

T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ DÜZLEMİNDE MİNİMUM ENERJİLİ
BEZIER EĞRİLERİ

Hale ERİŞKİN

Danışman
Prof. Dr. Ahmet YÜCESAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA – 2015



© 2015 [Hale ERİŞKİN]

TEZ ONAYI

Hale ERİŞKİN tarafından hazırlanan "Lorentz Düzleminde Minimum Enerjili Bezier Eğrileri" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman

Prof. Dr. Ahmet YÜCESAN

Süleyman Demirel Üniversitesi

Jüri Üyesi

Prof. Dr. Nihat AYYILDIZ

Süleyman Demirel Üniversitesi

Jüri Üyesi

Doç. Dr. Erol YAŞAR

Mersin Üniversitesi

Enstitü Müdür V.

Doç. Dr. Yasin TUNCER

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Hale ERİŞKİN

İÇİNDEKİLER

	sayfa
İÇİNDEKİLER.....	<i>i</i>
ÖZET.....	<i>ii</i>
ABSTRACT.....	<i>iii</i>
TEŞEKKÜR.....	<i>iv</i>
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	<i>v</i>
SİMGELER DİZİNİ.....	<i>vi</i>
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	6
2.1. Bezier Eğrisi.....	6
2.2. Lorentz Düzlemi.....	7
2.3. Varyasyonel Hesap.....	11
3. LORENTZ DÜZLEMİNDE MİNİMUM ENERJİLİ BEZİER EĞRİLERİ.....	13
3.1. Minimum Esneme Enerjili Bezier Eğriler.....	17
3.2. Minimum Gerilme Enerjili Bezier Eğriler.....	21
3.3. Minimum Titreme Enerjili Bezier Eğriler.....	26
4. MATRİSLER YARDIMIYLA MİNİMUM ENERJİLİ BEZİER EĞRİLERİN YAPILANDIRILMASI.....	31
4.1. Minimum Titreme Enerjili Bezier Eğriler.....	31
4.2. Problemin Genel Metod ile Çözümü.....	34
KAYNAKLAR	42
ÖZGEÇMİŞ	46

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LORENTZ DÜZLEMİNDE MİNİMUM ENERJİLİ BEZİER EĞRİLERİ

Hale ERİŞKİN

Süleyman Demirel Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet YÜCESAN

Bu tez çalışmasında, Lorentz düzleminde Bezier eğrilerinin nedensel(causal) karakterizasyonunu veren bir teorem elde edildi ve farklı nedensel karakterlere sahip Bezier eğri örnekleri verildi. Daha sonra, Lorentz düzleminde minimum esneme, gerilme ve titreme enerjili Bezier eğrilerinin bilinmeyen kontrol noktaları, bilinen kontrol noktalarının lineer birleşimi şeklinde bulundu. Minimum esneme, gerilme ve titreme enerjili Bezier eğri örnekleri verildi. Son olarak, Öklid düzleminde minimum titreme enerjili Bezier eğrilerinin bilinmeyen kontrol noktaları, matrisler yardımıyla farklı bir yöntem ile elde edildi ve bu yöntemin Lorentz düzleminde de geçerli olduğu sonucuna varıldı.

Anahtar Kelimeler: Bezier eğrileri, minimum enerji, esneme enerjisi, gerilme enerjisi, titreme enerjisi, Lorentz düzlem.

2015, 46 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

BEZIER CURVES WITH MINIMAL ENERGY IN THE LORENTZIAN PLANE

Hale ERİŞKİN

Suleyman Demirel University

Graduate School of Applied and Natural Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet YÜCESAN

In this thesis, a theorem which gives the causal characterization of Bezier curves in Lorentzian plane is obtained and examples of the Bezier curve having different causal characters are given. Then, the unknown control points of the Bezier curves with minimal stretch, strain and jerk energy in Lorentzian plane are found linear combination of the known control points. The examples of Bezier curves with minimal stretch, strain and jerk energy are given. Finally, the unknown control points of Bezier curves with minimal jerk energy in Euclidean plane are obtained a different method by means of matrix and it is concluded that this method is valid in Lorentzian plane.

Key Words: Bezier curves, minimal energy, stretch energy, strain energy, jerk energy, Lorentzian plane.

2015, 46 pages

TEŞEKKÜR

Bu çalışma için beni yönlendiren ve çalışmamın her aşamasında ilgi ve desteğini benden esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Ahmet YÜCESAN'a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

3354–YL2–12 No'lu Proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi Başkanlığı'na teşekkür ederim.

Ayrıca yüksek lisans çalışmam boyunca beni destekleyen ve daima yanımda olan eşim Ekinhan ERİŞKİN'e, aileme ve arkadaşım Dr. Gözde ÖZKAN TÜKEL'e teşekkür ederim.

Hale ERİŞKİN
ISPARTA, 2015

ŞEKİLLER DİZİNİ

	sayfa
Şekil 1.1. Doğrusal Bezier eğrisi.....	2
Şekil 1.2. $t = 0, 25$ için kuadratik Bezier eğrisi.....	2
Şekil 1.3. $t = 0, 25$ için kubik Bezier eğrisi.....	3
Şekil 1.4. Beşinci dereceden Bezier eğrisi.....	3
Şekil 3.1. Minimum esneme enerjili Bezier eğrisinin geometrik yapısı.....	19
Şekil 3.2. Üçüncü dereceden minimum esneme enerjili spacelike Bezier eğrisi.....	20
Şekil 3.3. Üçüncü dereceden minimum esneme enerjili timelike Bezier eğrisi.....	21
Şekil 3.4. Üçüncü dereceden minimum esneme enerjili lightlike Bezier eğrisi.....	21
Şekil 3.5. Minimum gerilme enerjili Bezier eğrisinin geometrik yapısı.....	24
Şekil 3.6. Üçüncü dereceden minimum gerilme enerjili spacelike Bezier eğrisi.....	24
Şekil 3.7. Üçüncü dereceden minimum gerilme enerjili timelike Bezier eğrisi.....	25
Şekil 3.8. Üçüncü dereceden minimum gerilme enerjili lightlike Bezier eğrisi.....	25
Şekil 3.9. Minimum titreme enerjili Bezier eğrisinin geometrik yapısı.....	28
Şekil 3.10. Üçüncü dereceden minimum titreme enerjili spacelike Bezier eğrisi.....	28
Şekil 3.11. Üçüncü dereceden minimum titreme enerjili timelike Bezier eğrisi.....	29
Şekil 3.12. Üçüncü dereceden minimum titreme enerjili lightlike Bezier eğrisi.....	30
Şekil 3.13. Dördüncü dereceden minimum titreme enerjili Bezier eğrisi.....	30

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
$\mathbb{R}^2$	Öklid düzlemi
$\mathbb{L}^2$	Lorentz düzlemi
$\langle, \rangle_{\mathbb{L}}$	Lorentz metrik
$C^\infty(\mathbb{L}^2, \mathbb{R})$	$\mathbb{L}^2$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi
$B_k^n(t)$	Bernstein polinomu
Δ^r	Diferansiyel operatörü
P_k	k . kontrol noktası
V	Reel vektör uzayı
W	Alt vektör uzayı
$W^\perp$	Dik alt uzay
grad	Gradyant
Γ	Kontrol poligonu
$\bar{\Gamma}$	Bilinen kontrol noktalarının kümesi
$\tilde{\Gamma}$	Bilinmeyen kontrol noktalarının kümesi
D	Köşegen matris
R	Dönme matrisi

1. GİRİŞ

Holladay'ın 1957 yılında integrasyon ve fonksiyon interpolasyonu için kübik splinleri tanıtmışından sonra minimum enerjili eğrilerin modellenmesi bilgisayar destekli dizaynın önemli bir konusu haline gelmiştir. Bu tür eğriler günümüzde hareket dizaynı, fontların üretiminde, modelleme çalışmalarında, bilgisayar görüntüsü, görüntü işleme, otomotiv endüstrisi, araba gövdeleri tasarımı gibi bir çok alanda kullanılmaktadır. Yakın zamana kadar minimum enerjili eğri modellerini elde edebilmek için iterasyonlu nümerik metodlara başvurulmuştur. Fakat minimum enerjili eğri modelleri geometrik hesabın en temel problemlerinden birisi olduğundan günümüzde bu eğri modellerinin dizaynına geometrik bir problem olarak yaklaşılmaktadır ve bu eğri modelleri varyasyonel hesap teknikleriyle elde edilebilmektedir. Özellikle, bilgisayarda yapılabilen resim ve hareketlerde sıklıkla kullanılan Bezier eğrilerinin minimum enerjili modeli, mevcut kontrol noktaları yardımıyla elde edilebilen ve yeni geliştirilen bir konudur (Xu vd., 2011).

n . dereceden $P_0, P_1, \dots, P_n$ kontrol noktalarına sahip bir Bezier eğrisi,

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

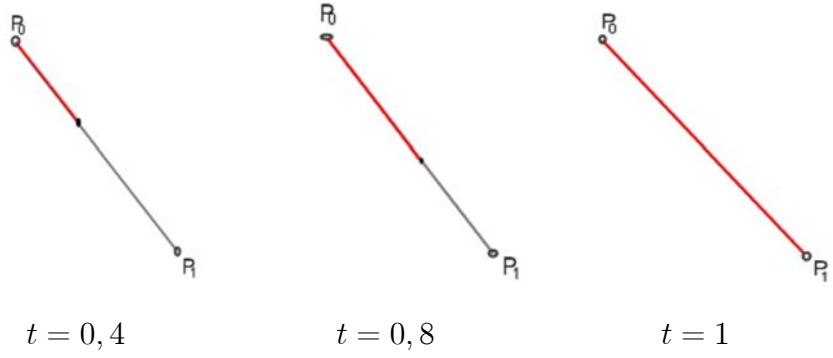
şeklinde verilen n . dereceden bir Bernstein polinomu yardımıyla

$$B(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i, \quad t \in [0, 1]$$

formunda tanımlanır. Bezier eğrisinin parametrik denkleminde yer alan i değeri $n + 1$ adet köşeyi indekslemede kullanılmaktadır. t nin 0 ile 1 arasında aldığı değerler eğrinin ara noktalarını belirler. $t = 0$ değeri eğrinin P_0 başlangıç noktasına, $t = 1$ değeri ise eğrinin P_n bitim noktasına karşılık gelir. n ise köşe sayısının bir eksiği olup çizilecek eğrinin derecesini belirler (Farin, 2002). Bezier eğrileri sahip oldukları kontrol noktası sayısına göre lineer, kuadratik, kubik veya daha yüksek dereceli eğriler olarak isimlendirilir. Eğer Bezier eğrisi sadece iki kontrol noktasıyla oluşturuluyorsa $t \in [0, 1]$ arasında

$$B(t) = b_0 + t(b_1 - b_0) = (1-t)b_0 + tb_1$$

şeklinde verilen doğrusal interpolasyon formuna dönüşür (Şekil 1.1).

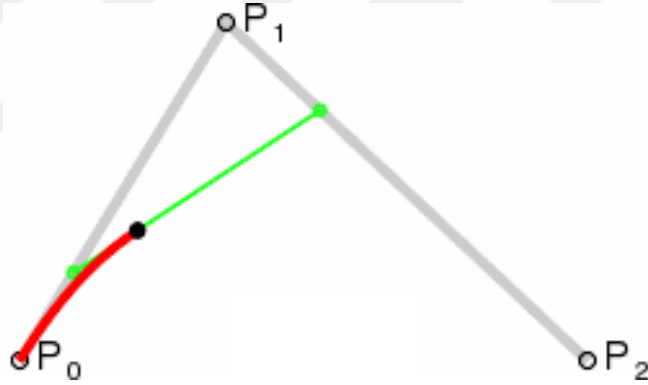


Şekil 1.1 Doğrusal Bezier eğrisi (Wikipedia, 2015).

P_0, P_1, P_2 gibi 3 kontrol noktasına sahip Bezier eğrisi

$$B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t) P_1 + t^2 P_2, \quad t \in [0, 1]$$

şeklindeki kuadratik forma dönüşür (Şekil 1.2).

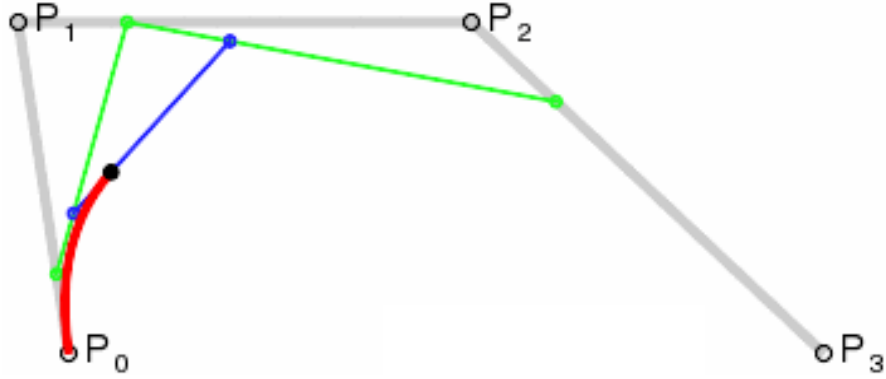


Şekil 1.2 $t = 0,25$ için kuadratik Bezier eğrisi (Wikipedia, 2015).

Benzer şekilde P_0, P_1, P_2, P_3 gibi 4 kontrol noktasına sahip kübik Bezier eğrisi

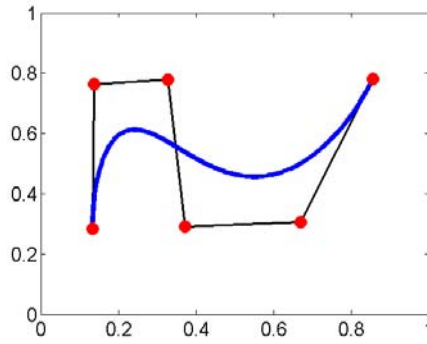
$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3, \quad t \in [0, 1]$$

formundadır (Şekil 1.3).



Şekil 1.3. $t = 0,25$ için kubik Bezier eğrisi (Wikipedia, 2015).

Böylelikle kontrol noktaları çoğaltılarak daha yüksek dereceli Bezier eğrileri elde edilir (Farin, 2002) (Şekil 1.4).



