

**ROBERTSON-WALKER EVRENİNDE ELEKTROMANYETİK
ALANLARIN VARLIĞINDA GÖRELİ PARÇACIKLARIN
DİNAMİĞİ VE PARÇACIK YARATMA**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NİLÜFER PARLAK

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FİZİK
ANABİLİM DALI**

**MERSİN
AĞUSTOS - 2019**

**ROBERTSON-WALKER EVRENİNDE ELEKTROMANYETİK
ALANLARIN VARLIĞINDA GÖRELİ PARÇACIKLARIN
DİNAMİĞİ VE PARÇACIK YARATMA**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NİLÜFER PARLAK

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**


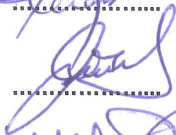

**FİZİK
ANABİLİM DALI**

**Danışman
Prof. Dr. Kenan SÖĞÜT**

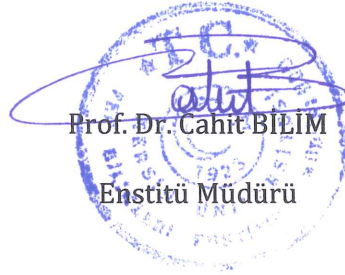
**MERSİN
AĞUSTOS - 2019**

ONAY

Nilüfer PARLAK tarafından Prof. Dr. Kenan SÖĞÜT danışmanlığında hazırlanan “Robertson-Walker Evreninde Elektromanyetik Alanların Varlığında Görelî Parçacıkların Dinamiği ve Parçacık Yaratma” başlıklı çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından 23/08/2019 tarihinde yapılan Tez Savunma Sınavı sonucunda oy birliği ile Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Görevi	Ünvanı, Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	Prof. Dr. Kenan SÖĞÜT	
Üye	Doç. Dr. Yusuf Oğuzhan GÜNAYDIN	
Üye	Doç. Dr. Mustafa SALTİ	

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 18/10/2019 tarih ve 2019/40/1625 sayılı kararıyla onaylanmıştır.



Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, tablo ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

ETİK BEYAN

Mersin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğinde belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlâk kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak kullandığımı,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü Mersin Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı,
- Tezin tüm telif haklarını Mersin Üniversitesi'ne devrettiğimi

beyan ederim.

ETHICAL DECLARATION

This thesis is prepared in accordance with the rules specified in Mersin University Graduate Education Regulation and I declare to comply with the following conditions:

- I have obtained all the information and the documents of the thesis in accordance with the academic rules.
- I presented all the visual, auditory and written informations and results in accordance with scientific ethics.
- I refer in accordance with the norms of scientific works about the case of exploitation of others' works.
- I used all of the referred works as the references.
- I did not do any tampering in the used data.
- I did not present any part of this thesis as an another thesis at Mersin University or another university.
- I transfer all copyrights of this thesis to the Mersin University.

23/08/2019

İmza / Signature

NİLÜFER PARLAK

ÖZET

ROBERTSON-WALKER EVRENİNDE ELEKTROMANYETİK ALANLARIN VARLIĞINDA GÖRELİ PARÇACIKLARIN DİNAMİĞİ VE PARÇACIK YARATMA

Bu tez çalışmasında seçilen bir eğri uzay modeli için görelî parçacıkların dinamiği incelenmiştir. Bu amaçla görelî kuantum mekaniğinin en yaygın olarak kullanılan denklemleri Klein-Gordon (KG, spinsiz), Dirac (spin-1/2) ve Duffin-Kemmer-Petiau (DKP, spin-1) denklemleri eğri uzayda ve dış elektromanyetik alanların varlığı için tam çözülmüştür. Tam çözümler elde edildikten sonra fiziksel bir uygulama olması için KG ve DKP denklemleri için elde edilen çözümler kullanılarak parçacık yaratma sayı yoğunlukları hesaplanmıştır. Bu hesaplama için Bogoliubov dönüşüm yöntemi (BDY) kullanılmıştır. Bu yöntemin kullanılması için pozitif ve negatif frekanslı çözümler yarı-klasik bir yöntem olan Hamilton-Jacobi (HJ) denkleminin çözümleri sayesinde belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Görelî Kuantum Mekaniği, Eğri Uzay, Dış Alanlar, Tam Çözümler, Parçacık Yaratma

Danışman: Prof. Dr. Kenan SÖĞÜT, Mersin Üniversitesi, Fizik Anabilim Dalı, Mersin.

ABSTRACT

DYNAMICS OF RELATIVISTIC PARTICLES AND PARTICLE CREATION FOR THE PRESENCE OF ELECTROMAGNETIC FIELDS IN THE ROBERTSON-WALKER UNIVERSE

In this thesis, the dynamics of the relativistic particles for a selected curved spacetime model is investigated. For this purpose, the most widely used equations of relativistic quantum mechanics, Klein-Gordon (KG, spinless), Dirac (spin-1/2) and Duffin-Kemmer-Petiau (DKP, spin-1) equations are solved for the presence of external electromagnetic fields in curved spacetime. After the complete solutions were obtained, particle creation number densities were calculated by using the solutions obtained for the KG and DKP equations for physical application. Bogoliubov transformation method (BTM) was used for this calculation. In order to use this method, positive and negative frequency solutions were determined by the solutions of the semi-classical method known as Hamilton-Jacobi (HJ) equation.

Keywords: Relativistic Quantum Mechanics, Curved Spacetime, External Fields, Exact Solutions, Particle Creation.

Advisor: Prof. Kenan SÖĞÜT, Department of Physics, University of Mersin, Mersin.

TEŞEKKÜR

Rehberlięi ve emeklerinden dolayı çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Kenan SÖĞÜT'e teşekkür ederim. Tez çalıőmamdaki yardımları için Dr. Hilmi YANAR hocama teşekkür ederim. Ayrıca bana öğrettikleri her şey için hocalarım Doç. Dr. Mustafa SALTI, Doç. Dr. Oktay AYDOĞDU'ya, tavsiyeleri için Prof. Dr. Ali HAVARE'ye ve tüm hocalarıma sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Varlığıyla hayatıma umut ışığı olan melek annem Halime PARLAK'a, çalıőmam süresince benden bir an olsun desteğini esirgemeyen kardeőim Gamze KARACA'ya, hayatım boyunca bana babalık yapan abim Tayfun PARLAK'a sonsuz kez teşekkür ederim. Verdikleri destek ve motivasyon için ailem ve dostlarıma teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇ KAPAK	ii
ONAY	iii
ETİK BEYAN	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
TABLolar DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
KISALTMALAR VE SİMGELER	xii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI	4
2.1. Görelî Kuantum Mekaniği	4
2.1.1. Klein-Gordon Denklemi	4
2.1.1.1. Serbest Parçacık Çözümleri	6
2.1.1.2. KG İçin İki Bileşenli Biçim	8
2.1.1.3. Görelî Olmayan Limit	11
2.1.2. Dirac Denklemi	12
2.1.2.1. Denklem Ortaya Çıkışı	13
2.1.2.2. Dirac Denklemi için Serbest Parçacık Çözümleri	16
2.1.2.3. İki Bileşenli KG Çözümleriyle Karşılaştırma	18
2.1.3. Duffin-Kemmer-Petiau Denklemi	21
2.2. Genel Görelilik Kuramına Giriş	22
2.2.1. Minkowski Uzayı ve Metriği	23
2.2.2. Tensörlerin Cebiri ve Metrik Uzay	24
2.2.3. Kovaryant ve Kontrovaryant Vektörler	27
2.2.4. Minkowski Uzayında Dörtlü Vektör	28
2.2.5. Uzay-Zamanın Eğriliği ve Riemann Uzayı	29
2.2.6. Kütleçekimi Olarak Geometri	31
2.2.6.1. Öklidyen-Olmayan Bağlıntılar	33
2.2.7. Kütleçekim Alanı Olarak Eğri Uzay-Zaman	34
2.2.7.1. Newton Kütleçekimi Alanı	34
2.2.7.2. Görelî Kütleçekimsel Alan	35
2.2.8. Genel Görelî Hareket Denklemi Olarak Jeodezi Denklem	36
2.2.9. Genel Görelilikte Tensörler	37
2.2.9.1. Genel Koordinat Dönüşümleri	38
2.2.9.2. Kovaryant Türev	40
2.2.9.3. Christoffel Sembolleri ve Metrik Tensör	42
3. MATERYAL VE YÖNTEM	44
3.1. Eğri Uzayda Dış Alanların Varlığında Görelî Parçacık Denklemleri	44
3.2. Bogoliubov Dönüşüm Yöntemi	45
3.3. Eğri Uzayda Dış Alanların Varlığında Parçacık Yaratma Süreci	46
3.3.1. Klein-Gordon Denklemi ve Skaler Parçacık Yaratma	47
3.3.1.1. Hamilton-Jacobi Denklemine Çözümü	47
3.3.1.2. Klein Gordon Denklem Çözümü	48
3.3.1.3. Bogoliubov Yöntemi ile Parçacık Yaratma	51
3.3.2. Dirac Denklem Çözümü ve Parçacık Yaratma	53
3.3.3. DKP Denklemine Çözümü	57

4. BULGULAR VE TARTIŞMA	62
4.1. Klein-Gordon Denkleminin Çözümü	62
4.1.1. Skaler Parçacık Yaratma	65
4.2. Dirac Denkleminin Çözümü	67
4.3. DKP Denkleminin Çözümü	86
4.3.1. DKP Denklemi İçin Parçacık Yaratma Süreci	93
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	95
KAYNAKLAR	97
ÖZGEÇMİŞ	99



TABLolar DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 2.1. Dirac ve KG Çözümlerinin Karşılaştırılması	19
Tablo 2.2. \mathbf{V} Vektörünün Bileşenleri	27
Tablo 3.1. Görelî Parçacık Denklemleri.	44
Tablo 5.1. Analitik Çözümler İçin Seçilen Dış Alanlar ve RW Metrik Ölçeği	95



ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1. Dirac Elektron Denizi	21
Şekil 2.2. \mathbf{V} Vektörünün Kovaryant, Kontrovaryant Gösterimi.	27
Şekil 2.3. Çeşitli Yüzeyle Bir Halkanın Çevresi ve Alanı.	29
Şekil 2.4. Koordinatları Doğrusal ve Eğrisel Olan Yüzey Modelleri.	30
Şekil 2.5. Kütleçekimin Bir Parçacığın Hayat Çizgisine Etkisi a) (x,y) Düzleminde Parçacık Eğrisi b) Parçacığın Hayat Çizgisinin (x, y) Düzlemi Üzerine İzdüşümü c) Zaman Ekseni ile Uzay-Zaman Diyagramı Arasındaki Büyük Mesafe	32
Şekil 2.6. E_p 'nin Dönen Çerçeveye Uygulanması.	33
Şekil 2.7. Bir Kaynak ve Bir Test Parçacık Arasındaki Etkileşme	34
Şekil 2.8. Aralarında Azalan Mesafe İle İki Parçacığın Yörüngeleri	35
Şekil 2.9. Parçacığın Hayat Çizgisi	35

KISALTMALAR ve SİMGELER

Kısaltma/Simgesi	Tanım
A_μ	: Rieman uzay-zamanında elektromanyetik alan tensörü
$S^{\mu\nu}$: Spin Tensörü
$W_{\lambda,\mu}(z)$: Whittaker Fonksiyon
$e^{(i)}_\mu(x)$: Bir matrisi eğri uzay-zamandan düz uzay-zamana dönüştüren tetrad
$e_{(i)}^\mu(x)$: Bir matrisi düz uzay-zamandan eğri uzay-zamana dönüştüren tetrad
$g_{\mu\nu}$: Metrik Tensörü
Γ_μ	: Spin $-1/2$ parçacığının spin bağlantı katsayısı
$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$: Christoffel Sembolü
Σ_μ	: Spin -1 parçacığının spin bağlantı katsayısı
Ψ_D	: Dirac Dalga Fonksiyonu
Ψ_K	: Kemmer Dalga Fonksiyonu
∇_α	: Kovaryant Türev
β^μ	: Rieman uzay-zaman 16x16 Kemmer Matrisleri
$\gamma^{(i)}$: Düz uzay-zaman 4x4'lük Dirac Gamma Matrisleri
γ^μ	: Eğri uzay-zaman 4x4'lük Dirac Gamma Matrisleri
$\eta_{\mu\nu}$: Düz uzay-zaman metrik tensör
σ^μ	: Eğri uzay-zaman 2x2'lik Pauli Matrisleri
${}_1F_1(a;b;z)$: Konfluent Hipergeometrik Fonksiyon
BDY	: Bogoliubov Dönüşüm Yöntemi
DKP	: Duffin-Kemmer-Petiau
EP	: Eşdeğerlilik İlkesi
GR	: Genel Görelilik
HJ	: Hamilton-Jacobi
KEDİ	: Kuantum Elektrodinamiği
KG	: Klein-Gordon
KRD	: Kuantum Renk Dinamiği
KTD	: Kuantum Tad Dinamiği
RW	: Robertson-Walker
SR	: Özel Görelilik
$a(t)$: Ölçek Çarpanı

1. GİRİŞ

1900'lü yılların başlarında, o döneme kadar bilinen klasik fizik kuramlarının tüm fiziksel olguları açıklamakta yeterli olduğu düşünülüyordu. Newton dinamiği ve Euler mekaniği ile mekanik olgular, Maxwell'in yazdığı denklemler ile elektromanyetik olgular, istatistik mekanik ve termodinamik ile entropi ve ısı/sıcaklık gibi kavramlar açıklanabiliyordu. Ancak bu kuramlar iki temel nitelikte sorunla yüzleşmiştir. İlk olarak yüksek hızlarda temel niceliklerin (hız, kütle vb. temel nicelikler) yeniden tanımlanması gerekmiştir. Bir diğer nokta ise, o döneme kadar geçerliliğini sürdüren fiziksel kuramların, atom altı ölçekte fiziksel olarak kullanılabilir yapıda olmamalarıdır [1].

Yüksek hızlara gidildiğinde mekaniğin nasıl bir yapıda olması gerektiği Einstein'ın ortaya koyduğu "Özel Görelilik Kuramı" sayesinde anlaşılmıştır. Ayrıca atom altı ölçekte de Planck'ın başlattığı Kuantum Mekaniği bu dünyaya ilişkin fiziğe yaklaşımımızı bütünüyle biçimlendirdi. Bu iki kuram günümüzde hemen her alanda doğa olaylarını büyük ölçüde inceleyip/yorumlamamızı mümkün kılmaktadır.

20. yüzyılın ilk yarısı boyunca bu iki kuram, Kuantum Mekaniği ve Özel Görelilik, artık fiziğin hemen her alt dalı için temel bir yapı oluşturmuşlardır. Bu iki kuramın birleştirilmesiyle ortaya konulan Görelili Kuantum Kuramı atom altı dünyayı betimlemede öncül bir rol üstlenmiştir. Bugünkü yapısıyla temel parçacık fiziği alanı ile çoğunlukla elektronlar, kuarklar ve atom altı dünyadaki birçok diğer temel taneciklerin yapısı için dinamik hesaplamalar Görelili Kuantum Kuramı sayesinde ele alınmaktadır. Bu parçacıkların özellikleri, spinsiz durumlar için Klein-Gordon denklemi ile yarı-spinli durumlar için de Dirac denklemi ile ele alınır. Özellikle Dirac'ın elektron için yazdığı denklem fizik dünyamızın mihenk taşlarından biri olarak anılır. Çünkü bu kuram yapısal bakımdan Lorentz kovaryant bir biçime sahiptir ve kuramda elektronun spininin jromanyetik oranı $g=2$ dir ve geçtiğimiz yüzyılın en önemli buluşlarından biri kuramın öngördüğü karşıt-parçacık kavramı, elektronun karşıtı olan pozitron, deneysel olarak keşfedilmiştir. Bununla beraber hidrojenin atomik seviyelerinin ince yapı-sabiti de bu kuram sayesinde yüksek hassasiyetle elde edilebilmektedir. Bir bakıma görelili etkilerin, kendi dünyaları için küçük tedirginmeler olarak görüldüğü temel parçacık fiziği ve alan kuramlarına uygun bir giriş yapmak için görelili dalga denklemleri ile başlamak gerekir.

Kuantum mekaniğindeki en temel düşüncelerden biri parçacıkların dalga fonksiyonu ile temsil edilmesidir. Çünkü bu kuramda herhangi bir parçacık hem dalga hem de parçacık özelliklerine sahiptir. Bu özellikler, parçacığın girdiği etkileşme türüne göre ortaya çıkar. Fiziksel sistemlerin dinamiği görelili dalga denklemlerinin bu etkileşmeleri temsil eden çeşitli potansiyeller için çözümlerinin elde edilmesi sayesinde anlaşılabilir. Bu denklemler yardımıyla sistemin dalga

fonksiyonları ve enerji bağıntıları elde edilir. Ele alınan potansiyeller etkileşimler hakkında bilgi verirler. Atom altı ölçekte etkin olan temel etkileşimlerin matematiksel yapısı kesin olarak bilinmemektedir. Bu nedenle bu etkileşmelerin özelliklerini anlayabilmek için çoğunlukla çekirdek potansiyelleri deneysel verilerden yola çıkılarak yazılırlar ve görelî dalga denklemleri bu potansiyeller için çözümlenerek deneysel verilerle uyumuna bakılır. Literatürde en yaygın olarak kullanılan potansiyel biçimleri Yukawa, Woods-Saxon, Cusp ve Hulthen vb. tipi potansiyellerdir ve bunlar çekirdek ve atom fiziği hakkında önemli kuramsal bulgular sunarlar [2].

Doğanın dört temel etkileşmesi olan; Güçlü, Elektromanyetik, Zayıf ve Kütleçekimsel etkileşmelerin her birine 1950'li yıllardan başlanarak Kuantum Mekaniksel bir yapı kazandırılmaya çalışılmıştır. Günümüzde; Güçlü, Elektromanyetik ve Zayıf Etkileşmeler sırasıyla Kuantum Renk Dinamiği (KRD), Kuantum Elektrodinamiği (KEDİ) ve Kuantum Tad Dinamiği (KTD) olarak adlandırılan kuantum alan kuramları ile temsil edilmektedirler [3]. Buna karşın kütleçekimsel etkileşmeler için henüz bir kuantumlu kuram yazılabilmemiş değildir. Bunun nedeni kuramın kendi doğasında barındırdığı matematiksel zorluk olarak düşünülebilir. Bu nedenle kütleçekimsel etkileşmeler her ne kadar klasik olarak Newton Kuramı ile anlaşılabilirse de kuantum ölçekte yarattığı etkileri anlamak için elimizde anahtar nitelik taşıyan bir kuram henüz yazılamamıştır. Bu amaçla literatürde en yaygın olarak kullanılan yöntemlerden biri, kütleçekimsel etkileşmeleri tıpkı bir kuantum mekaniksel potansiyel olarak düşünerek görelî dalga denklemlerini bu etkileşmeler için incelemektir. Bunun için ilk olarak bu denklemlerin genel görelilik formalizminde nasıl bir yapıda olacağı belirlenmiştir.

Bu tez çalışmasında görelî ve spin-0 ve spin- $\frac{1}{2}$, spin-1 parçacıkları betimleyen KG, Dirac ve DKP denklemleri bir dış elektromanyetik alanın varlığında ve eğri uzayda analitik olarak çözülmüştür. Bu çözümler kullanılarak, şiddetli dış alanların etkisiyle oluşan skaler ve vektör parçacıkların sayı yoğunluğu hesaplanmıştır.

Tezin içeriği özetle şöyle düzenlenmiştir: Tezin ikinci bölümünde görelî kuantum mekaniğinin temel parçacık denklemleri tanıtılmıştır. Bu bölümde denklemlerin Minkowski uzayındaki matematiksel biçimleri ele alınmıştır ve serbest uzay için çözümleri tartışılmıştır. Bu amaçla Klein-Gordon ve Dirac denklemlerinin serbest parçacık çözümleri verilip DKP denklemi tanıtılacaktır. Çalışmanın üçüncü bölümünde, ele aldığımız problem için analitik çözümlerin elde edilmesinde kullanılacak yöntemi tanıtmak amacıyla, farklı bir elektromanyetik potansiyelin seçildiği durum için eğri-uzayda bu parçacık denklemleri yazılarak KG, Dirac ve DKP denklemlerinin tam çözümlerin elde edildiği çalışmalar derlenmiştir. Bulgular ve Tartışma bölümünde konuma bağlı bir manyetik alan ve zamana bağlı olan bir elektrik alan için (3+1)-boyutlu Robertson-Walker (RW) uzayında KG ve Dirac denklemleri analitik olarak çözülmüştür. Ayrıca DKP denkleminin 16 bileşenli olması sebebiyle 16 çiftlenimli denklem elde edileceği için

analitik çözümlerin elde edilmesi zordur. Literatürde 16 bileşenli biçimin (hem spin-0 hem de spin-1 parçacıkları içeren) eğri uzayda tam olarak çözüldüğü herhangi bir çalışmaya yapılan taramada rastlanmamıştır. Bu matematiksel sınırlamalar nedeniyle DKP denklemi aynı dış alanlar için (1+1) boyutlu RW metriği için tartışılmıştır. Ayrıca elde edilen sonuçların fiziksel bir uygulaması olarak KG ve DKP denklemi için skaler ve vektör parçacık yaratma sayı yoğunlukları hesaplanmıştır. Sonuç ve öneriler bölümünde ise elde edilen sonuçlar tartışılarak ileriki aşamalarda yapılabilecek çalışmalar için öneriler sunulmuştur.



2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Bu bölümde görelî kuantum mekaniği gelişiminin tarihsel süreci ve bu çerçevede kullanılan görelî parçacık denklemlerinin Minkowski uzayındaki matematiksel yapısı hakkında özet bilgi verilmesi amaçlanmaktadır. Ayrıca bölümün ikinci kesiminde Minkowski ve Riemann uzayları hakkında temel bilgi verilerek, Genel Görelilik kuramının temelleri üzerine kavramsal düzeyde bilgi verilmiştir. Bölüm içerisinde yer alan bilgiler ve denklemler doğrudan [4], [5], [6], kaynaklarından derlenmiştir.

2.1. Görelî Kuantum Mekaniği

1900'lü yılların ortalarında elektromanyetik alanların kuantize edildiği ve kuantize alanların yaratma ve yok olma sürecinin çalışıldığı bir noktaya kadar gelinmiştir. "Açıkça kovaryant" olmasa dahi, elektromanyetik alanların davranışı tamamen görelidir. Bununla birlikte parçacıkların (elektron ve proton gibi) davranışı görelî olmayacak biçimde kalır ve bu parçacıkların yaratılması ve yok olmasını tanımlayacak hiçbir yöntem yoktur (parçacıklar; parçacık anti-parçacık çifti şeklinde bulunmalıdır. Çünkü elektron ve baryon sayıları korunumludur). Bu bölümde elektron gibi "klasik" olarak tanımlanan parçacıkları kovaryant olarak tanımlamak için gerekli araçlar açıklanacaktır. Burada ortaya konulacak bilgi sayesinde, parçacık ve anti-parçacık çiftlerinin nasıl oluşacağı tanımlanabilecek ve bu sayede elektron ve diğer klasik parçacıklar için alan kuramlarının temeli atılacaktır.

Klasik parçacıklar ve alanlar arasındaki ayrımın ortadan kaldırılabilmesi için kuantum alanlarının, tüm madde ve enerjinin tanımlanabilmesinin uygun olan tek olgu olduğunun kabul edilmesi gerekir. Bununla birlikte, bu yeni kuantum alanlarını tanıtabilmemiz için ilk olarak tek parçacıkların kovaryant bir yöntemle nasıl tanımlanacağını anlamamız gerekir.

Burada en basit görelî denklem olan Klein-Gordon (KG) denklemi ile başlayacağız. Ardından, Dirac denklemini ve Dirac denkleminin uygulamalarını tartışmayı amaçlıyoruz. Son olarak da Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) denklemi tanıtılacaktır [4].

2.1.1. Klein-Gordon Denklemi

Aşağıdaki denklemi göz önüne alarak görelî denklemleri elde edebilme yöntemini önerebiliriz [4]:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x) = \sqrt{m^2 - \nabla^2} \Psi(x) , \quad (2.1)$$

Burada x ; dalga fonksiyonunun hem uzaya hem de zamana bağlılığını temsil eder ve $\Psi(x) = \Psi(r, t)$ olduğu anlamına gelir. Bu denklem, kuantum mekaniğinin klasik kurallarını izler, şöyle ki görelî enerji $E = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ eşitliğine aşağıdaki dönüşümler uygulanarak yukarıdaki denklem elde edilebilir:

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\mathbf{p} \rightarrow -i \nabla \quad (2.2)$$

İlkesel olarak $E_{\nabla} = \sqrt{m^2 + \nabla^2}$ işlemcisiyle ilgili bir sorun yoktur. Bu işlemci ya herhangi bir fonksiyonun, momentum öz-fonksiyonu cinsinden genişletilmesiyle (ki bu işlem kolaylıkla yapılabilir) ya da E_{∇} 'ın kuvvet serisine açılımı ile tanımlanabilir:

$$E_{\nabla} \cong m \left\{ 1 - \frac{\nabla^2}{2m^2} - \frac{\nabla^4}{8m^4} \dots \right\} \quad (2.3)$$

Bu seri her zaman yakınsak olmasa da analitik sürekliliğini, E_{∇} 'nin herhangi bir fonksiyon üzerindeki tanımı olarak düşünebiliriz.

Denklem (2.1)'in dezavantajı “açıkça kovaryant” olmamasıdır. “Açıkça kovaryant” olabilmesi için; sadece sonsuz küçük H ve P üreteçleri tarafından tanımlanmış konum ve zamanda değil, bununla birlikte açısal momentum işlemcisi J tarafından üretilen dönmeleri ve K işlemcisi tarafından üretilen Lorentz ötelemelerini kapsayan, homojen Lorentz grubu altında denklemin nasıl dönüştürüleceğini bilmeliyiz. Bu dönüşümler bazen (2.1) tipindeki denklemler için çözülebilsede, birçok problemle karşılaşmaktadır ve bu nedenle bu yol temel parçacıkların kuantum alan kuramını ortaya çıkaran özgün gelişmelerde izlenen yol değildi (Dirac denkleminin, (2.1)'deki karekökün çizgiselleştirilmesinden ortaya çıktığı kabul edilebilir). Şu anda, başlangıçta “temel” olduğu varsayılan birçok parçacığın (proton gibi) aslında değerlik kuarklarının ve kuark-antikuark çiftlerinin bir denizinin karmaşık bileşik yapıları olduğunu, bu nedenle de tek bir yerel kuantum alanıyla tanımlanamayacaklarını biliyoruz. Bu tür parçacıkları tarif etmek için benzer yöntemler araştırılırken (2.1) tipindeki denklemlere ilgi yeniden artmıştır ve bu süreç şimdiki araştırmaların aktif bir alanı haline gelmiştir. Bu tip bir yaklaşım bazen görelî Hamiltonsal dinamik olarak tanımlanır ve burada tartışılmayacaktır. Alternatif yol, “açıkça kovaryant” olan denklemleri oluşturmaktır. Bu yöntem bazen *açık kovaryant dinamik* olarak adlandırılır. Geleneksel olarak görelî alan kuramına giden yol budur. Eğer (2.2)denklemi kütle enerji ilişkisi olan $E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2$ eşitliğinde yerine konulursa, “açıkça kovaryant” olan dalga denklemi elde edilir. Bu denklem serbest parçacık için KG denklemini verir:

$$(\square + m^2) \Psi(x) = 0 , \quad (2.4)$$

Burada \square dalga işlemcisidir ve bu işlemci $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ biçiminde tanımlanır. Burada m parçacığın kütlesidir. Bu denklem “açıkça kovaryanttır”, çünkü dalga işlemcisi skalerdir ve eğer kütle ve dalga fonksiyonu Ψ skaler ise, denklem ve dalga fonksiyonu tüm referans çerçevelerinde aynı biçime sahiptir.

Bu denklem, zamana göre birinci merteben türeve sahip değildir. Bunun anlamı şöyle açıklanabilir; tüm sonraki zamanlarda dalga fonksiyonunu belirlemek için, belirli bir zamanda dalga fonksiyonunu bilmek yeterli değildir; o an için dalga fonksiyonunun zaman türevini de bilmek zorunludur. Sonuçta bu anlamda denklem (2.4) kuantum mekaniğinin temel ilkelerinin birinden ayrılıyor gibi görünmektedir yani; dalga fonksiyonunun herhangi bir anda bilinmesi, tüm daha sonraki zamanlarda fonksiyonun belirlenmesi için yeterlidir. Ancak bu sadece aşikâr bir sorundur ve dalga fonksiyonunun yeniden yorumlanmasına yol açacaktır.

KG denklemi için elektromanyetik etkileşimlerin olduğu durumları göstermek için dört-vektör gösteriminde enerji-momentum işlemcisinin şöyle olduğunu yeniden hatırlayalım:

$$p^\mu = i \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(i \frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla \right) \equiv i\partial^\mu \quad (2.5)$$

Minimal yerleştirme yöntemini kullanarak (2.6) denklemini oluştururuz, minimal çiftlenim;

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu \quad (2.6)$$

Burada A^μ dört -vektör potansiyeldir ve bu bize aşağıdaki eşitliği verir:

$$\left[- \left(i \frac{\partial}{\partial x^\mu} - eA_\mu \right) \left(i \frac{\partial}{\partial x_\mu} - eA^\mu \right) + m^2 \right] \Psi(x) = 0 \quad (2.7)$$

2.1.1.1. Serbest Parçacık Çözümleri

Serbest parçacık KG denkleminin (yani, $U=0$ ile) çözümleri değişkenlere ayırma yöntemiyle elde edilebilir. Parçacık için periyodik sınır şartları sağlanarak, boyutları L^3 hacmiyle tanımlanan bir kutu içerisinde hareket ettiği varsayıldığında elde edilen çözümler;

$$\Phi_n^{(\pm)}(\mathbf{r}, t) = N e^{i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} \mp E_n t)} \quad (2.8)$$

$E_n = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}_n^2}$ daima pozitifdir ve çözüm fonksiyonunun üst simgesi olan (\pm) , üstel ifadede enerjinin işaretini temsil eder. Burada dikkat edileceği gibi, her iki işareti de içeren çözümler

ortaya çıkar; üst simgesi (+) olan durum 'pozitif' enerji çözümlerini (çünkü üsteldeki $-iE_n t$ çarpanı, görelî olmayan Schrödinger kuramındaki pozitif enerjiye karşılık gelir.) ve üst simgesi (-) olan durum 'negatif' enerji çözümlerini temsil eder. Her bir kenarı L olan bir küpün içine yerleştirilmiş periyodik sınır koşulları şunu gerektirir:

$$k_n = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z) \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.9)$$

Pozitif ve negatif enerji çözümlerinin normları farklı işarete sahiptir,

$$i \int_{L^3} d^3r \phi_n^{(\pm)*} \frac{\vec{\partial}}{\partial t} \phi_m^{(\pm)} = \pm 2E_n L^3 N^2 \delta_{nm} \quad (2.10)$$

burada $\delta_{nm} = \delta_{n_x m_x} \delta_{n_y m_y} \delta_{n_z m_z}$.

