



T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü



FARKLI KARA DELİK TİPLERİNİN ÇEKİMSEL MERCEKLEME ETKİLERİ

Yüksek Lisans Tezi

Rahime MATUR

Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı

İzmir
2019

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

FARKLI KARA DELİK TİPLERİNİN ÇEKİMSEL MERCEKLEME ETKİLERİ

Rahime MATUR

Prof. Dr. Kadri YAKUT

Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı
Astrofizik Yüksek Lisans Programı

İzmir
2019

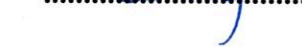
Rahime Matur tarafından Yüksek Lisans tezi olarak sunulan “Farklı Kara Delik Tiplerinin Çekimsel Mercekleme Etkileri” başlıklı bu çalışma EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile EÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 29 Temmuz 2019 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

Jüri Başkanı : Prof.Dr. Selim O. SELAM
Raportör Üye : Prof.Dr. Kadri YAKUT
Üye : Prof.Dr. Can B. KILINÇ

İmza


.....

.....

.....

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Farklı Kara Delik Tiplerinin Çekimsel Mercekleme Etkileri” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

29 / 07 / 2019

Rahime Matur



ÖZET**FARKLI KARA DELİK TİPLERİNİN ÇEKİMSSEL MERCEKLEME
ETKİLERİ**

MATUR, Rahime

Yüksek Lisans Tezi, Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Kadri YAKUT

Temmuz 2019, 104 sayfa

Bu tezde farklı kara delik türlerinin neden olduğu çekimsel mercekleme etkileri ve bu etkilerinin farklı parametrelere göre nasıl değiştiği irdelenmiştir. İlk olarak dönmeyen bir kara delik varsayımı dikkate alınmıştır. Bu varsayım altında fotonun nasıl hareket edeceği ve olası sapmaların parametrelere bağlı olarak değişimi incelendi. Daha sonra dönen bir kara delik varsayımı altında benzer durumlar ele alınmıştır. Böylesi bir geometride oluşacak sapma, mercekleme etkileri ve olası kara delik gölgeleri detaylı olarak incelendi. Çift kara delik olduğunda mercekleme etkilerinin değişimini yine bu çalışmada ele alınmıştır. Hesaplamalar gözlemsel veriler kullanılarak test edildi. Bu kapsamda gökadalara merkezinde bulunan çok sayıda süper kütleli kara deliklere ilişkin mercekleme parametreleri yeniden hesaplandı. Buna ek olarak, kara delikler ile benzer mercekleme etkileri gösteren kuazar gözlemleri dahil edilerek bir karşılaştırma yapıldı. Son olarak M87 gökadasının merkezinde yeralan çok büyük kütleli kara deliğin elde edilen yeni gözlem sonuçları dikkate alınarak yeni hesaplamalar yapıldı.

Anahtar sözcükler: Çekimsel mercekleme, kara delikler, genel görelilik



ABSTRACT**THE GRAVITATIONAL LENS EFFECT OF VARIOUS BLACK
HOLE TYPES**

MATUR, Rahime

MSc in Astronomy and Space Sciences

Supervisor: Prof. Dr. Kadri YAKUT

July 2019, 104 pages

In this thesis, the gravitational lensing effect of different type of black holes and its dependence on various parameters has been investigated. Firstly, non-rotating black hole assumption is considered. Under this assumption, the motion of the photon and the dependence of its path bending on various parameters have been studied. Secondly, a rotating black hole has been assumed. For such a geometry, bending, lensing effect, and possible black hole shadows are investigated in details. The variation of lensing is also considered for the double black holes. Calculations are tested with the observed data. Lensing parameters of supermassive black holes at the center of galaxies are re-estimated. In addition, quasar observations that show similar lensing effects are also considered for comparison. Finally, recent observation results of the supermassive black hole at the center of the M87 galaxy are considered for new estimations.

Key words: Gravitational lensing, black holes, mass in general relativity.

ÖNSÖZ

Tez konusunu belirlerken teorik ve aynı zamanda ileriye dönük gözlemleri de kapsayabilecek bir konu seçmek istemekteydik. Bu nedenle merceklemenin bu ikisini kapsayabilecek bir konu olduğunu düşünerek, konumuzu kara deliklerin çekimsel merceklemesi olarak belirledik. Çalışmalarımıza literatür taraması ile başlayıp, denklemlerin büyük bir bölümünü doğrudan el ile hesaplayarak aynı zamanda Mathematica programında çıkarımını yaptık. Belirli varsayımlar kullanarak gökada merkezindeki çok büyük kütleli kara deliklerin çekimsel mercekleme etkilerini hesapladık ve güçlü merceklemeye neden olan kuazarların gözlemleri ile karşılaştırdık. Çalışmamızın üzerinden yaklaşık bir yıl sonra Event Horizon Telescope M87 gökada merkezindeki çok büyük kütleli kara deliğin gölge gözlemini sundu (12 Nisan 2019). Bu çalışmada bu değerleri teorik çalışmaların ışığında belirlemiştik. Sonuç olarak tüm çalışmalarımızı birleştirerek tez çalışmamızı derledik.

İZMİR

29 / 07 / 2019

Rahime Matur



İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇ KAPAK	ii
KABUL ONAY SAYFASI	iii
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI.....	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	xiii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xvi
TABLolar DİZİNİ.....	xviii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xix
1.GİRİŞ.....	1
1.1 Kısa Tarihçe.....	1
1.2 Genel Görelilik	2
1.3 Çekimsel Merceklemeye	12
2. SCHWARZSCHILD KARA DELİĞİ ÇEKİMSEL MERCEKLEMESİ	19
2.1 Schwarzschild Metriği	19

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

2.2 Genel Hareket Denklemi.....	21
2.3 Kara Delik Lens Denklemi	28
2.4 Görüntülerin Konumu	30
2.5 Görüntülerin Büyütülmesi.....	33
2.6 Schwarzschild Kara Deliği Çekimsel Merceklemesinin Relativistik Görüntüleri	34
2.7 Çekimsel Mercekleme ile Çıplak Tekillikler	38
2.8 Etkilerin Hesaplamaları.....	42
3. KERR KARA DELİĞİ ÇEKİMSEL MERCEKLEMESİ	48
3.1 Kerr metriği ve hareket sabitleri	48
3.2 EKVATORAL DÜZLEMDE KERR KARA DELİĞİ ÇEKİMSEL MERCEKLEMESİ	51
3.2.1 Kerr kara deliği lens denklemi	51
3.3 Yarı Ekvatorial Düzlemde Bulunan Gözlemci için KERR Kara Deliği Çekimsel Merceklemesi	55
3.3.1 Yarı ekvatorial düzlemde hareket denklemi ve sapma açıları	55
3.3.2 Yarı ekvatorial düzlemde lens denklemi	68
3.3.3 Görüntü konumları	72

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

3.3.4 Görüntülerin büyütülmesi.....	74
3.3.5 Zaman gecikmesi	76
3.4 Kerr Kara Deliğinin Gölgesi.....	79
3.5 Kerr Kara Deliğinin Gölge Hesaplamaları	83
4. ÇİFT KARA DELİKLERDE ÇEKİMSSEL MERCEKLEME.....	88
4.1 Majumdar-Papapetrou Di-Hole Metriği ve Foton Küreleri.....	90
4.2 Majumdar-Papapetrou Di-Hole’u Tarafından Çekimsel Mercekleme	92
4.3 Çift Kara Delik Birleşmelerive Çekimsel Mercekleme.....	95
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	97
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	99
TEŞEKKÜR	104
ÖZGEÇMİŞ	105

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil

Sayfa

1.1.	Bir kürenin yüzeyinde büyük daireler boyunca paralel taşıma. (Mollerach et al., 2002)	8
1.2	Basit bir çekimsel merceklenme geometrisinin gösterimi (Virbhadra, 2008)	13
1.3	KIDS projesi ile elde edilmiş iki Jüpiter/ Satürn benzeri gezegenin en iyi fit edilmiş modelleri. Parlaklık değişimleri gezegen ve yıldızların mercek etkisi gösterdiği dönemlere göre değişmektedir. 3 numaralı özellik parlaklığın en büyük olduğu dönemdir ve bu dönemde mercek etkisi gösteren cisim sistemin yıldızıdır. Daha düşük parlaklık değişimlerinde mercek etkisi gösteren cisimler sistemin gezegenleridir. (Gaudi et al., 2018)	15
1.4	Bullet kümesi çekimsel merceklenme çalışması. Kırmızı bölge: sıcak gazın saldığı X-ışın, mavi bölge: karanlık madde olarak yorumlanmaktadır. Gözlem: Hubble/Chandra/Magellan. (Markevitch et al., 2006)	16
1.5	İlk Einstein halkası gözlemi. 1988 yılında Very Large Array teleskopu ile gözlenmiştir (Hewit et al., 1988).	17
2.1	Basit bir lens geometrisine bağlı olarak belirli açılar ve uzaklıkların tanımı. O, S, I sırasıyla gözlemci, kaynak ve görüntüyü ifade eder (Mollerach, S., 2002)	29
2.2	$r_s = 2000M$ ve $r_s = 2.6M$ için görüntülerin konumu (Bozza, V., 2009).	31
2.3	Einstein halkası geometrisi. O, M, S sırasıyla gözlemci, mercek ve kaynağı belirtmektedir (Mollerach, S., 2002).	32
2.4	Einstein halkasına karşı kaynak uzaklığının konumu. (a) birinci halka (b) ikinci halka. Düz yatay çizgi; $\bar{u} = 3\sqrt{3}M$ gölge sınırını gösterir (Bozza, V., 2010)	33
2.5	Sol görüntü: Sapma açısına karşı etki parametresi J/M çizilmiştir. Ok J/M 'nin değeri artarken sapma açısı değerinin azalmasının göstergesidir. Sağ görüntü: S, L ve O sırasıyla kaynağın, merceğin ve gözlemcinin konumlarını temsil eder. Bu şematik diyagramdaki açılar abartılıdır (Virbhadra, 2009).	37

ŞEKİLLER DİZİNİ(devam)

Şekil	Sayfa
2.6	Açısal kaynak konumu β değeriindeki artışa bağlı olarak relativistik görüntülerin etkin sapma açılarındaki değişimi gösteren şematik diyagram (Virbhadra, 2009). 37
2.7	Gözlemlenen değerler ve merceklenme gösteren 52 kuazarın büyütme, görüntü ayrıklığı ve Einstein halkası yarıçapı gözlemsel (mavi) ve kuramsal (kırmızı) değerleridir. Gözlem değerleri Lemon et al., (2018) ve Lemon et al., (2019)'dan alınmıştır. 47
3.1	Şekilde mercek ve gözlemci arasındaki uzaklık D_d mercek kaynak arası uzaklık D_{ds} ve gözlemci ve kaynak arası uzaklık D_s 'dir. (θ, ϕ) açıları görüntü konumunu tanımlayan açılar ve (β, χ) açıları ise kaynak konumunu tanımlayan açılardır. β mercek, gözlemci ve kaynak arasında kalan açıyı tanımlar. Kaynaktan salınan fotona teğet çizgi B' ve gözlemciye ulaşan fotona teğet çizgi A' olarak verilmektedir. B' teğet çizgisini tanımlayan açılar θ_s ve ϕ_s 'tir. Kerr kara deliği çekimsel merceklenme geometrisinde bu iki teğet çizgi kesişmez. Kesiştiği durumda küresel simetri durumuna dönmektedir (Azaami. A., 2011). 52
3.2	Kara delik spininin farklı değerleri için ekvator gözlemcisi tarafından görülen gölge sınırı. θ_1, θ_2 $2M/r_0$ biriminde gözlemci gökyüzündeki açısal koordinatlarıdır. Kara delik merkezdedir ve dönme eksenini pozitif θ_2 yönündedir (Bozza. V., 2010). 81
3.3	Kerr kara deliğinin gölgesi. R_s gölge dairesel olduğu durumda gölge yarıçapını ifade eden terimdir. Spin parametresi dahil edildiğinde gölge biçimi daireselden sapma gösterir. Bu durumda daireselden en fazla sapmanın izlendiği noktada yarıçap D karad içerdendir (Li et al., 2014). 82

TABLOLAR DİZİNİ

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Farklı kara deliklerde çekimsel merceklenme etkilerinin hesabı. Açılar yay saniyesi birimindedir	45
3.1 Kara delik gölgesinde spin parametresi nedeniyle oluşan bozulmayı belirleyen deformasyon parametresi (Kumar et al, 2018)	83
3.2 Bilinen çok büyük kütleli 64 kara deliklerin belirli bölgeleri. R_s kara deliğin gölge yarıçapı, R_d dönme nedeniyle oluşan gölgedeki eğri bölgenin gölge merkezine uzaklığıdır	86

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
c	Işık hızı
G	Çekim sabiti
β	Kaynak açısı
θ_E	Einstein halkası açısı
$\theta_{\pm}$	Görüntü konumları açısı
μ	Görüntülerin büyütülmesi
τ	Zaman gecikmesi
D_d	Mercek uzaklığı
D_{ds}	Mercek-Kaynak uzaklığı
D_s	Kaynak uzaklığı
α	Sapma açısı
α_e	Etkin sapma açısı
b	Etki parametresi
R_s	Kara deliğin gölge yarıçapı
R_d	Kara deliğin gölgesinin deforme olduğu bölgesindeki yarıçap
$\Delta\phi$	Görüntü konumu

Kısaltmalar

et al./ ve ark.	ve çalışma arkadaşları
JNW	Janis-Newman-Winicour uzay zamanı
WNS	Weakly Naked Singularity - Zayıf çıplak tekillikler
SNS	Strongly Naked Singularity - Güçlü çıplak tekillikler
MSNS	Marginally Strongly Naked Singularity - Zayıf bir şekilde güçlü çıplak tekillikler
BH	Black Hole - Kara delik
SMBH	Supermassive black hole - Çok büyük kütleli kara delik
ISCO	Innermost stable circular orbit – En içteki kararlı dairesel foton yörüngesi

1.GİRİŞ

1.1 Kısa Tarihçe

Doğanın yapısı ve nasıl işlediği hakkında birçok meraklı araştırmacı antik çağlardan bu yana farklı fikirler öne sürmüşlerdir. İlk önemli adım Plato'nun öğrencisi Aristoteles (M.Ö. 384-322) tarafından, kendinden önce düşünülmüş doğa yasalarını dört temel element kuramı ile iletmesi sonucunda atılmıştır. Daha sonra çok sayıda farklı fikirler öne sürülmüştür. Bilimdeki ilk devrimsel nitelik taşıyan yaklaşımlar Nicolas Copernicus (1473-1543), Tycho Brahe (1546-1601), Johannes Kepler (1571-1630) ve Galileo Galilei (1564-1642) tarafından gerçekleştirilmiştir. Kopernik devrimi olarak bilinen devrim ilk olarak Kopernik'in Güneş merkezli sistemi önermesi ile başlamıştır. Kepler 1609-1619 tarihleri arasında gezegen hareketleri hakkında üç önemli yasa ileri sürmüştür. Bu yasalar, gezegenlerin yörünge şekillerinin nasıl olması gerektiği ve dönem-yarı büyük eksen uzunluğu arasındaki ilişkiyi içermektedir. Galileo teleskop ile yaptığı gözlemler ile bu devrimin önemli bir parçası olmuştur.

Matematik ve fizik alanında çok önemli katkılar sağlayan Isaac Newton (1643-1727) doğanın kanunları hakkında düşünürken çekim kuvvetini ortaya koymuştur. Ayrıca Newton eğer Yer'de çekim etkisi gibi bir kuvvet olmasaydı, Ay'ın da Yer'den uzaklaşması gerekeceğini düşünmüştür. Newton bu kuvvete çekim adını vererek bu kuvvetin tüm cisimler arasında var olduğunu belirtmiştir. Newton'a göre çekim, Güneş ile Yer, Yer ile bizler veya herhangi iki cisim arasında var olan bir kuvvettir.

1905 yılında Albert Einstein (1879-1955) gözlemci ile gözlemlenen olay arasındaki uzay-zaman ilişkisini betimlemiştir. Einstein, ışık hızına yakın hızlarda Newton fiziğinden farklı bir fiziğin çalışması gerektiğini belirtmiştir. Görüldüğü üzere, doğayı anlama çabamız çok uzun yıllar içinde aşamalar geçirmiştir. Çekim algımız da aynı şekilde yıllar içinde değişmiştir. Günümüzde başta gravitasyonel dalga gözlemleri olmak üzere hem parçacık fiziğinde hem de gözlemsel

astronomide elde edilen yeni bulgular bize çekimin doğasını ve dolayısı ile içinde yaşadığımız evreni anlama olanağı sunmaktadır.

1.2 Genel Görelilik

Uzay ve zaman ayrımı özel görelilik ile birlikte terk edilmiştir. Özel görelilik kuramı eylemsiz referans sisteminde geçerli olan fizik yasalarını ifade etmektedir. Işık hızının her gözlemci açısından aynı olması için zaman ve uzaklık ölçümleri mutlak olamaz, ancak gözlemcinin hareketine bağlı olmalıdır. Yakın olaylar arasındaki diferansiyel aralık ds , (t, x, y, z) koordinatlarında şöyle ifade edilmektedir;

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1.1)$$

Farklı koordinatlarda yer alan (t', x', y', z') başka bir gözlemci de iki olay arasındaki aralığı aynı bulacaktır. Eğer Kartezyen koordinatlar yerine eğrisel koordinatlar kullanacak olursak, aralığın karesi yer değiştirmelerin kuadratik fonksiyonu olarak kalmaya devam edecektir.

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (1.2)$$

Einstein'ın çekim teorisinin temellerinden birini, serbest düşme referans sisteminde (ünlü Einstein asansörü) bir gözlemcinin hiçbir gravitasyonel etkiyi deneyimlemediğini ifade eden zayıf eşdeğerlilik ilkesi oluşturur. Başka bir deyişle deneyler ile, bir gravitasyonel alan ile ivmelenmiş referans sistemi arasında ayırım yapmak mümkün değildir ve bu nedenle, tüm cisimlerin çekime maruz kaldıklarında aynı ivmelenmeyi deneyimlemelerini sağlar. Bu belirli bir P noktasının komşuluğunda uzay zamanın Minkowski'ye indirgendiği serbest düşme sistemine bir koordinat dönüşümü yapabildiği anlamına gelir;

$$g_{ik}(P) = \eta_{ik}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik}(P) = 0 \quad (1.3)$$

Özel görelilikteki düz Minkowski uzay zamanının aksine, bir gravitasyonel alanın varlığında metriğin Minkowski formuna indirgenebileceği koordinatlar yoktur ve bu durumda uzay zaman kendiliğinden eğridir.

Genel görelilik ile birlikte özel görelilik durumunda kullanılan eylemsiz referans sistemlerinin terk edilmesi gerekmektedir. Örnek olarak gravitasyonel alanların varlığında saatlerin farklı konumlarda senkronizasyonu mümkün değildir. Eşdeğerliliğin güçlü biçimi, çekim tarafından eğrilen bir uzay zamandaki gravitasyonel olmayan kuvvetlerin etkisini tanımlar ve serbest düşme sisteminde özel göreliliğin düz Minkowski uzay zamanındaki aynı formu aldığını gösterir.

Rastgele bir referans sisteminde fiziksel olayların matematiksel bir tanımı için eğri koordinatlarda dört boyutlu uzayın geometrisini tanımlayan bazı kavramlara ihtiyaç duyulmaktadır. En basit tensör, $(x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ dönüşümü altında bir skalerdir. Bundan sonra kovaryant ve kontravaryant olarak ifade edilebilen vektörler gelir. Bir kontravaryant vektörün basit formu;

$$dx'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dx^i \quad (1.4)$$

Dörtlü kontravaryant vektör A^i 'nin dönüşümü;

$$A'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A^i \quad (1.5)$$

Bir skalerin gradyent dönüşümü;

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^k} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (1.6)$$

ve herhangi dörtlü değer A_i için;

$$A'_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A_i \quad (1.7)$$

dönüşümleri ifade edilmektedir. Skalerler sıfır ranklı tensörler, vektörler bir ranklı tensörlerdir. Daha yüksek mertebeden tensörler benzer şekilde tanımlanırlar. Örneğin, iki ranklı bir kontravaryant tensör, iki kontravaryant vektörün ürünü olarak dönüşen 16 değerdir, başka bir deyişle;

$$A'^{ik} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} A^{lm} \quad (1.8)$$

Kontravaryant vektörler kovaryant vektörlere göre ters matris işlemi ile dönüştürülebilmektedir.

Metrik tensör g_{ik} , aralığın karesini veren $dx^i dx^k$ kontravaryant tensör ile daraltılmış, ikinci ranktan bir kovaryant tensördür. İkinci ranktan bir kontravaryant metrik tensör g^{ik} , g_{ik} 'nın tersidir;

$$g^{ik} g_{kl} = \delta_l^i \quad (1.9)$$

δ_l^i Kronecker deltadır ve eğer $i=l$ ise 1'e $i \neq l$ ise 0'a eşittir. (1.7) denkleminin diferansiyeli, vektör bileşenlerinin sıradan türevlerinin bir tensör olarak dönüşmediğini gösterir çünkü;

$$\frac{\partial A'_k}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^l}{\partial x'^j} \frac{\partial A_i}{\partial x^l} + \frac{\partial x^i}{\partial x'^j \partial x'^k} A_i \quad (1.10)$$

Bunun altında yatan sebep, diferansiyel işlemin iki farklı noktanın komşuluğunda vektörlerin çıkarımını içermesi ve dönüşüm katsayıları $\partial x^i / \partial x'^k$ uzay zaman noktalarının bir fonksiyonu olduğu zaman iki vektörün farkının bir vektör gibi dönüşmemesidir. Bir tensör olarak dönüşen bir diferansiyel işlemin tanımlanması için aynı noktada tanımlanmış iki vektörün diferansiyeli dahil edilmelidir. Böylece, vektörleri çıkarmadan önce, birini diğerinin tanımlandığı komşu noktaya taşımak zorundayız. Bu, paralel taşıma yöntemi ile sağlanabilir. $x^i + dx^i$ noktasından komşu x^i noktasına taşındığında, bir kovaryant vektörün bileşenlerindeki değişiklik, genel olarak, orijinal bileşenlerin ve iki nokta arasındaki yer değiştirmenin doğrusal bir fonksiyonu olacaktır. Bu şu şekilde ifade edilebilir;

$$\delta A_i = -\Gamma_{ik}^j A_j dx^k \quad (1.11)$$

Γ_{ik}^j Christoffel sembolleridir ve paralel taşımanın nasıl gerçekleştirileceğini açıklar. Bunun yardımı ile kovaryant vektörün kovaryant türevi şu şekilde yazılabilir;

$$A_{i;k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^j A_j \quad (1.12)$$

Bir kontravaryant vektörün kovaryant türevinin bulunması ile, bir skaler için kovaryant türevin, normal kısmi türevine eşit olması nedeniyle kolaydır. Skaleri $\phi = A^i B_i$ alırsak;

$$A_{i;k}^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i A^j \quad (1.13)$$

Kovaryant türevinin bir tensör olarak dönüşmesini ve düz bir uzay zamanda Kartezyen koordinatlarda bilindik kısmi türeve indirgemesini gerektiren durumda;

$$A_{i;k} = (g_{ij} A^j)_{,k} = g_{ij} A_{,k}^j + g_{ij;k} A^j \quad (1.14)$$

$g_{ij;k} = 0$ 'dır. Metriğin kovaryant türevinin yok olması;

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = g_{km} \Gamma_{il}^m + g_{im} \Gamma_{kl}^m \quad (1.15)$$

olduğunu belirtir ve bu metrik bakımından Christoffel sembollerini elde etmek için kullanılabilir. Bunun için, Christoffel sembollerinin değerini elde etmek amacıyla iki alt indiste simetrik olduğunu kullanmamız gereklidir;

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = 2g_{im} \Gamma_{jk}^m \quad (1.16)$$

Sonuç olarak Christoffel sembolü;

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) \quad (1.17)$$

olarak bulunur. Bir parçacık;

$$S = -mc \int ds \quad (1.18)$$

etkisi altında hareket eder. Çekimin yokluğunda bir serbest parçacık düzgün ve doğrusal bir hareketi takip eder. Çekimin varlığında parçacıklar iki olay arasındaki aralık ile orantılı olan yörüngeleri de tanımlar fakat çekim uzay zamanın geometrisini değiştirdikçe hareket düzgün ve doğrusal değildir. Eğri uzay zamanda verilen iki nokta arasındaki uzaklık jeodeziktir, dolayısıyla parçacık yörüngeleri jeodezik olarak tanımlanmaktadır. Foton durumunda kütesiz olduğu için yörüngeyi null jeodezikler belirlemektedir.

Hareket denklemlerini elde etmek amacı ile $x^i(\lambda)$ yörüngelerini parametrize etmek ve $\dot{x}^i \equiv dx^i / d\lambda$ hızları bakımından $ds / d\lambda = \sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k}$ ile,

$\int (ds/d\lambda)d\lambda$ hareketi için Euler-Lagrange denklemlerini bulmak yararlı olacaktır. Bunlar;

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} \left(\frac{ds}{d\lambda} \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{ds}{d\lambda} \right) \quad (1.19)$$

Bu denklemi $2ds/d\lambda$ ile çarpınca;

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} \left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 - 2 \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{ds}{d\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} \left(\frac{ds}{d\lambda} \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 \quad (1.20)$$

olmaktadır. Bu denklemi basitleştirmek amacıyla, genel parametre λ 'yı, $ds/d\lambda$ 'nın yörünge boyunca sabit olacağı şekilde seçebiliriz (bu durumda λ afin parametresidir ve yörünge boyunca ölçülen aralık λ 'ya doğrusal olarak bağlıdır). Euler – Lagrange denklemi şuna indirgenir;

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} (g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j) = \frac{\partial}{\partial x^k} (g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j) \quad (1.21)$$

veya;

$$\frac{d}{d\lambda} (g_{ik} \dot{x}^i) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j \quad (1.22)$$

Bu denklemin sol kısmının genişletilmesi ve Christoffel sembolleri kullanılması sonucunda jeodezik denklemi;

$$\frac{d^2 x^m}{d\lambda^2} + \Gamma_{kl}^m \frac{dx^k}{d\lambda} \frac{dx^l}{d\lambda} = 0 \quad (1.23)$$

olmaktadır ve eğri bir uzay zamanda rastgele koordinatlar için parçacık hareketini tanımlamaktadır. Kütleli bir parçacık için, yörünge boyunca $ds/d\lambda$ 'nın sabitliği $\lambda = s$ seçimi ile elde edilir, ki bu durumda $ds/d\lambda = 1$ 'dir.

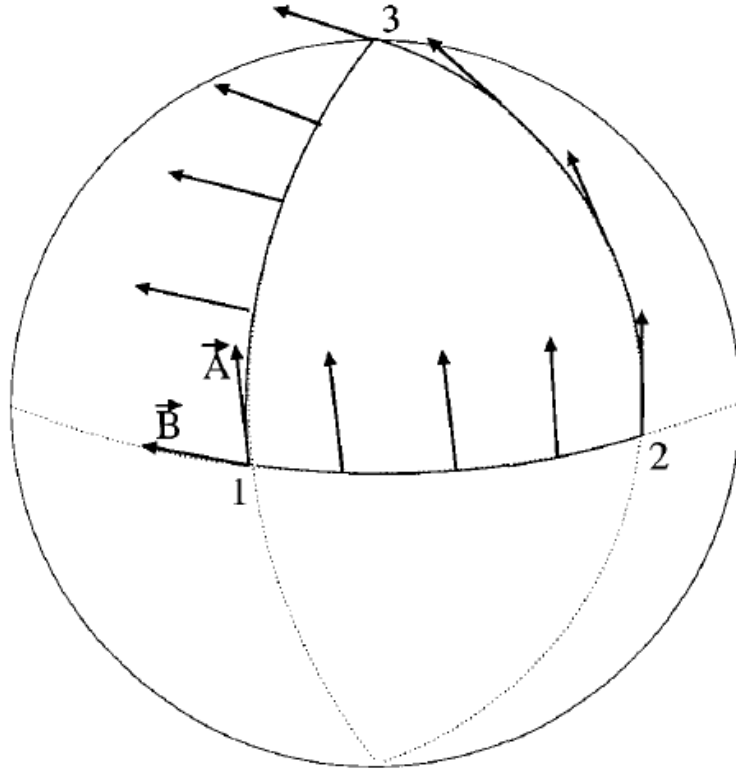
$$g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 1, (m \neq 0) \quad (1.24)$$

Bu ilişki doğrudan jeodezik denklemlerinin ilk integralini sağlar. Foton için;

$$g_{ik} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} = 0, (m = 0) \quad (1.25)$$

Bu durumda, bu ilişki kısıtlanmış olarak göz önünde bulundurulmalıdır ve afin parametresi jeodezik denklemlerinden tanımlanmıştır.

