEMİNİN HAREKETLİ EN KÜÇÜK KARELER SIRALAMA YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Nur Dilek DURMUŞOĞLU
Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı
Danışman :Dr. Öğr. Üyesi Ayşe Gül KAPLAN

Temmuz 2019, 25 sayfa

Bu tezde Regularized Long Wave (RLW) denkleminin Hareketli En Küçük Kareler Sıralama Yöntemi ile sayısal çözümü elde edilmiştir. Önerilen yöntemin etkinliğini göstermek amacıyla dört test problemi ile çalışılmıştır. Bütün test problemleri için C_1 , C_2 , C_3 korunumları ve analitik çözümü bilinen test problemi için L_2 , L_∞ hata normları hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar literatürdeki bazı sayısal sonuçlarla ve analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Ayrıca bütün test problemleri için elde edilen sayısal çözümlerin grafikleri verilmiştir. Sonuç olarak, RLW denkleminin sayısal çözümünü hesaplamada kullanılan yöntemin yüksek doğruluklu bir yöntem olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Hareketli En Küçük Kareler Yaklaşımı, Sıralama Yöntemi, RLW Denklemi.

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTION OF RLW EQUATION USING MOVING LEAST SQUARES COLLOCATION METHOD

Nur Dilek DURMUŞOĞLU
M.Sc., Department of Mathematics
Supervisor : Assist.Prof.Dr. Ayşe Gül KAPLAN

July 2019, 25 pages

In this thesis, numerical solution of Regularized Long Wave (RLW) equation was obtained with Moving Least Squares Collocation Method. Four test problems were studied to shown the effectiveness of the proposed method. For all test problems C_1 , C_2 , C_3 invariants and for the test problem whose analytical solution L_2 , L_∞ error norms were calculated. The obtained results were compared with some numerical results in the literature and analytical results. In addition, graphs of the obtained numerical solutions for all test problems were given. As a result, it is seen that the method used to calculate the numerical solution of RLW equation is a high accuracy method.

Key Words: Moving Least Squares Approximation, Collocation method, RLW equation.



Değerli Aileme

TEŐEKKÖR

Yüksek Lisans tez çalışmam süresince değerli bilgi ve katkılarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ayşe Gül KAPLAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

TEZ ONAYI

TEZ BİLDİRİMİ

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İTHAF SAYFASI	iii
TEŞEKKÜR	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1 Solitary Dalgalar	2
2.2 Hareketli En Küçük Kareler Sıralama Yöntemi	3
2.2.1 Hareketli En Küçük Kareler Yaklaşımı	3
2.3 Sonlu Fark Yaklaşımları	9
3. RLW DENKLEMİNİN HAREKETLİ EN KÜÇÜK KARELER SIRALAMA YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ	11
3.1 RLW Denkleminin Ayrıştırılması	11
3.2 HEKS Yönteminin RLW Denklemine Uygulanması	12
3.3 Test Problemleri	14
3.3.1 Tek Solitary Dalga Hareketi	15
3.3.2 İki Solitary Dalga Etkileşimi	17
3.3.3 Dalga Oluşumu	18
3.3.4 Ardışık Dalgaların Gelişimi	20
KAYNAKLAR	23
ÖZGEÇMİŞ	25

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1	0.3 genlikli tek solitary dalga hareketi için hata normları ve korunumlar. . . .	16
Çizelge 3.2	0.09 genlikli tek solitary dalga hareketi için hata normları ve korunumlar. . .	16
Çizelge 3.3	İki solitary dalga etkileşimi için korunumlar.	18
Çizelge 3.4	$\mu = 0.04, \mu = 0.01, \mu = 0.001$ değerleri için elde edilen korunumlar. . . .	19
Çizelge 3.5	$d = 2$ için elde edilen korunumlar.	21
Çizelge 3.6	$d = 5$ için elde edilen korunumlar.	21



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1	0.3 genlikli solitary dalga profilleri	16
Şekil 3.2	0.09 genlikli solitary dalga profilleri	17
Şekil 3.3	İki solitary dalga etkileşimi	18
Şekil 3.4	$t = 0$ anındaki çözümün grafiği	19
Şekil 3.5	$\mu = 0.04$ için $t = 25$ anındaki çözümün grafiği	19
Şekil 3.6	$\mu = 0.01$ için $t = 25$ anındaki çözümün grafiği	20
Şekil 3.7	$\mu = 0.001$ için $t = 25$ anındaki çözümün grafiği	20
Şekil 3.8	$d = 2$ için $t = 0$ zamanındaki çözümün grafiği	21
Şekil 3.9	$d = 2$ için $t = 250$ zamanındaki ardışık dalgalar	22
Şekil 3.10	$d = 5$ için $t = 0$ zamanındaki çözümün grafiği	22
Şekil 3.11	$d = 5$ için $t = 250$ zamanındaki ardışık dalgalar	22

SİMGELER VE KISALTMALAR

h	Konum adımı
Δt	Zaman adımı
HEK	Hareketli En Küçük Kareler
HEKS	Hareketli En Küçük Kareler Sıralama
RLW	Regularized Long Wawe



1. GİRİŞ

Bilimin bir çok alanında ortaya çıkan problemleri modellemek için genellikle lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler kullanılır. Bu denklemlerin çoğunun analitik çözümü mevcut değildir ya da analitik çözümünü bulmak çok zordur. Bu nedenle bu tip denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde edebilmek için sayısal yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Bugüne kadar yaygın olarak kullanılan sonlu elemanlar ve sonlu hacim yöntemleri gibi geleneksel sayısal yöntemler incelendiğinde bu yöntemler üzerinde bazı eksiklikler tespit edilmiştir. Son yıllarda yapılan çalışmalar sonucunda modelleme eksiklikleri ve çözüm süreçlerinin zorluğu gibi eksikliklere olumlu cevaplar verebilen ağsız yöntemler geliştirilmiştir [1]. Hareketli En Küçük Kareler Sıralama (HEKS) yöntemi de bir ağsız yöntemdir.

İlk olarak Lancaster ve Salkauskas [2] tarafından 1981 yılında yüzey konstrüksiyonu amacıyla kullanılan Hareketli En Küçük Kareler (HEK) yaklaşımı, HEKS yönteminin temelini oluşturmaktadır. HEKS yönteminde HEK yaklaşımı ile bulunan şekil fonksiyonları kullanılmıştır. Günümüzde şekil fonksiyonlarının oluşturulmasında sıklıkla kullanılan HEK yaklaşımı, ilk olarak 1992 yılında Nayroles ve ark. [3] tarafından Difüze Eleman yönteminde şekil fonksiyonlarını elde etmek için kullanılmıştır.

Bu tezde RLW denkleminin HEKS yöntemiyle sayısal çözümü elde edilmiştir. Literatürde bir çok yöntem kullanılarak RLW denkleminin sayısal çözümü araştırılmıştır. Bu yöntemlerden bazıları şunlardır: Lineerleştirilmiş kapalı sonlu farklar yöntemi [4], yüksek sıralı kompakt fark yöntemi [5], kuadratik B-spline sonlu elemanlar kullanılarak parçalı Galerkin yöntemi [6], kuartik B-spline kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemi [7], H1-Galerkin karma sonlu elemanlar yöntemi [8], en küçük kareler kuadratik B-spline sonlu eleman yöntemi [9], en küçük kareler karma sonlu elemanlar yöntemi [10], kuadratik B-spline kullanılarak sıralama yöntemi [11], kübik B-spline sonlu elemanlar kullanılarak sıralama yöntemi [12], kuintik B-spline Galerkin sonlu eleman yöntemi [13], B-spline sıralama yöntemleri [14], lineer sonlu elemanlar kullanılarak Galerkin yöntemi [15], ekstrapolasyon tekniği ile Galerkin yöntemi [16], kübik B-spline sıralama yöntemi [17].

Bu tez; birincisi giriş bölümü olmak üzere üç bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde solitary dalgalar hakkında bilgiler verilip, sonrasında HEKS yöntemi, HEK yaklaşımı ve sonlu fark yaklaşımları anlatılmıştır. Üçüncü bölümde RLW Denkleminin HEKS Yöntemi ile sayısal çözümleri elde edilmiştir. Yöntemin etkinliğini göstermek için dört test problemi ile çalışılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Solitary Dalgalar

Dalga genel olarak belirli bir sinyali ortamın bir noktasından başka bir noktasına belirli bir hızla aktaran bir hareket olarak tanımlanabilir. Bir fizik terimi olarak dalga, maddede ve uzayda yayılan, enerjinin taşınmasına yol açan titreşimdir.