İnvariant (değişmez) skaler çarpımları tanımlamak için korunumlu akımın sıfıncı bileşeni kullanılır, elde edilen farklı çözümler ortogonaldır,

$$i \int_{L^3} d^3r \phi_n^{(\pm)*} \frac{\vec{\partial}}{\partial t} \phi_m^{(-)} = 0 \quad (2.11)$$

$N = (2E_n L^3)^{-1/2}$ seçersek çözümlerin her iki seçeneği $\phi^{(+)}$ ve $\phi^{(-)}$ 'nin her biri, normalize edilmiş ve ortogonal olacaktır.

$$\phi_n^{(\pm)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2E_n L^3}} e^{i(\mathbf{k}_n \mathbf{r} \pm E_n t)} \quad (2.12)$$

Pozitif enerji çözümleri olan $\phi^{(+)}$ fonksiyonları +1 normuna ve negatif enerji çözümleri olan $\phi^{(-)}$ fonksiyonları -1 normuna sahiptir. Negatif norm çözümlerinin var olması nedeniyle $\|\psi\|^2$ bir olasılık yoğunluğu olamaz ve bu durum tarihsel olarak KG denklemini kabul etmemek için bir neden olarak görüldü. Bu bakış açısı çok sınırlıdır, ancak negatif norm çözümlerinin varlığı, böyle bir denklemlerle betimlenen kuantum mekaniğinin, kuantum kuramının klasik kurallarından farklı olduğunun bir göstergesidir. Bu kurallardan biri şudur; durumlar pozitif tanımlı bir norm ile bir vektör uzayına yayılmıştır ve bu durum kesinlikle KG denklemi için geçerli değildir. KG denklemi *bir alan kuramının temeli* olarak kullanılırsa, o zaman alan kuramı tarafından tanımlanan durumların hepsi pozitif tanımlı normlara sahip olacaktır ve bu durumda da negatif enerji durumları anti-parçacıkların pozitif enerji durumları olarak yeniden yorumlanabilir.

Bununla birlikte, alan kuramı geliştirilmeden önce, KG denkleminin (kuramın ilk kuantize biçimi olarak adlandırılır) tek parçacık durumlarını betimlemek için kullanıldığı bir kuantum mekaniğinin özelliklerini çalışmak yararlıdır, hatta zorunludur. Burada ifade etmek gerekir ki, KG

için çabalanan ilk kuantize kuram sadece kısmi başarı sağlamışsa da, bunun Dirac denklemi için gereken ilk kuantize kuramın çalışılması için önemli olduğunu fark etmek gerekir. Bu denklemlerin her ikisi için de ilk kuantize kuramlar aynı temel dertten muzdariptir; denklemlerin her ikisi de, anti-parçacık olarak yeniden yorumlanıncaya kadar tam olarak düzeltilmeyen negatif enerji çözümlerine sahiptir ve bu sadece ikinci kuantizasyon biçimde tamamen başarılmıştır.

Eğer KG denklemi yüklü bir parçacığı betimlemeye uygulanırsa; norm, bir yük yoğunluğu olarak yorumlanacaktır: pozitif norm durumları (+) yükleri, negatif norm durumları (-) yükleri betimler. Böylece yük korunumu normun değişmezliğinin bir sonucu olacaktır. Parçacığın elektrik yükü yoksa ancak fazladan bir korunum yasasını sağlayan başka bir miktar kuantum sayısına sahipse, norm bu genelleştirilmiş yükün yoğunluğu olarak yorumlanabilir. Her iki durumda da, biri pozitif yük taşıyan diğeri negatif yük taşıyan iki durumun varlığı öngörülür.

Bu fikirlerin ışığında KG normunun, sürekli bir yük yoğunluğu olarak nasıl yorumlanabileceğini ve hem parçacıkların hem de anti-parçacıkların denklem tarafından nasıl tanımlandığını gösteren basit bir örneğe bakmak faydalı olacaktır.

2.1.1.2. KG İçin İki Bileşenli Biçim

Bu iki durumu açıkça göstermek ve KG denkleminin anlamını daha da geliştirmek için "iki bileşenli" biçimde denklemin nasıl kullanılabileceğini şimdi tartışacağız. Bu durum, denklemin anlaşılmasına ve göreliliğin sınırlarını incelememize yardımcı olacaktır. Herhangi bir ikinci dereceden diferansiyel denklem birinci mertebeden iki çiftlenimli diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. Bu dönüşüm zamana bağlı KG denklemine uygulanırsa, bir çiftlenimli denklem kümesi ortaya çıkar:

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = H \phi \quad (2.13)$$

Burada ϕ , karmaşık iki boyutlu bir uzayda bir vektördür ve H , 2×2 'lik bir matristir.

Bu indirgemeden birkaç avantaj elde ediyoruz. İlk olarak, denklem şimdi birinci derecedendir, böylece kuantum mekaniği kurallarına uygun olarak, iki bileşenli dalga fonksiyonunun zamana bağlılığı benzersiz olarak başlangıç değerine göre belirlenir. Bunun anlamı pertürbasyon kuramının iki-bileşenli KG denklemi ile kullanılabileceğidir. Bu kuramda zamana göre birinci dereceden olan bir denklem göz önüne alınır. Son olarak, benzer matris yapısına sahip olan Dirac denkleminin incelenmesi için iki bileşenli denklemin matris yapısının incelenmesi iyi bir hazırlık olacaktır. Ancak, iki bileşenli KG denklemi artık "açıkça kovaryant" değildir.

İki bileşenli biçime dönüşüm ψ ve $\partial\psi/\partial t$ bağımsız fonksiyonlar olarak tanımlanarak gerçekleştirilebilir. Bununla birlikte ψ ve $\partial\psi/\partial t$ yerine, daha simetrik bir çizgisel bileşim almak faydalıdır. ψ ve $\partial\psi/\partial t$ den belirlenmiş ϕ_+ ve ϕ_- fonksiyonları şu şekilde ortaya çıkar:

$$\begin{aligned}\phi_+ &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(i \frac{\partial}{\partial t} - V^0 + m \right) \psi \\ \phi_- &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(-i \frac{\partial}{\partial t} + V^0 + m \right) \psi\end{aligned}\quad (2.14)$$

Burada \pm alt indisleri (\pm) üst indisleriyle karıştırılmamalıdır; onlar tamamen birbirinden farklı anlamlara sahiptir. Denklem (2.14)'ün seçimi tek değildir, bu seçim basit olduğu ve Dirac denkleminin bazı özelliklerini verdiği için yapılmıştır. (2.14) fonksiyonları, yeni bir dalga fonksiyonunun üst ve alt bileşeni olarak tanımlanacaktır. ϕ , iki bileşenli bir sütun vektörü halinde düzenlenirse;

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix}\quad (2.15)$$

bu vektör birinci dereceden (2.13) diferansiyel denklemini sağlamaktadır.

$$\begin{aligned}H &= \begin{pmatrix} m + V^0 + \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{V})^2}{2m} & \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{V})^2}{2m} \\ -\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{V})^2}{2m} & -m + V^0 - \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{V})^2}{2m} \end{pmatrix} \\ &= \left[m + \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{V})^2}{2m} \right] \tau_3 + V^0 + \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{V})^2}{2m} i\tau_2\end{aligned}\quad (2.16)$$

burada τ : Pauli matrisleridir.

İSPAT: Denklem (2.14)'ün tanımından şöyle devam edilir,

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{\sqrt{2m}} (\phi_+ + \phi_-) \\ i \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \sqrt{\frac{m}{2}} (\phi_+ - \phi_-) + \frac{V^0}{\sqrt{2m}} (\phi_+ + \phi_-)\end{aligned}\quad (2.17)$$

(2.14)'ün türevi alınması ve (2.17) ile KG denkleminin kullanılması bize aşağıdakileri verir.

$$\begin{aligned}
 i \frac{\partial}{\partial t} \phi_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\mp \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mp i \left(\frac{\partial V^0}{\partial t} \right) + (m \mp V^0) i \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\mp \left[-(\mathbf{p} - \mathbf{V})^2 - i \left(\frac{\partial V^0}{\partial t} \right) - 2iV^0 \frac{\partial}{\partial t} + (V^0)^2 - m^2 \right] \psi \mp i \frac{\partial V^0}{\partial t} \psi \right. \\
 &\quad \left. + (m \mp V^0) \left[\sqrt{\frac{m}{2}} (\phi_+ - \phi_-) + V^0 \psi \right] \right) \\
 &= \left[\frac{1}{2} (V^0 \pm m) \pm \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{V})^2}{2m} \right] (\phi_+ + \phi_-) + \frac{1}{2} (m \mp V^0) (\phi_+ - \phi_-)
 \end{aligned}$$

Bu matris formunda yazılırsa denklem (2.13) ve (2.16) elde edilir.

(2.17) denklemini (2.12)'de yazılırsa korunumlu normun iki bileşenli biçimi şöyle olur:

$$\int_{L^3} d^3r \phi^\dagger \tau_3 \phi = \int_{L^3} d^3r (|\phi_+|^2 - |\phi_-|^2) = \text{sabit} \quad (2.18)$$

Bunun, doğrudan (2.18) denkleminin matris formundan korunduğunu kanıtlamak öğreticidir.

Bunu yapmak için, öncelikle H 'nin Hermityen olmadığına, şu şekilde olduğuna dikkat edin;

$$\tau_3 H^\dagger \tau_3 = H \quad (2.19)$$

Böylece matris τ_3 , "metrik tensör" rolünü oynar ve

$$\begin{aligned}
 i \frac{d}{dt} \int d^3r \phi^\dagger \tau_3 \phi &= i \int d^3r \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \phi^\dagger \tau_3 \phi + \phi^\dagger \tau_3 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} \\
 &= - \int d^3r \left\{ \phi^\dagger [H^\dagger \tau_3 - \tau_3 H] \phi \right\} = 0
 \end{aligned} \quad (2.20)$$

KG eşleniğini tanıtarak, gösterimi aşağıdaki gibi basitleştirilebilir.

$$\bar{\phi} = \phi^\dagger \tau_3 \quad (2.21)$$

Böylece korunan norm şöyle yazılır;

$$\int_{L^3} d^3r \bar{\phi} \phi = \text{sabit} \quad (2.22)$$

Serbest KG denkleminin çözümleri, denklemin iki bileşenli biçiminden doğrudan bulunabilir:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi = H_0 \phi = \begin{pmatrix} m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} & \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \\ -\frac{\mathbf{p}^2}{2m} & -\left(m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right) \end{pmatrix} \phi \quad (2.23)$$

Eğer $\phi_k^{(\pm)} = \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} \mp Et)}$ ise

$$\begin{pmatrix} \pm E - m - \frac{\mathbf{k}^2}{2m} & -\frac{\mathbf{k}^2}{2m} \\ \frac{\mathbf{k}^2}{2m} & \pm E + m + \frac{\mathbf{k}^2}{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix} = 0 \quad (2.24)$$

bir çözümün $E^2 = m^2 + \mathbf{k}^2$ eşitliğini ve aşağıdaki biçimi sağlaması gerektirdiğini görmek çok basittir.

$$\begin{aligned} \phi_k^+ &= N_+ \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathbf{k}^2 \\ (E+m)^2 \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - Et)} \\ \phi_{-k}^- &= N_- \begin{pmatrix} -\mathbf{k}^2 \\ (E+m)^2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - Et)} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$\phi^{(-)}$ 'nin negatif norm olduğuna dikkat edin. Eğer istersek

$$\int_{L^3} d^3r \bar{\phi}_k^{(+)} \phi_k^{(+)} = 1 \quad \int_{L^3} d^3r \bar{\phi}_{-k}^{(-)} \phi_{-k}^{(-)} = -1 \quad (2.26)$$

Sonra,

$$N_+ = N_- = N = \frac{1}{\sqrt{2EL^3}} \frac{E+m}{\sqrt{2m}} \quad (2.27)$$

Daha sonra bu çözümlerin serbest Dirac denkleminin çözümleri ile çarpıcı bir benzerlik gösterdiğini göreceğiz.

2.1.1.3. Görel Olmayan Limit

KG denkleminin yapısı hakkında daha fazla bilgi edinmek için görel olmayan limitlerini inceleriz. Bu, parçacığın kütesinin tüm momentum ve enerjilerden çok daha büyük olduğu sınırdır ve pozitif enerji çözümlerin civarında bir enerjiye sahiptir. Durgun kütle normalde göresiz

enerjide yer almadığından, $T = E - m$ şeklinde bir fark enerjisi tanımlarız. Şu biçimde bir çözüm olduğunu varsayarak

$$\phi(r, t) = \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix} e^{-iEt}$$

ve denk. (2.16)'da verilen H' 'i kullanarak çiftlenimli denklemler şu hale indirgenir:

$$Tx = \left(\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{V})^2}{2m} + V^0 \right) x + \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{V})^2}{2m} \eta$$

$$(2m + T)\eta = -\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{V})^2}{2m} x - \left(\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{V})^2}{2m} - V^0 \right) \eta, \quad (2.28)$$

Burada H' 'deki $m\tau_3$ terimi denklemin sol-yanına taşınmıştır; bu ilk denklemden benzer bir terimi yok eder fakat ikinci denklem içindeki benzer terimi de iki katına çıkarır. $m \rightarrow \infty$ iken, boyutsuz büyüklükler olan $|p|/m$, $|V^0|/m$, $|V|/m$, $|T|/m$ 'nin tüm değerleri 1'den çok küçüktür ve bu nedenle $\eta \ll x$ 'tir. İkinci denklemi m 'nin ters kuvvetleriyle genişletirsek ve m^{-3} veya daha üst derecedeki terimleri atarsak bize aşağıdaki eşitliği verecektir.

$$\eta \simeq \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{V})^2}{4m^2} x + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^3}\right) \quad (2.29)$$

Bu sonucun birinci denklemden yerine konulması, x için tam $\frac{1}{m^3}$ mertebesinde olan bir denklem verir,

$$Tx = \left\{ \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - \mathbf{V})^2 + V^0 - \frac{1}{8m^3} (\mathbf{p} - \mathbf{V})^4 \right\} x \quad (2.30)$$

Eğer $V = 0$ ise, m^{-3} derecesine kadar enerjiye göreli düzeltmeler yapılır.

$$\Delta H_{Rel} = -\frac{\nabla^4}{8m^3} \quad (2.31)$$

Bu terim, bir spin-0 parçacık için ince yapı katkısı verebilecek tek terimdir.

2.1.2. Dirac Denklemi

Bu kesimde, parçacıkların birinci kuantizasyon için göreli denklemlerin tartışılması sürdürülecektir. Geleneksel olarak, kuantum mekaniğinin orijinal şekli birinci kuantizasyon, kuantum alan kuramı ise ikinci kuantizasyon olarak ifade edilir. Önceki kesimde verilen Klein-Gordon denklemi, spinsiz parçacıkları açıklıyordu. Bu kesimde, spin-1/2 olan, iki iç serbestlik

derecesine sahip olan parçacıkları tanımlayan Dirac denklemi irdelenecektir. Hem elektronların hem de kuarkların spini-1/2 olduğundan, Dirac denkleminin birçok ilginç uygulaması vardır.

2.1.2.1. Denklemin Ortaya Çıkışı

Önceki kesimde tartışıldığı üzere, KG denkleminin iki bileşenli biçimi şöyle yazılabiliyordu:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi \quad (2.32)$$

Bu denklem, zamana göre birinci merteye türevli iken, (2.16)'daki KG Hamiltoniyeni uzaya göre ikinci mertebeden türevlidir, bu nedenle uzay ve zamanı aynı biçimde ele almaz. Ayrıca, KG kuramı için korunumlu norm pozitif tanımlı olmadığı için, iki bileşenli KG "Hamiltoniyeni" Hermityen değildir. Son olarak, KG denkleminin değişmezliği yalnızca gerçek tek bileşenli biçiminde ortaya çıkar. Burada şu sorunun sorulması doğaldır: "Zamana göre birinci mertebeden türevi olan, uzay ve zamanı açıkça simetrik bir şekilde ele alan, pozitif tanımlı korunumlu bir norma sahip olan (H'nin Hermityen olduğu anlamına gelir) ve "açıkça kovaryant" olan görelî bir denklem var mıdır? Bu sorunun araştırılması bizi doğrudan Dirac denklemine götürür. Bu soruyu cevaplamak için, hem uzay hem de zamana göre birinci merteye ve Hermityen olan bir denklem ararız. Denklemin biçimi şöyle olmalıdır:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \psi \quad (2.33)$$

α ve β Hermitian matrislerdir ve $\mathbf{p} = -i\nabla$ 'dir. Görelî enerji ve momentum bağıntısı doğal olarak ortaya çıkmalıdır, bu yüzden şu eşitliğe ihtiyaç duyulur.

$$\begin{aligned} E^2 \psi &\Rightarrow -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = i \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \psi \\ &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)^2 \psi \\ &= (p^2 + m^2) \psi \end{aligned} \quad (2.34)$$

Bu bağıntının tüm ψ için geçerli olması istenmesi bize aşağıdaki denklemi verir.

$$(\alpha_i p^i + \beta m)^2 = \beta^2 m^2 + (\alpha_i)^2 (p^i)^2 + \{\beta, \alpha_i\} m p^i + \frac{1}{2} \{\alpha_i, \alpha_j\}_{i \neq j} p^i p^j = \sum_i (p^i)^2 + m^2 \quad (2.35)$$

$\{A, B\} = AB + BA$, olur ki bu A ve B işlemcilerinin anti-komütatördür. Bu denklem sadece şu şartta sağlanabilir:

$$\begin{aligned}\beta^2 &= (\alpha_i)^2 = 1 \\ \{\beta, \alpha_i\} &= \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0\end{aligned}\tag{2.36}$$

Bu yüzden böyle bir denklem oluşturmak, dört tane sıra-değiştirmeyen, Hermityen matrisi içerecek kadar büyük bir vektör uzayı gerektirir. Böyle bir uzayın en az dört boyuta sahip olması ve bu nedenle de α_i ve β 'nın matrislerinin en az 4×4 boyutunda olması gerektiğini kanıtlamak kolaydır. İspat dört adımda gerçekleşir:

Yardımcı Teorem 1:

β ve α_i matrisleri izsizdir.

Bunu α_i matrislerini ispatlamak için, sıra-değiştirme bağıntılarının şunu belirttiğine dikkat edin:

$$\beta \alpha_i \beta = -\alpha_i$$

Matrislerin çarpımının izinin, matrislerin devirli permütasyonu ile değişmez kalacağı gerçeğinin kullanılması şunu verir;

$$\text{tr}\{\beta \alpha_i \beta\} = -\text{tr}\alpha_i$$

$$= \text{tr}\{\alpha_i \beta \beta\} = \text{tr}\alpha_i$$

Bu nedenle, $\text{tr}\alpha_i = 0$ olur. Benzer bir argüman, $\text{tr}\beta = 0$ olduğunu gösterir.

Yardımcı Teorem 2:

α_i ve β 'nin öz-değerleri ± 1 olmalıdır. α_i ve β Hermityen oldukları için köşegenleştirilebilirler ve $(\alpha_i)^2 = \beta^2 = 1$, köşegen elemanları (öz-değerleri) yalnızca ± 1 olabilir.

Yardımcı Teorem 3:

Matrislerin boyutları eşit olmalıdır. Köşegen formda α_i ve β 'nin köşegen elemanları sadece ± 1 olabilir ve $\text{tr}(\alpha_i) = \text{tr}\beta = 0$ olduğu için, bu matrislerin hepsinde +1'lerin sayıları -1'lerin sayılarına eşit olmalıdır. Dolayısıyla boyut ancak çift olabilir.

Yardımcı Teorem 4:

Boyutların sayısı 2'den büyük olmalıdır. Genel olarak, n boyutta n^2 bağımsız Hermityen matris vardır; birim matrisi çıkardığımızda $(n^2 - 1)$ tane *Hermityen izsiz matris* vardır. Dolayısıyla $n = 2$

için sadece üç tane vardır (ki bunlar Pauli matrisleri olarak alınabilir, σ_i), $n = 4$ için on beş tane vardır.

Dört Dirac matrisi için aşağıdaki gösterimi seçeceğiz:

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

2x2 blok şeklinde yazılmış matrisler ve σ_i Pauli matrisleridir. Böylece serbest parçacık Dirac denklemi şu hale gelir:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\alpha_i \nabla_i + \beta m)\psi \quad (2.38)$$

Alternatif olarak, aşağıdaki eşitlikle tanımlanan γ^μ matrislerinin cinsinden yazılabilir.

$$\gamma^\mu = (\beta, \beta\alpha_i)$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 1 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

γ matrisleri ile ifade edildiğinde, anti-komütasyon bağıntıları olan (2.36) aşağıdaki gibi olur.

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (2.40)$$

Dirac denklemini β ile çarpmak ($\nabla_i = \partial/\partial x^i$ olduğunu hatırlayın.) aşağıdaki biçimi yazmamıza olanak sağlar.

Kovaryant Dirac Denklemi;

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right) \psi = 0 \quad (2.41)$$

Minimal çiftlenim, $p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu$, kullanılarak elektromanyetik etkileşimler Dirac denklemine eklenebilir. Böylece şu biçimi elde ederiz:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi = [\alpha_i(-i\nabla_i - eA^2) + eA^0 + \beta m]\psi \quad (2.42)$$

veya kovaryant formda;

$$\left[\gamma^\mu \left(i \frac{\partial}{\partial x^\mu} - eA_\mu \right) - m \right] \psi = 0$$

2.1.2.2. Dirac Denklemi için Serbest Parçacık Çözümleri

KG kuramında olduğu gibi, serbest parçacık Dirac denkleminin çözümlerinin genel biçimi:

$$\psi_p^{(\pm)}(r, t) = N_p e^{i(\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{r} \mp E_p t)} \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

(\pm) üst indisi pozitif (+) veya negatif (-) enerji çözümlerini belirtir. Periyodik sınır koşullarını önceki kesimde yaptığımız gibi kullanırsak,

$$\mathbf{p}_n = \frac{2\pi}{L} (n_x, n_y, n_z) n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.44)$$

daima $E_0 > 0'$ dir. Kolaylık için, n alt indisi sık sık ihmal edilir, böylece $\mathbf{p}_n \rightarrow \mathbf{p}$ ve p 'nin büyüklüğü p^* ile gösterilir.

Önce pozitif enerji çözümlerini düşünün. (2.43) yaklaşımını serbest parçacık Dirac denkleminde yerine koyarsak şunu buluruz:

$$E_p \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x} = \begin{pmatrix} m & -i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{\nabla} \\ -i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{\nabla} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x}$$

Böylece,

$$\begin{aligned} E_p x &= mx + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \eta \\ E_p \eta &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} x - m \eta \end{aligned} \quad (2.45)$$

Bu denklemlerin sıfır olmayan bir çözüme sahip olması için katsayılar matrisinin determinanı sıfır olmalıdır. $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = p^2$ eşitliğini kullanarak, determinantın sıfır olması şartı, bildiğimiz enerji-momentum bağıntısını verir.

$$E_p^2 = p^2 + m^2$$

Daha sonra x cinsinden η' yi ifade etmek için ikinci eşitlik kullanılır:

$$\eta = \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \right) x \quad (2.46)$$

Bu ifade, keyfi iki-bileşenli x spinör cinsinden pozitif enerji çözümünü verir. $x^\dagger x = 1$ seçilmesi ve durumların teklik için normalleştirilmesi, N_p normalizasyon sabitini belirler:

$$\int_{L^3} d^3 r \psi^\dagger \psi = 1 = N_p^2 L^3 x^\dagger \left[1 + \frac{p^2}{(E_p + m)^2} \right] x$$

$$= N_p^2 L^3 \left[1 + \frac{E_p - m}{E_p + m} \right] = N_p^2 L^3 \frac{2E_p}{E_p + m} \quad (2.47)$$

Bu nedenle normalizasyon sabiti

$$N_p = \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p L^3}} \quad (2.48)$$

(2.43) pozitif enerji çözümünü aşağıda tanımlanan pozitif enerjili Dirac spinörü, $u(\mathbf{p}, s)$ cinsinden yazmak gelenekseldir:

$$u(\mathbf{p}, s) \equiv \sqrt{E_p + m} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \end{pmatrix} x^{(s)} \quad (2.49)$$

Burada $x^{(s)}$, spin $\frac{1}{2}$ parçacık durumunu tanımlayan iki bileşenli spinördür. Eğer \hat{z} yönünde kuantize etmeyi seçersek, $x^{(s)}$ spinörü σ_3 'ün özvektörleri olacaktır.

$$x^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x^{(-\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Son olarak, serbest parçacık Dirac denkleminin normalize edilmiş pozitif enerji çözümleri şöyle olur:

$$\psi_{p,s}^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2E_p L^3}} u(\mathbf{p}, s) e^{-ip \cdot x} \quad (2.51)$$

Şimdi negatif enerji çözümlerini bulalım. Bu durumda (2.43) yaklaşımı çiftlenimli Dirac denklemlerini aşağıdaki biçime indirger:

$$-E_p x = m x + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \eta$$

$$-E_p \eta = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} x - m \eta \quad (2.52)$$

Pozitif enerji durumunda olduğu gibi, $E^2 = p^2 + m^2$ koşulu, sıfır olmayan bir çözüm var olsun diye (2.52)'nin matris katsayılarının determinantının sıfır olmasını garanti eder. x için η cinsinden çözüm

$$x = - \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \right) \eta \quad (2.53)$$

$\eta^\dagger \eta = 1$ seçeriz ve durumu daha önce olduğu gibi 1'e normalize ederiz. Bu (2.48) N_p normalizasyon sabiti için aynı sonucu verir. Bir sonraki kesimde ortaya çıkacak nedenlerden dolayı, fazları (işaretleri) şu biçimde seçeriz:

$$\begin{aligned}\eta^{(-s)} &= -i\sigma_2 x^{(s)} \\ \eta^{(-\frac{1}{2})} &= -i\sigma_2 x^{(+\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \end{pmatrix} \\ \eta^{(+\frac{1}{2})} &= -i\sigma_2 x^{(-\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{2.54}$$

σ_2 Pauli matrisidir. İşaret antlaşmasının $\eta^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 'yü seçen Bjorken ve Drell'den (1964) farklı olduğuna dikkat edin. Eğer negatif enerji Dirac spinor, $v(\mathbf{p}, s)$ 'yü tanımlarsak,

$$v(\mathbf{p}, s) = \sqrt{E_p + m} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \\ 1 \end{pmatrix} [-i\sigma_2 x^{(s)}]\tag{2.55}$$

normalize edilmiş negatif enerji çözümleri şu biçime dönüşür:

$$\psi_{-p, -s}^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2E_p L^3}} v(\mathbf{p}, s) e^{ip \cdot x}\tag{2.56}$$

Moment - p ve spin - s için negatif enerji çözümünün, momentum p ve spin s ile v spinör cinsinden ifade edildiğine dikkat edin. Bu, yakında tartışılacak olan *deşik kuramı* yorumlamasına uygundur. Pozitif ve negatif enerji spinörlerinin ortogonal olmasından dolayı (+) ve (-) çözümlerin ortogonal olduğuna dikkat edin:

$$v^\dagger(-\mathbf{p}, s') u(\mathbf{p}, s) = u^\dagger(\mathbf{p}, s) v(-\mathbf{p}, s') = 0\tag{2.57}$$

2.1.2.3. İki Bileşenli KG Çözümleriyle Karşılaştırma

Bu çözümleri Denklem (2.25)'te verilen iki bileşenli KG çözümleri ile karşılaştırmak pekiştirici olacaktır. Karşılaştırma Tablo 2.1'de sunulmaktadır. Temel fark, Dirac kuramının, $\frac{1}{2}$ spinli parçacığın sahip olduğu iç serbestlik dereceleri ile tanımlanan fazlardan iki bileşenli bir yapıya (iki spinör $x^{(s)}$ içinde yer alır) sahip olmasıdır. Aksi halde, her iki durumda da pozitif ve negatif enerji çözümlerinin yapısı benzerdir. Her iki durumda da pozitif enerji çözümlerinin alt

bileşenleri, daha geniş üst bileşenlerden daha küçüktür ve negatif enerji çözümleri için tam tersinedir.

Tablo 2.1. Dirac ve KG Çözümlerinin Karşılaştırılması

	Dirac	Klein-Gordon
Çözümler	$f_p(x) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p L^3}} e^{-ip \cdot x}$	$g_k(x) = \frac{E_k + m}{\sqrt{4mE_k L^3}} e^{-ik \cdot x}$
Pozitif Enerji	$\psi_{p,s}^{(+)}(x) = f_p(x) \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \end{bmatrix} \chi^{(s)}$ norm = 1	$\phi_k^{(+)}(x) = g_k(x) \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{k}^2 \\ (E_k + m)^2 \end{bmatrix}$ norm=1
Negatif Enerji	$\psi_{-p,-s}^{(-)}(x) = f_{-p}(x) \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \\ 1 \end{bmatrix} \eta^{(-s)}$ norm = 1	$\phi_{-k}^{(-)}(x) = g_{-k}(x) \begin{bmatrix} -\mathbf{k}^2 \\ (E_k + m)^2 \\ 1 \end{bmatrix}$ norm=-1

Dirac kuramında, küçük bileşenlerin bu baskılanması, spin'e (Pauli spin matrislerinin görünümü ile) bağlı ve $p/(E_p + m)$ 'nin büyüklüğü ile orantılı iken, KG kuramında baskılama, benzer bir çarpanın karesi olması nedeniyle daha büyüktür. Bu, Dirac kuramında görelî düzeltmelerin spine bağlı olduğunu ve KG kuramında elde edilene göre daha büyük olmasını beklememizi gerektirir.

Ayrıca Dirac denklemi için;

$\psi_{p,s}^{(+)}(x)$: Pozitif enerjili, momentumu p ve spin izdüşümü s olan bir parçacık için dalga fonksiyonudur.

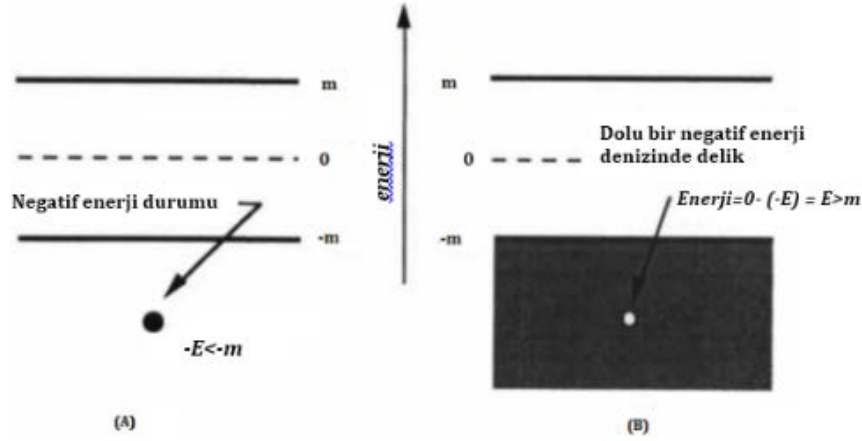
$\psi_{-p,-s}^{(-)}(x)$: Momentumu $-p$, ve spin izdüşümü $-s$ olan bir negatif enerji durumu için dalga fonksiyonudur ki; pozitif enerjili, momentumu p , ve spin izdüşümü s olan bir anti parçacık durumu olarak yorumlanır.