Bilindiği üzere, çekimin varlığı uzay-zaman eğriliğine neden olmaktadır. Uzay eğriliğinin özelliklerini saptamanın doğrudan yolu, bir vektörün eğri uzay zamanda bir noktadan diğerine paralel olarak taşındığı zaman, taşıma farklı yollar boyunca gerçekleştirilirse, farklı vektörlerin ortaya çıkmasıdır. Bu, Şekil 1.1’de gösterildiği gibi, bir kürenin yüzeyindeki bir üçgen boyunca bir vektörün taşınmasıyla iki boyutlu olarak kolayca görülebilir.



Şekil 1.1 Bir kürenin yüzeyinde büyük daireler boyunca paralel taşıma (Mollerach et al., 2002)

1'den 2'ye sonrasında 3'e ve oradan tekrar 1'e büyük daireler boyunca paralel taşıma tarafından $\vec{A}$ 'dan elde edilen $\vec{B}$ vektörü, $\vec{A}$ ile çakışmaz.

Daha yüksek boyutlu uzaylar için, vektördeki değişiklikler taşınmanın gerçekleştirildiği yönlerle bağlı olacaktır. Örnek olarak A^i vektörünü x^l koordinatı boyunca bir Δx uzaklığına ve sonra farklı bir x^m koordinatı boyunca Δy uzaklığına sonradan tekrar x^l koordinatı boyunca $-\Delta x$ uzaklığına paralel olarak taşımak isteniyorsa, vektördeki tüm değişiklik $\delta A^i \equiv A^i(\text{son}) - A^i$;

$$\begin{aligned}
\delta A^i &= - \int_{x^l}^{x^l + \Delta x} [\Gamma_{jl}^i A^j]_{x^m} dx^l - \int_{x^m}^{x^m + \Delta y} [\Gamma_{jl}^i A^j]_{x^l + \Delta x} dx^m \\
&\quad - \int_{x^l + \Delta x}^{x^l} [\Gamma_{jl}^i A^j]_{x^m + \Delta y} dx^l + \int_{x^m + \Delta y}^{x^m} [\Gamma_{jl}^i A^j]_{x^l} dx^m \\
&\approx \Delta x \Delta y \left[\frac{\partial}{\partial x^m} (\Gamma_{jl}^i A^j) - \frac{\partial}{\partial x^l} (\Gamma_{jl}^i A^j) \right] \\
&= \Delta x \Delta y \left[\frac{\partial}{\partial x^m} \Gamma_{jl}^i - \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{jm}^i - \Gamma_{kl}^i \Gamma_{jm}^k + \Gamma_{km}^i \Gamma_{jl}^k \right] A^j
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Son eşitlikteki köşeli parantez içinde gördüğümüz ifade Riemann tensörü R_{jml}^i ’dir ve Christoffel sembollerini kullandığımızda metriğin ikinci türevleri cinsinden ifade edilebilir;

$$R_{ijlm} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^m} + \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^l \partial x^i} \right] \tag{1.27}$$

$\delta A^i \neq 0$ olduğundan, iki farklı sonsuz küçük yer değiştirme boyunca paralel taşıma, gerçekleştirildikleri sıraya bağlıdır. Bu aynı zamanda, sıradan türevlerden farklı olarak, kovaryant olanlar için, ikinci türevlerin değişmediğini gösterir. Gerçekten de doğrudan hesaplamalar şunu göstermektedir;

$$A_{,j;k}^i - A_{,k;j}^i = R_{ijk}^i A^l \tag{1.28}$$

Bu denklemin sol tarafının bir tensör olması nedeniyle R_{ijlm} de bir tensör olmak zorundadır. Riemann tensörü ayrıca eğrilik tensörü olarak da bilinmektedir çünkü uzay zaman düz olduğunda bu tensör yok olurken eğri uzay zamanda bu tensör bir değere sahip olmaktadır.

Eğrilik tensörünün kovaryant bileşenini $R_{ijkl} \equiv g_{jm} R_{ikl}^m$ kullanarak, simetri özellikleri çıkarılabilir;

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij} \tag{1.29}$$

Diğer bir önemli eşitlik ise Bianchi özdeşliğidir;

$$R_{iklm;n} + R_{iknl;m} + R_{ikmn;l} = 0 \quad (1.30)$$

Riemann tensöründe iki indisin daralmasıyla iki ranklı tensörü oluşturulabilir. Bu yapı benzersizdir, çünkü ilk iki ya da son iki indisin değişimi antisimetri nedeniyle, bunların daralması sıfır tensöre yol açacaktır. Bu nedenle birinci ve üçüncü indis üzerinde yapılan daralma işlemi Ricci tensörü olarak adlandırılan tensöre yol açar,

$$R_{ik} \equiv g^{lm} R_{limk} = R_{imk}^m \quad (1.31)$$

ve simetriktir. Daha ileri daraltmalar sonucunda eğrilik skalerini elde edebiliriz;

$$R \equiv g^{ik} R_{ik} \quad (1.32)$$

Bianchi özdeşliğinin daraltılması sonucunda çok önemli bir ilişki elde ediyoruz;

$$\left(R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R \right)_{;k} = 0 \quad (1.33)$$

Genel Görelilikteki uzay zaman metriğinde eğri bir uzay zamanda maddenin nasıl belirlendiğini ele alalım.

Özel görelilikte madde ve enerji dağılımı enerji momentum tensörü T_{ik} ile belirlenir ve enerji ve momentumun korunumu $\partial T_{ik} / \partial x^k = 0$ anlamına gelmektedir.

Einstein, geometri ile maddeyi ilişkilendiren bir denklem aramak için, enerji-momentum tensörünün, metriğin ilk iki türevini içeren bir ifade için kaynak

olarak hareket etmesi gerektiğini düşünmüştür çünkü, relativistik olmayan ve zayıf gravitasyonel alan sınırında Poisson denklemine indirgenmesi gerekir;

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G \rho \quad (1.34)$$

Önerdiği temel denklem;

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \kappa T_{ik} \quad (1.35)$$

Enerji momentum korunumunun genel ifadesi (1.33) denklemidir, yani $T_{ik}^{;k} = 0$,dır. κ değerinin uygun seçimi ile Einstein denklemi relativistik olmayan hız sınırlarında Poisson denklemine indirgenir, zayıf gravitasyonel alan ($g_{ik} \approx \eta_{ik} + h_{ik}, |h_{ik}| \ll 1$) ve alanlar zamanla ($\partial_t \ll c \partial_x$) yavaşça değişir. h_{ik} da birinci dereceden Ricci tensörü;

$$R_{ik} \approx \frac{1}{2} \eta^{lm} (h_{il,mk} + h_{mk,il} - h_{ik,ml} - h_{ml,ik}) \quad (1.36)$$

Yalnız zamansal türevler göz önüne alındığında, (00) bileşeni $R_{00} \approx \nabla^2 h_{00} / 2$ elde edilir ve Newton potansiyeli φ bakımından $h_{00} = 2\varphi / c^2$ hesaplanabilir. Enerji momentum tensörü ile ilgili olarak, relativistik olmayan sınırdaki tek ilgili bileşeni $T_{00} = \rho$ ve onu takip eden $T \equiv T_i^i \approx \rho$ 'dir. (1.35) denklemini g_{ik} ile daralttığımızda $R = -\kappa T$ elde edilir ve Einstein denklemi tekrardan yazılabilir;

$$R_{ik} = \kappa \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right) \quad (1.37)$$

Bu zayıf alan limitini verir;

$$R_{00} = \frac{1}{c^2} \nabla^2 \varphi = \frac{\kappa}{2} \rho \quad (1.38)$$

ve böylece Poisson denklemi $\kappa = 8\pi G / c^4$ olarak tekrardan sağlanır. Homojen bir madde dağılımı varlığında olduğu gibi, denklem (1.35)'de statik çözümler kabul edilmez. Einstein, o zamanki genel kabule uygun olarak evrenin statik kalmasını sağlamak amacıyla denkleme yeni bir terim eklemiştir. Bu terim ünlü kozmoloji sabiti Λ 'dır. Bu durumda Einstein denklemi;

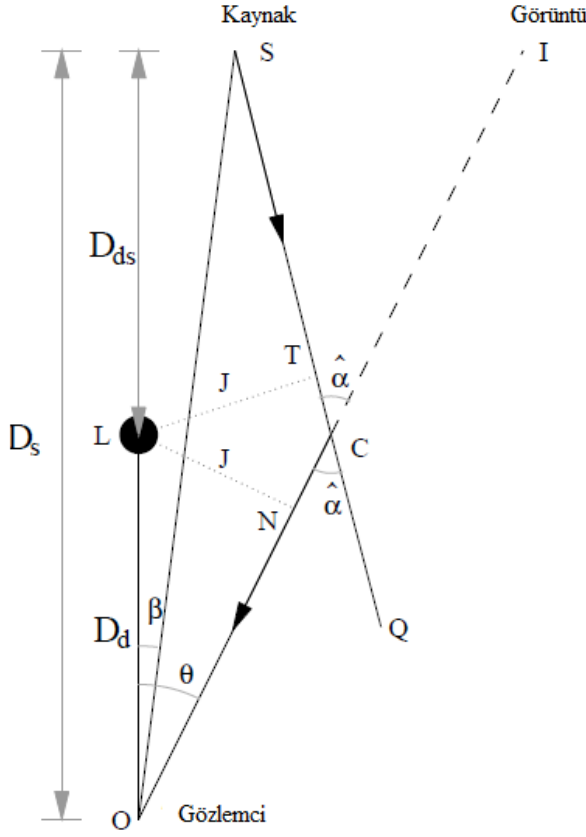
$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} \quad (1.39)$$

Evrenin genişlediği keşfi sonucunda kozmolojik sabit kaldırılmış ve birkaç kez tekrardan eklenmiştir. Günümüzde, genellikle, bir vakum enerjisi yoğunluğunun veya bazı stres-enerji bileşenlerinin katkısından gelen denklemin sağ tarafının bir parçası olarak kabul edilmekte ve aslında bunun için sıfır olmayan bir değere sahip olduğuna dair kanıtlar artmaktadır (Mollerach et al., 2002).

1.3 Çekimsel Mercekleme

Genel görelilik ile birlikte Einstein, (1916) çekim için yeni bir görüş ortaya koymuştur. Bu görüş kütle veya enerji-momentum tensörünün uzay-zamanı bükmesidir. Bu uzay-zaman bükülmesi sonucunda bir parçacık veya ışık yolunda ilerlerken bir sapma görülecektir. Bu düşünce Eddington (1919) tarafından gözlemsel olarak kanıtlanmış ve bu da genel göreliliği destekleyen gözlemsel ilk kanıt olarak tarihe geçmiştir. Bu deney sayesinde 1919'lardan bugüne ışığın sapınca uğradığı bilinmektedir. Bu olay çekimsel mercekleme olarak bilinmektedir. Işığını aldığımız bir kaynak ve mercekleme etkisi gösteren bir cisim düşünelim. Mercekleme etkisi gösteren cismin uzay-zamanı bükmesi sonucunda, kaynaktan gelen ışık yolunda ilerlerken sapınca uğrar. Bu etki çekimsel mercekleme etkisidir. Bunun sonucunda mercekleme etkileri görülür.

Bunlardan bazıları, görüntülerin büyütülmesi, zaman gecikmesi, Einstein halkası, Einstein haçı'dır.

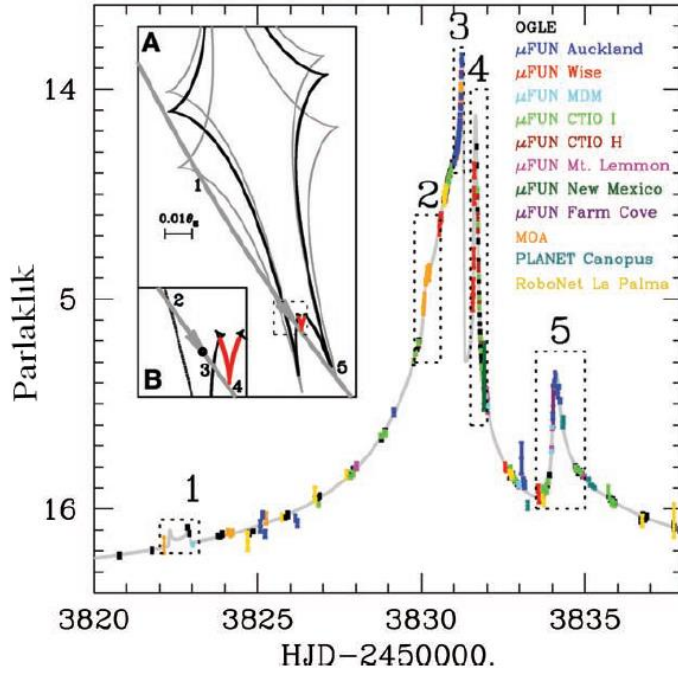


Şekil 1.2 Basit bir çekimsel mercekleme geometrisinin gösterimi (Virbhadra, 2008).

Einstein çok uzakta bulunan bir yıldızın görüntülerinin büyütülmesi için doğru ifadeyi 1936 yılında yayınlamıştır. Walsh, Carswell and Weynman (1979) çekimsel merceklemenin ilk gözlemsel örneği olan kuazar Q0957+561'in ön plandaki bir gökada tarafından merceklemesi sonucu oluşan çoklu görüntüsünü keşfetmiştir. Bu keşif sonucunda mercekleme astronomide önemli alanlarda kullanılmaya başlanmıştır. Buna örnek olarak kuazar tarafından oluşan mercekleme olaylarında çoklu görüntüler arasındaki zaman gecikmesi kullanılarak Hubble sabitini ölçmeyi sağlamaktadır.

Kaynak, mercek ve gözlemcinin konumlarına bağlı olarak farklı mercekleme olayları oluşmaktadır. Mercek etkisi yaratan cisim büyük kütleli

olduğu ve ışığı sapınca uğrayan kaynağın, mercek etkisi yaratan cisme yakın olduğu durumda ışık gözlemciye doğru farklı yollar alır ve gözlemci kaynağın birden fazla görüntüsünü gözlemler. Bu güçlü çekimsel merceklenme durumudur. Güçlü merceklenme durumunda kaynak, mercek ve gözlemci arka arkaya sıralandığında Einstein halkası, bir görüntüden diğerine zaman gecikmesi olduğu durumda ise Einstein haç'ı meydana gelmektedir. Bu durumda mercek etkisi oluşturan cisme örnek olarak kara delikler, kuazarlar, gökada ve gökada kümeleri verilebilir. Bazı durumlarda mercek etkisi yaratan cisim birden fazla görüntü veya yay oluşturmak için yeterince güçlü değildir. Bu zayıf çekimsel merceklenmedir ve bunun etkisi ışığı sapınca uğrayan cismin şeklini bozulmuş olarak görmemize neden olur. Zayıf çekimsel merceklemeye örnek olarak kozmolojik araştırmaları verebiliriz. Karanlık madde çalışmaları veya herhangi bir madde dağılımından geçen ışık zayıf çekimsel merceklemeye maruz kalmaktadır. Bazı durumlarda ise merceklenme çok küçük veya zayıf bir görüntüdür. Gözlemciye doğru bükülen ışık yalnızca kaynağın daha parlak görülmesini sağlamaktadır. Bu durum ise mikrolensing olarak adlandırılmaktadır. Mikrolensing gezegen keşifleri gibi önemli araştırmalara öncülük etmektedir.



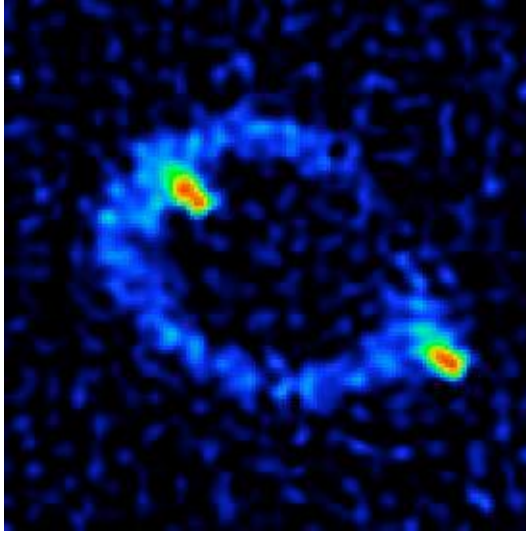
Şekil 1.3 KIDS projesi ile elde edilmiş iki Jüpiter/ Satürn benzeri gezegenin en iyi fit edilmiş modelleri. Parlaklık değişimleri gezegen ve yıldızların mercek etkisi gösterdiği dönemlere göre değişmektedir. 3 numaralı özellik parlaklığın en büyük olduğu dönemdir ve bu dönemde mercek etkisi gösteren cisim sistemin yıldızıdır. Daha düşük parlaklık değişimlerinde mercek etkisi gösteren cisimler sistemin gezegenleridir. (Gaudi et al., 2018)

Çekimsel merceklenme teorisinin temeli Liebes, (1964), Refsdal, (1964) ve Bourassa et al., (1975) tarafından geliştirilmiştir. Walsh, Carswell and Weymann (1979) çekimsel merceklemenin ilk örneğini keşfetmişlerdir. Lynds et al., (1986) ve Soucail et al., (1987) bağımsız olarak zengin gökada kümeleri içinde yaklaşık 20 yay saniyesi uzunluğunda dev mavi ışık yaylarını gözlemlemişlerdir. Hewit et al., (1988) $z_s=1.13$ kırmızıya kaymada MG1131+0456 gökadasında ilk Einstein halkasını gözlemlemiştir (Virbhadra et al., 2000).



Şekil 1.4 Bullet kümesi çekimsel mercekleme çalışması. Kırmızı bölge: sıcak gazın saldığı X-ışın, mavi bölge: karanlık madde olarak yorumlanmaktadır. Gözlem: Hubble/Chandra/Magellan. (Markevitch et al., 2006)

Çekimsel mercekleme bugüne dek astronomi için önemli bir araç haline gelmiştir. Zayıf mercekleme ile kozmolojik araştırmalarda, çeşitli astrofiziksel süreçlerin araştırılmasında, karanlık maddenin belirlenmesinde, kara deliklere ilişkin araştırmalarda, gezegen keşiflerinde, uzaklık ve kütle bulma gibi birçok alanda çok kullanışlı bir yöntemdir. Özellikle modern yöntemler ile yapılan hassas gözlemlerin artması ile bu çalışmaların konusu oldukça kullanışlı bilgiler sunan temel astronomik problemlerin çözümünde rol oynayan bir alan olmuştur. Bu yöntemin önemli bir araç haline gelmesi çeşitli projelerin başlatılmasına neden olmuştur. Bunlardan bazıları, Optical Gravitational Lensing Experiment (OGLE), Kilo Degree Survey (KIDS), Microlensing Follow-Up Network (MicroFUN)'dır. Aynı zamanda PLANCK projesinin 2015 ve 2018 çalışmaları da çekimsel mercekleme projelerine dahil edilmelidir. Bu projelerden yalnız bir tanesi dahi yılda yaklaşık 700 tane mikrolensing olayı saptamaktadır.



Şekil 1.5 İlk Einstein halkası gözlemi. 1988 yılında Very Large Array teleskopu ile gözlenmiştir (Hewit et al., 1988).

Genellikle gravitasyonel alanlar tarafından oluşan ışığın sapıncı gözlemler ile belirlendiğinde çok zayıf olmaktadır. Güçlü merceklenme olarak adlandırılan olaylarda fotonlar birkaç yay saniyesinden fazla sapınca uğratılmazlar. Einstein'ın birinci dereceden formülü bu olayların çoğunu açıklamaktadır. Fakat karadelik gibi çok kompakt cisimlerin neden olduğu merceklenme olayları için bu yaklaşımı ilerletmek gerekmektedir. Genel görelilik teorisi zayıf gravitasyonel alanda deneysel olarak testler geçirmiş, fakat güçlü bir gravitasyonel alanda test edilememiştir. Kompakt büyük kütleli bir cismin çevresindeki gravitasyonel alan testi, örneğin kara delikler, böylesi araştırmalar için olası bir yoldur. Bunlar çekimsel merceklenme yolu ile Einstein'ın genel görelilik teorisinin gözlemsel olarak test edilmesi için yararlı bir hedef olabilir (Bozza, 2010).

Kara delikler tarafından çekimsel merceklenme çalışmaları bazı hedefleri barındırmaktadır. Kara delik keşifleri, dönme ve yüklerine göre kara deliklerin çekimsel merceklenmesi, güçlü ve zayıf çıplak tekilliklerin birbirinden ayırdı, kara deliklerin uzaklıklarının belirlenmesi gibi birçok çalışma alanı sağlar. Çekimsel merceklenme ilerdeki kara delik çalışmaları için önemli bir araç olacaktır.

Schwarzschild 1916 yılında dönmeyen, küresel simetrik bir karadeliğin etrafındaki uzay zamanı tanımlayan bir metrik yazmıştır. 1965 yılında Atkinson

dönmeyen bir kara deliğin neden olduğu geometrideki çekimsel merceklenme araştırmalarına başlamıştır. Kerr (1963) dönen kara delikleri tanımlayan metriği yazmış, 1968 yılında Carter Kerr metriğindeki null jeodezikleri çalışmaya başlamıştır. Frittelli ve Newman, (1999) tam lens denklemini yazmışlardır. Bu denklemi Perlick, (2004) tüm küresel simetrik uzay-zamana genellemiştir. Virbhadra ve Ellis, (2000) çalışmasında relativistik görüntüleri çalışmıştır. Bozza et al. (2001; 2002) ve Eiroa et al. (2002) küresel simetrik gravitasyonel alanlarda yeni bir yaklaşım geliştirmişlerdir. Bozza (2005; 2006) Kerr kara deliğindeki çekimsel merceklemeye ekvatorial ve genel hareket için analitik çözümler getirmiştir.

Bu çalışmada kara deliklerin neden olduğu çekimsel merceklenme etkilerini araştırmaktayız. Öncelikle dönmeyen (küresel simetrik, Schwarzschild) ve daha sonra dönen (Kerr) bir kara deliğin geometrisini inceleyerek yolunda ilerleyen bir fotonun bu bozulmuş uzay zamanda nasıl hareket ettiğini ve son olarak bu bükülme nedeniyle oluşan etkileri tartışacağız.

2 SCHWARZSCHILD KARA DELİĞİ ÇEKİMSEL MERCEKLEMESİ

2.1 Schwarzschild Metriği

Küresel simetrik bir kara deliğin etrafındaki uzay zamanı tanımlayan metrik ds^2 ile aşağıdaki gibidir (Schwarzschild, 1916);

$$ds^2 = U(r)dt^2 - V(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.1)$$

Schwarzschild metriği küresel simetrik bir metrik olması nedeni ile θ ve ϕ 'den bağımsız ve statik olduğu için zamandan bağımsızdır. Bu nedenle verilen metrikte gerekli işlemler yapılırken yalnız r 'ye göre türev alınmaktadır.

Schwarzschild metriğindeki metrik tensörlerin kovaryant ve kontravaryant bileşenleri aşağıdaki gibidir;

$$g_{tt} = U(r)$$

$$g_{rr} = -V(r)$$

$$g_{\theta\theta} = -r^2$$

$$g_{\phi\phi} = -r^2 \sin^2 \theta$$

$$g^{tt} = U(r)^{-1}$$

$$g^{rr} = -V(r)^{-1}$$

$$g^{\theta\theta} = -\frac{1}{r^2}$$

$$g^{\phi\phi} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$$

Christoffel sembolleri şu formül ile bulunur;

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{mi} (g_{mk,l} + g_{ml,k} - g_{kl,m}) \quad (2.2)$$

Buradan Schwarzschild metriğinin Christoffel sembolleri bulunmaktadır;

$$\Gamma_{rt}^t = \frac{U'(r)}{2U(r)}$$

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{U'(r)}{2V(r)}$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{V'(r)}{2V(r)}$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{V(r)}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{r \sin^2 \theta}{V(r)}$$

$$\Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\cos \theta \sin \theta$$

$$\Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta$$

Yalnız r 'ye göre türev alınması nedeniyle bazı Christoffel sembolleri yok olur. Yok olmayan Christoffel sembollerini kullanarak jeodezik denklemleri şu şekilde bulunmaktadır;

$$\frac{d^2 x^\mu}{dp^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{dp} \frac{dx^\lambda}{dp} = 0 \quad (2.3)$$

Schwarzschild metriğindeki null jeodezik denklemleri;

$$0 = \frac{d^2 r}{dp^2} + \frac{V'(r)}{2V(r)} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - \frac{r}{V(r)} \left(\frac{d\theta}{dp} \right)^2 - r \frac{\sin^2 \theta}{V(r)} \left(\frac{d\phi}{dp} \right)^2 + \frac{U'(r)}{2V(r)} \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 \quad (2.4)$$

$$0 = \frac{d^2 \theta}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{dp} \frac{dr}{dp} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{dp} \right)^2 \quad (2.5)$$

$$0 = \frac{d^2 \phi}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dp} \frac{dr}{dp} + 2 \cot \theta \frac{d\phi}{dp} \frac{d\theta}{dp} \quad (2.6)$$

$$0 = \frac{d^2 t}{dp^2} + \frac{B'(r)}{B(r)} \frac{dt}{dp} \frac{dr}{dp} \quad (2.7)$$

olarak bulunmaktadır.