Şekil 1.4. Beşinci dereceden Bezier eğrisi

Bilgisayar grafiklerinin önemli bir uygulaması olan Bezier eğrileri, ilk olarak 1960 yılında Renault firmasında çalışan Fransız mühendis Pierre Bézier tarafından otomobil gövdelerinin tasarımında kullanılmak üzere geliştirilmiştir. Bezier, her bir bileşeni polinomlarla ifade edilen bu eğri türünü otomobil yüzeyleri üzerinde daha fazla değişiklik yapabilmek için geliştirmiştir. Böylece Bezier'in özel Bernstein polinomları yardımıyla tanımladığı Bezier eğrileri ile sadece otomobil tasarımı değil farklı tasarım alanlarındaki açıklar da büyük ölçüde kapanmıştır. Çünkü günümüzde Bezier eğrileri otomobil, gemi, uçak gövdeleri ve ürün tasarımı gibi endüstriyel tasarımda kullanıldığı gibi eğrilerle kaplama, hareket dizaynı, bilgisayar görüntüsü ve görüntü işleme gibi bir çok alanda

kullanılmaktadır. Bezier eğrileri ile ilgili literatürde birçok çalışma mevcuttur. Bu çalışmalar ışığında Bezier eğrileri ve onun geometrisi Farin G.'nin "curves and surfaces for CAGD" isimli kitabında geniş bir şekilde toparlanmıştır (Farin, 2002). CAD de yapılan çalışmaların büyük bir kısmı minimum enerjili eğriler üzerinedir. 1964 yılında Ferguson, parametrik kübik spline eğrileri kübik spline fonksiyonlarının interpolasyonları yardımı ile tanıttı. Nielson, ilk olarak 1974 yılında C^1 kübik polinomlarına alternatif olarak v -splineları önerdi, 1983 yılında gerilme enerjisinin bir lineer yaklaşımıyla minimum normu (MNN) tanıttı, 1984 yılında MNN üzerine interaktif bir sistem önerdi ve düzlemsel parçaların uç noktalarında eğriligi sıfır olan rasyonel splineları tanımladı. 1985 yılında Hagen minimum enerjili v -splineların bir genellemesi olan τ -splineları tanıttı. 1987 yılında Meier ve Nowachi minimum titreme enerjili splineları çalıştılar. 1988 yılında Higashi düzgün eğrilikli kübik Bezier eğrilerinin teget ve eğriliklerinin yapısını inceledi. 1988 yılında Roulier pozitif eğrilikli kübik Bezier eğrilerinin şartlarını verdi. 1990 yılında Jou ve Han çeşitli kısıtlamalar ile minimal enerjili splineları elde ettiler. 1995 yılında Park ve Ravani, Bezier eğrilerini Riemann manifoldları ve kompakt Lie gruplarında tanımladılar ve Bezier eğrilerini katı cisim hareketleri üzerine uyguladılar. 1999 yılında Brunnet hareket planlama ve kaplama eğrileri için iki varyasyonel model önerdi. 2001 yılında Zhang, C.M. ve Zhang, P.F. minimum bükülme enerjili kübik kaplama spline eğrileri için bir algoritma verdi. 2004 yılında Young ve Cheng minimum bükülme enerjili Hermit eğrilerinin geometrisini incelemiştir. 2006 yılında Popiel ve Noakes, keyfi dereceli küresel Bezier eğrilerinin başlangıç ve bitim noktalarındaki hız ve ivme vektörlerini hesapladılar ve bu formülleri istenen başlangıç hız ve ivmeye sahip eğriyi veren kontrol noktalarını belirlemek için kullandılar. 2007 yılında Popiel ve Noakes, kompakt Lie gruplarında ve kürelerde genelleştirilmiş Bezier eğrilerinin başlangıç ve bitim noktalarındaki hız ve ivme vektörlerinin hesaplanmasını keyfi bağlantılı Riemann manifoldlarına genellediler. 2011 yılında Xu vd., Bernstein polinomları yardımıyla minimum enerjili Bezier eğrilerin geometrik inşasını çalıştılar. Bu çalışmada Öklid düzleminde minimum enerjili Bezier eğrisinin bilinmeyen kontrol noktalarının nasıl

yapılandırılacağı problemini çözdüler. Ayrıca bazı kontrol noktaları verildiğinde minimum enerjiye sahip Bezier eğrisinin diğer kontrol noktalarının nasıl inşa edileceğini buldular ve eğri modelleme tekniklerinin bazı uygulamalarını tanıttılar.

Lorentz-Minkowski geometri hem diferansiyel geometrinin hem de matematiksel fiziğin parçası olarak görülen, matematiksel araştırmaların canlı bir alanıdır. Lorentz-Minkowski geometri fiziğin en başarılı ve güzel teorilerinden biri olan izafiyet teorisinin matematiksel temelini bir temsilidir. Öklid 2—uzay dairesel trigonometri ($\cos$ ve $\sin$) içeren doğrular ve çemberlerin geometrisi olarak bilinirken Lorentz düzlem (veya Minkowski 2—uzay) hiperbolik trigonometri ($\exp$ ve $\ln$) içeren doğrular ve dikdörtgensel hiperbollerin geometrisi olarak bilinir. Bu ise bu düzlemde bulunan eğrileri daha detaylı inceleme imkanı sunar. Ayrıca Öklid geometri sadece küresel geometriyi içerirken Lorentz-Minkowski geometri hem küresel geometriyi hem de hiperbolik geometriyi içine alır (Felsager, 2004). Öklid uzaylarda klasik fizik varken Lorentz-Minkowski uzaylarda göreceli fizik vardır (Schmuckenschläger, 2013). Bu nedenle Bezier eğrilerinin Lorentz-Minkowski geometride çalışılması oldukça ilgi çekicidir. 2008 yılında Georgiev, Minkowski 3—uzayda spacelike Bezier eğrilerinin eğrilik ve torsiyonunu elde etti ve bu uzayda spacelike Bezier eğrilerinin bazı örneklerini verdi. Fakat bugüne kadar Bezier eğrileri Lorentz düzleminde çalışılmadı.

Bu yüksek lisans tez çalışmasında, Lorentz düzleminde Bezier eğrilerinin nedensel(causal) karakterleri verildi ve minimum enerjili Bezier eğrilerinin geometrik yapısı inşa edildi. Bilinen kontrol noktaları yardımıyla minimum esneme, gerilme ve titreme enerjisine sahip Bezier eğrilerinin bilinmeyen kontrol noktaları bilinen kontrol noktalarının lineer bileşimi olarak elde edildi. Ayrıca minimum esneme, gerilme ve titreme enerjili Bezier eğri örnekleri verildi. Son olarak, minimum titreme enerjisine sahip Bezier eğrilerinin bilinmeyen kontrol noktaları matrisler yardımıyla elde edildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, Lorentz düzleminde minimum enerjili Bezier eğrilerini çalışabilmek için gerekli olan temel tanım ve teoremler verildi.

2.1. Bezier Eğrisi

Tanım 2.1. $i = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

şeklinde tanımlanan n . dereceden bir polinoma Bernstein polinomu denir. Burada binom katsayıları

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!}, & 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir (Farin, 2002).

Teorem 2.2. Bernstein polinomları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$\begin{aligned} i) \quad B_i^n(0) &= \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 0, & i \neq 0, \end{cases} \\ ii) \quad B_i^n(1) &= \begin{cases} 1, & i = n \\ 0, & i \neq n, \end{cases} \\ iii) \quad B_i^n(t) &\leq B_i^n\left(\frac{i}{n}\right), t \in [0, 1], \\ iv) \quad B_l^n\left(\frac{i}{n}\right) &< B_i^n\left(\frac{i}{n}\right), l \neq i, \\ v) \quad \sum_{i=0}^n B_i^n(t) &= 1, \end{aligned}$$

$$vi) \quad B_i^n(t) B_l^m(t) = \frac{\binom{n}{i} \binom{m}{l}}{\binom{n+m}{i+l}} B_{i+l}^{n+m}(t),$$

$$vii) \quad \int_0^1 B_i^n(t) dt = \frac{1}{n+1} \text{ (Farin, 2002; Gravesen, 2002).}$$

Tanım 2.3. $t \in [0, 1]$ olmak üzere Bernstein polinomları yardımıyla tanımlanan

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i$$

şeklindeki eğriye $P_0, P_1, \dots, P_n$ kontrol noktalarına sahip bir Bezier eğrisi denir (Gravesen, 2002).

Tanım 2.4. $P_0, P_1, \dots, P_n$ kontrol noktalarına sahip bir Bezier eğrisi için

$$\Delta^r P_i = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} P_{i+k}, \quad 0 \leq i \leq n$$

şeklinde tanımlanan operatöre Δ^r diferansiyel operatörü denir (Farin, 2002).

Tanım 2.5. $P_0, P_1, \dots, P_n$ kontrol noktalarına sahip bir γ Bezier eğrisinin r . türevi,

$$\gamma^{(r)}(t) = \frac{d^r}{dt^r} \gamma(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} B_i^{n-r}(t) \Delta^r P_i,$$

şeklinde tanımlanır (Farin, 2002).

Tanım 2.6. $\gamma; P_0, P_1, \dots, P_n$ kontrol noktalarına sahip Bezier eğrisi için

$$E_{esneme}(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2 dt$$

şeklinde tanımlanan enerji fonksiyoneline γ Bezier eğrisinin esneme enerjisi denir ve eğrinin uzunluğunu ölçer (Xu, Wang ve Chen, 2011).

Tanım 2.7. $\gamma; P_0, P_1, \dots, P_n$ kontrol noktalarına sahip Bezier eğrisi için

$$E_{gerilme}(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma''(t)\|^2 dt$$

şeklinde tanımlanan enerji fonksiyoneline γ Bezier eğrisinin gerilme enerjisi denir ve eğrinin verilen aralıkta kaç kez büküldüğünü ölçer (Xu, Wang ve Chen, 2011).

Tanım 2.8. $\gamma; P_0, P_1, \dots, P_n$ kontrol noktalarına sahip Bezier eğrisi için

$$E_{titreme}(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'''(t)\|^2 dt$$

şeklinde tanımlanan enerji fonksiyoneline γ Bezier eğrisinin titreme enerjisi denir ve eğriliğin değişimini ölçer (Xu, Wang ve Chen, 2011).

2.2. Lorentz Düzlemi

Bu alt bölümde, $\mathbb{L}^2$ Lorentz düzlemi tanıtıldı ve bu uzay ile ilgili bazı temel kavramlar verildi.

Tanım 2.9. V bir reel vektör uzayı ve

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

bir simetrik bilinear form olsun.

i) $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$ ($\langle v, v \rangle < 0$) ise $\langle, \rangle$ simetrik bilineer formuna pozitif (negatif) tanımlı,

ii) $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ ($\langle v, v \rangle \leq 0$) ise $\langle, \rangle$ simetrik bilineer formuna pozitif (negatif) yarı-tanımlı,

iii) $\forall w \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0$ iken $v = 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilineer formuna non-dejeneredir denir (O'Neill, 1983).

Eğer $\forall v \in V$ için $\langle w, v \rangle = 0$ iken V nin bir $w \neq 0$ vektörü varsa $\langle, \rangle$ simetrik bilineer formu dejeneredir denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.10. $\langle, \rangle$, V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form ve W , V nin herhangi bir altuzayı olsun. $\langle, \rangle$ nin W üzerine kısıtlaması $\langle, \rangle|_W$, negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna $\langle, \rangle$ simetrik bilineer formun indeksi denir ve ν ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.11. Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilineer forma V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpım denir ve üzerinde bir skalar çarpım tanımlı olan V reel vektör uzayına skalar çarpım uzayı denir.

Pozitif tanımlı skalar çarpım bir iç çarpımdır ve kanonik örneği $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i$ şeklinde $\mathbb{R}^n$ üzerindeki nokta çarpımdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.12. $v, w \in V$ vektörleri için $\langle v, w \rangle = 0$ ise v ve w vektörleri diktir (ortogonaldır) denir ve $v \perp w$ şeklinde gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.13. W , V nin bir altuzayı olsun. $W^\perp = \{v \in V \mid v \perp W\}$ altuzayına V nin W ya dik altuzayı denir.

$W^\perp$ altuzayı W nin ortogonal tümleyeni olarak isimlendirilemez. Çünkü $W + W^\perp$ genellikle V nin tamamı değildir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.14. Eğer W , V skalar çarpım uzayının altuzayı ise

i) $\text{boy}W + \text{boy}W^\perp = \text{boy}V$,

ii) $(W^\perp)^\perp = W$

özellikleri vardır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.15. W, V nin bir alt uzayı olsun. Eğer $\langle, \rangle|_W$ non-dejenere ise W, V nin non-dejenere altuzayıdır (O'Neill, 1983).

Teorem 2.16. V nin bir W altuzayı non-dejenere ancak ve ancak $V = W \oplus W^\perp$ dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.17. V skalar çarpım uzayında $v \in V$ vektörünün normu

$$\|v\| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$$

şeklinde tanımlanır. Normu 1, yani $\langle v, v \rangle = \mp 1$ olan vektöre birim vektör ve ortogonal birim vektörlerin kümesine de ortonormaldir denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.18. Bir $V \neq \{0\}$ skalar çarpım uzayı bir ortonormal baza sahiptir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.19. V reel vektör uzayı için bir ortonormal baz $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun.

$\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$ olmak üzere $\forall v \in V$ vektörü

$$v = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle v, e_i \rangle e_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.20. V skalar çarpım uzayının indeksi $\nu = 1$ ve boyutu $\dim V \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir Lorentz vektör uzayı denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.21. W, V Lorentz vektör uzayının bir altuzayı ve $\langle, \rangle, V$ nin skalar çarpımı olsun.

i) $\langle, \rangle|_W$ pozitif tanımlı ise W ya spacelike altuzay,

ii) $\langle, \rangle|_W$ indeksi 1 olan non-dejenere ise W ya timelike altuzay,

iii) $\langle, \rangle|_W$ dejenere ise W ya lightlike altuzay denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.22. $\mathbb{R}^2$, Öklid 2-uzay (veya Öklid düzlem) ve $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ olsun. $\mathbb{R}^2$ üzerinde,

$$\langle u, v \rangle_L = -u_1v_1 + u_2v_2$$

şeklinde tanımlı skalar çarpıma Lorentz metrik (veya Minkowski metrik) ve $(\mathbb{R}^2, \langle, \rangle_L) = \mathbb{L}^2$ metrik uzayına ise Lorentz düzlemi (veya Minkowski 2—uzay) denir (Lopez, 2014).