Soliton dalgalar, sahip oldukları hızı ve şekli koruyarak yayılan ve herhangi bir etkileşim anından sonra da bu özellikleri korumaya devam eden dalgalardır [18]. Şeklini ve hızını korumasından dolayı birçok bilim adamı solitonlar üzerine çalışmalar yapmış ve Soliton teorisi doğmuştur. Bu teori bilimin çeşitli alanlarında birçok uygulamaya sahiptir. Solitonlar günümüzde elektronik ve haberleşme alanlarında sıklıkla kullanılmaktadır. Çünkü bu alanlarda, herhangi bir sinyal iletiminde sinyalin en az kayıpla ve yeterli büyüklükte hedefe ulaşabilmesi önemlidir. Solitonlar, genişliklerini ve hızlarını değiştirmeden sabit tutabildiklerinden taşınan sinyalde herhangi bir kayıp olmaksızın, büyük miktardaki bilgi binlerce kilometre boyunca taşınabilmektedir.

Solitary dalgalar ise şekil ve hızları değişmeksizin yayılan dalgalardır. Solitary dalgalar etkileşim sonrası özelliklerini korumaya çalışan dalgalar oldukları için solitonlara benzeyen dalgalar olarak tanımlanmaktadır. Bu özelliklerinden dolayı Solitonumsu dalgalar olarakta adlandırılırlar. Solitary dalgaların belgeli ilk gözlemleri 1834'te İskoç mühendis John Scott Russell tarafından yapılmıştır [19]. Russell bir çift atla birlikte dar bir kanal boyunca sürüklenen bir botu izlemeye başladı. Russell at sırtında botu takip etti ve şaşırtıcı bir olayı gözlemledi: Bot aniden durduğunda bir eğri dalga bottan ayrılıyor ve oldukça iyi bir hızla, tek geniş bir yükselti şeklinde ilerliyordu. Solitary dalga, kanal boyunca şeklinde ve hızında bir değişme olmaksızın ilerledi, bilim adamı at sırtında dalgayı takibe devam etti, fakat saatte yaklaşık 8-9 mil hızla ilerleyen dalgayı 2 mil sonra kaybetti [20]. İskoç bilim adamı, oldukça önemli bir doğa olayını gözlemlediğine inanmış ve Dalganın aktarımı (The wave of translation) olarak isimlendirdiği çalışmaya devam edebilmek için bahçesinde deneysel bir su havuzu inşa ettirmiştir [21]. Bu havuzda su tankları oluşturmuş ve solitary dalgaları elde edebilmek için tankların bir ucuna ağırlık bırakarak deneyler yapmıştır. Bu deneyler sonucunda solitary dalgaların özellikleri hakkında aşağıdaki önemli bilgilere ulaşmıştır [22]:

i) Solitary dalgalar $hsech^2(k(x - vt))$ şeklindedir.

ii) Solitary dalgalar normal dalgalardan farklı olarak asla birleşmezler. Bu sebeple büyük

genlikli solitary dalga ile küçük genlikli solitary dalga etkileşime girdikten sonra, bu solitary dalgalar birbirinden tamamen ayrılarak şekillerinde herhangi bir değişim olmadan ilerlerler. Normal dalgalar ise dikleşerek sönerler ya da düzleşmeye başlarlar.

- iii) Bir solitary dalga'nın hızı $v = \sqrt{g(d+h)}$ dır. Burada g yerçekimi ivmesi, d kanalın derinliği, h ise solitary dalga'nın yüksekliğidir. Bir solitary dalga'nın hızı genliği ile doğru orantılıdır. Bundan dolayı küçük genlikli bir solitary dalga, büyük genlikli bir solitary dalgaya göre daha yavaş ilerler.

O yıllarda Russel'in sonuçları deneysel olarak kalmıştır. Sonrasında bir diferansiyel denklemin çözümü olan solitary dalga problemleri yıllarca araştırılmıştır. 1895'te Korteweg-deVries (KdV) denklemi olarak bilinen kısmi diferansiyel denklemin çözümünün solitary dalgalar olduğu Korteweg ve de Vries tarafından ispatlanmıştır [23].

Bu gelişmelerden sonra solitary dalgalar pek çok alanda kullanılmıştır. Örneğin solitary dalgalar; hidrodinamik alanında, dalgaların gemi ve deniz inşaatlarına etkilerinin saptanmasında, sualtı akustik çalışmalarında, elektromanyetik dalgaların deniz yüzeyinden yansımada, kıyı hattını tehdit eden tsunamilerin modellenmesinde ve erken uyarı çalışmalarında, biyoloji alanında sinir sistemindeki uyarı iletimini açıklamada, plazma fiziğinde ise ışığın iletiminde kullanılmıştır.

2.2 Hareketli En Küçük Kareler Sıralama Yöntemi

Sıralama yöntemindeki ana fikir, bilinmeyen fonksiyona değerleri sonrasında bulunacak olan katsayıların ve şekil fonksiyonlarının cebirsel birleşimi olarak yaklaşılmıştır. Bu çalışmada şekil fonksiyonları HEK yaklaşımı ile elde edilmiştir.

2.2.1 Hareketli En Küçük Kareler Yaklaşımı

$u_i = u(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ noktaları $u(\mathbf{x})$ fonksiyonunun (x_i, u_i) noktalarındaki gerçek değerleri, $u^h(\mathbf{x})$ fonksiyonu da $u(\mathbf{x})$ fonksiyonunun hareketli en küçük kareler yaklaşımı olmak üzere; $u^h(\mathbf{x})$ fonksiyonu

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu eşitlikte

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = (p_0(\mathbf{x}) \quad p_1(\mathbf{x}) \quad \dots \quad p_m(\mathbf{x})) \quad (2.2)$$

ve

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) = (a_0(\mathbf{x}) \quad a_1(\mathbf{x}) \quad \dots \quad a_m(\mathbf{x})) \quad (2.3)$$

şeklinde olup $p_j(\mathbf{x}), j = 0, 1, \dots, m$ taban fonksiyonları, $a_j(\mathbf{x}), j = 0, 1, \dots, m$ ise taban fonksiyonlarının katsayılarını içeren bir vektördür.

Bir boyutlu problemler için hareketli en küçük kareler yaklaşımı

$$u^h(\mathbf{x}) = a_0 \quad \text{Sabit Yaklaşım}$$

$$u^h(\mathbf{x}) = a_0 + a_1x \quad \text{Lineer Yaklaşım}$$

$$u^h(\mathbf{x}) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad \text{Kuadratik Yaklaşım}$$

$$u^h(\mathbf{x}) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad \text{Kübik Yaklaşım} \quad (2.4)$$

şeklinde olabilir. Hareketli en küçük kareler yaklaşımında daha yüksek dereceden polinom yaklaşımları da kullanılabilir.

(2.1) denkleminde amaç u_i gerçek değerleri ile $u^h(x_i)$ yaklaşık değerleri arasındaki farkı minimum yapan $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ katsayı vektörünü bulmaktır. Bu ise ağırlıklı rezidü denklemi olan $J(\mathbf{x})$ in minimize edilmesiyle bulunur. Ağırlıklı rezidü denklemi

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \omega_i(\mathbf{x}) [\mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_i]^2 \quad (2.5)$$

şeklindedir. Bu eşitlikte $i = 1, 2, \dots, N$ için $\omega_i(\mathbf{x})$ ağırlık fonksiyonları olup rezidü denkleminin ağırlıklandırılması işleminde kullanılmaktadır. Her düğüm etrafında bir destek oluşturan ağırlık fonksiyonları destek bölgesi içinde $\omega_i(\mathbf{x}) > 0$, destek bölgesi dışında $\omega_i(\mathbf{x}) = 0$ olacak şekilde seçilmelidir. Bu destek bölgelerinin kesişimi düğümler arasındaki bağlantıyı sağlar. Ağırlıklı rezidü denklemi en açık hali ile aşağıda verilmiştir.