2.2 Genel Hareket Denklemi

Alan izotropik olduğu için, parçacıkların yörüngesini ekvatorial düzleme uygun olarak düşünebiliriz;

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad (2.8)$$

Son iki jeodezik denkleminin $d\phi/dp$ ve dt/dp 'yi sırasıyla bölümü sonucunda;

$$\frac{d}{dp} \left\{ \ln \frac{d\phi}{dp} + \ln r^2 \right\} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{dp} \left\{ \ln \frac{dt}{dp} + \ln U \right\} = 0 \quad (2.10)$$

olmaktadır. Bu, iki hareket sabitini verir. Bunlardan biri p'nin tanımından elde edilir ve normalize p seçileceğinden (2.10)'un çözümü;

$$\frac{dt}{dp} = \frac{1}{U(r)} \quad (2.11)$$

Burada p koordinat zamanı t ile neredeyse eşit olacaktır. (2.9) denkleminde diğer sabit elde edilecek ve kütle başına açısal momentum rolünü oynayacaktır;

$$r^2 \frac{d\phi}{dp} = J(\text{sabit}) \quad (2.12)$$

(2.8), (2.11), (2.12) ve (2.4) denklemlerini ekleyerek hareket denklemi şu şekilde verilir;

$$0 = \frac{d^2 r}{dp^2} + \frac{V'(r)}{2V(r)} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - \frac{J^2}{r^3 V(r)} + \frac{U'(r)}{2V(r) U^2(r)} \quad (2.13)$$

Bu denklemi $2V(r)dr / dp$ ile çarpınca şu şekilde yazılır;

$$\frac{d}{dp} \left\{ V(r) \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{U(r)} \right\} = 0 \quad (2.14)$$

Ve böylece son hareket sabiti;

$$V(r)\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{U(r)} = -E(\text{sabit}) \quad (2.15)$$

olmaktadır. Öz zaman τ (2.1), (2.8), (2.11), (2.12) ve (2.15) denklemleri ile tanımlanabilir;

$$d\tau^2 = Edp^2 \quad (2.16)$$

Jeodezik denklemlerine göre $d\tau/dp$ sabit olur. Buna göre E şu değerleri alabilir;

Parçacık için;

$$E > 0 \quad (2.17)$$

Foton için;

$$E = 0 \quad (2.18)$$

Ayrıca $V(r)$ pratikte her zaman pozitifdir, bu nedenle (2.15) denklemi parçacıkların şu koşulda r 'ye ulaşabildiğini anlatır;

$$\frac{J^2}{r^2} + E \leq \frac{1}{U(r)} \quad (2.19)$$

(2.11), (2.12), (2.15) ve (2.16) denklemlerini kullanarak p parametresi elenebilir;

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = JU(r) \quad (2.20)$$

$$\frac{V(r)}{U^2(r)} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{U(r)} = -E \quad (2.21)$$

$$d\tau^2 = EU^2(r)dt^2 \quad (2.22)$$

Zayıf bir alanda yavaşça hareket eden bir parçacık için J^2/r^2 , $(dr/dt)^2$, $V-1$ ve $U-1 \simeq 2\phi$ terimlerinin tamamı küçük olacak ve hareket denklemi üzerinde bu değerlerin birinci derecesi;

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d\phi}{dt} &\simeq J \\ \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{2r^2} + \phi &\simeq \frac{1-E}{2} \end{aligned} \quad (2.23)$$

olacaktır. Bunlar Newton teorisinde geçerli olan denklemler ile aynıdır ve $(1-E)/2$ birim kütle başına enerji rolü oynamaktadır. Tam hareket denkleminin işleyişinin basit bir durumda nasıl olacağını görmek için R yarıçapında dairesel yörüngede bir parçacık düşünelim. dr/dt yok olduğundan (2.21) denklemi şuna dönüşecektir;

$$\frac{J^2}{R^2} - \frac{1}{U(R)} + E = 0 \quad (2.24)$$

Bu ifadenin R'ye göre türevi;

$$-\frac{2J^2}{R^3} + \frac{U'(R)}{U^2(R)} = 0 \quad (2.25)$$

(2.24) ve (2.25) denkleminden;

$$E = \frac{1}{U(R)} \left(1 - \frac{RU'(R)}{2U(R)} \right) \quad (2.26)$$

$$J^2 = \frac{U'(R)R^3}{2U^2(R)} \quad (2.27)$$

(2.27) ve (2.20) değişim oranı aşığıdaki gibidir;

$$\frac{d\phi}{dt} = \left(\frac{U'(R)}{2R} \right)^{1/2} \quad (2.28)$$

(2.26) ve (2.22) öz zamanı verir;

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{U(R) - \frac{1}{2}RU'(R)} \quad (2.29)$$

Yörünge şekilleri doğrudan (2.12) ve (2.15) denklemlerinde p'yi çıkararak saptanabilir;

$$\frac{V(r)}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{J^2 U(r)} = -\frac{E}{J^2} \quad (2.30)$$

Buradan çözüm şu şekilde olmaktadır,

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\phi} &= \left(\left(-\frac{E}{J^2} + \frac{1}{J^2 U(r)} - \frac{1}{r^2} \right) / \left(\frac{V(r)}{r^4} \right) \right)^{1/2} \\ \phi &= \pm \int \frac{V^{1/2}(r)dr}{r^2 \left(\frac{1}{J^2 U(r)} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2} \right)^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Çok büyük bir uzaklıktan Güneş'e doğru yaklaşan foton veya parçacık düşünelim. Metrik sonsuzda Minkowskian olurken, yani $V(\infty) = U(\infty) = 1$, sabit hız V 'de düz bir çizgi üzerinde hareket beklenir, yani;

$$\begin{aligned} b &\approx r \sin(\phi - \phi_\infty) \approx r(\phi - \phi_\infty) \\ -v &\approx \frac{d}{dt}(r \cos(\phi - \phi_\infty)) \approx \frac{dr}{dt} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Burada b etki parametresi ϕ_∞ olay yönüdür. (2.20) ve (2.21) denklemleri eklenerek sonsuzda hareket denklemlerini sağladığı görülmektedir. $U=V=1$ ve hareket sabitleri aşağıdaki gibidir;

$$E = 1 - v^2 \quad (2.33)$$

$$J = bv^2 \quad (2.34)$$

(Foton için $v=1$ olduğunda $E=0$ olacağı görülebilir.) b etki parametresi yerine en yakın yaklaşım r_0 ile ifade edilebilen J uygundur. r_0 'da $dr/d\phi$ yok olur böylece denklem (2.30) ve (2.33)'den;

$$J = r_0 \left(\frac{1}{U(r_0)} - 1 + v^2 \right)^{1/2} \quad (2.35)$$

Böylece yörünge (2.31) denklemi ile ifade edilebilir;

$$\phi(r) = \phi_\infty + \int_r^\infty \frac{V^{1/2}(r)dr}{r^2 \left[\frac{1}{r_0^2} \left(\frac{1}{U(r)} - 1 + v^2 \right) \left(\frac{1}{U(r_0)} - 1 + v^2 \right)^{-1} - \frac{1}{r^2} \right]^{1/2}} \quad (2.36)$$

ϕ 'deki toplam değişim ∞ 'dan minimum değer r_0 'a düşer, daha sonra tekrar ∞ 'a yükselir, yani $2|\phi(r_0) - \phi_\infty|$. Eğer yörünge tamamen düz bir çizgi olsaydı bu yalnız π 'ye eşit olacaktı. Bu nedenle yörünge düz bir çizgiden kayması;

$$\Delta\phi = 2|\phi(r_0) - \phi_\infty| - \pi \quad (2.37)$$

Eğer ki sonuç pozitifse ϕ değişim açısı 180° 'den büyüktür, yani yörünge cisme doğru bükülür, $\Delta\phi$ negatifse yörünge cisimden uzağa doğru bükülür.

Foton için $v^2 = 1$ olur ve denklem (2.36) aşağıdaki forma dönüşür;

$$\varphi(r) - \varphi_\infty = \int_r^\infty V^{1/2}(r) \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left(\frac{U(r_0)}{U(r)} \right) - 1 \right]^{-1/2} \frac{dr}{r} \quad (2.38)$$

Schwarzschild çözümündeki gerçek $U(r)$ ve $V(r)$ değerleri kullanıldığında $\varphi(r)$ ve $\Delta\varphi$, yalnız küçük MG/r_0 ve MG/r parametrelerindeki genişleme ile nümerik olarak değerlendirilebilen, eliptik integraller olarak elde edilir. $U(r)$ ve $V(r)$ için seri açılımı ile aşağıdaki ifadeler elde edilmektedir;

$$V(r) = 1 + 2\gamma \frac{MG}{r} + \dots \quad (2.39)$$

$$U(r) = 1 - 2 \frac{MG}{r} + \dots \quad (2.40)$$

Denklem (2.38)'deki ikinci kareköklü ifade şu forma dönüşür;

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left(\frac{U(r_0)}{U(r)} \right) - 1 &= \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left[1 + 2MG \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) + \dots \right] - 1 \\ &= \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right] \left[1 - \frac{2MG r}{r_0(r + r_0)} + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.41)$$

(2.38)'den;

$$\varphi(r) - \varphi_\infty = \int_r^\infty \frac{dr}{r \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}} \left[1 + \frac{\gamma MG}{r} + \frac{MG r}{r_0(r + r_0)} + \dots \right] \quad (2.42)$$

ve integral şunu verir;

$$\phi(r) - \phi_\infty = \sin^{-1}\left(\frac{r}{r_0}\right) + \frac{MG}{r_0} \left(1 + \gamma - \gamma \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2} - \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} \right) + \dots \quad (2.43)$$

MG / r_0 'deki birinci dereceden terim, denklem (2.37)'deki sapma;

$$\Delta\phi = \frac{4MG}{r_0} \left(\frac{1 + \gamma}{2} \right) \quad (2.44)$$

olmaktadır. Burada r_0 yerine etki parametresi gelir ve $\gamma = 1, G = 1$ kabul edildiğinden sapma;

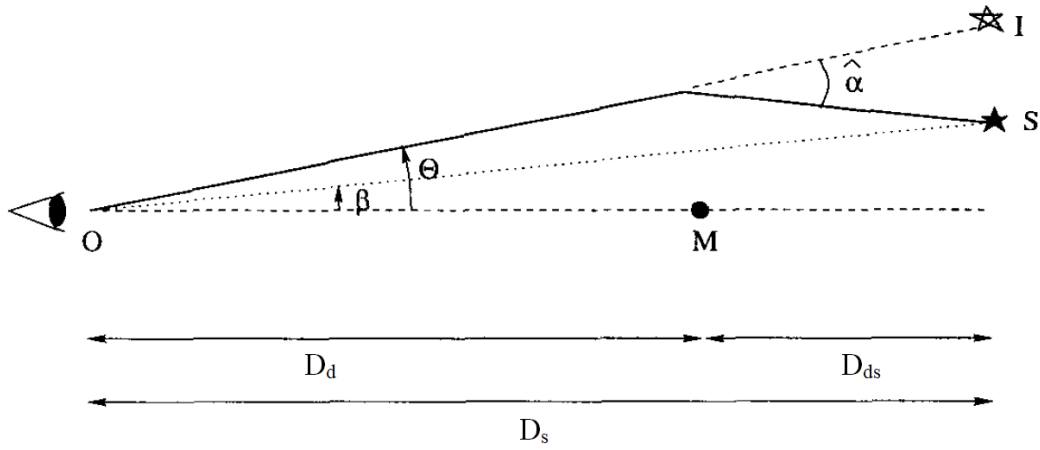
$$\Delta\phi = \frac{4M}{r_0} = \frac{4M}{b} \quad (2.45)$$

olur (Weinberg, 1972).

2.3 Kara Delik Lens Denklemleri

Lens denklemi geometri (verilen koordinat sistemindeki lens, gözlemci ve kaynak konumu) ve gökyüzündeki görüntülerin konumu arasındaki ilişkidir. Bu denklemi çözerek, sistemin geometrik parametrelerinin fonksiyonu olarak görüntülerin konumlarını elde edebiliriz.

Gözlemcinin konumu ve gözlemciye ulaşan fotonun son yönü jeodezik denklemlerinin başlangıç koşulları olarak düşünülebilir. Bunları izleyerek afin parametresinden tam olarak bir lens denklemini yazabiliriz (Frittelli et al, (1999)). Bu yaklaşım Schwarzschild merceğine Frittelli, Kling ve Newman, (2000) tarafından uygulanmış ve daha sonra Perlick, (2004) tüm küresel simetrik uzay-zamana genelleştir (Bozza, 2010).



Şekil 2.1 Basit bir lens geometrisine bağlı olarak belirli açılar ve uzaklıkların tanımıdır. O, S, I sırasıyla gözlemci, kaynak ve görüntüyü ifade eder (Mollerach, S., 2002).

Şekil 2.1.'den de görüldüğü üzere merceklemeye geometrisini belirleyen açılar bulabiliriz. Burada θ görüntü, gözlemci ve mercek arasındaki açı, β mercek, gözlemci ve kaynak arasındaki açı (kaynak açısı olarak da bilinmektedir), $\hat{\alpha}$ sapma açısı, D_d gözlemci ve mercek arasındaki uzaklık, D_{ds} mercek ve kaynak arası uzaklık, D_s ise gözlemci ve kaynak arası uzaklık olmak üzere;

$$\theta D_s = \beta D_s + \hat{\alpha} D_{ds} \quad (2.46)$$

$$\alpha \equiv \hat{\alpha} \frac{D_{ds}}{D_s} \quad (2.47)$$

Ve denklem tekrardan yazılacak olursa;

$$\beta = \theta - \alpha \quad (2.48)$$

mercek denklemini elde etmiş oluyoruz (Mollerach, 2002).

Burada dikkat edilmesi gereken diğer bir nicelik etki parametresi b 'dir. Etki parametresi, kara delik ile foton yörüngelerinin her birinin arasındaki uzaklık olarak tanımlanmaktadır. Schwarzschild kara deliği durumunda en yakın yaklaşım

noktası $3\sqrt{3}M$ 'dir. Eğer fotonun etki parametresi $3\sqrt{3}M$ 'den küçükse Schwarzschild yarıçapına ulaşır ve kara delik tarafından soğurulur. Bu değerden daha büyük bir etki parametresine sahip fotonlar $\hat{\alpha}$ açısı kadar sapma uğrayarak tekrardan sonsuz uzaklığa doğru yol alır (Bisnovatyi-Kogan, 2008)

2.4 Görüntülerin Konumu

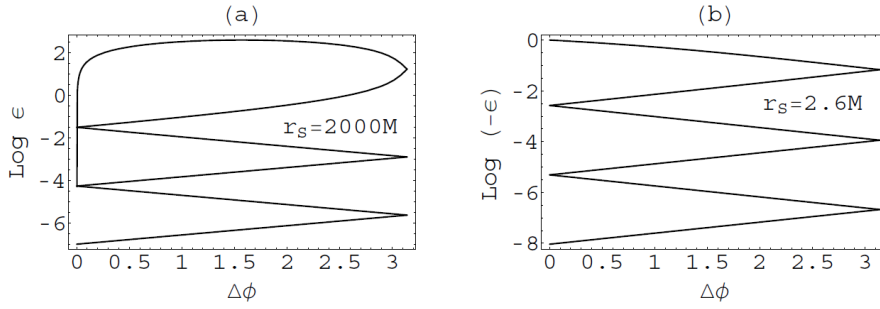
Lens denklemi ile, $\Delta\phi = 0$ 'dan $\Delta\phi = \pi$ 'ye değişen genel bir kaynak konumu için görüntüler bulunabilir. $\Delta\phi = 0$ kara deliğin önüne konumlanmış kaynağa, $\Delta\phi = \pi$ kara deliğin arkasına konumlanmış kaynağa, $\Delta\phi < \pi$ mükemmel sıralanmadan çıktığı duruma ve $\Delta\phi = \pi/2$ dördüncü evreye karşılık gelmektedir. Lens denklemi aynı zamanda aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\Phi(u, r_o, r_s) = \Delta\phi \equiv \phi_o - \phi_s + 2n\pi \quad (2.49)$$

Kaynağın yalnız aynı tarafındaki görüntüler (direkt –doğrudan görüntüler, aynı zamanda birincil görüntüler olarak da adlandırılır), (2.49) denkleminde elde edilir. Bununla birlikte, küresel simetri sayesinde, kaynağın karşı tarafındaki görüntülerin konumu (dolaylı görüntüler, aynı zamanda ikincil görüntüler de denmektedir) $\Delta\phi \rightarrow 2\pi - \Delta\phi$ ile (2.49) denkleminin çözümü ile saptanabilir. (2.55) denkleminin sağ tarafındaki $2n\pi$ 'den herhangi bir m tamsayısı için (m görüntü sırasıdır) $(m-1)\pi < \Phi < m\pi$ aralığının her birinde bir görüntü bulunmaktadır. Bu aralıkta birinci görüntü, dolayısıyla $m=1$ için; $0 < \Phi < \pi$, $m=2$ için ikinci görüntü $\pi < \Phi < 2\pi$ ve daha yüksek dereceli görüntüler olacaktır. Numarası tek sayı olan görüntüler doğrudan, çift olanlar ise dolaylı görüntüler olarak adlandırılır.

Şekil 2.2'de görüntülerin konumu $\Delta\phi$ 'nin fonksiyonu olarak çizilmiştir. Sağ panel ufuk $r_s = 2M$ ve foton küresi $r = r_{ps} = 3M$ arasında kara deliğe çok yakın bir kaynağı gösterirken, sol panel uzak kaynak durumunu ($r_s = 2000M$) gösterir (burada r_s kaynak konumunu belirtir ve Schwarzschild yarıçapı ile

karıştırılmamalıdır). $\theta \equiv \bar{b} / r_o$ gölge sınırı olduğu yerde, görüntülerin konumu $\epsilon \equiv (\theta / \bar{\theta} - 1)$ açısından ifade edilir. Üstten alta, n fotonun kara delik etrafında attığı tur sayısı olmak üzere, eğriler birinci görüntü ($n=0$), ikinci görüntü ($\Delta\phi \rightarrow 2\pi - \Delta\phi, n=0$), üçüncü görüntü ($n=1$), dördüncü görüntü ($\Delta\phi \rightarrow 2\pi - \Delta\phi, n=1$) beş ve altıncı görüntüleri ($n=2$) gösterir.



Şekil 2.2 $r_s = 2000M$ ve $r_s = 2.6M$ için görüntülerin konumu (Bozza, V., 2009).

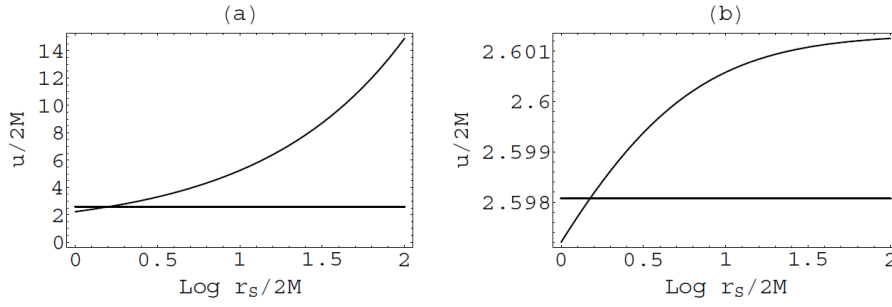
Kara deliğin arkasındaki kaynak ile bilinen çekimsel merceklenme geometrisi $\Delta\phi = \pi$ 'de ortaya çıkmaktadır. Bu geometri Şekil 2.3'te görülmektedir. Mükemmel sıralanma durumunda, birincil ve ikincil görüntülerin klasik Einstein halkasında birleşmeleri beklenmektedir. Kaynak mükemmel sıralanmadan çıkar çıkmaz ($\Delta\phi < \pi$), ikincil görüntü kara deliğe yaklaşırken birincil görüntü kara delikten uzaklaşır. Dördüncü evredeki bir kaynak için ($\Delta\phi \approx \pi/2$) ışığın sapıncı doğrudan görüntü için hemen hemen ihmal edilebilir. $\Delta\phi = 0$ olduğu zaman θ maksimum değer r_s / r_o 'ya ulaşır ve sonra sıfıra düşer. Bununla birlikte, ikincil görüntü kara deliğe daha çok yaklaşır fakat her zaman $\bar{\theta}$ yarıçap çemberinin dışında kalır.

$\Delta\phi$ açısındaki azalmalarda, doğrudan görüntüler uzaklaşır ve dolaylı görüntüler gölge sınırına yaklaşır. Son olarak kaynak kara deliğin önünde olduğu zaman ($\Delta\phi = 0$), her dolaylı görüntü bir Einstein halkası formuna dönüşür, doğrudan görüntü ile birleşir. Bu nedenle kara delik iki durumda da eş merkezli

A diagram illustrating a gravitational lens system. A source S (represented by a star) is located on the right. Light rays from S pass through a lens plane containing the lens M (represented by a dot) and converge at the observer O (represented by a dot) on the left. The angle θ_E is shown between the optical axis and a ray. Dashed lines indicate the source's apparent position without the lens.

Şekil 2.2.b'ye bakacak olursak bu şekil ufkun dışında ve foton küresinin içinde bulunan bir kaynak ile aynı diyagramı gösterir. Bu durumda $\epsilon \equiv \theta / \bar{\theta} - 1$, görüntülerin gölgenin içinde oluştuğunu belirtmek için negatiftir. Düşük mertebeli görüntüler kara deliğe yaklaşırken, yüksek mertebeden görüntüler gölge sınırına gittikçe daha da yakınlaşmaktadır. Bu büyük fark dışında, $\Delta\phi = 0$, π 'de Einstein halkalarının oluşumu ile Şekil 2.2.b, 2.2.a'ya çok benzerdir.

Şekil 2.4’de kaynak uzaklığındaki görüntülerin bağıllığı gösterilmiştir. Şekil Einstein halkası yarıçapının kaynak konumu ile ilişkisini göstermektedir. Şekil 2.4.a, 1. Einstein halkasını gösterirken 2.4.b ikinci Einstein halkasını göstermektedir. Her iki durumda da $r_s < 3M$ olduğunda halkalar gölge yarıçapına girer. r_s çok geniş olduğunda ve bununla birlikte daha yüksek dereceli Einstein halkaları gölge sınırına yakın durumdayken 1. Einstein halkası zayıf sapma limiti formülü $\theta_E = \sqrt{4Mr_s / r_o (r_o + r_s)}$ ‘ye göre büyür (Bozza, 2010).



Şekil 2.4 Einstein halkasına karşı kaynak uzaklığının konumu. (a) birinci halka (b) ikinci halka.

Düz yatay çizgi; $\bar{u} = 3\sqrt{3}M$ gölge sınırını gösterir (Bozza, V., 2010).

2.5 Görüntülerin Büyütülmesi

Görüntülerin büyütülmesi merceklenmiş cismin akısının görüntünün akısına oranıdır. Liouville'in teoremine göre yüzey parlaklığı çekimsel ışık sapmasında korunur. Böylece, bir görüntünün büyütülmesi, görüntünün ve merceklenmemiş kaynağın katı açıların oranı olarak ortaya çıkmaktadır.

Gözlemci tarafından ölçülen görüntüden uzaklığın “ ℓ ” olduğu düşünülürse görüntü tarafından karşılık gelen küçük açı aşağıdaki gibi olur;

$$d\Omega_I = \frac{|(\ell d\theta)(\ell \sin \theta d\varphi)|}{\ell^2} = |\sin \theta d\theta d\varphi| = |d(\cos \theta) d\varphi| \quad (2.50)$$

Aynı şekilde kaynak tarafından karşılık gelen küçük açı;

$$d\Omega_s = |\sin \beta d\beta d\chi| = |d(\cos \beta) d\chi| \quad (2.51)$$

olmaktadır. Tam büyütme;

$$|\mu| = \frac{d\Omega_I}{d\Omega_s} = |\det J|^{-1} \quad (2.52)$$

J Jacobian matrisi eşittir;

$$J = \frac{\partial(\cos \beta, \chi)}{\partial(\cos \vartheta, \varphi)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \cos \beta}{\partial \cos \vartheta} & \frac{\partial \cos \beta}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \chi}{\partial \cos \vartheta} & \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Büyütmeyi elde etmek amacı ile determinantın tamamı yazılır;

$$\mu = \left[\frac{\sin \beta}{\sin \theta} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) \right]^{-1} \quad (2.54)$$

Bu genel büyütleme denklemidir. Küresel simetri durumunda görüntü ve kaynak aynı düzlemde bulunurlar, bu nedenle $\partial \beta / \partial \varphi = 0$ ve $\partial \chi / \partial \varphi = 1$ olur (Azami et al., 2011);

$$\mu = \left(\frac{\sin \beta}{\sin \theta} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \right)^{-1} \quad (2.55)$$

2.6 Schwarzschild kara deliği merceklemesinin relativistik görüntüleri

Zayıf bir gravitasyonel alanda Schwarzschild çekimsel merceklemesinin kaynak, mercek ve gözlemci hizalandığında bir Einstein halkasına ve mercek bileşenleri tam hizalanmadığında zıt eşitliklerin bir çift görüntüye (birincil ve ikincil) yol açtığı bilinmektedir. Mercek büyük bir kompakt cisim olduğunda, araştırma için güçlü bir gravitasyonel alan mevcuttur. Bir ışık, foton küresine yaklaşabilir ve gözlemciye ulaşmadan önce bir kez, iki kez, üç kez veya birçok kez (etki parametresine bağlı olarak $b > 3\sqrt{3}M$ için) merceğin etrafında dolaşabilir. Böylece, büyük bir kompakt mercek, birincil ve ikincil görüntülere ek olarak, optik eksenin her iki tarafındaki görüntülerin büyük bir sayısına (aslında teorik olarak sonsuz bir diziye) yükselir. Bu görüntülere (ışığın $3\pi/2$ 'den daha fazla bükülmesinden dolayı oluşmuş) relativistik görüntüler denir, çünkü ışık gözlemciye ulaşmadan önce güçlü bir gravitasyonel alandan geçer. 2π 'den daha büyük bir bükülme ile oluşan halka relativistik Einstein halkasıdır. 1'i optik eksenin her iki tarafındaki en dış relativistik görüntü, 2'yi yakın iç kısımdakiler

olarak vb tanımlanmaktadır. Böylece, bu tanıma göre, en dıştaki relativistik Einstein halkası da 1 numaralı Einstein halkasıdır (Virbhadra, 2000).

Yeterince kompakt bir mercek bir foton küresi ile çevrenmemiş dahi olsa relativistik görüntü oluşumuna neden olabilir. Bu nedenle, bu görüntüleri üretmek için merceğin kara delik olmasına ihtiyaç yoktur. Işığın gözlemciye ulaşmadan önce gerçekleştirdiği tur sayısı $\hat{\alpha} - 2\pi$ olduğunda “etkin sapma açısı” tanımlanır. Relativistik görüntülerin etkin sapma açısı;

$$\hat{\alpha}^e(r_0) = \hat{\alpha}(r_0) - 2n\pi \quad (2.56)$$

Burada “n”, ışık gözlemciye ulaşmadan önce merceğin etrafında attığı turu gösteren pozitif bir tamsayı iken, $\hat{\alpha}$ üzerindeki “e” etkin kelimesini temsil eder. (Aslında, yukarıdaki denklem birincil ve ikincil görüntülere de uygulanabilir, çünkü $n = 0$ bu görüntülere karşılık gelir.)

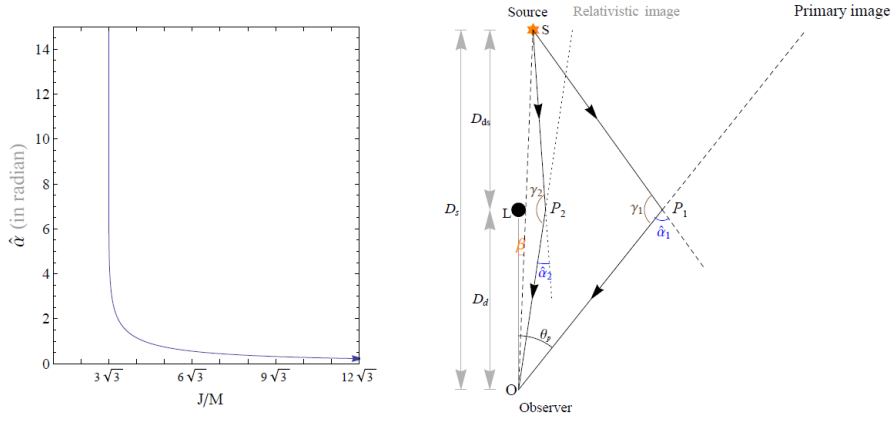
Yeni semboller: “p” birincil “s” ikincil görüntüyü temsil etmek için kullanılan alt indisler, “np” ve “ns” birincil ve ikincil görüntüler ile aynı tarafta bulunan n sıralı görüntüler ($n=1,2,3,\dots$) olarak kullanılacaktır. Örneğin, $\hat{\alpha}_{1p}^e$ ve $\hat{\alpha}_{1s}^e$ sırasıyla birincil ve ikincil görüntüler ile aynı tarafta bulunan 1. relativistik görüntünün etkin sapma açılarıdır. Aynı şey açısal görüntü konumları, büyütme ve zaman gecikmeleri için de geçerlidir.

Optik eksenenden gelen, kaynak ile aynı taraftaki, kaynaktan yayılan iki ışığın, mercek etrafında dönmeden gözlemciye ulaştığı durumu düşünelim. SP_1 ve SP_2 , kaynak konumunda 2 null jeodeziğe teğettir ve benzer şekilde P_1O ve P_2O , gözlemci konumunda bulunan bu jeodezikler üzerine teğetlerdir. Şekil 2.5.’deki şematik diyagram (sağ panel) $\gamma_1 > \gamma_2$ olduğunu gösterir. Bu da sol panele göre izin verilmeyen $\hat{\alpha}_2 < \hat{\alpha}_1$ durumunu belirtir. Başka bir deyişle, etki parametresindeki bir düşüş $\hat{\alpha}$ değerini arttırmalıdır. Böylece, SP_1O ışık yoluna izin verilirse, SP_2O ’ya izin verilmez ve bu nedenle, yalnızca ışık mercek etrafında dönmeden kaynak ile aynı taraftaki birincil görüntünün olabileceği sonucuna varırız. Benzer bir say,

aynı zamanda, merceğin etrafında bir ışık olmadan, kaynağın karşı tarafında sadece bir görüntü (yani, ikincil) olabileceğini göstermektedir.