Bir önceki kesimde KG denklemi çalışmamızda, negatif enerji durumlarını da karşıt parçacıklar olarak yorumladık. Bununla birlikte, bu yorumlamanın geliştirilme biçimi iki denklem için oldukça farklıdır. İlk olarak, KG parçacıkları (sıfır spinli) Bose-Einstein istatistiklerine uyar ve

herhangi bir negatif enerji durumunu işgal edebilecek negatif enerjili parçacıkların sayısında bir sınır yoktur. Herhangi bir pozitif enerjili KG durumu bu nedenle kendiliğinden kararsızdır; bunun sonunda negatif enerjili bir duruma dönüşmesini engellemenin bir yolu yoktur. Öte yandan, Dirac parçacıkları ($\frac{1}{2}$ spinli) Fermi-Dirac istatistiğine uyar. Bu, herhangi bir durumu birden fazla parçacığın işgal edemeyeceği anlamına gelir (Pauli dışarlama ilkesi). Fiziksel boşluk (vakum) tüm negatif enerjili durumların doldurulduğu durum olarak varsayılırsa, tek bir pozitif enerjili durum kararlı olacaktır. Çünkü negatif enerjili durumlara bozunma, dolu negatif enerji denizi tarafından Pauli engellenmesiyle karşılaşacaktır ve biz, tek bir parçacık için en düşük enerjinin neden m olduğunu "açıklayabiliriz" (ve eğer negatif enerji durumları henüz dolmadıysa bekleneceği gibi $-\infty$ olmadığını). Ayrıca, temel durumun enerjisi her zaman sıfır olarak seçilebilir. Çünkü vakumun bu resmi fiziksel olarak anlaşılabilir. Deşik kuramı olarak adlandırılan bu resimde, bir karşıt parçacık vakumdaki bir "deşik" olarak yorumlanır, yani bunun dışında doldurulmuş negatif enerji denizindeki parçacıklardan birinin *yokluğu* olarak yorumlanır. Bir negatif enerjili durumun *yokluğu* olarak karşıt bir parçacık *pozitif* enerjiye sahiptir.

Bu fikirler Şekil 2.1.'de gösterilmektedir. Şekil 2.1. A'da, vakumda parçacıklar yoktur, bu nedenle enerjisi $-E < -m$, momentumu $-\mathbf{p}$ ve spini $-s$ olan bir parçacık mevcut olabilir. Şekil 2.1. B'de vakumun negatif enerji durumlarıyla doldurulduğu varsayılmaktadır. Bu durumda, kuantum sayıları $-E < -m$, $-\mathbf{p}$ ve $-s$ olan tek bir negatif enerjili durumun yokluğu bu vakumda birdeşik olarak görünür. Bu kuantum sayıları için vakum değerlerinin sıfır olması gerektiğinden (tanım gereği),deşik bu nedenle, enerji $0 - (-E) = E$, momentum $0 - (-\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ ve spin izdüşümü $0 - (-s) = s$ olan bir parçacık gibi davranır veya enerjisi $E > m$, momentumu \mathbf{p} ve spin izdüşümünün s olduğu bir pozitif enerjili karşıt parçacık gibi davranır. Bu nedenle,deşik kuramı, negatif enerjiyle karşıt parçacık durumlarının nasıl ilişkili olduğuna dair fiziksel bir resim sunar. Matematiksel olarak, bu ilişki yük eşleniği dönüşümü ile ifade edilir.

Deşik kuramı, görelî kuantum mekaniğinin gelişiminde önemli bir rol oynamıştır, ancak modern alan kuramı tarafından değiştirilmiştir. Artık boşluğu negatif enerji parçacıklarıyla dolu olarak düşünmüyoruz. Sonuç olarak bir kuantumlu alan, sıfır spinli parçacıkların (bir dışarlama ilkesini sağlamayan) veya $\frac{1}{2}$ spinli parçacıkların betimlenmesi için aynı derecede uygun olacaktır. Her iki durumda da hem parçacık hem de karşıt parçacık *serbestlik dereceleri* pozitif enerjiye sahiptir. Bununla birlikte,deşik kuramı hala bize fiziksel karşıt parçacıklar ile tek-cisim görelî dalga denkleminin çıkan negatif enerjili durumlar arasındaki bağlantının yararlı bir fiziksel resmini verir.



Şekil 2.1. Dirac Elektron Denizi [4].

2.1.3. Duffin-Kemmer-Petiau Denklemi

Dirac denkleminin 1930'lu yıllarda spinli diğer temel parçacıkları betimlemek için de çabalar gösterildi. Bu yıllarda yazılan DKP denklemi görelilik spin-0 ve spin-1 parçacıklarını aynı anda betimleyen bir denklemdir. Spin-1 parçacıklar aracı vektör bozonlar olarak da adlandırılır. Elektromanyetik alanların taşıyıcı parçacıkları spin-1 olan kütsüz fotonlardır. Zayıf alanların taşıyıcı tanecikleri ise 1982 yılında CERN'de keşfedilen vektör bozonlardır: W ve Z bozonları. Bu parçacıkların keşfedilmesinden sonra vektör bozonların dinamiği çeşitli potansiyellerde incelenmiştir. Spinsiz ve spin-1 skaler ve vektör bozonları temsil eden 16 bileşenli dalga fonksiyonuna sahip DKP denkleminin kovaryant biçimi aşağıdaki gibi verilir [8]:

$$[i\beta^a(\partial_a + ieA_a) - M]\Psi_K(x) = 0 \quad (2.58)$$

Burada M, vektör bozonların kütlesi; e, parçacığın taşıdığı elektriksel yük; A_a , dış elektromanyetik alan ve β^a Minkowski uzay-zamanında tanımlanan 16x16'lık Kemmer matrisleridir. Bu matrislerin sağlamış oldukları sıralama bağıntısı ilk olarak aşağıdaki biçimde Duffin tarafından önerilmiştir.

$$\beta^{(a)}\beta^{(b)}\beta^{(c)} + \beta^{(c)}\beta^{(b)}\beta^{(a)} = \beta^{(a)}\delta^{(bc)} + \beta^{(c)}\delta^{(ba)} \quad (2.59)$$

Denkleminde yer alan $\Psi_K(t, \vec{x})$ dalga fonksiyonu 16 bileşenlidir ve bu fonksiyon yerel Lorentz dönüşümleri altında değişmez kalır [9]. Bu değişmezlikte önemli olan eski koordinat sisteminden yeni koordinat sistemine geçişi sağlayan uygun lineer koordinat dönüştürücüsünün bulunmasıdır. Bu koordinat dönüşümünü sağlayan ifade $x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ şeklindedir. Bu durumda

olasılık dalga fonksiyonu yeni koordinat sistemine göre şekillenir ve eski koordinat sistem ile olan ilişkisi dönüştürücünün bir fonksiyonu olan $U(\Lambda)$ ile sağlanır ve bu dönüştürücü fonksiyonun kendi değişkeni ile olan ilişkisi aşağıdaki biçimdedir:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = U(\Lambda)\Psi \quad (2.60)$$

$$U^{-1}\beta^\mu U = \Lambda^\mu_\nu \beta^\nu \quad (2.61)$$

$\Lambda^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + w^{\mu\nu}$ ($w^{\mu\nu} = -w^{\nu\mu}$) biçiminde tanımlanan dönüştürücüdeki sonsuz küçük değişim için sonsuz küçük Lorentz dönüşümü aşağıdaki biçimde olur.

$$U = 1 + \frac{1}{2}w^{\mu\nu}S_{\mu\nu} \quad ; \quad S_{\mu\nu} = [\beta_\mu, \beta_\nu] \quad (2.62)$$

Bu kesimde görelilik kuantum mekaniğinin temel parçacık denklemleri ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Bir sonraki kesimde Genel Görelilik Kuramına ilişkin temel düzeyde bilgi verilecektir.

2.2. Genel Görelilik Kuramına Giriş

*Şüphesiz ki henüz yazılmamış kütleçekimin kuantum alan kuramı
modern fiziğin kutsal kasesi olacaktır...*

Son yıllarda, doğanın temel kuvvetlerinin birleşik kuramının oluşturulmasında önemli bir ilerleme kaydedilmiştir. Elektromanyetik ve zayıf etkileşimler, Weinberg-Salam kuramı ile birleştirilmiştir; kuantum renk dinamiği ile betimlenen güçlü etkileşim daha geniş çapta bir kuram ile birleştirilmeye çalışılırken büyük birleşik kuramlar ile başarıya ulaşıyor gibi görünmektedir. Bu ardışık birleştirmede garip olan şey yerçekimidir. Yerçekimi sadece doğadaki diğer üç kuvvetin dışında durmuyor inatla kuantum çatısı ile elde edilme girişimlerine karşı da direnmektedir. Kütleçekimsel alanın kuantizasyonu, son 40 yıl boyunca büyük bir ustalıklarla ve çabayla gerçekleştirilmeye çalışılmıştır. Ancak, tamamıyla tatmin edici bir kütle çekim kuantum kuramı elde edilememiştir: Belki de en umut verici yaklaşımlar; gravitonun, hem fermiyonlar hem de bozonlar gibi parçacıkları içeren çoklu yapının bir üyesi olduğu varsayılan süper kütleçekimi kuramlarıdır.

Uygulanabilir bir kuantum kütleçekim kuramı yokken, kütleçekim alanı kuantum olayları üzerindeki etkisi hakkında herhangi bir şey söyleyebilir mi? Kuantum kuramının ilk günlerinde, elektromanyetik alanın, kuantize madde ile etkileşime giren klasik bir alan olarak değerlendirildiği birçok hesaplama yapılmıştır. Böylesi bir yarı klasik yaklaşım tam olarak kuantum elektrodinamik kuramına uyan bazı sonuçlar verir, bu nedenle madde alanları her zamanki gibi ölçülürken, kütleçekimsel alanın klasik bir temel olarak tutulduğu, kütleçekiminin

kuantum yönleri için benzer bir yaklaşımın varlığı ümit edilebilir. Einstein'ın genel görelilik kuramını kütleçekiminin bir açıklaması olarak kabul etmek, bu yöndeki eğri uzay tanımlamasına öncülük eder [7].

2.2.1. Minkowski Uzayı ve Metriği

Uzayın yanı sıra zaman için ölçüm sonuçlarının koordinat çerçevesine bağlı olması, zamanın uzay koordinatları ile aynı temelde ele alınabileceği anlamına gelir. Uzay ve zamanın birleşmesi; uzay ve zaman koordinatları, aynı vektörde gösterilerek açık bir şekilde yapılabilir. Dört boyutlu uzay, indisin $\mu = 0, 1, 2, 3$ olmasıyla $\{x^\mu\}$ koordinatlarına sahiptir [5].

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (2.63)$$

Skaler çarpım $\mathbf{V} \cdot \mathbf{U} = g_{ij}V^iU^j$ için özellikle sonsuz küçük aralığı dikkate alırsak $ds^2 = dx \cdot dx = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Burada dx 4-boyutlu Minkowski uzayında bir 4'lü-vektördür. Lorentz dönüşümü geometrik olarak Minkowski uzayında $ds'^2 = ds^2$ uzunluğunu koruyan bir "dönme" olarak yorumlanabilir:

$$ds^2 = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} \equiv \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.64)$$

Son satırda Einstein toplama kuralı kullanılmıştır. Böylece Minkowski uzayı şu metriğe sahiptir:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \equiv \eta_{\mu\nu} \quad (2.65)$$

Metrik sabit olduğundan, Minkowski uzay-zamanının düz uzay olduğunu söyleriz. Uzay-zaman manifoldu madde ve enerjinin varlığında büzülür. Ashında, Einstein'ın genel görelilik kuramında eğri uzay-zaman kütleçekimsel alandır ve metrik $g_{\mu\nu}(x)$ mutlaka dört-konuma bağlıdır. Sanki-Öklidyen düz uzay-zaman sadece kütleçekimi yokluğunda elde edilir. Bu özel göreliliğin bir limitidir. Lorentz koordinat dönüşümü $dx' = [L] dx$ matris formu olarak yazılabilir:

$$dx'^\mu = [L]^\mu_\nu dx^\nu \quad (2.66)$$

Buradaki dx , bir 4lü-vektör ve $[L]$, 4x4 Lorentz dönüşüm matrisidir ve Minkowski uzayında bir dönme olarak kabul edilebilir. $[L]$ 'nin elemanları uzunluk-değişmezlik şartı ile sabitlenebilir:

$$[L][\eta][L]^T = [\eta] \quad (2.67)$$

Görelilik yaklaşımını koordinat simetrisi olarak vurgularız. Görelilik ilkesi fizik denklemlerinin koordinat dönüşümleri altında kovaryant olması gerektiğini söyler. Bu ilkenin otomatik olarak yerine getirilmesini sağlamak için tek yapılması gereken, fizik denklemlerini tensörler cinsinden yazmaktır. Tensörler, koordinat dönüşümleri altında belirli dönüşüm özelliklerine sahip matematiksel nesnelere ve en basit örnekleri skalerler ve vektörlerdir. Bir denklemdeki her terim aynı tensör özelliğine sahipse, yani koordinat dönüşümleri altında aynı şekilde dönüşüm yaparsa, denklemin matematiksel biçimi bu dönüşümler altında değiştirilmez. Bu kesimde 4-boyutlu (4D) uzay-zamanındaki temel tensörlere bakılacaktır. Formalizm, özel görelilik (SR) ile ilgili evrensel Lorentz dönüşümleri için yeterli olacaktır.

2.2.2. Tensörlerin Cebiri ve Metrik Uzay

- i. x^i koordinatlar sisteminde, $A^{ij\dots n}$ bileşenlerine sahip ve $x^{i'}$ sisteminde $A^{i'j'\dots n'}$ bileşenlerine sahip olan bir nesnenin, $\{x^i\} \rightarrow \{x^{i'}\}$ dönüşümü altında aşağıdaki koşulu sağladığında Kontrovaryant bir tensör olarak davrandığı söylenir:

$$A^{i'j'\dots n'} = A^{ij\dots n} p_i^{i'} p_j^{j'} \dots p_n^{n'} \quad (2.68)$$

- ii. Benzer şekilde, $A_{ij\dots n}$ 'in $\{x^i\} \rightarrow \{x^{i'}\}$ dönüşümü altında kovaryant tensör olarak davrandığı söylenir:

$$A_{i'j'\dots n'} = A_{ij\dots n} p_i^{i'} p_j^{j'} \dots p_n^{n'} \quad (2.69)$$

- iii. Son olarak, $\{x^i\} \rightarrow \{x^{i'}\}$ dönüşümü altında $A_{l\dots n}^{i\dots k}$ 'nın, karma bir tensör ($i\dots k$ 'da Kontrovaryant ve $l\dots n$ içinde kovaryant olarak) gibi davrandığı söylenir:

$$A_{l'\dots n'}^{i'\dots k'} = A_{l\dots n}^{i\dots k} p_i^{i'} \dots p_k^{k'} p_l^{l'} \dots p_n^{n'} \quad (2.70)$$

(2.70) 'in hem (2.68)'i hem de (2.69)' u özel durumlar olarak açıkça kapsadığını unutmamalıyız.

Kontrovaryant tensörler, eski x^i 'ye göre yeni $x^{i'}$ koordinatlarının türevlerini içerir, kovaryant tensörler, yeni koordinatlara göre eski koordinatların türevlerini içerir ve karma tensörler, her iki türev türünde içerir [6]. Kovaryanslık için alt indislerin kullanılması ve kontrovaryanslık için üst indislerin kullanılması anlaşılması, her iki tarafındaki serbest indislerin dengelenmesi şartı ile birlikte (2.68)- (2.70) denklemlerinin yeniden türetilmesi için iyi bir anımsatıcı görev görür.

Skaler, koordinat sisteminden bağımsız olarak sadece konumun bir fonksiyonudur. Dolayısıyla skaler, genellikle invaryant olarak adlandırılır. Açıkçası, herhangi iki tensör tüm ilgili koordinat

sistemlerinde aynı bileşenlere sahiplerse, iki tensörü eşit olarak farz edebiliriz. Şimdi, tensör hesabının temel teoremi şudur: Aynı türden iki tensörün (yani, aynı sayıda alt indise ve üst indise sahip olan) herhangi bir koordinat sisteminde eşit bileşenleri varsa o zaman tüm koordinat sistemlerinde eşit bileşenleri vardır. Bu tanım (2.70)'in bir sonucudur. Bu "teorem", tensör (bileşen) denklemlerinin her zaman fiziksel veya geometrik gerçekleri ifade ettiğini, yani onları tanımlamak için kullanılan koordinat sistemini aşan gerçekleri ifade eder. Tensör cebiri, tensörlerden tensör üretme özelliğine sahip dört temel işlem (toplama, dış çarpım, daralma ve indis permütasyon) oluşur. Hepsisi, tensör bileşenleri üzerindeki ilgili işlemlerle tanımlanabilir, ancak daha sonra tensör karakteri için kontrol edilmelidir.

$A_{k\dots}^i$ ve $B_{k\dots}^i$ olarak ifade edilen 2 aynı tür tensörün toplamı $C_{k\dots}^i$ şöyle tanımlanır:

$$C_{k\dots}^i = A_{k\dots}^i + B_{k\dots}^i.$$

$$\begin{aligned} C_{k'}^{i'} &= A_{k'}^{i'} + B_{k'}^{i'} = A_{k'}^i p_i^{i'} p_{k'}^{k'} + B_{k'}^i p_i^{i'} p_{k'}^{k'} \\ &= (A_k^i + B_k^i) p_i^{i'} p_{k'}^{k'} = C_k^i p_i^{i'} p_{k'}^{k'}. \end{aligned}$$

A_{\dots} ve B_{\dots} keyfi türden tensörler iseler, bu tensörlerin bileşenleri yan yana yazılırsa bu yazım dış çarpımları tanımlar. Yani,

$$C_{klm}^{ij} = A_k^i B_{lm}^j$$

indisleri ile gösterilen türde bir tensördür.

Dış çarpım ile birlikte daralma bir iç çarpımla sonuçlanır (örneğin, $C_{ikl} = A_{ij} B_{kl}^j$). Belirli bir durumun daralması veya iç çarpımı, boşta indis kalmadığında ortaya çıkar: Sonuç invarianttır. Örneğin, A 'lar tensör ise $A_i^i, A_{ij}^{ij}, A_{ij} A^{ij}$ invarianttır. (Özel bir durum: $\delta_i^i = N$.)

Ayrıca "simetri", $A_{ij} = A_{ji}$ veya $A_{ijk} + A_{jki} + A_{kij} = 0$ gibi tensör bileşenleri arasındaki ilişkiler, tensör denklemleridir ve bunlar çalışılan koordinatlardan bağımsızdır. Tensörlerin rol oynadığı birçok uzay *metrik* uzaydır; yani, "mesafeleri" komşu nokta çiftlerine atayan bir kurala sahiptir. Özellikle, invariant bir ikinci dereceden diferansiyel form varsa, bir uzay (sözde-) Riemann adlandırılır:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.71)$$

g 'ler genel olarak konumun fonksiyonudurlar ve yalnızca $\det(g_{ij}) \neq 0$ olarak verilen koşullarına uymak zorundadırlar. ds^2 'nin invariant olmasını istediğimiz için, g_{ij} 'nin bir tensör olması gerektiğini söyleriz. Buna metrik tensör ve (2.71)'e de metrik diyoruz.

Riemann uzaylarında çoğu zaman Öklid uzaylarındakine benzer vektörler için bir gösterim kullanılır. Böylece herhangi bir A için A^i yazılır ve iki vektörün skaler çarpımı değişmez (invariant) olarak tanımlanır:

$$A \cdot B = g_{ij} A^i B^j \quad (2.72)$$

Minkowski uzayı gibi sözde-Riemann uzaylarında, bir vektörün karesi,

$$A^2 = A \cdot A = g_{ij} A^i A^j \quad (2.73)$$

pozitif veya negatif gerçel sayı olabilir. A^2 den (negatif olmayan) $|A|$ veya basitçe A , büyüklüğü şu denklemden tanımlar:

$$A = |A^2|^{1/2} \geq 0 \quad (2.74)$$

Metrik ds^2 'nin kendisi, büyüklüğü ds ile gösterilen diferansiyel yer değiştirme vektörünün $ds = dx^i$ karesi olarak kabul edilebilir.

Riemann uzaylarında, indislerin yükseltilmesi ve düşürülmesi gibi beşinci bir temel cebirsel tensör işlemi vardır. Bu amaçla, g^{ij} 'yi (g_{ij}) matrisinin tersinin elemanları olarak tanımlarız. (g_{ij})'nin simetrisi nedeniyle, onun tersi g^{ij} de simetriktir. g^{ij} 'ler aşağıdaki denklemlerle bir değerle tanımlanabilir:

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i. \quad (2.75)$$

$g^{i'j'}$, $x^{i'}$ sistemindeki g^{ij} 'nin tensör dönüşümlerini belirtiyorsa, o zaman, tensör bileşen denklemlerinin biçimsel-değişmezlik olarak (g_{ij} ve δ_j^i olduğundan), (2.75)'ten şu ifadeye sahip oluruz:

$$g^{i'j'} g_{j'k'} = \delta_{k'}^{i'}.$$

Fakat bunlar aynı zamanda ($g_{i'j'}$) matrisinin tersini ($g^{i'j'}$) tanımlayan denklemlerdir. Dolayısıyla, tüm koordinat sistemlerinde (2.75) gibi denklemlerle tanımlanan g_{ij} , g^{ij} ile eşlenik olduğu söylenen kontrovaryant bir tensörü oluşturur.

Şimdi indisleri yükseltme ve düşürme işlemleri, belirli bir tensörün g_{ij} veya g^{ij} ile iç çarpımlarından oluşur. Örneğin, verilen bir kontrovaryant A^i vektörünü, onun kovaryant bileşenleri A_i ile tanımlarız.

$$A_i = g_{ij} A^j \quad (2.76)$$

Tersine, bir kovaryant vektör B_i verildiğinde, onun kontrovaryant B^i bileşenlerini, şu denklemlerle tanımlarız.

$$B^i = g^{ij} B_j \quad (2.77)$$

Kolayca doğrulanabileceği gibi, bu işlemler tutarlıdır, çünkü düşürülmüş bir indisin yükseltilmesi ve bunun tersi de orijinal bileşene geri götürür. Elbette metrikler herhangi bir tensörün serbest indislerinin herhangi birini veya tümünü yükseltmek veya düşürmek için genişletilebilir; örneğin, eğer A_{ij}^k bir tensör ise, A^i_{jk} 'yı denklemlerle tanımlayabiliriz.

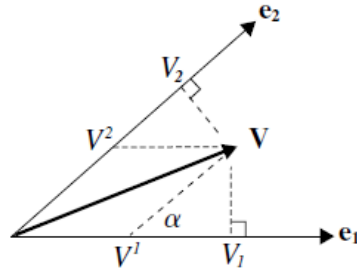
$$A^i_{jk} = g^{ir} g_{ks} A_{rj}^s$$

2.2.3. Kovaryant ve Kontrovaryant Vektörler

$\{e_i\}$ ve $\{e^i\}$ iki koordinat temel vektörleri kümesi olduğu için, her \mathbf{V} vektörü için iki olası açılım olabilir [5];

Tablo 2.2. \mathbf{V} Vektörünün Bileşenleri

\mathbf{V} nin Açılımı	İzdüşümleri	Bileşen Adları
$\mathbf{V} = V^i e_i$	$V^i = \mathbf{V} \cdot e^i$	\mathbf{V} nin kontrovaryantı
$\mathbf{V} = V_i e^i$	$V_i = \mathbf{V} \cdot e_i$	\mathbf{V} nin kovaryantı



Şekil 2.2. \mathbf{V} vektörünün Kovaryant, Kontrovaryant Gösterimi [5].

Tekrarlanan indisler, \mathbf{V} vektörünün açılımı esnasında toplanır. Düz bir düzlemde (Şekil 2.2) genel bir doğrusal koordinat sistemi için, bu iki tip bileşen yukarıdaki gibi görselleştirilebilir; kontrovaryant bileşenler, bir vektörün temel vektörler üzerine paralel yansımaları olurken, kovaryant bileşenler dik yansımalarıdır. Bu iki tip tensör bileşeninin tanıtılmasındaki başlıca avantajlardan biri, bileşke skaler çarpımın sadeliğidir ki bu her zaman şöyle ifade edilebilir:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{U} = (V^i e_i) \cdot (U_j e^j) = V^i U_j (e_i \cdot e^j) = V^i U_i \quad (2.78)$$

Tensör indisleri metrik tensörlerin büzülmesi yoluyla yükseltilebilir ya da düşürülebilir:

$$V_i = g_{ij} V^j \quad , \quad V^i = g^{ij} V_j. \quad (2.79)$$

Sonsuz küçük yer değiştirme vektörleri $dx \cdot dx = ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ olarak alınır.

2.2.4. Minkowski Uzayında Dörtlü Vektör

Lorentz dönüşümleri 4D uzay-zaman diliminde “dönmeler” olarak görülebilir. Bu nedenle, fiziksel büyüklükler 4'lü vektör ve 4'lü tensör ile temsil edilirse, sonuçta ortaya çıkan fizik denklemleri Lorentz dönüşümü altında otomatik olarak değişmez (invariant) olacaktır - bu denklemler açıkça görelidir. Konum-zaman bileşenleri x^μ (Yunan indisi μ 0 ila 3 arasında değişmektedir) doğal olarak 4'lü-konum vektörünün kontrovaryant bileşenleridir, çünkü bunlar konum-zaman vektörünün temel eksenlere genleşme katsayılarıdır, $x = x^\mu e_\mu$

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z). \quad (2.80)$$

Minkowski uzay-zamanı için uzay-zaman aralığı;

$$s^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (2.81)$$

Bu değer her eylemsiz gözlemciye göre aynı değere sahiptir. Bu, düz Minkowski uzayına ait metriği tanımlarken yorumlanabilir,

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \equiv \eta_{\mu\nu} \quad (2.82)$$

Bir Lorentz dönüşümünde, yeni bileşenler önceki bileşenlerle ilişkilidir:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = [L]^\mu_\nu x^\nu \quad (2.83)$$

Özel olarak, $+x$ yönünde v hızına sahip bir artış için

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

$\beta = \frac{v}{c}$ ve $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ dir. Metrik (2.82) tarafından verildiğinden, kovaryant yer değiştirme vektörü:

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = (-ct, x, y, z) \quad (2.85)$$

Kontrovaryant ve kovaryant bileşenler arasındaki büzülme *değişmez aralıktır* ve öz-zaman τ ile ilişkilidir:

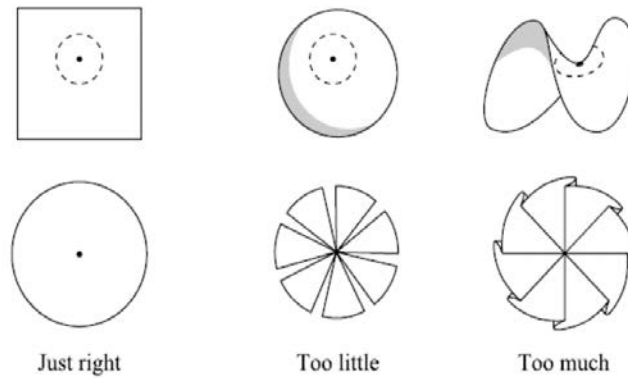
$$s^2 = x^\mu x_\mu = -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -c^2 \tau^2. \quad (2.86)$$

2.2.5. Uzay-Zamanın Eğriliği ve Riemann Uzayı

Eğri bir uzaydaki her küçük bölgeye bir düz uzay olarak bakılabilir, yani yerel olarak bir metrik her zaman bir düz uzay metriği ile betimlenebilir. Metriğin bu koordinat bağıllığı, metrik değerlerin bir eğri uzayın temel özelliğini temsil edemediğini gösterir. Bununla birlikte, eğri uzayın özünü temsil eden eğrilik adı verilen ve metriğin türevini içeren matematiksel bir nicelik söz konusudur: Uzay sadece ve sadece eğrilik sıfır değilse eğridir ve ayrıca, Öklid bağıntılarından sapmalar her zaman eğrilik ile orantılıdır [6].

Eğri uzay-zaman kütle çekim alanı ise, onun eğriliği nedir? Bu eğriliğin fiziksel tezahürü nedir? Eğrilik kütleçekimin GR denklemlerine nasıl giriyor?

Genel göreliliğin en devrimci özelliklerinden biri eğri uzayda (aslında eğri uzay-zamandan) yaptığı temel kullanımdır. Her ne kadar herkes sezgisel olarak eğri bir yüzeyin ne olduğunu, hatta neye benzediğini biliyor olsa da, genellikle bu fikrin üç hatta daha yüksek boyutlara nasıl genellenebileceği konusu şaşırtıcıdır. Bunun temel nedeni, 3-uzaysal koordinatının bükülebildiği bir 4-boyutlu uzayın görselleştirilememesidir. Şimdilik 2 boyutlu varlıkların dünyalarının eğriliğini nasıl keşfedeceğini görelim. Üç farklı yüzey bölgesi türünün prototipi olarak bir düzlemi, küreyi ve bir semeri düşünün. Uygulamada bu yüzeylerden bir daire kestiğinizi düşünün. Sonra biz (ya da düz insanlar) hem çevre C 'yi hem de bu dairelerin alanı A 'yı ölçebiliriz. Düzlemde her zamanki "Öklidyen" değerlerini $C = 2\pi r$ ve $A = \pi r^2$ olarak alırsınız. Kürede C ve A için daha küçük, eyerde ise daha büyük değerler elde ediyoruz. Örneğin, bu çemberleri kesip düzlemde düzleştirmeye çalıştığımızda bu belirginleşir: küresel başlığın yırtılması gerekir (çok az alana sahiptir), eyer başlığı katlanır (çok fazla alana sahiptir).



Şekil 2.3. Çeşitli Yüzeylerde Bir Halkanın Çevresi ve Alanı [6].

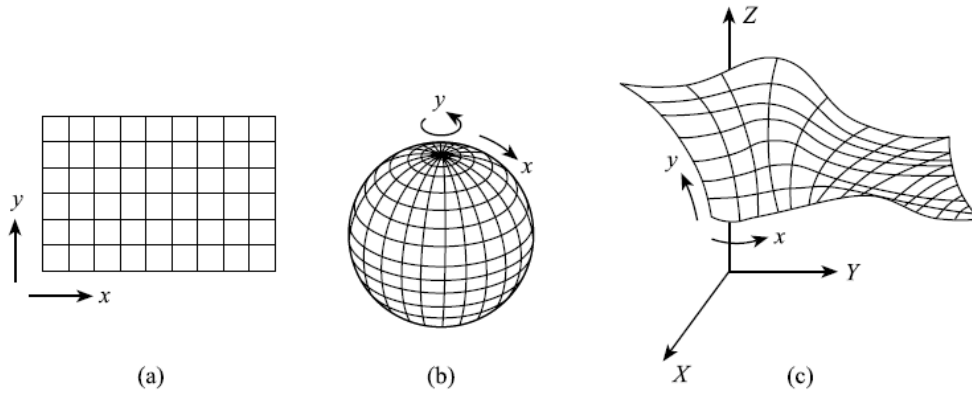
Eğri uzay, Riemann geometrisi denilen bir matematik dalındaki teoremlerle ele alınır. Eğri bir yüzeyde Kartezyen koordinatları düzlemde olduğu gibi ayarlayamayız. Eğer yapabilseydik kendiliğinden bir düzlemimiz olurdu. Bazı yüzeyler simetrisi ile düzlem veya küre (örneğin, bkz. Şekil 2.4) gibi noktaları belirtmek için genellikle enlem (x) ve boylamı (y) seçtiği gibi "doğal" bir koordinasyon gösterir. Genel bir yüzeyde iki koordinat çizgileri ailesini 'boyayabilir' ve sırasıyla $x = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ve $y = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ olarak etiketleyebilirsiniz, ve bunlardan biri, istediği kadar ince şekilde bir kez daha bölebilir. Ortaya çıkan koordinat örgüsü ortogonal olabilir veya olmayabilir.