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \omega_i(\mathbf{x}) [\mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_i]^2$$

$$J(\mathbf{x}) = \omega_1(\mathbf{x}) [\mathbf{p}^T(x_1) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_1]^2 + \omega_2(\mathbf{x}) [\mathbf{p}^T(x_2) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_2]^2 \\ + \dots + \omega_N(\mathbf{x}) [\mathbf{p}^T(x_N) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_N]^2$$

$$J(\mathbf{x}) = \omega_1(\mathbf{x}) \{ [p_0(x_1) p_1(x_1) \dots p_m(x_1)] [a_0(\mathbf{x}) a_1(\mathbf{x}) \dots a_m(\mathbf{x})]^T - u_1 \}^2 \\ + \omega_2(\mathbf{x}) \{ [p_0(x_2) p_1(x_2) \dots p_m(x_2)] [a_0(\mathbf{x}) a_1(\mathbf{x}) \dots a_m(\mathbf{x})]^T - u_2 \}^2 \\ + \dots + \omega_N(\mathbf{x}) \{ [p_0(x_N) p_1(x_N) \dots p_m(x_N)] [a_0(\mathbf{x}) a_1(\mathbf{x}) \dots a_m(\mathbf{x})]^T - u_N \}^2$$

$$J(\mathbf{x}) = \omega_1(\mathbf{x}) [p_0(x_1) a_0(\mathbf{x}) + p_1(x_1) a_1(\mathbf{x}) + \dots + p_m(x_1) a_m(\mathbf{x}) - u_1]^2 \\ + \omega_2(\mathbf{x}) [p_0(x_2) a_0(\mathbf{x}) + p_1(x_2) a_1(\mathbf{x}) + \dots + p_m(x_2) a_m(\mathbf{x}) - u_2]^2 \\ + \dots + \omega_N(\mathbf{x}) [p_0(x_N) a_0(\mathbf{x}) + p_1(x_N) a_1(\mathbf{x}) + \dots + p_m(x_N) a_m(\mathbf{x}) - u_N]^2 \quad (2.6)$$

(2.3) denkleminde bilinmeyen $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ katsayı vektörünü bulmak için $J(\mathbf{x})$ in sırasıyla $a_0(\mathbf{x}), a_1(\mathbf{x}), \dots, a_m(\mathbf{x})$ ' e göre kısmi türevleri sıfıra eşitlenir. O halde

$$c_1 = p_0(x_1) a_0(\mathbf{x}) + p_1(x_1) a_1(\mathbf{x}) + \dots + p_m(x_1) a_m(\mathbf{x}) - u_1$$

$$c_2 = p_0(x_2) a_0(\mathbf{x}) + p_1(x_2) a_1(\mathbf{x}) + \dots + p_m(x_2) a_m(\mathbf{x}) - u_2$$

$\vdots$

$$c_N = p_0(x_N) a_0(\mathbf{x}) + p_1(x_N) a_1(\mathbf{x}) + \dots + p_m(x_N) a_m(\mathbf{x}) - u_N \quad (2.7)$$

olmak üzere

$$\omega_1(\mathbf{x}) c_1 p_0(x_1) + \omega_2(\mathbf{x}) c_2 p_0(x_2) + \dots + \omega_N(\mathbf{x}) c_N p_0(x_N) = 0$$

$$\omega_1(\mathbf{x}) c_1 p_1(x_1) + \omega_2(\mathbf{x}) c_2 p_1(x_2) + \dots + \omega_N(\mathbf{x}) c_N p_1(x_N) = 0$$

$\vdots$

$$\omega_1(\mathbf{x}) c_1 p_m(x_1) + \omega_2(\mathbf{x}) c_2 p_m(x_2) + \dots + \omega_N(\mathbf{x}) c_N p_m(x_N) = 0 \quad (2.8)$$

sistemi elde edilir.

Bu sistem matris formunda

$$\begin{bmatrix} \omega_1(\mathbf{x})p_0(x_1) & \omega_2(\mathbf{x})p_0(x_2) & \cdots & \omega_N(\mathbf{x})p_0(x_N) \\ \omega_1(\mathbf{x})p_1(x_1) & \omega_2(\mathbf{x})p_1(x_2) & \cdots & \omega_N(\mathbf{x})p_1(x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1(\mathbf{x})p_m(x_1) & \omega_2(\mathbf{x})p_m(x_2) & \cdots & \omega_N(\mathbf{x})p_m(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

şeklinde yazılır. (2.7) deki eşitlikler matris formunda yazılıp düzenlenirse

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0(x_1) & p_1(x_1) & \cdots & p_m(x_1) \\ p_0(x_2) & p_1(x_2) & \cdots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_0(x_N) & p_1(x_N) & \cdots & p_m(x_N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0(\mathbf{x}) \\ a_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ a_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

şeklinde olur. (2.10) eşitliği (2.9) da yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \omega_1(\mathbf{x})p_0(x_1) & \omega_2(\mathbf{x})p_0(x_2) & \cdots & \omega_N(\mathbf{x})p_0(x_N) \\ \omega_1(\mathbf{x})p_1(x_1) & \omega_2(\mathbf{x})p_1(x_2) & \cdots & \omega_N(\mathbf{x})p_1(x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1(\mathbf{x})p_m(x_1) & \omega_2(\mathbf{x})p_m(x_2) & \cdots & \omega_N(\mathbf{x})p_m(x_N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0(x_1) & p_1(x_1) & \cdots & p_m(x_1) \\ p_0(x_2) & p_1(x_2) & \cdots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_0(x_N) & p_1(x_N) & \cdots & p_m(x_N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0(\mathbf{x}) \\ a_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ a_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1(\mathbf{x})p_0(x_1) & \omega_2(\mathbf{x})p_0(x_2) & \cdots & \omega_N(\mathbf{x})p_0(x_N) \\ \omega_1(\mathbf{x})p_1(x_1) & \omega_2(\mathbf{x})p_1(x_2) & \cdots & \omega_N(\mathbf{x})p_1(x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1(\mathbf{x})p_m(x_1) & \omega_2(\mathbf{x})p_m(x_2) & \cdots & \omega_N(\mathbf{x})p_m(x_N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

elde edilir. (2.11) düzenlenerek

$$\begin{bmatrix} p_0(x_1) & p_0(x_2) & \cdots & p_0(x_N) \\ p_1(x_1) & p_1(x_2) & \cdots & p_1(x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(x_1) & p_m(x_2) & \cdots & p_m(x_N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2(\mathbf{x}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} p_0(x_1) & p_1(x_1) & \cdots & p_m(x_1) \\ p_0(x_2) & p_1(x_2) & \cdots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_0(x_N) & p_1(x_N) & \cdots & p_m(x_N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0(\mathbf{x}) \\ a_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ a_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} p_0(x_1) & p_0(x_2) & \cdots & p_0(x_N) \\ p_1(x_1) & p_1(x_2) & \cdots & p_1(x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(x_1) & p_m(x_2) & \cdots & p_m(x_N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2(\mathbf{x}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} p_0(x_1) & p_0(x_2) & \cdots & p_0(x_N) \\ p_1(x_1) & p_1(x_2) & \cdots & p_1(x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(x_1) & p_m(x_2) & \cdots & p_m(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \omega_1(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2(\mathbf{x}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_0(x_1) & p_1(x_1) & \cdots & p_m(x_1) \\ p_0(x_2) & p_1(x_2) & \cdots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_0(x_N) & p_1(x_N) & \cdots & p_m(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_0(\mathbf{x}) \\ a_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ a_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

olmak üzere (2.13)

$$\mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{u} \quad (2.15)$$

şeklinde yazılabilir. (2.15) de

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \quad (2.16)$$

denirse

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (2.17)$$

elde edilir. Buradan

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = [\mathbf{A}(\mathbf{x})]^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (2.18)$$

bulunur. O halde (2.18), (2.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})[\mathbf{A}(\mathbf{x})]^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (2.19)$$

elde edilir. (2.19) eşitliğinde

$$\Phi^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})[\mathbf{A}(\mathbf{x})]^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (2.20)$$

denirse

$$u^h(\mathbf{x}) = \Phi^T(\mathbf{x})\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x})u_i \quad (2.21)$$

bulunur. (2.21) denkleminde

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x})[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})]_{ji} \quad (2.22)$$

şeklindedir. Yukarıda $\phi_i(\mathbf{x})$ ler şekil fonksiyonlarıdır. Şekil fonksiyonlarının oluşturulmasında ağırlık fonksiyonunun seçilimi önemli bir yere sahiptir. En çok kullanılan ağırlık fonksiyonlarından biri Gaussian ağırlık fonksiyonu olup bu çalışmadaki tüm test problemlerinde aşağıdaki şekilde verilen bu fonksiyon kullanılmıştır [24].

$$\omega_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{e^{-\left(\frac{d_i}{c_i}\right)^2} - e^{-\left(\frac{r_i}{c_i}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{r_i}{c_i}\right)^2}}, & 0 \leq d_i \leq r_i \\ 0, & d_i > r_i \end{cases} \quad (2.23)$$

Burada r_i parametresi; $d_i = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$ $\mathbf{x}_i$, düğüm noktası ile incelenen $\mathbf{x}$ noktası arasındaki

mesafe, r_ω de etkinlik yarıçapı olmak üzere

$$r_i = \frac{d_i}{r_\omega} \quad (2.24)$$

dir.