Tanım 2.23. $\mathbb{L}^2$, Lorentz düzleminde $u \in \mathbb{L}^2$ için

i) $\langle u, u \rangle_L > 0$ veya $u = 0$ ise u vektörüne spacelike,

ii) $\langle u, u \rangle_L < 0$ ise u vektörüne timelike,

iii) $\langle u, u \rangle_L = 0$ ve $u \neq 0$ ise u vektörüne lightlike (null) denir (Lopez, 2014).

Tanım 2.24. $I, \mathbb{R}$ reel ekseninin bir açık aralığı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \gamma : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{L}^2 \\ t &\rightarrow \gamma(t) \end{aligned}$$

diferansiyellenebilir dönüşümüne $\mathbb{L}^2$ Lorentz düzleminde diferansiyellenebilir eğri denir (Lopez, 2014).

Bundan sonra diferansiyellenebilir eğri yerine sadece eğri kavramı kullanılacaktır.

Tanım 2.25. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^2$, $\mathbb{L}^2$ de bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için

$$\gamma'(t) = d\gamma\left(\frac{d}{du}\Big|_t\right)$$

teğet vektörüne γ nın hız vektörü denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.26. $\gamma, \mathbb{L}^2$ de bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için,

i) $\gamma'(t)$ hız vektörü spacelike ise γ eğrisine spacelike,

ii) $\gamma'(t)$ hız vektörü timelike ise γ eğrisine timelike,

iii) $\gamma'(t)$ hız vektörü null ise γ eğrisine null (lightlike) dır denir (Lopez, 2014).

Tanım 2.27. Bir γ eğrisinin hız vektörü $\forall t \in I$ için sıfırdan farklı, yani $\gamma'(t) \neq 0$ ise γ ya regülerdir denir (Lopez, 2014).

Lorentz düzleminde eğrilerin nedensel karakteri, regülerlik şartını etkiler.

Önerme 2.28. $\mathbb{L}^2$ Lorentz düzleminde herhangi bir timelike ya da null eğri regülerdir (Lopez, 2014).

Timelike ya da null eğriler her noktada regülerken spacelike eğriler bazı

noktalarda regüler olmayabilir. Bu nedenle çalışmanın bundan sonraki kısımlarında tüm spacelike eğriler regüler kabul edilecektir.

Tanım 2.29. $f \in C^\infty(\mathbb{L}^2, \mathbb{R})$ için,

$$\text{grad} : C^\infty(\mathbb{L}^2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{L}^2$$

$$f \rightarrow \text{grad } f = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

şeklinde tanımlı operatöre $\mathbb{L}^2$ düzleminde tanımlı f fonksiyonunun gradyantı denir (O'Neill, 1983).

2.3. Varyasyonel Hesap

Tanım 2.30. φ , bazı şartları sağlayan bir fonksiyonlar kümesi olsun. Bu kümede her fonksiyona karşı bir sayısal değer veren kurala, φ fonksiyonlar kümesinde tanımlı bir fonksiyonel denir ve $\{y(x)\}$ fonksiyonlar kümesinde tanımlı bir fonksiyonel $I[y(x)]$ şeklinde gösterilir (Gökhan, 1978).

Tanım 2.31. $I[y(x)]$ fonksiyonelinde $y(x)$ bağımsız değişkeninin artımına, $y(x)$ in varyasyonu denir ve

$$\delta y = y(x) - y_*(x)$$

şeklinde gösterilir. δy , x in bir fonksiyonudur (Gökhan, 1978).

Tanım 2.32. Bir $I[y(x)]$ fonksiyonelinin artımı,

$$\Delta I = I[y(x) + \delta y] - I[y(x)]$$

dir ve

$$\Delta I = L[y(x), \delta y] + \beta[y(x), \delta y] \max |\delta y|$$

şeklinde gösterilir. $L[y(x), \delta y]$, δy nin lineer bir fonksiyonelidir. $\max |\delta y| \rightarrow 0$ için $\beta[y(x), \delta y] \rightarrow 0$ ise ΔI artımının, δy ye göre lineer kısmı $L[y(x), \delta y]$ ye $I[y(x)]$ fonksiyonelinin birinci varyasyonu denir ve δI ile gösterilir. Genellikle birinci varyasyon için, yalnız fonksiyonelin varyasyonu ifadesi kullanılır (Gökhan, 1978).

Teorem 2.33. $I[y(x)]$ fonksiyonel olsun.

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} I[y(x) + t\delta y] \right|_{t=0}$$

değeri $I[y(x)]$ fonksiyonelinin birinci varyasyonudur (Gökhan, 1978).

Teorem 2.34. (Fonksiyoneller Teoremi). $I[y(x)]$ fonksiyonelinin bir varyasyonu varsa ve $I[y(x)]$, $y = y_0(x)$ eğrisi boyunca maksimum ya da minimum oluyorsa, $y = y_0(x)$ eğrisi için $\delta I = 0$ dır.

Buna göre

$$I[y_0(x) + t\delta y] = \varphi(t)$$

ifadesi t nin bir fonksiyonudur ve $t = 0$ için maksimum veya minimum değer alır.

Bu nedenle $\varphi'(0) = 0$ dır (Weinstock, 1952).

Teorem 2.35. (Varyasyonlar Hesabının Yardımcı Teoremi). $\psi(x)$ fonksiyonu (x_0, x_1) aralığında sürekli ve bu aralıkta türevli bir fonksiyon olsun.

Aynı aralıkta sürekli, türevlenebilir ve x_0, x_1 noktalarında sıfır olan ve $|\delta y| < \varepsilon$ şartını sağlayan bütün δy fonksiyonları göz önüne alınırsa

$$\int_{x_0}^{x_1} \psi(x) \delta y dx = 0$$

şartının sağlanabilmesi için $x_0 \leq x \leq x_1$ aralığında

$$\psi(x) = 0$$

olması gerekir (Gökhan, 1978).

3. LORENTZ DÜZLEMİNDE MİNİMUM ENERJİLİ BEZİER EĞRİLERİ

Bu bölümde, Lorentz düzleminde minimum esneme, gerilme ve titreme enerjili Bezier eğrilerinin geometrik yapısı inşa edildi. Bu amaç doğrultusunda, bilinen kontrol noktaları yardımıyla minimum enerjili Bezier eğrilerinin bilinmeyen kontrol noktalarının nasıl elde edileceği verildi. Daha sonra, bu üç çeşit minimum enerjili Bezier eğrilerinin örnekleri verildi.

Öncelikle Lorentz düzleminde herhangi bir Bezier eğrisinin nedensel karakterizasyonunun nasıl verilebileceğini ifade eden aşağıdaki teorem verildi.

Teorem 3.1. $\mathbb{L}^2$, Lorentz düzleminde $P_0, P_1, \dots, P_n$ kontrol noktalarına sahip bir Bezier eğrisi $\gamma(t)$ olsun. x ve y doğal koordinat fonksiyonları olmak üzere $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ için,

i) Eğer $\Delta^1 P_i$ spacelike ve $i \neq j$ için $y(\Delta^1 P_i)y(\Delta^1 P_j) > x(\Delta^1 P_i)x(\Delta^1 P_j)$ ise $\gamma(t)$ spacelike,

ii) Eğer $\Delta^1 P_i$ timelike ve $i \neq j$ için $y(\Delta^1 P_i)y(\Delta^1 P_j) < x(\Delta^1 P_i)x(\Delta^1 P_j)$ ise $\gamma(t)$ timelike,

iii) Eğer $\Delta^1 P_i$ lightlike ise $\gamma(t)$ lightlike'dır.

İspat. Lorentz düzleminde, kontrol noktaları $P_0, P_1, \dots, P_n$ olan γ Bezier eğrisi

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i$$

şeklinde tanımlıdır. $\gamma(t)$ Bezier eğrisinin türevi

$$\gamma'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta^1 P_i$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_L &= n^2 \left\langle \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta^1 P_i, \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \Delta^1 P_j \right\rangle \\ &= n^2 \sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^1 P_i, \Delta^1 P_j \rangle \\ &= n^2 \sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle (x(\Delta^1 P_i), y(\Delta^1 P_i)), (x(\Delta^1 P_j), y(\Delta^1 P_j)) \rangle \\ &= n^2 \sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) (-x(\Delta^1 P_i)x(\Delta^1 P_j) + y(\Delta^1 P_i)y(\Delta^1 P_j)) \end{aligned}$$

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_L = n^2 \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} (B_i^{n-1}(t))^2 (-x(\Delta^1 P_i)^2 + y(\Delta^1 P_i)^2) + 2 \sum_{i,j=0, j \neq i}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) (-x(\Delta^1 P_i)x(\Delta^1 P_j) + y(\Delta^1 P_i)y(\Delta^1 P_j)) \right\}$$

dir. Böylece,

i) Eğer $\Delta^1 P_i$ spacelike ve $i \neq j$ için $y(\Delta^1 P_i)y(\Delta^1 P_j) > x(\Delta^1 P_i)x(\Delta^1 P_j)$ ise $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_L > 0$ yani $\gamma(t)$ spacelike,

ii) Eğer $\Delta^1 P_i$ timelike ve $i \neq j$ için $y(\Delta^1 P_i)y(\Delta^1 P_j) < x(\Delta^1 P_i)x(\Delta^1 P_j)$ ise $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_L < 0$ yani $\gamma(t)$ timelikedir. Ayrıca,

iii) Eğer $\Delta^1 P_i$ lightlike ise her i için $x(\Delta^1 P_i) = y(\Delta^1 P_i)$ olduğundan $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_L = 0$ yani $\gamma(t)$ lightlike'dır.

Örnek 3.2. $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (1,2)$, $P_2 = (4,7)$ ve $P_3 = (5,10)$ kontrol noktalarına sahip Bezier eğrisi için $\Delta^1 P_0 = (1,2)$ spacelike, $\Delta^1 P_1 = (3,5)$ spacelike, $\Delta^1 P_2 = (1,3)$ spacelike ve $i \neq j$ için $y(\Delta^1 P_i)y(\Delta^1 P_j) > x(\Delta^1 P_i)x(\Delta^1 P_j)$ olduğundan $\forall t \in [0,1]$ için Bezier eğrisi spacelikedir.

Örnek 3.3. $P_0 = (4,1)$, $P_1 = (\frac{-27}{14}, \frac{1}{14})$, $P_2 = (-3,0)$, $P_3 = (5,2)$ ve $P_4 = (1,0)$ kontrol noktalarına sahip Bezier eğrisi için $\Delta^1 P_0 = (\frac{-83}{14}, \frac{-13}{14})$ timelike, $\Delta^1 P_1 = (\frac{-15}{14}, \frac{-1}{14})$ timelike, $\Delta^1 P_2 = (8,2)$ timelike, $\Delta^1 P_3 = (-4,-2)$ timelike ve $i \neq j$ için $y(\Delta^1 P_i)y(\Delta^1 P_j) < x(\Delta^1 P_i)x(\Delta^1 P_j)$ olduğundan $\forall t \in [0,1]$ için Bezier eğrisi timelikedir.

Örnek 3.4. $P_0 = (2,3)$, $P_1 = (4,5)$, $P_2 = (7,8)$ ve $P_3 = (8,9)$ kontrol noktalarına sahip Bezier eğrisi için $\Delta^1 P_0 = (2,2)$ lightlike, $\Delta^1 P_1 = (3,3)$ lightlike ve $\Delta^1 P_2 = (1,1)$ lightlike olduğundan $\forall t \in [0,1]$ için Bezier eğrisi lightlike'dır.

Örnek 3.5. $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (1,2)$, $P_2 = (\frac{23}{4}, 9)$ ve $P_3 = (8,10)$ kontrol noktalarına sahip Bezier eğrisi için $\Delta^1 P_0 = (1,2)$ spacelike, $\Delta^1 P_1 = (\frac{19}{4}, 7)$ spacelike ve $\Delta^1 P_2 = (\frac{9}{4}, 1)$ timelike olduğundan $\forall t \in [0,1]$ için Bezier eğrisinin nedensel karakteri hakkında herhangi bir şey söylenemez.

Şimdi, $\mathbb{L}^2$ Lorentz düzleminde minimum enerjili Bezier eğrilerinin geometrik inşası verilecek.

$\Gamma = \{P_i\}_{i=0}^n$, γ Bezier eğrisinin kontrol poligonu ve

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i, \quad t \in [0, 1],$$

kontrol poligonu ile ilişkili Bezier eğrisi olsun. Ayrıca, $\bar{\Gamma} = \{P_i\}_{i \in \Lambda}$ bilinen kontrol noktalarının kümesi ve $0 \notin \Omega$, $n \notin \Omega$ olmak üzere $\tilde{\Gamma} = \{P_i\}_{i \in \Omega}$, m ye göre esneme, gerilme ve titreme enerjisini ifade eden

$$E_m(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma^m(t)\|^2 dt, \quad m = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

fonksiyonelinin minimizasyonundan elde edilecek olan kontrol noktalarının kümesi olsun. Burada Λ ve Ω , sırasıyla, $\bar{\Gamma}$ ve $\tilde{\Gamma}$ kümelerindeki kontrol noktalarının sayısını gösteren kümeler yani, $\Lambda \cup \Omega = \{0, 1, 2, \dots, n-1, n\}$ dir. Bu bölümdeki temel düşünce, esneme, gerilme ve titreme enerji fonksiyoneli minimize eden Γ kontrol poligonu şartını $\tilde{\Gamma}$ daki kontrol noktalarına göre bir lineer denklem sistemine dönüştürmektir. $\tilde{\Gamma}$ daki kontrol noktalarının koordinatlarına göre esneme, gerilme ve titreme enerji fonksiyonelinin gradyanı sıfır olduğu zaman enerji fonksiyonelinin ekstremallerine ulaşılır.

Teorem. 3.6. $\mathbb{L}^2$ Lorentz düzleminde $\tilde{\Gamma} = \{P_i\}_{i \in \Omega}$ kümesindeki kontrol noktaları, $\bar{\Gamma} = \{P_i\}_{i \in \Lambda}$ kümesindeki verilen kontrol noktaları ile (3.1) enerji fonksiyoneli minimize eder ancak ve ancak

$$\sum_{j=0}^{n-m} N_{i,j}^{n,m} \Delta^m P_j = 0, \quad i \in \Omega, \quad (3.2)$$

dir. Burada

$$N_{i,j}^{n,m} = \binom{n-m}{j} \sum_{l=0}^m (-1)^{m-l} \binom{m}{l} \frac{\binom{n-m}{i-l}}{\binom{2n-2m}{i+j-l}}$$

ve

$$\Delta^m P_j = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} (P_{j+k})$$

dir.

