



**T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI KESİRLİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE**

Atiye AYDOĞDU

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**HATAY
TEMMUZ 2019**



T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI KESİRLİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE**

Atiye AYDOĞDU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATAY
TEMMUZ 2019

T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI KESİRLİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE**

Atiye AYDOĞDU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANSTEZİ

Dr. Öğr. Üyesi Orkun TAŞBOZAN danışmanlığında hazırlanan bu tez 17/07/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından **OYBİRLİĞİ** ile kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Orkun TAŞBOZAN
Başkan

Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ
Üye

Dr. Öğr. Üyesi Ali KURT
Üye

Kod No:

Prof. Dr. Erdal SERTKAYA
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

17.07.2019

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını ve tez üzerinde Yükseköğretim Kurulu tarafından hiçbir değişiklik yapılamayacağı için tezin bilgisayar ekranında görüntülendiğinde asıl nüsha ile aynı olması sorumluluğunun tarafıma ait olduğunu beyan ederim.

Atiye AYDOĞDU

ÖZET

BAZI KESİRLİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş bölümü olarak hazırlandı ve kesirli hesaplamaların tarihçesi hakkında bilgi verildi.

Önceki çalışmalar olarak adlandırılan ikinci bölümde ise daha önce yapılan çalışmalar ile ilgili literatüre yer verildi.

Materyal ve yöntem ile adlandırılan bölümde ise bazı temel kavramlar ile birlikte kesirli türev yaklaşımları verildikten sonra tanjant hiperbolik yöntemi verildi.

Tezin orijinal kısmı olan dördüncü bölümde ise tanjant hiperbolik yöntemi ile conformable kesirli mertebeden $(2 + 1)$ boyutlu Burgers, Broer-Kaup-Kupershmidt ve Zoomeron denklemlerinin analitik çözümleri elde edildikten sonra bazı parametre değerleri için analitik çözümlerin üç boyutlu yüzeyleri verildi.

Tezin son bölümü ise sonuç ve öneriler bölümü olarak düzenlendi.

2019, 39 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Conformable Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler, Tanjant Hiperbolik Yöntemi, Kesirli Mertebeden $(2 + 1)$ Boyutlu Burgers Denklemi, Kesirli Mertebeden $(2 + 1)$ Boyutlu Broer-Kaup-Kupershmidt Denklemi, Kesirli Mertebeden $(2 + 1)$ Boyutlu Zoomeron Denklemi.

ABSTRACT

ON THE SOLUTIONS OF SOME FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is prepared as introduction part and information is given about the history of fractional calculations.

In the second chapter which is named as previous studies, literature review about the previous works is given.

In the part which is entitled as material and method, after giving some basic notions and the fractional derivative approximations, tangent hyperbolic method is given.

In the fourth chapter which is the original part of this thesis, after obtaining the analytical solutions of conformable fractional $(2 + 1)$ dimensional Burgers, Broer-Kaup-Kupersmidt and Zoomeron equations with tangent hyperbolic method, three dimensional surface plots of analytical solutions are given for some values of parameters.

The last chapter of the thesis is organized as conclusion and suggestion part.

2019, 39 Pages

Key Words: Conformable Fractional Differential Equations, Tangent Hyperbolic Method, Fractional Order $(2+1)$ Dimensional Burgers Equation, Fractional Order $(2+1)$ Dimensional Broer-Kaup-Kupersmidt Equation, Fractional Order $(2+1)$ Dimensional Zoomeron Equation.

TEŞEKKÜR

Öğrenim hayatım boyunca sabırla, güvenle ve sevgiyle yanımda olan ve ideallerimi gerçekleştirmemi sağlayan değerli aileme yürekten teşekkürü bir borç bilirim.

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında ve yürütülmesinde değerli görüşlerinden faydalandığım, tecrübesiyle çalışmalarımda etkin katkısı bulunan beni yönlendiren danışmanım olan Dr. Öğr. Üyesi Orkun TAŞBOZAN'a çok teşekkür ederim. Aynı zamanda bilgilerini benimle paylaşan saygı değer hocam Dr. Öğr. Üyesi Ali KURT'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca öneri ve desteklerini eksik etmeyen Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	V
SİMGELER DİZİNİ.....	VII
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	3
3. MATERYAL VE YÖNTEM	5
3.1. Temel Kavramlar.....	5
3.2. Kesirli Türev ve İntegral Yaklaşımları.....	6
3.2.1. Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımı	6
3.2.2. Caputo kesirli türev yaklaşımı	6
3.2.3. Conformable kesirli türev yaklaşımı.....	7
3.3. Tanjant Hiperbolik Yöntemi	11
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....	14
4.1. Kesirli Mertebeden (2+1) Boyutlu Burgers Denklemi.....	14
4.2. Kesirli Mertebeden (2+1) Boyutlu Broer-Kaup-Kupershmidt Denklemi	23
4.3. Kesirli Mertebeden (2+1) Boyutlu Zoomeron Denklemi.....	28
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	35
KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ	39

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. $\alpha = 0.5, a = 1, b = 1, y = 1$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi.....	16
Şekil 4.2. $\alpha = 0.5, a = 1, b = 1, y = 1$ değerleri için $v_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi.....	17
Şekil 4.3. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, y = 1$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi.....	17
Şekil 4.4. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, y = 1$ değerleri için $v_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi.....	17
Şekil 4.5. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 0.1$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi ..	18
Şekil 4.6. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 0.1$ değerleri için $v_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi...	18
Şekil 4.7. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 1$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi	18
Şekil 4.8. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 1$ değerleri için $v_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi.....	19
Şekil 4.9. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 5$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi	19
Şekil 4.10. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 5$ değerleri için $v_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi... ..	19
Şekil 4.11. $\alpha = 0.5, a = 1, b = 1, y = 1$ değerleri için $u_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi...	20
Şekil 4.12. $\alpha = 0.5, a = 1, b = 1, y = 1$ değerleri için $v_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi...	20
Şekil 4.13. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, y = 1$ değerleri için $u_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi...	20
Şekil 4.14. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, y = 1$ değerleri için $v_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi....	21
Şekil 4.15. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 0.1$ değerleri için $u_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi .	21
Şekil 4.16. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 0.1$ değerleri için $v_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi.	21
Şekil 4.17. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 1$ değerleri için $u_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi ...	22
Şekil 4.18. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 1$ değerleri için $v_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi....	22
Şekil 4.19. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 5$ değerleri için $u_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi ...	22
Şekil 4.20. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 5$ değerleri için $v_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi.....	23
Şekil 4.21. $\alpha = 0.5, y = 1$ değerleri için $u(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi.....	25
Şekil 4.22. $\alpha = 0.5, y = 1$ değerleri için $v(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi.....	26
Şekil 4.23. $\alpha = 0.9, y = 1$ değerleri için $u(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi.....	26
Şekil 4.24. $\alpha = 0.9, y = 1$ değerleri için $v(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi.....	26
Şekil 4.25. $\alpha = 0.9, t = 0.1$ değerleri için $u(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi	27
Şekil 4.26. $\alpha = 0.9, t = 0.1$ değerleri için $v(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi.....	27
Şekil 4.27. $\alpha = 0.9, t = 1$ değerleri için $u(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi	27
Şekil 4.28. $\alpha = 0.9, t = 1$ değerleri için $v(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi.....	28
Şekil 4.29. $\alpha = 0.9, t = 5$ değerleri için $u(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi	28
Şekil 4.30. $\alpha = 0.9, t = 5$ değerleri için $v(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi.....	28
Şekil 4.31. $\alpha = 0.5, c = 1, y = 1$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi.....	31
Şekil 4.32. $\alpha = 0.9, c = 1, y = 1$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi	31
Şekil 4.33. $\alpha = 0.9, c = 1, t = 0.1$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi	31
Şekil 4.34. $\alpha = 0.9, c = 1, t = 1$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi	32
Şekil 4.35. $\alpha = 0.9, c = 1, t = 5$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi	32
Şekil 4.36. $\alpha = 0.5, c = 1, y = 1$ değerleri için $u_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi.....	32
Şekil 4.37. $\alpha = 0.9, c = 1, y = 1$ değerleri için $u_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi	33

Şekil 4.38. $\alpha = 0.9, c = 1, t = 0.1$ değerleri için $u_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi	33
Şekil 4.39. $\alpha = 0.9, c = 1, t = 1$ değerleri için $u_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi	33
Şekil 4.40. $\alpha = 0.9, c = 1, t = 5$ değerleri için $u_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi	34



SİMGELER DİZİNİ

$f^{(n)}(t)$: $f(t)$ fonksiyonunun n –inci mertebeden türevi

$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$: $f(t)$ fonksiyonunun n –inci mertebeden türevi

$\Gamma(n)$: Gama Fonksiyonu

$\beta(x, y)$: Beta Fonksiyonu

${}_a D_t^\beta f(t)$: $f(t)$ fonksiyonunun β –inci mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

${}_a^C D_t^\beta f(t)$: $f(t)$ fonksiyonunun β –inci mertebeden Caputo kesirli türevi

$T_\alpha(f(t))$: $f(t)$ fonksiyonunun β –inci mertebeden conformable kesirli türevi



1. GİRİŞ

Kesirli türev kavramı ilk olarak 1695 yılında L'Hospital'ın Leibniz'e yazdığı mektup ile ortaya çıktı. Yazılan bu mektupta, L'Hospital, Leibniz'e "Bir $f(x)$ fonksiyonu için $n = \frac{1}{2}$ olması durumunda $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ ifadesinin sonucu ne olur?" sorusunu sordu. Bu soruyla birlikte kesirli türev teorisi üzerine birçok çalışma yapıldı (Nishimoto, 1991; Weilbeer, 2005). Caputo, Grünwald, Letnikov, Riemann, Liouville gibi matematikçilerin yanı sıra birçok matematikçi de kesirli türev yaklaşımları ile ilgili yeni kavramlar tanımladılar. Bu yaklaşımlardan en çok kullanılan Caputo yaklaşımı, tam sayı mertebeli yan şartlar içeren diferansiyel denklemlerin çözüm aşamasında kullanılmak üzere Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımına benzeyen bir kesirli türev yaklaşımı olarak Caputo tarafından verildi (Hilfer, 2000; Miller ve Ross, 1993; Podlubny, 1999). Fakat literatürde sıklıkla kullanılan Riemann-Liouville ve Caputo türev yaklaşımlarının bazı dezavantajları mevcuttur. Örneğin, bu kesirli türev yaklaşımları matematikte önemli yere sahip olan bölümün türev formülü, çarpımın türev formülü ve zincir kuralı gibi temel kuralları sağlamamaktadırlar (Khalil ve ark., 2014).

Teknolojinin gelişmesi ile birlikte son zamanda yapılan çalışmalardan, doğada meydana gelen olayların modellenmesinde tam sayı mertebeli türevin bazen yeterli olmadığı görülmektedir. Bu durumun bir sonucu olarak, birçok matematikçi kesirli türev yaklaşımları üzerine yoğunlaştı. 2014 yılında ise Khalil ve arkadaşları tarafından, türevin limit tanımı yardımı ile tanımlanan conformable kesirli türev yaklaşımı, diğer türev yaklaşımlarının sağlamadığı özellikleri sağlamaktadır (Khalil ve ark., 2014).

Conformable kesirli türev yaklaşımının zincir kuralını sağlaması, kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümünde büyük önem arz etmektedir. Bu nedenle, son zamanlarda conformable kesirli mertebeden türev içeren kısmi diferansiyel denklemlerin farklı yöntemler kullanılarak analitik çözümleri elde edildi (Hosseini ve ark., 2017; Kumar ve ark., 2017; Taşbozan ve Kurt, 2018).

Conformable kesirli türev yaklaşımının avantajlarından dolayı, bu tezde ele alınan kısmi diferansiyel denklemlerdeki kesirli türevler conformable kesirli türevler olarak seçildi. Ele alınan her bir denklem, dalga dönüşümü yardımıyla adi türevli diferansiyel

denklemlere dönüştürüldü. Elde edilen adi türevli diferansiyel denklemlere ise tanjant hiperbolik yöntemi uygulanarak zaman değişkenine göre kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri elde edildi.