2.3 Sonlu Fark Yaklaşımları

Taylor serisi kullanılarak iki değişkenli fonksiyonlar için ileri, geri ve merkezi sonlu fark yaklaşımları elde edilir. N, M pozitif tamsayılar,

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad h = \frac{b-a}{N}, \quad k = \frac{d-c}{M} \quad (2.25)$$

ve bölüntü noktaları

$$x_i = a + (i-1)h, \quad i = \overline{1, N} \\ y_j = c + (j-1)k, \quad j = \overline{1, M} \quad (2.26)$$

olmak üzere $U(x, y)$ fonksiyonu ve kısmi türevleri tanım bölgesi üzerinde sürekli olsun. Bu durumda $U(x_i + h, y_j)$, $U(x_i - h, y_j)$, $U(x_i, y_j + k)$ ve $U(x_i, y_j - k)$ ifadelerinin (x_i, y_j) noktasındaki Taylor seri açılımları

$$U(x_i + h, y_j) = U(x_i, y_j) + hU_x(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!}U_{xx}(x_i, y_j) + \frac{h^3}{3!}U_{xxx}(x_i, y_j) + \dots \quad (2.27)$$

$$U(x_i - h, y_j) = U(x_i, y_j) - hU_x(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!}U_{xx}(x_i, y_j) - \frac{h^3}{3!}U_{xxx}(x_i, y_j) + \dots \quad (2.28)$$

$$U(x_i, y_j + k) = U(x_i, y_j) + kU_y(x_i, y_j) + \frac{k^2}{2!}U_{yy}(x_i, y_j) + \frac{k^3}{3!}U_{yyy}(x_i, y_j) + \dots \quad (2.29)$$

$$U(x_i, y_j - k) = U(x_i, y_j) - kU_y(x_i, y_j) + \frac{k^2}{2!}U_{yy}(x_i, y_j) - \frac{k^3}{3!}U_{yyy}(x_i, y_j) + \dots \quad (2.30)$$

şeklinde yazılır. Buradan (2.27)-(2.28) eşitliklerinde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U_x(x_i, y_j) = \frac{U(x_i + h, y_j) - U(x_i, y_j)}{h} - \frac{h}{2!}U_{xx}(x_i, y_j) - \frac{h^2}{3!}U_{xxx}(x_i, y_j) + \dots \quad (2.31)$$

$$U_x(x_i, y_j) = \frac{U(x_i, y_j) - U(x_i - h, y_j)}{h} + \frac{h}{2!}U_{xx}(x_i, y_j) - \frac{h^2}{3!}U_{xxx}(x_i, y_j) + \dots \quad (2.32)$$

eşitlikleri elde edilir.

O halde $U(x_i, y_j)$ ifadesinin (x_i, y_j) noktasındaki x değişkenine göre birinci türevi

$$U_x(x_i, y_j) = \frac{U(x_i, y_j) - U(x_i - h, y_j)}{h} + O(h) = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{h} + O(h) \quad (2.33)$$

veya

$$U_x(x_i, y_j) = \frac{U(x_i + h, y_j) - U(x_i, y_j)}{h} + O(h) = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h} + O(h) \quad (2.34)$$

formunda yaklaşık olarak bulunur. Bu yaklaşımlara sırasıyla geri ve ileri sonlu fark yaklaşımları denir. Bu yaklaşımlarda seri belli bir yerden kesilmiştir. Bu kesme işlemi sebebiyle bir hata oluşur. Bu hatalar, serinin kesildikten sonraki ilk terimine göre değerlendirilir ve $O(\cdot)$ şeklinde yazılır. (2.28) eşitliği (2.27) eşitliğinden çıkarılıp düzenlenirse

$$U_x(x_i, y_j) = \frac{U(x_i + h, y_j) - U(x_i - h, y_j)}{2h} + O(h^2) = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h} + O(h^2) \quad (2.35)$$

şeklinde x değişkenine göre birinci türev için merkezi sonlu fark yaklaşımı bulunur. Benzer şekilde (2.29)-(2.30) eşitlikleri kullanılarak $U(x_i, y_j)$ ifadesinin (x_i, y_j) noktasındaki y değişkenine göre birinci türevi için ileri, geri ve merkezi sonlu fark yaklaşımları sırasıyla

$$\begin{aligned} U_y(x_i, y_j) &= \frac{U(x_i, y_j + k) - U(x_i, y_j)}{k} + O(k) = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} + O(k) \\ U_y(x_i, y_j) &= \frac{U(x_i, y_j) - U(x_i, y_j - k)}{k} + O(k) = \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{k} + O(k) \\ U_y(x_i, y_j) &= \frac{U(x_i, y_j + k) - U(x_i, y_j - k)}{2k} + O(k^2) = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2k} + O(k^2) \end{aligned} \quad (2.36)$$

formunda bulunur. $U(x_i, y_j)$ ifadesinin (x_i, y_j) noktasındaki x ve y değişkenlerine göre ikinci ve üçüncü türevi için sonlu fark yaklaşımları da benzer şekilde elde edilir.

3. RLW DENKLEMİNİN HAREKETLİ EN KÜÇÜK KARELER SIRALAMA YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Regularized Long Wave (RLW) denklemi, ardışık dalgaların gelişimini modellemek için önerilmiştir [1]. Lineer olmayan RLW denklemi aşağıdaki formdadır:

$$U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt} = 0. \quad (3.1)$$

Bu denklemdeki ε ve μ reel sabitler, t ve x alt indisleri ise sırasıyla zamana ve konuma göre türevleri göstermektedir.

Başlangıç ve sınır koşulları ise

$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.2)$$

$$U(a, t) = \alpha, \quad U(b, t) = \beta, \quad t > 0 \quad (3.3)$$

şeklinde verilmiştir.

3.1 RLW Denkleminin Ayırıştırılması

Bu çalışmada RLW denklemini ayırıştırmak için zamana göre türevde ileri sonlu fark yaklaşımı, kalan terimlerde Crank-Nicolson formülü kullanılmıştır [25]. Bu formülde şimdiki ve bir sonraki zaman adımındaki değerlerin ortalamaları alınmıştır. O halde RLW denklemini ayırıştırmak için

$$\begin{aligned} U_t &= \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \\ U_x &= \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2} \\ U U_x &= \frac{(U U_x)^{n+1} + (U U_x)^n}{2} \\ U_{xxt} &= \frac{U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (3.4)$$

eşitlikleri kullanılmıştır. Bu eşitlikler RLW denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2} + \varepsilon \frac{(U U_x)^{n+1} + (U U_x)^n}{2} - \mu \frac{U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n}{\Delta t} = 0 \quad (3.5)$$

denklemini elde edilir. Burada $U^n = U(x, t^n)$ ve Δt de zaman adımı olup $\Delta t = t^n - t^{n-1}$ şeklindedir.

(3.5) denkleminde lineer olmayan $(UU_x)^{n+1}$ terimini lineerleştirmek için Rubin ve Graves [26] tarafından verilen aşağıdaki lineerleştirme metodu kullanılırsa

$$(UU_x)^{n+1} = U^{n+1}U_x^n + U^nU_x^{n+1} - U^nU_x^n \quad (3.6)$$

(3.5) nolu denklem

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2} + \varepsilon \frac{U^{n+1}U_x^n + U^nU_x^{n+1}}{2} - \mu \frac{U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n}{\Delta t} = 0 \quad (3.7)$$

şeklinde olur. (3.7) denklemi düzenlenirse

$$U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}U_x^{n+1} + \varepsilon \frac{\Delta t}{2}(U^{n+1}U_x^n + U^nU_x^{n+1}) - \mu U_{xx}^{n+1} = U^n - \frac{\Delta t}{2}U_x^n - \mu U_{xx}^n \quad (3.8)$$

ayrıştırılmış denklemi elde edilir.

3.2 HEKS Yönteminin RLW Denklemine Uygulanması

U fonksiyonunun n . ve $(n+1)$. adımındaki yaklaşık çözümlerine HEKS yönteminin uygulanmasıyla

$$U^n = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) \lambda_i^n, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.9)$$

$$U^{n+1} = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) \lambda_i^{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.10)$$

şeklinde yaklaşımları yapılır. Bu yaklaşımların birinci ve ikinci türevleri de

$$U_x^n = \sum_{i=1}^N \phi_i'(\mathbf{x}) \lambda_i^n \quad U_{xx}^N = \sum_{i=1}^N \phi_i''(\mathbf{x}) \lambda_i^n \quad (3.11)$$

şeklindedir. (3.9), (3.10) ve (3.11) de yapılan yaklaşımlar (3.8) denkleminde yerine yazılırsa bu denklem

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) \lambda_i^{n+1} + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) \lambda_i^{n+1} \cdot \sum_{i=1}^N \phi_i'(\mathbf{x}_k) \lambda_i^n + \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) \lambda_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \phi_i'(\mathbf{x}_k) \lambda_i^{n+1} \right) \\ & + \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^N \phi_i'(\mathbf{x}_k) \lambda_i^{n+1} - \mu \sum_{i=1}^N \phi_i''(\mathbf{x}_k) \lambda_i^{n+1} = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) \lambda_i^n - \\ & \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^N \phi_i'(\mathbf{x}_k) \lambda_i^n - \mu \sum_{i=1}^N \phi_i''(\mathbf{x}_k) \lambda_i^n, \quad k = 2, \dots, N-1 \\ & \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) \lambda_i^n = \alpha, \quad k = 1 \\ & \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) \lambda_i^n = \beta, \quad k = N \end{aligned} \quad (3.12)$$