Eğer yüzeyin, 3 boyutlu Öklid uzayına (X, Y, Z) koordinatları ile gömüldüğünü hayal edersek [bakınız Şekil 2.4 (c)], o zaman yüzeyin "parametrik" denklemleri şöyle verilir:

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y), \quad Z = Z(x, y) \quad (2.87)$$

Örneğin, orijinde merkezlenmiş bir a yarıçaplı küre şu bağıntıları sağlar:

$$X = a \sin x \cos y, \quad Y = a \sin x \sin y, \quad Z = a \cos x$$



Şekil 2.4. Koordinatları Doğrusal ve Eğrisel Olan Yüzey Modelleri [6].

Öklid uzayındaki komşu noktalar arasındaki mesafe,

$$d\sigma^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 ,$$

olarak verildiği için, yüzeydeki mesafeler şöyle olur:

$$d\sigma^2 = (X_1 dx + X_2 dy)^2 + (Y_1 dx + Y_2 dy)^2 + (Z_1 dx + Z_2 dy)^2 , \quad (2.88)$$

Alt indisler 1 ve 2, sırasıyla x ve y 'ye göre kısmi türevi belirtir. Açık olarak (2.88) şu biçimdedir:

$$d\sigma^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 \quad (2.89)$$

burada E, F, G x ve y 'nin belirli fonksiyonlardır. Küre durumunda, örneğin, bu yöntem şunu verir.

$$d\sigma^2 = a^2 dx^2 + a^2 \sin^2 x dy^2 \quad (2.90)$$

Bu da doğrudan temel geometri ile anlaşılabilir. Karesi alınmış diferansiyel uzaklık $d\sigma^2$ (2.89)' da olduğu gibi, yüzey koordinatlarında homojen bir kuadratik diferansiyel biçimde verildiğinde, $d\sigma^2$ 'nin bir *Riemann metrik* olduğunu ve karşılık gelen yüzeyin *Riemann* olduğunu söyleriz.

2.2.6. Kütleçekimi Olarak Geometri

Herhangi bir fiziksel olgunun geometrik bir kuramı veya geometrik bir tanımı, fiziksel ölçüm sonuçlarının doğrudan uzay ve zamanın temel geometrisine atfedilebileceği anlamına gelir. Einstein'ın genel görelilik kuramı, kütleçekimsel olguların temel eğri uzay-zamanın yansıması olarak atfedildiği, kütleçekiminin geometrik kuramıdır. Değişmez (invariant) bir aralık, aşağıdaki biçimde verilen bir metrik aracılığıyla uzay-zaman manifoldunun koordinatlarıyla bağlantılıdır:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.91)$$

Metrik $g_{\mu\nu}$ 4×4 'lük bir matristir. Gözlemciler ölçümlerini cetveller ve saatler ile yapmaktadır. Böylece uzay-zaman manifoldu sadece olaylar arasındaki uzaysal bağıntıları değil aynı zamanda nedensel yapılarını da ifade eder. Özel görelilik (SR) için, konumdan bağımsız bir metrik $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ile düz bir uzay-zaman geometrisinde çalışırız. Geometrik bir kütleçekimi kuramı olarak Genel Görelilik (GR), madde ve enerjinin uzay-zamanın eğrilmesine neden olduğunu varsayar ve kütleçekimsel olgular eğri uzay-zamanın bir sınama cisim üzerindeki etkileridir.

Burada yüzyılın en önemli sorularından biriyle karşılaşırız: Eşdeğerlilik ilkesi (EP) tarafından işaret edilen fiziğin incelenmesi, görelî kütleçekimsel alanın eğri uzay-zaman olduğunu önermek için Einstein'ı nasıl motive etti? Bir hatırlatmada bulunmak faydalı olacaktır:

Kütleçekimsel zaman genleşmesinin EP fiziği neyi ifade eder? Farklı konumlarda farklı kütleçekimsel $\phi(x)$ potansiyellerine sahip olan saatler farklı hızlarda çalışırlar. Farklı hızlarda çalışan karmaşık bir saat şemasıyla çalışmak yerine, bu fiziksel olguya, açık olmayan bir metriği gösteren geometrik bir yorum getirilebilir: $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$. Yani, aynı fiziksel durumu tanımlamanın daha basit bir yolu, $\phi = 0$ da standart bir saat olarak kararlı bir saati kullanmaktır. Bunun sabit değeri t zaman koordinatı olarak alınmıştır. Böylece başka yerlerdeki saatlerle ölçülen $d\tau(x)$ zaman aralıkları ile bu koordinat aralığı dt karşılaştırabilir. EP'ye göre şunu bulmalıyız:

$$d\tau(x) = \left(1 + \frac{\Phi(x)}{c^2}\right) dt \quad (2.92)$$

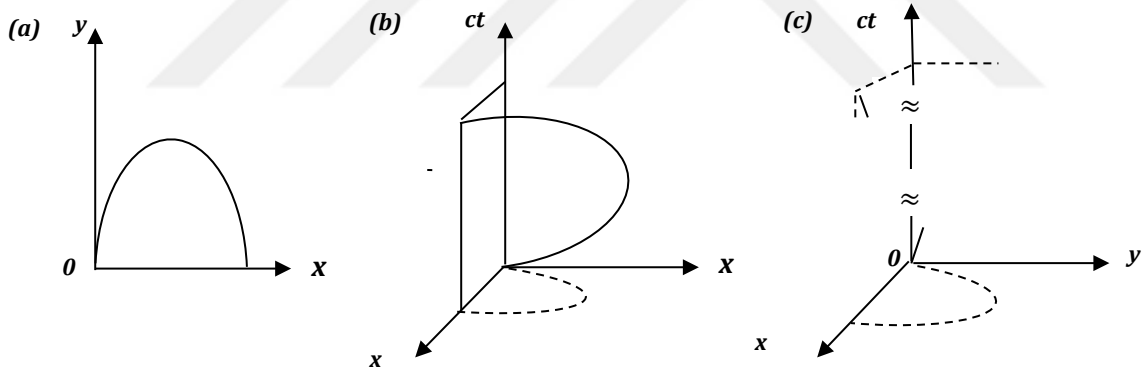
Buna geometrik yaklaşım ile bakılırsa; ölçüm sonuçları eğri geometrili bir uzay-zamanı gösterir.

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{\phi(x)}{c^2}\right)^2 \simeq -\left(1 + \frac{2\phi(x)}{c^2}\right) \quad (2.93)$$

Bunun nedeni, (2.91), $dx = 0$ için $ds^2 = g_{00}dx^0dx^0$ değerine, öz-zaman aralığına (durgun çerçevede zaman aralığı) uygun olduğu ve aşağıdaki ifadeye yol açan değişmeyen aralığın sadece öz-zaman aralığı $ds^2 = -c^2d\tau^2$ olduğu bilgisine indirgemesidir.

$$(d\tau)^2 = -g_{00}(dt)^2 \quad (2.94)$$

(2.93) 'te ortaya çıkan sonuç, kütleçekimi varlığında metrik eleman g_{00} ' ın, $\eta_{00} = -1$ düz uzay-zaman değerinden saptığını belirtir. Böylece kütleçekimsel zaman genişmesinin EP fiziğinin geometrik yorumu şunu söyler: Kütleçekimi, uzay-zaman metrik elemanı g_{00} 'ı, -1 'den x 'e bağlı bir fonksiyona kadar değiştirir. Kütleçekimi uzay-zamanı eğrileştirir- bu durumda onu zaman yönünde bükür. Ayrıca, g_{00} , (2.93)'teki gibi Newtonsal kütleçekimi potansiyeli $\phi(x)$ ile doğrudan bağıntılı olduğu için, uzay-zaman metriği $g_{\mu\nu}(x)$ ' in on bağımsız bileşeninin “görelî kütleçekimi potansiyelleri” olduğunu söyleyebiliriz.



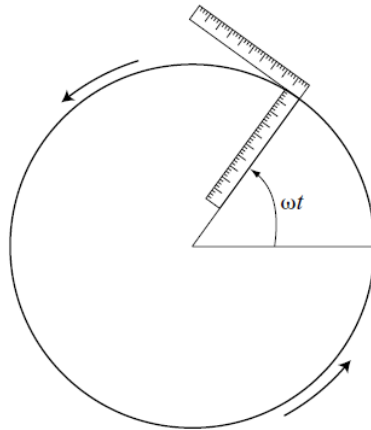
Şekil 2.5. Kütleçekimin Bir Parçacığın Hayat Çizgisine Etkisi a) (x,y) Düzleminde Parçacık Eğrisi b) Parçacığın Hayat Çizgisinin (x,y) Düzlemindeki İzdüşümü c) Zaman Eksenine İle Uzay-Zaman Diyagramı Arasındaki Büyük Mesafe [6].

Bir sınama parçacığının kütle çekim alanının varlığında “düz bir çizgi” izleyeceğini duymak biraz şaşırtıcı görünebilir. Ne de olsa, deneyimlerimiz bunun tam tersidir: Bir cisim fırlattığımızda, parabolik bir yörünge izler. Einstein, parabolik yörünge aslında düz olduğunu mu söylüyordu? Tüm bu paradokslar 4-boyutlu uzay-zaman ile sıradan 3-boyutlu uzay-zamanı birbirine karıştırmaktan kaynaklanmaktadır. GR hareket denklemi bize bir deneme parçacığının uzay-zamanda bir jeodezi çizgiyi takip edeceğini söyler ki bu artık 3-boyutlu uzaydaki bir jeodezi çizgi değildir. Yani, bir parçacığın hayat çizgisi, genellikle uzaysal alt uzay içinde düz bir yörünge

anlamına gelmeyen bir jeodezi olmalıdır. Uzay-zaman diyagramı şekil 2.5. deki gibi parçacığın yörüngesi basit bir örnek olarak değerlendirilebilir. Bir sına parçacığın eğik atış yaptığı düşünülürse (x,y) düzlemindeki hayat çizgisi Şekil 2.5. (a)'daki gibidir. Koordinat sistemine zaman eksenini eklenirse, eksen çizgisi Şekil 2.5. (c)'deki gibi gerilir hatta düzleşir. Bu durum ct değerinin büyüklüğünden kaynaklanır. Zaman eksenindeki bu düzlük ise kütleçekim etkisinin zayıflığını gösterir.

2.2.6.1. Öklidyen-Olmayan Bağlımlar

Eğri uzayda, Öklid bağıntıları artık geçersizdir, örneğin, küresel yüzeyin yüzeyindeki bir üçgenin iç açıların toplamı artık π değildir, dairesel çevrenin yarıçapa oranı 2π değerinden farklıdır. Anlaşıldığı üzere, EP, geometrik ölçümler arasında Öklid dışı bir bağıntı ifade eder. Bunu basit bir örnekle gösterebiliriz: Silindirik bir odayı kendi eksenini etrafında yüksek hızda döndürün. EP'ye göre bu hızlanma durumu bir merkezkaç kütleçekim alanına eşdeğerdir. (Bu, “yapay kütleçekimi” üretmenin bir yoludur.) Böyle dönen bir çerçeve için, özel görelilikteki uzunluk büzülmesi nedeniyle, hızın radyal yöne dik olmasından dolayı değeri değişmeyen “yarıçapın 2π katı” olan çevre artık silindirin dairesel çevresine eşit olmayacaktır. Bu nedenle Öklid geometrisi kütleçekimi varlığında artık geçerli değildir. Özetle, EP'ye göre dönen çerçeve kütle çekimli bir çerçevedir; özel göreliliğin uzunluk büzülmesine göre; dönen çerçevenin yarıçapı ve çevresi arasında Öklid dışı bir bağıntı vardır. Bu nedenle, kütleçekiminin varlığının Öklid dışı bir geometriye yol açtığını söyleriz.



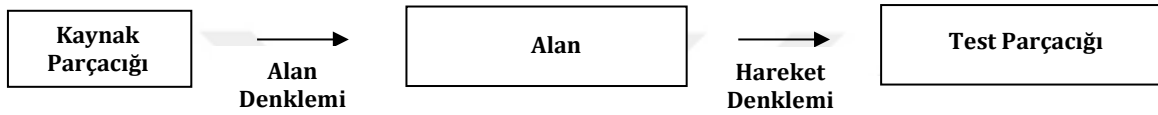
Şekil 2.6. EP'nin Dönen Çerçeveye Uygulanması [5].

Eğri bir uzayda küçük bir yerel bölge her zaman yaklaşık olarak düz bir alan olarak tanımlanabilir. Bu bölgede, kütleçekimi olmadığı için özel görelilik (SR) geçerlidir ve metrik düz Minkowski metriğidir. Genel görelilik (GR), SR olarak aynı yerel ışık-konisine sahiptir:

$ds^2 < 0$ zamansı, $ds^2 > 0$ uzayımsı ve $ds^2 = 0$, ışınımsı. Yerel düz ve yerel eylemsizlik çerçeveleri arasındaki bağıntı, uzay-zaman eğriliğinin bilinen gel-git kuvvetidir.

2.2.7. Kütleçekim Alanı Olarak Eğri Uzay-Zaman

Bir kaynak ve bir deneme parçacığı arasındaki etkileşimin, bir alan kuramı betimlemesi tanımının iki aşamalı bir açıklama olduğunu hatırlayın. Bir uzaktan kuvvetteki anlık harekete doğrudan etki eden kaynak parçacık yerine, kaynak her yerde bir alan yaratır ve daha sonra alan yerel olarak deneme parçacığına etki eder. İlk adım,



Şekil 2.7. Bir Kaynak ve Bir Test Parçacık Arasındaki Etkileşme [5].

kaynak dağılımı göz önüne alındığında alanı her yerde belirleyen alan denklemi ile verilir. Elektromanyetizma söz konusu olduğunda bu Maxwell denklemleridir. İkinci adım, alan fonksiyonu bilindiğinde, sınamaya parçacığın hareketini bulmamıza izin veren hareket denklemi ile sağlanır. Elektromanyetik hareket denklemi doğrudan Lorentz kuvvet yasasından gelir.

2.2.7.1. Newton Kütleçekimi Alanı

Newton'un kütleçekimi kuramındaki alan denklemi, kütleçekimi potansiyeli $\Phi(x)$ cinsinden yazıldığında şu ifadeyi verir:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G_N \rho \quad (2.95)$$

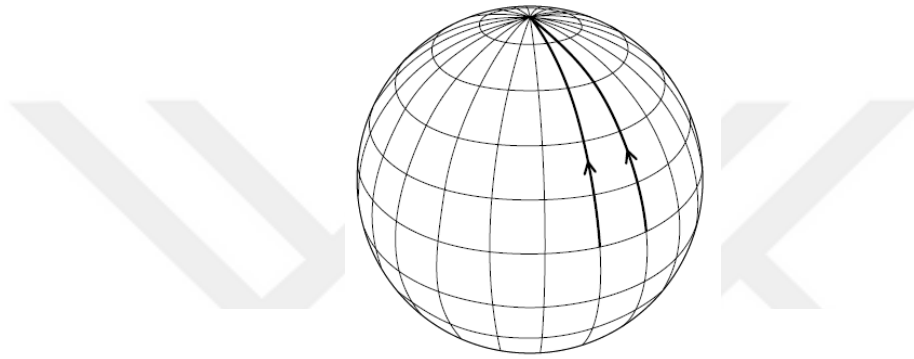
Burada G_N Newton sabitidir ve ρ kütle yoğunluk fonksiyonudur. Newton kuramı, zamanın evrimi için bir açıklama sağlamadığı için dinamik bir alan kuramı değildir. Yani, bazı alan kuramlarının statik sınırlandır, bu nedenle alan yayılımı yoktur. Newton'un hareket denklemi şöyledir:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\nabla \Phi \quad (2.96)$$

Einstein'ın üstlendiği görev, bu iki eşitlik kümesinin görelî genellemelerini bulmaktır. Görelilikte, uzay ve zaman eşit durumda ele alındığından, başarılı bir görelî plan kendiliğinden dinamik bir kuram da verecektir.

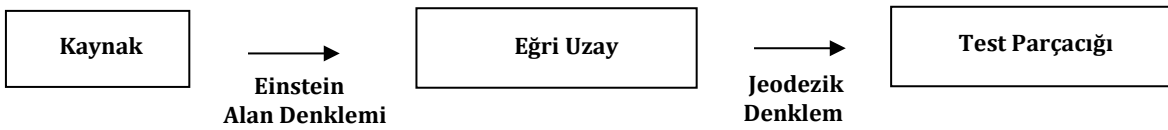
2.2.7.2. Görelî Kütleçekimsel Alan

Yukarıdaki tartışma EP fiziğinin geometrik dilde tanımlanabileceğini göstermektedir. Ortaya çıkan matematik, eğri bir uzay-zaman tanımlamakla örtüşmektedir. Dolayısıyla, görelî kütleçekim alanının eğri uzay-zaman olduğunu söylemek daha basit ve daha doğrudur. İki parçacık arasındaki kütle çekim etkileşiminin etkisi, deneme kütlelerinin hareketini etkileyen eğri bir uzay-zamana neden olan kaynak kütle olarak betimlenebilir. Yani, daha güçlü bir şekilde ifade etmek gerekirse, EP uzay-zamanın bir metrik yapısını gerektirir ve parçacıklar böyle bir eğri uzay-zamandaki jeodeziyi takip eder.



Şekil 2.8. Aralarında Azalan Mesafe ile İki Parçacığın Yörüngeleri [5].

Bir kütle çekim alanını temsil etmek için bir eğri uzay kullanma olasılığı, bir 2D eğri yüzey içeren yukarıdaki örnekte gösterilebilir. Küresel yüzeydeki iki kütle ekvatorunda başlayarak boyuna büyük çemberler tarafından temsil edilen iki jeodezi hat boyunca hareket ederler. İlerlerken, aralarındaki mesafe azalır. Şekil 2.8.'de bunu, aralarındaki çekici bir kuvvete veya sadece yörüngelerinin birleşmesine neden olan eğri uzaya bağlayabiliriz. Yani, iki yakınsak parçacık yörüngesinin bu olgusu, ya çekici bir kütleçekim kuvvetinden ya da uzayın eğriliğinden kaynaklanabileceği düşünülebilir. Sonuçta, görelî kütleçekim denklemlerini yazacağız. Einstein'ın yaklaşımında, bu diferansiyel denklemlerin temel bir eğri uzay-zamanı yansıttığı düşünülebilir. Einstein, EP fenomenolojisi çalışmasına dayanarak, eğri uzay-zamanın çekim alanı olduğu fikrine kavramsal bir atılım yaptı (mantıksal bir çıkarım, fakat yine de şaşırtıcı bir atılım).



Şekil 2.9. Parçacığın Hayat Çizgisi [5].

Kütle / enerji kaynağı, deneme parçacığının hareketini belirleyen eğri bir uzay-zamana yol açar. Muhtemelen deneme parçacıkları, eğri manifoldda mümkün olan en kısa ve en düz eğri boyunca ilerler. Böyle bir çizgi jeodezi eğridir. Bu nedenle GR hareket denklemi, jeodezi denklemdir. GR alan denklemi, kütle/ enerji dağılımını uzay-zaman eğriliği ile ilişkilendiren Einstein denklemdir. Madde ve enerji arasındaki ilişkinin değişimi, geometrinin değişimi olarak yansıtılır.

2.2.8. Genel Görelilik Hareket Denklemi Olarak Jeodezi Denklem

$g_{\mu\nu}(x)$ metrik fonksiyon eğri uzay-zamanının geometrisini tanımlar. GR'de kütle/enerji kaynağı, alan denklemi üzerinden metrik fonksiyonu belirler. Yani, $g_{\mu\nu}(x)$, GR alan denkleminin çözümüdür. $g_{\mu\nu}(x)$ biliniyorsa sına parçacığının hareket denklemi yazılabilir. Sına parçacığının bu uzay-zaman diliminde, daha önceden de belirtildiği gibi mümkün olan en kısa ve en düz yörünge olan jeodezi eğriyi izlemesini beklemek doğaldır. Dolayısıyla, hareketin GR hareket denklemi jeodezi denklem ile örtüşmelidir. Uzay-zamandaki bir noktanın bir olay olduğunu ve yörünge bir hayat çizgisi olduğunu unutmamalıyız. Jeodezi denklem, kütleçekiminin etkisi altında bir sına parçacığının takip edeceği hayat çizgisini belirler. Uzay-zamandaki jeodezi denklem:

$$\frac{d}{d\sigma} g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\mu} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\rho = 0 \quad (2.97)$$

Burada $x^\mu = x^\mu(\sigma)$ ile σ eğrilik parametresidir ve $\dot{x}^\mu \equiv dx^\mu/d\sigma$.

Jeodeziyi daha sonra mümkün olan en düz eğri olarak yorumlamamızı kolaylaştıracak daha simetrik bir biçim tasarlayabiliriz. Birinci terimin türevinin alınması ve metriğin σ 'ye bağımlılığının tamamen $x^\mu(\sigma)$ vasıtasıyla olduğuna dikkat edin:

$$g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\sigma^2} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\lambda}{d\sigma} \frac{dx^\rho}{d\sigma} = 0 \quad (2.98)$$

İkinci terimdeki çarpım $(dx^\lambda/d\sigma)(dx^\nu/d\sigma)$, λ ve ν indislerinin değiş-tokuşuna göre simetrik olduğundan, bunun katsayısının tek simetrik kısmına şu terim girebilir:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \right)$$

Bu yönden jeodezi (2.97) denklemi (tekrarlanan tabanı indisler yeniden etiketlendikten sonra) şu biçimde ifade edilebilir:

$$\frac{d^2x^\nu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\lambda\rho}^\nu \frac{dx^\lambda}{d\sigma} \frac{dx^\rho}{d\sigma} = 0 \quad (2.99)$$

$$g_{\mu\nu} \Gamma_{\lambda\rho}^\nu = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\mu} \right] \quad (2.100)$$

Metrik tensörün ilk türevlerinin bu özel bir bileşimi olan $\Gamma_{\lambda\rho}^\nu$, Christoffel sembolü (bağlantı olarak da bilinir) olarak adlandırılır. Bununla, kütleçekim alanı verildiğinde yani $g_{\mu\nu}(x)$ ve $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x)$ uzay-zaman fonksiyonları biliniyorsa, (2.99) bir sınama parçacığının böyle bir alanda nasıl hareket edeceğini anlatır. Bu uzay-zamanda mümkün olan en kısa ve en düz yörünge izlenecektir, bu da parçacığın hayat çizgisi ya da jeodezidir.

2.2.9. Genel Görelilikte Tensörler

- i. Eğri uzayda koordinat dönüşümleri zorunlu olarak konuma bağlıdır. Yine de, genel görelilikte (GR) kullanılan tensörler, türev söz konusu olmadıkça, özel görelilik (SR) ile temel olarak aynıdır.
- ii. Normal türev operatörüne başka bir terim ekleyerek (Christoffel sembolleriyle ilgili), uygun tensör türevleri üreten bir "kovaryant türev" oluşturabiliriz.
- iii. Christoffel sembolleri ve ilk metrik fonksiyon türevleri arasındaki bağıntı Denk. (2.100) yeniden kurulmuştur.
- iv. Paralel taşıma kavramını kullanarak, kovaryant türevin geometrik anlamı daha da açığa kavuşturulur.
- v. n-boyutlu bir uzay için eğrilik tensörü, bir vektörün kapalı bir yol etrafında paralel taşınmasıyla elde edilir.

Daha önce de ifade edildiği gibi düz uzayın aksine, eğri bir uzaydaki taban vektörlerin konumdan konuma değişmesi gerekir. Bu, koordinat dönüşümlerinin mutlaka konuma bağlı olması gerektiği anlamına gelir. Sonuç olarak, sıradan tensör türevleri, önemsiz skalerler hariç, artık tensör değildir. Bununla birlikte, tensör türevlerinin elde edilmesi için "kovaryant türev işlemleri" inşa edilmelidir. Paralel taşıma geometrik kavramı, iki boyutlu (2D) bir uzayın Gauss eğriliğini, Riemann eğrilik tensörüne rastgele boyutlarda eğri bir alana genelleştirmek için kullanılacaktır [5].

Bu kesim başında belirtildiği gibi genel görelilikte (GR) kullanılan tensörler, temelde türev söz konusu olmadıkça, özel görelilik (SR) ile aynıdır. Bu fark, eğri bir uzayda koordinat dönüşümlerinin mutlaka konuma bağlı olduğu gerçeğini yansıtır. Bir tensörün türevinin artık tensör olmayan bir nicelikle sonuçlandığı bulunur. Bu, görelilik denklemlerinin tensör denklemleri olması gerektiği için ciddi bir problem teşkil eder. Bunun üstesinden gelmek için, bu bölümde tensör özelliklerini bozmayan ve görelilik denklemlerine sahip olmamıza izin veren “kovaryant türev” i tanıtırız.

2.2.9.1. Genel Koordinat Dönüşümleri

SR'deki koordinat dönüşümleri (Lorentz dönüşümleri) konumdan bağımsız “evrensel dönüşümler” dir. Dönme açıları ve yükseltme hızı her uzay-zaman noktası için aynıdır. Aynı açıyı döndürüyoruz ve her yerde aynı hızla ilerliyoruz. GR'de konuma-bağlı “yerel dönüşümler” ile genel koordinat dönüşümü ile ilgilenmeliyiz. Bu konum bağıllığı, eğri uzayda $\{e_\mu\}$ taban vektörlerinin mutlaka noktadan noktaya değişmesi, konuma bağlı metrik fonksiyonlara yol açması gerektiği ile ilgilidir:

$$g_{\mu\nu} \equiv [e_\mu(x) \cdot e_\nu(x)] = g_{\mu\nu}(x) \quad (2.101)$$

SR'deki (Lorentz dönüşümleri) koordinat dönüşümleri, $s^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ ayrımını değişmez bırakır. Eğri bir uzayda, tabanlar ve metrik mutlaka noktadan noktaya değişebilir. Eğri bir uzay yerel olarak düz olduğu için, bu koordinat dönüşümü yapılabilir:

$$dx'^\mu = [L]^\mu_\nu dx^\nu \quad (2.102)$$

Bu ifade invaryant sonsuz küçüklükte bir uzunluğa yol açar:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.103)$$

Bu, belirli bir koordinat sistemi için metrik fonksiyonları tanımlar. Şimdi türev bağıntısını hatırlayalım:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (2.104)$$

(2.102) ve (2.104) 'ün karşılaştırması, koordinat dönüşümünün kısmi türevlerin matrisi olarak yazılabileceğini önerir:

$$[L]^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \quad (2.105)$$

Yani, kontrovaryant bir vektör için dönüşüm şöyle yazılabilir:

$$V^\mu \rightarrow V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \quad (2.106)$$

Daha açık olarak, (2.106) 'daki bağıntı şu şekilde yazılabilir.

$$\begin{pmatrix} V'^0 \\ V'^1 \\ V'^2 \\ V'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial x'^0/\partial x^0 & \partial x'^0/\partial x^1 & \partial x'^0/\partial x^2 & \partial x'^0/\partial x^3 \\ \partial x'^1/\partial x^0 & \partial x'^1/\partial x^1 & \partial x'^1/\partial x^2 & \partial x'^1/\partial x^3 \\ \partial x'^2/\partial x^0 & \partial x'^2/\partial x^1 & \partial x'^2/\partial x^2 & \partial x'^2/\partial x^3 \\ \partial x'^3/\partial x^0 & \partial x'^3/\partial x^1 & \partial x'^3/\partial x^2 & \partial x'^3/\partial x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^0 \\ V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix}$$

Del işlemcisi kovaryant bir vektör olarak dönüşür,

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = [L]_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (2.107)$$

Türevin zincir kuralı tanımlamaya yol açar.

$$[\bar{L}]_\mu^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \quad (2.108)$$

$[L][\bar{L}] = 1$ olduğu açıktır çünkü $(\partial x'^\mu/\partial x^\nu)(\partial x^\lambda/\partial x'^\mu) = \delta_\nu^\lambda$. Herhangi bir kovaryant bileşen için, şu dönüşüme sahibiz

$$V_\mu \rightarrow V'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V_\nu \quad (2.109)$$

$\{V_\mu\}$ 'nün kovaryant bileşenler olarak adlandırılmasının nedeni, taban vektörlerle aynı şekilde dönüşmeleridir:

$$e_\mu \rightarrow e'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} e_\nu \quad (2.110)$$

kontrovaryant bileşenler ise tersine dönüşür. Hem kontrovaryant hem de kovaryant indislere sahip genel bir tensör, kontrovaryant ve kovaryant vektörlerin doğrudan çarpımları olarak dönüşür. $T_{\lambda\dots}^{\mu\nu\dots} \sim A^\mu B^\nu \dots C_\lambda \dots$ En basit karma tensör dönüşümü şöyledir.

$$T_\nu^\mu \rightarrow T'_\nu{}^\mu = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} T_\lambda^\rho \quad (2.111)$$

Yine, sonsuz küçük aralık olan (2.103) ifadesini değişmez bırakan GR koordinat dönüşümleri *yerel Lorentz dönüşümleri* olarak görülebilir-Lorentzian'dır çünkü bunlar uzay-zaman

uzunluğunu koruyan dönüşümlerdir; yereldir çünkü fizik denklemlerinin her uzay-zaman noktasında bağımsız dönüşümler altında kovaryant olması gerekir. GR'deki tensörler belirli dönüşüm özelliklerine sahip nesnelere, böylece tensör denklemleri biçimlerini genel dönüşümler altında tutar. Bu şekilde bu denklemler otomatik olarak görelidirler.