İspat. $\gamma(t)$ Bezier eğrisinin m . dereceden türevi,

$$\gamma^{(m)}(t) = \frac{n!}{(n-m)!} \sum_{j=0}^{n-m} B_j^{n-m}(t) \Delta^m P_j$$

dir. Burada

$$\Delta^m P_j = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} (P_{j+k})$$

dir. Şimdi, $q^x = (1, 0)$ olmak üzere $P_i = (x_i, y_i) \in \tilde{\Gamma}$ kontrol noktasının koordinatlarına göre enerji fonksiyonelinin türevleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_m(\gamma)}{\partial x_i} &= 2 \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \gamma^{(m)}(t)}{\partial x_i}, \gamma^{(m)}(t) \right\rangle_L dt \\ &= 2 \int_0^1 \left\langle \frac{n!}{(n-m)!} \sum_{l=0}^m (-1)^{m-l} \binom{m}{l} B_{i-l}^{n-m}(t) q^x, \gamma^{(m)}(t) \right\rangle_L dt \\ &= 2 \int_0^1 \frac{n!}{(n-m)!} \sum_{l=0}^m (-1)^{m-l} \binom{m}{l} B_{i-l}^{n-m}(t) \left\langle q^x, \frac{n!}{(n-m)!} \sum_{j=0}^{n-m} B_j^{n-m}(t) \Delta^m P_j \right\rangle_L dt \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bernstein polinomları için

$$B_i^n(t) B_j^m(t) = \frac{\binom{n}{i} \binom{m}{j}}{\binom{m+n}{i+j}} B_{i+j}^{n+m}(t) \quad \text{ve} \quad \int_0^1 B_i^n(t) dt = \frac{1}{n+1}$$

özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_m(\gamma)}{\partial x_i} &= -K_{m,n} \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} \sum_{l=0}^m (-1)^{m-l} \binom{m}{l} \frac{\binom{n-m}{i-l}}{\binom{2n-2m}{i+j-l}} (\Delta^m P_j)_x \\ &= -K_{m,n} \sum_{j=0}^{n-m} N_{i,j}^{n,m} (\Delta^m P_j)_x \end{aligned}$$

olur. Burada,

$$\begin{aligned} K_{m,n} &= \frac{2(n!)^2}{[(n-m)!]^2 (2n-2m+1)}, \\ N_{i,j}^{n,m} &= \binom{n-m}{j} \sum_{l=0}^m (-1)^{m-l} \binom{m}{l} \frac{\binom{n-m}{i-l}}{\binom{2n-2m}{i+j-l}} \end{aligned}$$

ve $(\Delta^m P_j)_x$, $\Delta^m P_j$ nin x -bileşenini gösterir.

Benzer şekilde,

$$\frac{\partial E_m(\gamma)}{\partial y_i} = K_{m,n} \sum_{j=0}^{n-m} N_{i,j}^{n,m} (\Delta^m P_j)_y$$

dir ve burada $(\Delta^m P_j)_y$, $\Delta^m P_j$ nin y -bileşenini gösterir.

O halde, (3.1) enerji fonksiyonelinin minimum enerjiye sahip olması için

$$\frac{\partial E_m(\gamma)}{\partial x_i} = \frac{\partial E_m(\gamma)}{\partial y_i} = 0$$

olmasıdır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Bu teorem, sırasıyla, $m = 1$ için esneme, $m = 2$ için gerilme ve $m = 3$ için titreme enerjisini minimize eden Bezier eğrilerinin bilinmeyen kontrol noktalarını verir.

3.1. Minimum Esneme Enerjili Bezier Eğriler

$m = 1$ olduğu zaman, $E_m(\gamma)$ fonksiyoneli esneme enerjisini ifade eder. Şimdi, Teorem 3.6. yardımıyla aşağıdaki önerme verilecektir.

Önerme 3.7. Bir Bezier eğrisi için bilinen kontrol noktaları $P_0, P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n$ olsun. Bezier eğrisinin minimum esneme enerjili olması için bilinmeyen kontrol noktası P_i aşağıdaki şekilde inşa edilir:

$$\frac{\|P_{i-1}S\|}{\|SP_{i+1}\|} = -\frac{N_{i,i}^{n,1}}{N_{i,i-1}^{n,1}}$$

olacak şekilde $P_{i-1}P_{i+1}$ doğrusu üzerinde bir S noktası seçilir ve

$$SP_i = -\frac{\sum_{j=0, j \neq i-1}^{n-1} N_{i,j}^{n,1}(P_{j+1}-P_j)}{N_{i,i-1}^{n,1}-N_{i,i}^{n,1}}$$

olacak şekilde S noktası P_i noktasına doğru hareket eder. O zaman, karşılık gelen n . dereceden Bezier eğrisi minimum esneme enerjisine sahiptir.

İspat Öncelikle (3.2) denklemini, $m = 1$ için düzenlenirse,

$$0 = \sum_{j=0}^{n-1} N_{i,j}^{n,1} (P_{j+1} - P_j)$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte toplam açılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= N_{i,0}^{n,1} (P_1 - P_0) + N_{i,1}^{n,1} (P_2 - P_1) + N_{i,2}^{n,1} (P_3 - P_2) + \dots \\ &\quad + N_{i,i-1}^{n,1} (P_i - P_{i-1}) + \dots + N_{i,i}^{n,1} (P_{i+1} - P_i) + \dots + N_{i,n-1}^{n,1} (P_n - P_{n-1}) \\ &\quad + (N_{i,i-1}^{n,1} - N_{i,i}^{n,1})P_i + N_{i,i}^{n,1}P_{i+1} - N_{i,i-1}^{n,1}P_{i-1} + \sum_{j=0, j \neq i-1,i}^{n-1} N_{i,j}^{n,1} (P_{j+1} - P_j) \end{aligned} \quad (3.3)$$

olur. (3.3) eşitliği

$$(N_{i,i-1}^{n,1} - N_{i,i}^{n,1})P_i + N_{i,i}^{n,1}P_{i+1} - N_{i,i-1}^{n,1}P_{i-1} = -\sum_{j=0, j \neq i-1,i}^{n-1} N_{i,j}^{n,1} (P_{j+1} - P_j)$$

veya

$$P_i + \frac{N_{i,i}^{n,1}}{(N_{i,i-1}^{n,1} - N_{i,i}^{n,1})}P_{i+1} - \frac{N_{i,i-1}^{n,1}}{(N_{i,i-1}^{n,1} - N_{i,i}^{n,1})}P_{i-1} = -\frac{\sum_{j=0, j \neq i-1,i}^{n-1} N_{i,j}^{n,1}(P_{j+1}-P_j)}{(N_{i,i-1}^{n,1} - N_{i,i}^{n,1})}$$

şeklinde yazılır. Burada, S noktası hipotezdeki gibi P_i noktasına doğru hareket edecek şekilde

$$-S = \frac{N_{i,i}^{n,1}}{(N_{i,i-1}^{n,1} - N_{i,i}^{n,1})}P_{i+1} - \frac{N_{i,i-1}^{n,1}}{(N_{i,i-1}^{n,1} - N_{i,i}^{n,1})}P_{i-1}$$

alınırsa

$$\frac{\|P_{i-1}S\|}{\|SP_{i+1}\|} = -\frac{N_{i,i}^{n,1}}{N_{i,i-1}^{n,1}}$$

olduğu görülmür.

Sonuç 3.8. $n = 2$ durumunda,

$$\frac{\|P_0S\|}{\|SP_2\|} = -\frac{N_{1,1}^{2,1}}{N_{1,0}^{2,1}} = 1$$

olacak şekilde P_0P_2 doğrusu üzerinde bir S noktası

$$S = \frac{P_0+P_2}{2}$$

şeklinde seçilir. Diğer taraftan $SP_1 = 0$ olduğundan, minimum esneme enerjili Bezier eğrisini veren bilinmeyen P_1 kontrol noktası

$$P_1 = \frac{P_0+P_2}{2}$$

dir.

İki uç kontrol noktası verildiğinde Önerme 3.7 den elde edilen Bezier eğrileri doğrulardır. Şimdi, kontrol noktası ikiden daha fazla olan yüksek dereceli Bezier eğrilerinin durumu incelenecektir.

Sonuç 3.9. $n = 3$ durumunda, P_0 , P_2 ve P_3 kontrol noktaları biliniyorken minimum esneme enerjili Bezier eğriyi veren bilinmeyen P_1 kontrol noktası aşağıdaki şekilde inşaa edilir:

$$\frac{\|P_0S\|}{\|SP_2\|} = -\frac{N_{1,1}^{3,1}}{N_{1,0}^{3,1}} = \frac{1}{3}$$

ve S noktası P_0P_2 doğrusu üzerinde olduğundan

$$S = \frac{1}{4}(3P_0 + P_2)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan

$$SP_1 = -\frac{N_{1,2}^{3,1}(P_3-P_2)}{N_{1,0}^{3,1}-N_{1,1}^{3,1}} = -\frac{-\frac{1}{3}(P_3-P_2)}{\frac{1}{2}-(-\frac{1}{6})} = \frac{1}{3}(P_3 - P_2)$$

eşitliğinden bilinmeyen kontrol noktası P_1 ,

$$P_1 = \frac{1}{4}(3P_0 + P_2) + \frac{1}{2}(P_3 - P_2)$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde P_0 , P_1 ve P_3 kontrol noktaları biliniyorken minimum esneme enerjili Bezier eğriyi veren bilinmeyen kontrol noktası P_2 ,

$$P_2 = \frac{1}{4}(3P_3 + P_1) + \frac{1}{2}(P_0 - P_1)$$

dir.

Sonuç 3.10. $n = 4$ durumunda, P_0, P_2, P_3 ve P_4 kontrol noktaları biliniyorken minimum esneme enerjili Bezier eğriyi veren bilinmeyen P_1 kontrol noktası

$$P_1 = \frac{1}{12}(10P_0 - 3P_2 + 2P_3 + 3P_4) \quad (3.4)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde, eğer bilinmeyen kontrol noktası P_2 veya P_3 ise, sırasıyla,

$$P_2 = \frac{1}{2}(2P_0 - P_1 - P_3 + 2P_4), \quad (3.5)$$

$$P_3 = \frac{1}{12}(3P_0 + 2P_1 - 3P_2 + 10P_4)$$

dir.

Sonuç 3.11. Bir Bezier eğrisinin bilinen kontrol noktaları P_0, P_3 ve P_4 olsun. Bilinmeyen kontrol noktası P_1 , P_0P_3 doğru parçasını $\frac{1}{2}$ oranında böler ve diğer bilinmeyen kontrol noktası P_2 , $P_1P_2 = P_3P_4$ eşitliğini sağlar. Böylece karşılık gelen Bezier eğrisi minimum esneme enerjisine sahiptir.

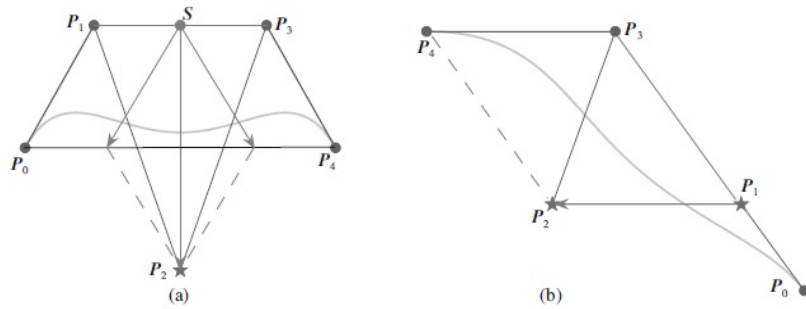
İspat. (3.4) ve (3.5) denklemlerinden,

$$P_1 = \frac{2}{3}P_0 + \frac{1}{3}P_3$$

ve

$$P_2 = \frac{1}{3}(2P_0 - 2P_3 + 3P_4) = \frac{1}{3}(2P_0 + 3P_4 - 2P_3)$$

bulunur.



Şekil 3.1. Minimum esneme enerjili Bezier eğrisinin geometrik yapısı (Xu vd, 2011)

(a) P_2 bilinmiyor

(b) P_1 ve P_2 bilinmiyor

Benzer şekilde, eğer P_0, P_3, P_4 kontrol noktaları verilirse P_1 ve P_2 kontrol noktaları simetrik olarak inşa edilir.

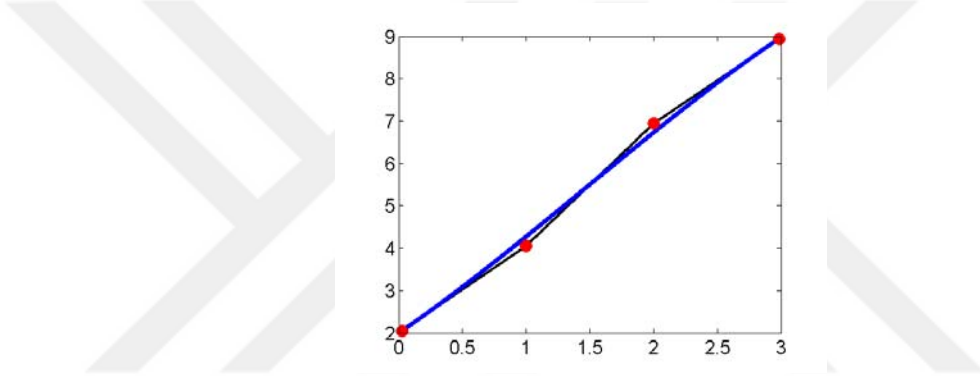
Örnek 3.12. Bilinen kontrol noktaları $P_0 = (0, 2)$, $P_1 = (1, 4)$, $P_3 = (3, 9)$ olan Bezier eğrisinin minimum esneme enerjiye sahip olabilmesi için bilinmeyen kontrol noktası P_2 ,

$$P_2 = \frac{1}{4}(3P_3 - P_1 + 2P_0) = (2, \frac{27}{4})$$

şeklinde bulunur. Elde edilen Bezier eğrisinin nedensel karakteri ise $\Delta^1 P_0 = (1, 2)$ spacelike, $\Delta^1 P_1 = (1, \frac{11}{4})$ spacelike, $\Delta^1 P_2 = (1, \frac{9}{4})$ spacelike ve $i \neq j$ için

$$y(\Delta^1 P_i)y(\Delta^1 P_j) > x(\Delta^1 P_i)x(\Delta^1 P_j)$$

olduğundan $\forall t \in [0, 1]$ için minimum esneme enerjili Bezier eğrisi spacelikedir (Şekil 3.2).