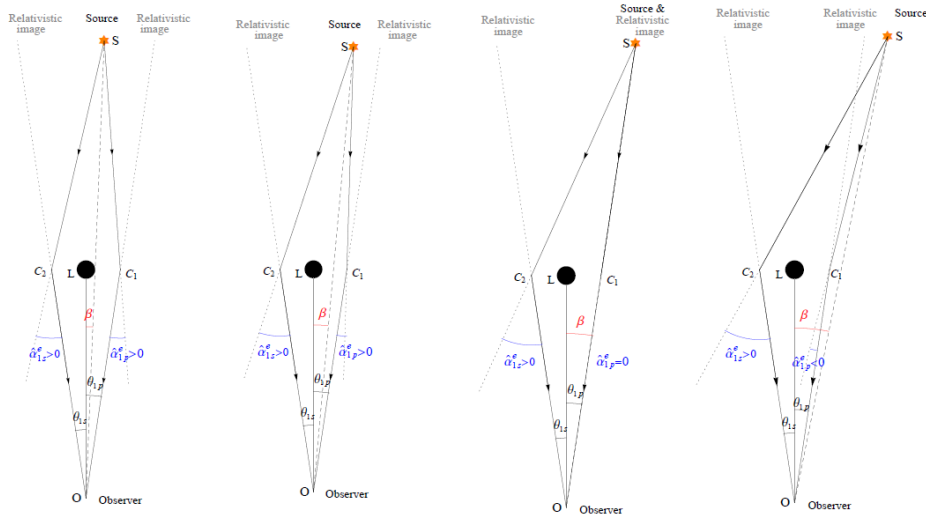
Şekil 2.5'te, döngü olmadan S kaynağından iki foton salınıp O gözlemcisine ulaştığı durum göz önünde bulundurulmaktadır. SP_1 ve SP_2 kaynak konumundaki 2 null jeodeziğe teğetlerdir. Buna benzer olarak P_1O ve P_2O gözlemci konumundaki null jeodeziklere teğetlerdir. $\hat{\alpha}_1$ ve $\hat{\alpha}_2$ iki fotonun sapma açıları, γ_1 ve γ_2 bu açıların bütünler açılarıdır. Bu şematik diyagramda $\gamma_2 > \gamma_1$ 'dir. Bu da $\alpha_2 < \hat{\alpha}_1$ anlamına gelir ve etki parametresindeki azalma ile $\hat{\alpha}$ azalmalıdır. Dolayısıyla ışık için SP_1O oluşursa SP_2O oluşamaz, bu nedenle merceğin etrafında döngü oluşmadan yalnız kaynak ile aynı tarafta yalnız bir tane birincil görüntü oluşmalıdır. Aynı şekilde kaynağın karşı tarafında yalnız bir tane ikincil görüntü oluşmalıdır.

SP_2 ve P_2O , sırasıyla gözlemciye ulaşmadan önce mercek etrafında dönen bir null jeodezik üzerinde kaynak ve gözlemci konumundaki teğetleri temsil eder. Bu nedenle $\hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_{1p}^e < \hat{\alpha}_1$ 'dir. Belirli bir β değeri için diyagram, birincil görüntü ile aynı tarafta bulunan relativistik görüntünün etkin sapma açısının, görüntü mertebesindeki artış ile azaldığını göstermektedir. Benzer şekilde, belirli bir açısal kaynak konumunda, ikincil görüntü ile aynı tarafta bulunan relativistik görüntülerin etkin sapma açıları, görüntü mertebesindeki artış ile azalır.



Şekil 2.5 Sol görüntü: Sapma açısına karşı etki parametresi J/M çizilmiştir. Ok J/M 'nin değeri artarken sapma açısı değerinin azalmasının göstergesidir. Sağ görüntü: S, L ve O sırasıyla kaynağın, merceğin ve gözlemcinin konumlarını temsil eder. Bu şematik diyagramdaki açılar abartılıdır (Virbhadra, 2009).

Şekil 2.6'da birincil görüntü ile aynı tarafta bulunan relativistik görüntülerin etkin sapma açıları, kaynak konumunun değerine bağlı olarak pozitif, negatif veya sıfır olabileceği görülmektedir. Bununla birlikte, ikincil görüntü ile aynı tarafta bulunan relativistik görüntülerin etkin sapma açıları daima pozitifdir (Virbhadra, 2009).



Şekil 2.6 Açısal kaynak konumu β değerindeki artışa bağlı olarak relativistik görüntülerin etkin sapma açılarındaki değişimi gösteren şematik diyagram (Virbhadra, 2009).

2.7 Çekimsel merceklemeye ile çıplak tekillikler

Virbhadra and Keeton (2008) çalışmasında gökada merkezindeki çok büyük kütleli kara delikleri Schwarzschild kara deliği olarak, aynı zamanda Janis-Newman-Winicour (JNW) çıplak tekilliklerini kütle ve skaler yük parametrelerine göre modelleyerek bunlar tarafından oluşan çekimsel merceklemeyi çalışmışlardır. Çalışmalarında Schwarzschild kara deliği, zayıf çıplak (*weakly naked singularities-WNS*) ve az miktarda güçlü çıplak tekillikler (*marginally strongly naked singularities-MSNS*) için çekimsel merceklemeye özelliklerinin benzer olduğu sonucuna varmışlardır. Bu çalışmaya göre güçlü çıplak tekillikler (*strongly naked singularities-SNS*) ile Schwarzschild kara deliklerinin çekimsel merceklemeye özellikleri çok farklıdır.

Zayıf çıplak tekillikler ile Schwarzschild kara delikleri tarafından oluşan görüntüler her zaman pozitif zaman gecikmesine sahiptir. Güçlü çıplak tekilliklerin zaman gecikmesi pozitif, negatif veya sıfır olabilir. Özellikle geniş açışal kaynak konumu için doğrudan görüntüler negatif zaman gecikmesine sahiptir. Ayrıca skaler alanların zaman gecikmesini azalttığı ve görüntülerin büyütmesindeki parlaklığı artırdığı sonucuna varılmıştır.

JNW metriği;

$$ds^2 = \left(1 - \frac{b}{r}\right)^v dt^2 - \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-v} dr^2 - \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1-v} r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.57)$$

ve kütesiz skaler alan;

$$\Phi = \frac{q}{b\sqrt{4\pi}} \ln \left(1 - \frac{b}{r}\right) \quad (2.58)$$

$$v = \frac{2M}{b} \quad (2.59)$$

$$b = 2\sqrt{M^2 + q^2} \quad (2.60)$$

$q = 0$ olduğunda Schwarzschild durumuna dönmektedir. JNW uzay zamanı yalnız bir foton küresine sahiptir ve bunun radyal uzaklığı aşağıdaki gibidir;

$$r_{ps} = \frac{b(1+2v)}{2} \quad (2.61)$$

Ayrıca $r=b$ eğrilik tekilliğidir ve $v:1/2 < v \leq 1$ için yalnız bir foton küresine sahiptir.

$$\rho = \frac{r}{b}, \rho_0 = \frac{r_0}{b} \quad (2.62)$$

iken JNW için etki parametresi ve foton küresi;

$$J(\rho_0) = 2M \frac{\rho_0}{v} \left(1 - \frac{1}{\rho_0}\right)^{\frac{1-2v}{2}} \quad (2.63)$$

$$\rho_{ps} = \frac{(1+2v)}{2} \quad (2.64)$$

olmaktadır. Etki parametresi $J = D_d \sin \theta$ ve $J(\rho_0)$ tanımından;

$$\sin \theta = \frac{2M}{D_d} \left(1 - \frac{1}{\rho_0}\right)^{\frac{1-2v}{2}} \quad (2.65)$$

Çıplak tekilliklerde sapma;

$$\hat{\alpha}(\rho_0) = 2 \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho \sqrt{1 - \frac{1}{\rho}} \sqrt{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)^{1-2v} \left(1 - \frac{1}{\rho_0}\right)^{2v-1} - 1}} \quad (2.66)$$

θ 'ya göre sapma açısının birinci mertebeden türevi;

$$\frac{d\hat{\alpha}}{d\theta} = \hat{\alpha}'(\rho_0) \frac{d\rho_0}{d\theta} \quad (2.67)$$

$$\frac{d\rho_0}{d\theta} = \frac{\nu \rho_0 \left(1 - \frac{1}{\rho_0}\right)^{\frac{1+2\nu}{2}} \sqrt{1 - \frac{4}{\nu^2} \left(\frac{M}{D_d}\right)^2 \rho_0^2 \left(1 - \frac{1}{\rho_0}\right)^{1-2\nu}}}{\frac{M}{D_d} (2\rho_0 - 2\nu - 1)} \quad (2.68)$$

$$\hat{\alpha}'(\rho_0) = \frac{2\nu + 1 - 2\rho_0}{\rho_0^2 \left(1 - \frac{1}{\rho_0}\right)} \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{(4\nu\rho - 2\nu - 1)d\rho}{(2\nu + 1 - 2\rho)^2 \rho \sqrt{1 - \frac{1}{\rho}} \sqrt{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)^{1-2\nu} \left(1 - \frac{1}{\rho_0}\right)^{2\nu-1} - 1}} \quad (2.69)$$

Virbhadra and Ellis (2002) çalışmasında çıplak tekillikleri iki farklı sınıfa ayırmıştır. Bunlar zayıf çıplak tekillikler (WNS) ve güçlü çıplak tekilliklerdir (SNS). Zayıf çıplak tekilliklerde en az 1 foton küresi bulunurken, güçlü çıplak tekilliklerde foton küresinin bulunmadığı düşünülmektedir. Zayıf çıplak tekillikler için aralık $0 \leq \nu \leq 1/2$ iken güçlü çıplak tekilliklerde $1/2 \leq \nu \leq 1$ 'dir. Schwarzschild kara deliği durumunda $\nu = 1$ 'dir.

Bu çalışmada ν sınırlarına göre yeni bir sınıflama kullanılmaktadır. Bunlar MSNS ($\nu = 1/2$ foton küresi oluşmaz) ve SNS' dir ($0 \leq \nu < 1/2$). $M=0$ olduğu durumda JNW çözümü skaler alanları tanımlamaktadır.

JNW uzay zamanında zaman gecikmesi;

$$\tau(\rho_0) = \frac{2M}{\nu} \left[\int_{\rho_0}^{\chi_s} \frac{d\rho}{f(\rho)} + \int_{\rho_0}^{\chi_o} \frac{d\rho}{f(\rho)} \right] - D_s \sec \beta \quad (2.70)$$

$$\chi_s = \frac{v}{2} \frac{D_s}{M} \sqrt{\left(\frac{D_{ds}}{D_s}\right)^2 + \tan^2 \beta} \quad (2.71)$$

$$\chi_o = \frac{v}{2} \frac{D_d}{M}$$

$$f(\rho) = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)^{2v} - \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)^{4v-1} \left(1 - \frac{1}{\rho_0}\right)^{1-2v}} \quad (2.72)$$

$\tau(\rho_0)$ denklemini zaman gecikmesi = kaynaktan gelen fotonun en yakın yaklaşım noktasına seyahat süresi + fotonun en yakın yaklaşım noktasından gözlemciye seyahat süresi – fotonun kaynaktan gözlemciye herhangi gravitasyonel alan olmadığı durumda varış süresi olarak yazılabilir. Sonuç olarak verilen kaynak ve görüntünün konumu için zaman gecikmesi;

$$\tau(\theta, \beta) = \frac{1}{2} \frac{D_d D_s}{D_{ds}} \left[\left(2 - \frac{1}{v}\right) \theta_E^2 + \beta^2 - \theta^2 - \ln \left(\frac{\theta^2 D_d}{4 D_{ds}} \right) \right] \quad (2.73)$$

$$\theta_E = \sqrt{4M \frac{D_{ds}}{D_d D_s}} \quad (2.74)$$

Kara delikler ve WNS'ler bir foton küresine sahiptir ve bu relativistik görüntülere yol açar. MSNS'ler foton küresine sahip olmamalarına rağmen relativistik görüntüler verebildiği düşünülmektedir. Kara delikler, WNS ve MSNS'ler radyal kostik oluşturmazken, merceklemeye bileşenlerinin doğru sıralanmasıyla bir Einstein halkası oluşturdıkları düşünülmektedir.

Kuramsal çalışmalar sonucunda çıplak tekiliklerin merceklemesi, karadelik merceklemelerinden daha küçük zaman gecikmesi ve daha çok büyütülmüş görüntülere yol açacağı düşünülmektedir. Bu nedenle, eğer çıplak tekilikler gerçekten varsa, bunlar iyi bir kozmik teleskop olarak işlev görecektir ve evren araştırmalarında yardımcı olacaktır.

Janis-Newman-Winicour metriği ayrıca bir skaler yıldızın dış gravitasyonel alanını da tanımlar. Bu nedenle, çıplak tekillikler için elde edilen sonuçlar skaler yıldızlara da uygulanabilir. Bununla birlikte skaler yıldız, görüntülerin engellenmemesi için yeterince kompakt olmalıdır.

JNW metriğinin fiziksel olarak gerçekçi olup olmadığı bilinmemektedir. Bununla birlikte, bu metrik ile çekimsel mercekleme çalışmaları, kara deliklerin ve çıplak tekilliklerin ayırt edici merceklenme özelliklerini anlamak için bir basamak olarak görülebilir. Zayıf kozmik sansür hipotezinin (*weak cosmic censorship hypothesis-WCCH*) herhangi bir belirsizlik olmadan gözlemsel olarak test edilebilmesi için, Kerr kara deliklerinin ve çıplak tekilliklerin ayırt edici mercekleme özelliklerinin elde edilmesi astrofiziksel önem taşır (Virbhadra and Keeton, 2008).

2.8 Etkilerin Hesaplamaları

Bu bölümde Virbhadra and Ellis (2000) ile Virbhadra and Keeton (2008) çalışmalarından yararlandığımız bazı değerleri kullanarak mercekleme etkilerini bulmaya çalışacağız. İlk olarak gökada merkezinde bulunan çok büyük kütleli bir kara deliği (supermassive black hole-SMBH) göz önünde bulunduralım. Gerbhard et al (2011) makalesinde M87 gökada merkezindeki SMBH'in kütlesini $6.2 \times 10^{10} M_{\odot}$ ve uzaklığını ise 16.9Mpc olarak vermiştir. Bu bölümde öncelikle bu SMBH'in çekimsel mercekleme etkilerini hesaplayacak daha sonra bilinen 69 kara deliğe bunu uygulayarak bir tablo oluşturacağız. Hesaplamalarımızda mercek-gözlemci uzaklığı ile mercek-kaynak uzaklığını eşit olarak alacağız, yani $D_{ds} / D_s = 1/2$. Ayrıca açısal kaynak konumunu ise $\beta = 10^{-6}$ olarak kabul ederek hesaplamalarımıza başlıyoruz.

Burada hesaplamalarımızı yaparken şu birim dönüşümlerinden yararlanıyoruz;

$$1 \text{radyan} = 206265''$$

Güneş kütlesi $(1.989 \times 10^{30} \text{ kg})$ olmak üzere, güneş kütlesi uzaklık olarak tanımlanabilmektedir;

$$(1.989 \times 10^{30} \text{ kg}) \frac{(1m)}{(1.3466 \times 10^{27} \text{ kg})} = 1480m = 1.48km$$

Einstein açısı olarak bilinen Einstein halkasının açısal yarıçapı;

$$\theta_E = \sqrt{4 \times \frac{M(km)}{D_d(km)} \frac{D_{ds}}{D_s}} = 1.221''$$

Görüntülerin büyütülmesi;

$$\mu = \frac{\theta}{\beta} \frac{d\theta}{d\beta}$$

ve merceklemeye denklemi kullanılarak;

$$\mu_{\pm} = \left(1 - \left[\frac{\theta_E}{\theta_{\pm}} \right] \right)^{-1} = \frac{u^2 + 2}{2u\sqrt{u^2 + 4}} \pm \frac{1}{2}$$

Birincil ve ikincil görüntülerinin büyütmeleri $u = \beta / \theta_E$ için (örnek $\beta = 1$ için) bulunur;

$$\mu_1 = 610785$$

$$\mu_2 = 610786$$

Mercek denkleminde;

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}$$

Birinci ve ikinci görüntülerin konumları;

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right)$$

$$\theta_1 = 1''.222$$

$$\theta_2 = -1''.222$$

Etki parametresi;

$$b = \theta D_d = 3.09 \times 10^{15} \text{ km}$$

ve buradan sapma açısı bulunur;

$$\hat{\alpha} = \frac{4M}{b} = 2''.44$$

Zaman gecikmesini hesaplayabilmek amacıyla ilk olarak merceklenme zaman ölçeği;

$$\tau_E = \frac{4M}{c}$$

C sabiti;

$$C = \frac{\tau_E}{2} \left[1 + \ln \left(\frac{D_d}{4D_{ds}} \right) \right]$$

Zaman Gecikmesi;

$$\tau = \frac{D_d D_s}{c D_{ds}} \left[\frac{(\theta - \beta)^2}{2} - \theta_E^2 \ln \theta \right] + C = 25906 dk$$

Tablo 2.1 Farklı kara deliklerde çekimsel merceklenme etkilerinin hesabı. Açılar yay saniyesi birimindedir.

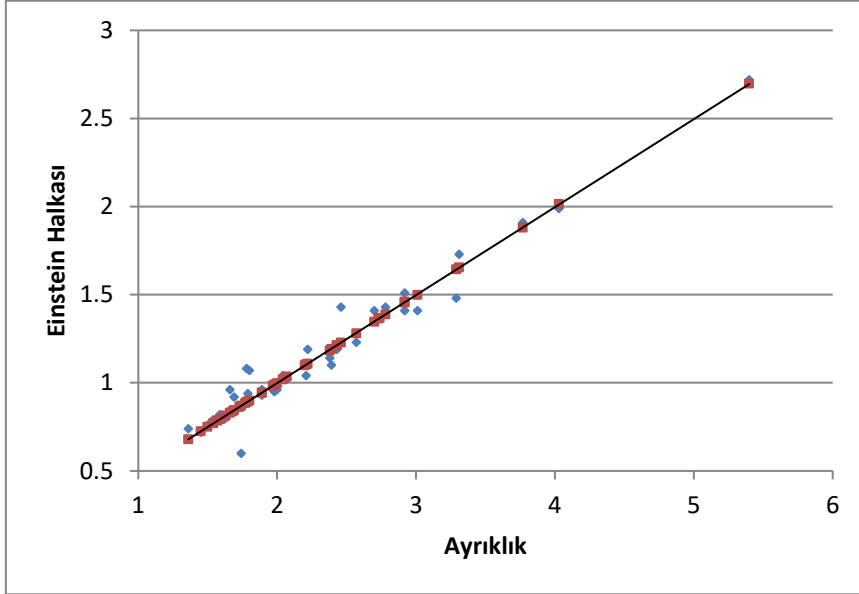
Kara Delik	M $10^6 M_{\odot}$	D Mpc	θ_E''	θ_+''	θ_-''	μ_-	μ_+	α''	τ (dk)
NGC 4945	1.41	3.72	0.039	0.039	-0.039	19632	19633	0.079	7.48
NGC 221(M32)	2.50	0.81	0.112	0.112	-0.112	56022	56023	0.224	12.41
NGC 3079	2.50	19.10	0.023	0.023	-0.023	11536	11537	0.046	13.70
IC2560	2.90	41.40	0.017	0.017	-0.017	8439	8440	0.034	16.19
NGC 7457	3.80	13.20	0.034	0.034	-0.034	17109	17110	0.068	20.34
Samanyolu	4.10	0.0074	1.501	1.501	-1.501	750606	750607	3.002	16.85
NGC 1068	5.60	10.10	0.047	0.047	-0.047	23744	23745	0.095	29.37
NGC 4742	14	15.50	0.061	0.061	-0.061	30306	30307	0.121	72.30
NGC 2549	14	12.30	0.068	0.068	-0.068	34021	34022	0.136	71.77
NGC 7332	15.10	23.00	0.052	0.052	-0.052	25838	25839	0.103	78.77
NGC 3384	16	11.60	0.075	0.075	-0.075	37451	37452	0.150	81.52
NGC 3227	20	17.50	0.068	0.068	-0.068	34090	34091	0.136	102.51
NGC 3393	31	51.80	0.049	0.049	-0.049	24669	24670	0.099	162.19
NGC 4151	32	13.90	0.097	0.097	-0.097	48384	48385	0.194	160.35
NGC 4258	39.80	7.60	0.146	0.146	-0.146	72974	72975	0.292	194.06
NGC 2778	41	7.50	0.149	0.149	-0.149	74558	74559	0.298	199.62
NGC 2787	41	7.50	0.149	0.149	-0.149	74558	74559	0.298	199.62
NGC 1023	43.70	11.40	0.125	0.125	-0.125	62434	62435	0.250	215.32
NGC 5128(cen A)	50	3.50	0.241	0.241	-0.241	120527	120528	0.482	235.56
NGC 4564	59	15.90	0.123	0.123	-0.123	61427	61428	0.246	291.02
NGC 3031(M31)	67.60	3.48	0.281	0.281	-0.281	140546	140547	0.562	315.07
NGC 4459	70	16.10	0.133	0.133	-0.133	66492	66493	0.266	343.45
NGC 4596	78	16.80	0.137	0.137	-0.137	68711	68712	0.275	381.86
NGC 821	85	24.10	0.120	0.120	-0.120	59887	59888	0.240	419.97
NGC 3377	110	11.20	0.200	0.200	-0.200	99936	99937	0.400	525.00
NGC 3379	120	10.30	0.218	0.218	-0.218	108844	108845	0.435	569.36
NGC 4473	120	15.30	0.179	0.179	-0.179	89306	89307	0.357	577.16
NGC 3607	120	19.90	0.157	0.157	-0.157	78306	78307	0.313	582.33
NGC 0224(M31)	141	0.75	0.874	0.874	-0.874	437235	437236	1.749	604.64
NGC 1316	160	20.00	0.180	0.180	-0.180	90194	90195	0.361	769.02
NGC 2974	170	21.50	0.179	0.179	-0.179	89668	89669	0.359	817.41
NGC 4697	170	11.70	0.243	0.243	-0.243	121553	121554	0.486	800.43
NGC 5576	180	27.10	0.164	0.164	-0.164	82184	82185	0.329	870.64
NGC 3608	210	22.90	0.193	0.193	-0.193	96566	96567	0.386	1004.63
NGC 3245	210	20.90	0.202	0.202	-0.202	101081	101082	0.404	1001.49
NGC 4026	210	15.60	0.234	0.234	-0.234	116999	117000	0.468	991.40
NGC 3414	250	25.20	0.201	0.201	-0.201	100439	100440	0.402	1192.77

Tablo 2.1 devam...

Kara Delik	M $10^6 M_{\odot}$	D Mpc	θ_E''	θ_+''	θ_-''	μ_-	μ_+	α''	τ (dk)
NGC 5845	260	25.90	0.202	0.202	-0.202	101035	101036	0.404	1239.97
NGC 3998	290	18.30	0.254	0.254	-0.254	126943	126944	0.508	1361.32
NGC 4291	310	26.20	0.219	0.219	-0.219	109689	109690	0.439	1470.07
NGC 4342	310	15.30	0.287	0.287	-0.287	143539	143540	0.574	1442.70
NGC 3585	340	21.20	0.255	0.255	-0.255	127704	127705	0.511	1595.36
NGC 7052	398	71.40	0.151	0.151	-0.151	75288	75289	0.301	1936.54
NGC 4621	400	18.30	0.298	0.298	-0.298	149087	149088	0.596	1856.57
NGC 4552	500	15.90	0.358	0.358	-0.358	178822	178823	0.715	2290.86
NGC 4261	520	31.60	0.259	0.259	-0.259	129358	129359	0.517	2437.77
NGC 4486B	600	16.10	0.389	0.389	-0.389	194669	194670	0.779	2732.31
NGC 4350	600	16.80	0.381	0.381	-0.381	190571	190572	0.762	2736.50
NGC 6251	620	107.00	0.154	0.154	-0.154	76760	76761	0.307	3012.78
NGC 4594	646	9.55	0.525	0.525	-0.525	262271	262272	1.049	2878.58
NGC 5813	710	32.20	0.299	0.299	-0.299	149739	149740	0.599	3294.39
NGC 5077	720	40.20	0.270	0.270	-0.270	134955	134956	0.540	3365.36
NGC 3115	930	9.70	0.624	0.624	-0.624	312242	312243	1.249	4090.85
NGC 4374(M84)	1000	18.40	0.470	0.470	-0.470	235086	235087	0.940	4491.93
NGC 5252	1000	96.80	0.205	0.205	-0.205	102494	102495	0.410	4764.42
NGC 5846	1100	24.90	0.424	0.424	-0.424	211949	211950	0.848	4978.53
NGC 1399	1200	21.10	0.481	0.481	-0.481	240483	240484	0.962	5381.38
IC4296	1300	50.80	0.323	0.323	-0.323	161315	161316	0.645	6000.21
NGC 4649	2000	17.30	0.686	0.686	-0.686	342868	342869	1.371	8736.11
IC 1589	2500	29.20	0.590	0.590	-0.590	295063	295064	1.180	11043.36
IC1459	2500	29.20	0.590	0.590	-0.590	295063	295064	1.180	11043.36
Cygnus A	2750	258.40	0.208	0.208	-0.208	104029	104030	0.416	13088.74
NGC 4486(M87)	6500	16.80	1.254	1.254	-1.254	627246	627247	2.509	27103.69
P49940	3900	157.70	0.317	0.317	-0.317	158581	158582	0.634	18022.51

Daha önce de belirtildiği gibi kara deliklerin çekimsel merceklemesi güçlü mercekleme olayıdır. Bu nedenle kuramı test etmek amacıyla güçlü mercekleme yapan başka cisimlerden yararlanabiliriz. Bu hedef ile mercekleme yapan 204 kuazarın literatürdeki verilerini inceledik. Fakat çalışmamızda teoriyi tespit edebilmek için Einstein halkası açısıl yarıçapı, görüntü ayrıklığı ve büyütmesi ölçülebilen 58 kuazar seçerek bunların değerlerini tekrardan hesapladık. Gözlemler ile kuramsal değerleri bir grafiğe yerleştirdik ve sonuç olarak bazı

saçılmalar dışında bu değerlerin birbiriyle büyük bir yakınlık içinde olduğunu tespit ettik.



Şekil 2.7 Gözlemlenen değerler ve merceklemeye gösteren 52 kuazarın büyütme, görüntü ayrıklığı ve Einstein halkası yarıçapı gözlemsel (mavi) ve kuramsal (kırmızı) değerleridir. Gözlem değerleri Lemon et al., (2018) ve Lemon et al., (2019)'dan alınmıştır.

3 KERR KARA DELİĞİ ÇEKİMSEL MERCEKLEMESİ

Çoğu astrofiziksel sistemin ihmal edilemez açısal momentuma sahip olduğu bilinmektedir. Bu nedenle, fiziksel kara deliklerin Kerr metriği tarafından açıklanması beklenir. Kerr metriği dönen kara delikleri tanımlayan metriktir (Kerr, 1963). Kerr geometrisindeki null jeodeziklerin çalışması Hamilton-Jacobi denklemlerini birbirinden ayıran Carter (1968) tarafından başlatılmış ve hareketin ilk integralleri açısından jeodezik denklemleri yazılmıştır (Bozza, 2010).

Küresel simetrik kara deliklere göre temel fark, kara deliğin açısal momentumunun dönme eksenini çevresinde bir yörüngesel presesyon oluşturması nedeniyle fotonun hareketinin artık tek bir düzlemde sınırlı kalmamasıdır. Sonuç olarak, kutup açısı θ basit bir koordinat seçimi ile ortadan kaldırılamaz ve problem tamamen üç boyutludur. Tüm integraller eliptik integraller cinsinden yazılabilir (Rauch et al., 1994). Bu özellikle analitik bakış açısı için aydınlatıcı değildir. Ancak Kerr-jeodezik tracing yöntemi için sayısal kodların uygulanmasında yararlı olabilir. Özellikle ekvator düzlemi ile sınırlı fotonlar için analitik sapma açısı önemli ölçüde kısa bir ifadeye dönüşür (Iyer et al., 2009).