2.2.9.2. Kovaryant Türev

Yukarıdaki tartışma tensörler arasında düz ve eğri uzayda hiçbir temel fark olmadığı anlamına gelebilir. Ancak aşağıda göstereceğimiz gibi, türev söz konusu olduğunda bu böyle değildir. Vektör bileşenlerinin sıradan türevleri, tensör değildir. Eğri uzayda, türev $\partial_\nu V^\mu$ bir tensör değildir. ∂_ν ve V^μ 'nin uygun vektörler olmasına rağmen (2.107) ile gösterildiği gibi,

$$\partial_\mu \rightarrow \partial'_\mu = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \partial_\lambda \quad (2.112)$$

ve (2.106) $\partial_\mu V^\mu$ kombinasyonları hala doğru bir şekilde dönüşmemektedir.

$$\partial_\nu V^\mu \rightarrow \partial'_\nu V'^\mu \neq \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \partial_\lambda V^\rho \quad (2.113)$$

Gerektirdiği gibi (2.111) ve (2.106) 'nın her iki tarafında da $\partial'_\nu \equiv (\partial/\partial x'^\nu)$ türevleyerek bunu görebiliriz.

$$\partial'_\nu V'^\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} V^\rho \right) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} (\partial_\lambda V^\rho) + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x'^\nu \partial x^\rho} V^\rho \quad (2.114)$$

Burası (2.112) kullanıldığı yerdir. (2.113)'ün sağ tarafına kıyasla ek bir terim daha vardır.

$$\frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \right) \neq 0 \quad (2.115)$$

$\partial_\nu V^\mu$ nin dönüşüm zorluğu, koordinat dönüşümünün konuma bağlılığının doğası ile ilgilidir. Bu nedenle, esas problem eğri uzayın hareket eden tabanlarında $e^\mu = e^\mu(x)$ yatmaktadır. Daha açık bir ifadeyle, tensör bileşenleri, tensörün $V^\mu = e^\mu \cdot \mathbf{V}$ taban vektörleri üzerine izdüşümü olduğu için, hareketli tabanlar $\partial_\nu e^\mu \neq 0$ türevdeki ekstra terimi üretir:

$$\partial_\nu V^\mu = e^\mu (\partial_\nu \mathbf{V}) + \mathbf{V} \cdot (\partial_\nu e^\mu) \quad (2.116)$$

Denklemin görelî olması için, koordinat dönüşümleri altında değişmeyecek şekilde tensör denklemlerine sahip olmamız gerekir. Bu nedenle, kovaryant fizik denklemlerinde kullanılmak üzere bir kovaryant türev D_ν arıyoruz. Böyle bir türev, bir tensör verecek şekilde oluşturulur:

$$D_\nu V^\mu \rightarrow D'_\nu V'^\mu = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} D_\lambda V^\rho \quad (2.117)$$

Aşağıda gösterileceği gibi, (2.116) 'nin sağındaki ilk terim, sadece bu istenen kovaryant türev terimidir. Skaler fonksiyonun türevleri, skaler tensör tabanlara bağlı olmadığından karmaşık değildir:

$$\partial_\mu \phi \rightarrow \partial'_\mu \phi' = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \partial_\lambda \phi \quad (2.118)$$

Benzer şekilde, \mathbf{V} vektörünün türevleri (bileşenlerinin değil) düzgün bir şekilde dönüşür, çünkü \mathbf{V} koordinattan bağımsızdır:

$$\partial_\mu \mathbf{V} \rightarrow \partial'_\mu \mathbf{V} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \partial_\lambda \mathbf{V} \quad (2.119)$$

$$D_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\lambda \quad (2.120)$$

Bu nedenle, kovaryant türev üretmek için normal türev $\partial_\nu V^\mu$ başka bir terimle desteklenmelidir. Bu ikinci terim taban vektörlerin konum bağıllığını doğrudan yansıtmaktadır. $\partial_\nu V^\mu$ ve $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\lambda$ doğru dönüşüm özelliklerine sahip olmasa da, kendi dönüşümlerinden üretilen istenmeyen terimler birbirlerini yok eder, böylece $D_\nu V^\mu$ toplamları iyi bir tensördür. (2.120) 'nin ters vektörü V^μ ile karşılaştırıldığında, V_μ 'nün bir kovaryant vektörü için kovaryant türevi şu biçimi alır:

$$D_\nu V_\mu = \partial_\nu V_\mu - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda V_\lambda \quad (2.121)$$

Doğrudan $V^\mu U_\nu$ ürünüyle aynı şekilde dönüşen T_ν^μ gibi karma bir tensör, bir kovaryant türev içerecektir.

$$D_\nu T_\mu^\rho = \partial_\nu T_\mu^\rho - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda T_\lambda^\rho + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho T_\mu^\sigma \quad (2.122)$$

Bir örnek olarak, (kovaryant) metrik tensör $g_{\mu\nu}$ 'nün kovaryant türevi:

$$D_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\mu\rho} \quad (2.123)$$

2.2.9.3. Christoffel Sembolleri ve Metrik Tensör

Christoffel sembollerini $\partial_\nu e^\mu$ için açılım katsayıları olarak tanıttık. Bu kesimde $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ ile metrik tensörün birinci türevi ilişkilendirilecektir. Bu bağıntıyı türetmek için önce $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ 'nin önemli bir özelliğini belirtmemiz gerekir. Aşağıdaki bağıntı geçerlidir:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \quad (2.124)$$

Yani, bu tensör iki alt indisin değiş tokuşuna göre simetriktir. Metrik tensör kovaryant olarak sabittir, yani:

$$D_\lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.125)$$

Bunu kanıtlamanın bir yolu, metrik ifadesini taban vektörler cinsinden kullanmaktır:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu \cdot e_\nu \text{ ve } \Gamma \text{'nin: } \partial_\nu e_\mu = +\Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho$$

$$\begin{aligned} \partial_\lambda (e_\mu \cdot e_\nu) &= (\partial_\lambda e_\mu) \cdot e_\nu + e_\mu \cdot (\partial_\lambda e_\nu) \\ &= \Gamma_{\lambda\mu}^\rho e_\rho \cdot e_\nu + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho e_\mu \cdot e_\rho \end{aligned} \quad (2.126)$$

Metrik tensörler cinsinden yazılınca bu bağıntı şöyle olur

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\mu\rho} = D_\lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.127)$$

İndisleri çevrimsel izin verilen indisler ile değiştirerek (2.127)'nin birkaç çeşidini kullanmaya başlarız:

$$D_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\mu\rho} = 0,$$

$$D_\nu g_{\lambda\mu} = \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho g_{\rho\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\rho g_{\lambda\rho} = 0, \quad (2.128)$$

$$-D_\mu g_{\nu\lambda} = -\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho g_{\rho\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\nu\rho} = 0.$$

Bu üç denklemin toplanması ve (2.124)'ün simetri özelliğini kullanarak şunu elde ederiz:

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda} - 2\Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\mu\rho} = 0 \quad (2.129)$$

veya eşdeğer formunda:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} [\partial_\nu g_{\mu\rho} + \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}]. \quad (2.130)$$

$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ ifadesini “metrik tensörün birinci türevi” olarak gösteren bu bağıntıya “Riemann geometrisinin temel teoremi” denir, bu bağıntıya ise Christoffel sembolü denir.



3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde tez çalışmasında ortaya konulan problemin çözümlerini elde etmek için kullanılacak yöntemi tanıtmak amacıyla literatürde benzer yöntemlere yer veren çalışmalar tanıtılacaktır. İlk olarak görelî parçacık denklemlerinin eğri uzaydaki ifadeleri tanıtılacaktır. Daha sonra spin-0, $\frac{1}{2}$ ve 1 parçacıkları temsil eden Klein-Gordon, Dirac ve DKP denklemlerinin çözümlerinin elde edildiği bazı örnek çalışmalar verilecektir. Bu çalışmalarda ayrıca parçacık yaratma olgusu da irdelenmiştir. Bu nedenle parçacık yaratma olgusunun tartışılması için Bogoliubov dönüşüm yöntemi tanıtılacaktır.

3.1. Eğri Uzayda Dış Alanların Varlığında Görelî Parçacık Denklemleri

Kütleçekimin bir kuantum alan kuramının henüz yazılmadığı önceki bölümlerde belirtilmişti. Kuantum kuramı ve kütleçekimini birleştiren bir kuramın oluşturulması modern kuramsal fiziğin en önemli problemlerinden birisidir. Tetrode-Weyl-Fock-Ivanenko prosedürünün spin dönüşüm özelliklerine genişletilmesiyle kovaryanslık ilkesi ve tetrad formalizmi kullanılarak genel göreliliğe uyan görelî denklemleri yazmak mümkün olmuştur. Kütleçekimsel etkiler atomik ölçekte çok zayıf olması sebebiyle önemli değildir, ancak karadeliklerin parçacık yaratması gibi birçok astrofiziksel olgu için kütleçekimsel etkilerin baskın rolü nedeniyle hesaba katılması gerekir. Bununla beraber, tek parçacık durumları dikkatlice çalışılmadığı sürece kütleçekim kuramını ve kuantum kuramını birleştirilmek anlamlı değildir. Bu bağlamda eğri uzayda kuantum etkileri analiz etmek için, kozmolojik artalanlarda görelî parçacık denklemleri göz önüne alınır. Parçacıkların davranışını elde etmek için denklemlerin tam çözümlerinde bazı kısıtlamalar uygulanmıştır [10]. Eğri uzayda, dış alan varlığında görelî parçacık denklemlerinin kovaryant biçimi aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Tablo 3. 1. Görelî Parçacık Denklemleri.

Görelî Denklem	Matematiksel Biçimi	Temsil Ettiği Görelî Tanecik
Klein-Gordon	$g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\Phi - (m^2 + \xi R)\Phi = 0$	Kütleli-Spinsiz : h, π^{\pm}
Dirac Denklemi	$[\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - \Gamma_{\mu} - ieA_{\mu}) + im]\psi = 0$	Kütleli-Spin-1/2: $e^{-}, \mu^{-}, p^{+}, n^0, \dots$
DKP Denklemi	$[i\beta^{\mu}(\partial_{\mu} - \Sigma_{\mu} + eA_{\mu}) - m]\Psi(t, \vec{x}) = 0$	Kütleli-Spin-1 ve-0: w^{\pm}, z^0, γ

Bu denklemlerin Minkowski uzayı için betimlendiği fiziksel sistemler hakkında Bölüm 2'de ayrıntılı bilgi verilmişti. Burada ise göreceli denklemlerin eğri uzaydaki biçimleri verilerek, dış alanların varlığında analitik çözümlerinin elde edildiği bazı çalışmalar örneklendirilecektir. Çözümler ve sonuçlar ayrıntılara girilmeden tartışılmıştır. Gerekli ayrıntılar ana kaynaklarından izlenebilir.

Analitik çözümlere geçmeden önce bir sonraki kesimde parçacık yaratma sürecinin tartışılması için kullanılacak Bogoliubov dönüşüm yöntemi hakkında kısa bir bilgi verilecektir.

3.2. Bogoliubov Dönüşüm Yöntemi

Eğri uzayda yaratılan parçacık spektrumunu hesaplamak için çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Bunlar Hamilton köşegenleştirme yöntemi [11], Feynman yol integrali yöntemi [12], Green fonksiyonları yaklaşımı [13], yarı- klasik WKB yaklaşımı [14], adyabatik yöntem [15] ve burada kullanılacak olan Bogoliubov dönüşüm yöntemidir [16].

Bogoliubov dönüşüm yönteminde (BDY), parçacık yaratma sayısı yoğunluğu, tam kip çözümlerine dayanan Bogoliubov katsayıları tanımlanarak hesaplanır. Parçacık denklemi için elde edilen analitik çözümler parçacığı temsil etmek için alınacak tek çözümler değildir. Bu çözümleri diğer çözümlerle ilişkilendirmek için Bogoliubov katsayıları kullanılır. Bu yöntemin felsefesi, elde edilen kip çözümleri sonsuz geçmiş ve sonsuz gelecekteki çözümlerle ilişkilendirmektir. QFT'de alan denkleminin ortogonal çözümleri, kip çözümleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılır [7]:

$$\Psi = \sum_n (a_n \tau_n + a_n^\dagger \tau_n^*) = \sum_k (b_k Y_k + b_k^\dagger Y_k^*) \quad (3.1)$$

Burada τ ve Y kip çözümleridir ve aralarında $(\tau_i, \tau_j) = \delta_{ij}$, $(\tau_i^*, \tau_j^*) = \delta_{ij}$, $(\tau_i, \tau_j^*) = 0$ ve $(Y_i, Y_j) = \delta_{ij}$, $(Y_i^*, Y_j^*) = \delta_{ij}$, $(Y_i, Y_j^*) = 0$ biçiminde verilen bağıntılar vardır.

Kip çözümleri tamlik özelliğini sağladığından, birbirleri cinsinden genişletilebilirler. a_n^\dagger, b_k^\dagger ve a_n, b_k sırasıyla yaratma ve yok etme işlemcileridir ve aşağıdaki ifadelerle ilişkilendirilirler:

$$a_n = \sum_k (\alpha_{kn} b_k + \beta_{kn}^* b_k^\dagger) \quad (3.2)$$

$$b_k = \sum_n (\alpha_{kn}^* a_n - \beta_{kn} a_n^\dagger) \quad (3.3)$$

α_{kn} ve β_{kn} , $\alpha_{ij} = (Y_i, \tau_j)$, $\beta_{ij} = -(Y_i, \tau_j^*)$, bağıntıları ile değerlendirilen Bogoliubov katsayıları olarak tanımlanır. Bogoliubov katsayıları aşağıdaki bağıntıları sağlar:

$$\sum_i (\alpha_{ni} \alpha_{ki}^* - \beta_{ni} \beta_{ki}^*) = \delta_{nk} \quad (3.4)$$

$$\sum_i (\alpha_{ni} \beta_{ki} - \beta_{ni} \alpha_{ki}) = 0 \quad (3.5)$$

Fock uzayında iki farklı vakum durumu, $|0_a\rangle$ ve $|0_b\rangle$, (3.1) 'deki her bir parçacık kavramıyla ilişkilidir ve hepsi n ve k için aşağıdaki gibi tanımlanabilirler:

$$|0_a\rangle : a_n |0_a\rangle = 0 \quad (3.6)$$

$$|0_b\rangle : b_k |0_b\rangle = 0 \quad (3.7)$$

$|0_b\rangle$ doğal bir vakum olarak seçildiyse, $|0_a\rangle$ çok parçacıklı bir durum olarak kabul edilir. Daha sonra $|0_a\rangle$ durumundaki Y_n -modlu parçacıkların sayısı aşağıdaki bağıntı yardımıyla verilir:

$$\langle 0_a | b_k^\dagger b_k | 0_a \rangle = \sum_n |\beta_{kn}|^2 \quad (3.8)$$

Eğer $\tau_n(x)$ modları pozitif frekans modları ve $Y_n(x)$ modlarında bunların çizgisel bileşimi ise, o zaman $\beta_{jk} = 0$ olur. Bu durumda, $b_k |0_b\rangle = 0$ ve $a_k |0_a\rangle = 0$ olur. Böylece τ_j ve Y_k modları ortak bir vakum durumunu paylaşır. Eğer $\beta_{jk} \neq 0$ ise, Y_k pozitif $-\tau_k$ ve negatif $-\tau_k^*$ frekans modlarının bir karışımını içerir, yani $a_k |0_a\rangle$ 'ya dayanan Fock alanı, $b_k |0_b\rangle$ 'yi temel alan Fock alanı ile ilişkilendirilir.

3.3. Eğri Uzayda Dış Alanların Varlığında Parçacık Yaratma Süreci

Bu kesimde yukarıda tanıtılan her bir parçacık denkleminin dış alanların varlığında tam çözümleri elde edilecektir ve fiziksel bir uygulama olarak parçacık yaratma süreci tartışılacaktır. Her bir denklem için ele alınan dış alanda çözümler belirlendikten sonra, bu çözümlerin hangilerinin iç, hangilerinin dış vakum çözümlerini temsil ettiği belirlenmelidir. Bu etiketleme için yarı-klasik HJ denkleminin çözümleri kullanılabilir. Bu nedenle KG, Dirac ve DKP denklemlerinin çalışılan eğri uzay ve dış alanda çözümleri belirlendikten sonra, ilgili artalan ve dış alan için HJ çözümleri de türetilecektir.

3.3.1. Klein-Gordon Denklemi ve Skaler Parçacık Yaratma

Bu kesimde aşağıda verilen metrik ve dış alan olarak seçilen 4-vektör elektromanyetik potansiyel için KG denklemi analitik olarak çözülüp skaler parçacık yaratma süreci tartışılacaktır [16].

4-vektör elektromanyetik potansiyel aşağıdaki biçimdedir:

$$A_\nu = yB_0\delta_\nu^1 + E_0\sqrt{\Gamma + \Lambda t}\delta_\nu^3 \quad (3.9)$$

Erken evren modelini temsil eden Robertson-Walker (RW) uzay-zamanı için metrik aşağıdaki gibi verilir:

$$ds^2 = \frac{1}{a^2(t)} dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.10)$$

Burada ardışık iki konformal zaman dönüşümü yapılırsa: $d\eta = \frac{dt}{a(t)}$ ve $d\tau = \frac{d\eta}{a(\eta)}$ metrik için şu bağıntı bulunur:

$$ds^2 = a^2(\tau)[d\tau^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)] \quad (3.11)$$

Bu evren modeli ve elektromanyetik potansiyel için parçacık yaratma tartışılacaktır. Vakumun iç ve dış çözümlerini belirlemek amacıyla ilk olarak HJ denkleminin çözümleri elde edilecektir.

3.3.1.1. Hamilton-Jacobi Denkleminin Çözümü

S eylem fonksiyonu için görelî HJ denklemi şöyle verilir:

$$g^{\epsilon\theta} \left[\frac{\partial S}{\partial x^\epsilon} - eA_\epsilon \right] \left[\frac{\partial S}{\partial x^\theta} - eA_\theta \right] + m^2 = 0 \quad (3.12)$$

Burada $A_{\epsilon,\theta}$ 4-vektör elektromanyetik potansiyeldir, m , parçacığın kütlesidir. A_ϵ 'nin y uzay koordinatına ve τ zaman koordinatına bağlılığı ve verilen çizgi elemanın τ 'ya bağlılığı dikkate alındığında, HJ denkleminin çözümü aşağıdaki şekilde ayrılabilir.

$$S(\tau, x, y, z) = F(\tau) + T(y) + (xk_x + zk_z). \quad (3.13)$$

Burada k_x ve k_z verilen elektromanyetik alan ve verilen çizgi elemanı için seçilen simetriler göz önüne alındığında hareket sabiti olarak görülebilir. Denklem (3.10)'un (3.9)'da yerine koyulması şu denklemi verir;

$$\dot{F}^2 - \left[(k_x - eB_0y)^2 + \dot{T}^2 + (k_z - eE_0a(\tau))^2 \right] + m^2a^2(\tau) = 0 \quad (3.14)$$

Nokta ve aksan işareti sırasıyla τ ve y 'ye göre türevleri belirtir. Böylece iki birinci mertebeden diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left[\dot{F}^2 - (k_z - (eE_0 a(\tau))^2) \right] + m^2 a^2(\tau) = r^2 \quad (3.15)$$

$$\dot{T}^2 + (k_x - eB_0 y)^2 = r^2 \quad (3.16)$$

Burada r^2 ayırma sabitidir.

Özellikle zamana bağlı dış alanlar ve güçlü kütleçekimi parçacık oluşumuna neden olduğundan; uzaysal koordinatları içeren dinamikler, çözümleri bir sabit kadar etkiler ve metrik ve dış elektromanyetik alan için HJ denkleminin çözümünün yarı klasik davranışları şu şekilde elde edilecektir:

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, x, y, z) = e^{iS} \rightarrow C(x, y, z) \sqrt{e^2 E_0^2 - m^2} \\ \times \left\{ \sqrt{e^{2a_0\tau} + b e^{a_0\tau} + c} + \frac{b}{2} \text{Sinh}^{-1} \left(\frac{2e^{a_0\tau} + b}{\sqrt{4c - b^2}} \right) - \sqrt{c} \text{Sinh}^{-1} \left(\frac{b e^{a_0\tau} + 2c}{e^{a_0\tau} \sqrt{4c - b^2}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\text{Burada } a_0 = \frac{\Lambda}{2}, \quad b = \frac{-2k_z e E_0}{a_0 (e^2 E_0^2 - m^2)} \quad \text{ve} \quad c = \frac{(2n+1)eB_0 + k_z^2}{a_0 (e^2 E_0^2 - m^2)}$$

Bu çözümün asimptotik davranışı şöyle olacaktır:

$$\Phi_{(\tau \rightarrow -\infty)} \rightarrow C(x, y, z) e^{\pm i \sqrt{\frac{(2n+1)eB_0 + k_z^2}{a_0}} \tau} \quad (3.18)$$

ve

$$\Phi_{(\tau \rightarrow +\infty)} \rightarrow C(x, y, z) e^{\pm i \sqrt{e^2 E_0^2 - m^2} e^{a_0 \tau}} \quad (3.19)$$

Üstel fonksiyonlardaki üst ve alt işaretleri sırasıyla negatif ve pozitif frekans durumlarını temsil eder. Klein-Gordon denkleminin “iç” ve “dış” çözümleri, bu analiz yardımıyla belirlenebilir.

3.3.1.2. Klein Gordon Denklem Çözümü

Eğri bir uzay-zaman geometrisi ile etkileşime giren bir $\Psi(\tau, x, y, z)$ skaler alanın Lagrangian yoğunluğu

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} [g^{\varepsilon\phi} (x) \Psi_{,\varepsilon}(x) \Psi_{,\phi}(x) - (m^2 + \xi R(x)) \Psi^2] \quad (3.20)$$

biçiminde verilir. Burada Virgül (\cdot) kısmi türevleri (∂_ε) temsil eder ve m alan kuantasının kütesidir, $R(x)$, Ricci skaleridir, ξ skaler bir çarpandır. Evrensel ayar dönüşümleri altında Lagrangianın bu biçimi değişmezdir. Eğri uzay zamanda elektromanyetik alanlara bağlı skaler alanın Lagrangian yoğunluğu yerel ayar değişmezliğini gerektirir. Yerel ayar dönüşümlerinin genel formu şu şekilde verilmiştir.

$$\Psi(x) \rightarrow \bar{\Psi}(x) = e^{i\zeta(x)}\Psi(x) \quad (3.21)$$

$\zeta(x)$ uzay-zaman koordinatlarının rastgele bir fonksiyonudur, bu tanımla Lagrangian'daki skaler alanın kısmi türevi şöyle olur.

$$\Psi_{,\varepsilon}(x) \rightarrow \bar{\Psi}_{,\varepsilon}(x) = e^{i\zeta(x)}(\Psi_{,\varepsilon}(x) + i\zeta_{,\varepsilon}\Psi) \quad (3.22)$$

Bu nedenle, Lagrangian yoğunluğunun yerel ayar değişmezliğini elde etmek için, kısmi türevler, ayar kovaryant türevleri D_α ile değiştirilir.

$$\Psi_{,\varepsilon} \rightarrow D_\varepsilon\Psi \equiv \Psi_{,\varepsilon} + iA_\varepsilon\Psi \quad (3.23)$$

Ve A_α ayar alanı için aşağıdaki dönüşüm kuralları kabul edilir.

$$A_\varepsilon \rightarrow \bar{A}_\varepsilon \equiv A_\varepsilon - \zeta_{,\varepsilon} \quad (3.24)$$

Daha sonra, eğri uzay-zamandaki elektromanyetik alanlarla etkileşime giren bir skaler alanın Lagrangian yoğunluğu şöyle olur:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}[g^{\varepsilon\phi}(x)(D_\varepsilon\Psi)(D_\phi\Psi) - (m^2 + \xi R(x))\Psi^2] \quad (3.25)$$

Yerel ayar dönüşümleri altında invarianttır.

Lagrangian yoğunluğu (3.25) eğri uzay-zamanda elektromanyetik alanlara bağlı skaler spin-0 parçacıkları için Klein-Gordon denkleminin yol açar;

$$[g^{\varepsilon\phi}(\nabla_\varepsilon - ieA_\varepsilon)(\nabla_\phi - ieA_\phi) - (m^2 + \xi R)]\Psi(\tau, x, y, z) = 0 \quad (3.26)$$

∇_ε kovaryant türev olduğunda, $A_{\varepsilon,\phi}$, 4-vektör elektromanyetik potansiyeldir, m skaler parçacığın kütesidir ve ξ minimal çiftlenim durumu için sıfır olan boyutsuz bir çiftlenim sabitidir.

4-vektör potansiyel ve çizgi elemanı, y uzay değişkenine ve t zaman değişkenine bağlıdır. Klein-Gordon denkleminin (3.26) çözümü aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\Psi(\tau, x, y, z) = e^{i(xk_x + zk_z)} V(\tau)G(y) \quad (3.27)$$

Bunu Klein-Gordon denkleminde yerine yazarsak,

$$[\hat{P}(\tau) + \hat{Q}(y)]V(\tau)G(y) = 0 \quad (3.28)$$

burada aşağıdaki tanımları yapılmıştır:

$$\hat{P} = [\partial_\tau^2 + (k_z - eE_0 a_0 e^{a_0 \tau})^2 - m^2 a^2(\tau)] \quad (3.29)$$

$$\hat{Q} = [(k_x - eB_0 y)^2 - \partial_y^2] \quad (3.30)$$

Bu tanımlara göre denklem (3.28) aşağıdaki gibi iki bağımsız denkleme ayrılabilir.

$$(\hat{P} + s)V(\tau) = 0 \quad (3.31)$$

$$(\hat{Q} - s)G(y) = 0 \quad (3.32)$$

Burada s ayırma sabitidir.

$\gamma = \sqrt{e^2 E_0^2 - m^2}$, $\rho = 2i\gamma e^{a_0 \tau}$ biçiminde tanımlayarak ve uygun zamanla ilişkili dalga fonksiyonunu $V(\tau) = e^{-\frac{a_0 \tau}{2}} v(\tau)$ olarak yazarak, denklem (3.31)'den aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{s + k_z^2}{a_0^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{ik_z e E_0}{a_0 \gamma} - \frac{1}{4} \right] v(\rho) = 0 \quad (3.33)$$

Tanım: Whittaker fonksiyonlarının sağladığı diferansiyel denklem [17]:

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2} + \frac{k}{z} - \frac{1}{4} \right] W_{k,\mu}(z) = 0$$

Bu nedenle çözüm Whittaker fonksiyonlarıdır ve şu şekilde verilir:

$$v(\rho) = [AW_{\lambda,\mu}(\rho) + BM_{\lambda,\mu}(\rho)] \quad (3.34)$$

Burada $\mu = \pm i \frac{\sqrt{s+k_z^2}}{a_0}$, $\lambda = \frac{ik_z}{a_0 \sqrt{1 - (\frac{m}{eE_0})^2}}$ ve n bir tamsayı, A ve B rastgele sabitlerdir. Şimdi boyutsuz

değişken $u = \sqrt{eB_0} \left(y - \frac{k_x}{eB_0} \right)$ ve onun çözümü için harmonik osilatörün diferansiyel denklemini veren denklem (3.32)'nin çözümlerini arıyoruz. İlk olarak,

$$G(u) = e^{-\frac{u^2}{2}} H_n(u) \quad (3.35)$$

seçilir. Burada $H_n(u)$ Hermite polinomlarıdır, $s = (2n + 1)eB_0$ ve n bir tam sayıdır.

Bu yüzden Klein Gordon denkleminin tam çözümü şöyle verilir:

$$\Psi = e^{i(xk_x + zk_z)} e^{-\frac{u^2 + a_0 \tau}{2}} H_n(u) [AW_{\lambda, \mu}(2iye^{a_0 \tau}) + BM_{\lambda, \mu}(2iye^{a_0 \tau})] \quad (3.36)$$

3.3.1.3. Bogoliubov Yöntemi ile Parçacık Yaratma

(3.36) Dalga fonksiyonunun zamana bağlı bileşenleri, yani burada Whittaker fonksiyonları, parçacık oluşumuna neden olur. Bu nedenle, Kesim 3.3.1.1. de elde edilen yarı klasik çözümleri göz önüne alarak, Bogoliubov katsayılarını bulmak için pozitif ve negatif frekans çözümlerini tanımlayabiliriz.

$W_{\lambda, \mu}(\rho)$ 'nin $\rho \rightarrow \infty$ için asimptotik davranışı

$$W_{\lambda, \mu}(\rho) \rightarrow e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^\lambda \quad (3.37)$$

o zaman $\rho \rightarrow \infty$ ($\tau \rightarrow \infty$) pozitif ve negatif frekans modlarıdır:

$$f_\infty^+ = A_\infty^+ W_{\lambda, \mu}(\rho) \quad (3.38)$$

$$f_\infty^- = [A_\infty^+ W_{\lambda, \mu}(\rho)]^* = A_\infty^- W_{-\lambda, \mu}(-\rho) \quad (3.39)$$

Bu nedenle, (3.33)'ün çözümünün asimptotik davranışı, $\rho \rightarrow \infty$ için aşağıdaki forma sahiptir.

$$f(\rho) = A_\infty^+ W_{\lambda, \mu}(\rho) + A_\infty^- W_{-\lambda, \mu}(-\rho) \quad (3.40)$$

Benzer şekilde, $W_{\lambda, \mu}(\rho)$ 'nin $\rho \rightarrow 0$ ($\tau \rightarrow -\infty$)'nin asimptotik davranışı da

$$M_{\lambda, \mu}(\rho) \rightarrow \rho^{\mu + \frac{1}{2}} \quad (3.41)$$

ve pozitif ve negatif frekans modlarını $\rho \rightarrow 0$

$$f_0^+ = B_0^+ M_{\lambda, \mu}(\rho) \quad (3.42)$$

$$f_0^- = [B_0^+ M_{\lambda, \mu}(\rho)]^* = B_0^- (-1)^{-\mu + \frac{1}{2}} M_{\lambda, -\mu}(\rho) \quad (3.43)$$

B katsayıları reel keyfi sabitleridir. Sonra (3.33)'ün çözümünün asimptotik davranışı, $\rho \rightarrow 0$ için aşağıdaki forma sahiptir.

$$f(\rho) = B_0^+ M_{\lambda, \mu}(\rho) + B_0^- (-1)^{-\mu + \frac{1}{2}} M_{\lambda, -\mu}(\rho) \quad (3.44)$$

$\rho \rightarrow \infty$ 'daki pozitif frekans modu, $\rho \rightarrow 0$ 'daki pozitif ve negatif frekans modlarının lineer bir kombinasyonu olarak yazılabilir:

$$f_{\infty}^+(\rho) = \alpha f_0^+(\rho) + \beta f_0^-(\rho) \quad (3.45)$$

Whittaker fonksiyonlarının aşağıdaki ilişkisini kullanarak,

$$W_{\lambda,\mu}(\rho) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)} M_{\lambda,\mu}(\rho) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} M_{\lambda,-\mu}(\rho) \quad (3.46)$$

α ve β katsayılarını aşağıdaki gibi bulunur,

$$\alpha = \frac{A_{\infty}^+}{B_0^+} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)} \quad (3.47)$$

$$\beta = \frac{A_{\infty}^+}{B_0^-} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} (e^{i\pi})^{\mu - \frac{1}{2}} \quad (3.48)$$

Daha sonra Bogoliubov katsayıları için aşağıdaki bağıntı bulunur:

$$\frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} = e^{2\pi\tilde{\mu}} \frac{|\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)|^2}{|\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)|^2} \quad (3.49)$$

$$\mu = i\tilde{\mu} \text{ ve } \tilde{\mu} = \frac{\sqrt{k_z^2 + (2n+1)eB_0}}{a_0} \text{ olduğu zaman}$$

Gamma fonksiyonları için aşağıdaki ilişki göz önünde bulundurulur.