Şekil 3.2. Üçüncü dereceden minimum esneme enerjili spacelike Bezier eğrisi

Örnek 3.13. Bilinen kontrol noktaları $P_0 = (0, 2)$, $P_1 = (3, 4)$, $P_3 = (8, 6)$ olan Bezier eğrisinin minimum esneme enerjisine sahip olabilmesi için bilinmeyen kontrol noktası P_2 ,

$$P_2 = \frac{1}{4}(3P_3 - P_1 + 2P_0) = (\frac{21}{4}, \frac{9}{2})$$

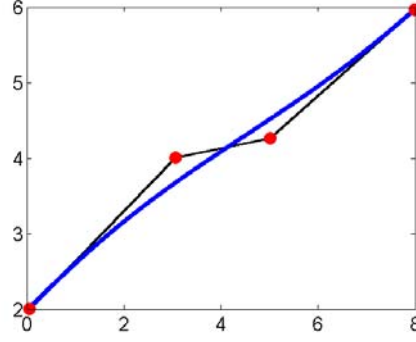
şeklinde bulunur. Elde edilen Bezier eğrisinin nedensel karakteri ise

$\Delta^1 P_0 = (3, 2)$ timelike, $\Delta^1 P_1 = (\frac{9}{4}, \frac{1}{2})$ timelike, $\Delta^1 P_2 = (\frac{11}{4}, \frac{3}{2})$ timelike ve $i \neq j$ için

$$y(\Delta^1 P_i)y(\Delta^1 P_j) < x(\Delta^1 P_i)x(\Delta^1 P_j)$$

olduğundan $\forall t \in [0, 1]$ için minimum esneme enerjili Bezier eğrisi timelikedir

(Şekil 3.3).

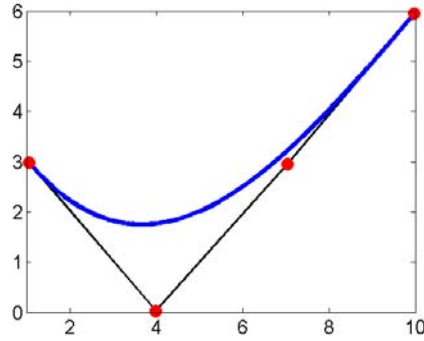


Şekil 3.3. Üçüncü dereceden minimum esneme enerjili timelike Bezier eğrisi

Örnek 3.14. Bilinen kontrol noktaları $P_0 = (1, 3)$, $P_1 = (4, 0)$, $P_3 = (10, 6)$ olan Bezier eğrisinin minimum esneme enerjisine sahip olabilmesi için bilinmeyen kontrol noktası P_2 ,

$$P_2 = \frac{1}{4}(3P_3 + P_1) + \frac{1}{2}(P_0 - P_1) = (7, 3)$$

şeklinde bulunur. Elde edilen minimum esneme enerjili Bezier eğrisinin nedensel karakteri ise $\Delta^1 P_0 = (3, -3)$ lightlike, $\Delta^1 P_1 = (3, 3)$ lightlike ve $\Delta^1 P_2 = (3, 3)$ lightlike olduğundan $\forall t \in [0, 1]$ için Bezier eğrisi lightlikedır (Şekil 3.4).



Şekil 3.4. Üçüncü dereceden minimum esneme enerjili lightlike Bezier eğrisi

3.2. Minimum Gerilme Enerjili Bezier Eğriler

$m = 2$ olduğu zaman, $E_m(\gamma)$ fonksiyoneli gerilme enerjisini ifade eder. O halde, aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.15. Bir Bezier eğrisinin bilinen kontrol noktaları $P_0, P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n$ olsun. Bezier eğrisinin minimum gerilme enerjili olması için bilinmeyen kontrol noktası P_i aşağıdaki şekilde inşaa edilir:

$$\frac{\|P_{i+1}S\|}{\|SP_{i-1}\|} = -\frac{N_{i,i-2}^{n,2} - N_{i,i-1}^{n,2}}{N_{i,i}^{n,2} - N_{i,i-1}^{n,2}}$$

olacak şekilde $P_{i-1}P_{i+1}$ doğrusu üzerinde bir S noktası seçilir ve

$$\begin{aligned} SP_i &= -\frac{1}{N_{i,i}^{n,2} - 2N_{i,i-1}^{n,2} + N_{i,i-2}^{n,2}} [N_{i,i}^{n,2}(P_{i+1} - P_{i+2}) + N_{i,i-2}^{n,2}(P_{i-1} - P_{i-2}) \\ &\quad - \sum_{j=0, j \neq i-2, i-1, i}^{n-2} N_{i,j}^{n,2} \Delta^2 P_j] \end{aligned}$$

olacak şekilde S noktası P_i noktasına doğru hareket eder. O zaman, karşılık gelen n . dereceden Bezier eğrisi minimum gerilme enerjisine sahiptir.

İspat. (3.2) denklemi, $m = 2$ için düzenlenirse,

$$0 = \sum_{j=0}^{n-2} N_{i,j}^{n,2} (P_j - 2P_{j+1} + P_{j+2})$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlik

$$\begin{aligned} 0 &= (N_{i,i-2}^{n,2} - 2N_{i,i-1}^{n,2} + N_{i,i-2}^{n,2})P_i - N_{i,i-2}^{n,2}P_{i-1} + N_{i,i-1}^{n,2}P_{i-1} + N_{i,i-1}^{n,2}P_{i+1} \\ &\quad - N_{i,i}^{n,2}P_{i+1} - N_{i,i}^{n,2}(P_{i+1} - P_{i+2}) - N_{i,i-2}^{n,2}(P_{i-1} - P_{i-2}) \\ &\quad + \sum_{j=0, j \neq i-1, i}^{n-1} N_{i,j}^{n,1} (P_{j+1} - P_j) + P_i - \frac{N_{i,i-2}^{n,2}P_{i-1}}{N_{i,i-2}^{n,2} - 2N_{i,i-1}^{n,2} + N_{i,i-2}^{n,2}} \\ &\quad + \frac{N_{i,i-1}^{n,2}P_{i-1}}{N_{i,i-2}^{n,2} - 2N_{i,i-1}^{n,2} + N_{i,i-2}^{n,2}} + \frac{N_{i,i-1}^{n,2}P_{i+1}}{N_{i,i-2}^{n,2} - 2N_{i,i-1}^{n,2} + N_{i,i-2}^{n,2}} - \frac{N_{i,i}^{n,2}P_{i+1}}{N_{i,i-2}^{n,2} - 2N_{i,i-1}^{n,2} + N_{i,i-2}^{n,2}} \\ &= \frac{1}{N_{i,i-2}^{n,2} - 2N_{i,i-1}^{n,2} + N_{i,i-2}^{n,2}} [N_{i,i}^{n,2}(P_{i+1} - P_{i+2}) + N_{i,i-2}^{n,2}(P_{i-1} - P_{i-2}) \\ &\quad - \sum_{j=0, j \neq i-1, i}^{n-1} N_{i,j}^{n,1} (P_{j+1} - P_j)] \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned} -S &= -\frac{N_{i,i-2}^{n,2}P_{i-1}}{N_{i,i-2}^{n,2} - 2N_{i,i-1}^{n,2} + N_{i,i-2}^{n,2}} + \frac{N_{i,i-1}^{n,2}P_{i-1}}{N_{i,i-2}^{n,2} - 2N_{i,i-1}^{n,2} + N_{i,i-2}^{n,2}} \\ &\quad + \frac{N_{i,i-1}^{n,2}P_{i+1}}{N_{i,i-2}^{n,2} - 2N_{i,i-1}^{n,2} + N_{i,i-2}^{n,2}} - \frac{N_{i,i}^{n,2}P_{i+1}}{N_{i,i-2}^{n,2} - 2N_{i,i-1}^{n,2} + N_{i,i-2}^{n,2}} \end{aligned}$$

şeklinde alınırsa

$$\frac{\|P_{i+1}S\|}{\|SP_{i-1}\|} = -\frac{N_{i,i-2}^{n,2} - N_{i,i-1}^{n,2}}{N_{i,i}^{n,2} - N_{i,i-1}^{n,2}}$$

olduğu görülür.

Sonuç 3.16. $n = 3$ durumunda, bilinen kontrol noktaları P_0, P_2 ve P_3 olan minimum gerilme enerjisine sahip Bezier eğrisi için bilinmeyen kontrol noktası

$$P_1 = \frac{1}{2}(P_0 + P_2)$$

dir. Eğer bilinen kontrol noktaları P_0 , P_1 ve P_3 ise minimum gerilme enerjisine sahip Bezier eğrisinin bilinmeyen kontrol noktası P_2 ,

$$P_2 = \frac{1}{2}(P_1 + P_3)$$

dir.

Burada bilinmeyen P_1 kontrol noktası P_3 kontrol noktasından ve bilinmeyen P_2 kontrol noktası ise P_0 kontrol noktasından bağımsızdır.

Sonuç 3.17. $n = 4$ durumunda, P_0 , P_2 , P_3 ve P_4 bilinen kontrol noktalarına sahip minimum gerilme enerjili Bezier eğrisinin bilinmeyen kontrol noktası P_1 ,

$$P_1 = \frac{1}{12}(10P_0 - 3P_2 + 2P_3 + 3P_4)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde, eğer bilinmeyen kontrol noktası P_2 veya P_3 ise, sırasıyla,

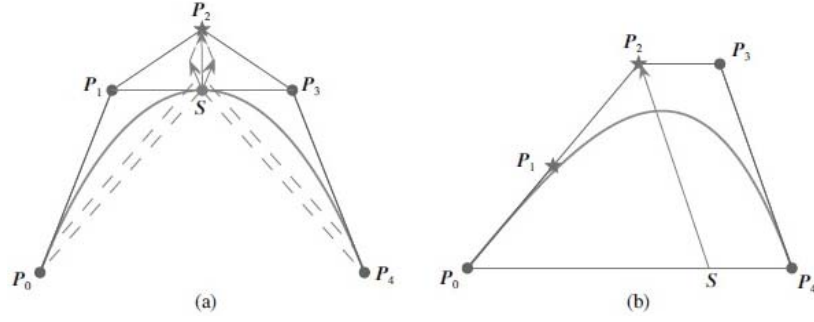
$$P_2 = \frac{1}{2}(2P_0 - P_1 - P_3 + 2P_4)$$

veya

$$P_3 = \frac{1}{12}(10P_4 - 3P_2 + 2P_1 + 3P_0)$$

olur.

Sonuç 3.18. Bilinen kontrol noktaları P_0 , P_3 ve P_4 ise bilinmeyen kontrol noktaları P_1 ve P_2 aşağıdaki gibi inşaa edilir: $\frac{\|P_0S\|}{\|SP_4\|} = 3$ olacak şekilde P_0P_4 doğrusu üzerinde bir S noktası seçilir ve bu S noktası $SP_2 = P_3P_4$ olacak şekilde P_2 noktasına doğru hareket eder. Diğer bilinmeyen kontrol noktası P_1 , P_0P_2 doğru parçasının orta noktasıdır. Böylece karşılık gelen dördüncü dereceden Bezier eğrisi minimum gerilme enerjisine sahiptir.



Şekil 3.5. Minimum gerilme enerjili Bezier eğrisinin geometrik yapısı (Xu vd, 2011)

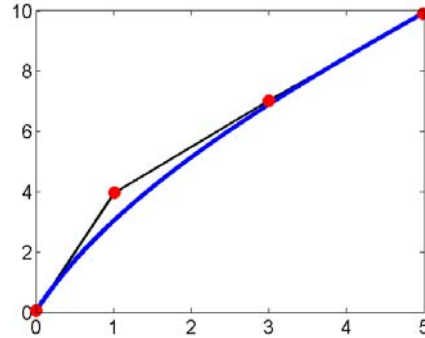
(a) P_2 bilinmiyor

(b) P_1 ve P_2 bilinmiyor

Örnek 3.19. Bilinen kontrol noktaları $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 4)$ ve $P_3 = (5, 10)$ olan Bezier eğrisinin minimum gerilme enerjiye sahip olması için bilinmeyen kontrol noktası $P_2 = (3, 7)$ şeklinde elde edilir. Elde edilen Bezier eğrisinin nedensel karakteri ise $\Delta^1 P_0 = (1, 4)$ spacelike, $\Delta^1 P_1 = (2, 3)$ spacelike, $\Delta^1 P_2 = (2, 3)$ spacelike ve $i \neq j$ için

$$y(\Delta^1 P_i)y(\Delta^1 P_j) > x(\Delta^1 P_i)x(\Delta^1 P_j)$$

olduğundan $\forall t \in [0, 1]$ için minimum gerilme enerjili Bezier eğrisi spacelikedir (Şekil 3.6).



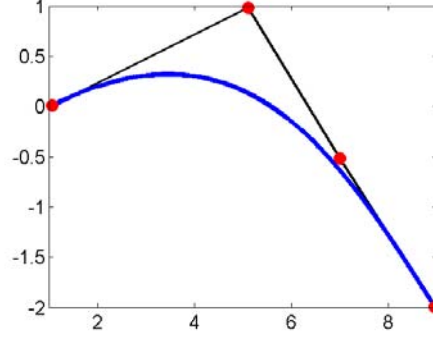
Şekil 3.6. Üçüncü dereceden minimum gerilme enerjili spacelike Bezier eğrisi

Örnek 3.20. Bilinen kontrol noktaları $P_0 = (1, 0)$, $P_1 = (5, 1)$ ve $P_3 = (9, -2)$ olan Bezier eğrisinin minimum gerilme enerjiye sahip olması için bilinmeyen kontrol noktası $P_2 = (7, -\frac{1}{2})$ şeklinde elde edilir. Elde edilen Bezier eğrisinin nedensel karakteri ise $\Delta^1 P_0 = (4, 1)$ timelike, $\Delta^1 P_1 = (2, -\frac{3}{2})$ timelike,

$\Delta^1 P_2 = (2, -\frac{3}{2})$ timelike ve $i \neq j$ için

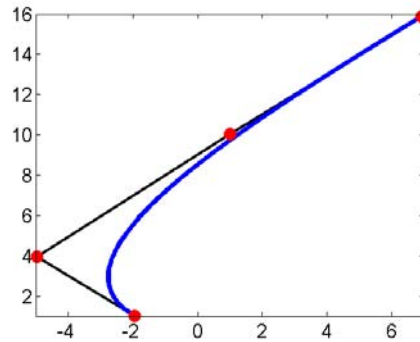
$$y(\Delta^1 P_i)y(\Delta^1 P_j) < x(\Delta^1 P_i)x(\Delta^1 P_j)$$

olduğundan $\forall t \in [0, 1]$ için minimum gerilme enerjili Bezier eğrisi timelikedir (Şekil 3.7).