2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Uygulamalı matematikte büyük öneme sahip olan diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri birçok araştırmacı tarafından çeşitli yöntemler kullanılarak elde edildi. Araştırmacılar, diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için birinci integral yöntemi (Feng ve Wang, 2003; Eslami ve ark., 2014), tanjant hiperbolik yöntemi (Wazwaz, 2005; Wazwaz, 2007), jakobi eliptikfonksiyon yöntemi (Liu ve ark., 2001; Fu ve ark., 2001), üstel fonksiyon yöntemi (He ve Wu, 2006; He ve Abdou, 2007), G'/G açılım yöntemi (Wang ve ark., 2008; Ebadi ve Biswas, 2011) gibi yöntemleri kullandı.

Tezde ele alınan yöntem olan tanjant hiperbolik yöntemi yardımıyla da bazı diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri elde edildi.

1996 yılında Malfliet ve Hereman tarafından yapılan çalışmada tanjant hiperbolik yöntemi kullanılarak bazı lineer olmayan diferansiyel denklemler için tam çözümler bulundu (Malfliet ve Hereman, 1996). Wazwaz ise lineer olmayan dalga denkleminin çözümlerini elde etmek için tanjant hiperbolik yöntemini 2003 yılında kullandı (Wazwaz, 2003). 2003 yılında ise Lü ve Zhang tarafından yapılan çalışmada tanjant hiperbolik yöntemi kullanılarak (3+1) boyutlu Jumbo-Miwa denkleminin dalga çözümleri elde edildi (Lü ve Zhang, 2003). 2004 yılında Malfliet ise lineer olmayan dalga denklemlerini çözmek için tanjant hiperbolik yöntemini kullandı (Malfliet, 2004). 2006 yılında Wazwaz tarafından yapılan bir diğer çalışmada isesine-Gordon denkleminin analitik çözümleri elde edilmesi için tanjant hiperbolik yöntemi kullanıldı (Wazwaz, 2006).

Birçok araştırmacı tarafından çeşitli yöntemler kullanılarak conformable kesirli mertebeden türev içeren diferansiyel denklemlerin sayısal ve analitik çözümleri elde edildi.

2015 yılında Abdeljawad conformable kesirli türev yaklaşımını kullanarak Gronwall's eşitsizliğini, Taylor kuvvet serisi açılımını, Laplace dönüşümünü, zincir kuralını tanımladı (Abdeljawad, 2015). 2015 yılında Chung tarafından yapılan çalışmada ise conformable kesirli türev ve integral kullanılarak Newton mekaniğinde yer alan bazı problemlerin çözümleri verildi (Chung, 2015). 2016 yılında conformable kesirli türev içeren kısmi diferansiyel denklemin birinci integral yöntemi yardımıyla analitik

çözümleri Ekici ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada verildi (Ekici ve ark., 2016). 2017 yılında yapılan bir diğer çalışmada ise, Ünal ve arkadaşları tarafından conformable kesirli mertebeden türev içeren sabit katsayıli lineer adi diferansiyel denklemlerin genel çözümlerine ulaşıldı (Ünal ve ark., 2017). Hosseini ve arkadaşları tarafından modifiye edilmiş Kudryashov yöntemi kullanılarak conformable kesirli türev içeren Cahn-Allen ve Cahn-Hilliard kısmi diferansiyel denklemlerinin tam çözümleri 2017 yılında elde edildi (Hosseini ve ark., 2017). 2017 yılında Kumar ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada ise Sine-Gordon açılım yöntemi kullanılarak optikte sıklıkla kullanılan lineer olmayan Tzitzeica tipli kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri elde edildi (Kumar ve ark., 2017). 2018 yılında ise Akbulut ve Kaplan tarafından yapılan çalışmada kesirli mertebeden Zoomer ve modifiye edilmiş üçüncü mertebeden KdV denklemlerinin analitik çözümleri yardımcı denklem yöntemi kullanılarak bulundu (Akbulut ve Kaplan, 2018). 2018 yılında Rezazadeh ve arkadaşları tarafından yapılan bir çalışmada ise lineer olmayan Lakshmanan-Porsezian-Daniel modelinin analitik çözümleri Sine-Gordon açılım yöntemi ile elde edildi (Rezazadeh ve ark., 2018). 2018 yılında Taşbozan ve Kurt tarafından yapılan çalışmada ise conformable kesirli türev içeren Liouville ve Sine-Gordon denklemlerinin dalga çözümleri alt denklem yöntemi ile elde edildi (Taşbozan ve Kurt, 2018). 2018 yılında yapılan bir diğer çalışmada ise Taşbozan ve Bayaslı, conformable kesirli türev içeren kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini Homotopi analiz yöntemi kullanarak elde ettiler (Taşbozan ve Bayaslı, 2018). Yavuz ve Yaşkıran tarafından 2018 yılında yapılan çalışmada ise conformable kesirli türev içeren Klein-Gordon diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümleri Homotopi analiz ve modifiye edilmiş Homotopi pertürbasyon yöntemleri yardımı ile elde edildi (Yavuz ve Yaşkıran, 2018).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, bazı temel kavramlar verildikten sonra conformable kesirli türev yaklaşımı ve tanjant hiperbolik yöntemi verildi.

3.1. Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1. Bir yada daha fazla bağımlı değişkenin bir yada daha fazla bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden türevlerini ihtiva eden bir denkleme diferansiyel denklem denir (Ross, 1974).

Tanım 3.1.2. Bir denklemde belirli bir değişkene göre türev varsa bu değişkene bağımsız değişken, denklemde türevi bulunan değişkene ise bağımlı değişken denir (Ross, 1974).

Tanım 3.1.3. Bir veya birden fazla bağımlı değişkenin bir tek bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denkleme adi diferansiyel denklem denir (Ross, 1974).

Tanım 3.1.4. Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin, birden fazla bağımsız değişkene göre kısmi türevlerini içeren denkleme kısmi diferansiyel denklem denir (Ross, 1974).

Tanım 3.1.5. Bir diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin mertebesine diferansiyel denklemin mertebesi denir (Ross, 1974).

Tanım 3.1.6. Bir diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin derecesine diferansiyel denklemin derecesi denir (Ross, 1974).

Tanım 3.1.7. Bir yada daha fazla bağımlı değişkenin bir yada daha fazla bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden kesirli mertebeden türevlerini ihtiva eden bir denkleme kesirli mertebeden diferansiyel denklem denir (Benghorbal, 2004).

Tanım 3.1.8. Gama fonksiyonu

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$$

şeklinde genelleştirilmiş integrali ile tanımlıdır (Podlubny, 1999). Gama fonksiyonunun

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), n > 0$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!, x \in \mathbb{N}^+$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

gibi özellikleri mevcuttur (Podlubny, 1999).

Tanım 3.1.9. Beta fonksiyonu

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, x > 0, y > 0$$

integrali ile tanımlıdır (Podlubny, 1999). Beta fonksiyonu ile Gama fonksiyonu arasındaki ilişki

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

eşitliği ile verilir (Podlubny, 1999).

3.2. Kesirli Türev ve İntegral Yaklaşımları

Bu kısımda, literatürde sıklıkla kullanılan Riemann-Liouville, Caputo ve conformable kesirli türev yaklaşımları verildi.

3.2.1. Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımı

$f(t)$ fonksiyonu, $[a, t]$ kapalı aralığında sürekli ve integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $n, n-1 \leq \beta < n$ şartını sağlayacak şekilde bir pozitif tamsayı n ve $t > a$ olmak üzere, bir $f(t)$ fonksiyonunun β -inci mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$${}_a D_t^\beta [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\xi)}{(t-\xi)^{\beta-n+1}} d\xi \quad (3.2.1)$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny, 1999).

Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımının bazı özellikleri aşağıda verildi (Podlubny, 1999).

1. Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımı lineer bir operatördür.
2. n bir tam sayı olmak üzere, eğer $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ değerleri için $f^{(k)}(a) = 0$ şartı geçerli ise

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^\beta [f(t)]) = {}_a D_t^\beta \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_a D_t^{\beta+n} [f(t)], \quad n-1 \leq \beta < n$$

eşitliği sağlanmaktadır.

3.2.2. Caputo kesirli türev yaklaşımı

Başlangıç değer problemleri Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımı ile çözülebilir ancak bu çözümler pratikte kullanışsızdır. Çünkü bu tür başlangıç değer problemleri ile

verilen başlangıç şartlarının fiziksel anlamı mevcut değildir. Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımının modifiye edilmesiyle meydana gelen Caputo kesirli türev yaklaşımı, kesirli diferansiyel denklemler ile verilen başlangıç koşullarının fiziksel anlam içermesi bakımından önemli bir türev yaklaşımıdır. Bu özelliğinden dolayı başlangıç değer problemleri için Caputo kesirli türev yaklaşımı daha kullanışlıdır (Podlubny, 1999).

n bir pozitif tamsayı olmak üzere $n - 1 < \beta < n$ şartını sağlayan β sayısı için bir f fonksiyonunun β -inci mertebeden Caputo kesirli türev yaklaşımı

$${}_a^c D_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \beta)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\xi) d\xi}{(t - \xi)^{\beta+1-n}}$$

ile tanımlıdır (Podlubny, 1999).

Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımı ile Caputo kesirli türev yaklaşımı arasındaki önemli farklardan biri sabitin türev değerine dayanmaktadır. Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımında sabitin türevi sıfırdan farklı iken Caputo kesirli türev yaklaşımında ise sıfıra eşittir (Podlubny, 1999).

Caputo kesirli türev yaklaşımının bazı özellikleri aşağıda verildi (Podlubny, 1999).

1. Caputo kesirli türev yaklaşımı lineer bir operatördür.

2. $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ ve $n - 1 < \beta < n$ olmak üzere

$${}_a^c D_t^\beta ({}_a^c D_t^m f(t)) = {}_a^c D_t^{\beta+m} f(t)$$

eşitliği sağlanmaktadır.

3. $f^{(s)}(t) = 0$, $s = n, n + 1, n + 2, \dots, m$ ve $m = 0, 1, 2, 3, \dots$; $n - 1 < \beta < n$ olması durumunda

$${}_a^c D_t^\beta ({}_a^c D_t^m f(t)) = {}_a^c D_t^m ({}_a^c D_t^\beta f(t)) = {}_a^c D_t^{\beta+m} f(t)$$

eşitliği sağlanmaktadır.

3.2.3. Conformable kesirli türev yaklaşımı

Literatürde sıklıkla kullanılan Caputo ve Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımları lineerlik özelliğini sağlamaktadır. Lineerlik özelliği kesirli türev yaklaşımlarında sağlanan tek ortak özelliktir. Aynı zamanda, Caputo ve Riemann-Liouville türev

yaklaşımlarının bazı olumsuz yanları da mevcuttur (Khalil ve ark., 2014). Bunlardan bazıları aşağıda verildi.

1. Caputo ve Riemann-Liouville türev yaklaşımları, iki fonksiyonun çarpımının türevi için verilen

$$D_a^\alpha(f(t)g(t)) = f(t)D_a^\alpha(g(t)) + g(t)D_a^\alpha(f(t))$$

eşitliğini sağlamazlar (Khalil ve ark., 2014).

2. Caputo ve Riemann-Liouville türev yaklaşımları, iki fonksiyonun bölümünün türevi için verilen

$$D_a^\alpha\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{g(t)D_a^\alpha(f(t)) + f(t)D_a^\alpha(g(t))}{[g(t)]^2}$$

eşitliğini sağlamazlar (Khalil ve ark., 2014).

3. Caputo ve Riemann-Liouville türev yaklaşımları

$$D_a^\alpha(f(t) \circ g(t)) = f^{(\alpha)}(g(t))g^{(\alpha)}(t)$$

şeklindeki zincir kuralını sağlamazlar (Khalil ve ark., 2014).

4. Caputo ve Riemann-Liouville türev yaklaşımları

$$D^\alpha D^\beta(f(t)) = D^{\alpha+\beta}(f(t))$$

şeklindeki eşitliği sağlamazlar (Khalil ve ark., 2014).

2014 yılında, ilk olarak Khalil ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada verilen conformable kesirli türev yaklaşımı, yukarıda verilen dört özelliği de sağlamaktadır (Khalil ve ark., 2014). Bu nedenle, conformable kesirli türev yaklaşımı literatürde sıklıkla kullanılan bir türev yaklaşımıdır.