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + iz\right) \right|^2 = \frac{\pi}{\cos h\pi z} \quad (3.50)$$

Böylece (3.49) denklemini (3.51) denklemine indirgenir.

$$\frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} = \frac{e^{2\pi\tilde{\mu}} \cos h\pi\tilde{\sigma}}{\cos h\pi\sigma} \quad (3.51)$$

Burada yine aşağıdaki tanımlar yapılmıştır:

$$\sigma = \left[\tilde{\mu} - \frac{k_z}{a_0 \sqrt{1 - \left(\frac{m}{eE_0}\right)^2}} \right] \text{ ve } \tilde{\sigma} = - \left[\tilde{\mu} + \frac{k_z}{a_0 \sqrt{1 - \left(\frac{m}{eE_0}\right)^2}} \right]$$

Dalga fonksiyonunun normalizasyon koşulunu kullanarak (Bose-Einstein istatistiklerinden dolayı) $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ yardımıyla yaratılan skaler parçacıkların sayı yoğunluğu aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$n \simeq |\beta|^2 = \frac{\cos h\pi\sigma}{e^{2\pi\tilde{\mu}} \cos h\pi\tilde{\sigma} - \cosh\pi\sigma} \quad (3.52)$$

3.3.2. Dirac Denklem Çözümü ve Parçacık Yaratma

Spin 1/2 parçacıkların yoğunluğunu hesaplamak için, kozmolojik arka plandaki Dirac denklemi elektrik alanın varlığında çözülecektir. Elektromanyetik alanların varlığında eğri uzaydaki kovaryant Dirac denklemi aşağıdaki gibi yazılır [18]:

$$\{\gamma^\mu(\partial_\mu - \Gamma_\mu - ieA_\mu) + im\}\Psi = 0 \quad (3.53)$$

Burada eğri gama γ^μ , matrisleri antikomütasyon ilişkisi $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ yi sağlar ve spin bağlantı katsayıları Γ_μ şöyledir:

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{4} g_{\lambda\alpha} \left[\left(\frac{\partial b_\nu^\beta}{\partial x^\mu} \right) a_\beta^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \right] s^{\lambda\nu} \quad (3.54)$$

Burada

$$s^{\lambda\nu} = \frac{1}{2} [\gamma^\lambda, \gamma^\nu] = \frac{1}{2} (\gamma^\lambda \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\lambda) \quad (3.55)$$

b_α^β , a_β^α matrisleri eğri γ^μ ve Minkowski $\tilde{\gamma}^\mu$ arasındaki bağlantıyı kuran Dirac matrisleridir.

$$\gamma_\mu = b_\mu^\alpha \tilde{\gamma}_\alpha, \quad \gamma^\mu = a_\beta^\mu \tilde{\gamma}^\beta \quad (3.56)$$

$$\tilde{\gamma}^\lambda \tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu \tilde{\gamma}^\lambda = 2\eta^{\lambda\nu} \quad (3.57)$$

Çizgi elemanı köşegen olduğundan, köşegen tetradlarla çalışılır.

$$\gamma^\mu = \sqrt{|g^{\mu\mu}|} \tilde{\gamma}^\mu \quad (3.58)$$

Denklem (3.58)'i denklem (3.54)'te yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^1, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^2, \quad \Gamma_3 = 0, \quad \Gamma_0 = 0, \quad (3.59)$$

ve Dirac denklemi aşağıdaki biçimi alır:

$$\left\{ \tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{t} \left(\tilde{\gamma}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{\gamma}^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) + \tilde{\gamma}^3 \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{ieC}{t} \right) + m \right\} \Psi_0 = 0 \quad (3.60)$$

Burada $\Psi_0 = t\Psi$ olur. Burada t çarpanı spinör bağlantıları nedeniyle gelen katkıyı iptal etmek için tanımlanmıştır. Denklem (3.60), iki birinci dereceden diferansiyel işlemcilerini toplamı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir [19];

$$(\hat{K}_1 + \hat{K}_2)\Phi = 0, \quad (3.61)$$

$$\hat{K}_2\Phi = k\Phi = -\hat{K}_1\Phi, \quad (3.62)$$

Burada Φ spinörü Ψ_0 ile aşağıdaki ifade aracılığıyla ilişkilidir.

$$\tilde{\gamma}^3 \tilde{\gamma}^0 \Psi_0 = \Phi \quad (3.63)$$

Burada k ayırım sabitidir. \hat{K}_1 ve \hat{K}_2 işlemcileri aşağıdaki denklemlerle ifade edilir.

$$\hat{K}_1 = t \left[\gamma^3 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^0 \left(\frac{\partial}{\partial z} - i \frac{eC}{t} \right) + m \gamma^3 \gamma^0 \right] \quad (3.64)$$

$$\hat{K}_2 = \left(\tilde{\gamma}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{\gamma}^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \tilde{\gamma}^3 \tilde{\gamma}^0 \quad (3.65)$$

Denklem (3.60) $-i\nabla$ ile değiştirilir. Φ spinörü $\Phi = \Phi_0 \exp(i(k_x x + k_y y + k_z z))$ şeklinde yazılabilir. Dirac matrislerinin gösterimini aşağıdaki gibi çalışması seçilirse;

$$\tilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^3 = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix}$$

$\hat{K}_2\Phi = k\Phi$ denkleminin Φ 'nin iki-spinörlerinin bileşenleri arasındaki ilişkiyi belirlememizde bize yardım ettiğini görürüz.

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \frac{k_x \sigma^2}{ik_y - k} \Phi_1 \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

$$k = i \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (3.67)$$

Denklem (3.64) Dirac matrislerini kullanarak aşağıdaki denklemlere indirgenir.

$$\left\{ \sigma^3 \frac{d}{dt} + \sigma^1 \left(k_z - \frac{eC}{t} \right) + m\sigma^2 + \frac{k}{t} \right\} \Phi_1 = 0, \quad (3.68)$$

$$\left\{ -\sigma^3 \frac{d}{dt} + -\sigma^1 \left(k_z - \frac{eC}{t} \right) + m\sigma^2 + \frac{k}{t} \right\} \Phi_2 = 0, \quad (3.69)$$

Bispinör (3.66)'nın yapısını hesaba katarak, Denklem (3.69) eşitliğinin denklem (3.68)'e eşdeğer olduğunu görmek zor değildir ve sonuç olarak denklem (3.68)'in çözümünü bulmakla denklem (3.60)'ü çözme problemine indirgenir. Denklem (3.68)'in yapısı hidrojen atomunu küresel koordinatlarda çözdükten sonra elde edilen denkleme benzemektedir ve bu noktada amacımız pozitif ve negatif frekans modlarını belirlemektir. Denklem (3.68)'in Whittaker fonksiyonları cinsinden çözümlerinin olması istenir. Bu amaçla, Φ_1 spinörüne lineer dönüşüm T' uygulanırsa,

$$T\Phi_1 = F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

ile

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{im + k_z} & -\sqrt{im - k_z} \\ \sqrt{im + k_z} & \sqrt{-im - k_z} \end{pmatrix}. \quad (3.71)$$

(3.70) deki F spinörünün bileşenleri denklem sistemini sağlar:

$$\rho \frac{df_1}{d\rho} - f_1 \left(\frac{-Cek_z}{\sqrt{-k_z^2 - m^2}} + \frac{\rho}{2} \right) - f_2 \left(\frac{IeCm}{\sqrt{-k_z^2 - m^2}} - k \right) = 0, \quad (3.72)$$

$$\rho \frac{df_2}{d\rho} + f_2 \left(\frac{-Cek_z}{\sqrt{-k_z^2 - m^2}} + \frac{\rho}{2} \right) + f_1 \left(\frac{IeCm}{\sqrt{-k_z^2 - m^2}} + k \right) = 0, \quad (3.73)$$

Bu denklemlerin çözümleri Whittaker fonksiyonları $W_{k,\mu}(z)$ ve $M_{k,\mu}(z)$ olarak ifade edilir.

Pozitif ve negatif frekans modlarını oluşturmak için hipergeometrik fonksiyonların asimptotik davranışı kullanılır ve denklem (3.72) ve (3.73)'ün çözümleri yine HJ denkleminin çözümleri ile karşılaştırılır. Bu karşılaştırma için tekrar HJ çözümleri elde edilmeyecektir, bu çözümler doğrudan [18] makalesinden alınarak karşılaştırma yapılacaktır. Böylece bu prosedürün kullanılmasıyla pozitif frekanslı kip $t \rightarrow +\infty$ için şöyle belirlenir:

$$F_{+\infty}^+ = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_{\infty}^+ \rho^{-1/2} W_{-\frac{1}{2} + \frac{eCk_z}{\sqrt{-k_z^2 - m^2}}, \sqrt{k^2 - e^2 C^2}}(\rho) \\ \frac{1}{k - \frac{IeCm}{\sqrt{-k_z^2 - m^2}}} \mathfrak{G}_{\infty}^+ \rho^{-1/2} W_{\frac{1}{2} + \frac{eCk_z}{\sqrt{-k_z^2 - m^2}}, \sqrt{k^2 - e^2 C^2}}(\rho) \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

Burada $\mu = \sqrt{k^2 - e^2 C^2} = i\sqrt{k_1^2 + e^2 C^2} = i\tilde{\mu}$ tanımları yapılmıştır.

\mathfrak{C}_∞^+ normalizasyon sabiti iç çarpıma göre belirlenir:

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = \int_{\sigma} \bar{\Phi}_1 \gamma^\mu \Phi_2 \sqrt{-g} d\sigma_\mu \quad (3.75)$$

Burada σ keyfi bir uzayımsı hiperyüzeypdir. Benzer şekilde $t \rightarrow 0$ iken elde edilen pozitif kip şöyledir:

$$F_0^+ = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_0^+ \rho^{-1/2} M_{-\frac{1}{2} + \frac{eCk_z}{\sqrt{-k_z^2 - m^2}}, \mu}(\rho) \\ -\frac{eCk_z}{\sqrt{-k_z^2 - m^2}} + \mu \\ k - \frac{ICem}{\sqrt{-k_z^2 - m^2}} \mathfrak{C}_0^+ \rho^{-1/2} M_{\frac{1}{2} + \frac{eCk_z}{\sqrt{-k_z^2 - m^2}}, \mu}(\rho) \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

Burada \mathfrak{C}_0^+ da normalizasyon sabitidir. Whittaker fonksiyonun $M_{k,\mu}(z) \sim e^{-z/2} z^{1/2+\mu}$ asimptotik davranışının ve (3.75)'teki normalizasyon durumlarının kullanılmasıyla $t \rightarrow 0$ iken negatif frekanslı kip F_0^- elde edilir:

$$F_0^- = \begin{pmatrix} e^{\pi\tilde{\mu}} \mathfrak{C}_0^+ \rho^{-1/2} M_{-\frac{1}{2} + \frac{eCk_z}{\sqrt{-k_z^2 - m^2}}, -\mu}(\rho) \\ -\frac{eCk_z}{\sqrt{-k_z^2 - m^2}} - \mu \\ k - \frac{ICem}{\sqrt{-k_z^2 - m^2}} e^{\pi\tilde{\mu}} \mathfrak{C}_0^+ \rho^{-1/2} M_{\frac{1}{2} + \frac{eCk_z}{\sqrt{-k_z^2 - m^2}}, \mu}(\rho) \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

Böylece yine yaratılan parçacıkların yoğunluğu Bogoliubov dönüşümlerinin yardımıyla hesaplanırsa,

$$F_\infty^+ = \alpha F_0^+ + \beta F_0^- \quad (3.78)$$

$$F_{+\infty}^+ = \frac{\Gamma(-2i\tilde{\mu})}{\Gamma(\frac{1}{2} - i\tilde{\mu} - \mathfrak{f})} F_0^+ + \frac{\Gamma(2i\tilde{\mu})}{\Gamma(\frac{1}{2} + i\tilde{\mu} - \mathfrak{f})} e^{-\pi\tilde{\mu}} F_0^- \quad (3.79)$$

Burada $\mathfrak{f} = -\frac{1}{2} + \frac{Ck_z}{\sqrt{-k_z^2 - m^2}}$ 'dır. Gamma fonksiyonunun aşağıda verilen özelliğinin kullanılmasıyla

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sin h \pi y} \quad (3.80)$$

şu bağıntı elde edilir:

$$\left| \frac{\beta}{\alpha} \right|^2 = e^{-2\pi\tilde{\mu}} \frac{\sin h \pi \left(\tilde{\mu} + \frac{eCk_z}{\sqrt{k_z^2+m^2}} \right) \left(\tilde{\mu} - \frac{eCk_z}{\sqrt{k_z^2+m^2}} \right)}{\sin h \pi \left(\tilde{\mu} - \frac{eCk_z}{\sqrt{k_z^2+m^2}} \right) \left(\tilde{\mu} + \frac{eCk_z}{\sqrt{k_z^2+m^2}} \right)} \quad (3.81)$$

Dirac parçacıkları için verilen dalga fonksiyonunu normalizasyon koşulu kullanılırsa,

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (3.82)$$

buradan yaratılan parçacıkların sayı yoğunluğu bulunur:

$$|\beta|^2 = \frac{\exp(-2\pi\tilde{\mu}) \left(\tilde{\mu} - \frac{eCk_z}{\sqrt{k_z^2+m^2}} \right) \sin h \pi \left(\tilde{\mu} + \frac{eCk_z}{\sqrt{k_z^2+m^2}} \right)}{\exp(-2\pi\tilde{\mu}) \left(\tilde{\mu} - \frac{eCk_z}{\sqrt{k_z^2+m^2}} \right) \sin h \pi \left(\tilde{\mu} + \frac{eCk_z}{\sqrt{k_z^2+m^2}} \right) + \left(\tilde{\mu} + \frac{eCk_z}{\sqrt{k_z^2+m^2}} \right) \sin h \pi \left(\tilde{\mu} - \frac{eCk_z}{\sqrt{k_z^2+m^2}} \right)} \quad (3.83)$$

Bu sonuç elektrik alanın yokluğunda değerlendirilirse, yaratılan parçacıkların yoğunluğu (3.83) ifadesi termal biçimde olur:

$$n = \frac{1}{\exp 2\pi |k_{\perp}| + 1} \quad (3.84)$$

3.3.3. DKP Denkleminin Çözümü

DKP denklemi, kütleli ve kütsüz spin-0 ve spin-1 bozonları tanımlayan, on altı bileşenli görelî ve Dirac denklemine benzeyen birinci mertebeden bir parçacık denklemdir [34]. DKP denklemi sıfır kütle limiti için fotonu betimler ve elde edilen çözümler Maxwell denklemlerine eşdeğerdir. Serbest alanlar durumunda ise denklemin çözümleri Klein-Gordon ve Proca denklemlerinin çözümlerine eşdeğer olur. DKP denkleminin Riemann uzay zamanında dış elektromanyetik alanların varlığında kovaryant genellemesi aşağıdaki gibi verilir [20]:

$$[i\beta^{\mu}(\partial_{\mu} - \Sigma_{\mu} + ieA_{\mu}) - m] \Psi_K(t, x) = 0 \quad (3.85)$$

Burada Σ_{μ} spin bağlantıları, m spin-1 parçacığının kütlesi, A_{μ} 4-vektör potansiyel, e parçacığın yükü ve $\beta^{\mu}(x) = \gamma^{\mu}(x) \otimes I + I \otimes \gamma^{\mu}(x)$ eğri uzay-zaman Dirac matrisleri $\gamma^{\mu}(x)$ ile ifade edilen Kemmer matrisleridir. DKP denklemi, γ matrisi yerine β matrisi alındığında Dirac denklemine benzemektedir. Kemmer matrisleri aşağıda verilen sıra değiştirme ilişkisine sahiptirler:

$$\beta^a \beta^b \beta^c + \beta^c \beta^b \beta^a = \beta^a \delta^{bc} + \beta^c \delta^{ba} \quad (3.86)$$

β matrisleri, düz uzay Minkowski matrisleri ile şöyle ilişkilidir.

$$\beta^\mu(x) = e_i^\mu(x)\tilde{\beta}^i \quad (3.87)$$

Burada tilde, Minkowski uzay zamanıyla ilgili β matrislerini belirtmek için kullanılır ve $e_i^\mu(x)$ aşağıdaki ifadeyi sağlayan tetradlardır.

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^i e_\nu^j \eta_{ij} \quad (3.88)$$

Yunan ve Latin indisleri sırasıyla eğri ve düz uzay zamanı temsil eder. Spin bağlantıları verilen spin-1 parçacıkları için şöyle yazılır.

$$\Sigma_\mu = \Gamma_\mu \otimes I + I \otimes \Gamma_\mu \quad (3.89)$$

Burada Γ_μ spin-1/2 parçacıkları için spin bağlantısıdır ve şöyle ifade edilir.

$$\Gamma_\lambda = -\frac{1}{8} g_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha [\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)] \quad (3.90)$$

ve $\Gamma_{\nu\lambda}^\alpha$ şu şekilde verilen Christoffel sembolleridir.

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \quad (3.91)$$

Bu kesimde De Sitter uzay-zamanındaki zamana bağlı bir elektrik alan ile kütleli vektör bozon yaratma olasılığını araştırmak istiyoruz. Bu olgu uygun zaman η ile yazılan vektör potansiyeli ile şöyle analiz edilecektir.

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \frac{-E_0}{H} e^{Ht} = \frac{E_0}{\eta H^2} \quad (3.92)$$

Vektör potansiyelin bu biçimi ile zamana bağlı bir elektrik alan elde edilir. Bu potansiyelle birlikte Denklem (3.85) çizgi elamanı için aşağıdaki biçimi alır.

$$\left\{ \tilde{\beta}^{(0)} + \partial_0 + \tilde{\beta}^{(1)} \left[\partial_1 + \frac{1}{2\eta} (\tilde{\alpha}^{(1)} \otimes I + I \otimes \tilde{\alpha}^{(1)}) + \frac{ieE_0}{\eta H^2} \right] + \frac{im}{\eta H^2} \right\} \Psi_K(\eta, x) = 0 \quad (3.93)$$

Burada $\tilde{\alpha} = \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}$ olarak tanımlanmıştır.

Schrödinger'in ikinci kuantizasyon yöntemi kullanılarak, DKP denkleminin spin-0 kısmı ayrıştırılarak sadece spin-1 kısmı hem $(3 + 1)$ hem de $(1 + 1)$ boyutlu uzay-zaman için yazılmıştır. Bu yaklaşımda, denklemin dalga fonksiyonunun derecesi 2 olan simetrik bir spinör formunda yazılması gerekir. Bu teknikte kütleli spin-1 parçacığı iki özdeş spin-1/2 parçacık sistemi olarak

düşünülür. Daha sonra Kemmer dalga fonksiyonu $\Psi_K(x)$ iki Dirac spinörlerinin yani sırasıyla $\Psi_K(x) = \Psi_D(x) \otimes \Psi_D(x)$ doğrudan çarpılması ile yazılır. $\Psi_K(t, \vec{x})$ yerel Lorentz dönüşümleri altında değişmez kalır. Uzay-zaman (1+1) boyuta indirgenildiğinde bilinen Dirac $\gamma^\mu(x)$ matrisleri yerine Pauli $\sigma^\mu(x)$ matrisleri alınır ve bu durumda Kemmer $\beta^\mu(x)$ matrisleri şu biçime indirgenir:

$$\beta^\mu(x) = \sigma^\mu(x) \otimes I + I \otimes \sigma^\mu(x) \quad (3.94)$$

Dirac gamma matrisleri düz uzay için Pauli matrisleri cinsinden $\tilde{\gamma}^a = (\sigma^3, -i\sigma^2)$ olarak seçilecektir. Bu durumda, Kemmer dalga fonksiyonu Ψ_K dört bileşene sahip olur ve simetrik iki Dirac dalga fonksiyonunun doğrudan çarpımıyla aşağıdaki gibi verilir:

$$\Psi_K = \Psi_D \otimes \Psi_D = \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\rho \\ \rho\phi \\ \phi\rho \\ \phi\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{\bar{0}} \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

Burada ρ ve ϕ Dirac dalga fonksiyonunun bileşenlerini temsil eder. Bu tanımların kullanılmasıyla çiftlenimli dört diferansiyel denklem elde edilir ve bu denklemlerin ikisi aynı olduğu için bunların üç tanesi alınır:

$$\left(\partial_\eta + \frac{1}{2\eta} + \frac{im}{2\eta H}\right)x_1 - \left(ik_x + \frac{ieE_0}{\eta H^2}\right)x_0 + \frac{1}{2\eta}x_2 = 0 \quad (3.96)$$

$$\left(\partial_\eta + \frac{1}{2\eta} - \frac{im}{2\eta H}\right)x_2 - \left(ik_x + \frac{ieE_0}{\eta H^2}\right)x_0 + \frac{1}{2\eta}x_1 = 0 \quad (3.97)$$

$$\left(ik_x + \frac{ieE_0}{\eta H^2}\right)(x_2 - x_1) - \frac{im}{\eta H}x_0 = 0 \quad (3.98)$$

$\Psi_K(\eta, x) = e^{ik_x x} x(\eta)$ olarak tanımlanmıştır.

Bu üç denklem arasında yapılan bazı cebirsel işlemlerden sonra, aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir:

$$\left[\partial_\eta^2 + \left(k_x + \frac{eE_0}{\eta H^2}\right)^2 + \frac{m^2}{4\eta^2 H^2}\right](\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (3.99)$$

Burada $x(\eta) = \eta^{-1}\varphi(\eta)$ tanımı yapılmıştır. Bu diferansiyel denklemin genel çözümü Whittaker fonksiyonu [17] cinsinden şöyle verilir.

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = N_1 M_{K,\mu}(\rho) + N_2 W_{K,\mu}(\rho) \quad (3.100)$$

Burada N_1 ve N_2 sabitleri keyfidir ve $M = m/2$ olmak üzere; ρ, K ve μ şöyle tanımlanmıştır:

$$\rho = 2ik_x\eta, \quad K = \frac{-ieE_0}{H^2}, \quad \mu = i|\tilde{\mu}| = i \left[\left(\frac{e^2 E_0^2}{H^4} + \frac{M^2}{H^2} \right) - \frac{1}{4} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.101)$$

Kemmer dalga fonksiyonu Ψ_K 'nin her bir bileşeni denklem (3.96)- (3.98) kullanılarak bulunabilir. Ardından, sonsuzdaki düzenli çözümler şu şekilde yazılır:

$$\Psi_K = e^{ik_x x} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{\eta} + \frac{2H}{im} \left(1 + \frac{ik_x\eta - K}{4k_x^2} \right) \right] W_{K,\mu}(2ik_x\eta) + \frac{iH}{2k_x^2 m\eta} W_{K+1,\mu}(2ik_x\eta) \right\} \\ - \frac{H}{m} \left(k_x + \frac{eE_0}{\eta H^2} \right) W_{K,\mu}(2ik_x\eta) \\ - \frac{H}{m} \left(k_x + \frac{eE_0}{\eta H^2} \right) W_{K,\mu}(2ik_x\eta) \\ \frac{1}{2} \left\{ \left[-\frac{1}{\eta} + \frac{2H}{im} \left(1 + \frac{ik_x\eta - K}{4k_x^2} \right) \right] W_{K,\mu}(2ik_x\eta) + \frac{iH}{2k_x^2 m\eta} W_{K+1,\mu}(2ik_x\eta) \right\} \end{pmatrix} \quad (3.102)$$

Burada Whittaker fonksiyonları [17] için aşağıdaki tekraralama bağlantısı kullanılır.

$$\partial_z W_{K,\mu}(z) = \frac{1}{z} \left\{ \left(\frac{1}{2}z - K \right) W_{K,\mu}(z) - W_{K+1,\mu}(z) \right\} \quad (3.103)$$

Whittaker fonksiyonlarının asimptotik davranışını dikkate alarak pozitif ve negatif frekanslı çözümleri Bogoliubov katsayılarını bulmak için tanımlanabilir.

$W_{K,\mu}(z)$ 'nin $|z| \rightarrow \infty$ iken asimptotik davranışı

$$W_{K,\mu}(z) \rightarrow e^{-\frac{z}{2}} z^K \quad (3.104)$$

buna göre $|\rho| \rightarrow \infty$ sonsuz için pozitif ve negatif frekans kipleri şöyle olur:

$$f_\infty^+ = A_\infty^+ W_{K,\mu}(2ik_x\eta) \quad (3.105)$$

$$f_\infty^- = [A_\infty^+ W_{K,\mu}(2ik_x\eta)]^* = A_\infty^+ W_{-K,\mu}(-2ik_x\eta) \quad (3.106)$$

Benzer şekilde, $|z| \rightarrow 0$ iken $W_{K,\mu}(z)$ 'nin asimptotik davranışı;

$$M_{K,\mu}(z) \rightarrow z^{\mu+\frac{1}{2}} \quad (3.107)$$

buna göre $|\rho| \rightarrow 0$ için pozitif ve negatif frekans kipleri;

$$f_0^+ = A_0^+ M_{K,\mu}(2ik_x\eta) \quad (3.108)$$

$$f_0^- = [A_0^+ M_{K,\mu}(2ik_x\eta)]^* = A_0^+ (-1)^{-\mu+\frac{1}{2}} M_{K,-\mu}(-2ik_x\eta) \quad (3.109)$$

Burada A katsayıları gerçel keyfi sabitlerdir.

$|\eta| \rightarrow \infty$ 'daki pozitif frekanslı kipler $|\eta| \rightarrow 0$ 'daki pozitif ve negatif frekans kiplerinin çizgisel kombinasyonu olarak şöyle yazılabilir:

$$f_{\infty}^{+} = \alpha f_0^{+} + \beta f_0^{-} \quad (3.110)$$

Whittaker fonksiyonları için aşağıdaki ilişki kullanılarak,

$$W_{K,\mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - k)} M_{K,\mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - k)} M_{K,-\mu}(z) \quad (3.111)$$

α ve β katsayıları aşağıdaki gibi bulunur:

$$\alpha = \frac{A_{\infty}^{+}}{A_0^{+}} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - k)} \quad (3.112)$$

$$\beta = \frac{A_{\infty}^{+}}{A_0^{+}} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - k)} (e^{i\pi})^{\mu - \frac{1}{2}} \quad (3.113)$$

Böylece Bogoliubov katsayıları için aşağıdaki ifadeyi elde edilir:

$$\frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} = e^{2\pi|\tilde{\mu}|} \frac{|\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - k)|^2}{|\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - k)|^2} \quad (3.114)$$

Gamma fonksiyonları aşağıda verilen özellik kullanılırsa,

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + iz\right) \right|^2 = \frac{\pi}{\cos h\pi z} \quad (3.115)$$

Denklem (3.114) için şunu elde ederiz:

$$\frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} = \frac{e^{2\pi|\tilde{\mu}|} \cos h\pi \tilde{y}}{\cos h\pi y}$$

Böylece vektör parçacıklar için (Bose-Einstein istatistiğine uygun olarak) dalga fonksiyonunun normalizasyon koşulu kullanılarak parçacık yaratma sayı yoğunluğu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$n \cong |\beta|^2 = \frac{\cos h\pi y}{e^{2\pi|\tilde{\mu}|} \cos h\pi \tilde{y} - \cos h\pi y} \quad (3.116)$$

Burada $y = |\tilde{\mu}| + \frac{eE_0}{H^2}$ ve $\tilde{y} = -|\tilde{\mu}| + \frac{eE_0}{H^2}$ olarak tanımlanmıştır.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde tez çalışması olarak KG, Dirac ve DKP denklemleri, kaynaklığını bir 4-vektör elektromanyetik potansiyelin yaptığı ve kütleçekimsel alanları betimleyen bir metrik için analitik olarak çözülecektir. Çalışma içerisinde Yunan ve Latin indisleri sırasıyla eğri ve düz uzay zamanı temsil eder ve 0,...,3'e kadar değişir. Ayrıca çalışmada doğal birimler kullanılmıştır ($\hbar = c = 1$).

4.1. Klein-Gordon Denkleminin Çözümü

KG denkleminin çözümünde kullanılacak Robertson-Walker (RW) metriği ve 4-vektör potansiyel aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$ds^2 = \frac{1}{a^2(t)} dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.1)$$

Burada metrik için ölçek çarpanı, $a(t) = \sqrt{t}$ olarak alınmıştır.

$$A_\nu = \frac{B_0}{\beta} e^{-\beta y} \delta_\nu^1 + E_0 a(t) \delta_\nu^3 \quad (4.2)$$

Bu 4-vektör potansiyelden türetilen elektrik ve manyetik alanlar aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -E_0 \dot{a}(t) \hat{k}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ dx & dy & dz \\ \frac{B_0 e^{-\beta y}}{\beta} & 0 & E_0 a(t) \end{vmatrix} = B_0 e^{-\beta y} \hat{k}$$

Eğri uzay-zamanda elektromanyetik alanların varlığında skaler parçacıkları temsil eden KG denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir [18]:

$$g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \Phi - (m^2 + \xi R) \Phi = 0 \quad (4.3)$$

Burada ∇_α kovaryant türev, R skaler eğrilik ve ξ boyutsuz bir çiftlenim sabitidir ve burada minimal çiftlenim durumu göz önüne alındığından değeri sıfır olarak alınacaktır.

Denklem (4.1) ve (4.2), denklem (4.3)'te yerine yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$a^2(t) \partial_0^2 - \frac{1}{a^2(t)} \left[\left(\partial_x - ie \frac{B_0}{\beta} e^{-\beta y} \right)^2 + \partial_y^2 + \left(\partial_z - ie E_0 a(t) \right)^2 - m^2 \right] \Phi = 0 \quad (4.4)$$

Eğer $\Phi = e^{-(xk_x + zk_z)} f(t) g(y)$ eşitliği denklem (4.4)'te yerine yazılırsa;

$$\left[a^2(t)\partial_t^2 + \frac{1}{a^2(t)} \left(\left(k_x + e \frac{B_0}{\beta} e^{-\beta y} \right)^2 + (k_z + eE_0 a(t))^2 - \partial_y^2 \right) - m^2 \right] f(t)g(y) = 0 \quad (4.5)$$

elde edilir. Bu denklemde konformal zaman dönüşümü yapılırsa $dh = \frac{dt}{a(t)}$, (4.6) denkleminde ulaşılır.

$$\left[\partial_h^2 - \frac{1}{h} \partial_h + \frac{1}{a_0^2 h^2} \left(\left(k_x + e \frac{B_0}{\beta} e^{-\beta y} \right)^2 + (k_z + eE_0 a_0 h)^2 - \partial_y^2 \right) - m^2 \right] f(h)g(y) = 0 \quad (4.6)$$

İkinci bir konformal dönüşüm, $d\eta = \frac{dh}{a(h)}$ olarak yapılırsa,

$$\left[(\partial_\eta^2 - 2a_0 \partial_\eta + (k_z + eE_0 a_0 e^{a_0 \eta})^2 - a_0^2 m^2 e^{2a_0 \eta}) + \left(k_x + e \frac{B_0}{\beta} e^{-\beta y} \right)^2 - \partial_y^2 \right] f(\eta)g(y) = 0 \quad (4.7)$$

elde edilir. Burada iki yeni işlemci tanımlanırsa,

$$\hat{P}(\eta) = (\partial_\eta^2 - 2a_0 \partial_\eta + (k_z + eE_0 a_0 e^{a_0 \eta})^2 - a_0^2 m^2 e^{2a_0 \eta})$$

$$\hat{Q}(y) = \left(k_x + e \frac{B_0}{\beta} e^{-\beta y} \right)^2 - \partial_y^2$$

denklem (4.7) iki yeni denkleme dönüşür:

$$\hat{P}(\eta)f(\eta) = -Sf(\eta) \quad (4.7. a)$$

$$\hat{Q}(y)g(y) = Sg(y) \quad (4.7. b)$$

Burada S ayırma sabitidir.

(4.7. b) denklemini için;

$$\left[-\partial_y^2 + \left(k_x + e \frac{B_0}{\beta} e^{-\beta y} \right)^2 \right] g(y) = Sg(y) \quad (4.8)$$

$H = e^{-\beta y}$ tanımı yapılır ve elde edilen denklem $g(H) = H^{-1/2} G(H)$ olarak ayrıştırılırsa,

$$\left[\frac{d^2}{dH^2} + \left(\frac{1}{4} - k_x^2 \beta^2 \right) \frac{1}{H^2} - \left(2k_x e \frac{B_0}{\beta^3} \right) \frac{1}{H} - \frac{e^2 B_0^2}{\beta^4} - \frac{S}{\beta^2 H^2} \right] G(H) = 0 \quad (4.9)$$

(4.9) denkleminde ulaşılır.