3.1 Kerr metriği ve hareket sabitleri

Boyer – Lindquist formundaki Kerr metriği;

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho}\right)dt^2 + \frac{\rho}{\Delta}dr^2 + \left(\Delta + \frac{2Mr(r^2 + a^2)}{\rho}\right)\sin^2\theta d\phi^2 + \rho d\theta^2 - \frac{4aMr\sin^2\theta}{\rho}dtd\phi \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \rho &= r^2 + a^2 \cos^2\theta \\ \Delta &= r^2 - 2Mr + a^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Metrik stasyonel ve eksensel olarak simetriktir. Dolayısıyla t ve ϕ koordinatlarından bağımsızdır. Bu da jeodezik harekette iki korunan miktar

olduğunu göstermektedir. Bu miktarlar E enerji ve L yörünge açısal momentumudur. Bunlar hareket denklemlerinden elde edilir;

$$\begin{aligned} -E &= \dot{t}g_{tt} + \dot{\phi}g_{t\phi} \\ L &= \dot{t}g_{t\phi} + \dot{\phi}g_{\phi\phi} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Görüldüğü üzere bu denklemler metrik katsayılarını içermektedir. (3.3) denkleminde $\dot{t}$ ve $\dot{\phi}$ çekilebilir;

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{g_{\phi\phi}E + g_{t\phi}L}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}} \\ \dot{\phi} &= \frac{g_{t\phi}E + g_{tt}L}{g_{tt}g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Bu durumda (3.4) denklemini ekvatorial düzlemde iki hareket denklemini vermektedir. Noktalar, afin parametresi λ 'ya göre türevi belirtmektedir. Bağlı olmayan foton hesaplanacağı için $E > 0$ olduğunu varsayılabilir. λ , E 'nin uzunluk boyutu olarak düşünülebilir.

3. hareket denklemini;

$$\dot{r} = \pm \left(\frac{-g_{tt}\dot{t}^2 - g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 - g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 - 2g_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi}}{g_{rr}} \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

4. hareket sabiti Hamilton-Jacobi denklemlerinin ayrılmasından gelen Carter sabiti olan Q 'dur ve artık $Q \geq 0$ olduğunu, başka bir deyişle fotonun ekvator düzleminden geçtiğini veya asimptotik olarak bu düzleme yaklaştığı varsayımı yapılabilir. Belirli notasyonlar ile;

$$\hat{\lambda} = E\lambda \quad (3.6)$$

$$\hat{x} = \frac{dx}{d\hat{\lambda}} \quad (3.7)$$

$$\hat{L} = \frac{L}{E} \quad (3.8)$$

$$\hat{Q} = \frac{Q}{E^2} \quad (3.9)$$

yazılabilir. 4. hareket denklemi;

$$\hat{\zeta} = \frac{d\zeta}{d\hat{\lambda}} = \pm \frac{(\hat{Q} + a^2 \sin^2 \zeta - \hat{L}^2 \tan^2 \zeta)^{1/2}}{r^2 + a^2 \sin^2 \zeta} \quad (3.10)$$

Burada $\zeta = \pi / 2 - \theta$ ayarlaması yapılır ve artık Boyer-Lindquist koordinatları (t, r, ζ, ϕ) 'dir. Metrikteki katsayıları yazınca hareketin null jeodezik denklemleri şu hale gelir (Azami et al., 2011);

$$\hat{t} = 1 + \frac{2Mr(a^2 - a\hat{L} + r^2)}{[a^2 + r(r - 2M)](r^2 + a^2 \sin^2 \zeta)} \quad (3.11)$$

$$\hat{r} = \pm \frac{[r^4 - (\hat{Q} + \hat{L}^2 - a^2)r^2 + 2M((\hat{L} - a)^2 \hat{Q})r - a^2 \hat{Q}]^2}{r^2 + a^2 \sin^2 \zeta} \quad (3.12)$$

$$\hat{\phi} = \frac{2aMr + \hat{L}r(r - 2M)\sec^2 \zeta + a^2 L \tan^2 \zeta}{[a^2 r(r - 2M)](r^2 + a^2 \sin^2 \zeta)} \quad (3.13)$$

Sonuç olarak Kerr metriğindeki 4 hareket denklemi (3.10), (3.11), (3.12) ve (3.13) denklemleri ile tanımlanmaktadır.

3.2 Ekvatorial Düzlemdeki Gözlemci İçin Kerr Kara Deliği Çekimsel Merceklemesi

3.2.1 Lens denklemi

Ekvatorial bölgedeki gözlemci ve kaynağın asimptotik olarak düz bölgede olduğu varsayımı ile hareket sabitleri olan $\hat{L}$ ve $\hat{Q}$ 'yu incelemek bu bölgede lens denklemini çıkarmak için yararlı olacaktır. Bunları kara delikten uzakta asimptotik olarak düz uzay zaman bölgesindeki hareket denklemlerini hesaplayarak bulabiliriz. Bu, limitleri $a, M \rightarrow 0$ olarak değerlendirmek anlamına gelmektedir. Bu durumda hareket denklemleri aşağıdaki formu almaktadırlar;

$$\hat{t} = 1 \quad (3.14)$$

$$\hat{r} = \pm \frac{(r^2 - \hat{Q} - \hat{L}^2)^{1/2}}{r} \quad (3.15)$$

$$\hat{\zeta} = \pm \frac{(\hat{Q} - \hat{L}^2 \tan^2 \zeta)^{1/2}}{r^2} \quad (3.16)$$

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{L}}{r^2 \cos^2 \zeta} \quad (3.17)$$

Gözlemci konumunda, foton θ ve ϕ açıları tarafından tanımlanan düz bir çizgidir. Ekvatorial gözlemci için Şekil 3.1'de görülen üç Kartezyen bileşen aşağıdaki gibi yazılabilir;

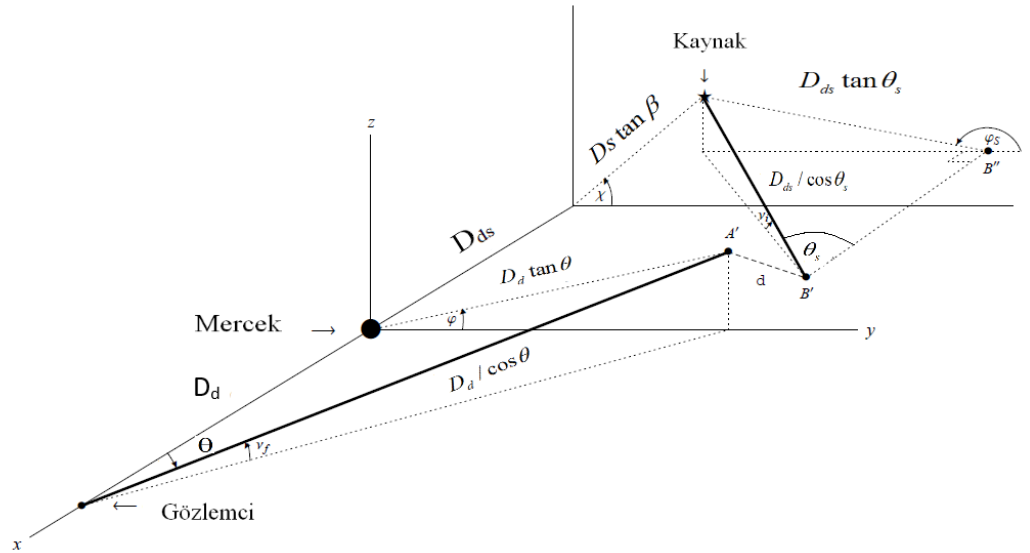
$$\begin{aligned} x(\hat{\lambda}) &= D_d + (\hat{\lambda} - \hat{\lambda}_o) \cos \theta \\ y(\hat{\lambda}) &= -(\hat{\lambda} - \hat{\lambda}_o) \sin \theta \cos \varphi \\ z(\hat{\lambda}) &= -(\hat{\lambda} - \hat{\lambda}_o) \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$r(\hat{\lambda}_0) = D_d \quad (3.19)$$

$$\zeta(\hat{\lambda}_o) = 0 \quad (3.20)$$

$$\hat{r}(\hat{\lambda}_0) = \cos \theta \quad (3.21)$$

$$\hat{\phi}(\hat{\lambda}_O) = -\frac{\sin \theta \cos \varphi}{D_d} \quad (3.22)$$



Şekil 3.1 Şekilde mercek ve gözlemci arasındaki uzaklık D_d mecek kaynak arası uzaklık D_{ds} ve gözlemci ve kaynak arası uzaklık D_s 'dir. (θ, φ) açıları görüntü konumunu tanımlayan açılar ve (β, χ) açıları ise kaynak konumunu tanımlayan açılardır. β mercek, gözlemci ve kaynak arasında kalan açıyı tanımlar. Kaynaktan salınan fotona teğet çizgi B' ve gözlemciye ulaşan fotona teğet çizgi A' olarak verilmektedir. B' teğet çizgisini tanımlayan açılar θ_s ve φ_s 'tir. Kerr kara deliği çekimsel merceklemeye geometrisinde bu

iki teğet çizgi kesişmez. Kesiştiği durumda küresel simetri durumuna dönmektedir (Azaami. A., 2011).

$\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_0$ olduğu durumda $\hat{L}$ ve $\hat{Q}$ hareket sabitleri;

$$\hat{L}_0 = \hat{\phi} r^2 \cos^2 \zeta \Big|_{\hat{\lambda}=\hat{\lambda}_0} = -D_d \sin \theta \cos \varphi \quad (3.23)$$

$$\hat{Q}_0 = \left[r^2 (1 - \hat{r}^2) - \hat{L}^2 \right] \Big|_{\hat{\lambda}=\hat{\lambda}_0} = D_d^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \quad (3.24)$$

formuna dönüşmektedir. Etki parametresi $(0 < \theta < \pi/2, \sin \theta > 0)$;

$$b \equiv (\hat{Q} + \hat{L}^2)^{1/2} = D_d \sin \theta \quad (3.25)$$

Kaynak konumu (β, χ) ile ifade edilirken, kaynaktan gelen ışığın yönü (θ_s, φ_s) ile tanımlanır. Kaynaktaki ışığın 3 Kartezyen bileşeni şu şekilde yazılabilir;

$$\begin{aligned} x(\hat{\lambda}) &= -D_{ds} + (\hat{\lambda} - \hat{\lambda}_s) \cos \theta_s \\ y(\hat{\lambda}) &= D_s Y_{src} (\hat{\lambda} - \hat{\lambda}_s) \sin \theta_s \cos \varphi_s \\ z(\hat{\lambda}) &= D_s Z_{src} - (\hat{\lambda} - \hat{\lambda}_s) \sin \theta_s \sin \varphi_s \end{aligned} \quad (3.26)$$

λ_s kaynak konumundaki afin parametresinin değeri, afin parametresi aralığı $\hat{\lambda}_s \leq \hat{\lambda} \leq D_{ds} / \cos \theta_s + \hat{\lambda}_s$ 'dir. Ayrıca;

$$Y_{src} \equiv \tan \beta \cos \chi \quad (3.27)$$

$$Z_{src} \equiv \tan \beta \sin \chi \quad (3.28)$$

$\hat{L}$ ve $\hat{Q}$, $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_s$ olduğu durumda;

$$\hat{L}_S = -D_s Y_{src} \cos \theta_S + D_{ds} \sin \theta_S \cos \varphi_S \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_S &= D_s^2 Z_{src}^2 (\cos^2 \theta_S + \sin^2 \theta_S \cos^2 \varphi_S) \\ &- 2D_s Z_{src} \sin \theta_S \sin \varphi_S (D_{ds} \cos \theta_S + D_s Y_{src} \sin \theta_S \cos \varphi_S) \\ &+ (D_s^2 Y_{src} + d_{LS}^2) \sin^2 \theta_S \sin^2 \varphi_S \end{aligned} \quad (3.30)$$

Bunlar hareket sabitleri olduğu için $\hat{L}_O = \hat{L}_S$ ve $\hat{Q}_O = \hat{Q}_S$ olmalıdır. Buradan Y_{src} yerine konulduğunda;

$$D_s \tan \beta \cos \chi = D_{ds} \tan \theta_S \cos \varphi_S + D_d \frac{\sin \theta \cos \varphi}{\cos \theta_S} \quad (3.31)$$

$\hat{Q}_O = \hat{Q}_S$ olduğundan;

$$\begin{aligned} Z_{src} &= \frac{D_{ds} \tan \theta_S \sin \varphi_S}{D_s} + \frac{D_d \sin \theta}{D_s (1 - \sin^2 \theta_S \sin^2 \varphi_S)} \times \\ &\left[\cos \varphi \sin \theta_S \tan \theta_S \sin \varphi_S \cos \varphi_S \pm (\sin^2 \varphi - \sin^2 \theta_S \sin^2 \varphi_S)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} D_s \tan \beta \sin \chi &= D_{ds} \tan \theta_S \sin \varphi_S + \frac{D_s \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta_S \sin^2 \varphi_S} \times \\ &\left[\cos \varphi \sin \theta_S \tan \theta_S \sin \varphi_S \cos \varphi_S + (\sin^2 \varphi - \sin^2 \theta_S \sin^2 \varphi_S)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

Kerr metriğindeki ekvatorial bir gözlemci için mercek denkleminin iki bileşeni bu şekilde bulunmaktadır (Azami et al., 2011).

3.3 Yarı Ekvatorial Düzlemde Bulunan Gözlemci İçin Kerr Kara Deligi Çekimsel Merceklemesi

3.3.1 Yarı ekvatorial null jeodezikler için hareket denklemi ve sapma açıları

Null jeodezikler için hareket denklemleri yazılmıştı. Bu alt başlıkta ekvatorial düzlemde bulunan bir gözlemci ve yarı ekvatorial rejimde hareketi göz önünde bulundurulacaktır. $\varphi_0 = 0$ ve L 'nin negatif değerlerine sahip fotonlar kara delikle ters yönde dönmekte, $\varphi_0 = \pi$ ve L 'nin pozitif olduğu değerlere sahip fotonlar ise kara delikle aynı yönde dönmektedir. Böylece işaret parametresi tanımlanabilir;

$$s = \text{işaret}(L) = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \quad (3.34)$$

Kara delik ile aynı yönde dönen fotonlar için bu parametre pozitif iken zıt yönde dönen fotonlar için negatiftir ve;

$$s = -\cos \varphi_0 \quad (3.35)$$

Ekvatorial bölgedeki bir gözlemci için $\hat{L}$ ve $\hat{Q}$;

$$\hat{L} = -D_d \sin \theta \cos \varphi \quad (3.36)$$

$$\hat{Q} = D_d^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \quad (3.37)$$

Yarı ekvatorial rejimde bu şu forma dönüşür;

$$\hat{L} = sb \cos \delta\varphi \quad (3.38)$$

$$\hat{Q} = b^2 \sin^2 \delta\varphi \quad (3.39)$$

Hareket denklemleri ζ ve $\delta\varphi$ 'de bir Taylor serisi olarak açılabilir;

$$\hat{t} = \frac{r^2}{a^2 + r(r - 2m_\bullet)} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2m_\bullet abs}{r^3} F \right) + O(2) \quad (3.40)$$

$$\hat{r} = \pm \left(1 - \frac{b^2}{r^2} G + \frac{2m_\bullet b^2}{r^3} F^2 \right)^{1/2} + O(2) \quad (3.41)$$

$$\hat{\phi} = \frac{bs}{a^2 + r(r - 2m_\bullet)} \left(1 - \frac{2m_\bullet}{r} F \right) + O(2) \quad (3.42)$$

$$\hat{\zeta} = \pm \frac{b}{r^2} \left[(\delta\varphi)^2 - G\zeta^2 \right]^{1/2} + O(2) \quad (3.43)$$

O (2), ζ ve/veya $\delta\varphi$ 'de ikinci mertebe terimleri gösterir ve denklem içeriğindeki F ve G;

$$F \equiv 1 - s \frac{a}{b} = 1 - s\hat{a} \frac{m_\bullet}{b} \quad (3.44)$$

$$G \equiv 1 - \frac{a^2}{b^2} = 1 - \hat{a} \frac{m_\bullet^2}{b^2} \quad (3.45)$$

olarak tanımlanmaktadır. $\hat{t}$, $\hat{r}$ ve $\hat{\phi}$ sıfır veya birinci mertebede ζ veya $\delta\varphi$ 'ye bağlı olmamasının nedeni düzlemdeki hareketin ekvatorial düzlemin üzerinde veya altında küçük yer değiştirmelere karşı duyarsız olmasıdır. Buna karşılık $\hat{\zeta}$ sıfırinci terimi yoktur, ancak sıfır olmayan birinci dereceden bir terime sahiptir. Böylece, $\zeta = \delta\varphi = 0$ olması durumunda bir çözüm mevcut (başka bir deyişle foton ekvatorial düzlemde bulunduğu), ayrıca ζ ve $\delta\varphi$ 'nin sıfır olmadığı çözümler de mevcuttur.

r_0 etki parametresi ile ilişkilendirilebilir. En yakın yaklaşım uzaklığı, $\dot{r}=0$ 'ın çözümü tarafından elde edilir. $\hat{r}$ denkleminde bu pozitif gerçel çözümü olan, basit kuadratik formda bir denklemdir;

$$\frac{b}{r_0} = \left(G - \frac{2m_{\bullet}}{r_0} F^2 \right)^{-1/2} \quad (3.46)$$

Alternatif olarak $\dot{r}=0$, r_0 'da bir gerçel çözümü olan kübik bir denklem olarak verilir;

$$\frac{r_0}{b} = \frac{2}{\sqrt{3}} G^{1/2} \cos \left[\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(-3^{3/2} \frac{F^2}{G^{3/2}} \frac{m_{\bullet}}{b} \right) \right] \quad (3.47)$$

$m_{\bullet}/b \ll 1$ 'de Taylor genişlemesi ile şu denklem elde edilmektedir;

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{b} = & G^{1/2} - \frac{F^2}{G} \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right) - \frac{3F^4}{2G^{5/2}} \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^2 - \frac{4F^6}{G^4} \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^3 - \frac{105F^8}{8G^{11/2}} \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^4 \\ & - \frac{48F^{10}}{G^7} \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^5 - \frac{3003F^{12}}{16G^{17/2}} \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^6 + O \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^7 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Spin yokluğunda $F=G=1$ olur ve böylece Schwarzschild değerlerine küçülür (Azami et al., 2011).

3.3.1.a Yatay sapma açısı

Yatay sapma açısını elde etmek için ϕ yönü boyunca bir null jeodeziğin sapmasını incelemek amacı ile yarı ekvatorial rejimdeki null jeodeziğin hareket denklemlerindeki (3.12) ve (3.13) denklemleri bölünmektedir;

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} = \pm \frac{sbr^2(r - 2m_{\bullet}F)}{\left[a^2 + r(r - 2m_{\bullet}) \right] \left[r^3 + b^2(2m_{\bullet}F^2 - Gr) \right]^{1/2}} \quad (3.49)$$

$\hat{\theta}$ ve $\hat{\theta}_s$ xy düzlemi üzerinde sırasıyla θ ve θ_s açılarının yansımalarıdır. Sapma açısının yatay bileşeni bu açılar ile ilişkilendirilebilir;

$$\hat{\alpha}_{hor} = \hat{\theta} + \hat{\theta}_s \quad (3.50)$$

$$\hat{\theta}_s \geq -\hat{\theta} \quad (3.51)$$

$\hat{\theta}$ ve $\hat{\theta}_s$ 'in merceklemeye geometrisindeki diğer açılarla ilişkisi;

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \tan^{-1}(\tan \theta \cos \varphi) \\ \hat{\theta}_s &= \tan^{-1}(\tan \theta_s \cos(\pi - \varphi_s)) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Yarı ekvatorial rejimde;

$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi \quad (3.53)$$

$$\varphi_s = \varphi_0 + \pi + \delta\varphi_s \quad (3.54)$$

$\delta\varphi$ ve $\delta\varphi_s$ küçükken φ_0 ya 0 (zıt yönlü hareket) ya da π (aynı yönlü hareket) olarak tanımlanır. Bu rejimde;

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &\approx \pm\theta \\ \hat{\theta}_s &\approx \theta_s \end{aligned} \quad (3.55)$$

$\hat{\theta}$ ve $\hat{\theta}_s$, θ ve θ_s açıları ile aynı işarete sahiptir, bu nedenle olumsuz çözümler göz önünde bulundurulmaz ve;

$$\hat{\alpha}_{hor} \approx \theta + \theta_s, \theta_s \geq -\theta \quad (3.56)$$

Dönmeyen kara delikler durumunda azimut açısının nasıl yazıldığını göstermiştik. Yeniden ışığın sonsuz uzaklıktan gelip, kara deliğe en yakın

mesafeye ulaşır, buradan tekrar sonsuza gittiği varsayımını yapılmaktadır. Bu varsayım ile kaynaktan en yakın yaklaşım noktasına gelen foton şu şekilde ifade edilir;

$$\phi_i - \phi_0 = \int_{r_0}^{\infty} \left| \frac{d\phi}{dr} \right| dr \quad (3.57)$$

ϕ_0 en yakın yaklaşım noktasında ϕ 'nin değeridir. En yakın yaklaşım noktasından gözlemciye doğru giden foton ise aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\phi_0 - \phi_f = \int_{r_0}^{\infty} \left| \frac{d\phi}{dr} \right| dr \quad (3.58)$$

(3.57) ve (3.58) denklemleri taraf tarafa toplandığında;

$$\pi + \hat{\theta}_s + \hat{\theta} = \phi_i - \phi_f = 2 \int_{r_0}^{\infty} \left| \frac{d\phi}{dr} \right| dr \quad (3.59)$$

Dönmeyen kara delik durumunda da belirtildiği üzere fotonun düz bir yoldan sapması nedeniyle (3.59) denkleminde π sağ tarafa gönderilebilir, dolayısıyla yarı ekvatorial gözlemci için yatay sapma açısı daha alışıldık bir formda yazılabilmektedir;

$$\hat{\alpha}_{hor} = 2 \int_{r_0}^{\infty} \left| \frac{d\phi}{dr} \right| dr - \pi \quad (3.60)$$

Kara delikle aynı yönde hareket durumunda, $\phi_f > \phi_i$ ile $\phi_f = \hat{\theta}$ ve $\phi_i = -(\pi + \hat{\theta}_s)$ 'dir;

$$\pi + \hat{\theta}_s + \hat{\theta} = \phi_f - \phi_i = 2 \int_{r_0}^{\infty} \left| \frac{d\phi}{dr} \right| dr \quad (3.61)$$

İntegrali alınan eşitlik etki parametresine bağlı, integralin kendisi ayrıca en yakın yaklaşım koordinat uzaklığı r_0 'a bağlıdır. İntegral değişkenleri $x = r_0 / r$ olarak değiştirildiğinde sapma açısı;

$$\hat{\alpha}_{hor} = 2 \int_0^1 \frac{1 - 2Fhx}{(1 - 2hx + \hat{a}h^2x^2) \left[G(1 - x^2) - 2F^2h(1 - x^3) \right]^{1/2}} dx - \pi \quad (3.62)$$

$h = m_\bullet / r_0$ 'dır. Zayıf sapma rejiminde $h \ll 1$ 'dir, integrali alınan ifadenin h 'da Taylor serisi açıldığında ve terim terim integrali alındığında;

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{hor} = & c_0\pi + 4c_1h + \left(-4c^2 + \frac{15\pi}{4}d_2 \right) h^2 + \left(\frac{122}{3}c_3 - \frac{15\pi}{2}d_3 \right) h^3 \\ & + \left(-130c_4 + \frac{3465\pi}{64}d_4 \right) h^4 + O(h)^5 \end{aligned} \quad (3.63)$$

elde edilir ve;

$$c_0 = \frac{1}{G^{1/2}} - 1 \quad (3.64)$$

$$c_1 = \frac{F^2 + G - FG}{G^{3/2}} \quad (3.65)$$

$$c_2 = \frac{F^2(F^2 + G - FG)}{G^{5/2}} \quad (3.66)$$

$$d_2 = \frac{1}{15G^{5/2}} \left[61F^6 - G(F - 1)(3F^2 + 2G) - 2\hat{a}^2G^2 \right] \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} c_3 = & \frac{1}{61G^{7/2}} \left[61F^6 - G(F - 1)(45F^4 + 32F^2G + 16G^2) \right. \\ & \left. - 4G^2\hat{a}^2(2F^2 + 2G - FG) \right] \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$d_3 = \frac{F^2}{G} d_2$$

(3.69)

$$c_4 = \frac{F^2}{65G^{9/2}} \left[65F^6 - 49(F-1)F^4G - 8F^2(-4 + \hat{a}^2 + 4F)G^2 + 4(4 + \hat{a}^2(F-2) - 4F)G^3 \right] \quad (3.70)$$

$$d_4 = \frac{1}{1155G^{9/2}} \left[1155F^8 - 840(F-1)F^6G - 140F^4(-4 + \hat{a}^2 + 4F)G^2 + 80(4 + \hat{a}^2(F-2) - 4F)F^2G^3 + 8(16 - 12\hat{a}^2 + \hat{a}^4 + 8(\hat{a}^2 - 2)F)G^4 \right] \quad (3.71)$$

Spin yokluğunda $a = 0$ ve $F = G = 1$ olur, dolayısıyla;

$$c_0 = 0 \quad c_1 = c_2 = c_3 = d_2 = d_3 = c_4 = d_4 = 1 \quad (3.72)$$

Bu limitte (3.63) denklemi Schwarzschild durumuna dönüşmektedir.

Birinci mertebede, r_0/b denkleminde $b \approx r_0$, $F \approx 1 - sa/r_0$ ve $G \approx 1$ olur.

Bu da $c_0 \approx 0$ ve $c_1 \approx 1 - sa/r_0$ olduğunu gösterir. Böylece en düşük mertebe yatay sapma açısı denklemi aşağıdaki formu almaktadır;

$$\hat{\alpha}_{hor} \approx 4 \frac{m_\bullet}{r_0} \left(1 - s \frac{a}{r_0} \right) \quad (3.73)$$

(3.63)'de verilen sapma açısı denklemi en yakın yaklaşım koordinat uzaklığı r_0 terimini içermesi nedeni ile koordinata bağlıdır. Değişmez bir sonuç elde etmek için formül b etki parametresi ile ilişkilendirilmelidir. r_0/b denklemi $m_\bullet/b$ 'de bir Taylor serisi olarak açıldığında $h = m_\bullet/r_0$;

$$h = \frac{1}{G^{1/2}} \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right) + \frac{F^2}{G^2} \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^2 + \frac{5F^4}{2G^{7/2}} \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^3 + \frac{8F^6}{G^5} \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^4 + \frac{231F^8}{8G^{13/2}} \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^5 + \frac{112F^{10}}{G^8} \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^6 + O \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^7 \quad (3.74)$$

ve;

$$\hat{\alpha}_{hor}(b) = C_0 + C_1 \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right) + C_2 \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^2 + C_3 \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^3 + C_4 \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^4 + O \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^5 \quad (3.75)$$

$$C_0 = \left(\frac{1}{G^{1/2}} - 1 \right) \pi \quad (3.76)$$

$$C_1 = 4 \frac{F^2 + G - FG}{G^2} \quad (3.77)$$

$$C_2 = \frac{\pi}{4G^{7/2}} \left[15F^4 - 4G(F-1)(3F^2 + 2G) - 2\hat{a}^2 G^2 \right] \quad (3.78)$$

$$C_3 = \frac{8}{3G^5} \left[16F^6 + 4G(F-1)(3F^4 + 2F^2G + G^2) - \hat{a}^2 G^2 (2F^2 + 2G - FG) \right] \quad (3.79)$$

$$C_4 = \frac{3\pi}{64G^{13/2}} \left[1155F^8 - 840(F-1)F^6G - 140F^4(-4 + \hat{a}^2 + 4F)G^2 + 80(4 + \hat{a}^2(F-2) - 4F)F^2G^3 + 8(16 - 12\hat{a}^2 + \hat{a}^4 + 8(\hat{a}^2 - 2)F)G^4 \right] \quad (3.80)$$

Sonuç olarak sapma açısı;

$$\hat{\alpha}_{hor}(b) = A_1 \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right) + A_2 \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^2 + A_3 \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^3 + A_4 \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^4 + O \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^5 \quad (3.81)$$

ve,

$$\begin{aligned}
A_1 &= 4 \\
A_2 &= \frac{15\pi}{4} - 4s\hat{a} \\
A_3 &= \frac{128}{3} - 10\pi s\hat{a} + 4\hat{a}^2 \\
A_4 &= \frac{3465\pi}{64} - 192s\hat{a} + \frac{285\pi\hat{a}^2}{16} - 4s\hat{a}^3
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Spin olmadığı durumda ($a = 0$) yani Schwarzschild durumunda $A_1 = 4$, $A_2 = 15\pi/4$, $A_3 = 128/3$ ve $A_4 = 3465\pi/64$ 'dür (Azami et al., 2011).