Tanım 3.2.1. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $t > 0$ ve $\alpha \in (0, 1)$ olsun. $f(t)$ fonksiyonunun α –inci mertebeden conformable kesirli türevi,

$$T_\alpha(f(t)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer $f(t)$ fonksiyonu, $a > 0$ olmak üzere $(0, a)$ aralığında α –inci mertebeden diferansiyellenebilir ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ limiti mevcut ise, o zaman

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$$

eşitliği sağlanır (Khalil ve ark., 2014).

Tanım 3.2.2. Eğer, bir $f(t)$ fonksiyonunun α –inci mertebeden conformable kesirli türevi mevcut ise, bu durumda $f(t)$ fonksiyonuna α –inci mertebeden diferansiyellenebilir denir (Khalil ve ark., 2014).

Teorem 3.2.1. $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t_0 > 0$ noktasında α –inci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon ise, o zaman $f(t)$ fonksiyonu t_0 noktasında sürekli bir fonksiyondur (Khalil ve ark., 2014).

Teorem 3.2.2. $\alpha \in (0,1]$ ve $t > 0$ olmak üzere $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları α –inci mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar ise aşağıdaki özellikler sağlanır (Khalil ve ark., 2014).

1. Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(af(t) + bg(t)) = aT_\alpha(f(t)) + bT_\alpha(g(t))$,
2. Her $p \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$,
3. Her $f(t) = \lambda$ sabit fonksiyonu için $T_\alpha(\lambda) = 0$,
4. $T_\alpha(f(t)g(t)) = f(t)T_\alpha(g(t)) + g(t)T_\alpha(f(t))$,
5. $T_\alpha\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{g(t)T_\alpha(f(t)) - f(t)T_\alpha(g(t))}{[g(t)]^2}$,
6. $T_\alpha(f(t)) = t^{1-\alpha} \frac{df(t)}{dt}$,

Örnek 3.2.1. $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere, bazı temel fonksiyonların conformable kesirli mertebeden türevleri

1. $T_\alpha(1) = 0$,
2. $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $T_\alpha(e^{ct}) = ct^{1-\alpha}e^{ct}$,
3. $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $T_\alpha(\sin(bt)) = bt^{1-\alpha}\cos(bt)$,
4. $d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $T_\alpha(\cos(dt)) = -dt^{1-\alpha}\sin(dt)$,
5. $T_\alpha\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = 1$,
6. $T_\alpha\left(\sin \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = \cos \frac{t^\alpha}{\alpha}$,
7. $T_\alpha\left(\cos \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = -\sin \frac{t^\alpha}{\alpha}$,
8. $T_\alpha\left(e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}}\right) = e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}}$,
9. $T_\alpha\left(\sinh\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\right) = t^{1-\alpha} \frac{\partial(\sinh(\frac{t^\alpha}{\alpha}))}{\partial t} = t^{1-\alpha} \frac{\alpha t^{1-\alpha}}{\alpha} \cosh\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = \cosh\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)$
10. $T_\alpha\left(\cosh\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\right) = t^{1-\alpha} \frac{\partial(\cosh(\frac{t^\alpha}{\alpha}))}{\partial t} = t^{1-\alpha} \frac{\alpha t^{1-\alpha}}{\alpha} \sinh\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = \sinh\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)$

şeklindedir (Khalil ve ark, 2014).

Tanım 3.2.3 $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere, bir $f(t)$ fonksiyonunun α –inci mertebeden conformable kesirli integrali

$$I_a^\alpha(f(t)) = I_1^\alpha(t^{\alpha-1}f(t)) = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx$$

Riemann integrali ile ifade edilir(Khalil ve ark., 2014).

Örnek 3.2.2. $a = 0$ olmak üzere $f(t) = \sin(\sqrt[3]{t})$ fonksiyonunun $\frac{1}{3}$ -üncü mertebeden conformable kesirli integrali

$$\int_0^t \frac{\sin(\sqrt[3]{x})}{x^{1-\frac{1}{3}}} dx = \int_0^t \frac{\sin(\sqrt[3]{x})}{x^{\frac{2}{3}}} dx$$

formülü ile verilir. Bu integrali çözmek için

$$x^{\frac{1}{3}} = u$$

değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx = du$$

eşitliğinden

$$3 \int_0^{\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}} \sin u du = -3 \cos(u) \Big|_0^{\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}} = 3(1 - \cos(\sqrt[3]{t}))$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.2.3. $t \geq a$ olmak üzere $f(t)$ sürekli bir fonksiyonu için

$$T_\alpha(I_\alpha^\alpha(f(t))) = f(t)$$

eşitliği sağlanır (Khalil ve ark., 2014).

İspat. $f(t)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyon ve $I_\alpha^\alpha(f(t))$ fonksiyonu diferansiyellenebilir olduğundan

$$T_\alpha(I_\alpha^\alpha(f))(t) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} (I_\alpha^\alpha(f)(t)) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \left(\int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx \right) = t^{1-\alpha} \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}} = f(t)$$

Eşitliğinden istenen elde edilir(Khalil ve ark., 2014).

Tanım 3.2.4 $0 < a \leq 1$ için $f, g: (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları α -ıncı mertebeden diferansiyellebilir fonksiyonlar olsun. $h(t) = f(g(t))$ olmak üzere, $t \neq a$ ve $g(t) \neq 0$ şartlarını sağlayan tüm t noktalarında $h(t)$ fonksiyonu için

$$T_\alpha^\alpha(h(t)) = (T_\alpha^\alpha f)(g(t)). (T_\alpha^\alpha g(t)). g(t)^{t-1}$$

eşitliği geçerlidir. Eğert a olarak alınır

$$T_\alpha^0 h(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} (T_\alpha^\alpha f)(g(t)) (T_\alpha^\alpha g(t)). g(t)^{t-1}$$

elde edilir(Abdeljawad, 2015).

3.3.Tanjant Hiperbolik Yöntemi

Bu kısımda, tanjant hiperbolik yönteminin lineer olmayan genel bir kısmi diferansiyel denkleme sistematik olarak uygulaması verildi. Ele alınan yöntem, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin dalga çözümlerinin bulunmasında kullanılan etkili bir yöntemdir. Tanjant hiperbolik yöntemi ilk olarak 1996 yılında, kısmi diferansiyel denklemlere uygulanarak, ele alınan denklemlerin analitik çözümleri elde edildi (Malfliet ve Hereman, 1996).

Zamana bağlı conformable kesirli mertebeden lineer olmayan (2+1) boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemin genel formu, $\alpha \in (0,1)$ için

$$P\left(u, \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial t^{2\alpha}}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots\right) = 0 \quad (3.3.1)$$

olarak ele alınsın. Burada P lineer olmayan bir fonksiyonu, u ifadesi ise x, y ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bilinmeyen bir fonksiyonu göstermektedir. (3.3.1) ile verilen conformable kesirli mertebeden diferansiyel denklemin analitik çözümünü bulmak için, (3.3.1) denklemine,

$$u(x, y, t) = U(\xi)$$

olmak üzere,

$$\xi = x + y + k \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad (3.3.2)$$

şeklinde dalga dönüşümü uygulansın. Burada k daha sonra belirlenecek olan katsayıdır.

Bu durumda (3.3.2) dalga dönüşümünün kullanılmasıyla (3.3.1) denklemindeki kısmi türevler,

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = k \frac{dU}{d\xi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dU}{d\xi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dU}{d\xi},$$

$$\frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial t^{2\alpha}} = k^2 \frac{d^2 U}{d\xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 U}{d\xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2 U}{d\xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{d^2 U}{d\xi^2},$$

⋮

şeklindeki ξ bağımsız değişkenine bağlı tam mertebeden türevlere dönüşür (Abdeljawad, 2015). Bu türevlerin (3.3.1) ile verilen conformable kesirli mertebeden diferansiyel denkleminde yerlerine yazılmasıyla, L lineer olmayan bir fonksiyon olmak üzere,

$$L\left(U, \frac{dU}{d\xi}, \frac{d^2 U}{d\xi^2}, \dots\right) = 0 \quad (3.3.3)$$

adi türevli diferansiyel denklemi bulunur. (3.3.3) ile verilen adi türevli diferansiyel denklemin

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{l=0}^m a_l Y^l, \quad Y = \tanh(\xi) \quad (3.3.4)$$

şeklinde analitik çözümü aransın (Wazwaz, 2004). (3.3.4) denklemindeki m pozitif tamsayısı ve a_l ($l = 0, 1, \dots, m$) katsayıları daha sonra belirlenecektir. (3.3.4) denkleminde bulunan m pozitif tamsayısını belirlemek için, (3.3.3) ile verilen adi türevli diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeden lineer türev terimi kullanılarak yazılan

$$\mathcal{O}\left(\frac{d^p U}{d\xi^p}\right) = m + p, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3.5)$$

ve en yüksek dereceden lineer olmayan teriminin kullanılmasıyla elde edilen

$$\mathcal{O}\left(u^q \frac{d^p U}{d\xi^p}\right) = qm + p, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3.6)$$

eşitlikleri arasında homojen dengeye bakılır (Lai ve ark., 2009). Bu iki eşitliğin birbirine eşitlenmesiyle m pozitif tamsayısının değeri elde edilir.

m pozitif tamsayısının değeri belirlendikten sonra (3.3.3) denklemindeki türevler, $Y = \tanh(\xi)$ eşitliğinin kullanılması ile

$$\frac{dU}{d\xi} = (1 - Y^2) \frac{dS}{dY}, \quad (3.3.7)$$

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} = (1 - Y^2) \left(-2Y \frac{dS}{dY} + (1 - Y^2) \frac{d^2 S}{dY^2} \right), \quad (3.3.8)$$

$$\frac{d^3 U}{d\xi^3} = (1 - Y^2) \left((6Y^2 - 2) \frac{dS}{dY} - 6Y(1 - Y^2) \frac{d^2 S}{dY^2} + (1 - Y^2)^2 \frac{d^3 S}{dY^3} \right) \quad (3.3.9)$$

olarak bulunur (Wazwaz, 2007). Benzer şekilde, dördüncü ve daha yüksek mertebeden türevler de elde edilebilir.

(3.3.4) ve (3.3.7) – (3.3.9) eşitliklerinin (3.3.3) denkeminde yerlerine yazılması ile $Y^i (i = 0, 1, \dots)$ ifadelerini içeren eşitlik elde edilir. Bu $Y^i (i = 0, 1, \dots)$ ifadelerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi ile $a_l (l = 0, 1, \dots, m)$, k ve w sabitlerine bağlı cebirsel denklem sistemi bulunur. Elde edilen bu cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle $a_l (l = 0, 1, \dots, m)$, k ve w sabitleri birbiri cinsinden bulunabilir. Bulunan bu değerlerin ve (3.3.2) dalga dönüşümünün (3.3.4) denkleminde kullanılmasıyla (3.3.1) ile verilen zamana bağlı conformable kesirli mertebeden lineer olmayan $(2+1)$ boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemin analitik çözümleri elde edilir (Wazwaz, 2004).

4.ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde, zamana göre conformable anlamında kesirli türev içeren (2+1) boyutlu Burgers, Broer-Kaup-Kupershmidt ve Zoomeron kısmi diferansiyel denklem sistemlerinin tanjant hiperbolik yöntemi yardımı ile analitik çözümleri elde edildi.

4.1.Kesirli Mertebeden (2+1) Boyutlu Burgers Denklemi

2002 yılında Cao ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada (2+1) boyutlu Burgers denkleminin yarı periyodik çözümleri elde edildi(Cao ve ark., 2002).2005 yılında Wang ve arkadaşları tarafından yapılan makalede iseyeni bir Riccati denklemi tanımlanarak (2+1) boyutlu Burgers denklemi analitik olarak çözüldü(Wang ve ark., 2005). Abdou ve Soliman tarafından yapılan çalışmada varyasyonel iterasyon yöntemi kullanılarak, Burgers denklemi 2005 yılında nümerik olarak çözüldü(Abdou ve Soliman, 2005). 2015 yılında ise Baskonus ve Bulut tarafından yapılan çalışmada genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi kullanılarak (2+1) boyutlu Burgers denkleminin analitik çözümleri elde edildi(Baskonus ve Bulut, 2015).