Şekil 3.7. Üçüncü dereceden minimum gerilme enerjili timelike Bezier eğrisi

Örnek 3.21. Bilinen kontrol noktaları $P_0 = (-2, 1)$, $P_1 = (1, 4)$, $P_3 = (6, 9)$ olan Bezier eğrisinin minimum gerilme enerjisine sahip olabilmesi için bilinmeyen kontrol noktası $P_2 = (\frac{7}{2}, \frac{13}{2})$ şeklinde elde edilir. Elde edilen Bezier eğrisi için $\Delta^1 P_0 = (3, 3)$ lightlike, $\Delta^1 P_1 = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ lightlike ve $\Delta^1 P_2 = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ lightlike olduğundan $\forall t \in [0, 1]$ için minimum gerilme enerjili Bezier eğrisi lightlikedir (Şekil 3.8).



Şekil 3.8. Üçüncü dereceden minimum gerilme enerjili lightlike Bezier eğrisi

3.3. Minimum Titreme Enerjili Bezier Eğriler

$m = 3$ olduğu zaman, $E_m(\gamma)$ fonksiyoneli titreme enerjisini ifade eder. 3.1 ve 3.2 altbölümlerinde olduğu gibi Teorem 3.6. yardımıyla aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 3.22. Bir Bezier eğrisinin bilinen kontrol noktaları $P_0, P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n$ olsun. Bezier eğrisinin minimum titreme enerjili olması için bilinmeyen kontrol noktası P_i aşağıdaki şekilde inşaa edilir:

$$\frac{\|P_{i-1}S\|}{\|SP_{i+1}\|} = \frac{3N_{i,i-1}^{n,3} - N_{i,i}^{n,3}}{N_{i,i-3}^{n,3} - 3N_{i,i-2}^{n,3}}$$

olacak şekilde $P_{i-1}P_{i+1}$ doğrusu üzerinde bir S noktası seçilir ve

$$\begin{aligned} SP_i = & -\frac{1}{N_{i,i-3}^{n,3} - 3N_{i,i-2}^{n,3} + 3N_{i,i-1}^{n,3} - N_{i,i}^{n,3}} [N_{i,i}^{n,3}(P_{i+2} - P_{i+3}) + 2N_{i,i}^{n,3}(P_{i+2} - P_{i+1}) \\ & + N_{i,i-1}^{n,3}(P_{i-1} - P_{i+2}) + N_{i,i-2}^{n,3}(P_{i-2} - P_{i+1}) + 2N_{i,i-3}^{n,3}(P_{i-1} - P_{i-2}) \\ & + N_{i,i-3}^{n,3}(P_{i-3} - P_{i-2}) - \sum_{j=0, j \neq i-3, i-2, i-1, i}^{n-3} N_{i,j}^{n,3} \Delta^3 P_j] \end{aligned}$$

olacak şekilde S noktası P_i noktasına doğru hareket eder. O zaman, karşılık gelen n . dereceden Bezier eğrisi minimum titreme enerjisine sahiptir.

İspat Denklem (3.2), $m = 3$ için,

$$0 = \sum_{j=0}^{n-3} N_{i,j}^{n,3} (-P_j + 3P_{j+1} - 3P_{j+2} + P_{j+3})$$

şeklinde düzenlenir. Düzenlenen bu eşitlik

$$\begin{aligned} 0 = & N_{i,0}^{n,3} (-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3) + N_{i,1}^{n,3} (-P_1 + 3P_2 - 3P_3 + P_4) + \dots \\ & + N_{i,i-3}^{n,3} (-P_{i-3} + 3P_{i-2} - 3P_{i-1} + P_i) \\ & + N_{i,i-2}^{n,3} (-P_{i-2} + 3P_{i-1} - 3P_i + P_{i+1}) \\ & + N_{i,i-1}^{n,3} (-P_{i-1} + 3P_i - 3P_{i+1} + P_{i+2}) \\ & + N_{i,i}^{n,3} (-P_i + 3P_{i+1} - 3P_{i+2} + P_{i+3}) \\ & + \dots + N_{i,n-3}^{n,3} (-P_{n-3} + 3P_{n-2} - 3P_{n-1} + P_n) \\ = & \frac{1}{N_{i,i-3}^{n,3} - 3N_{i,i-2}^{n,3} + 3N_{i,i-1}^{n,3} - N_{i,i}^{n,3}} [N_{i,i}^{n,3}(P_{i+2} - P_{i+3}) + 2N_{i,i}^{n,3}(P_{i+2} - P_{i+1}) \\ & + N_{i,i-1}^{n,3}(P_{i-1} - P_{i+2}) + N_{i,i-2}^{n,3}(P_{i-2} - P_{i+1}) \\ & + 2N_{i,i-3}^{n,3}(P_{i-1} - P_{i-2}) + N_{i,i-3}^{n,3}(P_{i-3} - P_{i-2}) - \sum_{j=0, j \neq i-3, i-2, i-1, i}^{n-3} N_{i,j}^{n,3} \Delta^3 P_j] \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned} -S = & -\frac{N_{i,i}^{n,3} P_{i+1}}{N_{i,i-3}^{n,3} - 3N_{i,i-2}^{n,3} + 3N_{i,i-1}^{n,3} - N_{i,i}^{n,3}} + \frac{3N_{i,i-1}^{n,3} P_{i+1}}{N_{i,i-3}^{n,3} - 3N_{i,i-2}^{n,3} + 3N_{i,i-1}^{n,3} - N_{i,i}^{n,3}} \\ & - \frac{3N_{i,i-2}^{n,3} P_{i-1}}{N_{i,i-3}^{n,3} - 3N_{i,i-2}^{n,3} + 3N_{i,i-1}^{n,3} - N_{i,i}^{n,3}} + \frac{N_{i,i-3}^{n,3} P_{i-1}}{N_{i,i-3}^{n,3} - 3N_{i,i-2}^{n,3} + 3N_{i,i-1}^{n,3} - N_{i,i}^{n,3}} \end{aligned}$$

alnırsa,

$$\frac{\|P_{i-1}S\|}{\|SP_{i+1}\|} = -\frac{3N_{i,i-1}^{n,3} - N_{i,i}^{n,3}}{N_{i,i-3}^{n,3} - 3N_{i,i-2}^{n,3}}$$

elde edilir.

Sonuç 3.23. $n = 3$ durumunda, P_0 , P_2 ve P_3 bilinen kontrol noktalarına sahip minimum titreme enerjili Bezier eğrisinin bilinmeyen kontrol noktası P_1 ,

$$SP_1 = \frac{N_{1,1}^{3,2}(P_2 - P_3)}{N_{1,1}^{3,2} - 2N_{1,0}^{3,2}} = \frac{0(P_2 - P_3)}{0 + 2 \cdot \frac{3}{2}} = 0, \quad \frac{\|P_0S\|}{\|SP_2\|} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = 1$$

ve

$$SP_2 = \frac{N_{2,2}^{3,2}(P_3 - P_4) + N_{2,2}^{3,2}(P_1 - P_0)}{N_{2,2}^{3,2} - 2N_{2,1}^{3,2} + N_{2,0}^{3,2}} = 0, \quad \frac{\|P_1S\|}{\|SP_3\|} = 1$$

eşitliklerinden

$$P_1 = \frac{1}{3}(3P_2 + P_0 - P_3)$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 3.24. $n = 4$ olduğu zaman, bilinen kontrol noktaları P_0 , P_2 , P_3 ve P_4 olan minimum titreme enerjili Bezier eğrisinin bilinmeyen kontrol noktası P_1 ,

$$P_1 = \frac{1}{14}(5P_0 + 12P_2 - 2P_3 - P_4)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde, eğer bilinmeyen kontrol noktası P_2 veya P_3 ise, sırasıyla,

$$P_2 = \frac{1}{6}(4P_1 + 4P_3 - P_0 - P_4)$$

veya

$$P_3 = \frac{1}{14}(-P_0 - 2P_1 + 5P_4 + 12P_4)$$

dir.

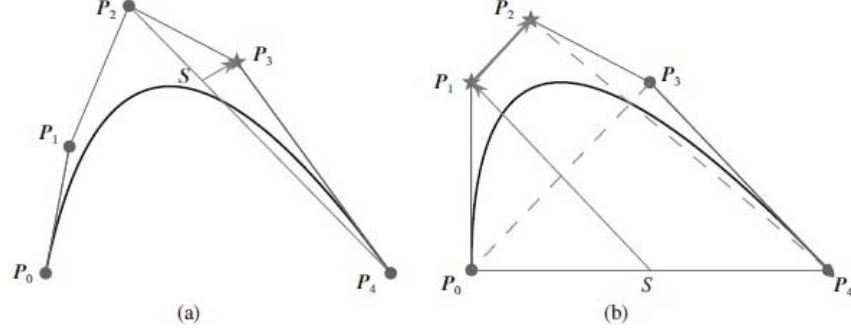
Sonuç 3.25. P_0 , P_3 ve P_4 kontrol noktaları verildiğinde bilinmeyen kontrol noktaları P_1 ve P_2 aşağıdaki şekilde inşaa edilir: S noktası P_0P_4 doğrusunun orta noktası olsun ve

$$SP_1 = P_4P_3$$

olacak şekilde S noktası P_1 noktasına doğru hareket etsin. O zaman,

$$P_1P_2 = \frac{1}{3}P_0P_3$$

olacak şekilde P_1 noktası P_2 noktasına doğru hareket eder. Böylece, karşılık gelen dördüncü dereceden Bezier eğrisi minimum titreme enerjisine sahiptir.



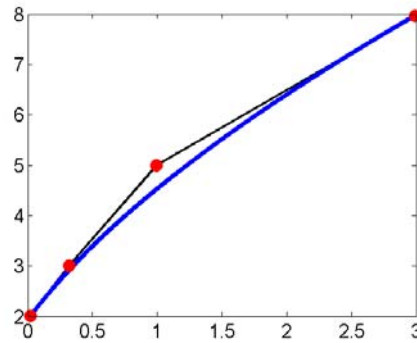
Şekil 3.9. Minimum titreme enerjili Bezier eğrisinin geometrik yapısı (Xu vd, 2011)

(a) da P_2 kontrol noktası bilinmiyor (b) de P_1 ve P_2 kontrol noktaları bilinmiyor

Örnek 3.26. Bilinen kontrol noktaları $P_0 = (0, 2)$, $P_2 = (1, 5)$ ve $P_3 = (3, 8)$ olan Bezier eğrisinin minimum titreme enerjisine sahip olabilmesi için bilinmeyen kontrol noktası $P_1 = (\frac{1}{3}, 3)$ şeklinde elde edilir. Elde edilen Bezier eğrisinin nedensel karakteri ise $\Delta^1 P_0 = (\frac{1}{3}, 1)$ spacelike, $\Delta^1 P_1 = (\frac{2}{3}, 2)$ spacelike, $\Delta^1 P_2 = (1, 3)$ spacelike ve $i \neq j$ için

$$y(\Delta^1 P_i)y(\Delta^1 P_j) > x(\Delta^1 P_i)x(\Delta^1 P_j)$$

olduğundan $\forall t \in [0, 1]$ için minimum titreme enerjili Bezier eğrisi spacelikedir (Şekil 3.10).



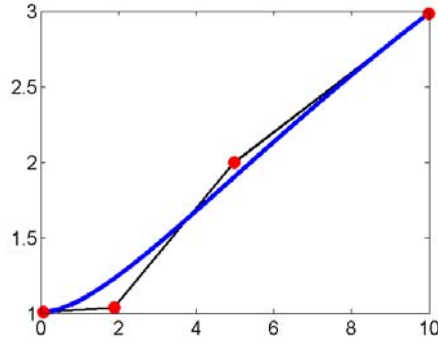
Şekil 3.10. Üçüncü dereceden minimum titreme enerjili spacelike Bezier eğrisi

Örnek 3.27. Bilinen kontrol noktaları $P_0 = (0, 1)$, $P_2 = (5, 2)$ ve $P_3 = (10, 3)$

olan Bezier eğrisinin minimum titreme enerjisine sahip olabilmesi için bilinmeyen kontrol noktası $P_1 = (\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$ şeklinde elde edilir. Elde edilen Bezier eğrisinin nedensel karakteri ise $\Delta^1 P_0 = (\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$ timelike, $\Delta^1 P_1 = (\frac{10}{3}, \frac{2}{3})$ timelike, $\Delta^1 P_2 = (5, 1)$ timelike ve $i \neq j$ için

$$y(\Delta^1 P_i)y(\Delta^1 P_j) < x(\Delta^1 P_i)x(\Delta^1 P_j)$$

olduğundan $\forall t \in [0, 1]$ için minimum titreme enerjili Bezier eğrisi timelikedir (Şekil 3.11).



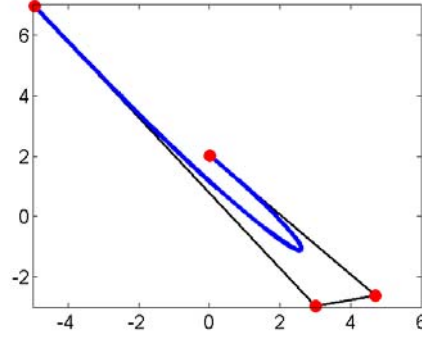
Şekil 3.11. Üçüncü dereceden minimum titreme enerjili timelike Bezier eğrisi

Örnek 3.28. Bilinen kontrol noktaları $P_0 = (2, 1)$, $P_1 = (5, 4)$, $P_3 = (7, 6)$ olan Bezier eğrisinin minimum titreme enerjisine sahip olabilmesi için bilinmeyen kontrol noktası,

$$P_2 = \frac{1}{4}(3P_3 - P_1 + 2P_0) = (\frac{10}{3}, \frac{7}{3})$$

şeklinde bulunur. $\Delta^1 P_0 = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ lightlike, $\Delta^1 P_1 = (\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$ lightlike ve $\Delta^1 P_2 = (2, 2)$ lightlike olduğundan $\forall t \in [0, 1]$ için minimum titreme enerjili

Bezier eğrisi lightlikedır (Şekil 3.12).