3.3.1.b Dikey sapma açısı

Yarı ekvatorial merceklenme için sapma açısının dikey bileşeni çıkarılacaktır. (3.10) ve (3.12) denklemlerinin bölümü;

$$\frac{d\zeta}{dr} = \frac{\hat{\zeta}}{\hat{r}} = \pm i(r) \left[\frac{(\delta\varphi)^2}{G} - \zeta^2 \right]^{1/2} \tag{3.83}$$

$$i(r) = \frac{bG^{1/2}}{(r^4 - b^2Gr^2 + 2m_\bullet b^2Fr)^{1/2}} \tag{3.84}$$

Hareket denklemi aşağıdaki formda çözüme sahiptir;

$$\zeta(r) = \frac{\delta\varphi}{G^{1/2}} \sin[\pm I(r) + p] \tag{3.85}$$

$$I(r) = \int_{r_0}^r i(r') dr' \tag{3.86}$$

Burada p integral sabitidir. Bu konu için ilgilenilen iki asimptotik değer ($r \rightarrow \infty$);

$$\zeta_{\pm} = \frac{\delta\varphi}{G^{1/2}} \sin(\pm I_{\infty} + p) \quad (3.87)$$

$I_{\infty} = \lim_{r \rightarrow \infty} I(r)$ 'dir. p yok edilebilir ve iki çözüm birbiriyle ilişkilendirilebilir;

$$\zeta_{-} = -\frac{\delta\varphi}{G^{1/2}} \sin \left[-2I_{\infty} + \sin^{-1} \left(\frac{G^{1/2}}{\delta\varphi} \zeta_{+} \right) \right] \quad (3.88)$$

Asimptotik değer $\zeta_{\pm}$ başlangıç ve bitiş değer olan ζ_i ve ζ_f 'ye uygun olmalıdır. Yarı ekvatorial rejimde $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$ ve $\varphi_s = \varphi_0 + \pi + \varphi_s$ olmak üzere $\varphi = \pi$ ile aynı yönde dönen fotonlar $\varphi = 0$ ile ters yönde dönen fotonlar belirtilmektedir. Sonuç olarak;

$$\sin \zeta_i = \sin \theta_s \sin \delta\varphi_s \quad (3.89)$$

$$\sin \zeta_f = \sin \theta \sin \delta\varphi \quad (3.90)$$

ζ ve $\delta\varphi$ 'de ilk mertebede;

$$\begin{aligned} \zeta_i &= \delta\varphi_s \sin \theta_s \\ \zeta_f &= \delta\varphi \sin \theta \end{aligned} \quad (3.91)$$

olmaktadır. Küresel durum için (3.88) denkleminde $\zeta_{-} = \zeta_i$ ve $\zeta_{+} = \zeta_f$ olarak denkleme konulur. Bunun sonucunda;

$$\delta\varphi_s = \frac{\delta\varphi}{G^{1/2} \sin \theta_s} \sin \left[-2I_{\infty} + \sin^{-1} (G^{1/2} \sin \theta) \right] \equiv \frac{W(\theta)}{\sin \theta_s} \delta\varphi \quad (3.92)$$

$\delta\varphi$ 'nin katsayısı θ 'ya bağlı olup φ 'ye bağlı değildir. $W(\theta)$ fonksiyonunu $\sin \theta_s$ değişkenine bağlı bir fonksiyon olarak tanımlamak mümkündür.

İlk olarak sonuçların mantıklı olması açısından küresel mercek durumu kontrol edilmelidir. Küresel mercek için $a = 0$ ve $F = G = 1$;

$$2I_{\infty} = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{bdr}{r^{1/2} [r^3 - b^2(r - 2m_{\bullet})]^{1/2}} = \pi + \theta_s + \theta \quad (3.93)$$

$\zeta_- = \zeta_i$ ve $\zeta_+ = \zeta_f$ seçimlerinden sonra;

$$\delta\varphi_s = \frac{\delta\varphi}{\sin\theta_s} \sin[-\pi - \theta_s - \theta + \sin^{-1}(\sin\theta)] = \delta\varphi \quad (3.94)$$

simetri ile tutarlıdır.

İntegral sadece simetri durumunda değil genel olarak değerlendirildiği durumda denklem (3.87) ve denklem (3.89)'den yararlanarak aşağıdaki ifade elde edilir;

$$I_{\infty} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{bG^{1/2}}{(r^4 - b^2Gr^2 + 2m_{\bullet}b^2F^2r)^{1/2}} dr \quad (3.95)$$

b/r_0 'ı tanımlayan denklem kullanılarak integral değişkeni $x = r_0/r$ olarak değiştiriliyor;

$$I_{\infty} = \int_0^1 \frac{G^{1/2}}{[G(1-x^2) - 2F^2h(1-x^3)]^{1/2}} dx \quad (3.96)$$

Burada $h = m_{\bullet}/r_0$ ve h 'da Taylor genişlemesi yapıp sonra terim terim integral alınması ile ifade;

$$\begin{aligned} I_{\infty} = & \frac{\pi}{2} + \frac{2F^2}{G}h + \frac{F^4}{8G^2}(15\pi - 16)h^2 + \frac{F^4}{12G^3}(244 - 45\pi)h^3 \\ & + \frac{5F^8}{128G^4}(-1664 + 693\pi)h^4 + O(h)^5 \end{aligned} \quad (3.97)$$

formuna dönüşür. (3.74) denkleminde h , $m_{\bullet}/b$ cinsinden yazılıp, terimler düzenlendiğinde;

$$\begin{aligned}
 I_{\infty} = & \frac{\pi}{2} + \frac{2F^2}{G} \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right) + \frac{F^4}{8G^2} (15\pi - 16) \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^2 \\
 & + \frac{F^4}{12G^3} (244 - 45\pi) \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^3 \\
 & + \frac{5F^8}{128G^4} (-1664 + 693\pi) \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^4 \\
 & + O \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^5
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

a ve $m_{\bullet}/b$ cinsinden F ve G 'yi elde etmek amacıyla denklem (3.46) kullanılarak terimler toplanır ve aşağıdaki ifade elde edilir;

$$\begin{aligned}
 I_{\infty} = & \frac{\pi}{2} + 2 \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right) + \left(\frac{15\pi}{8} - 4s\hat{a} \right) \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^2 + \left(\frac{64}{3} - \frac{15\pi s\hat{a}}{2} + 5\hat{a}^2 \right) \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^3 + \\
 & \left(\frac{3465\pi}{128} - 128s\hat{a}^2 + \frac{135\pi\hat{a}^2}{8} - 6s\hat{a}^3 \right) \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^4 \\
 & + O \left(\frac{m_{\bullet}}{b} \right)^5
 \end{aligned} \tag{3.99}$$

Bu denklem sapmayı, dikey sapma açısı cinsinden ifade etmek için kullanılacaktır (Azami et al., 2011).

Şekil 3.1'de görülen v_f açısı negatif olmayan $[0, \pi/2)$ bir aralığında tanımlanırken, v_i açısı $-\pi/2 < v_i < \pi/2$ aralığında tanımlanır ve negatif olabilir. Eğer v_i ekvatorial düzlemden uzaklaşırsa pozitif olarak alınabilir, aksi taktirde negatiftir. $\hat{v}_i$ ve $\hat{v}_f$, sırasıyla v_i ve v_f açılarının xz düzlemine yansıtılması ile oluşan açılardır. Bu düzenlemeler ile sapma açısının dikey bileşeni şu şekilde ifade edilir;

$$\hat{\alpha}_{vert} = \hat{v}_f - \hat{v}_i \tag{3.100}$$

$\hat{\nu}_f$ 'nin pozitif olması ve sapmanın negatif olmaması sonucunda;

$$\hat{\nu}_i \leq \hat{\nu}_f \quad (3.101)$$

$\hat{\nu}_i$ ve $\hat{\nu}_f$, merceklenme geometrisindeki açılarla ilişkilendirilebilir;

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_f &= \tan^{-1}(\tan \theta \sin \varphi) \\ \hat{\nu}_i &= \tan^{-1}(\tan \theta_s \sin(\pi - \varphi_s)) \end{aligned} \quad (3.102)$$

Yarı ekvatorial rejimde şu formu almaktadır;

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_f &\approx \pm \delta \varphi \tan \theta \\ \hat{\nu}_i &\approx \pm \delta \varphi \tan \theta_s \end{aligned} \quad (3.103)$$

Küçük açılar $\delta \varphi$ ve $\delta \varphi_s$ lineer mertebelerde genişletilir. $W(\theta) = \sin \theta_s \delta \varphi_s$ ve $\theta_s = \hat{\alpha}_{hor} - \theta$ ile dikey bileşen yazılabilir;

$$\hat{\alpha}_{vert} \approx \pm \delta \varphi \left[\tan \theta + \frac{W(\theta)}{\cos(\hat{\alpha}_{hor} - \theta)} \right] \quad (3.104)$$

Bu ifadedeki köşeli parantez $16D \csc \theta \sec^2 \theta \varepsilon^2 + O(\varepsilon)^4$ formundadır, dolayısıyla pozitifdir. Sapma açısı negatif olamayacağından $\delta \varphi \geq 0$ ve $\delta \varphi < 0$ 'dır;

$$\hat{\alpha}_{vert} \approx \delta \varphi \left[\tan \theta + \frac{W(\theta)}{\cos(\hat{\alpha}_{hor} - \theta)} \right] \quad (3.105)$$

ε 'nin üçüncü mertebesinde dikey sapma açısı;

$$\hat{\alpha}_{\text{vert}}(\varepsilon) \approx \delta\varphi \left\{ \tan \theta + \frac{1}{G^{1/2}} \sin \left[-2I_{\infty} + \sin^{-1} \left(G^{1/2} \sin \theta \right) \right] \right. \\ \left. \frac{1}{\cos(\hat{\alpha}_{\text{hor}} - \theta)} \right\} \quad (3.106)$$

$$= \delta\varphi \left\{ \frac{4}{\theta_0} \varepsilon + \frac{15\pi - 32s\hat{a} - 16\theta_1}{4\theta_0^2} \varepsilon^2 \right. \\ + \frac{256 + 72\hat{a}^2 - 90\pi s\hat{a} + 64D^2\theta_0^4 + 96s\hat{a}\theta_1 - 45\pi\theta_1 + 24\theta_1^2 + 24\theta_0\theta_2}{6\theta_0^3} \varepsilon^3 \\ \left. + O(\varepsilon)^4 \right\} \quad (3.107)$$

olmaktadır (Azami et al., 2011).

3.3.2 Yarı ekvatorial düzlemde lens denklemi

d_y ve d_z yer değiştirmeler ve ξ hesaplama parametresi olmak üzere genel merceklenme denklemi;

$$D_s \tan \beta \cos \chi = D_d \tan \theta \cos \varphi + D_{ds} \tan \theta_s \cos \varphi_s + \xi d_y \\ D_s \tan \beta \sin \chi = D_d \tan \theta \sin \varphi + D_{ds} \tan \theta_s \sin \varphi_s + \xi d_z \quad (3.108)$$

Yer değiştirmeler denkleme dahil edildiğinde hesaplama parametresi $\xi = 1$ veya göz ardı edileceğinde $\xi = 0$ seçilmektedir. Ekvatorial rejimdeki iki lens denkleminin karşılaştırılması ile, yer değiştirme koşulları çıkarılmaktadır;

$$d_y = D_d \sin \theta \cos \varphi \left(\frac{1}{\cos \theta_s} - \frac{1}{\cos \theta} \right) \\ d_z = -D_d \tan \theta \sin \varphi + \frac{D_d \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta_s \sin^2 \varphi_s} \\ \times \left[\cos \varphi \sin \theta_s \tan \theta_s \cos \varphi_s + \right. \\ \left. \left(\sin^2 \varphi - \sin^2 \theta_s \sin^2 \varphi_s \right)^{1/2} \right] \quad (3.109)$$

$D_s \tan \beta \cos \chi$ denklemi ile başlayıp d_y 'yi yerine koyarak küçük açılar $\delta\varphi$, $\delta\varphi_s$, $\delta\chi$ 'de Taylor genişletilmesi yapılarak aşağıdaki denklem elde edilmektedir;

$$q \tan \beta = (1-D) \tan \theta - D \tan \theta_s + \xi (1-D) \sin \theta \left(\frac{1}{\cos \theta_s} - \frac{1}{\cos \theta} \right) + O(2) \quad (3.110)$$

Burada $\delta\varphi$, $\delta\varphi_s$ ve/veya $\delta\chi$ 'in ikinci mertebeden terimleri $q = \cos(\chi_0 - \varphi_0)$, $D = D_{ds} / D_s$ ve $O(2)$ ile ifade edilir. Bu mercek denkleminin yatay bileşenidir. Son denklemde yer değiştirmeler $\xi = 1$ ile dahil edilir ve;

$$q \tan \beta = (1-D) \frac{\sin \theta}{\cos \theta_s} - D \tan \theta_s + O(2) \quad (3.111)$$

Böylece düzlem dışı hareketlerde en düşük mertebede Schwarzschild durumundaki mercek denklemi elde edilmektedir. $\theta_s = \hat{\alpha}_{hor} - \theta$ kullanılır ve ölçeklendirilmiş açısal değişkenler;

$$\beta = \frac{q\beta}{\theta_E}, \theta = \frac{\theta}{\theta_E}, \theta_\bullet = \tan^{-1} \left(\frac{m_\bullet}{d_L} \right), \varepsilon = \frac{\theta_\bullet}{\theta_E} = \frac{\theta_E}{4D} \quad (3.112)$$

Burada açısal ölçekler Einstein halkası yarıçapı ile verilir;

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GMD_{ds}}{c^2 D_d D_s}} = \sqrt{\frac{4m_\bullet D}{D_d}} \quad (3.113)$$

Gözlemlenebilir görüntü konumlarını analiz etmek için ε en uygun genişleme parametresidir. $b = d_L \sin \theta$ iken $\hat{\alpha}_{hor}$, ε 'da genişletilir;

$$\frac{m_\bullet}{b} = \frac{4D\varepsilon^2}{\sin(4D\varepsilon\theta)} = \frac{1}{\theta} \varepsilon + \frac{8D^2\theta}{3} \varepsilon^3 + \frac{224D^4\theta^3}{45} + O(\varepsilon)^7 \quad (3.114)$$

Yatay lens denklemi şu formda bir seri açılımı olarak yazılabilir;

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 \varepsilon + \theta_2 \varepsilon^2 + \theta_3 \varepsilon^3 + O(\varepsilon)^4 \quad (3.115)$$

Ölçeklendirilmiş açısal değişkenleri belirten (3.112) denklemi ile görüntü konumlarını tanımlayan (3.115) denklemi dahil edilerek yarı ekvatorial rejimde yatay mercek denklemi;

$$\begin{aligned} \beta = & \left[\theta_0 - \frac{1}{\theta_0} \right] + \frac{1}{\theta_0^2} \left[s\hat{a} - \frac{15\pi}{16} + (1 + \theta_0^2) \theta_1 \right] \varepsilon \\ & + \frac{1}{24\theta_0^3} \left[12s\hat{a} (5\pi - 4\theta_1) - 24\hat{a}^2 - 384 + 3\theta_1 (15\theta - 8\theta_1) \right. \\ & + 24\theta_0 \theta_2 (1 + \theta_0^2) + 8\theta_0 (48D\theta_0 + 8D^2\theta_0^2 (-2\beta^3 - 7\theta_0 + 2\theta_0^3)) \\ & + 192\theta_0^2 (1 - D) (1 - 2D\theta_0^2) \xi \left. \right] \varepsilon^2 + \frac{1}{768\theta_0^4} \left[128s\hat{a} \{ 384 \right. \\ & + 9\theta_1 (-5\pi + 2\theta_1) + 4\theta_0 (-3\theta_2 + 8\theta_0 (2D(-3 + 2D\theta_0^2) \\ & + 3(1 - D)(-1 + D\theta_0^2) \xi)) \left. \right\} - 768\hat{a}^2 (2\pi - 3\theta_1) + 768s\hat{a}^3 \\ & + 15\pi \left\{ -3(487 + 48\theta_1^2) + 32\theta_0 (3\theta_2 + 8\theta_0 (2D(3 - 2D\theta_0^2) \right. \\ & + 3(-1 + D)(-1 + D\theta_0^2) \xi)) \left. \right\} + 256 \{ 3\theta_1^3 + 3\theta_0^2 (1 + \theta_0^2) \theta_3 \\ & + 2\theta_1 (72 + \theta_0 (-3\theta_2 + 4\theta_0 (D(-6 - 7D\theta_0^2 + 6D\theta_0^4) \\ & + 3(-1 + D)(1 + 2D\theta_0^2) \xi)) \left. \right\} \left. \right] + O(\varepsilon)^4 \end{aligned} \quad (3.116)$$

Dikey bileşen için d_z 'yi yerine koyarak ve küçük açılar $\delta\varphi$, $\delta\varphi_s$ ve $\delta\chi$ 'de Taylor serisi açılarak aşağıdaki ifade elde edilir;

$$\begin{aligned} (\delta\chi)(q \tan \beta) = & (\delta\varphi)(1 - \xi)(1 - D) \tan \theta - (\delta\varphi_s) D \tan \theta_s \\ & + \xi(1 - D) \sin \theta \left\{ \left(\delta\varphi_s \sin \theta_s \tan \theta_s + \left[(\delta\varphi)^2 - (\delta\varphi_s)^2 \sin^2 \theta_s \right]^{1/2} \right) \right\} \\ & + O(2) \end{aligned} \quad (3.117)$$

$(\delta\varphi_s) \sin \theta_s = (\delta\varphi) W(\theta)$ ifadesi ile;

$$\begin{aligned}
(\delta\chi)(q \tan \beta) &= \delta\varphi(1-\xi)(1-D) \tan \theta + \delta\varphi DW(\theta)(\cos \theta_s)^{-1} \\
&+ \xi(1-D) \sin \theta \left\{ \delta\varphi W(\theta) \tan \theta_s + \delta\varphi \left[1 - W(\theta)^2 \right]^{1/2} \right\}
\end{aligned} \tag{3.118}$$

Sonuç olarak, ölçeklenmiş açısal değişkenler dahil edilerek ε 'da genişletilir;

$$\begin{aligned}
&\left(\beta + \frac{16}{3} D^2 \beta^3 \varepsilon^2 + O(\varepsilon)^4 \right) \delta\chi = \\
&\delta\varphi \left\{ \left[\theta_0 - \frac{1}{\theta_0} \right] + \frac{1}{\theta_0^2} \left[2s\hat{a} - \frac{15\pi}{16} + (1 + \theta_0^2) \theta_1 \right] \varepsilon \right. \\
&+ \frac{1}{24\theta_0^3} \left[s\hat{a} (90\pi - 96\theta_1) + 2\hat{a}^2 + 45\pi\theta_1 - 24(16 + \theta_1^2) \right. \\
&+ 8\theta_0 (8D^2\theta_0^3 (-7 + 2\theta_0^2 + 6\xi) \\
&+ 3(\theta_2 + \theta_0^2\theta_2 + 8\theta_0\xi) - 24D\theta_0 (-2 + \xi + 2\theta_0^2\xi)) \left. \right] \varepsilon^2 \\
&+ \frac{1}{768\theta_0^4} \left[\hat{a}V_1 + 72\hat{a}^2 (-95\pi + 96\theta_1) \right. \\
&\left. + 3072s\hat{a}^3 + V_2 \right] \varepsilon^3 + O(\varepsilon)^4 \left. \right\}
\end{aligned} \tag{3.119}$$

ve;

$$\begin{aligned}
V_1 &= 64s \left[960 + 9\theta_1 (-15\pi + 8\theta_1) + 16\theta_0 (-3\theta_2 \right. \\
&\left. + 4\theta_0 (D(-6 + 5D\theta_0^2) - 3(-1 + D)(-1 + D\theta_0^2)\xi)) \right]
\end{aligned}$$

(3.120)

$$\begin{aligned}
V_2 &= 15\pi \left[-3(487 + 48\theta_1) + 32\theta_0 (3\theta_2 + 8\theta_0 (3 - 2D\theta_0^2) \right. \\
&\left. + 3(-1 + D)(-1 + D\theta_0^2)\xi) \right] + 26 \left[3\theta_1^3 + 3\theta_0^2 (1 + \theta_0^2) \theta_3 \right. \\
&+ 2\theta_1 (72 + \theta_0 (-3\theta_2 + 4\theta_0 (D(-6 - 7D\theta_0^2 + 6D\theta_0^4) \\
&\left. + 3(-1 + D)(1 + 2D\theta_0^2)\xi))) \left. \right]
\end{aligned} \tag{3.121}$$

Bu lens denkleminin dikey bileşenidir. Küçük açılar olan $\delta\chi$ ve $\delta\varphi$ arasında bir ilişki saptamak için kullanılabilir. β ile bölününce;

$$\begin{aligned}\delta\chi = \delta\varphi \left\{ 1 + \frac{s\hat{a}}{\theta_0(\theta_0^2 - 1)}\varepsilon + \frac{\hat{a}}{16\theta_0^2(\theta_0^2 - 1)} \left[s(-5\pi \right. \right. \\ \left. \left. + 4\theta_0^2(5\pi - 12\theta_1) + 16\theta_1) + 16\hat{a}(1 - 2\theta_0^2) \right] \varepsilon^2 \right. \\ \left. + \frac{\hat{a}}{768\theta_0^3(\theta_0^2 - 1)^3} \left[-24\hat{a}(\pi(101 - 262\theta_0^2 + 221\theta_0^4) - 64(1 - 3\theta_0^2 + 4\theta_0^4)\theta_1) \right. \right. \\ \left. \left. + 768s\hat{a}^2(1 - 3\theta_0^2 + 3\theta_0^4) + sK \right] \varepsilon^3 + O(\varepsilon)^4 \right\}\end{aligned}\quad (3.122)$$

ve;

$$\begin{aligned}K = 225\pi^2(-1 + 4\theta_0^2) - 480\pi(1 - 3\theta_0^2 + 8\theta_0^4)\theta_1 + 768\theta_0^1 \\ + 256 \left[\theta_0(-3\theta_2 + \theta_0(-8D^2\theta_0^2(-1 + \theta_0^2)(-5 + 6\xi) \right. \\ \left. + 24D(-1 + \theta_0^2)(-2 + \xi + 2\theta_0^2\xi) - 3(16 + 3\theta_1^2 - 8\xi + \theta_0 \right. \\ \left. (-16 - 6\theta_1^2 + 3\theta_0\theta_2 + 8\xi)))) \right]\end{aligned}\quad (3.123)$$

Görüldüğü üzere yarı ekvatorial merceklenme için $\delta\chi \neq \delta\varphi$ 'dir. Böylece $\hat{a}=0$ olduğunda ışığın yörüngesi ekvator düzleminden başka bir düzlemde olamaz ($\delta\chi = \delta\varphi = 0$). Yer değiştirme terimleri yalnız ε 'nın üçüncü mertebesinde görünür (Azami et al., 2011).

3.3.3 Görüntü konumları

Görüntü konumlarını elde etmek amacı ile yatay lens denklemini θ_0 , θ_1 , θ_2 ve θ_3 'ü bulmak amacıyla terim terim çözülmelidir. Sıfırıncı mertebe, Schwarzschild durumundaki zayıf sapma durumundaki mercek denklemine benzerdir;

$$\beta = \theta_0 - \frac{1}{\theta_0} \quad (3.124)$$

ve bu da zayıf sapma durumunda görüntü konumunu verir;

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\beta^2 + 4} + \beta \right) \quad (3.125)$$

Görüntü konumlarını belirten açıların pozitif olması gerektiği için negatif çözüm ihmal edilir. Birinci mertebeden terim (3.115) denkleminde;

$$\theta_1 = \frac{15\pi - 16s\hat{a}}{16(\theta_0^2 + 1)} \quad (3.126)$$

Aynı şekilde ikinci dereceden terim;

$$\begin{aligned} \theta_2 = \frac{1}{24\theta_0(\theta_0^2 + 1)} & \left[64 \left(6 - D(2D + 6(1 - D)\theta_0^2 - D\theta_0^4) \right) \right. \\ & + 24\hat{a}^2 - 12s\hat{a}(5\pi - 4\theta_1) - 3\theta_1(15\pi - 8\theta_1) \\ & \left. - 192\theta_0^2(1 - D)(1 - 2D\theta_0^2)\xi \right] \end{aligned} \quad (3.127)$$

Yer değiştirme yalnız θ_2 'yi etkiler. Kaynak konumu β bakımından görüntülerin pozitif ve negatif eşitliği yazılabilir;

$$\begin{aligned} \theta_0^\pm &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\beta^2 + 4} \pm |\beta| \right) \\ \theta_1^\pm &= \left(1 \pm \frac{|\beta|}{\sqrt{\beta^2 + 4}} \right) \frac{15\pi - 16s^\pm \hat{a}}{32} \end{aligned} \quad (3.128)$$

$s^\pm$ aynı yönde dönen ve ters yönde dönen fotonları belirten işaret parametresine sahip iki görüntüyü belirtir. Aslında $s^- = -s^+$ 'dır. β 'nın fonksiyonu olarak $\theta_2^\pm$ ve $\theta_3^\pm$ terimleri aynı şekilde elde edilir, fakat yazımı çok uzundur.

0, 1 ve 2. görüntü konumlarının $\pm$ bileşenleri arasındaki ilişki;

$$\theta_0^+ - \theta_0^- = |\beta| \quad (3.129)$$

$$\theta_0^+ \theta_0^- = 1 \quad (3.130)$$

$$\theta_1^+ + \theta_1^- = \frac{15\pi}{16} + \frac{s^+ \hat{a} |\beta|}{\sqrt{\beta^2 + 4}} \quad (3.131)$$

$$\begin{aligned} \theta_2^+ - \theta_2^- = & -2\hat{a}\sqrt{4 + \beta^2} + \frac{\hat{a}|\beta|(16\hat{a} + 15\pi s^+)\sqrt{4 + \beta^2}}{8(4 + \beta^2)^{3/2}} \\ & + \frac{-30\pi s^+ \hat{a} + \hat{a}(48\hat{a} + 15\pi s^+)(4 + \beta^2)}{8(4 + \beta^2)^{3/2}} + \frac{|\beta|I}{256} \end{aligned} \quad (3.132)$$

ve;

$$I = -4096 + 225\pi^2 + 2048D^2 + 160\pi s^+ \hat{a} - 512\hat{a}^2 + 4096D(1 - D)\xi \quad (3.133)$$

olmaktadır (Azami et al., 2011).