Zaman değişkenine göre conformable kesirli mertebeden türev içeren (2+1) boyutlu Burgers denklemi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - u \frac{\partial u}{\partial y} - av \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - ab \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

olarak ele alınsın. Burada a, b reel sabitler olup, $\alpha \in (0,1)$ şeklindedir. (4.1.1) kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denkleme $u(x, y, t) = U(\xi)$ ve $v(x, y, t) = V(\xi)$ olmak üzere

$$\xi = x + y + k \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad (4.1.2)$$

şeklinde dalga dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} kU_\xi - UU_\xi - aVU_\xi - bU_{\xi\xi} - abU_{\xi\xi} &= 0, \\ U_\xi - V_\xi &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

şeklinde adi türevli diferansiyel denklem bulunur. (4.1.3) denklem sisteminde bulunan ikinci denklemin bir kez integralinin alınmasıyla $U = V$ eşitliği bulunur. Bu eşitliğin (4.1.3) denklem sisteminde yer alan ilk denklemde kullanılmasıyla

$$kU_\xi - UU_\xi - aUU_\xi - bU_{\xi\xi} - abU_{\xi\xi} = 0$$

eşitliği bulunur. Bulunan bu eşitlikte bir kez integral alınır

$$2kU - (a + 1)U^2 - 2b(a + 1)U_\xi = 0 \quad (4.1.4)$$

denklemini bulunur. Elde edilen adi türevli diferansiyel denklemde yer alan en yüksek mertebeden türev içeren U_ξ ve en yüksek dereceden lineer olmayan U^2 ifadeleri arasındaki homojen dengeden

$$m + 1 = 2m$$

eşitliği elde edilir ki, buradan

$$m = 1$$

değeri bulunur. Sonuç olarak, (4.1.4) ile verilen adi türevli diferansiyel denklemin

$$U(\xi) = S(Y) = a_0 + a_1Y, Y = \tanh(\xi) \quad (4.1.5)$$

formunda analitik çözümü aranır. (4.1.5) eşitliğinde bulunan $U(\xi)$ değerinin ve bu değer birinci türevi olan (3.3.7) ifadesinin (4.1.4) denkleminde yerlerine yazılmasıyla

$$2k(a_0 + a_1Y) - (a + 1)(a_0 + a_1Y)^2 - 2ba_1(a + 1)(1 - Y^2) = 0 \quad (4.1.6)$$

eşitliği elde edilir. (4.1.6) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa ve $Y^i (i = 0, 1, 2)$ ifadelerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$Y^0: 2a_0k - a_0^2(a + 1) - 2a_1b(a + 1) = 0$$

$$Y^1: 2a_1k - 2a_0a_1(a + 1) = 0$$

$$Y^2: 2a_1b(a + 1) - a_1^2(a + 1) = 0$$

şeklinde denklem sistemi elde edilir. Elde edilen denklem sisteminin çözülmesiyle a_0, a_1 ve k değişkenlerinin değerleri a ve b reel sabitleri cinsinden

$$a_0 = \pm 2b, a_1 = 2b, k = \pm 2b(a + 1)$$

değerleri bulunur. a_0, a_1 ve k değerlerinin (4.1.2) dalga dönüşümünde ve (4.1.5) eşitliğinde yerlerine yazılmasıyla (4.1.1) ile verilen zaman değişkenine göre conformable kesirli mertebeden türev içeren (2+1) boyutlu Burgers denkleminin analitik çözümleri $U = V$ eşitliğinin kullanılmasıyla

$$u_1(x, y, t) = 2b + 2b \tanh\left(x + y + 2b(a + 1)\frac{t^\alpha}{\alpha}\right),$$

$$v_1(x, y, t) = 2b + 2b \tanh\left(x + y + 2b(a + 1)\frac{t^\alpha}{\alpha}\right),$$

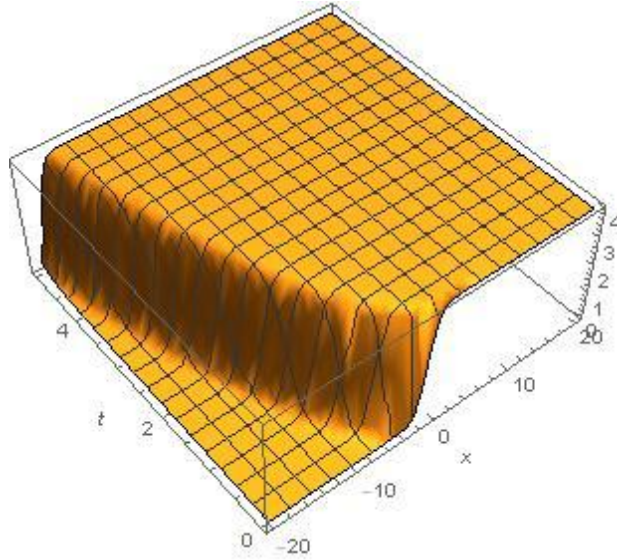
$$u_2(x, y, t) = -2b + 2b \tanh\left(x + y - 2b(a + 1)\frac{t^\alpha}{\alpha}\right),$$

$$v_2(x, y, t) = -2b + 2b \tanh\left(x + y - 2b(a + 1)\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)$$

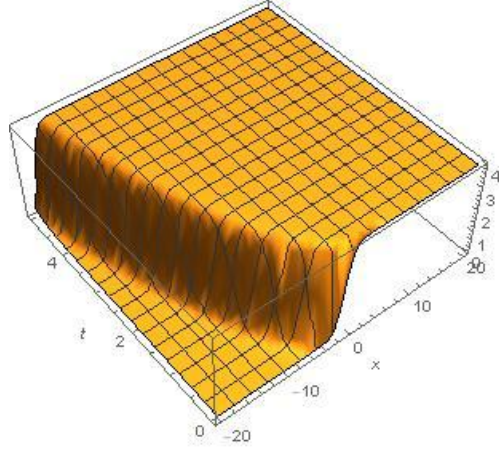
olarak elde edilir.

(Şekil 4.1.)-(Şekil 4.4.) ile verilen yüzeylerde conformable kesirli mertebeden türev içeren (2+1) boyutlu Burgers denkleminin $a = 1, b = 1, y = 1$ ve farklı α değerlerinde $u_1(x, y, t)$ ve $v_1(x, y, t)$ analitik çözümlerinin yüzeyleri verildi. Ayrıca (Şekil 4.5.)-(Şekil 4.10.) ile verilen yüzeylerde ise bu kısımda elde alınan denklemin $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1$ ve farklı t değerlerinde $u_1(x, y, t)$ ve $v_1(x, y, t)$ analitik çözümlerinin yüzeyleri verildi.

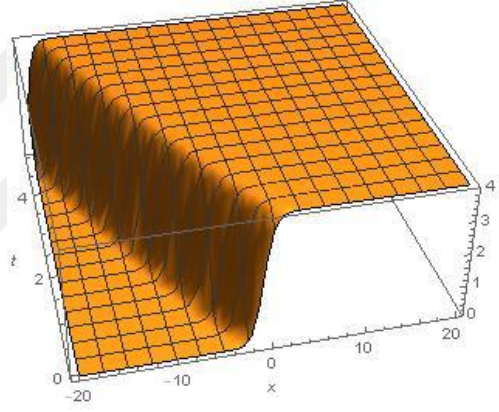
(4.1.1) ile (2+1) boyutlu Burgers denklemi için (Şekil 4.11.)-(Şekil 4.14.) ile verilen yüzeylerde farklı α ve $a = 1, b = 1, y = 1$ değerlerinde $u_2(x, y, t)$ ve $v_2(x, y, t)$ analitik çözümlerinin yüzeyleri verildi. Elde alınan (2+1) boyutlu Burgers denklemi için (Şekil 4.15.)-(Şekil 4.20.) ile verilen yüzeylerde ise farklı t ve $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1$ değerlerinde $u_2(x, y, t)$ ve $v_2(x, y, t)$ analitik çözümlerinin yüzeyleri verildi.



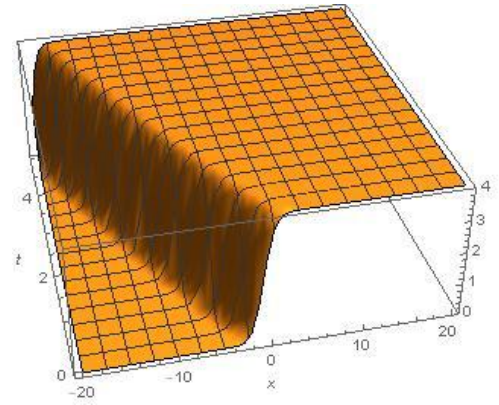
Şekil 4.1. $\alpha = 0.5, a = 1, b = 1, y = 1$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



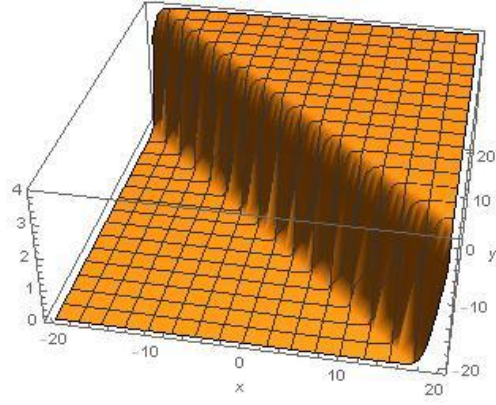
Şekil 4.2. $\alpha = 0.5, a = 1, b = 1, y = 1$ değerleri için $v_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



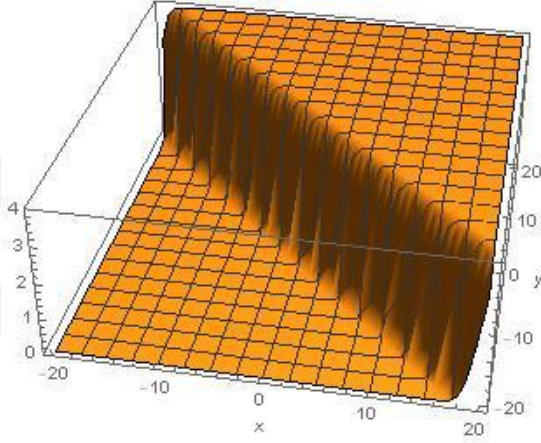
Şekil 4.3. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, y = 1$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



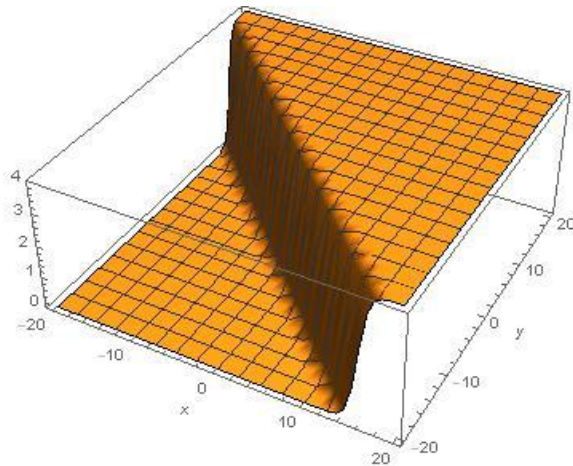
Şekil 4.4. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, y = 1$ değerleri için $v_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



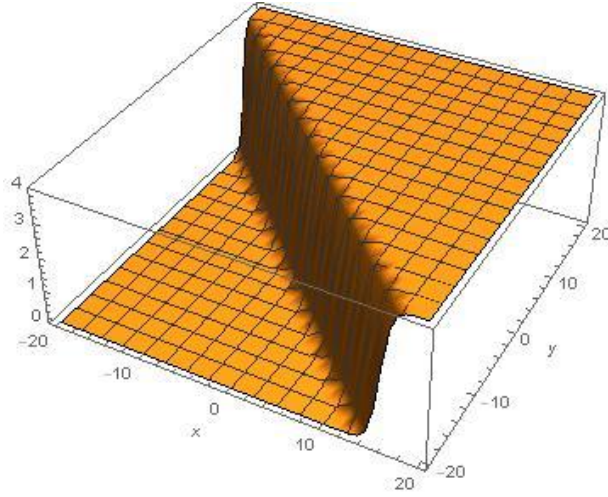
Şekil 4.5. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 0.1$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