şekline gelir. Burada $\phi_i(\mathbf{x})$ şekil fonksiyonları yerine (2.22) denkleminde verilen eşitlik yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \lambda_i^{n+1} \\
& + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \left[\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \lambda_i^{n+1} \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)' u_i^n \right] \\
& + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \left[\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \lambda_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)' \lambda_i^{n+1} \right] \\
& + \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)' \lambda_i^{n+1} - \mu \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)'' \lambda_i^{n+1} \\
& = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \lambda_i^n - \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)' \lambda_i^n \\
& - \mu \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)'' \lambda_i^n, \quad k = 2, \dots, N-1 \\
& \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \lambda_i^{n+1} = \alpha, \quad k = 1 \\
& \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \lambda_i^{n+1} = \beta, \quad k = N
\end{aligned} \tag{3.13}$$

şeklinde bir sistem elde edilir. Bu sistem gösterim kolaylığı açısından

$$\begin{aligned}
G_0 &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \\
G_1 &= \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \left[\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)' \lambda_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \right] \\
G_2 &= \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \left[\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \lambda_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)' \right] \\
G_3 &= \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)' \\
G_4 &= -\mu \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)''
\end{aligned}$$

olmak üzere $i = 1, 2, \dots, N$ için

$$\begin{aligned}
G_0 \lambda_i^{n+1} &= \alpha, \quad k = 1 \\
(G_0 + G_1 + G_2 + G_3 + G_4) \lambda_i^{n+1} &= (G_0 - G_3 + G_4) \lambda_i^n, \quad k = 2, \dots, N-1 \\
G_0 \lambda_i^{n+1} &= \beta, \quad k = N
\end{aligned} \tag{3.14}$$

şeklinde düzenlenebilir.

Bu sistem çözülerek hesaplanan λ_i^{n+1} ler (2.21) denkleminde yerine yazılırsa $(n + 1)$. adımdaki U sayısal çözümü elde edilir.

RLW denklemleri için HEKS yöntemi ile elde edilen sayısal sonuçlar aşağıdaki program algoritması ile bulunmuştur.

Algoritma

Algoritma aşağıdaki sırayla çalışır:

1. $[a, b]$ tanım bölgesinden N tane düğüm belirlenir.
2. m, r_i, c_i ve Δt parametreleri belirlenir.
3. $n := 0$ alınır.
4. (3.2) başlangıç koşulu kullanılarak (3.9) denkleminde λ_i^n bilinmeyenleri ve U^n başlangıç çözümü bulunur.
5. $n := n + 1$ alınır.
6. (3.14) sistemi kullanılarak λ_i^{n+1} değerleri hesaplanır.
7. (3.10) denklemleri kullanılarak U^{n+1} yaklaşık çözümü elde edilir.
8. $n\Delta t = t$ olana kadar iterasyona devam edilir.

3.3 Test Problemleri

Bu bölümde, HEKS yönteminin etkinliğini göstermek amacıyla aşağıda verilen test problemleri kullanılmıştır. Bütün test problemleri için C_1, C_2, C_3 korunum kanunları hesaplanmıştır. Ayrıca analitik sonucu bilinen birinci test problemi için L_∞ ve L_2 hata normlarının değerleri bulunmuştur. Elde edilen sonuçlar literatürdeki bazı sonuçlarla karşılaştırılmıştır. RLW denklemleri aşağıdaki şekilde verilen üç korunum kanununa sahiptir [27].

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} U dx, \quad C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (U^2 + \mu U_x^2) dx, \quad C_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (U^3 + 3U^2) dx \quad (3.15)$$

Burada C_1 kütle, C_2 momentum, C_3 enerji korunumuna karşılık gelir.

L_2 ve L_∞ hata normları

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{i=1}^N |U_j^{analitik} - U_j^{sayisal}|^2}, \quad L_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} |U_j^{analitik} - U_j^{sayisal}| \quad (3.16)$$

şeklinde verilen formüllerle hesaplanmıştır.

3.3.1 Tek Solitary Dalga Hareketi

RLW denkleminin tek solitary dalga çözümü; k dalğanın genişliği, v dalğanın hızı, $3d$ dalğanın genliği olmak üzere

$$U(x,t) = 3d \operatorname{sech}^2(k[x - x_0 - vt]), \quad k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon d}{\mu(1 + \epsilon d)}}, \quad v = 1 + \epsilon d \quad (3.17)$$

şeklinde [28]. Bu çözüm; başlangıçta tepe noktası x_0 üzerinde bulunan sağa doğru v sabit hızıyla hareket eden $3d$ genlikli tek solitary dalgayı ifade eder. Bu test probleminde $U(-40,t) = 0$, $U(60,t) = 0$ sınır koşulları ile $U(x,0) = 3d \operatorname{sech}^2(k[x - x_0])$ başlangıç koşulu kullanılmıştır. $\mu = 1$, $\epsilon = 1$ ve $x_0 = 0$ parametreleri seçilerek program $t=20$ zamanına kadar çalıştırılmıştır.

C_1 , C_2 , C_3 korunumlarının analitik değerleri

$$C_1 = \frac{6d}{k}, \quad C_2 = \frac{12d^2}{k} + \frac{48kd^2\mu}{5}, \quad C_3 = \frac{36d^2}{k} + \frac{144d^3}{5k} \quad (3.18)$$

şeklinde hesaplanmıştır. Bu eşitliklerden $d = 0.1$ için

$$C_1 = 3.979949, \quad C_2 = 0.8104624, \quad C_3 = 2.579007 \quad (3.19)$$

$d = 0.03$ için

$$C_1 = 2.109407, \quad C_2 = 0.1273017, \quad C_3 = 0.388805 \quad (3.20)$$

değerleri bulunmuştur.

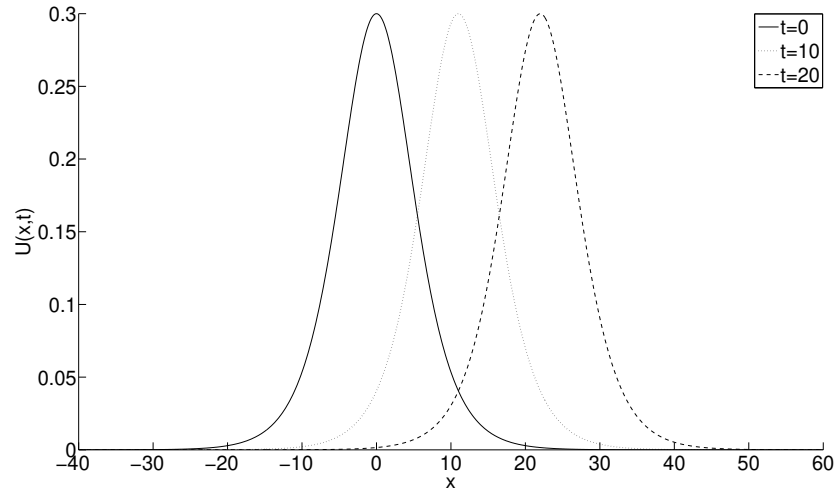
Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2 de $d = 0.1$ ve $d = 0.03$ için $t = 20$ zamanındaki C_1 , C_2 , C_3 korunumları ile L_2 , L_∞ hata normları listelenmiş ve elde edilen sonuçlar [13], [15], [16], [17] ve [29] çalışmalarındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Şekil 3.1 ve Şekil 3.2 de ise sırasıyla 0.3 ve 0.09 genlikli dalgaların $t = 0$, $t = 10$ ve $t = 20$ zamanlarında elde edilen çözümlerinin grafikleri verilmiştir.

Çizelge 3.1 0.3 genlikli tek solitary dalga hareketi için hata normları ve korunumlar.

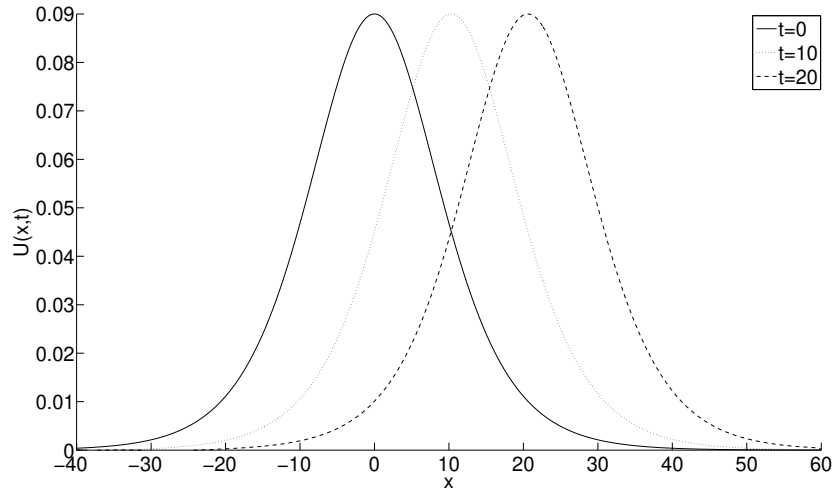
Yöntem	h	Δt	C_1	C_2	C_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
HEKS	0.125	0.1	3.979883	0.8104625	2.579007	0.20717	0.07815
[13]	0.125	0.1	3.9798830	0.8104616	2.5790043	0.35489	0.12848
[15]	0.125	0.1	3.98206	0.811164	2.58133	0.511	0.198
[16]	0.125	0.1	3.97972	0.81026	2.57873	0.266856	0.091465
[17]	0.125	0.1	3.979883	0.81027618	2.57839258	0.30	0.116
[29]	0.125	0.1	3.980016	0.8104624	2.579006	0.2205	0.08448

Çizelge 3.2 0.09 genlikli tek solitary dalga hareketi için hata normları ve korunumlar.