Bu denklem biçim bakımından Whittaker denkleminde benzerdir, bu nedenle $\rho = 2\gamma H$ ve

$\gamma^2 = \frac{e^2 B_0^2}{\beta^4}$ tanımları yapılırsa, denklem (4.9) Whittaker denkleminde olacaktır [17].

$$\left[\frac{d}{d\rho^2} + \frac{\left(\frac{1}{4} - \frac{(k_x^2 - S)}{\beta^2}\right)}{\rho^2} + \frac{\left(-\frac{k_x e B_0}{\beta^3 2\gamma}\right)}{\rho} - \frac{1}{4} \right] G(\rho) = 0 \quad (4.10)$$

Burada

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{k_x^2 - S}{\beta^2}} \text{ ve } \epsilon = \frac{-k_x e B_0}{\beta^3 2\gamma}$$

olmak üzere çözümler aşağıdaki denklem olacaktır:

$$G(\rho) = A M_{\epsilon, \mu}(\rho) + B W_{\epsilon, \mu}(\rho) \quad (4.11)$$

Burada A ve B normalizasyon sabitleridir.

$\hat{P}(\eta)$ işlemcisi denklem (4.7. a)'da yerine yazılır ve $v = e^{\eta a_0}$ değişken değişimi yapılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\left[\frac{d^2}{dv^2} - \frac{1}{v} \frac{d}{dv} + \frac{K^2}{a_0^2 v^2} + \frac{2k_z e E_0}{a_0} \frac{1}{v} + e^2 E_0^2 - m^2 \right] f(v) = 0 \quad (4.12)$$

Denklem (4.12) $f(v) = v^u F(v)$ formunda yazılırsa;

$$\left[\left(\frac{d^2}{dv^2} + \frac{2u}{v} \frac{d}{dv} + \frac{u(u-1)}{v^2} \right) - \frac{1}{v} \frac{d}{dv} - \frac{u}{v^2} + \frac{K^2}{a_0^2 v^2} + \frac{2k_z e E_0}{a_0} \frac{1}{v} + (e^2 E_0^2 - m^2) \right] F(v) = 0 \quad (4.13)$$

denklem (4.13) elde edilir. 1.dereceden türevi yok etmek için $u = \frac{1}{2}$ olmalıdır.

$$\left[\frac{d^2}{dv^2} + \left(\frac{K^2}{a_0^2} - \frac{3}{4} \right) \frac{1}{v^2} + \frac{2k_z e E_0}{a_0} \frac{1}{v} + (e^2 E_0^2 - m^2) \right] F(v) = 0 \quad (4.14)$$

Bu denklem de

$$\theta^2 = (e^2 E_0^2 - m^2) \quad \sigma = 2i\theta v$$

tanımları ile yine Whittaker denklemine ulaşılacaktır [17].

$$\left[\frac{d^2}{d\sigma^2} + \frac{\left(\frac{K^2}{a_0^2} - \frac{3}{4}\right)}{\sigma^2} + \frac{\frac{k_z e E_0}{i\theta a_0}}{\sigma} - \frac{1}{4} \right] F(\sigma) = 0 \quad (4.15)$$

Burada

$\delta = \pm \frac{\sqrt{a_0^2 - k_z^2 - S}}{a_0}$ ve $\kappa = \frac{k_z e E_0}{i a_0 \theta}$ tanımları yapılırsa denklemin çözümü aşağıdaki gibi olacaktır:

$$F(\sigma) = A_1 M_{\kappa, \delta}(\sigma) + B_1 W_{\kappa, \delta}(\sigma) \quad (4.16)$$

Böylece KG denklemi için tam çözümler şöyle elde edilir:

$$\Phi = e^{i(xk_x + zk_z)} [A M_{\epsilon, \mu}(\rho) + B W_{\epsilon, \mu}(\rho)] [A_1 M_{\kappa, \delta}(\sigma) + B_1 W_{\kappa, \delta}(\sigma)] \quad (4.17)$$

4.1.1. Skaler Parçacık Yaratma

Parçacık yaratma olgusunu tartışmak için kesim 3.3.1.1. de elde edilen yarı klasik çözümleri göz önüne alarak, Bogoliubov katsayılarının, α ve β , belirlenmesi gerekir. Bunun için dalga fonksiyonunun zamana bağlı bileşenlerinin asimptotik davranışı ile pozitif ve negatif frekanslı kiplerin bulunması gerekir.

$\sigma \rightarrow \infty$ için $W_{\kappa, \delta}(\sigma)$ nin asimptotik davranışı şöyledir:

$$W_{\kappa, \delta}(\sigma) \rightarrow e^{-\sigma/2} \sigma^\kappa \quad (4.18)$$

Böylece pozitif ve negatif frekanslı kipler

$$f_\infty^+ = A_\infty^+ W_{\kappa, \delta}(\sigma)$$

$$f_\infty^- = [A_\infty^+ W_{\kappa, \delta}(\sigma)]^* = A_\infty^- W_{-\kappa, \delta}(-\sigma)$$

biçiminde olduğundan, denklem (4.18)' in asimptotik davranışı $\sigma \rightarrow \infty$ için aşağıdaki gibi olur:

$$f(\sigma) = A_\infty^+ W_{\kappa, \delta}(\sigma) + A_\infty^- W_{-\kappa, \delta}(-\sigma) \quad (4.19)$$

Benzer biçimde, $\sigma \rightarrow 0$ iken $M_{\kappa, \delta}(\sigma)$ asimptotik davranışı $M_{\kappa, \delta}(\sigma) \rightarrow \sigma^{\delta + \frac{1}{2}}$ biçimindedir. Bu nedenle $\sigma \rightarrow 0$ için pozitif ve negatif frekanslı kipler şöyle olacaktır:

$$f_0^+ = B_0^+ M_{\kappa, \delta}(\sigma)$$

$$f_0^- = [B_0^+ M_{\kappa, \delta}(\sigma)]^* = B_0^- (-1)^{-\delta + \frac{1}{2}} M_{\kappa, -\delta}(-\sigma)$$

Burada $\sigma \rightarrow 0$ için çözümün asimptotik davranışı aşağıdaki formdadır.

$$f(\sigma) = B_0^+ M_{\kappa, \delta}(\sigma) + B_0^- (-1)^{-\delta + \frac{1}{2}} M_{\kappa, -\delta}(\sigma) \quad (4.20)$$

$\sigma \rightarrow \infty$ iken pozitif ve negatif frekans kipleri, $\sigma \rightarrow 0$ daki pozitif ve negatif frekans kiplerinin çizgisel bileşimi olarak yazılabilir [18];

$$f_{\infty}^+(\sigma) = \alpha f_0^+(\sigma) + \beta f_0^-(\sigma) \quad (4.21)$$

Burada gerekli ifadeleri yazarak Whittaker fonksiyonları için verilen aşağıdaki bağıntı kullanılırsa [17]:

$$W_{\kappa,\delta}(\sigma) = \frac{\Gamma(-2\delta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \delta - \kappa\right)} M_{\kappa,\delta}(\sigma) + \frac{\Gamma(2\delta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \delta - \kappa\right)} M_{\kappa,-\delta}(\sigma) \quad (4.22)$$

α ve β katsayıları aşağıdaki gibi bulunur:

$$\alpha = \frac{A_{\infty}^+}{B_0^+} \frac{\Gamma(-2\delta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \delta - \kappa\right)} \quad \beta = \frac{A_{\infty}^+}{B_0^-} \frac{\Gamma(2\delta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \delta - \kappa\right)} e^{(i\pi)^{\delta-1/2}} \quad (4.23)$$

Böylece denklem (4.24) elde edilir.

$$\frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} = e^{2\pi\tilde{\delta}} \frac{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + \delta - \kappa\right)\right|^2}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} - \delta - \kappa\right)\right|^2} \quad (4.24)$$

Burada $\tilde{\delta} = \frac{\sqrt{k_z^2 + s - a_0^2}}{a_0}$ olarak tanımlanmıştır. Gamma fonksiyonları için [17]

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = \frac{-\pi}{x \sin \pi x} \quad |\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sin \pi y} \quad (4.25)$$

bağıntıları kullanılırsa, parçacık yaratma sayı yoğunluğu için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$N \simeq |\beta_k|^2 = \frac{1}{\frac{|\alpha_k|^2}{|\beta_k|} - 1} = \frac{1}{e^{2\pi\tilde{\delta}} \left(\frac{\cosh \pi \tilde{y}}{\cosh \pi y}\right) - 1} \quad (4.26)$$

Burada yine aşağıdaki tanımlar yapılmıştır:

$$y = \left[\tilde{\delta} - \frac{k_z}{a_0 \sqrt{1 - \left(\frac{m}{eE_0}\right)^2}} \right] \quad \text{ve} \quad \tilde{y} = - \left[\tilde{\delta} + \frac{k_z}{a_0 \sqrt{1 - \left(\frac{m}{eE_0}\right)^2}} \right]$$

4.2. Dirac Denkleminin Çözümü

Dirac denkleminin çözümünde yine erken evreni temsil eden Robertson-Walker metriği kullanılacaktır. Bu metrik aşağıdaki gibi verilir:

$$ds^2 = \frac{1}{a^2(t)} dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.27)$$

Burada ölçek çarpanı KG denklemi için seçilen ölçek çarpanına göre biraz daha genel olarak $a(t) = \sqrt{\Gamma + \Lambda t}$ biçiminde seçilecektir. Ayrıca 4-vektör potansiyel de bu seçime bağlı olarak, analitik çözümü kolaylaştırmak için ölçek çarpanı cinsinden şöyle seçilecektir:

$$A_\mu = \left(0, \frac{B_0}{\beta} e^{-\beta y}, 0, E_0 a(t) \right) \quad (4.28)$$

Eğri uzay-zamanda elektromanyetik alanların varlığında $\frac{1}{2}$ spinli parçacıkları temsil eden Dirac denklemi şöyle verilir [18];

$$[\gamma^\mu(x)(\partial_\mu - \Gamma_\mu - ieA_\mu) + im]\psi(x^\mu) = 0 \quad (4.29)$$

Burada $\gamma^\mu(x)$ eğri uzay-zaman Dirac matrisleridir ve düz uzay-zaman Dirac matrisleri cinsinden aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\gamma^\mu(x) = e_{(i)}^\mu \tilde{\gamma}^{(i)} \quad (4.30)$$

Burada $e_{(i)}^\mu$, düz uzay-zaman ile eğri uzay-zaman arasında ilişki kuran matristir ve tetrad olarak isimlendirilir.

Seçilen metrik için ardışık iki konformal zaman dönüşümü $d\eta = \frac{dt}{a(t)}$ ve $d\xi = \frac{d\eta}{a_0\eta}$ yapılırsa, metrik şu biçime dönüşecektir:

$$ds^2 = a_0^2 e^{2a_0\xi} [d\xi - (dx^2 + dy^2 + dz^2)] \quad (4.31. a)$$

$$= a^2(\xi)[d\xi - (dx^2 + dy^2 + dz^2)] \quad (4.31. b)$$

Bu durumda metrik tensörü aşağıdaki biçimde yazılır:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^2(\xi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(\xi) \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Kovaryant biçimde yazılan bu metrik tensörün kontrovaryant biçimi şöyle elde edilir:

$$g^{\mu\nu} = \frac{\text{cofac}(g_{\mu\nu})}{\det(g_{\mu\nu})}$$

Bu tanıma göre

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1/a^2(\xi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/a^2(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/a^2(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/a^2(\xi) \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

elde edilir. Eğri uzay Dirac gamma matrislerini düz uzay temsilleri ile ilişkilendiren tetradları bulmak için

$$g^{\mu\nu} = e_{(a)}^{\mu} e_{(b)}^{\nu} \eta^{(a)(b)} \quad \text{veya} \quad g_{\mu\nu} = e^{(a)}_{\mu} e^{(b)}_{\nu} \eta_{(a)(b)}$$

bağıntısı kullanılır, burada $\eta_{(a)(b)} = (1, -1, -1, -1)$ olarak verilen Minkowski metriğidir. Buna göre tetradlar aşağıda verilen matrislerle temsil edilir:

$$g^{00} = e_{(0)}^0 e_{(0)}^0 - e_{(1)}^0 e_{(1)}^0 - e_{(2)}^0 e_{(2)}^0 - e_{(3)}^0 e_{(3)}^0$$

$$g^{11} = e_{(0)}^1 e_{(0)}^1 - e_{(1)}^1 e_{(1)}^1 - e_{(2)}^1 e_{(2)}^1 - e_{(3)}^1 e_{(3)}^1$$

$$g^{22} = e_{(0)}^2 e_{(0)}^2 - e_{(1)}^2 e_{(1)}^2 - e_{(2)}^2 e_{(2)}^2 - e_{(3)}^2 e_{(3)}^2$$

$$g^{33} = e_{(0)}^3 e_{(0)}^3 - e_{(1)}^3 e_{(1)}^3 - e_{(2)}^3 e_{(2)}^3 - e_{(3)}^3 e_{(3)}^3$$

$$e_{(0)}^0 = \frac{1}{a(\xi)}, \quad e_{(1)}^1 = e_{(2)}^2 = e_{(3)}^3 = \frac{1}{a(\xi)}$$

$$e_{(i)}^{\mu} = \frac{1}{a(\xi)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.34. a)$$

$$e_{\mu}^{(i)} = a(\xi) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.34. b)$$

Tetradlar yardımıyla eğri uzay Dirac matrisleri,

$$\gamma^0 = e_{(0)}^0 \tilde{\gamma}^{(0)} + e_{(1)}^0 \tilde{\gamma}^{(1)} + e_{(2)}^0 \tilde{\gamma}^{(2)} + e_{(3)}^0 \tilde{\gamma}^{(3)} \quad (4.35)$$

$$\gamma^0 = \frac{1}{a(\xi)} \tilde{\gamma}^{(0)}, \quad \gamma^1 = \frac{1}{a(\xi)} \tilde{\gamma}^{(1)}, \quad \gamma^2 = \frac{1}{a(\xi)} \tilde{\gamma}^{(2)}, \quad \gamma^3 = \frac{1}{a(\xi)} \tilde{\gamma}^{(3)} \quad (4.35. a)$$

Ayrıca Dirac denklemindeki spin bağlantı katsayısı Γ_μ hesaplanabilir. Spin bağlantı katsayısı şöyle verilir:

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{4} g_{\lambda\alpha} \left[\left(\frac{\partial b_\nu^\beta}{\partial x^\mu} \right) a_\beta^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \right] s^{\lambda\nu} \quad (4.36)$$

Burada spinör alanlar için spin tensörü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$s^{\lambda\nu} = \frac{1}{2} [\gamma^\lambda, \gamma^\nu] = \frac{1}{2} (\gamma^\lambda \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\lambda) \quad (4.37)$$

Spin bağlantı katsayısını hesaplamak için ilk olarak Christoffel sembollerini bulunmalıdır.

$$\Gamma_{\nu\mu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\nu\mu}) \quad (4.38)$$

$\alpha = 0$ için;

$$\Gamma_{\nu\mu}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_\nu g_{0\mu} + \partial_\mu g_{0\nu} - \partial_0 g_{\nu\mu})$$

$$\Gamma_{0\mu}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{0\mu} + \partial_\mu g_{00} - \partial_0 g_{0\mu})$$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00})$$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \partial_0 g_{00}$$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} \frac{1}{a^2(\xi)} \partial_\xi (a_0^2 e^{2a_0 \xi}) = \frac{1}{2} \frac{a_0^2}{a^2(\xi)} 2a_0 e^{2a_0 \xi} = a_0 \quad (4.38. a)$$

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_x g_{00}) = 0 \quad (4.38. b)$$

$$\Gamma_{02}^0 = \Gamma_{03}^0 = 0 \quad (4.38. c)$$

$$\Gamma_{1\mu}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_1 g_{0\mu} + \partial_\mu g_{01} - \partial_0 g_{1\mu}) \quad : \Gamma_{10}^0 = \Gamma_{12}^0 = \Gamma_{13}^0 = 0$$

$$\Gamma_{11}^0 = -\frac{1}{2} g^{00} \partial_\xi (-a_0^2 e^{2a_0 \xi}) = a_0 \quad : \Gamma_{20}^0 = \Gamma_{21}^0 = \Gamma_{23}^0 = 0$$

$$\Gamma_{2\mu}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2 g_{0\mu} + \partial_\mu g_{02} - \partial_0 g_{2\mu}) \quad : \Gamma_{30}^0 = \Gamma_{31}^0 = \Gamma_{32}^0 = 0$$

$$\Gamma_{22}^0 = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_\eta g_{22} = a_0 \quad (4.38. d)$$

$$\Gamma_{33}^0 = a_0 \quad (4.38. e)$$

$\alpha = 1$ için;

$$\Gamma_{\nu\mu}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_\nu g_{1\mu} + \partial_\mu g_{1\nu} - \partial_1 g_{\nu\mu})$$

$$\nu = 0 \quad \mu = 1$$

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2}g^{11}\partial_\eta g_{11} = -\frac{1}{2}\frac{1}{a^2(\xi)}\partial_\eta(-a_0^2 e^{2a_0\xi}) = a_0$$

$\alpha = 2$ için

$$\Gamma_{\nu\mu}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_\nu g_{2\mu} + \partial_\mu g_{2\nu} - \partial_2 g_{\nu\mu})$$

$$\nu = 0 \quad \mu = 2$$

$$\Gamma_{02}^2 = \frac{1}{2}g^{22}\partial_\eta g_{22} = a_0 \quad (4.38. f)$$

$\alpha = 3$ için

$$\Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2}g^{33}\partial_\eta g_{33} = a_0 \quad (4.38. g)$$

Böylece Christoffel sembolleri matris biçiminde aşağıdaki gibi verilir.

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \begin{pmatrix} \dot{a}/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{a}/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{a}/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{a}/a \end{pmatrix} \quad \Gamma_{\mu\nu}^1 = \begin{pmatrix} 0 & \dot{a}/a & 0 & 0 \\ \dot{a}/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.39. a)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{a}/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{a}/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma_{\mu\nu}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dot{a}/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{a}/a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.39. b)$$

Spin bağlantı katsayısı ise şöyle hesaplanabilir:

$$\Gamma_{\lambda} = -\frac{1}{8}g_{\mu\alpha}\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}] \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= -\frac{1}{8}g_{\mu\alpha}\Gamma_{\nu 0}^{\alpha}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}] \\ &= -\frac{1}{8}\{g_{\mu 0}\Gamma_{\nu 0}^0 + g_{\mu 1}\Gamma_{\nu 0}^1 + g_{\mu 2}\Gamma_{\nu 0}^2 + g_{\mu 3}\Gamma_{\nu 0}^3\}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}] \\ &= -\frac{1}{8}\{g_{00}\Gamma_{\nu 0}^0[\gamma^0,\gamma^{\nu}] + g_{11}\Gamma_{\nu 0}^1[\gamma^1,\gamma^{\nu}] + g_{22}\Gamma_{\nu 0}^2[\gamma^2,\gamma^{\nu}] + g_{33}\Gamma_{\nu 0}^3[\gamma^3,\gamma^{\nu}]\} \end{aligned}$$

$$\Gamma_0 = 0 \quad (4.40. a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= -\frac{1}{8}g_{\mu\alpha}\Gamma_{\nu 1}^{\alpha}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}] \\ &= -\frac{1}{8}\{g_{\mu 0}\Gamma_{\nu 1}^0 + g_{\mu 1}\Gamma_{\nu 1}^1 + g_{\mu 2}\Gamma_{\nu 1}^2 + g_{\mu 3}\Gamma_{\nu 1}^3\}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}] \\ &= -\frac{1}{8}\{g_{00}\Gamma_{\nu 1}^0[\gamma^0,\gamma^{\nu}] + g_{11}\Gamma_{\nu 1}^1[\gamma^1,\gamma^{\nu}] + g_{22}\Gamma_{\nu 1}^2[\gamma^2,\gamma^{\nu}] + g_{33}\Gamma_{\nu 1}^3[\gamma^3,\gamma^{\nu}]\} \\ &= -\frac{1}{8}\{g_{11}\Gamma_{01}^1[\gamma^1,\gamma^0] + g_{00}\Gamma_{11}^0[\gamma^0,\gamma^1]\} \end{aligned}$$

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu}$$

$$\gamma^1\gamma^0 + \gamma^0\gamma^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^1\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^1$$

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{8}a^2(\xi)a_0\{-[\gamma^1,\gamma^0] + [\gamma^0,\gamma^1]\}$$

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{8}a^2(\xi)a_0\{-[\gamma^1,\gamma^0] + [\gamma^0,\gamma^1]\}$$

$$\Gamma_1 = \frac{a_0a^2(\xi)}{8}\{2\gamma^1\gamma^0 - 2\gamma^0\gamma^1\}$$

$$\Gamma_1 = \frac{a_0a^2(\xi)}{2}\gamma^1\gamma^0 \quad (4.40. b)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= -\frac{1}{8}g_{\mu\alpha}\Gamma_{\nu 2}^{\alpha}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}] \\ &= -\frac{1}{8}\{g_{00}\Gamma_{\nu 2}^0[\gamma^0,\gamma^{\nu}] + g_{11}\Gamma_{\nu 2}^1[\gamma^1,\gamma^{\nu}] + g_{22}\Gamma_{\nu 2}^2[\gamma^2,\gamma^{\nu}] + g_{33}\Gamma_{\nu 2}^3[\gamma^3,\gamma^{\nu}]\} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{8}\{g_{22}\Gamma_{02}^2 [\gamma^2, \gamma^0] + g_{00}\Gamma_{22}^0 [\gamma^0, \gamma^2]\}$$

$$\Gamma_2 = \frac{a_0 a^2(\xi)}{2} \gamma^2 \gamma^0 \quad (4.40. c)$$

$$\Gamma_3 = -\frac{1}{8} g_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu 3}^\alpha [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

$$= -\frac{1}{8}\{g_{00}\Gamma_{\nu 3}^0 [\gamma^0, \gamma^\nu] + g_{11}\Gamma_{\nu 3}^1 [\gamma^1, \gamma^\nu] + g_{22}\Gamma_{\nu 3}^2 [\gamma^2, \gamma^\nu] + g_{33}\Gamma_{\nu 3}^3 [\gamma^3, \gamma^\nu]\}$$

$$= -\frac{1}{8}\{g_{33}\Gamma_{03}^3 [\gamma^3, \gamma^0] + g_{00}\Gamma_{33}^0 [\gamma^0, \gamma^3]\}$$

$$= \frac{a_0 a^2(\xi)}{8} \{2\gamma^3 \gamma^0 - 2\gamma^0 \gamma^3\}$$

$$\Gamma_3 = \frac{a_0 a^2(\xi)}{2} \gamma^3 \gamma^0 \quad (4.40. d)$$

Böylece spin bağlantıları şöyle elde edilir:

$$\Gamma_0 = 0 \quad , \quad \Gamma_1 = \frac{a_0 a^2(\xi)}{2} \gamma^1 \gamma^0 \quad , \quad \Gamma_2 = \frac{a_0 a^2(\xi)}{2} \gamma^2 \gamma^0 \quad , \quad \Gamma_3 = \frac{a_0 a^2(\xi)}{2} \gamma^3 \gamma^0$$

Spin bağlantıları ve 4- vektör potansiyel Dirac denkleminde yerine yazılırsa,

$$[\gamma^0(\partial_0 - \Gamma_0 - ieA_0) + \gamma^1(\partial_1 - \Gamma_1 - ieA_1) + \gamma^2(\partial_2 - \Gamma_2 - ieA_2) + \gamma^3(\partial_3 - \Gamma_3 - ieA_3) + im]\Psi = 0 \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\tilde{\gamma}^{(0)}}{a(\xi)} (\partial_\xi - ieA_0) + \frac{\tilde{\gamma}^{(1)}}{a(\xi)} \left(\partial_x - \frac{a_0 a^2(\xi)}{2} \frac{1}{a^2(\xi)} \tilde{\gamma}^{(1)} \tilde{\gamma}^{(0)} - ieA_1 \right) \right. \\ & \quad + \frac{\tilde{\gamma}^{(2)}}{a(\xi)} \left(\partial_y - \frac{a_0 a^2(\xi)}{2} \frac{1}{a^2(\xi)} \tilde{\gamma}^{(2)} \tilde{\gamma}^{(0)} - ieA_2 \right) \\ & \quad \left. + \frac{\tilde{\gamma}^{(3)}}{a(\xi)} \left(\partial_z - \frac{a_0 a^2(\xi)}{2} \frac{1}{a^2(\xi)} \tilde{\gamma}^{(3)} \tilde{\gamma}^{(0)} - ieA_3 \right) + m \right] \Psi = 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

yukarıdaki denklem elde edilir. Bu denklem yeniden düzenlenirse (4.44) denklemine ulaşılır.

$$\begin{aligned} & \left[\tilde{\gamma}^{(0)} \partial_\xi + \tilde{\gamma}^{(1)} \left(\partial_x - \frac{a_0}{2} \tilde{\gamma}^{(1)} \tilde{\gamma}^{(0)} - ieA_1 \right) + \tilde{\gamma}^{(2)} \left(\partial_y - \frac{a_0}{2} \tilde{\gamma}^{(2)} \tilde{\gamma}^{(0)} \right) \right. \\ & \quad \left. + \tilde{\gamma}^{(3)} \left(\partial_z - \frac{a_0}{2} \tilde{\gamma}^{(3)} \tilde{\gamma}^{(0)} - ieA_3 \right) + ima(\xi) \right] \Psi = 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\left[\tilde{\gamma}^{(0)} \left(\partial_\xi + \frac{3a_0}{2} \right) + \tilde{\gamma}^{(1)} (\partial_x - ieA_1) + \tilde{\gamma}^{(2)} \partial_y + \tilde{\gamma}^{(3)} (\partial_z - ieA_3) + ima(\xi) \right] \Psi = 0 \quad (4.44)$$

Bu denklem $\tilde{\gamma}^{(0)}\tilde{\gamma}^{(3)}$ ifadesiyle çarpılır ve $\Psi = a(\xi)^{-3/2}\tilde{\Psi}$ dönüşümü yapılırsa,

$$[\tilde{\gamma}^{(3)}\partial_{\xi} + \tilde{\gamma}^{(1)}(\partial_x - ieA_1)\tilde{\gamma}^{(0)}\tilde{\gamma}^{(3)} + \tilde{\gamma}^{(2)}\partial_y\tilde{\gamma}^{(0)}\tilde{\gamma}^{(3)} + \tilde{\gamma}^{(0)}(\partial_z - ieA_3) + ima(\xi)\tilde{\gamma}^{(0)}\tilde{\gamma}^{(3)}]\tilde{\Psi} = 0 \quad (4.45)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemi çözmek için burada iki yeni işlemci tanımlanırsa,

$$\hat{K}_1 = \tilde{\gamma}^{(3)}\partial_{\xi} + \tilde{\gamma}^{(0)}(\partial_z - ieA_3) + ima(\xi)\tilde{\gamma}^{(0)}\tilde{\gamma}^{(3)} \quad (4.46. a)$$

$$\hat{K}_2 = \tilde{\gamma}^{(2)}\partial_y\tilde{\gamma}^{(0)}\tilde{\gamma}^{(3)} + \tilde{\gamma}^{(1)}(\partial_x - ieA_1)\tilde{\gamma}^{(0)}\tilde{\gamma}^{(3)} \quad (4.46. b)$$

olmak üzere denklem şu biçimde yazılabilir:

$$(\hat{K}_1 + \hat{K}_2)\tilde{\Psi} = 0$$

Burada $\hat{K}_1\tilde{\Psi} = -k\tilde{\Psi}$, $\hat{K}_2\tilde{\Psi} = k\tilde{\Psi}$ olacaktır.