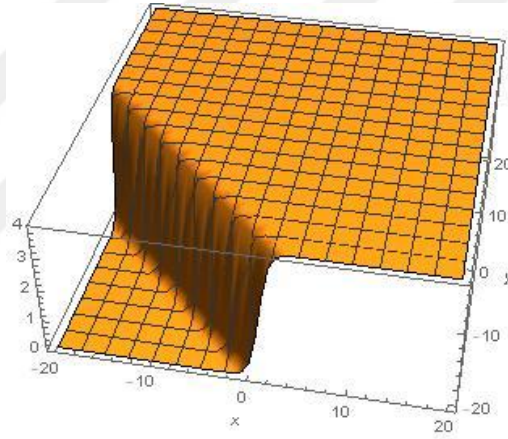
Şekil 4.6. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 0.1$ değerleri için $v_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



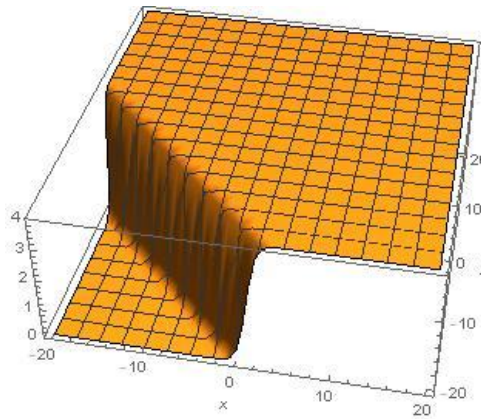
Şekil 4.7. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 1$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



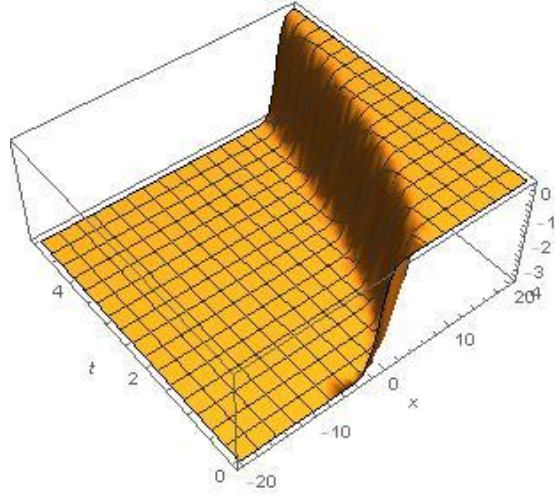
Şekil 4.8. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 1$ değerleri için $v_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



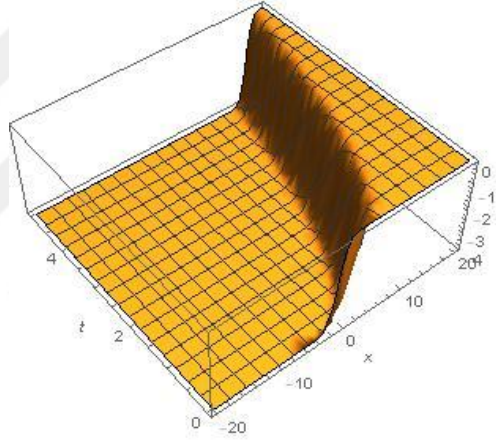
Şekil 4.9. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 5$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



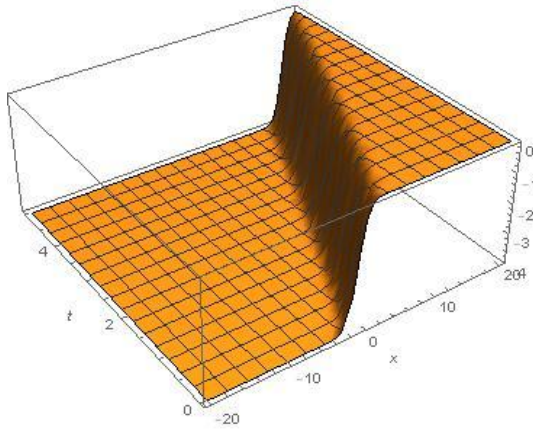
Şekil 4.10. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 5$ değerleri için $v_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



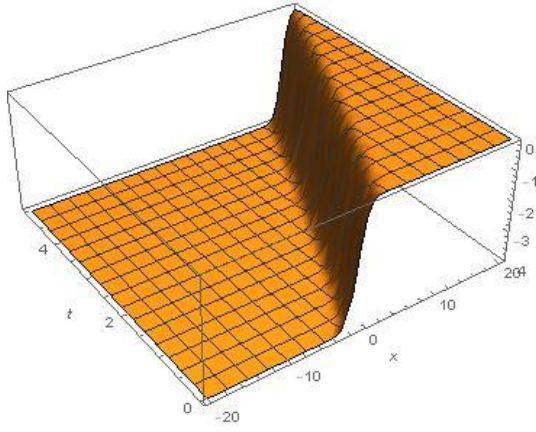
Şekil 4.11. $\alpha = 0.5, a = 1, b = 1, y = 1$ değerleri için $u_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



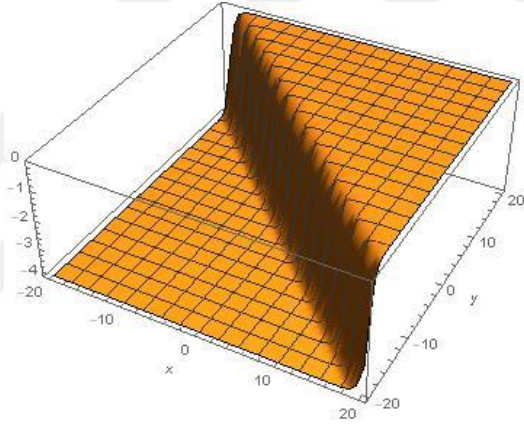
Şekil 4.12. $\alpha = 0.5, a = 1, b = 1, y = 1$ değerleri için $v_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



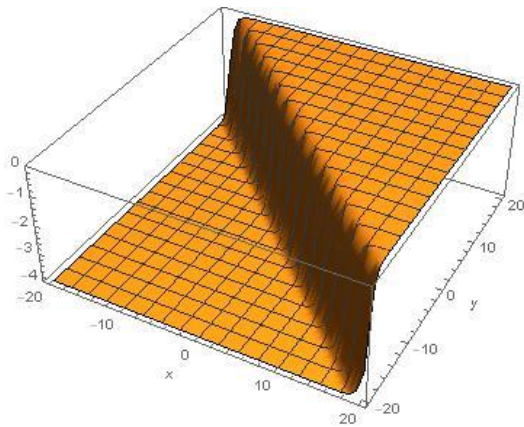
Şekil 4.13. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, y = 1$ değerleri için $u_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



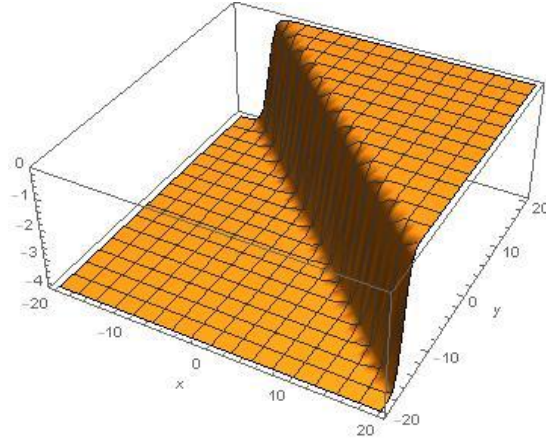
Şekil 4.14. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, y = 1$ değerleri için $v_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



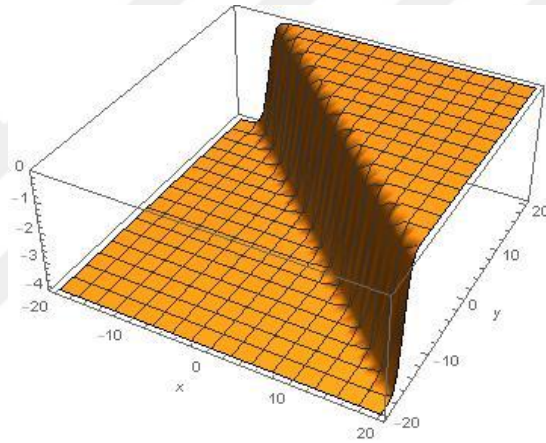
Şekil 4.15. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 0.1$ değerleri için $u_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



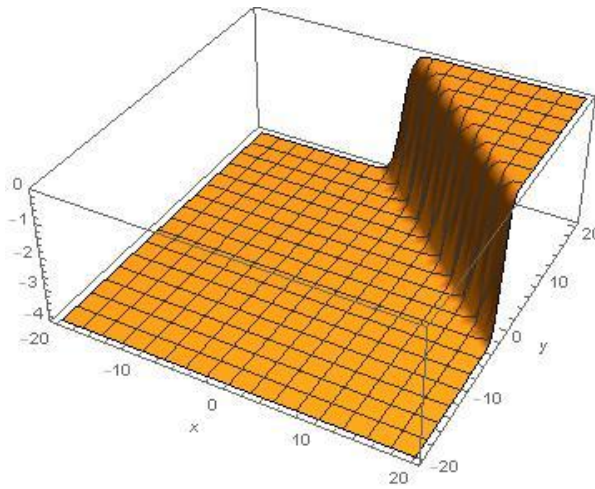
Şekil 4.16. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 0.1$ değerleri için $v_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



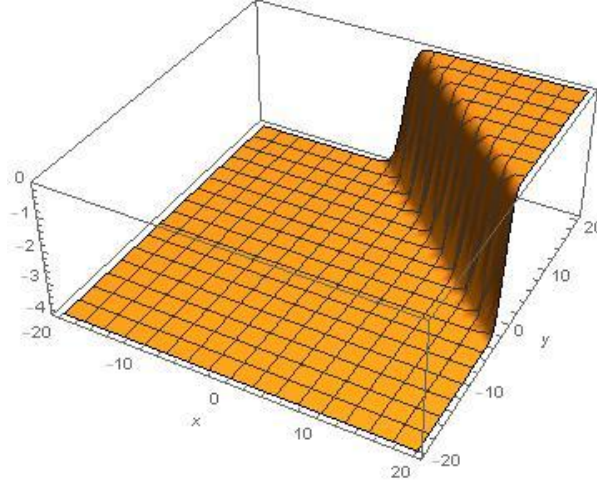
Şekil 4.17. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 1$ değerleri için $u_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



Şekil 4.18. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 1$ değerleri için $v_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



Şekil 4.19. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 5$ değerleri için $u_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



Şekil 4.20. $\alpha = 0.9, a = 1, b = 1, t = 5$ değerleri için $v_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi

4.2. Kesirli Mertebeden (2+1) Boyutlu Broer-Kaup-Kupershmidt Denklemi

2001 yılında Ying ve Lou tarafından yapılan çalışmada Bäcklund dönüşümü kullanılarak (2+1) boyutlu Broer-Kaup Kupershmidt denklemi analitik olarak çözüldü (Ying ve Lou, 2001). 2005 yılında Jian-Ping ve Chun-Long tarafından yapılan çalışmada genişletilmiş dönüşüm yardımı ile (2+1) boyutlu Broer-Kaup-Kupershmidt denkleminin bazı soliton çözümleri elde edildi (Jian-Ping ve Chun-Long, 2005). 2006 yılında ise Yomba tarafından yapılan çalışmada ise modifiye edilmiş genişletilmiş alt denklem yöntemi ile (2+1) Broer-Kaup-Kupershmidt denklemi analitik olarak çözüldü (Yomba, 2006). 2017 yılında Lan ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada ise bilinear form, Bäcklund dönüşümü ve Lax çifti yardımıyla (2+1) boyutlu Broer-Kaup-Kupershmidt denkleminin çözümleri bulundu (Lan ve ark., 2017).