3.3.4 Görüntülerin büyütülmesi

Genel büyütülme denklemi;

$$\mu = \left[\frac{\sin \beta}{\sin \theta} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) \right]^{-1} \quad (3.134)$$

olmak üzere dönmeyen kara delik durumunda genel büyütme denklemi olarak verilmişti. Yarı ekvatorial merceklenme için $\partial B / \partial \varphi = 0$ 'dır ve $\partial \delta / \partial \varphi$ için (3.122) denklemi kullanılır. Sonuç aşağıdaki seri açılımıdır;

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 \varepsilon + \mu_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon)^3 \quad (3.135)$$

ve;

$$\mu_0 = \frac{\theta_0^4}{\theta_0^4 - 1} \quad (3.136)$$

$$\mu_1 = -\frac{\left[15\pi(\theta_0^2 - 1)^2 + 64s\hat{a}\theta_0^2\right]\theta_0^3}{16(\theta_0^2 - 1)^2(\theta_0^2 + 1)^3} \quad (3.137)$$

$$\begin{aligned} \mu_2 = & \frac{\theta_0^2}{384(\theta_0^2 - 1)^3(\theta_0^2 + 1)^5} \left[768\hat{a}\theta_0^4(5 - 2\theta_0^2 + 5\theta_0^4) \right. \\ & + 120\pi s^+ \hat{a}(1 + 16\theta_0^2 - 34\theta_0^4 + 44\theta_0^6 - 39\theta_0^8 + 12\theta_0^{10}) \\ & \theta_0^2(\theta_0^2 - 1)^2(-12288D(\theta_0 + \theta_0^3)^2 + 1024D^2(1 + \theta_0^2) \\ & (\theta_0^4 + 16\theta_0^2 + 1) - 3\theta_0^2(4096 + \theta_0^2(-675\pi^2 + 4096(\theta_0^2 + 2)))) \\ & \left. - 6144(D - 1)(\theta_0 - \theta_0^5)^2(-1 + 2D\theta_0^2(2 + \theta_0^2))\xi \right] \end{aligned} \quad (3.138)$$

Yer değiştirme terimleri ε 'nin ikinci mertebesinde görünmeye başlamaktadır. Kaynak konumu β yönünden büyötmelerin pozitif ve negatif eşitlikleri;

$$\mu_0^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{\beta^2 + 2}{2|\beta|\sqrt{\beta^2 + 4}} \quad (3.139)$$

$$\mu_1^\pm = -\frac{15\pi\beta^2 + 64s^\pm\hat{a}}{16\beta^2(\beta^2 + 4)^{3/2}} \quad (3.140)$$

$$\begin{aligned}
\mu_2^\pm = & \pm \frac{2025\pi^2 - 1024(\beta^2 + 4)(12 + D(12 - D(\beta^2 + 18)D))}{384|\beta|(\beta^2 + 4)^{5/2}} \\
& + \frac{5\pi s^\pm \hat{a}}{32\beta^2} \left[-1 \pm \frac{|\beta|(\beta^4 + 34\beta^2 + 48)}{(\beta^2 + 4)^{5/2}} \right] \pm 2\hat{a}^2 \frac{5\beta^2 + 8}{|\beta|^3(\beta^2 + 4)^{5/2}} \\
& + 16\xi(1 - D) \left[D \pm \frac{D(\beta^4 + 6\beta^2 + 6) - 1}{|\beta|(\beta^2 + 4)^{3/2}} \right]
\end{aligned} \tag{3.141}$$

ve;

$$\mu_0^+ + \mu_0^- = 1 \tag{3.142}$$

$$\mu_0^+ - \mu_0^- = \frac{\beta^2 + 2}{2|\beta|\sqrt{\beta^2 + 4}} \tag{3.143}$$

$$\mu_1^+ - \mu_1^- = -\frac{8s^+ \hat{a}}{\beta^2(\beta^2 + 4)^{3/2}} \tag{3.144}$$

$$\mu_2^+ + \mu_2^- = \frac{5\pi s^+ \hat{a}}{16} \frac{|\beta|(\beta^4 + 34\beta^2 + 48)}{\beta^2(\beta^2 + 4)^{5/2}} + 32\xi(1 - D) \tag{3.145}$$

$$\begin{aligned}
\mu_2^+ - \mu_2^- = & -\frac{5\pi s^+ \hat{a}}{16\beta^2} + 4\hat{a}^2 \frac{5\beta^2 + 8}{|\beta|^3(\beta^2 + 4)^{5/2}} \\
& + 32\xi(1 - D) \left[\frac{D(\beta^4 + 6\beta^2 + 6) - 1}{|\beta|(\beta^2 + 4)^{3/2}} \right] \\
& + \frac{2025\pi^2 - 1024(\beta^2 + 4)(12 + D(12 - (\beta^2 + 18)D))}{192|\beta|(\beta^2 + 4)^{5/2}}
\end{aligned} \tag{3.146}$$

olarak büyütmeler hesaplanmaktadır (Azami et al., 2011).

3.3.5 Zaman gecikmesi

R_{src} ve R_{obs} kaynak ve gözlemcinin radyal koordinatları olsun. Geometriden, uzaktaki gözlemcinin Boyer-Lindquist koordinatlarında kaldığı varsayımı yapıldığında;

$$R_{obs} = D_d \quad (3.147)$$

$$R_{src} = \left(D_{ds}^2 + D_s^2 \tan^2 \beta \right)^{1/2} \quad (3.148)$$

Kaynak ve gözlemci asimptotik olarak düz uzay zamanda bulunduğundan, radyal uzaklıklar açısal çap uzaklıkları ile hemen hemen aynıdır. Merceklemeye yapan cismin yokluğunda uzay-zaman düz olacak ve foton kaynaktan gözlemciye doğru, doğrusal bir $d_s / \cos \beta$ yolu boyunca hareket edecektir (Azami et al., 2011).

Zaman gecikmesi merceklemeye yapan cismin olduğu ve olmadığı durumda ışığın seyahat süreleri arasındaki farktır ve aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$c\tau = T(R_{src}) + T(R_{obs}) - \frac{D_s}{\cos \beta} \quad (3.149)$$

ile,

$$T(R) = \int_{r_0}^R \left| \frac{dt}{dr} \right| dr = \int_{r_0}^R \left| \frac{\dot{t}}{\dot{r}} \right| dr \quad (3.150)$$

ve,

$$T(R) = \int_{r_0/R}^1 \frac{(G - 2F^2 h)^{1/2} (1 + \hat{a}^2 h^2 x^2) - 2s\hat{a}Fh^2 x^3}{x^2 (1 - 2hx + \hat{a}^2 h^2 x^2) [G(1 - x^2) - 2F^2 h(1 - x^3)]^{1/2}} dx \quad (3.151)$$

İntegralin içindeki ifade bir Taylor serisi olarak h 'de genişletilir ve terim terim integral alınır. Sonuç, katsayıları $\omega = r_0 / r$ 'nin fonksiyonu olan h 'daki bir seridir. Seri açılımındaki ilk üç terim;

$$\begin{aligned}
 T(R) = & \sqrt{R^2 - r_0^2} + hr_0 \left[\frac{F^2 \sqrt{1 - \omega^2}}{G(1 + \omega)} + 2 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \omega^2}}{\omega} \right) \right] \\
 & + h^2 r_0 \left[\frac{3F^4 + 4F^2 G + 8G^2}{2G^2} \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \omega \right) - 2s\hat{a}FG^{-1/2} \sqrt{1 - \omega^2} \right. \\
 & \left. - \frac{F^2 (4G + (F^2 + 4G)\omega \sqrt{1 - \omega^2})}{2G^2 (1 + \omega)^2} \right] + O(h)^3
 \end{aligned} \quad (3.152)$$

ε parametresinin ikinci mertebesinde Taylor serileri alınır ve;

$$\begin{aligned}
 \frac{\tau}{\tau_E} = & \frac{1}{2} \left[1 + \beta^2 - \theta_0^2 - \ln \left(\frac{D_s \theta_0^2 \theta_E^2}{4D_{ds}} \right) \right] + \frac{15\pi - 16s\hat{a}}{16\theta_0} \varepsilon \\
 & + \frac{T}{1536\theta_0^2 (\theta_0^2 + 1)} \varepsilon^2 + O(\varepsilon)^3
 \end{aligned} \quad (3.153)$$

ve T;

$$\begin{aligned}
 T = & -96\pi s\hat{a}(-7 + \theta_0^2 + \theta_0^4) + 768\hat{a}^2(2\theta_0^2 + 3\theta_0^4 + \theta_0^6) \\
 & - (1 + \theta_0^2) \left\{ 675\pi^2 + 3072\theta_0^2(\theta_0^2 + 1)(2 + \beta^4 + 4\theta_0 - 2\beta^2(\theta_0^2 + 1) - 4\xi) \right. \\
 & 3072D\theta_0^2(1 + \theta_0^2)(-8 + \beta^4 + 2\beta^2\theta_0^2 - 3\theta_0^4 + 4\xi + 8\theta_0^2\xi) \\
 & \left. + 1024D^2(1 + \theta_0^2)(-8 + (24 - 5\beta^4)\theta_0^2 + 5\theta_0^6 - 24\theta_0^4\xi) \right\}
 \end{aligned} \quad (3.154)$$

merceklenme zaman ölçeği;

$$T_E \equiv \frac{D_d D_s}{c D_{ds}} \theta_E^2 = 4 \frac{m_\bullet}{c} \quad (3.155)$$

Zıt yönde hareket eden fotonlar, aynı yönde hareket eden fotonlardan daha büyük bir zaman gecikmesine neden olur. Diğer merceklemeye etkilerinde olduğu gibi zaman gecikmesindeki yer değiştirme terimleri ε 'da ikinci mertebeye görünmeye başlar.

İki görüntü arasındaki diferansiyel zaman gecikmesi $\Delta\tau = \tau^- - \tau^+$;

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\tau}{\tau_E} = & \left[\frac{1}{2}|\beta|\sqrt{\beta^2+4} + \ln\left(\frac{\sqrt{\beta^2+4}+|\beta|}{\sqrt{\beta^2-4}-|\beta|}\right) \right] \\ & + \left[\frac{15\pi}{16}|\beta| + s^+ \hat{a} \sqrt{\beta^2+4} \right] \varepsilon \\ & + \frac{D}{1536(\beta^2+4)} \varepsilon + O(\varepsilon)^3 \end{aligned} \quad (3.156)$$

ve D;

$$\begin{aligned} D = & 96\pi s^+ \hat{a} (4 + \beta^2) (7\beta^2 - 1) \\ & - 768\hat{a}^2 |\beta| \sqrt{4 + \beta^2} \left\{ -675\pi^2 (3 + \beta^2) + 3072(-8 + 2\beta^2 + \beta^4) \right. \\ & \left. + 1024D^2 (4 + \beta^2) (18 + 5\beta^2 - 24\xi) - 3072D(4 + \beta^2) (6 + \beta^2 - 8\xi) \right\} \end{aligned} \quad (3.157)$$

olarak belirtilir (Azami et al., 2011).

3.4 Kerr Kara Deliğinin Gölgesi

Kara deliğin gölgesi, parlak bir arka plan önünde bulunan bir kara deliğin görüntüde oluşturduğu karanlık bir bölgedir. Gölge şekli ve gölge sınırı, yalnız geometriye bağlıdır ve Schwarzschild kara deliği çekimsel merceklemesi bölümünde değindiğimiz üzere, etki parametresine göre foton kara deliğe çekilebilir, yörüngeye oturabilir veya belirli bir sapma ile yolunda ilerleyebilir. Kara deliğin gölgesini çalışmak, spin parametresinin belirlenmesi gibi belirli alanlarda fayda sağlayacaktır (Li et al., 2014).

Kerr kara deliği çekimsel merceklemesini aktardığımız bölümde hareket denklemleri ve hareket sabitlerini yazmıştık. Bunlara yeni iki parametre olan ξ ve η eklendiğinde;

$$\xi = \frac{l}{E} \quad (3.158)$$

$$\eta = \frac{Q}{E^2} \quad (3.159)$$

Null jeodezikler kullanılarak, gözlemci için eğim açısı θ_0 olmak üzere gölge şeklini tanımlayan koordinatlar;

$$\alpha = -\xi \csc \theta_0 \quad (3.160)$$

$$\beta = \pm \sqrt{\eta + a^2 \cos^2 \theta_0 - \xi^2 \cot^2 \theta_0} \quad (3.161)$$

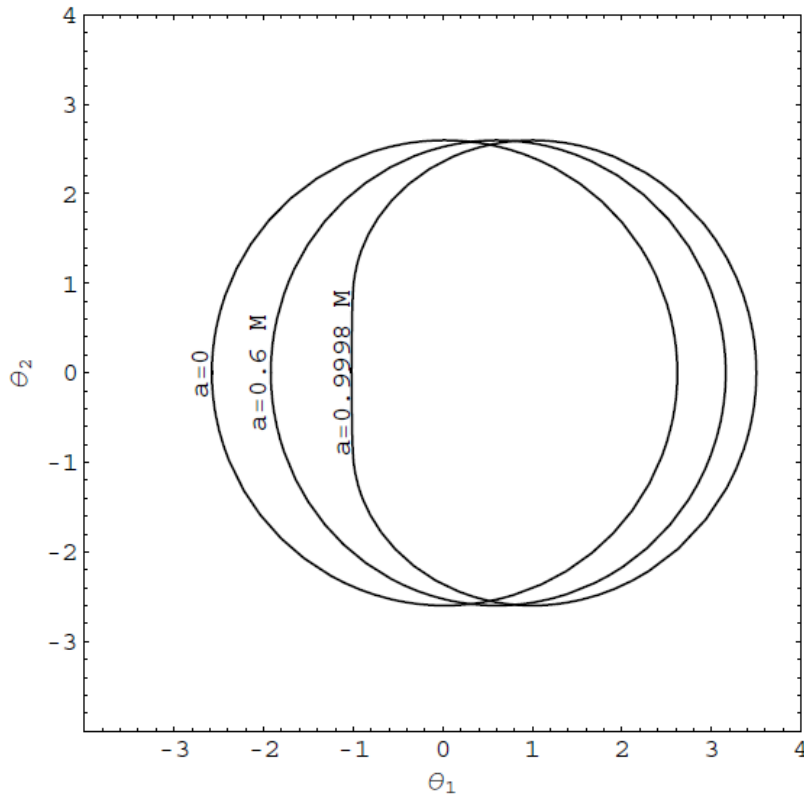
ξ ve η eşitlikleri;

$$\xi = \frac{(3M - r_0)r_0^2 - a^2(M + r_0)}{a(r_0 - M)} \quad (3.162)$$

$$\eta = \frac{r_0^3 \left(4a^2 M - r_0 (3M - r_0)^2 \right)}{a^2 (r_0 - M)^2} \quad (3.163)$$

r_0 kararsız foton yörüngesi yarıçapıdır. (Wei et al., 2019)

Kara deliğin gölge şekli dönme durumuna göre değişmektedir. Dönmeyen bir kara delik durumunda gölge tamamen daireseldir. Spin parametresinin artması ile dairesel şekilde bozulma görülür. Spin parametresine göre gölgenin şeklindeki bozulma Şekil 3.3'te verilmektedir.

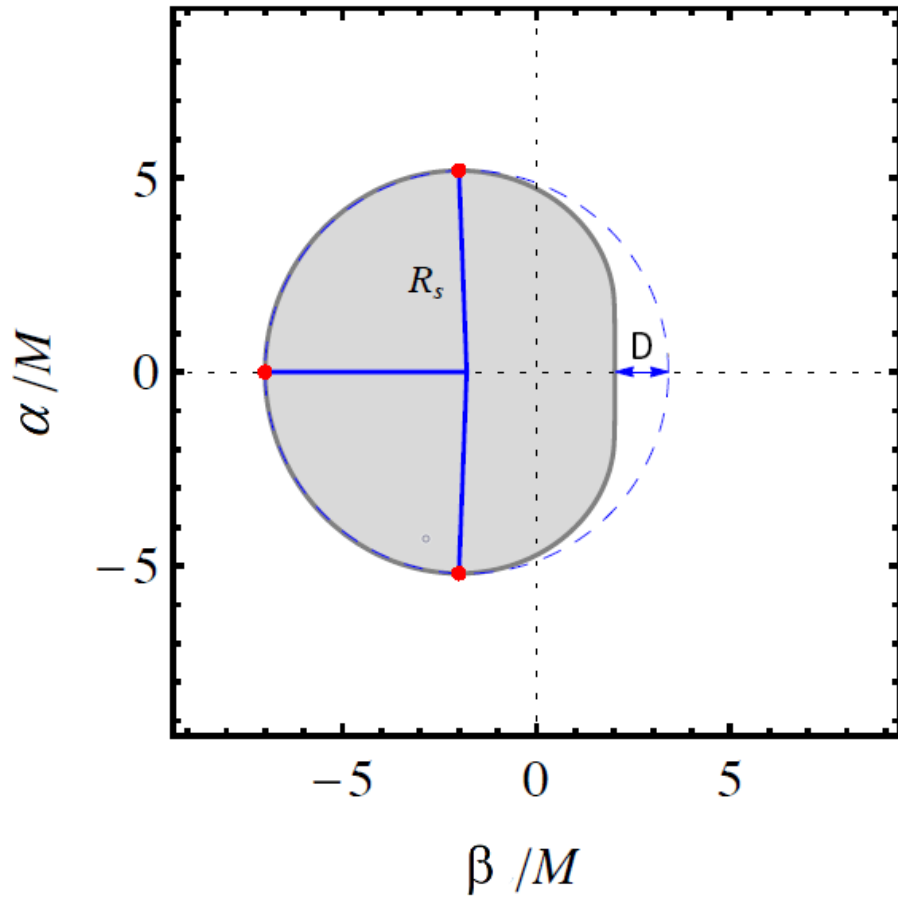


Şekil 3.2 Kara delik spininin farklı değerleri için ekvator gözlemcisi tarafından görülen gölge sınırı. θ_1, θ_2 $2M/r_0$ biriminde gözlemci gökyüzündeki açısal koordinatlarıdır. Kara delik merkezdedir ve dönme eksen pozitif θ_2 yönündedir (Bozza. V., 2010).

Gölge konumunu belirleyen açılar ilişkilendirildiğinde;

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{a^2 (M + r_0)^2 + 2(r_0^2 - 3M^2)r_0^2}{(M - r_0)^2} \quad (3.164)$$

olmaktadır. Denklemin sağ kısmına kütle, spin parametresi ve kararsız foton yörüngesi yarıçapı eklendiğinde bir değer alır ve dolayısıyla denklem $\alpha^2 + \beta^2 = (\text{değer})^2$ formuna dönüşür. Bu da çember denklemi olarak yorumlanabilir. Buradaki değer gölge yarıçapıdır. Kara deliğin spini arttığında Şekil (3.3)'te görüldüğü üzere yarıçapta D kadar bir azalma olacaktır.



Şekil 3.3 Kerr kara deliğinin gölgesi. R_s gölge dairesel olduğu durumda gölge yarıçapını ifade eden terimdir. Spin parametresi dahil edildiğinde gölge biçimi daireselden sapma gösterir. Bu durumda daireselden en fazla sapmanın izlendiği noktada yarıçap D karad içerdedir (Li et al., 2014).

Daireden bozulmayı belirten deformasyon parametresi;

$$\delta = \frac{D}{R_s} \quad (3.165)$$

D değerleri spin parametresine bağlı değişmektedir. Bu değişimi ifade eden δ parametresi Tablo (3.1)'de gösterilmektedir.

Tablo 3.1 Kara delik gölgesinde spin parametresi nedeniyle oluşan bozulmayı belirleyen deformasyon parametresi (Kumar et al, 2018)

Spin parametresi (a)	δ
0	1
0.1	0.999443
0.2	0.997748
0.3	0.994847
0.4	0.990607
0.5	0.984808
0.6	0.977083
0.7	0.966783
0.8	0.952608
0.9	0.931145
0.998	0.876375

3.5 Kerr Kara Deliğinin Gölge Hesaplamaları

Kara deliğin gölgesini hesaplarırken Kerr kara deliği için bazı bölgeleri tanımlamak gereklidir. Örnek olarak 10 Nisan 2019’da M87 gökadasının merkezinde bulunan kara deliğin gözleminden bu hesaplamaları yapabiliriz. Bu kara deliğin kütlesi ve uzaklığı aşağıdaki gibidir;

$$M = 6.5 \times 10^9 M_{\odot} = 9.6 \times 10^9 \text{ km}$$

$$D = 16.8 \text{ Mpc} = 5.19 \times 10^{20} \text{ km}$$

Bu kara deliğin olay ufku $a = 0.94$ olarak alındığında;

$$r_{EH} = M + \sqrt{M^2 - a^2}$$

$$r_{EH} = 1.92 \times 10^{10} km = 128.87 AB$$

olarak bulunur. Kerr kara deliğinin kararlı dairesel foton yörüngesi ifadesinden yararlanarak bu foton yörüngesinin yarıçapı (Teo, 2003);

$$r_{1,2} = 2M \left[1 + \cos \left(\frac{2}{3} \arccos \left(\pm \frac{|a|}{M} \right) \right) \right]$$

$$r_{1,2} = 3.84 \times 10^{10} km = 257.73 AB$$

olarak hesaplarız. En içteki stabil foton yörüngesi yarıçapı ISCO (Pugliese, 2011);

$$r_{ISCO}^{\pm} = M \left[3 + Z_2 \pm \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)} \right]$$

$$Z_1 = 1 + \left(1 - \frac{a^2}{M^2} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \frac{a}{M} \right)^{1/3} + \left(1 - \frac{a}{M} \right)^{1/3} \right]$$

$$Z_2 = \sqrt{3 \frac{a^2}{M^2} + Z_1^2}$$

$$r_{ISCO} = 5.76 \times 10^{10} km = 386.7 AB$$

Diğer bir yörünge kararsız dairesel foton yörüngesi (Wei et al., 2019);

$$r_0 = M + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{3M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{3}M(M^2 - a^2 \cos^2 \theta)}{(3M^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} \right) \right)$$

$$r_0 = 2.88 \times 10^{10} km = 192.5 AB$$

olur. Foton halkası;

$$r_{ph} = \sqrt{27} \frac{M}{D} = 19.82 \mu as$$

olarak hesaplanır. Kara deliğin gölge yarıçapı ve konumlarını hesaplarırken aşağıdaki formüllerden yararlanılır (Li et al., 2014);

$$\xi = \frac{a^2 (M + r_0) + r_0^2 (r_0 - 3M)}{a (M - r_0)}$$

$$\eta = \frac{r_0^3 (4a^2 M - r_0 (r_0 - 3M)^2)}{a^2 (M - r_0)^2}$$

$$\alpha = -\frac{\xi}{\sin \theta}$$

$$\beta = \sqrt{\eta + a^2 \cos^2 \theta - \xi^2 \cot^2 \theta}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{a^2 (M + r_0)^2 + 2(r_0^2 - 3M^2)r_0^2}{(M - r_0)^2}$$

Buradan kara deliğin gölge yarıçapı;

$$\alpha^2 + \beta^2 = (6.11 \times 10^{10})^2$$

olarak bulunur. Kara deliğin spin parametresini örnek olarak 0.9 aldığımızda deforme olmuş bölgenin gölge merkezine olan uzaklığını bulmak amacı ile ilk olarak tablo (3.1)'den deformasyon parametresini alıyoruz. 0.9 spin parametresi için deformasyon parametresi 0.931145 ve D uzaklığı;

$$\delta = \frac{D}{R_s}$$

$$D = 1.16 \times 10^{10} \text{ km}$$

Gölgenin deforme olduğu bölgedeki merkeze olan gölge sınırı uzaklığı;

$$R_d = 3.83 \times 10^{10} \text{ km}$$

olmaktadır. Bu örnek hesaplamalarımızı kütlesi ve uzaklığı tahmin edilen tüm kara delikler için uygulayarak bir tablo oluşturmamız mümkündür.

Tablo 3.2 Bilinen çok büyük kütleli 63 kara deliğin foton yörüngeleri ve belirli bölgeleri. R_s kara deliğin gölge yarıçapı, R_D dönme nedeniyle oluşan, gölgedeki eğri bölgenin gölge merkezine uzaklığıdır.

SMBH	Olay Ufku (AB)	Kararlı + (AB)	Kararlı - (AB)	Kararsız (AB)	ISCO	R_s (AB)	R_D (AB)	r_{ph} (AB)
NGC 4945	0.020	0.055	0.022	0.042	0.084	0.072	0.055	0.073
NGC 221(M32)	0.036	0.097	0.039	0.074	0.149	0.128	0.098	0.129
NGC 3079	0.036	0.097	0.039	0.074	0.149	0.128	0.098	0.129
IC2560	0.041	0.112	0.045	0.086	0.173	0.149	0.114	0.149
NGC 7457	0.054	0.147	0.059	0.113	0.227	0.195	0.150	0.196
Samanyolu	0.058	0.159	0.063	0.121	0.245	0.210	0.161	0.211
NGC 1068	0.080	0.217	0.086	0.166	0.334	0.287	0.220	0.288
NGC 4742	0.199	0.543	0.216	0.415	0.835	0.718	0.551	0.721
NGC 2549	0.199	0.543	0.216	0.415	0.835	0.718	0.551	0.721
NGC 7332	0.215	0.585	0.233	0.447	0.901	0.775	0.594	0.778
NGC 3384	0.228	0.620	0.247	0.474	0.954	0.821	0.630	0.824
NGC 3227	0.285	0.775	0.309	0.592	1.193	1.026	0.787	1.030
NGC 3393	0.441	1.202	0.479	0.918	1.848	1.590	1.220	1.597
NGC 4151	0.455	1.240	0.494	0.948	1.907	1.642	1.259	1.648
NGC 4258	0.566	1.543	0.615	1.179	2.372	2.042	1.566	2.050
NGC 2778	0.584	1.589	0.633	1.214	2.443	2.103	1.613	2.112
NGC 2787	0.584	1.589	0.633	1.214	2.443	2.103	1.613	2.112
NGC 1023	0.622	1.694	0.675	1.294	2.604	2.242	1.720	2.251
NGC 5128(cen A)	0.712	1.938	0.772	1.481	2.979	2.565	1.967	2.575
NGC 4564	0.840	2.287	0.911	1.748	3.515	3.027	2.322	3.039
NGC 3031(M31)	0.962	2.620	1.044	2.002	4.027	3.468	2.660	3.482
NGC 4459	0.996	2.713	1.081	2.073	4.170	3.591	2.754	3.606
NGC 4596	1.110	3.023	1.205	2.310	4.647	4.002	3.069	4.018
NGC 821	1.210	3.295	1.313	2.518	5.063	4.361	3.345	4.378
NGC 3377	1.566	4.263	1.699	3.258	6.552	5.643	4.328	5.666
NGC 3379	1.708	4.651	1.853	3.554	7.147	6.156	4.722	6.181
NGC 4473	1.708	4.651	1.853	3.554	7.147	6.156	4.722	6.181
NGC 3607	1.708	4.651	1.853	3.554	7.147	6.156	4.722	6.181
NGC 0224(M31)	2.007	5.465	2.177	4.176	8.397	7.234	5.548	7.263
NGC 1316	2.277	6.201	2.471	4.739	9.528	8.208	6.296	8.241
NGC 2974	2.420	6.589	2.625	5.035	10.124	8.721	6.689	8.756
NGC 4697	2.420	6.589	2.625	5.035	10.124	8.721	6.689	8.756
NGC 5576	2.562	6.977	2.780	5.331	10.719	9.234	7.083	9.271

Tablo 3.2 devam...

SMBH	Olay Ufku (AB)	Kararlı + (AB)	Kararlı - (AB)	Kararsız (AB)	ISCO	R_s (AB)	R_D (AB)	r_{ph} (AB)
NGC 3608	2.989	8.139	3.243	6.220	12.505	10.773	8.263	10.817
NGC 3245	2.989	8.139	3.243	6.220	12.505	10.773	8.263	10.817
NGC 4026	2.989	8.139	3.243	6.220	12.505	10.773	8.263	10.817
NGC 3414	3.558	9.690	3.861	7.405	14.885	12.825	9.837	12.877
NGC 5845	3.701	10.077	4.015	7.701	15.481	13.338	10.231	13.392
NGC 3585	4.839	13.178	5.250	10.070	20.242	17.443	13.378	17.513
NGC 7052	5.665	15.426	6.146	117.884	23.694	172.174	132.057	20.500
NGC 4552	7.117	19.379	7.721	14.809	29.764	25.651	19.674	25.754
NGC 4261	7.401	20.155	8.030	15.402	30.954	26.677	20.461	26.784
NGC 4486B	8.540	23.255	9.266	17.771	35.715	30.781	23.609	30.905
NGC 4350	8.540	23.255	9.266	17.771	35.715	30.781	23.609	30.905
NGC 6251	8.825	24.030	9.574	18.364	36.905	31.807	24.396	31.935
NGC 4594	9.195	25.038	9.976	19.134	38.453	33.141	25.419	33.274
NGC 5813	10.106	27.519	10.964	21.029	42.261	36.424	27.937	36.571
NGC 5077	10.248	27.906	11.119	21.326	42.856	36.937	28.331	37.086
NGC 3115	13.237	36.046	14.362	27.546	55.352	47.710	36.594	47.903
NGC 4374(M84)	14.234	38.759	15.443	29.619	59.518	51.302	39.348	51.508
NGC 5252	14.234	38.759	15.443	29.618	59.518	51.300	39.347	51.508
NGC 5846	15.657	42.635	16.987	32.580	65.468	56.430	43.282	56.659
NGC 1399	17.080	46.511	18.531	35.543	71.418	61.562	47.218	61.810
IC4296	18.504	50.387	20.075	38.505	77.368	66.692	51.153	66.961
NGC 4649	28.467	77.518	30.885	59.238	119.018	102.603	78.697	103.016
IC 1589	35.584	96.897	38.607	74.047	148.767	128.254	98.371	128.770
IC1459	35.584	96.897	38.607	74.047	148.767	128.254	98.371	128.770
Cygnus A	39.142	106.587	42.467	74.047	163.641	127.720	97.961	141.647
NGC 4486(M87)	92.519	251.933	100.377	192.523	386.741	333.460	255.764	334.803
P49940	55.511	151.160	60.226	115.514	232.060	200.076	153.458	200.882

Tablo 3.3 Yıldız kütleli kara deliklerin belirli bölgelerinin yarıçaplarıdır.