Yöntem	h	Δt	C_1	C_2	C_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
HEKS	0.125	0.1	2.104600	0.1273015	0.388802	0.5658	0.4315
[13]	0.125	0.1	2.10457	0.12730	0.38880	0.566	0.207
[15]	0.125	0.1	2.10906	0.127305	0.388815	0.535	0.198
[16]	0.125	0.1	2.10902	0.12730	0.38880	0.559402	0.439145
[17]	0.125	0.1	2.104584	0.12729366	0.3887776	0.57	0.432
[29]	0.125	0.1	2.112292	0.1273037	0.388812	1.2735	0.3647



Şekil 3.1 0.3 genlikli solitary dalga profilleri.



Şekil 3.2 0.09 genlikli solitary dalga profilleri.

3.3.2 İki Solitary Dalga Etkileşimi

Bu test problemi aşağıdaki başlangıç koşulu ve sınır koşulları kullanılarak çalışılmıştır.

$$U(x, 0) = U_1 + U_2$$

$$U_j = 3A_j \operatorname{sech}^2(k_j(x - \tilde{x}_j)), \quad A_j = \frac{4k_j^2}{1 - 4k_j^2}, \quad j = 1, 2 \quad (3.21)$$

$$U(0, t) = U(120, t) = 0 \quad (3.22)$$

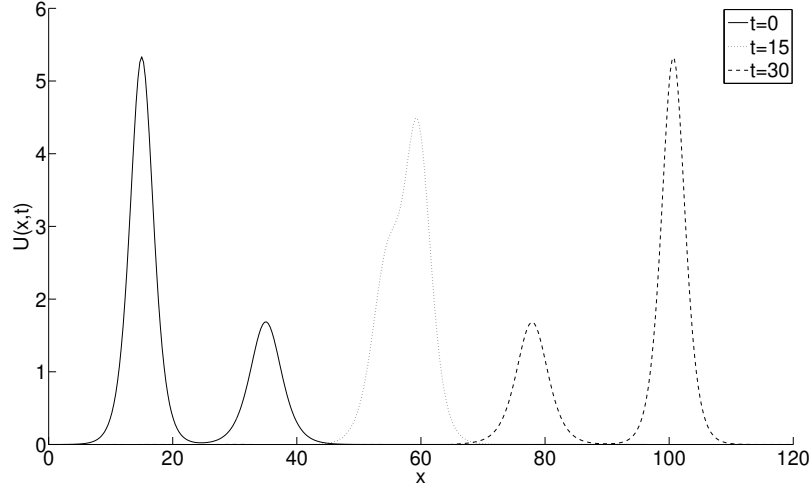
Burada $\mu = 1$, $\varepsilon = 1$, $\tilde{x}_1 = 15$, $\tilde{x}_2 = 35$, $k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.3$ parametre değerleri seçilmiştir. Burada büyük genlikli ve küçük genlikli solitary dalgaların tepe noktaları sırasıyla $x = 15$, $x = 35$ noktalarına yerleştirilmiştir. Sonrasında program $t = 30$ zamanına kadar çalıştırılmıştır.

Çizelge 3.3 de $t = 30$ zamanında oluşan C_1 , C_2 , C_3 korunumları listelenmiş ve elde edilen sonuçlar [13] ve [29] çalışmasındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Şekil 3.3 de ise $t = 0$, $t = 15$ ve $t = 30$ daki çözümlerin grafikleri gösterilmiştir.

Şekil 3.3 den de görüldüğü gibi başlangıçta büyük genlikli dalga, küçük genlikli dalganın solundadır. Zamanla büyük genlikli dalga, daha hızlı hareket ettiğinden küçük genlikli dalgayı yakalayarak etkileşimi başlatır. Bu anlarda iki dalga tek bir dalga gibi görünür. Etkileşim sonrasında şekillerinde bir bozulma olmadan büyük genlikli dalga, küçük genlikli dalgadan ayrılarak küçük genlikli dalgayı geçer.

Çizelge 3.3 İki solitary dalga etkileşimi için korunumlar.

Yöntem	h	Δt	C_1	C_2	C_3
HEKS	0.3	0.1	37.9166	120.5233	744.0815
[13]	0.3	0.1	38.0922	122.9104	764.0126
[29]	0.3	0.1	37.9184	120.5264	744.1053



Şekil 3.3 İki solitary dalga etkileşimi.

3.3.3 Dalga Oluşumu

Bu test probleminde, aşağıdaki başlangıç koşulu kullanılarak dalga oluşumu gözlenmiştir.

$$U(x, 0) = \exp(-(x - 7)^2) \quad (3.23)$$

$U(0, t) = U(50, t) = 0$ sınır koşulları ve $\varepsilon = 1$ parametre değeri seçilerek $t = 25$ anında dalganın oluşumu izlenmiştir.

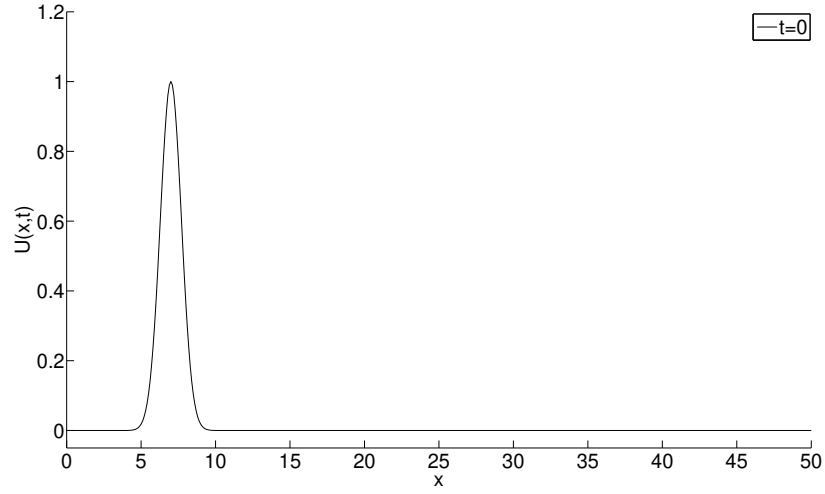
Çizelge 3.4 de μ nün farklı değerleri için $t = 25$ zamanında oluşan C_1 , C_2 , C_3 korunumları listelenmiş ve elde edilen sonuçlar [29] çalışmasındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Şekil 3.4 de başlangıç anında elde edilen çözümün grafiği, Şekil 3.5, Şekil 3.6 ve Şekil 3.7 de ise sırasıyla $\mu = 0.04$, $\mu = 0.01$, $\mu = 0.001$ değerleri için $t = 25$ zamanında elde edilen çözümlerin grafikleri verilmiştir.

Şekil 3.4 den de görüldüğü gibi RLW denkleminde $\mu = 0.04$ seçimi ve (3.23) başlangıç koşulu kullanıldığında, küçük salınımlar ile birlikte tek bir dalganın olduğu gözlenmiştir. Şekil 3.5, Şekil 3.6 ve Şekil 3.7 de ise μ nün değerlerinin küçültülmesiyle oluşan dalga

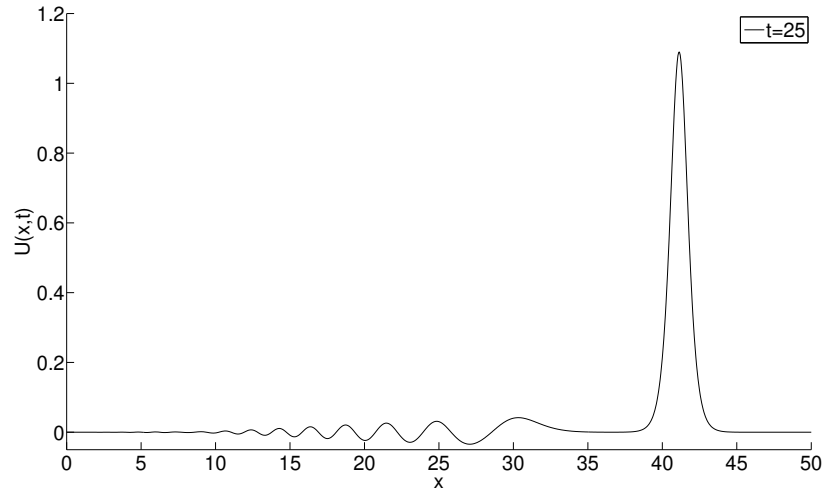
sayısının arttığı gözlenmiştir.