Zaman değişkenine göre conformable kesirli mertebeden (2+1) boyutlu Broer-Kaup-Kupershmidt denklem sistemi, $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right) - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \left(v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

olarak göz önüne alınsın. (4.2.1) ile verilen kısmi diferansiyel denklem sistemine

$$u(x, y, t) = U(\xi), \quad v(x, y, t) = V(\xi)$$

olmak üzere

$$\xi = x + y + k \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad (4.2.2)$$

şeklinde dalga dönüşümünün uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} kU_{\xi\xi} - U_{\xi\xi\xi} + 2(U_\xi^2 + UU_{\xi\xi} + V_{\xi\xi}) &= 0, \\ kV_\xi + V_{\xi\xi} + 2(VU_\xi + UV_\xi) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

lineer olmayan adi türevli diferansiyel denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminde bulunan ilk denklemde iki kez, ikinci denklemde ise bir kez integral alınırsa

$$\begin{aligned} kU - U_\xi + 2V + U^2 &= 0, \\ kV + V_\xi + 2UV &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

denklem sistemi elde edilir. Elde edilen bu denklem sistemindeki ilk eşitlikten V bilinmeyeninin değeri

$$V = \frac{-kU + U_\xi - U^2}{2} \quad (4.2.5)$$

olarak bulunur. (4.2.5) ile bulunan V değerinin (4.2.4) denklem sistemindeki ikinci eşitlikte yerine yazılmasıyla

$$U_{\xi\xi} - k^2U - 3kU^2 - 2U^3 = 0 \quad (4.2.6)$$

ifadesi elde edilir. (4.2.6) denkleminde bulunan en yüksek mertebeden türev içeren $U_{\xi\xi}$ ve en yüksek dereceden lineer olmayan U^3 ifadeleri arasındaki homojen dengeden $m + 2 = 3m$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikten $m = 1$ değeri elde edilir. Böylece (4.2.6) adi diferansiyel denkleminde, $Y = \tanh(\xi)$ olmak üzere

$$U(\xi) = S(Y) = a_0 + a_1Y \quad (4.2.7)$$

şeklinde analitik çözüm aranır. (4.2.7) ile verilen eşitliğin ve (3.3.8) ile verilen ikinci türevin (4.2.6) denkleminde yerlerine yazılmasıyla

$$-2a_1Y(1 - Y^2) - k^2(a_0 + a_1Y) - 3k(a_0 + a_1Y)^2 - 2(a_0 + a_1Y)^3 = 0 \quad (4.2.8)$$

eşitliği elde edilir. (4.2.8) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra Y^i ($i = 0, 1, 2, 3$) ifadelerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle

$$Y^0: -2a_0^3 - 3a_0^2k - a_0k^2 = 0$$

$$Y^1: -2a_1 - 6a_0^2a_1 - 6a_0a_1k - a_1k^2 = 0$$

$$Y^2: -6a_0a_1^2 - 3a_1^2k = 0$$

$$Y^3: -2a_1^3 + 2a_1 = 0$$

denklem sistemi bulunur. Elde edilen bu denklem sisteminin çözülmesiyle

$$a_0 = 1, a_1 = 1, k = -2$$

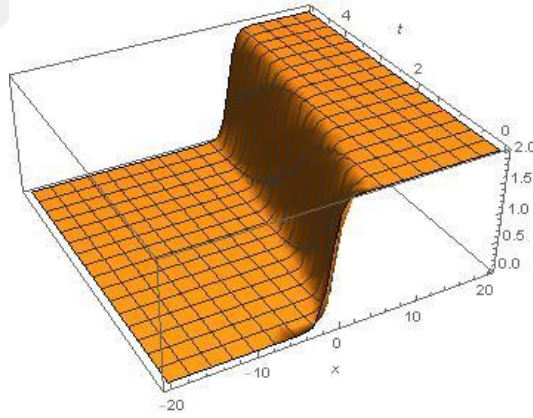
değerleri elde edilir. Bu parametre değerlerin ve (4.2.2) dalga dönüşümünün (4.2.7) eşitliğinde yerlerine yazılmasıyla ve (4.2.5) eşitliğinin kullanılmasıyla (4.2.1) ile verilen zaman değişkenine göre conformable kesirli mertebeden (2+1) boyutlu Broer-Kaup-Kupersmidt denklem sisteminin analitik çözümleri

$$u(x, y, t) = 1 + \tanh\left(x + y - 2\frac{t^\alpha}{\alpha}\right),$$

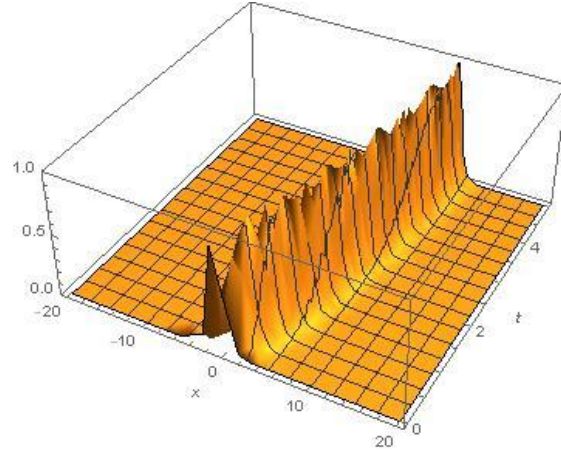
$$v(x, y, t) = \operatorname{sech}^2\left(x + y - 2\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)$$

olarak bulunur.

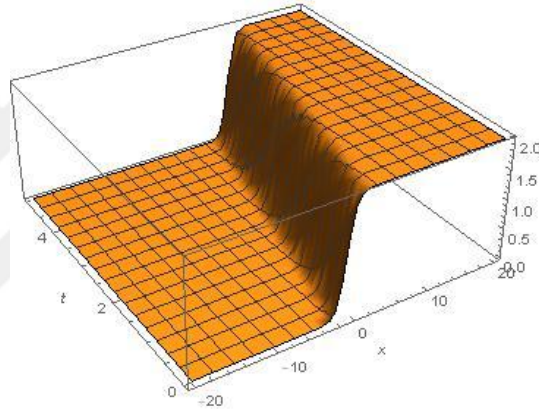
(Şekil 4.21.)-(Şekil 4.24.) ile verilen yüzeylerde conformable kesirli mertebeden türev içeren Broer-Kaup-Kupersmidt denkleminin $y = 1$ ve farklı α değerlerinde $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ analitik çözümlerinin yüzeyleri verildi. Ayrıca (Şekil 4.25.)-(Şekil 4.30.) ile verilen yüzeylerde ise bu kısımda ele alınan denklemin $\alpha = 0.9$ ve farklı t değerlerinde $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ analitik çözümlerinin yüzeyleri verildi.



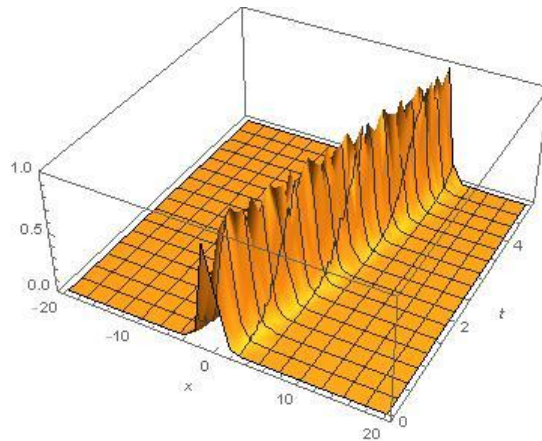
Şekil 4.21. $\alpha = 0.5, y = 1$ değerleri için $u(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



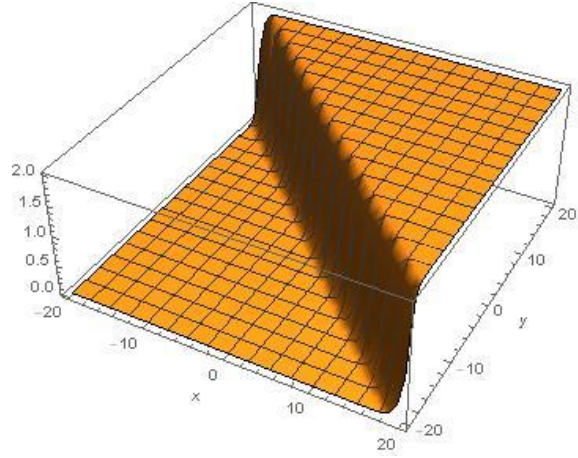
Şekil 4.22. $\alpha = 0.5, y = 1$ değerleri için $v(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



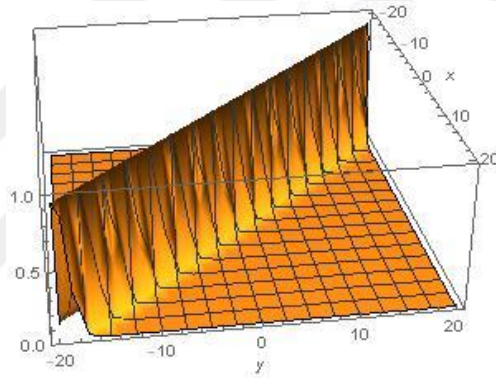
Şekil 4.23. $\alpha = 0.9, y = 1$ değerleri için $u(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



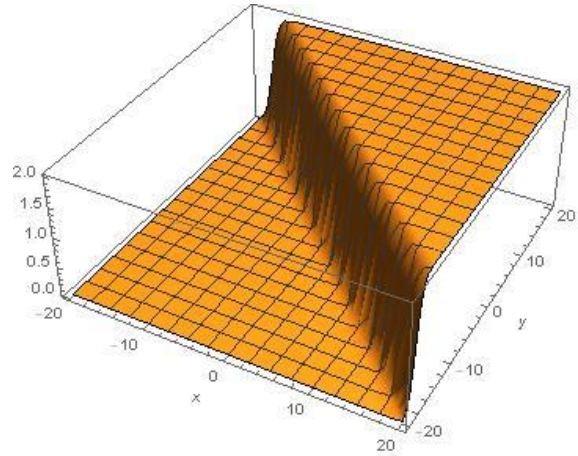
Şekil 4.24. $\alpha = 0.9, y = 1$ değerleri için $v(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



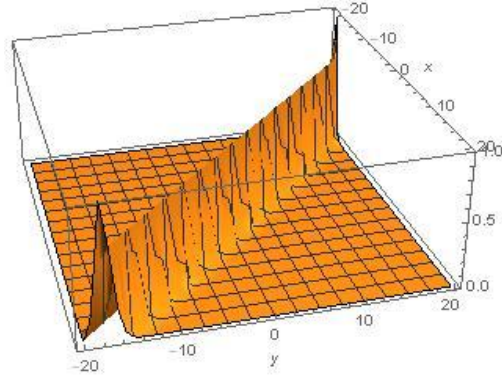
Şekil 4.25. $\alpha = 0.9, t = 0.1$ değerleri için $u(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



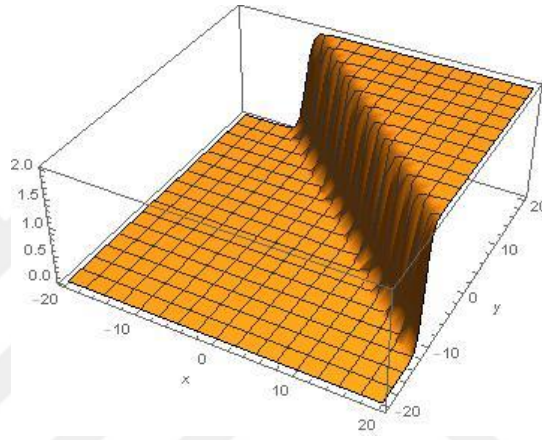
Şekil 4.26. $\alpha = 0.9, t = 0.1$ değerleri için $v(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



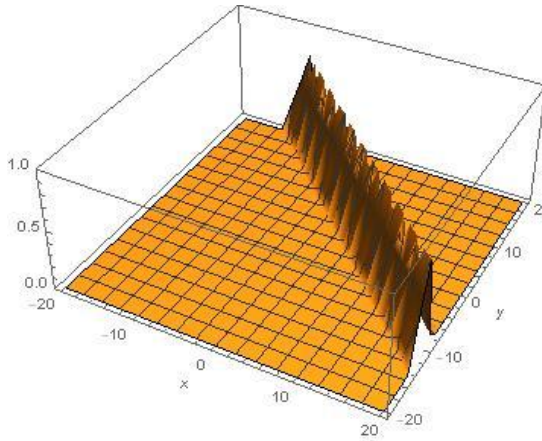
Şekil 4.27. $\alpha = 0.9, t = 1$ değerleri için $u(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



Şekil 4.28. $\alpha = 0.9, t = 1$ değerleri için $v(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



Şekil 4.29. $\alpha = 0.9, t = 5$ değerleri için $u(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



Şekil 4.30. $\alpha = 0.9, t = 5$ değerleri için $v(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi

4.3. Kesirli Mertebeden (2+1) Boyutlu Zoomeron Denklemleri

2012 yılında Alquran ve Kamel tarafından yapılan çalışmada (2+1) boyutlu Zoomeron denklemi genişletilmiş tanjant hiperbolik, üstel fonksiyon, sechp-tanhp yöntemleri kullanılarak analitik olarak çözüldü (Alquran ve Kamel, 2012). 2013 yılında Quawasmeh tarafından yapılan çalışmada sine-cosine yöntemi kullanılarak (2+1) boyutlu Zoomeron denkleminin analitik çözümleri elde edildi (Quawasmeh, 2013). 2014 yılında Khan ve Akbar tarafından yapılan çalışmada ise (2+1) boyutlu Zoomeron denkleminin dalga çözümleri modifiye edilmiş basit denklem ve üstel fonksiyon yöntemleri yardımıyla elde edildi (Khan ve Akbar, 2014).