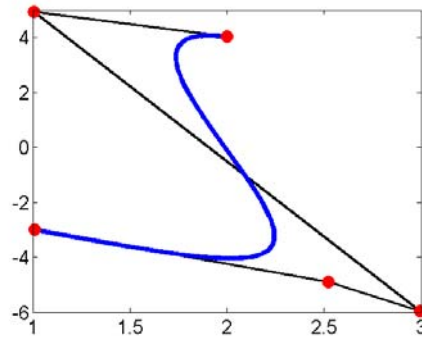


Şekil 3.12. Üçüncü dereceden minimum titreme enerjili lightlike Bezier eğrisi

Örnek 3.29. Bilinen kontrol noktaları $P_0 = (2, 4)$, $P_1 = (1, 5)$, $P_2 = (3, -6)$, $P_4 = (1, -3)$ olan Bezier eğrisinin minimum titreme enerjisine sahip olabilmesi için bilinmeyen kontrol noktası P_3 ,

$$P_3 = \frac{1}{14}(12P_2 + 5P_4 - 2P_1 - P_0) = \left(\frac{37}{14}, \frac{-65}{14}\right)$$

şeklinde bulunur. $\Delta^1 P_0 = (-1, 1)$ lightlike, $\Delta^1 P_1 = (1, 5)$ spacelike, $\Delta^1 P_2 = \left(-\frac{7}{20}, \frac{27}{20}\right)$ spacelike ve $\Delta^1 P_3 = (-2, 3)$ spacelike olduğundan $\forall t \in [0, 1]$ için Bezier eğrisinin nedensel karakteri için herhangi bir şey söylenemez (Şekil 3.13).



Şekil 3.13. Dördüncü dereceden minimum titreme enerjili Bezier eğrisi

4. MATRİSLER YARDIMIYLA MİNİMUM ENERJİLİ BEZİER EĞRİLERİNİN YAPILANDIRILMASI

Öklid ve Lorentz düzleminde minimum enerjili bir Bezier eğrisinin bilinmeyen kontrol noktaları bir S noktası yardımıyla verildi. Şimdi, S noktasına ihtiyaç duymadan minimum enerjili Bezier eğrisinin bilinmeyen kontrol noktalarına ulaşılacaktır. Bu bölümde, p tane bilinen kontrol noktasına sahip n . dereceden minimum enerjili Bezier eğrisinin $q = n - p$ tane bilinmeyen kontrol noktasının herhangi bir S noktası olmaksızın elde edilmesiyle ilgili bir yöntem verilecektir. Bu yöntem 2010 yılında Eberly D. tarafından Öklid düzleminde minimum gerilme enerjisine sahip Bezier eğrisinin bilinmeyen kontrol noktasını elde etmek için önerilen bir yöntemdir. Dolayısıyla bu bölümde Eberly D. tarafından verilen bu yöntem Öklid düzlemindeki minimum titreme enerjili Bezier eğrisinin bilinmeyen kontrol noktalarını elde etmek için genellendi. Son olarak da bu genellenmenin Lorentz düzleminde de geçerli olduğu sonucuna varıldı ve bir örnek verildi.

4.1. Minimum Titreme Enerjili Bezier Eğriler

Öncelikle, bilinen kontrol noktaları P_0, P_2, P_3 ve bilinmeyen kontrol noktası P_1 olan

$$\gamma(t) = (1-t)^3P_0 + 3(1-t)^2tP_1 + 3(1-t)t^2P_2 + t^3P_3$$

şeklinde üçüncü dereceden bir Bezier eğrisi düşünülün. Bu eğrinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri, sırasıyla,

$$\gamma'(t) = -3(1-t)^2P_0 + 3(1-t)(1-3t)P_1 + 3t(2-3t)P_2 + 3t^2P_3,$$

$$\gamma''(t) = 6((1-t)P_0 + (3t-2)P_1 + (1-3t)P_2 + tP_3)$$

ve

$$\gamma'''(t) = 6(-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3)$$

dir. O halde, üçüncü dereceden Bezier eğrisinin titreme enerjisi

$$E_3(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'''(t)\|^2 dt = 36 \|-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3\|^2$$

şeklinde elde edilir ve bu fonksiyonelin kritik noktasını veren denklem

$$-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3 = 0 \quad (4.1)$$

şeklinde bulunur. Böylece, (4.1) denkleminde aşağıdaki önerme verilir.

Önerme 4.1 Bilinen kontrol noktaları P_0, P_2 ve P_3 olan üçüncü dereceden Bezier eğrisinde bilinmeyen kontrol noktası

$$P_1 = \frac{3P_2 + P_0 - P_3}{3}$$

şeklinde inşaa edilirse P_0, P_1, P_2 ve P_3 kontrol noktalarına sahip Bezier eğrisinin titreme enerjisi minimum olur ve eğri ikinci dereceden Bezier eğrisine indirgenir.

Şimdi,

$$\gamma(t) = (1-t)^4 P_0 + 4(1-t)^3 t P_1 + 6(1-t)^2 t^2 P_2 + 4(1-t) t^3 P_3 + t^4 P_4$$

şeklinde dördüncü dereceden bir Bezier eğrisi ele alınsın. Burada P_0, P_3 ve P_4 bilinen, P_1 ve P_2 ise bilinmeyen kontrol noktaları olsun. O halde bilinmeyen kontrol noktaları P_1 ve P_2 olan Bezier eğrisi minimum titreme enerjisine sahip olacak şekilde elde edilecektir. Dördüncü dereceden Bezier eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri, sırasıyla

$$\begin{aligned} \gamma'(t) = & -4(1-t)^3 P_0 + 4(1-t)^2(1-4t)P_1 + 12(1-t)(1-2t)tP_2 \\ & + 4t^2(-4t+3)P_3 + 4t^3 P_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma''(t) = & 12((1-t)^2 P_0 + 2(1-t)(2t-1)P_1 + (6t^2 - 6t + 1)P_2 \\ & + 2t(1-2t)P_3 + t^2 P_4) \end{aligned}$$

ve

$$\gamma'''(t) = 24((t-1)P_0 + (3-4t)P_1 + (6t-3)P_2 + (1-4t)P_3 + tP_4)$$

şeklinde bulunur. O halde $E_3(\gamma)$ titrete enerji fonksiyonelinin integrantı olan $\|\gamma'''(t)\|^2$ nin matrisler yardımıyla ifadesi

$$\|\gamma'''(t)\|^2 = 576 P^T \begin{bmatrix} t-1 \\ 3-4t \\ 6t-3 \\ 1-4t \\ t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t-1 & 3-4t & 6t-3 & 1-4t & t \end{bmatrix} P$$

dir. Burada,

$$[P] = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

şeklinde elemanları P_i kontrol noktaları olan 5×1 tipinde bir sütun matrisidir. Matris terimlerinin integre edilmesiyle titreme enerjisi

$$E_3(\gamma) = 96P^T M P$$

bulunur. Burada,

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 & -1 \\ -5 & 14 & -12 & 2 & 1 \\ 3 & -12 & 18 & -12 & 3 \\ 1 & 2 & -12 & 14 & -5 \\ -1 & 1 & 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde 5×5 tipinde simetrik bir matristir. M matrisinin öz değerleri 35, 15, 0 (3 katlı) dır. 35 öz değeri için öz uzay 1-boyutludur ve $V_0 = (1, -4, 6, -4, 1)/\sqrt{70}$ birim uzunluklu öz vektör tarafından gerilir. 15 öz değeri için öz uzay 1-boyutludur ve $V_1 = (-1, 2, 0, -2, 1)/\sqrt{10}$ birim uzunluklu öz vektör tarafından gerilir. 0 öz değeri için öz uzay 3-boyutludur ve $V_2 = (3, 1, 0, 0, 1)/\sqrt{11}$, $V_3 = (-2, 6, 9, 7, 0)/\sqrt{170}$ ve $V_4 = (24, 30, 11, -33, -102)/\sqrt{13090}$ birim uzunluklu öz vektörleri tarafından gerilir. Böylece $\{V_0, V_1, V_2, V_3, V_4\}$ bir ortonormal kümedir ve bu öz vektörler,

$$R = \begin{bmatrix} V_0 & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{bmatrix}$$

dönme matrisini oluştururlar.

$$D = \begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

köşegen matrisi yardımıyla M simetrik matrisi, $M = RDR^T$ şeklinde

yazılır. Diğer taraftan, R dönme matrisi yardımıyla

$$\begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = Q = R^T P = \frac{1}{130900} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde Q matrisi tanımlanır. O halde, titreme enerjisi

$$E_3(\gamma) = 96P^T M P = 96P^T R D R^T P = 96Q^T D Q = 3360 \|Q_0\|^2 + 1440 \|Q_1\|^2$$

şeklinde elde edilir. Q_0 ve Q_1 değerleri sıfır olduğunda $E_3(\gamma)$ titreme enerjisi minimum olacaktır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} P_0 - 4P_1 + 6P_2 - 4P_3 + P_4 &= 0 \\ -P_0 + 2P_1 - 2P_3 + P_4 &= 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

bulunur. Böylece aşağıdaki önerme verilir.

Önerme 4.2. Bilinen kontrol noktaları P_0, P_3 ve P_4 olan bir Bezier eğrisinin bilinmeyen kontrol noktaları P_1 ve P_2

$$P_1 = \frac{P_0 + 2P_3 - P_4}{2} \text{ ve } P_2 = \frac{P_0 + 8P_3 - 3P_4}{6}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde inşaa edilirse elde edilen Bezier eğrisi minimum titreme enerjisine sahip olur.

4.2. Problemin Genel Metod ile Çözümü

Bu altbölümde, bir önceki altbölümde ele alınan minimum titreme enerjili Bezier eğrilerinin geometrik inşasının matrisler yardımıyla genellemesinin nasıl verilmeli sorusunun cevabı aranacaktır. Yani, bilinen kontrol noktaları verildiğinde n . dereceden bir Bezier eğrisinin minimum titreme enerjisine sahip olabilmesi için bilinmeyen kontrol noktalarının nasıl elde edileceğine dair yeni yollar aranacak.

Şimdi özel olarak P_0, P_2, P_3 ve P_4 kontrol noktaları verildiğinde dördüncü dereceden Bezier eğrisinin minimum titreme enerjisine sahip olması için bilinmeyen P_1 kontrol noktasına nasıl ulaşılacağına dair problem ele alınacaktır. Bunun için öncelikle bilinen ve bilinmeyen kontrol noktalarından oluşan P matrisi, bilinmeyen kontrol noktası ilk satıra yerleştirecek şekilde yeniden

düzenlenirse

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

permütasyon matrisi yardımıyla

$$\widehat{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_0 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = JP$$

olur. Diğer taraftan

$$\widehat{M} = JMJ^T$$

şeklinde tanımlansın. Böylece titreme enerjisinin fonksiyoneli

$$\frac{E_3(\gamma)}{4} = \widehat{P}^T \widehat{M} \widehat{P} = \widehat{P}^T \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \widehat{P}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\widehat{M}$ matrisi; (1×1) -tipinde A , (1×4) -tipinde B , (4×4) -tipinde C matrisi şeklinde ayrıştırılsın. $\widehat{P}$ matrisi ise bilinmeyen kontrol noktalarının oluşturduğu (1×1) -tipinde U matrisi, bilinen kontrol noktalarının oluşturduğu (4×1) -tipinde K matrisi şeklinde yazılsın. Bu matrislerle yapılan cebirsel işlemler sonucunda,

$$\frac{E_3(\gamma)}{4} = U^T AU + 2K^T B^T U + K^T CK$$

elde edilir. $E_3(\gamma)$ nin minimum olabilmesi için bilinmeyen kontrol noktalarının oluşturduğu U matrisine göre elde edilen ikinci dereceden denklemin gradyantı sıfır yani,

$$AU + BK = 0$$

olmalıdır. Böylece, U ya bağlı bir lineer denklem sistemi elde edilir ve bu denklem sistemi çözülerek bilinmeyen kontrol noktası bulunur. O halde,

$$\widehat{M} = \begin{bmatrix} 14 & -5 & -12 & 2 & 1 \\ -5 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ -12 & 3 & 18 & -12 & 3 \\ 2 & 1 & -12 & 14 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

olduğundan A bir tersinir matrisdir ve bilinmeyen kontrol noktası

$$P_1 = \frac{1}{14} (5P_0 + 12P_2 - 2P_3 - P_4)$$

şeklinde elde edilir. Böylece, dördüncü dereceden minimum titreme enerjisine sahip Bezier eğrisinin bilinmeyen P_1 kontrol noktası bulunmuş olur.

Benzer şekilde, verilen kontrol noktaları P_0, P_3 ve P_4 , bilinmeyen kontrol noktaları P_1 ve P_2 olan dördüncü dereceden Bezier eğrisi,

$$\frac{E_3(\gamma)}{4} = \widehat{P}^T \widehat{M} \widehat{P} = \widehat{P}^T \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \widehat{P}$$

şeklinde ifade edilen titreme enerji fonksiyoneline sahiptir. Burada $\widehat{M}$ matrisi; (2×2) -tipinde A , (2×3) -tipinde B , (3×3) -tipinde C matrisine ayrıştırılır. $\widehat{P}$ matrisi ise bilinmeyen kontrol noktalarının oluşturduğu (2×1) -tipinde U matrisi ve bilinen kontrol noktalarının oluşturduğu (3×1) -tipinde K matrisi şeklinde yazılır. Bu matrislerle yapılan cebirsel işlemler sonucunda,

$$\frac{E_3(\gamma)}{4} = U^T A U + 2K^T B^T U + K^T C K$$

elde edilir. $E_3(\gamma)$ nin minimum olabilmesi için bilinmeyen kontrol noktalarının oluşturduğu U matrisine göre elde edilen ikinci dereceden denklemin gradyantı sıfır yani,

$$AU + BK = 0 \tag{4.3}$$

olmalıdır. Böylece, A tersinir bir matris olduğunda U ya bağlı lineer denklem sistemi çözülerek bilinmeyen kontrol noktaları elde edilir. O halde,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindeki permütasyon matrisi için $\hat{P} = [P_1 \ P_2 \ P_0 \ P_3 \ P_4]^T$, $U = [P_1 \ P_2]^T$, $K = [P_0 \ P_3 \ P_4]^T$ ve

$$\widehat{M} = \begin{bmatrix} 14 & -12 & -5 & 2 & 1 \\ -12 & 18 & 3 & -12 & 3 \\ -5 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -12 & 1 & 14 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

olmak üzere (4.3) denkleminde

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -12 \\ -12 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 3 & -12 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}.$$

bulunur. Böylece,

$$P_1 - 12P_2 - 5P_0 + 2P_3 + P_4 = 0$$

ve

$$-12P_1 + 18P_2 + 3P_0 - 12P_3 + 3P_4 = 0.$$

denklemleri elde edilir. Dolayısıyla aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç. 4.3. Bilinen kontrol noktaları P_0, P_3 ve P_4 bilinmeyen kontrol noktaları P_1 ve P_2 olan bir Bezier eğrisi için,

$$P_1 = \frac{P_0+2P_3-P_4}{2} \text{ ve } P_2 = \frac{P_0+8P_3-3P_4}{6}.$$

şeklinde inşaa edilirse elde edilen Bezier eğrisi minimum titreme enerjisine sahip olur.