Çizelge 3.4 $\mu = 0.04$, $\mu = 0.01$, $\mu = 0.001$ değerleri için elde edilen korunumlar.

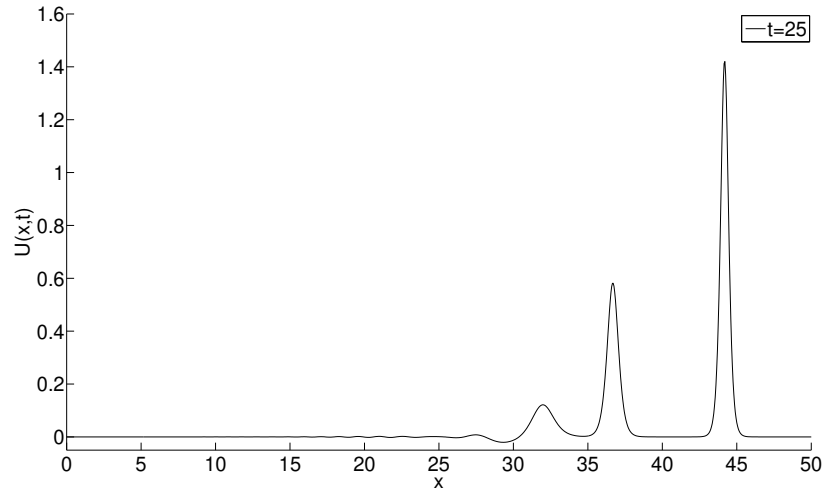
Yöntem	μ	h	Δt	C_1	C_2	C_3
HEKS	0.04	0.05	0.01	1.772454	1.303472	4.783408
[29]	0.04	0.01	0.01	1.772454	1.303447	4.783298
HEKS	0.01	0.05	0.01	1.772454	1.266276	4.785945
[29]	0.01	0.01	0.01	1.772454	1.265846	4.783793
HEKS	0.001	0.05	0.01	1.772454	1.263611	4.852180
[29]	0.001	0.01	0.01	1.772484	1.254676	4.790517



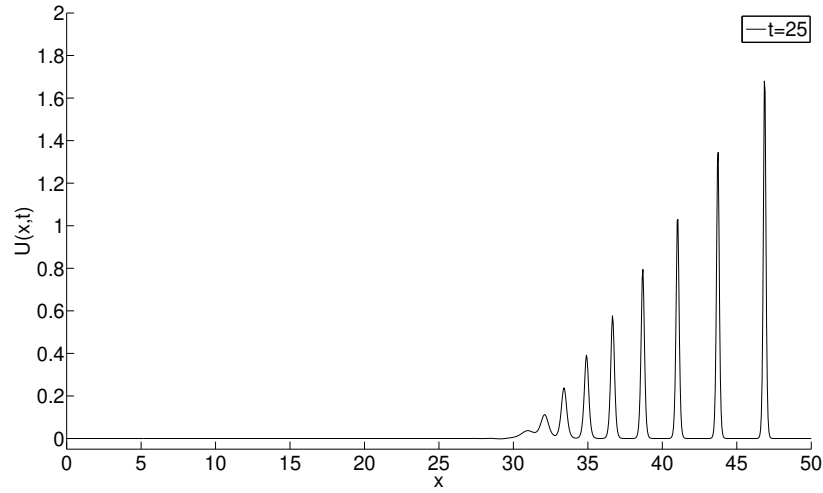
Şekil 3.4 $t = 0$ anındaki çözüm.



Şekil 3.5 $\mu = 0.04$ için $t = 25$ anındaki çözüm.



Şekil 3.6 $\mu = 0.01$ için $t = 25$ anındaki çözüm.



Şekil 3.7 $\mu = 0.001$ için $t = 25$ anındaki çözüm.

3.3.4 Ardışık Dalgaların Gelişimi

Son olarak RLW denkleminin

$$U(x, 0) = 0.5U_0 \left(1 - \tanh \left(\frac{x - x_c}{d} \right) \right) \quad (3.24)$$

başlangıç koşulu altında çözümü çalışılmıştır. Buradaki $U(x, 0)$, $t = 0$ zamanındaki durgun su yüzeyinin üstündeki suyun yükseltisini, d derin su ve durgun su arasındaki eğimi, U_0 su yüzeyindeki ilave yükseltiyi, $x = x_c$ noktası ise büyüklüğü U_0 olan su seviyesindeki değişimin merkezini gösterir. Böylece durgun su bölgenin sağında yer alır ve $U = 0$ yüzeyinden U_0 ilave yükseltisinde suyun sahip olduğu akış soldan durgun suyun içine doğru hareket eder. Bu test probleminde $U_0 = 0.1$, $\mu = 0.16666667$, $\varepsilon = 1.5$, $x_c = 0$, $d = 2$ ve $d = 5$ parametre değerleri ile $U(-36, t) = U_0$, $U(300, t) = 0$ sınır koşulları kullanılarak

$t = 250$ anında ardışık dalgaların oluşumu izlenmiştir.

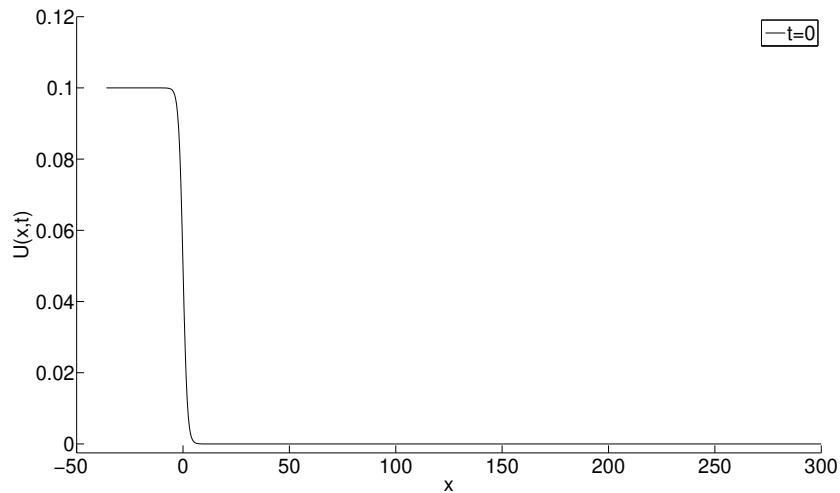
Çizelge 3.5 ve Çizelge 3.6 da $d = 2$, $d = 5$ değerleri için $t = 0$, $t = 250$ zamanlarında oluşan C_1 , C_2 , C_3 korunumları listelenmiş ve elde edilen sonuçlar [29] çalışmasındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Şekil 3.8 ve Şekil 3.9 da $d = 2$, $d = 5$ değerleri için $t = 0$ başlangıç anında elde edilen çözümlerin grafikleri, Şekil 3.10 ve Şekil 3.11 de ise yine $d = 2$, $d = 5$ değerleri için $t = 250$ anında elde edilen çözümlerin grafikleri verilmiştir. Bu grafiklerden de görüldüğü gibi $d = 2$ eğiminin kullanılmasıyla elde edilen ardışık dalgaların $d = 5$ eğiminin kullanılmasıyla elde edilen ardışık dalgalara göre biraz daha fazla olduğu gözlenmiştir.

Çizelge 3.5 $d = 2$ için elde edilen korunumlar.

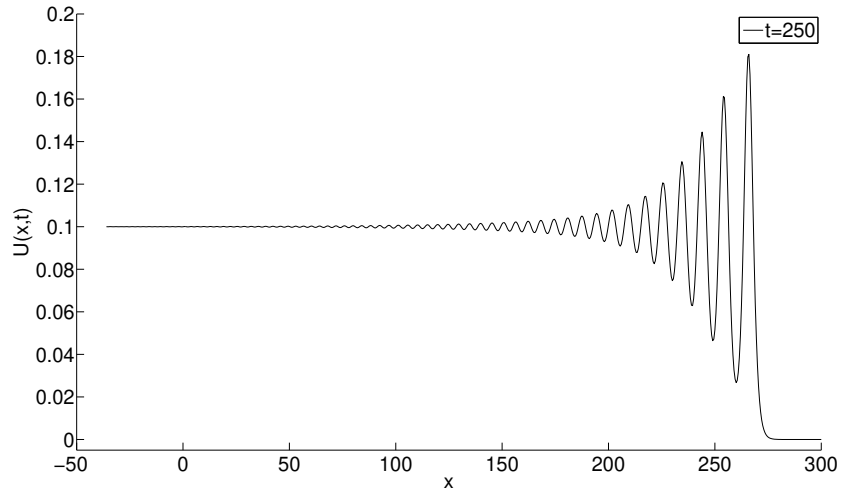
Yöntem	h	Δt	t	C_1	C_2	C_3
HEKS	0.5	0.1	0	3.62500	0.35278	1.09225
[29]	0.24	0.1	0	3.61200	0.35148	1.08822
HEKS	0.5	0.1	250	30.50000	3.10291	9.61655
[29]	0.24	0.1	250	30.48699	3.10148	9.61202

Çizelge 3.6 $d = 5$ için elde edilen korunumlar.