2015 yılında Manafian ve arkadaşları tarafından yapılan makalede $\tan(\phi(\xi)/2)$ yöntemi yardımı ile (2+1) boyutlu Zoomeron denkleminin analitik çözümleri bulundu (Manafian ve ark., 2015). Aksoy ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada zaman değişkenine bağlı Riemann Liouville kesirli mertebeden türev içeren (2+1) boyutlu Zoomeron denklemi alt denklem ve genelleştirilmiş Kudryashov yöntemleri kullanılarak analitik olarak çözüldü (Aksoy ve ark., 2016)

Zaman değişkenine göre conformable kesirli mertebeden (2+1) boyutlu Zoomeron denklemi, $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere,

$$\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial t^{2\alpha}} \left(\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}{u} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}{u} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^\alpha u^2}{\partial t^\alpha} \right) = 0 \quad (4.3.1)$$

olarak ele alınsın. (4.2.1) conformable kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denkleminde

$$u(x, y, t) = U(\xi), \xi = x + y + k \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad (4.3.2)$$

şeklinde dalga dönüşümü uygulanırsa

$$(k^2 - 1) \left(\frac{U_{\xi\xi}}{U} \right)_{\xi\xi} + 2k(U^2)_{\xi\xi} = 0$$

lineer olmayan diferansiyel denklemi bulunur. Bu denklemde iki kez integral alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, c bir integral sabiti olmak üzere

$$(k^2 - 1)U_{\xi\xi} + 2kU^3 + cU = 0 \quad (4.3.3)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte bulunan $U_{\xi\xi}$ ve U^3 terimleri arasındaki homojen dengeden $m = 1$ değeri elde edilir. Böylece (4.3.3) denkleminde $Y = \tanh(\xi)$ olmak üzere

$$U(\xi) = S(Y) = a_0 + a_1 Y \quad (4.3.4)$$

şeklinde analitik çözüm aranır. (4.3.4) ile verilen eşitliğin ve bu eşitliğin (3.3.8) ile verilen ikinci türevinin (4.3.3) denkleminde yerlerine yazılmasıyla

$$2a_1Y(1 - k^2)(1 - Y^2) + 2k(a_0 + a_1Y)^3 + c(a_0 + a_1Y) = 0 \quad (4.3.5)$$

eşitliği elde edilir. (4.3.5) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra Y^0 , Y^1 , Y^2 ve Y^3 ifadelerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle

$$Y^0: ca_0 + 2ka_0^3 = 0$$

$$Y^1: ca_1 + 6ka_0^2a_1 + 2a_1(1 - k^2) = 0$$

$$Y^2: 6ka_0a_1^2 = 0$$

$$Y^3: 2ka_1^3 + 2a_1(k^2 - 1) = 0$$

şeklinde denklem sistemi bulunur. Bulunan bu denklem sisteminin çözülmesiyle bazı sabitlerin değerleri

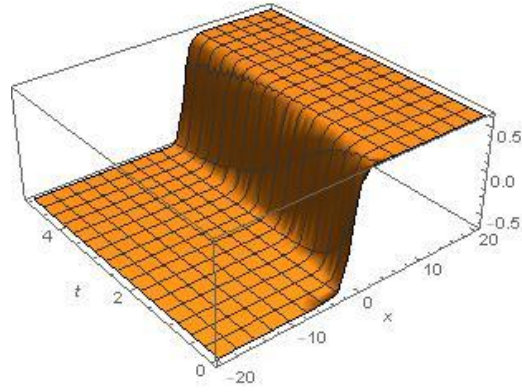
$$a_0 = 0, a_1 = \pm \frac{\sqrt{c}}{\sqrt[4]{2(c+2)}}, k = -\frac{\sqrt{c+2}}{\sqrt{2}}$$

olarak elde edilir. Bu parametre değerlerin ve (4.3.2) dalga dönüşümünün (4.3.4) eşitliğinde yerlerine yazılmasıyla (4.3.1) ile verilen zaman değişkenine göre conformable kesirli mertebeden (2+1) boyutlu Zoomeron denkleminin analitik çözümleri

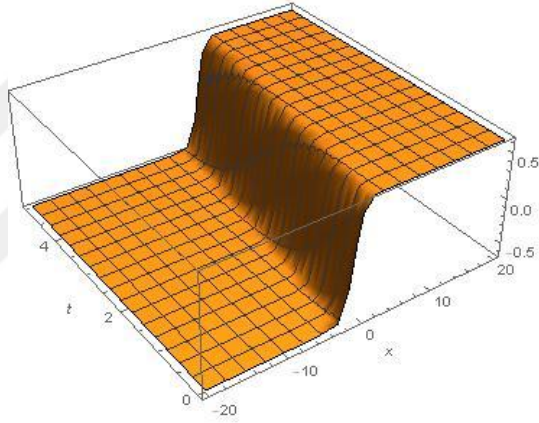
$$u_1(x, y, t) = \frac{\sqrt{c} \tanh\left(x + y - \frac{\sqrt{c+2}t^\alpha}{\sqrt{2}\alpha}\right)}{\sqrt[4]{2(c+2)}}$$

$$u_2(x, y, t) = -\frac{\sqrt{c} \tanh\left(x + y - \frac{\sqrt{c+2}t^\alpha}{\sqrt{2}\alpha}\right)}{\sqrt[4]{2(c+2)}}$$

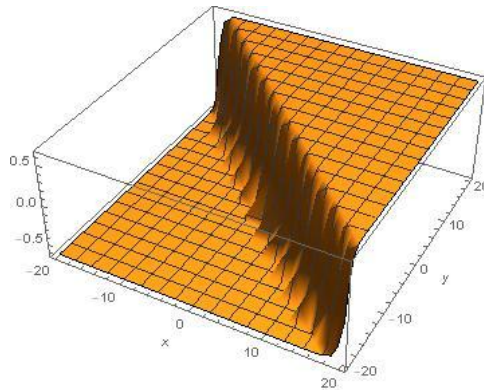
olarak bulunur. (Şekil 4.31.)-(Şekil 4.32.) ile verilen Zoomeron denkleminin $y = 1$ ve farklı α değerlerinde $u_1(x, y, t)$ analitik çözümünün yüzeyleri verildi. Ayrıca (Şekil 4.33.)-(Şekil 4.35.) ile verilen yüzeylerde ise göz önüne alınan denklemin $\alpha = 0.9, c = 1$ ve farklı t değerlerinde $u_1(x, y, t)$ analitik çözümünün yüzeyleri verildi. (Şekil 4.36.)-(Şekil 4.37.) ile verilen yüzeylerde Zoomeron denkleminin $y = 1, c = 1$ ve farklı α değerlerinde $u_2(x, y, t)$ analitik çözümünün yüzeyleri verildi. (Şekil 4.38.)-(Şekil 4.40.) ile verilen yüzeylerde ise göz önüne alınan denklemin $\alpha = 0.9, c = 1$ ve farklı t değerlerinde $u_2(x, y, t)$ analitik çözümünün yüzeyleri verildi.



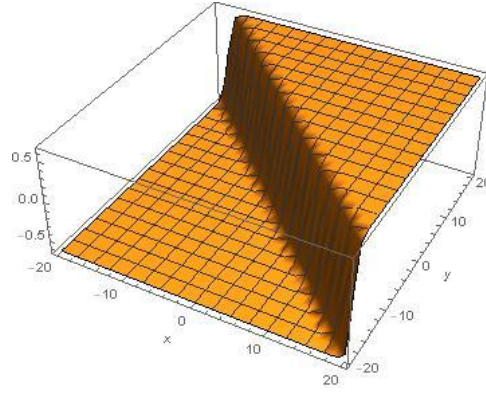
Şekil 4.31. $\alpha = 0.5, c = 1, y = 1$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



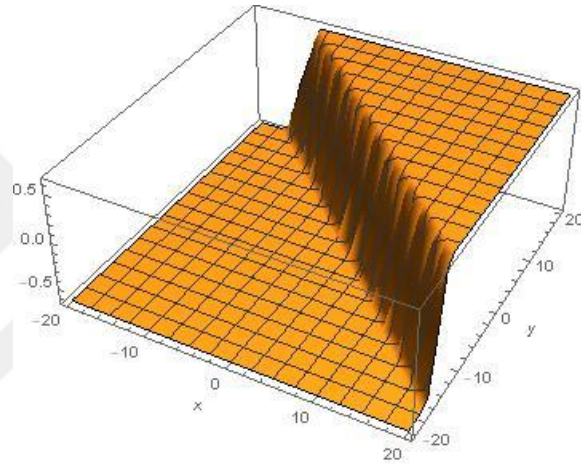
Şekil 4.32. $\alpha = 0.9, c = 1, y = 1$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



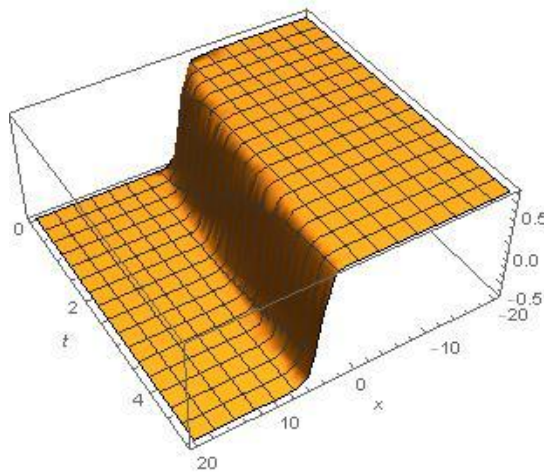
Şekil 4.33. $\alpha = 0.9, c = 1, t = 0.1$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



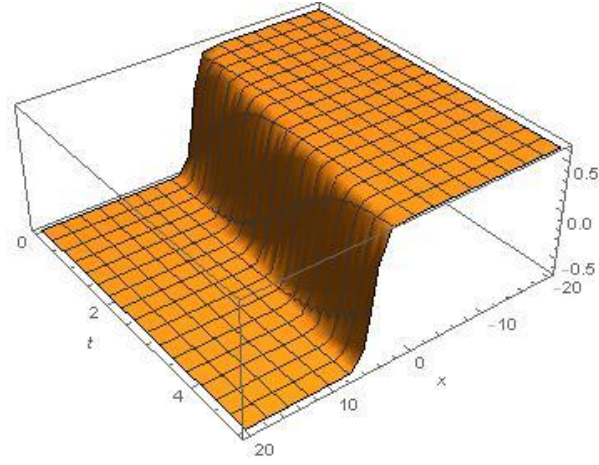
Şekil 4.34. $\alpha = 0.9, c = 1, t = 1$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