Yıldız Kütleli BH	Olay Ufku (km)	Kararlı+ (km)	Kararlı- (km)	Kararsız (km)	ISCO (km)	R_s (km)	R_d (km)	r_{ph} (km)
Cygnus X-1	31.81	86.63	34.52	66.45	163.84	115.11	88.29	115.13
Cygnus X-3	23.33	63.53	25.31	48.72	121.92	84.41	64.74	84.43
GRS1915+105	26.30	71.61	28.53	54.93	136.66	95.15	72.98	95.17
GS2000+25	15.91	43.31	17.26	33.20	84.60	57.54	44.13	57.56
M33 X7	148.46	404.27	161.07	310.17	714.68	537.23	412.05	537.25

4. ÇİFT KARA DELİKLERDE ÇEKİMSEL MERCEKLEME

Genel görelilikte iki cisim problemi ekstrem bir şekilde zordur. Bu esas olarak Einstein denklemlerinin ele alınması zor olan karmaşık lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin olmasının bir sonucudur. Çift kara delikleri tasvir eden Einstein denklemlerine kesin çözümler bulunmamaktadır. Bununla birlikte metriği yazmak amacıyla bazı çalışmalar bulunmaktadır. Ciafre et al. (2018) çalışmasında iki ekstrem Kerr kara deliğinin yakın ufuk bölgesini tanımlamışlardır. Bu çalışma süpersimetrik olmayan asimptotik olarak düz olan iki yüksüz ekstrem kara deliğin yakın ufuk geometrisi için ilk örnektir. Kara delikler ters yönde dönmekte ve çözüm kütleyle bağlıdır. Kara delikler arasındaki uzaklık sabittir fakat cisimlerin bir cisme çöktükleri sıfır uzaklık sınırı vardır. Bu sınırlama geometrisi yakın ufuk ekstrem Kerr kara deliğine (*Near Horizon extreme Kerr black hole-NHEK*) karşılık gelmektedir. Bu çalışmada iki ekstrem Kerr kara deliği kolaylık olması için Weyl koordinatlarında yazılmıştır. Çalışmaya göre iki olay ufku ve konik tekillik mevcuttur (Ciafre et al, 2018).

Manko et al. (2008) çalışmasında iki eşit kütleli kara delik metriği analitik formda elde edilmiştir. Yazılan metrik 3 keyfi parametre içerir; bunlar Komar kütlesi M (Komar, 1959), Komar kütle başına açısal momentumu a (Komar, 1959) ve ufukların merkezleri arasındaki R koordinat uzunluğudur. Ekstrem kara delik sınırında, metrik Kinnersley-Chitre ailesinin özel bir üyesi olmaktadır (Manko et al., 2008). Alvi (2000) çalışmasında iki birbirinden uzak dönmeyen kara deliği incelemiştir. Çift kara deliklerdeki 4 bölge için metrik ayrı ayrı yazılmıştır. Bu bölgeler yakın bölge (*near zone*), ışıma bölgesi (*radiation zone*) ve çakışan (*overlap zones*) iki bölgedir. Güçlü gravitasyonel bölgelerin dışında fakat yakın bölge içinde metrik yaklaşık olarak post-Newtonian genişlemesi tarafından oluşturulabilir. Işıma katmanının daha dışında gravitasyonel dalga sağlayan bölge metriğin post-Minkowskian genişlemesi tarafından tanımlanır. Bu uzay zamanda çakışan katmanlar mevcuttur. post Newtonian yakın katman metriği ve ışıyım katmanı metriği bu çakışan bölgelerde eşleşir (Alvi, 2000).

Majumdar Papapetrou metriği belki de en basit çoklu kara delik içeren metrik çözümü olabilir. Bu metrik Majumdar (1947) ve Papapetrou (1947) tarafından bağımsız olarak bulunmuş olan çoklu kara delik içeren bir sistemin uzay zamanını göstermektedir. Metrik statik, dönme simetrisi ve yansıma simetrisine sahiptir.

Foton küresi, çekimsel merceklemeye için önemli bir rol oynar. Simetri düzlemindeki foton kürelerinin sayısının iki kara delik arasındaki mesafeye bağlı olduğu gösterilmiştir (Wunsch et al., 2013). Eğer iki kara delik arasındaki uzaklık azsa biri kararlı diğeri kararsız iki foton küresi ortaya çıkacaktır. Uzaklık arttıkça iki foton küresi birbirine yaklaşır, birleşir ve kaybolur. Böylece uzaklık, belirli kritik sınır değerden daha büyük olduğunda ekvator düzleminde foton küreleri yoktur. Kostikler belirli bir kaynak konumunda iki görüntünün birbiri ile çakıştığı durumda oluşan elmas şeklindeki yapılar olmak üzere, relativistik görüntülerin ve kostiklerin özellikleri iki foton kürenin var olup olmadığına bağlı olarak değişir.

Dış kararsız foton kürenin üzerindeki bölgeden geri dönen fotonların oluşturduğu görüntülerin yapısı Schwarzschild kara deliği örneğindeki gibidir. Tüm görüntüler merceğe göre belirli bir kritik açısal yarıçapın ötesindedir. Bu kritik yarıçapa yakın bir yerde birbirine bağlı sonsuz sayıda görüntü mevcuttur. Schwarzschild karadeliği olması durumunda kritik yarıçapın altında hiçbir görüntü bulunmayan karanlık bir bölge vardır; bu tek kararsız foton küresine giren ışığın kara deliğe girmesi ve asla geri dönmemesine bağlıdır. Bu durum ikinci kararlı iç foton kürenin varlığında yani "di-hole" durumunda büyük ölçüde farklıdır. Etkin potansiyel tekrar artar ve dış foton küreye giren fotonlar artık geri dönebilir. Bu kritik yarıçap içinde yer alan yeni sonsuz relativistik görüntülerin oluşturulmasına yol açar. Tek bir kara delik durumunda karanlık olan bölge iki foton kürenin varlığında karanlık değildir. Yine görüntülerin çoğu kritik yarıçapa yakın bir yerde yoğunlaşır ve birkaç ayrı görüntü merceğe yakındır. Foton küresinin yokluğunda sınırlı sayıda relativistik görüntü oluşur. Bu durumda radyal kostik mevcuttur (Patil et al., 2017).

4.1 Majumdar-Papapetrou DiHole Metriği ve Foton Küreleri

Majumdar Papapetrou metriğinde uzay zaman statik ve asimptotik olarak düzdür. Di hole metriği;

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{U^2} + U^2 (d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2) \quad (4.1)$$

$$U(\rho, z) = 1 + \frac{M}{\sqrt{\rho^2 + (z-a)^2}} + \frac{M}{\sqrt{\rho^2 + (z+a)^2}}$$

Her bir kara delik M kütlesine sahiptir. Kara delikler z ekseninde $z=+a$ ve $z=-a$ üzerinde konumlanmışlardır. Burada dönme simetrisi vardır ve simetri düzlemi $z=0$ iki kara delik arasında yer alır. Bu koordinatlarda kara delikler nokta olarak görünür. V ışığın dört hızı olsun. Dört hızın sıfır olmayan bileşenleri;

$$\begin{aligned} V^t &= \frac{U^2}{b}, \\ V^\phi &= \pm \frac{1}{U^2 \rho^2} \\ V^\rho &= \pm \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{U^4 \rho^2}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

b etki parametresi, artı ve eksi işaretleri saat yönü ve saat yönünün tersi yönde dönen fotonlar için olmak üzere;

$$U(\rho) = 1 + \frac{2M}{\sqrt{\rho^2 + 1}} \quad (4.2)$$

M kara delikler arasındaki uzaklık ve kütle oranının iki katıdır. Işığın radyal hareketini veren denklem;

$$V^{\rho^2} + V_{\text{eff}}(\rho) = \frac{1}{b^2}; V_{\text{eff}}(\rho) = \frac{1}{U^4 \rho^2} \quad (4.3)$$

V_{eff} radyal hareket için etkin potansiyeldir. Dairesel foton yörüngesinin konumu, başka bir deyişle; $dV_{\text{eff}}/d\rho = 0$ denklem çözümü tarafından elde edilebilen foton küresi aşağıdaki gibidir;

$$(\rho^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = 2M(\rho^2 - 1) \quad (4.4)$$

$\eta^2 = \rho^2 + 1$ ile bu denklem kübik forma dönüşebilmektedir;

$$\eta^3 - 2M\eta^2 + 4M = 0 \quad (4.5)$$

Burada foton küresinin varlığı veya yokluğu kübiğin discriminantı tarafından belirlenir. Diskriminantın, yani $\Delta = 128M^2(M^2 - 27/8)$ 'in sıfır olduğu değer kritik değerdir;

$$M_* = \sqrt{\frac{27}{8}} \quad (4.6)$$

$M > M_*$ iken diskriminant pozitifdir ve iki foton küresi bulunmaktadır. Kübik denklemi trigonometrik yöntem ile çözerek foton kürelerinin konumunu saptayabiliriz. Dış foton küresinin yeri ρ_{out} tarafından ifade edilir;

$$\rho_{\text{out}} = \sqrt{\frac{4M^2}{9} \left(1 + 2 \cos \left[\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(1 - \frac{27}{4M^2} \right) \right] \right)^2 - 1} \quad (4.7)$$

Etkin potansiyel $\rho = \rho_{\text{out}}$ 'da bir maksimum oluşur ve bu nedenle dış foton küresi kararsızdır. İç foton küresinin konumu;

$$\rho_{in} = \sqrt{\frac{4M^2}{9} \left(1 - 2 \sin \left[\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \cos^{-1} \left(1 - \frac{27}{4M^2} \right) \right] \right)^2} - 1 \quad (4.8)$$

$M = M_*$ olduğu zaman iki foton küresi çakışır ve tek dejenere foton küresi kalır.

$$\rho_{deg} = \sqrt{5}$$

$M < M_*$ olduğu durumda diskriminant negatif olur ve dairesel foton küresi yoktur. Çift kara deliklerin çekimsel merceklenme olayı foton küresinin varlığına bağlı olarak değişmektedir. Sabit kütle için kara delikler arasındaki ayrılma çift kara deliklerin çekimsel merceklenme ve iki foton küresinin varlığını gerektirir (Patil et al., 2017).

4.2 Majumdar-Papapetrou Di-hole'u Tarafından Çekimsel Merceklenme

Işık kaynağı ve gözlemcinin $z=0$ simetri düzleminde olduğunu varsayımı yapılarak incelemeyi $z=0$ düzleminde hareket eden fotonlarla sınırlandırmak mümkündür. Bu küresel simetrik uzay zamanın ekvatorial bölgesindeki ışığın merceklenmesi için bir formalizm geliştirilmesine izin vermektedir. Bunu araştırırken kaynağın merkez noktasından çok uzakta olduğu varsayılmaktadır. Işığın sonsuzdan gelip merkez noktaya yaklaşıp tekrardan sonsuza gittiğini düşünölmektedir. Yolculuğu boyunca ışığın deneyimlediği toplam sapma;

$$\hat{\alpha}(\rho_0) = 2 \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{|V^\phi|}{|V^\rho|} d\rho - \pi = 2 \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{1}{\rho} \frac{\sqrt{V_{eff}(\rho)}}{\sqrt{V_{eff}(\rho_0) - V_{eff}(\rho)}} d\rho - \pi \quad (4.9)$$

Dönüm noktasında hızın radyal bileşeni sıfırdır ve böylece etki parametresi;

$$b = \frac{1}{\sqrt{V_{eff}(\rho_0)}} \quad (4.10)$$

olmaktadır. Buradan sonra Bozza (2002) çalışmasında önerdiği güçlü sapma limitinden yararlanılacaktır. Virbhadra and Ellis (2002) mercek denklemi kaynak konumu β , görüntü konumu θ ve sapma açısı $\hat{\alpha}_0$ arasındaki ilişkiyi göstermektedir;

$$\tan \beta = \tan \theta - \frac{D_{ds}}{D_s} (\tan \theta + \tan (\hat{\alpha}_0 - \theta)) \quad (4.11)$$

$$\sin \theta = \frac{b}{D_d} \quad (4.12)$$

Ayrıca Bozza (2002) çalışmasında da önerdiği üzere,

$$\hat{\alpha}_0 = 2\pi n + \delta\alpha_n; |\delta\alpha_n| \ll 1 \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \theta - \frac{D_{ds}}{D_s} \delta\alpha_n \\ \theta &= \frac{b}{D_d} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Mercek denklemi, görüntü konumunun mercek konumu ile ilişkisini ve görüntü düzleminden kaynak düzlemine bir harita oluşturulmasını sağlar. Bu harita bozulursa radyal bir kostik kabul edilir;

$$\frac{d\beta}{d\theta} = 0 \quad (4.15)$$

Mercek denkleminde şu ifade elde edilebilir;

$$\frac{d\beta}{d\theta} = \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \theta} \left[1 - \frac{D_{ds}}{D_s} \left\{ 1 + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 (\hat{\alpha}_0 - \theta)} \left(\frac{d\hat{\alpha}_0}{d\rho_0} \frac{d\rho_0}{d\theta} - 1 \right) \right\} \right] \quad (4.16)$$

Ayrıca;

$$\frac{d\rho_0}{d\theta} = -2 \frac{V_{eff}(\rho_0)}{V'_{eff}(\rho_0)} \sqrt{D_d^2 V'_{eff}(\rho_0) - 1} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\alpha}_0}{d\rho_0} = 2 \int_{\rho_0}^{\infty} & \left[\frac{1}{\sqrt{V_{eff}(\rho_0) - V_{eff}(\rho)}} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\sqrt{V_{eff}(\rho)}}{\rho} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{V_{eff}(\rho)} (V'_{eff}(\rho_0) - V'_{eff}(\rho))}{\rho (V_{eff}(\rho_0) - V_{eff}(\rho))^{\frac{3}{2}}} \right] d\rho \end{aligned} \quad (4.18)$$

Türevler ρ 'ya göre dir. Radyal kostik iki kara delik arasındaki uzaklık Majumdar Papapetrou di-hole uzay zamanında bir kritik sınır değerden daha büyük olduğu zaman foton küresinin yokluğunda oluşur.

Kısacası tek kara delik durumunda yalnız bir foton küresi mevcuttur. Işık foton küresinin dışında dönüm noktasına sahip olabilirken foton küresine giren foton için dönüm noktası yoktur ve kara deliğe girer. Böylece görüntüler sadece foton kürenin dışına doğru giden fotonlardan kaynaklanır. Bunların hepsi optik eksene göre belirli kritik açısal yarıçapın ötesindedir. Kritik yarıçapın altında karanlık bölge mevcuttur. İkinci foton küresinin varlığı nedeniyle dihole durumunda durum farklıdır. Etkin potansiyel ikinci iç foton kürenin altına doğru artar ve böylece dış foton küresine giren foton tekrar geri dönebilir. Foton küresi yokluğunda sapma açısı sınırlı kalır ve ayrılmış birçok sınırlı görüntüye neden olur (Patil et al., 2018)

4.3 Çift Kara Delik Birleşmeleri ve Çekimsel Mercekleme

Çekimsel merceleme etkileri, çift kara delik birleşmelerinde bazı önemli roller oynamaktadır. Yalnız gravitasyonel dalga gözlemleri ile kütle ve spin hakkında bilgi elde edebiliriz. Başka bir bilgi, ısıtma uzaklıklarının dağılımı veya ısıtma uzaklıklarından çıkarılan kırmızıya kaymalar tarafından elde edilebilir. Örneğin Nakamura (2016) ve Koushiappas (2017) çok yüksek kırmızıya kaymalarda çift kara delik birleşmelerinin dağılımının çift kara delik birleşmelerinin kaynağı için güçlü bir belirteç olduğunu savunmuşlardır.

Çift kara delik birleşmelerinin gözlemlerinden türetilen parametreler çekimsel mercekleme tarafından etkilenmektedir. Özellikle çekimsel mercekleme büyütmesi, birleşme dalga formundan tahmin edilen ısıtma uzaklığını kaydırır ve bu nedenle, mercekleme büyütmesi düzeltilmezse ısıtma uzaklığından elde edilen birleşme olayının kırmızıya kayması belirsizdir. Yalnızca birleşme dalga formundan kırmızıya kaymış kara delik kütlelerini ölçebildiğimiz için, birleşme dalga formundan kara delik kütleleri ayrıca çekimsel mercekleme büyütmesi nedeniyle belirsiz olabilir (Oguri, 2018).

Çekimsel mercekleme etkisi güçlü olduğunda çift kara delik birleşmelerinde çoklu görüntü oluşumu gözlenebilir. Gravitasyonel dalga gözlemlerinin frekansına bağlı olarak, mercek cisminin kütlesi ve görüntü şekli dalga etkisinde önemli bir rol oynayabilir.

Oguri (2018) çalışmasında çift kara delik birleşmelerinde gravitasyonel dalgaların dağılımı üzerine çekimsel mercekleme büyütmesinin etkisini çalışmıştır. Çalışmada ısıtma uzaklığı ve dalga formundan çıkarılan kara delik kütleleri gibi gözlemlenebilir niceliklerin dağılımının çekimsel mercekleme tarafından nasıl etkilendiğine odaklanmışlardır.

Çalışmada çekimsel mercekleme büyütme etkisinin chirp kütlesi ve kırmızıya kaymada görüldüğü belirtilmektedir. Yüksek gözlenmiş chirp kütlesi ve kırmızıya kayma;

$$M_{obs} = \frac{1+z}{1+z_{obs}} M \quad (4.19)$$

$$D_{L(z_{obs})} = \frac{D_{L(z)}}{\sqrt{\mu}} \quad (4.20)$$

μ merceklemedeki büyütme etkisidir (Oguri, 2018).

Görüldüğü üzere bazı çalışmalarda çekimsel merceklemenin çift kara delik gözlemlerini etkilediği görüşü önerilmektedir. Bunu araştırmak ilerdeki çift kara delik birleşmelerinin gözlemleri için yararlı olacaktır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Çalışmamızın başlangıcında da anlatıldığı üzere genel görelilik kuramının sunduğu yeni çekim görüşüne göre kütle veya enerji momentum tensörünün uzay zamanı bükmesi ve bunun sonucunda çekimsel mercekleme etkisi oluşturduğu bilinmektedir. Mercek etkisi gösteren cismin kütlesine göre farklı çekimsel mercekleme olayları oluşmakta ve bu olayların çalışılması astronomi için yararlı bir araç haline gelmektedir.

Biz çalışmamızda farklı kara delik türleri tarafından oluşan çekimsel mercekleme ve bunun sonucunda oluşan etkileri teorik olarak inceledik. Dönmeyen ve dönen bir kara delik durumunda gerek metrik çözümleri (dolayısıyla hareket denklemleri) gerekse çekimsel mercekleme etkileri değişmektedir. Spin parametresi çekimsel mercekleme sonucunda oluşan etkilerin bazıları ile tahmin edilebilir ve dolayısıyla genel görelilik bağlamında kara deliklerin geometrilerini incelememiz bakımından yararlı olabilir. Bu nedenle çekimsel mercekleme çalışması kara delik çalışmalarında önemli bir araç haline gelecektir.

Çalışmamızda aynı zamanda benzer mercekleme özellikleri gösterdiği düşünülen kuazarların gözlemlerinden yararlanarak mercekleme etkilerini hesapladık ve teori ile karşılaştırdığımızda çok yakın bir sonuç elde ettik. Hesaplamaları Schwarzschild ve Kerr kara deliği olarak değerlendirdik ve Kerr kara deliği mercekleme etkilerini incelediğimizde bu değerlerin 8. basamağa kadar aynı olduğunu belirledik. Ayrıca mercekleme gözlemleri ile elde edilebilecek kara deliklerin gölgelerini hesapladık. Hesaplarımızın da gösterdiği üzere yay saniyeleri mertebesinde gözlemler yapmamız gerektiğinden gözlemsel yeteneğimizin daha da gelişmesi gerektiği sonucuna vardık. Bu sonuçla beraber gözlemler geliştiği takdirde gözlemlenebilecek 10 çok büyük kütleli kara deliğin bulunduğu gökadayı sırasıyla yazabiliriz. Bu kara deliklerin bulunduğu gökadalar; Samanyolu, M31, NGC 4649, NGC 3115, IC 1589, IC 1459, NGC 4594, NGC 1399 ve NGC 5846'dır. Bu sıralama gözlemlenebilir olan kara deliklerin foton halkaları yarıçapının mikro yay saniyesi biriminde büyükten küçüğe doğru

yazımıdır. Ayrıca M87 gökada merkezinde bulunan çok büyük kütleli kara delik bir önceki sıralamada 2. olmakla birlikte bu kara deliğin gölgesi gözlemlendiğinden dolayı bu kara deliği sıralamaya eklemedik.



KAYNAKLAR DİZİNİ

- Alvi, K.**, 2000, Approximate binary-black-hole metric, Physical Review D, 61, 124013 p.
- Atkinson, R.**, 1965, On light tracks near a very massive star, AJ, 70, 517 p.
- Azaami, A., Keeton, C. R., Petters, A. O.**, 2011, Lensing by Kerr black holes. I. general lens equation and magnification formula, Journal of Mathematical Physics, 52, 092502-092502 pp.
- Azaami, A., Keeton, C. R., Petters, A. O.**, 2011, Lensing by Kerr black holes. II: analytical study of quasi-equatorial lensing, Journal of Mathematical Physics, 52, 102501 p.
- Bourassa, R.R. Kantowski, R.**, 1975, The theory of transparent gravitational lenses, APJ, 195, 13-21pp.
- Bozza, V.**, 2001, Strong field limit of black hole gravitational lensing, General Relativity and Gravitation, 33, 1535-1548 pp.
- Bozza, V. et al.**, 2002, Gravitational lensing of stars orbiting the massive black hole in the galactic center, APJ, 696, 701-705 pp.
- Bozza, V.**, 2009, Gravitational lensing in the strong field limit, Physical Review D, 66, 1030001 pp.
- Bozza, V.**, 2010, Gravitational lensing by black holes, General Relativity and Gravitation, 42, 2269-2300 pp.
- Carter, B.**, 1982, Global structure of the Kerr family of gravitational fields, Physical Review, 174, 1559 p.
- Ciafre, J., Rodriguez, M.J.**, 2018, A near horizon extreme binary black hole geometry, arXiv:1804.06985, 1-5 p.
- Eddington, A.S.**, 1919, The deflection of light during a solar eclipse, Nature, 104, 372p.
- Einstein, A.**, 1916, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Annalen der Physik, 354, 169-822p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Eiroa F.E., Romero, G.E., Torres, F.T.**, 2002, Reissner-Nordström black hole lensing, Phys. Rev. D, 66, 024010 p.
- Event Horizon Telescope Collaboration, Akiyama, K. et al.**, First M87 Event horizon telescope results. I. The shadow of supermassive black hole, The Astrophysical Journal Letters, 875, 17pp.
- Frittelli, S., Newman, E.T.**, 1999, Exact universal gravitational lensing Equation, Phys. Rev. D, 59, 124001 p.
- Fritelli, S. et al.**, 2000, Spacetime perspective of Schwarzschild Lensing, Physical Review D., 61, 064021 p.
- Gaudi, B.S. et al**, 2018, Discovery of a Jupiter/Saturn analog with gravitational microlensing, Science, 319, 927 p.
- Hewitt, J.N. et al.**, 1988, Unusual radio source MG1131+0456: a possible Einstein ring, Nature, 333, 537-540 pp.
- Iyer, S.V. et al.**, 2009, Light's bending angle in the equatorial plane of a Kerr Black Hole, Phys. Rev. D, 80, 124023p.
- Kerr, R.P.**, 1963, Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metric, Physical Review Letters, 11, 237p.
- Koushiappas, S.M., and Loeb, A.**, 2017, Maximum redshift of gravitational wave merger events, Physical Review Letters, 119, 221104p.
- Komar, A.**, 1959, Covariant conservation laws in general relativity, Physical Review, 113, 934p.
- Kumar, R. et al**, 2018, Black hole parameters estimation from its shadow, arXiv:1811.01260
- Lemon, C.A., Auger, M.W., McMahon, R.G., Ostrovski, F.**, 2018, Gravitationally lensed quasars in Gaia - II. Discovery of 24 lensed quasars, MNRAS, 479, 5060-5074p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Lemon, C.A., Auger, M.W., McMahon, R.G.**, 2019, Gravitationally lensed quasars in Gaia - III. Discovery of 24 lensed quasars, MNRAS, 483, 4242-4258p.
- Li, Z. and Bambi, C.**, 2014, Measuring the Kerr spin parameter of regular black holes from their shadow, 1, 041p.
- Liebes, S.**, 1964, Gravitational Lenses, Physical Review, 133, 835-844p.
- Lynds, R. and Petrosian, V.**, 1986, Giant luminous arcs in galaxy clusters, American Astronomical Society, 18, 1014p.
- Majumdar, S.D.**, 1947, A class of exact solutions of Einstein's field equations, Physical Review ,72 , 390p.
- Manko, V.S.**, Exact solutions for a system of two counter-rotating black holes, Physical Review D ,78, 124014p.
- Markevitch, M.**, 2006, The X-Ray universe 2005, 604, 723p.
- Mollerach S., Roulet E.**, 2002, Gravitational Lensing and Microlensing, World Scientific, 7-34p.
- Nakamura, T. et al.**, 2016, Pre-DECIGO can get the smoking gun to decide the astrophysical or cosmological origin of GW150914-like binary black holes, Progress of Theoretical and Experimental Physics, 2016, 093E01p.
- Oguri, M.**, 2018, Effect of gravitational lensing on the distribution of gravitational waves from distant binary black hole mergers, MNRAS, 480, 3842-3855p.
- Papapetrou A.**, 1947, A static solution of the equations of the gravitational field for an arbitrary charge-distribution, Proc. Roy. Irish Acad., 51, 191-204p.
- Patil, M. et al.**, 2017, Curious case of gravitational lensing by binary black holes: a tale of two photon spheres, new relativistic images and caustics, Physical Review D, 95, 024026p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Perlick, V.**, 2004, Exact gravitational lens equation in spherically symmetric and static spacetimes, *Physical Review D*, 69, 064017p.
- Rauch K.P. and Blandford R.D.**, 1994, Optical caustics in a kerr spacetime and the origin of rapid X-ray variability in active galactic nuclei, 421, 46-68p.
- Refsdal, S.**, 1964, The gravitational lens effect, *MNRAS*, 128, 295p.
- Schutz, B.**, General Relativity, Cambridge University Press, 2009
- Schwarzschild, K.**, 1916, Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der Einsteinschen Theroie, *Sitzungsberichter der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, 1916, 189-196p.
- Soucail G. et al.**, 1987, Discovery of the first Einstein ring – The luminousarc in Abel 370, *The Messenger*, 50, 5p.
- Teo, E.**, 2003, Spherical photon orbits around a Kerr black hole, 35, 1909-1926 p.
- Walsh D. et al.**, 1979, 0957+561 A, B – twin quasistellar objects or gravitational lens, *Nature*, 279, 381-384p.
- Wei, S.-W., Zou, Y.-C., Liu, Y.-X, Mann, R.B.**, 2019, Curvature radius and Kerr black hole shadow, *arXiv:1904.07710*
- Weinberg, S.**, 1972, Gravitation and cosmology, John Wiley & Sons, New York, 185-190p.
- Virbhadra, K. S.**, 2000, Schwarzschild black hole lensing, *Physical Review D*, 62, 084003p.
- Virbhadra, K. S.**, 2000, Schwarzschild black hole lensing, *Physical Review D*, 62, 084003p.
- Virbhadra, K. S.**, 2002, Gravitational lensing by naked singularities, *Physical Review D*, 65, 103004p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Virbhadra, K. S.**, 2008, Time delay and magnification centroid due to gravitational lensing by black holes and naked singularities, Physical Review D, 77, 124014p.
- Virbhadra, K. S.**, 2009, Relativistic images of Schwarzschild black hole lensing, Physical Review D, 79, 083004p.



TEŞEKKÜR

Bu çalışmada beni sabırla yönlendiren, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, tez hazırlarken ve çözümler konusunda desteğini hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Kadri YAKUT'a, eğitim hayatım boyunca her koşulda bana destek olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

29 / 07 / 2019

İmzası



Adı-Soyadı

Rahime Matur

ÖZGEÇMİŞ

Lisans derecesini 2016 yılında Ege Üniversitesi Astronomi ve Uzay bilimlerinden aldı. 2017 yılında Ege Üniversitesi Yüksek lisans programına başlamıştır.