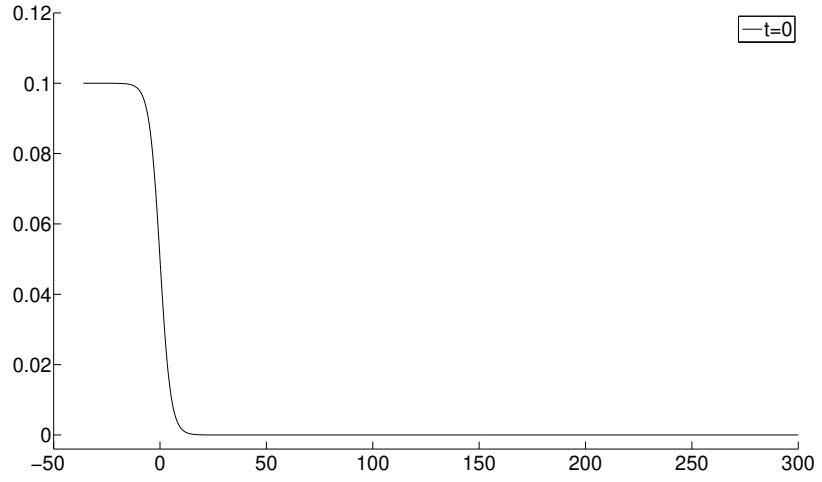
Yöntem	h	Δt	t	C_1	C_2	C_3
HEKS	0.5	0.1	0	3.62500	0.33761	1.04500
[29]	0.24	0.1	0	3.61200	0.33631	1.04097
HEKS	0.5	0.1	250	30.50000	3.08770	9.57033
[29]	0.24	0.1	250	30.48704	3.08631	9.56594



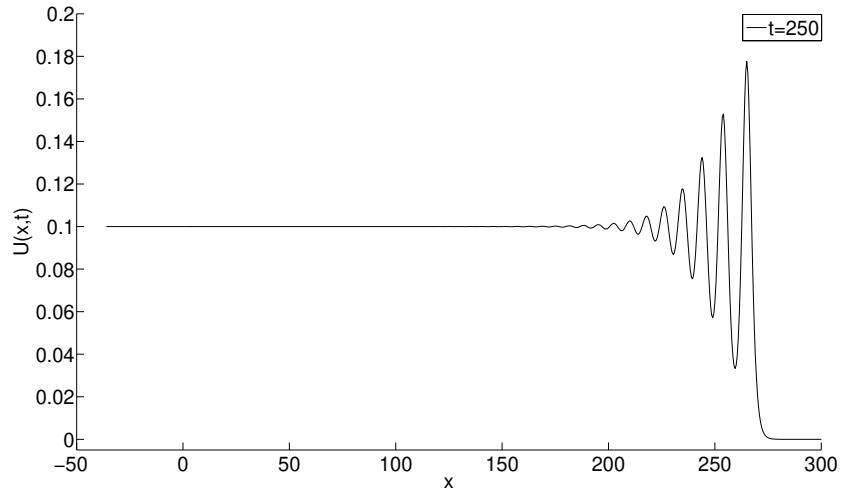
Şekil 3.8 $d = 2$ için $t = 0$ zamanındaki çözüm.



Şekil 3.9 $d = 2$ için $t = 250$ zamanındaki ardışık dalgalar.



Şekil 3.10 $d = 5$ için $t = 0$ zamanındaki çözüm.



Şekil 3.11 $d = 5$ için $t = 250$ zamanındaki ardışık dalgalar.

- [1] Peregrine, D.H., Calculations of the development of an undular bore, *Journal of Fluid Mechanics*, 25, 321-330, 1966.
- [2] Lancaster, P., Salkauskas, K., Surface generated by moving least squares method, *Mathematics of Computation*, 37, 141-158, 1981.
- [3] Nayroles, B., Touzot G., Villen, P., Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements, *Computational Mechanics*, 10, 307-318, 1992.
- [4] Kutluay, S., Esen, A., A finite difference solution of the regularized long wave equation, *Mathematical Problems in Engineering*, 2006, 1-14, 2006.
- [5] Lin, J., Xie, Z., Zhou, J., High-order compact difference scheme for the regularized long wave equation, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 23, 135-156, 2007.
- [6] Esen, A., Kutluay, S., Application of a lumped Galerkin method to the regularized long wave equation, *Applied Mathematics and Computation*, 174, 833-845, 2006.
- [7] Saka, B., Dag, I., A numerical soliton of the RLW equation by Galerkin method using quartic B-splines, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24, 1339-1361, 2008.
- [8] Gou, L., Chen, H., H1-Galerkin mixed finite element method for the regularized long wave equation, *Computing*, 77, 205-221, 2006.
- [9] Dag, I., Least squares quadratic B-splines finite element method for the regularized long wave equation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 182, 205-215, 2000.
- [10] Gu, H., Chen, N., Least-squares mixed finite element methods for the RLW equations, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 24, 749-758, 2008.
- [11] Soliman, A.A., Raslan, K. R., Collocation method using quadratic B-spline for the RLW equation, *International Journal of Computer Mathematics*, 78, 399-412, 2001.
- [12] Raslan, K.R., A computational method for the regularized long wave RLW equation, *Applied Mathematics and Computation*, 167, 1101-1118, 2005.
- [13] Dağ, İ., Saka, B., Irk, D., Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using quintic B-splines, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 190, 532-547, 2006.
- [14] Dağ, İ., Doğan, A., Saka, B., B-spline collocation methods for numerical solutions of the RLW equation, *International Journal of Computer Mathematics*, 80, 743-757, 2003.

- [15] Doğan, A., Numerical solution of RLW equation using linear finite elements within Galerkin's method, *Applied Mathematical Modelling*, 26, 771-783, 2002.
- [16] Mei, L., Chen, Y., Numerical solution of RLW equation using Galerkin method with extrapolation techniques, *Computer Physics Communications*, 183, 1609-1616, 2012.
- [17] Dağ, İ., Saka, B., Irk, D., Application of cubic B-splines for numerical solution of the RLW equation, *Applied Mathematics and Computation*, 159, 373-389, 2004.
- [18] Wadati, M., Introduction to solitons, *Pramana Journal of Physics*, 57, 841-847, 2001.
- [19] Russel, J.S., Report on waves, Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement Science, 311-390, 1844.
- [20] Koç, A.B., Soliton dalga çözümlerinin indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metoduyla araştırılması ve diğer nümerik çözümlerle karşılaştırılması, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya, 69, 2009.
- [21] Allen, J.E., The Early History of Solitons (Solitary waves), *Physica Scripta*, 57, 436-441, 1998.
- [22] Irk, D., Bazı kısmi türevli diferansiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümü, *Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Eskişehir, 165, 2007.
- [23] Korteweg, D.J., De Vries, G., On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves, *Philosophical Magazine*, 39, 422-443, 1895.
- [24] Atluri, S.N., Zhu, T., A new meshless local Petrov-Galerkin approach in computational mechanics, *Computational Mechanics*, 22, 117-127, 1998.
- [25] Crank, J., Nicolson, P., A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 43, 50-64, 1947.
- [26] Rubin, S.G., Graves, R.A., Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics, *Nasa TR R-436*, Washington, DC, 1975.
- [27] Olver, P.J., Euler operators and conservation laws of the BBM equation, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 85, 143-159, 1979.
- [28] Alexander, M.E., Morris, J.L., Galerkin methods applied to some model equations for non-linear dispersive waves, *Journal of Computational Physics*, 30, 428-451, 1979.
- [29] Saka, B., RLW ve K-S denklemlerinin B-Spline kolokeyşin metodları ile çözümleri, *Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, Eskişehir, 118, 2002.

ÖZGEÇMİŞ

1. **Adı Soyadı** : Nur Dilek DURMUŞOĞLU

2. **Doğum Tarihi** : 10 Ağustos 1993

3. **Öğrenim Durumu** :

Derece	Alan	Üniversite	Yıl
Lisans	Matematik	Mustafa Kemal Üniversitesi	2014