Şimdi, q tane bilinen ve p tane bilinmeyen kontrol noktasına sahip n . dereceden bir Bezier eğrisinin minimum titreme enerjisine sahip olması için

bilinmeyen kontrol noktalarının nasıl bulunacağı sorusunun cevabını veren aşağıdaki teorem verilir.

Teorem. 4.4. $\gamma(t)$, p tane bilinmeyen kontrol noktası ve q tane bilinen kontrol noktasına sahip n . dereceden bir Bezier eğrisi olsun.

$$J = \begin{pmatrix} L & O \\ O^T & I \end{pmatrix}$$

ve

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} = JMJ^T$$

olmak üzere minimum enerjili Bezier eğrisinin bilinmeyen kontrol noktaları

$$AU + BK = 0$$

denklem sisteminin çözümüdür. Burada

$$L = (\ell_{ij}) = \begin{cases} 1, & i + 1 = j \\ 1, & i = p + 1 \text{ ve } j = 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq p + 1,$$

şeklinde tanımlı $(p + 1) \times (p + 1)$ -tipinde bir matris L , $(p + 1) \times (q - 1)$ -tipinde sıfır matris O , $(q - 1) \times (q - 1)$ -tipinde birim matris I , $(p \times p)$ -tipinde matris A , $(p \times q)$ -tipinde matris B , $(q \times q)$ -tipinde matris C , $(p \times 1)$ -tipinde bilinmeyen kontrol noktalarının sütun matrisi U ve $(q \times 1)$ -tipinde bilinen kontrol noktalarının sütun matrisi K dir. Ayrıca, $n \geq 3$ ve $0 \leq i, j \leq n$ olmak üzere

$$m_{(i+1)(j+1)} = \frac{(n!)^2}{(2n-5)!} \sum_{k,l=0}^3 \frac{(-1)^{k+l} \binom{3}{k} \binom{3}{l} (2n-i-j-k-l)!(i+j+k+l-6)!}{(i+k-3)!(j+l-3)!(n-i-k)!(n-j-l)!}$$

dir.

İspat. p tane bilinen kontrol noktası ve q tane bilinmeyen kontrol noktasına sahip n . dereceden Bezier eğrisinin n tane kontrol noktasının matrisi

$$P = \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}$$

olsun. P matrisindeki bilinmeyen kontrol noktalarını ilk satırlara sıralamak için

$$\widehat{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_q \\ P_0 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & O \\ O^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} = JP$$

olacak şekilde J matrisi tanımlansın. Diğer taraftan $\widehat{M} = JMJ^T$ matrisi şeklinde tanımlanırsa, titreme enerjisi

$$\frac{E_3(\gamma)}{4} = \widehat{P}^T \widehat{M} \widehat{P} = \widehat{P}^T \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \widehat{P}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\widehat{M}$ matrisi; $(p \times p)$ -tipinde A , $(p \times q)$ -tipinde B ve $(q \times q)$ -tipinde C matrislerinden oluşur. $\widehat{P}$ matrisi ise $(p \times 1)$ -tipinde bilinmeyen kontrol noktalarının U sütun matrisi ve $(q \times 1)$ -tipinde bilinen kontrol noktalarının K sütun matrislerinden oluşur. Bu matrislerle yapılan cebirsel işlemler sonucunda,

$$\frac{E_3(\gamma)}{4} = U^T AU + 2K^T B^T U + K^T CK$$

elde edilir. $E_3(\gamma)$ nin minimum olabilmesi için bilinmeyen kontrol noktalarının oluşturduğu U matrisine göre elde edilen ikinci dereceden denklemin gradyantının sıfır yani,

$$AU + BK = 0$$

olması gerekir. Böylece, A tersinir bir matris olduğunda U ya bağlı lineer denklem sisteminin tek bir çözümü vardır. A tersinir bir matris olmadığında U ya bağlı lineer denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır. Böylece, titreme enerjisini minimize eden bilinmeyen kontrol noktaları bulunmuş olur.

Şimdi P_0 , P_4 , P_5 bilinen ve P_1 , P_2 , P_3 bilinmeyen kontrol noktalarına sahip 5. dereceden Bezier eğrisinin minimum titreme enerjisine sahip olması için bilinmeyen kontrol noktaları yukarıdaki teorem yardımıyla aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 6 & -15 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -15 & 40 & -30 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -30 & 30 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 30 & 30 & 10 \\ 0 & 5 & 0 & 30 & 40 & -15 \\ -1 & 0 & 0 & 10 & -15 & 6 \end{pmatrix}$$

ve

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} 40 & -30 & 0 & -15 & 5 & 0 \\ -30 & 30 & -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 30 & 0 & 30 & 10 \\ -15 & 0 & 0 & 6 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 30 & 0 & 40 & -15 \\ 0 & 0 & 10 & -1 & -15 & 6 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$A = \begin{pmatrix} 40 & -30 & 0 \\ -30 & 30 & -10 \\ 0 & -10 & 30 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -15 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 10 \end{pmatrix}$$

elde edilir. O halde, minimum enerjili Bezier eğrisinin bilinmeyen kontrol noktaları

$$\begin{pmatrix} 40 & -30 & 0 \\ -30 & 30 & -10 \\ 0 & -10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_4 \\ P_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

denklem sisteminin çözümüdür. Böylece, bilinmeyen kontrol noktaları, sırasıyla

$$P_1 = \frac{96P_0 - 40P_4 + 24P_5}{40},$$

$$P_2 = \frac{-27P_0+33P_4+8P_5}{10},$$

ve

$$P_3 = \frac{-9P_0+21P_4+6P_5}{10},$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 4.5 Elde edilen teorem Lorentz düzleminde minimum titreme enerjili Bezier eğrilerin bilinmeyen kontrol noktalarının bulunması için de geçerlidir.

Son olarak, bu sonucu destekleyen aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 4.6. Lorentz düzleminde $P_0 = (0, 0)$, $P_3 = (2, 10)$ ve $P_4 = (3, 15)$ bilinen ve P_1 ve P_2 bilinmeyen kontrol noktalarına sahip 4. dereceden bir Bezier eğrisi verilsin. Bezier eğrisinin minimum titreme enerjisine sahip olması için J permütasyon matrisi ve M matrisi yardımıyla elde edilen

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} = JMJ^T,$$

matrisi ve bu matris yardımıyla $E_3(\gamma)$ titreme enerji fonksiyonelinin minimizasyonu olan

$$AU + BK = 0$$

eşitliği

$$\begin{pmatrix} 14 & -12 \\ -12 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 3 & -12 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0, 0) \\ (2, 10) \\ (3, 15) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen bu denklem sisteminin çözülmesiyle $E_3(\gamma)$ fonksiyonelinin kritik noktaları olan bilinmeyen kontrol noktaları

$$P_1 = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) \text{ ve } P_2 = (\frac{1}{6}, \frac{35}{6})$$

bulunur. Ayrıca, minimum titreme enerjisine sahip Bezier eğrisinin nedensel karakteri ise $\Delta^1 P_0 = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ spacelike, $\Delta^1 P_1 = (\frac{-1}{3}, \frac{10}{3})$ spacelike, $\Delta^1 P_2 = (\frac{11}{6}, \frac{-25}{6})$ spacelike, $\Delta^1 P_3 = (1, 5)$ spacelike ve $i \neq j$ için $y(\Delta^1 P_i)y(\Delta^1 P_j) > x(\Delta^1 P_i)x(\Delta^1 P_j)$ olduğundan $\forall t \in [0, 1]$ için spacelikedir.

KAYNAKLAR

- Brunnet, G., Hagen, H., Santarelli, P., 1993. Variational Design of Curves and Surfaces, Surveys on Mathematics for Industry, 3, 1 – 27.
- Brunnet, G., Kiefer, J., 1994. Interpolation with Minimal-Energy Splines, Computer Aided Design, 26, 137 – 144.
- Brunnet, G., Kiefer, J., Wendt, J., 1999. Fair Curves for Motion Planning, International Journal Vehicle Design, 21, 266 – 277.
- Duggal, K L., Bejancu, A., 1996. Lightlike Submanifold of Semi-Riemannian Manifolds and Applications Kluwer Academic Publishers, 303p., Netherlands.
- Eberly, D., 2010. A Relation Between Minimum Bending Energy and Degree Elevation for Bezier Curves, Geometric Tools, LLC.
- Farin, G., 2002. Curves and Surfaces for CAGD. Academic Press, 500p, California.
- Felsager, B., 2004. Through the Looking Glass: A Glimpse of Euclid's Twin Geometry The Minkowski Geometry. Supplementary Notes ICME–10 Copenhagen Haslev Gymnasium & HF, Denmark.
- Ferguson, J., 1964. Multivariable Curve Interpolation, Association for Computing Machinery, 11, 221 – 228.
- Georgiev, G. H., 2008. Space-like Bezier Curves in the Three Dimensional Minkowski Space, American Institute of Physics, 1067, 373 – 379.
- Gilmore, R., 2008. Lie Groups, Physics and Geometry. Cambridge University Press, New York.
- Gökhan, G., 1978. Varyasyonlar Hesabı, İstanbul Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi Yayınları, 162s, İstanbul.

- Gravesen, J., 2002. Differential Geometry and Design of Shape and Motion, Lectures Notes. Department of Mathematics Technical University of Denmark 154p., Denmark.
- Greiner, G., 1994. Variational Design and Fairing of Spline Surfaces, Comput Grap Forum, 13, 143 – 154.
- Hagen, H., 1985. Geometric Spline Curves, Computer Aided Geometric Design, 2, 223 – 227.
- Hagen, H., 1992. Variational Principles in Curve and Surface Design. Geometric IMA Conference on the Mathematics of Surfaces, Edinburgh, 169 – 190.
- Higashi, M., Kaneko, K., Hosaka, M., 1988. Generation of High-quality Curve and Surface with Smoothly Varing Curvature, Eurographics 88, 79 – 92, Nice, France.
- Jou, E. D., Han, W. M., 1990*a*. Minimal Energy Splines with Various End Constraints, Curve and Surface Modeling, SIAM Frontiers in Applied Mathematics Series, Philadelphia, USA.
- Jou, E. D., Han, W. M., 1990*b*. Minimal-Energy Splines: I. Plane Curves with Angle Constraints, Mathematical Methods Applied Science, 13, 351 – 371.
- Lopez, R., 2014 Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space, International Electronic Journal of Geometry, 7(1), 44 – 107.
- Meier, H., Nowachi, H., 1987. Interpolating Curves with Gradual Changes in Curvature, Computer Aided Geometric Design, 4, 297 – 305.
- Nielson, G. M., 1974. Some Piecewise Polinomial Alternatives to Splines Under Tension, Computer Aided Geometric Design, Academic Press, Inc, 209 – 235, Orlando, Florida.
- Nielson, G. M., 1983. A Method for Interpolating Scattered Data Based Upon a

- Minimum Norm Network, Mathematical Computing, 40, 253 – 271.
- Nielson, G. M., 1984. A Locally Controllable Spline with Tension for Interactive Curve Design, Computer Aided Geometric Design, 1, 199 – 205.
- O'Neill, B., 1983. Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, 469p, New York.
- Park, F. C., Ravani, B. 1995. Bezier Curves on Riemannian Manifolds and Lie Groups with Kinematics Applications, ASME, 117, 36 – 40.
- Popiel, T., Noakes, L. 2006. C2 spherical Bezier splines Computational Aided Geometric Design. 23, 261 – 275.
- Popiel, T., Noakes, L. 2007. Bezier curves and C2 interpolation in Riemann manifolds, Journal of Approximation Theory, 148, 111 – 127.
- Roulier, J., 1988. Bezier curves of Positive Curvature, Computer Aided Geometric Design, 5, 59 – 70.
- Saxena, A., Sahay, B., 2005. Computer Aided Engineering Design, Anamaya Publisher New Delhi, India 369 p.
- Schmuckenschläger, M., 2013. Lorentz Geometry and Special Theory of Relativity, Erişim Tarihi: 06/03/2014. http://www.quixquax.at/bleichling.php/lorentzgeometry/html/lorentz_geometry=2.html.
- Technische Universität Berlin, 2012. Lorentzian Geometry. Erişim Tarihi: 20/06/2014. Lorentzian Geometry. <http://www3.math.tu-berlin.de/geometrie/lorentz/>.
- Yong, J. H., Cheng, F., 2004. Geometric Hermite with Minimum Strain Energy, Computer Aided Geometric, 21, 281 – 301.
- Weinstock, R., 1952. Calculus of Variation, McGraw-Hill Book Company, 326p, USA.

Wikipedia, 2015. Bezier curve Erişim tarihi: 01/08/2015
<http://tr.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zier=e%C4%9Frisi>.

Xu, G., Wang, G. Chen, W., 2011. Geometric Construction of Energy-Minimizing Bezier Curves, Science China Information Sciences, 54(7), 1395 – 1406.

Zhang, C. M., Zhang, P. F., 2001. Fairing Spline Curve and Surfaces by Minimizing Energy, Comput Aided Design, 33, 913 – 923.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hale ERİŞKİN
Doğum Yeri ve Yılı : İskilip, 1989
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : haleeriskin@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Söke Yabancı Dil Lisesi, 2007
Lisans : S.D.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2011
Yüksek Lisans : S.D.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik A.B.D., 2015

Mesleki Deneyim

Isparta Milli Eğitim Müdürlüğü 2012 – 2014
Antalya Milli Eğitim Müdürlüğü 2015 – ...(halen)

Yayınları

Arıkoğlu, H., Yücesan, A., 2012. Bezier Curves with Minimal Jerk Energy. International Conference: Mathematical Science & Applications, 26 – 31 December 2012, Abu Dhabi, United Arab Emirates.