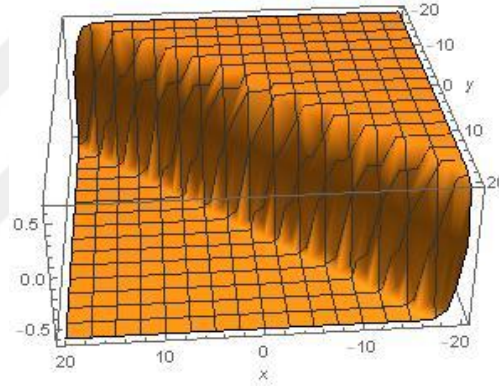
Şekil 4.35. $\alpha = 0.9, c = 1, t = 5$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



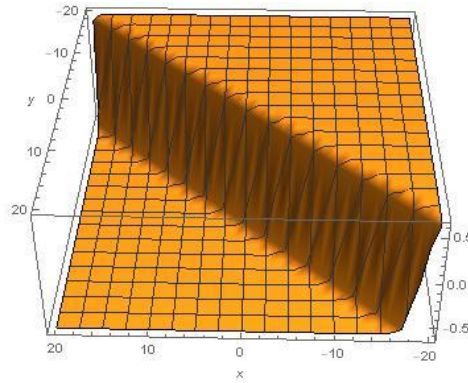
Şekil 4.36. $\alpha = 0.5, c = 1, y = 1$ değerleri için $u_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



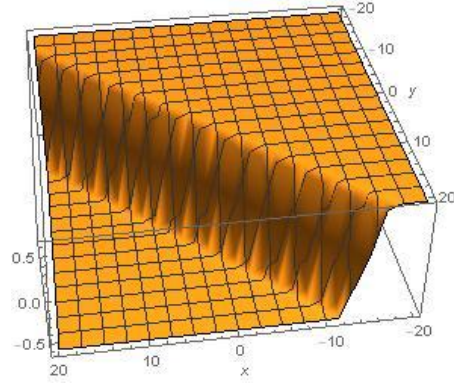
Şekil 4.37. $\alpha = 0.9, c = 1, y = 1$ değerleri için $u_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



Şekil 4.38. $\alpha = 0.9, c = 1, t = 0.1$ değerleri için $u_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



Şekil 4.39. $\alpha = 0.9, c = 1, t = 1$ değerleri için $u_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi



Şekil 4.40. $\alpha = 0.9, c = 1, t = 5$ değerleri için $u_2(x, y, t)$ çözümünün yüzeyi

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, tanjant hiperbolik yöntemi kullanılarak zaman değişkenine göre conformable kesirli türev içeren $(2+1)$ boyutlu Burgers, Broer-Kaup-Kupershmidt ve Zoomeron denklemlerinin tam çözümleri elde edildi.

Tezde ele alınan conformable kesirli türev içeren kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümleri araştırılırken, denklemler dalga dönüşümü yardımı ile tamsayı mertebeli adi türevli diferansiyel denklemlere dönüştürüldü. Bu süreçten sonra elde edilen tam çözümlerde yer alan parametrelerin bazı değerleri için conformable kesirli türev içeren kısmi türevli denklemlerin yüzeyleri verildi.

Sonuç olarak, matematiksel modelleme ile ortaya çıkan ve zaman değişkenine göre conformable kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin tam çözümleri tanjant hiperbolik yöntemi ile elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- Abdeljawad, T. 2015. On conformable fractional calculus. **Journal of computational and Applied Mathematics**, 279:57-66.
- Abdou M.A. ve Soliman A.A., 2005. Variational iteration method for solving Burger's and coupled Burger's equations. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 181: 245-251.
- Akbulut A. ve Kaplan M., 2018. Auxiliary equation method for time-fractional differential equations with conformable derivative. **Computers and Mathematics with Applications**, 75: 876-882.
- Aksoy E., Çevikel C.A., Bekir A., 2016. Soliton solutions of (2+1)-dimensional time-fractional Zoomeron equation. **Optik**, 172: 6933-6942.
- Alquran M. ve Kamel A.K., 2012. Mathematical methods for a reliable treatment of the (2+1)-dimensional Zoomeron equation. **Mathematical Sciences**, 6:11.
- Baskonus H.M. ve Bulut H., 2015. On some new analytical solutions for the (2+1)-dimensional Burgers equation and the special type of Dodd-Bullough-Mikhailov equation. **Journal of Applied Analysis and Computation**, 5: 613-625.
- Benghorbal, M.M., 2004. Power series solutions of fractional differential equations and symbolic derivatives and integrals. PhD thesis, Faculty of Graduate Studies The University of Western Ontario, Canada.
- Cao, C., Geng X., Wang H., 2002. Algebraic-geometric solution of the (2+1) dimensional Burgers equation with a discrete variable. **Journal of Mathematical Physics**, 43:621-643.
- Chung W.S., 2015. Fractional Newton mechanics with conformable fractional derivative. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 290: 150–158.
- Ebadi G. ve Biswas A., 2011. The G'/G method and topological soliton solution of the $K(m,n)$ equation. **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.**, 16:2377–2382.
- Ekici M., Mirzazadeh M., Eslami M., Zhou Q., Moshokoa S.P., Biswas A., Belic M., 2016. Optical soliton perturbation with fractional-temporal evolution by first integral method with conformable fractional derivatives. **Optik**, 127:10659–10669.
- Eslami M., Vajargah B.F., Mirzazadeh M., Biswas A., 2014. Application of first integral method to fractional partial differential equations. **Indian J. Phys.**, 88:177–184
- Feng Z. ve Wang X., 2003. The first integral method to the two-dimensional Burgers–Korteweg–de Vries equation. **Physics Letters A**, 308:173–178.
- Fu Z., Liu S., Liu S., Zhao Q., 2001. New Jacobi elliptic function expansion and new periodic solutions of nonlinear wave equations. **Physics Letters A**, 290:72–76.
- He J.H. ve Wu X.H., 2006. Exp-function method for nonlinear wave equations. **Chaos, Solitons and Fractals**, 30: 700–708.
- He J.H. ve Abdou M.A., 2007. New periodic solutions for nonlinear evolution equations using Exp-function method. **Chaos, Solitons and Fractals**, 34: 1421–1429.
- Hilfer P., 2000. Various Approaches to the Fractional Calculus. Applications of Fractional Calculus In Physics. World Scientific, Germany.
- Hosseini K., Bekir A., Ansari R., 2017. New exact solutions of the conformable time-fractional Cahn–Allen and Cahn–Hilliard equations using the modified Kudryashov method. **Optik**, 132:203-209.

- Jian-Ping, F., ve Chun-Long Z., 2005. New exact excitations and soliton fission and fusion for the $(2+1)$ -dimensional Broer–Kaup–Kupershmidt system. **Chinese Physics** 14: 669.
- Khalil, R., Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M., 2014. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264:65-70.
- Khan K. ve Akbar M.A., 2014. Traveling wave solutions of the $(2+1)$ -dimensional Zoomeron equation and the Burgers equations via the MSE method and the Exp-function method. **Ain Schams Engineering Journal**, 5: 247-256.
- Kumar D., Hosseini K., Samadani F., 2017. The Sine-Gordon Expansion Method to Look For The Traveling Wave Solutions of The Tzitzeica Type Equations in Nonlinear Optics. **Optik**, 149: 439-446.
- Lan Z.Z., Gao Y.T., Yang J.W., Su Chuan-Qi, Mao Bing-Qing, 2017. Solitons, Bäcklund transformation and Lax pair for a $(2+1)$ -dimensional Broer-Kaup - Kupershmidt system in the shallow water of uniform depth. **Communications in nonlinear science and numerical simulation**, 44:360-372.
- Lai S., Lv X. ve Shuai M., 2009. The Jacobi elliptic function solutions to a generalized Benjamin–Bona–Mahony equation. **Mathematical and Computer Modelling**, 49: 369-378.
- Liu S., Fu Z., Liu S., Zhao Q., 2001. Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations. **Physics Letters A**, 289:69–74.
- Lü Z. ve Zhang H., 2003. On a further extended tanh method. **Physics Letters**, 307: 269-273.
- Malfliet W. ve Hereman W., 1996. The tanh method: I. Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations. **Physica Scripta**, 54: 6.
- Malfliet W., 2004. The tanh method: a tool for solving certain classes of nonlinear evolution and wave equations. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 164: 529-541.
- Manafian J., Lakestani M., Bekir A., 2015. Study of the Analytical Treatment of the $(2+1)$ -Dimensional Zoomeron, the Duffing and the SRLW Equations via a New Analytical Approach. **Journal of Mathematical and Computational Science**, 2:243-268.
- Miller K.S. ve Ross B., 1993. An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. J. Wiley-Sons, Canada.
- Nishimoto K., 1991. An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus. Descartes Press, Koriyama.
- Quawasmeh A., 2013. Soliton solutions of $(2+1)$ -Zoomeron equation and Duffing equation and SRLW equation. **Journal of Mathematical and Computational Science**, 3: 1475-1480.
- Podlubny, L., 1999. Fractional Differential Equations. Academic Press, London.
- Rezazadeh H., Mirzazadeh M., Mirhosseini-Alizamini S.M., Neirameh A., Eslami M., Zhou Q., 2018. Optical solitons of Lakshmanan-Porsezian-Daniel model with a couple of nonlinearities. **Optik**, 164: 414-423.
- Ross S.L., 1974, Differential Equations, Blaisdell Publishing Company Massachusetts, USA.
- Taşbozan O. ve Kurt A., 2018. New Travelling Wave Solutions for Time-Space Fractional Liouville and Sine-Gordon Equations. **Journal of the Institute of Science and Technology**, 8: 295-303.

- Taşbozan O. ve Bayaslı G., 2018. Conformable Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Homotopi Analiz Yöntemi ile Nümerik Çözümleri. **Afyon Kocatepe Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi**, 18: 842-851.
- Ünal E., Gökdoğan A., Cumhuri İ., 2017. The operator method for local fractional lineardifferential equations. **Optik**, 161: 986-993.
- Yavuz M. ve Yaşkıran B., 2018. Homotopy methods for fractional linear/nonlinear differential equations with a local derivative operator. **Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi**, 20: 75-89.
- Ying, J. ve Sen-yue L., (2001). Abundant coherent structures of the (2+ 1)-dimensional Broer-Kaup-Kupershmidt equation. **Zeitschrift für Naturforschung A**, 56: 619-625.
- Yomba E., (2006). The modified extended Fan sub-equation method and its application to the (2+1)-dimensional Broer–Kaup–Kupershmidt equation. **Chaos, Solitons & Fractals**, 27: 187-196.
- Wang, Q., Yong C., Zhang H., (2005). A new Riccati equation rational expansion method and its application to (2+ 1)-dimensional Burgers equation. **Chaos, Solitons & Fractals**, 25: 1019-1028.
- Wang M., Li X., Zhang J., 2008. The G'/G -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. **Physics Letters A**, 372: 417–423.
- Wazwaz A., 2003. The tanh method for traveling wavesolutions of nonlinear equations. **Applied Mathematics and Computation**, 154: 713–723.
- Wazwaz, A., (2004) The tanh method for traveling wave solutions of nonlinear equations. **Applied Mathematics and Computation**, 154: 713-723.
- Wazwaz A., 2005. The tanh method: exact solutions of the sine-Gordon and the sinh-Gordon equations. **Applied Mathematics and Computation**, 167: 1196–1210.
- Wazwaz, A., (2006) The tanh method and a variable separated ODE method for solving double sine-Gordon equation. **Physics Letters A**, 350: 367-370.
- Wazwaz A., 2007. The extended tanh method for abundant solitary wave solutions of nonlinear wave equations. **Applied Mathematics and Computation**, 187: 1131–1142.
- Wazwaz A., 2007. The extended tanh method for new solitons solutions for many forms of the fifth-order KdV equations. **Applied Mathematics and Computation**, 184: 1002–1014.
- Weilbeer, M. 2005. Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical background: Papierflieger.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Hatay'ın İskenderun ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini burada tamamladı. 2009 yılında kazandığı Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2013 yılında mezun oldu. 2014 yılında Mustafa Kemal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Pedagojik Formasyon eğitime başladı ve aynı yıl eğitimini tamamladı. 2013 yılında Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yüksek lisansa başladı. Şu an Doğru Cevap Özel Öğretim Kurumlarında matematik öğretmenliği yapmaktadır.