Dirac gamma matrisleri için aşağıdaki seçimler yapılırsa,

$$\tilde{\gamma}^{(0)} = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & i\sigma_1 \end{pmatrix} \quad \tilde{\gamma}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{\gamma}^{(2)} = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix} \quad \tilde{\gamma}^{(3)} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$$

buradaki matrisler

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pauli spin matrisleridir. Denklemde yer alan Dirac matrisleri için bazı cebirsel işlemler şöyle olacaktır:

$$\tilde{\gamma}^{(0)}\tilde{\gamma}^{(3)} = \begin{pmatrix} -\sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix} \quad \tilde{\gamma}^{(1)}\tilde{\gamma}^{(0)}\tilde{\gamma}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ayrıca, \hat{K}_1 denklemini çözmek için denklem (4.47)'deki tanımlar kullanılacaktır.

$$\hat{K}_1\tilde{\Psi} = -k\tilde{\Psi} \quad ; \quad \tilde{\Psi} = e^{i(k_x x + k_z z)} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1(\xi, y) \\ \tilde{\Psi}_2(\xi, y) \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Böylece,

$$\begin{pmatrix} \sigma_3\partial_{\xi} + k & 0 \\ 0 & -\sigma_3\partial_{\xi} + k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (k_z - eE_0 a(\xi))\sigma_1 - ima(\xi)\sigma_2 & 0 \\ 0 & -(k_z - eE_0 a(\xi))\sigma_1 - ima(\xi)\sigma_2 \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1(\xi, y) \\ \tilde{\Psi}_2(\xi, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

elde edilir. Burada $\tilde{t} = a_0 e^{a_0 \xi}$ dönüşümü yapılırsa, iki denklem sistemi elde edilir:

$$\left[\sigma_3 \partial_{\tilde{t}} + \frac{k}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} + \left(\frac{k_z}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} - \frac{eE_0}{a_0} \right) \sigma_1 - \frac{im}{a_0} \sigma_2 \right] \tilde{\Psi}_1(\tilde{t}, y) = 0 \quad (4.49)$$

$$\left[\sigma_3 \partial_{\tilde{t}} - \frac{k}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} + \left(\frac{k_z}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} - \frac{eE_0}{a_0} \right) \sigma_1 + \frac{im}{a_0} \sigma_2 \right] \tilde{\Psi}_2(\tilde{t}, y) = 0 \quad (4.50)$$

Denklem (4.49)'da, $\tilde{\Psi}_1(\tilde{t}, y) = \begin{pmatrix} x_1(\tilde{t})\Phi_1(y) \\ x_2(\tilde{t})\Phi_1(y) \end{pmatrix}$ tanımı yapılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\left[\begin{pmatrix} \partial_{\tilde{t}} + \frac{k}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} & 0 \\ 0 & -\partial_{\tilde{t}} + \frac{k}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{k_z}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} - \frac{eE_0}{a_0} - \frac{m}{a_0} \\ \frac{k_z}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} - \frac{eE_0}{a_0} + \frac{m}{a_0} & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1(\tilde{t})\Phi_1(y) \\ x_2(\tilde{t})\Phi_1(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

Bu matristen elde edilen iki denklem,

$$\left[\partial_{\tilde{t}} + \frac{k}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} \right] x_1(\tilde{t}) \Phi_1(y) + \left[\frac{k_z}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} - \frac{(eE_0 + m)}{a_0} \right] x_2(\tilde{t}) \Phi_1(y) = 0$$

$$\left[\partial_{\tilde{t}} - \frac{k}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} \right] x_2(\tilde{t}) \Phi_1(y) - \left[\frac{k_z}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} - \frac{(eE_0 - m)}{a_0} \right] x_1(\tilde{t}) \Phi_1(y) = 0$$

düzenlenirse,

$$\frac{dx_1(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = -\frac{k}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} x_1(\tilde{t}) + \left[\frac{(eE_0 + m)}{a_0} - \frac{k_z}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} \right] x_2(\tilde{t}) \quad (4.52)$$

$$\frac{dx_2(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \frac{k}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} x_2(\tilde{t}) + \left[\frac{(m - eE_0)}{a_0} + \frac{k_z}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} \right] x_1(\tilde{t}) \quad (4.53)$$

elde edilir. Bu denklem sistemlerini çözmek için, çözümün nasıl bir biçimde olması gerektiğini öngörmek için, $\tilde{t} \rightarrow 0$ ve $\tilde{t} \rightarrow \infty$ davranışlarına bakılırsa;

$t \rightarrow 0$ için çözümler:

$$\left(\frac{d}{d\tilde{t}} + \frac{k}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} \right) x_1(\tilde{t}) = -\frac{k_z}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} x_2(\tilde{t}) \quad (4.54)$$

$$\left(\frac{d}{d\tilde{t}} - \frac{k}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} \right) x_2(\tilde{t}) = \frac{k_z}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} x_1(\tilde{t}) \quad (4.55)$$

Denklem (4.54)'ten $x_2(\tilde{t})$ çekilip denklem (4.55)'te yerine yazılırsa;

$$\left(\frac{d}{d\tilde{t}} - \frac{k}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} \right) \left[-\frac{a_0}{k_z} \tilde{t} \left(\frac{d}{d\tilde{t}} + \frac{k}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} \right) x_1(\tilde{t}) \right] = \frac{k_z}{a_0} \frac{1}{\tilde{t}} x_1(\tilde{t})$$

$$-\frac{a_0}{k_z} \left[\frac{d}{d\tilde{t}} + \frac{k}{a_0 \tilde{t}} \right] x_1(\tilde{t}) - \frac{a_0}{k_z} \tilde{t} \left[\frac{d^2}{d\tilde{t}^2} - \frac{k}{a_0 \tilde{t}^2} + \frac{k}{a_0 \tilde{t}} \frac{d}{d\tilde{t}} \right] x_1(\tilde{t}) - \frac{k_z}{a_0 \tilde{t}} x_1(\tilde{t}) + \frac{k}{k_z} \left(\frac{d}{d\tilde{t}} + \frac{k}{a_0 \tilde{t}} \right) x_1(\tilde{t}) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\tilde{t}^2} - \frac{k}{a_0 \tilde{t}^2} + \frac{k}{a_0 \tilde{t}} \frac{d}{d\tilde{t}} \right] x_1(\tilde{t}) + \frac{1}{\tilde{t}} \left[\left(\frac{d}{d\tilde{t}} + \frac{k}{a_0 \tilde{t}} \right) \right] x_1(\tilde{t}) + \frac{k_z^2}{a_0^2 \tilde{t}^2} x_1(\tilde{t}) - \frac{k}{a_0 \tilde{t}} \left(\frac{d}{d\tilde{t}} + \frac{k}{a_0 \tilde{t}} \right) x_1(\tilde{t}) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\tilde{t}^2} + \frac{1}{\tilde{t}} \frac{d}{d\tilde{t}} + \frac{k_z^2/a_0^2 - k^2/a_0^2}{\tilde{t}^2} \right] x_1(\tilde{t}) = 0$$

(4.56) denkleminde ulaşılır;

$$\frac{d^2 x_1(\tilde{t})}{d\tilde{t}^2} = -\frac{1}{\tilde{t}} \frac{dx_1(\tilde{t})}{d\tilde{t}} + \left(\frac{k^2/a_0^2 - k_z^2/a_0^2}{\tilde{t}^2} \right) x_1(\tilde{t}) \quad (4.56)$$

Bu denklem daha önce literatürde çalışılan Ref. [21] 'deki denklem ile aynıdır ve çözümü

$\gamma = \sqrt{\frac{k^2 - k_z^2}{a_0^2}}$ olmak üzere şöyle verilecektir;

$$x_1(\tilde{t} \rightarrow 0) = \tilde{t}^\gamma \quad (4.57)$$

Şimdi de $\tilde{t} \rightarrow \infty$ için çözümü değerlendirelim:

$$\frac{dx_1(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \left(\frac{eE_0 + m}{a_0} \right) x_2(\tilde{t}) \quad (4.58)$$

$$\frac{dx_2(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = -\left(\frac{eE_0 - m}{a_0} \right) x_1(\tilde{t}) \quad (4.59)$$

Burada denklem (4.58)' den $x_2(\tilde{t})$ çekilip denkelem (4.59)' da yerine yazılırsa,

$$\frac{d^2 x_1(\tilde{t})}{d\tilde{t}^2} = -\left(\frac{e^2 E_0^2 - m^2}{a_0^2} \right) x_1(\tilde{t}) = \left(\frac{m^2 - e^2 E_0^2}{a_0^2} \right) x_1(\tilde{t})$$

$$x_1(\tilde{t} \rightarrow \infty) = e^{-\sqrt{\frac{m^2 - e^2 E_0^2}{a_0^2}} \tilde{t}} \quad (4.60)$$

biçiminde davranacaktır.

Sonuç olarak denklem (4.52) ve denklem (4.53)'ün çözümlerini aşağıdaki biçimde önerebiliriz.

$$x_1(\tilde{t}) = \sqrt{\frac{m + eE_0}{a_0}} \tilde{t}^\gamma e^{-\sqrt{\frac{m^2 - e^2 E_0^2}{a_0^2}} \tilde{t}} (\Phi_1 + \Phi_2) \quad (4.61)$$

$$x_2(\tilde{t}) = \sqrt{\frac{m - eE_0}{a_0}} \tilde{t}^\gamma e^{-\sqrt{\frac{m^2 - e^2 E_0^2}{a_0^2}} \tilde{t}} (\Phi_1 - \Phi_2) \quad (4.62)$$

Denklem (4.61) ve denklem (4.62), denklem (4.52) ve denklem (4.53) 'te yerine yazılıp $\tilde{t} = \tau_1 \rho$ değişken değişimi yapıldığında;

$$\frac{d\Phi_1}{d\rho} = \left(1 - \frac{a + \gamma}{\rho}\right) \Phi_1 - \left(\frac{b + k/a_0}{\rho}\right) \Phi_2 \quad (4.63)$$

$$\frac{d\Phi_2}{d\rho} = \left(\frac{b - k/a_0}{\rho}\right) \Phi_1 - \left(\frac{a - \gamma}{\rho}\right) \Phi_2 \quad (4.64)$$

biçiminde 1.dereceden çiftlenimli denklemler elde edilir. Burada aşağıdaki tanımlar yapılmıştır:

$$\tau_1 = \frac{1}{2\sqrt{\frac{m^2 - eE_0^2}{a_0^2}}}, \quad a = -\frac{2eE_0 k_z}{a_0^2} \tau_1, \quad b = -\frac{2mk_z}{a_0^2} \tau_1$$

Denklem (4.63) ve denklem (4.64) 'ten $\Phi_1(\rho)$ ve $\Phi_2(\rho)$ fonksiyonları bularak denklem (4.61) ve denklem (4.62) 'de yerine yazılacaktır.

Denklem (4.63) 'ten

$$\Phi_2 = -\frac{\rho}{(b + k/a_0)} \left(\frac{d}{d\rho} - 1 + \frac{a + \gamma}{\rho}\right) \Phi_1 \quad (4.65)$$

yazılır. Denklem (4.65)'i denklem (4.64)'te yerine yazıp düzenlemeler yapılırsa denklem (4.66) elde edilir.

$$\left(\frac{d}{d\rho} - \frac{a - \gamma}{\rho}\right) \rho \left(\frac{d}{d\rho} - 1 + \frac{a + \gamma}{\rho}\right) \Phi_1 = -\frac{(b^2 - k^2/a_0^2)}{\rho} \Phi_1$$

$$\left(\frac{d}{d\rho} - 1 + \frac{a + \gamma}{\rho}\right) \Phi_1 + \rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d}{d\rho} - 1 + \frac{a + \gamma}{\rho}\right) \Phi_1 - (a - \gamma) \left(\frac{d}{d\rho} - 1 + \frac{a + \gamma}{\rho}\right) \Phi_1 = -\frac{(b^2 - k^2/a_0^2)}{\rho} \Phi_1$$

$$\left[\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + (1 - \rho + a + \gamma - a + \gamma) \frac{d}{d\rho} + \left(-1 + \frac{a + \gamma}{\rho} - \frac{a + \gamma}{\rho} + a - \gamma - \frac{a^2 - \gamma^2}{\rho} + \frac{b^2 - k^2/a_0^2}{\rho} \right) \right] \Phi_1 = 0$$

$$\left[\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + (1 + 2\gamma - \rho) \frac{d}{d\rho} + \left(-1 + a - \gamma - \frac{a^2 - \gamma^2 - b^2 + k^2/a_0^2}{\rho} \right) \right] \Phi_1 = 0 \quad (4.66)$$

Burada yer alan bazı terimlerin açık halleri yeniden hatırlanırsa,

$$\gamma^2 = \frac{k^2 - k_z^2}{a_0^2}, \quad a^2 = \frac{4e^2 E_0^2 k_z^2}{a_0^4} \frac{a_0^2}{4(m^2 - e^2 E_0^2)}; \quad b^2 = \frac{4m^2 k_z^2}{a_0^4} \frac{a_0^2}{4(m^2 - e^2 E_0^2)}$$

$$a^2 - b^2 = \frac{(e^2 E_0^2 - m^2) k_z^2}{a_0^2 (m^2 - e^2 E_0^2)} = -\frac{k_z^2}{a_0^2}$$

aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\rho \frac{d^2 \Phi_1}{d\rho^2} + (1 + 2\gamma - \rho) \frac{d\Phi_1}{d\rho} - (1 + \gamma - a) \Phi_1 = 0 \quad (4.67)$$

Bu denklem, aşağıdaki Kummer denklemi (Konfluent Hipergeometrik Denklemi) ile aynı yapıdadır [17];

$$xy'' + (\beta - x)y' - \alpha y = 0$$

ve çözümü Kummer konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının genel çözümünden

$$\Phi_1 = N_{11} {}_1F_1(1 + \gamma - a, 1 + 2\gamma; \rho) + N_{22} \rho^{-2\tilde{\gamma}} {}_1F_1(1 - \gamma - a, 1 - 2\gamma; \rho) \text{ elde edilir.}$$

$$\Phi_1(\tilde{t}) = N_{11} {}_1F_1\left(1 + \gamma - a, 1 + 2\gamma; \frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right) + N_{22} \left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right)^{-2\tilde{\gamma}} {}_1F_1\left(1 - \gamma - a, 1 - 2\gamma; \frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right) \quad (4.68)$$

Şimdi de $\Phi_2(\tilde{t})$ 'yi elde edelim. Denklem(4.64)'ten

$$\Phi_1 = \frac{\rho}{b - k/a_0} \left(\frac{d}{d\rho} - \frac{(a - \gamma)}{\rho} \right) \Phi_2 \quad (4.69)$$

yazılır. Denklem (4.69)'u denklem(4.63)'te yerine yazarsak;

$$\left(\frac{d}{d\rho} - 1 + \frac{a + \gamma}{\rho} \right) \rho \left(\frac{d}{d\rho} - \frac{a - \gamma}{\rho} \right) \Phi_2 = -\frac{(b^2 - k^2/a_0^2)}{\rho} \Phi_2$$

$$\left(\frac{d}{d\rho} - \frac{a - \gamma}{\rho} \right) \Phi_2 + \rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d}{d\rho} - \frac{a - \gamma}{\rho} \right) \Phi_2 - \rho \left(\frac{d}{d\rho} - \frac{a - \gamma}{\rho} \right) \Phi_2 + (a + \gamma) \left(\frac{d}{d\rho} - \frac{a - \gamma}{\rho} \right) \Phi_2 = -\frac{(b^2 - k^2/a_0^2)}{\rho} \Phi_2$$

$$\left[\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + (1 - a + \gamma - \rho + a + \gamma) \frac{d}{d\rho} + \left(-\frac{a - \gamma}{\rho} + \frac{a - \gamma}{\rho} + a - \gamma - \frac{a^2 - \gamma^2}{\rho} + \frac{b^2 - k^2/a_0^2}{\rho} \right) \right] \Phi_2 = 0$$

$$\left[\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + (1 + 2\gamma - \rho) \frac{d}{d\rho} + \left(a - \gamma - \frac{a^2 - \gamma^2 - b^2 + k^2/a_0^2}{\rho} \right) \right] \Phi_2 = 0$$

denklemini elde edilir. Burada parantez içindeki son terimin pay kısmı sıfır olur, böylece şu denklem elde edilir:

$$\left[\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + (1 + 2\gamma - \rho) \frac{d}{d\rho} - (\gamma - a) \right] \Phi_2 = 0 \quad (4.70)$$

Bu denklem de Kummer konfluent hipergeometrik fonksiyonlarıyla aynı yapıdadır [17].

Çözüm şöyle verilir:

$$\begin{aligned} \Phi_2(\rho) &= \tilde{N}_1 {}_1F_1(\gamma - a; 1 + 2\gamma; \rho) + \tilde{N}_2 \rho^{-2\gamma} {}_1F_1(-\gamma - a; 1 - 2\gamma; \rho) \\ \Phi_2(\tilde{t}) &= \tilde{N}_1 {}_1F_1(\gamma - a, 1 + 2\gamma; \tilde{t}/\tau_1) + \tilde{N}_2 \left(\tilde{t}/\tau_1\right)^{-2\gamma} {}_1F_1(-\gamma - a; 1 - 2\gamma; \tilde{t}/\tau_1) \end{aligned} \quad (4.71)$$

Denklem(4.68) ve denklem (4.71), denklem (4.61) ve denklem(4.62)'de yerine yazılırsa,

$$x_1(\tilde{t}) = \sqrt{\frac{m+eE_0}{a_0}} \tilde{t}^\gamma e^{-\sqrt{\frac{m^2-e^2E_0^2}{a_0^2}} \tilde{t}} \left[(N_1 F_1 + \tilde{N}_1 \tilde{F}_1) + \left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right)^{-2\gamma} (N_2 F_2 + \tilde{N}_2 \tilde{F}_2) \right] \quad (4.72)$$

$$x_2(t) = \sqrt{\frac{m-eE_0}{a_0}} \tilde{t}^\gamma e^{-\sqrt{\frac{m^2-e^2E_0^2}{a_0^2}} \tilde{t}} \left[(N_1 F_1 - \tilde{N}_1 \tilde{F}_1) + \left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right)^{-2\gamma} (N_2 F_2 - \tilde{N}_2 \tilde{F}_2) \right] \quad (4.73)$$

Denklem (4.72) ve denklem (4.73) yazılırken aşağıdaki kısaltmalar yapılmıştır:

$$F_1 = {}_1F_1(1 + \gamma - a, 1 + 2\gamma; \tilde{t}/\tau_1)$$

$$\tilde{F}_1 = {}_1F_1(\gamma - a, 1 + 2\gamma; \tilde{t}/\tau_1)$$

$$F_2 = {}_1F_1(1 - \gamma - a, 1 - 2\gamma; \tilde{t}/\tau_1)$$

$$\tilde{F}_2 = {}_1F_1(-\gamma - a, 1 - 2\gamma; \tilde{t}/\tau_1)$$

$$\phi_1(\tilde{t}) = N_1 {}_1F_1(1 + \gamma - a, 1 + 2\gamma; \tilde{t}/\tau_1) + N_2 \left(\tilde{t}/\tau_1\right)^{-2\gamma} {}_1F_1(1 - \gamma - a, 1 - 2\gamma; \tilde{t}/\tau_1) \quad (4.74)$$

$$\phi_2(\tilde{t}) = \tilde{N}_1 {}_1F_1(\gamma - a, 1 + 2\gamma; \tilde{t}/\tau_1) + \tilde{N}_2 \left(\tilde{t}/\tau_1\right)^{-2\gamma} {}_1F_1(-\gamma - a, 1 - 2\gamma; \tilde{t}/\tau_1) \quad (4.75)$$

Bu çözümlerin Whittaker fonksiyonları cinsinden yazılabilmesi için Kummer fonksiyonlarının bazı özelliklerden yararlanılacaktır:

${}_1F_1(b, c; x) \equiv M(b, c; x)$: Kummer fonksiyonları için kullanılan bir başka gösterimdir. Kummer denkleminin diğer bir çözümü

$$U(b, c; x) = \frac{\pi}{\sin \pi c} \left[\frac{M(b, c; x)}{(b-c)!(c-1)!} - \frac{x^{1-c} M(b+1-c, 2-c; x)}{(b-1)!(1-c)!} \right]; \quad \text{Tricomi (ikinci çeşit konfluent hipergeometrik) Fonksiyonudur [22];}$$

Tricomi fonksiyonunun ikinci terimi için aşağıdaki bağıntı yazılabilir;

$$x^{1-c} M(b+1-c, 2-c; x) = \frac{(b-1)!(1-c)!}{(b-c)!(c-1)!} M(b, c; x) - \frac{(b-1)!(1-c)! \sin \pi c}{\pi} U(b, c; x)$$

Burada $b = 1 + \gamma - a$, $c = 1 + 2\gamma$, $x = \tilde{t}/\tau_1$ alınır. Buna göre çözümler şöyle verilir:

$$\Phi_1(\tilde{t}) = \left(N_1 + \frac{(\gamma-a)!(-2\gamma)!}{(-\gamma-a)!(2\gamma)!} N_2 \right) M(1+\gamma-a, 1+2\gamma; \tilde{t}/\tau_1) - \frac{(\gamma-a)!(-2\gamma)! \sin \pi c}{\pi} N_2 U(1+\gamma-a, 1+2\gamma; \tilde{t}/\tau_1) \quad (4.76)$$

$$\Phi_2(\tilde{t}) = \left(\tilde{N}_1 + \frac{(\gamma-a-1)!(-2\gamma)!}{(-\gamma-a-1)!(2\gamma)!} \tilde{N}_2 \right) M(\gamma-a, 1+2\gamma; \tilde{t}/\tau_1) - \frac{(\gamma-a-1)!(-2\gamma)! \sin \pi c}{\pi} \tilde{N}_2 U(\gamma-a, 1+2\gamma; \tilde{t}/\tau_1) \quad (4.77)$$

Bu durumda

$$\Phi_1(\tilde{t}) = T_1 M(1+\gamma-a, 1+2\gamma; \tilde{t}/\tau_1) + T_2 U(1+\gamma-a, 1+2\gamma; \tilde{t}/\tau_1) \quad (4.78)$$

$$\Phi_2(\tilde{t}) = \tilde{T}_1 M(\gamma-a, 1+2\gamma; \tilde{t}/\tau_1) + \tilde{T}_2 U(\gamma-a, 1+2\gamma; \tilde{t}/\tau_1) \quad (4.79)$$

denklemleri elde edilir ve Whittaker fonksiyonları ile M ve U fonksiyonları arasındaki ilişki [17];

$$M_{k,\mu}(x) = e^{-x/2} x^{\mu+1/2} M\left(\mu-k+\frac{1}{2}, 1+2\mu; x\right)$$

$$W_{k,\mu}(x) = e^{-x/2} x^{\mu+1/2} U\left(\mu-k+\frac{1}{2}, 1+2\mu; x\right)$$

şeklindedir. Böylece;

$$\Phi_1(\tilde{t}) = T_1 e^{\tilde{t}/2\tau_1} \left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right)^{-(\gamma+\frac{1}{2})} M_{a-1/2,\gamma}\left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right) + T_2 e^{\tilde{t}/2\tau_1} \left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right)^{-(\gamma+\frac{1}{2})} W_{a-1/2,\gamma}\left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right) \quad (4.80)$$

$$\Phi_2(\tilde{t}) = \tilde{T}_1 e^{\tilde{t}/2\tau_1} \left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right)^{-(\gamma+\frac{1}{2})} M_{a+1/2,\gamma}\left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right) + \tilde{T}_2 e^{-\tilde{t}/2\tau_1} \left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right)^{-(\gamma+\frac{1}{2})} W_{a+1/2,\gamma}\left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right) \quad (4.81)$$

denklemleri elde edilir. Bunlar, denklem (4.61) ve denklem (4.62)'de yerine yazılırsa denklem (4.83) ve denklem (4.84) elde edilir.

$$x_1(\tilde{t}) = \sqrt{\frac{m + eE_0}{a_0}} \tilde{t}^\nu e^{-\sqrt{\frac{m^2 - e^2 E_0^2}{a_0^2}} \tilde{t}} e^{\tilde{t}/2\tau_1} \left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right)^{-(\nu+\frac{1}{2})} \left\{ \left[T_1 M_{a-1/2,\nu} \left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right) + \tilde{T}_1 M_{a+1/2,\nu} \left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right) \right] \right. \\ \left. + \left[T_2 W_{a-1/2,\nu} \left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right) + \tilde{T}_2 W_{a+1/2,\nu} \left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right) \right] \right\} \quad (4.82)$$

$$x_1(\tilde{t}) = \sqrt{\frac{m + eE_0}{a_0}} (1/\tau_1)^{-(\nu+\frac{1}{2})} \tilde{t}^{-1/2} \left\{ \left[T_1 M_{a-1/2,\nu} \left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right) + \tilde{T}_1 M_{a+1/2,\nu} \left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right) \right] \right. \\ \left. + \left[T_2 W_{a-1/2,\nu} \left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right) + \tilde{T}_2 W_{a+1/2,\nu} \left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right) \right] \right\} \quad (4.83)$$

$$x_2(\tilde{t}) = \sqrt{\frac{m - eE_0}{a_0}} (1/\tau_1)^{-(\nu+\frac{1}{2})} \tilde{t}^{-1/2} \left\{ \left[T_1 M_{a-1/2,\nu} \left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right) - \tilde{T}_1 M_{a+1/2,\nu} \left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right) \right] \right. \\ \left. + \left[T_2 W_{a-1/2,\nu} \left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right) - \tilde{T}_2 W_{a+1/2,\nu} \left(\frac{\tilde{t}}{\tau_1}\right) \right] \right\} \quad (4.84)$$

Diğer işlemci için de denklemin çözümü aranırsa;

$$\hat{K}_2 \tilde{\Psi} = k \tilde{\Psi}$$

$$(\tilde{y}^2 \partial_y \tilde{y}^{(0)} \tilde{y}^{(3)} + \tilde{y}^{(1)} (ik_x - ieA_1) \tilde{y}^{(0)} \tilde{y}^{(3)} - k) \tilde{\Psi} = 0 \quad (4.85)$$

$$\left[\begin{pmatrix} -\partial_y - k & 0 \\ 0 & \partial_y - k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (k_x - eA_1)\sigma_2 \\ -(k_x - eA_1)\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1(\xi, y) \\ \tilde{\Psi}_2(\xi, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.86)$$

Bu matristen elde edilen iki denklem şöyle olacaktır:

$$(\partial_y + k) \tilde{\Psi}_1(\xi, y) - (k_x - eA_1)\sigma_2 \tilde{\Psi}_2(\xi, y) = 0 \quad (4.87)$$

$$(\partial_y - k) \tilde{\Psi}_2(\xi, y) - (k_x - eA_1)\sigma_2 \tilde{\Psi}_1(\xi, y) = 0 \quad (4.88)$$

Burada ikinci dalga fonksiyonu da ayrıştırılırsa,

$$\tilde{\Psi}_2(\xi, y) = \begin{pmatrix} -x_2(\xi) \Phi_3(y) \\ x_1(\xi) \Phi_3(y) \end{pmatrix}$$

aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$(\partial_y + k) x_1(\xi) \Phi_1(y) + i(k_x - eA_1) x_1(\xi) \Phi_3(y) = 0 \quad (4.89. a)$$

$$(\partial_y + k) x_2(\xi) \Phi_1(y) + i(k_x - eA_1) x_2(\xi) \Phi_3(y) = 0 \quad (4.89. b)$$

$$(\partial_y - k) x_2(\xi) \Phi_3(y) - i(k_x - eA_1) x_2(\xi) \Phi_1(y) = 0 \quad (4.89. c)$$

$$(\partial_y - k) x_1(\xi) \Phi_3(y) - i(k_x - eA_1) x_1(\xi) \Phi_1(y) = 0 \quad (4.89. d)$$

Yukarıda verilen ilk iki denklem $x_1(\xi)$ ortak parantezine alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$(\partial_y + k) \Phi_1(y) + i(k_x - eA_1) \Phi_3(y) = 0 \quad (4.90)$$

Benzer biçimde son iki denklem $x_2(\xi)$ ortak parantezine alınırsa aşağıdaki tek denklem elde edilir:

$$(\partial_y - k) \Phi_3(y) - i(k_x - eA_1) \Phi_1(y) = 0 \quad (4.91)$$

Bu denklemler kendi içinde düzenlenirse,

$$\frac{d\Phi_1}{dy} = -k\Phi_1(y) - i\left(k_x - e\frac{B_0}{\beta}e^{-\beta y}\right)\Phi_3(y)$$

$$\frac{d\Phi_3}{dy} = k\Phi_3(y) + i\left(k_x - e\frac{B_0}{\beta}e^{-\beta y}\right)\Phi_1(y)$$

ve $\tilde{y} = \frac{1}{\beta}e^{-\beta y}$ dönüşümü yapılırsa sonuçta şu denklemler bulunur:

$$\frac{d\Phi_1}{d\tilde{y}} = \frac{k/\beta}{\tilde{y}}\Phi_1 + \left(-i\frac{B_0e}{\beta} + \frac{ik_x/\beta}{\tilde{y}}\right)\Phi_3 \quad (4.92)$$

$$\frac{d\Phi_3}{d\tilde{y}} = -\frac{k/\beta}{\tilde{y}}\Phi_3 + \left(i\frac{B_0e}{\beta} - \frac{ik_x/\beta}{\tilde{y}}\right)\Phi_1 \quad (4.93)$$

Çözümlerin asimptotik durumları belirlenecek olursa, yani $\tilde{y} \rightarrow 0$ ve $\tilde{y} \rightarrow \infty$ için davranışlarına bakılırsa;

$\tilde{y} \rightarrow 0$ durumu:

$$\frac{d^2\tilde{G}}{d\tilde{y}^2} = -\frac{1}{\tilde{y}}\frac{d\tilde{G}}{d\tilde{y}} + \left(\frac{(k/\beta)^2 - (ik_x/\beta)^2}{\tilde{y}^2}\right)\tilde{G} \quad (4.94)$$

Bu denklemin çözümü ise, $\tilde{y} = \sqrt{\frac{k^2 + k_x^2}{\beta^2}}$ olmak üzere, aşağıdaki gibidir;

$$\tilde{G}(\tilde{y} \rightarrow 0) = \tilde{y}^{\tilde{y}} \quad (4.95)$$

$\tilde{y} \rightarrow \infty$ durumunda ($\beta \rightarrow 0$)

$$\frac{d\Phi_1}{d\tilde{y}} = -i\frac{B_0e}{\beta}\Phi_3 \quad , \quad \frac{d\Phi_3}{d\tilde{y}} = i\frac{B_0e}{\beta}\Phi_1$$

Bu iki denklem için ilkinden Φ_3 yalnız bırakılıp ikinci denklemde yerine yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{d^2\Phi_1}{d\tilde{y}^2} = e^2 \frac{B_0^2}{\beta^2} \Phi_1$$

$$\Phi_1(y \rightarrow \infty) = e^{-\frac{eB_0}{\beta}\tilde{y}} \quad (4.96)$$

Bu durumda

$$\Phi_1 = \sqrt{ie^{B_0/\beta}} \tilde{y} \tilde{y} e^{-\frac{eB_0}{\beta}\tilde{y}} (u_1 + u_2) \quad (4.97)$$

$$\Phi_3 = \sqrt{-ie^{B_0/\beta}} \tilde{y} \tilde{y} e^{-\frac{eB_0}{\beta}\tilde{y}} (u_1 - u_2) \quad (4.98)$$

denklem (4.97) ve denklem (4.98), denklem (4.92) ve denklem (4.93)'te yerine yazılıp

$ie^{B_0/\beta} = \alpha$, $-ie^{B_0/\beta} = \tilde{\alpha}$ tanımları yapılırsa denklem (4.99) ve denklem (4.100) elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_1}{d\tilde{y}} &= \sqrt{\alpha} \tilde{y} \tilde{y} e^{-\sqrt{\alpha\tilde{\alpha}}\tilde{y}} \left\{ \left(\frac{du_1}{d\tilde{y}} + \frac{du_2}{d\tilde{y}} \right) + \left[\frac{\tilde{y}}{\tilde{y}} - \sqrt{\alpha\tilde{\alpha}} \right] (u_1 + u_2) \right\} \\ \frac{d\Phi_3}{d\tilde{y}} &= \sqrt{\alpha} \tilde{y} \tilde{y} e^{-\sqrt{\alpha\tilde{\alpha}}\tilde{y}} \left\{ \left(\frac{du_1}{d\tilde{y}} - \frac{du_2}{d\tilde{y}} \right) + \left[\frac{\tilde{y}}{\tilde{y}} - \sqrt{\alpha\tilde{\alpha}} \right] (u_1 - u_2) \right\} \\ \sqrt{\alpha} \left(\frac{du_1}{d\tilde{y}} + \frac{du_2}{d\tilde{y}} \right) + \sqrt{\alpha} \left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{y}} - \sqrt{\alpha\tilde{\alpha}} \right) (u_1 + u_2) \\ &= \frac{k/\beta}{\tilde{y}} \sqrt{\alpha} (u_1 + u_2) - \left(\alpha - \frac{ik_x/\beta}{\tilde{y}} \right) \sqrt{\tilde{\alpha}} (u_1 - u_2) \end{aligned} \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\tilde{\alpha}} \left(\frac{du_1}{d\tilde{y}} - \frac{du_2}{d\tilde{y}} \right) + \sqrt{\tilde{\alpha}} \left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{y}} - \sqrt{\alpha\tilde{\alpha}} \right) (u_1 - u_2) \\ = \frac{-k/\beta}{\tilde{y}} \sqrt{\tilde{\alpha}} (u_1 - u_2) - \left(\tilde{\alpha} + \frac{ik_x/\beta}{\tilde{y}} \right) \sqrt{\alpha} (u_1 + u_2) \end{aligned} \quad (4.100)$$

Yukarıdaki denklemleri sırasıyla $\sqrt{\tilde{\alpha}}, \sqrt{\alpha}$ çarpıp taraf tarafa toplanır ve çıkarılırsa aşağıdaki denklem (4.101) denklem (4.102) elde edilir.

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\alpha\tilde{\alpha}} \frac{du_1}{d\tilde{y}} + 2\sqrt{\alpha\tilde{\alpha}} \left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{y}} - \sqrt{\alpha\tilde{\alpha}} \right) u_1 \\ = \frac{2k\sqrt{\alpha\tilde{\alpha}}/\beta}{\tilde{y}} u_2 - 2\alpha\tilde{\alpha}u_1 + \frac{ik_x/\beta}{\tilde{y}} (\tilde{\alpha} - \alpha)u_1 - \frac{ik_x/\beta}{\tilde{y}} (\alpha + \tilde{\alpha})u_2 \end{aligned} \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{\alpha\tilde{\alpha}}\frac{du_2}{d\tilde{y}} + 2\sqrt{\alpha\tilde{\alpha}}\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{y}} - \sqrt{\alpha\tilde{\alpha}}\right)u_2 \\
 = \frac{2k/\beta\sqrt{\alpha\tilde{\alpha}}}{\tilde{y}}u_1 + (\alpha + \tilde{\alpha})\frac{ik_x/\beta}{\tilde{y}}u_1 + 2\tilde{\alpha}au_2 + (\alpha - \tilde{\alpha})\frac{ik_x/\beta}{\tilde{y}}u_2
 \end{aligned} \quad (4.102)$$

Denklem (4.101) çözümü için;

$$\frac{du_1}{d\tilde{y}} = \left(-\frac{\tilde{y}}{\tilde{y}} + \frac{ik_x/\beta(\tilde{\alpha} - \alpha)}{\tilde{y}2\sqrt{\alpha\tilde{\alpha}}}\right)u_1 + \left(\frac{k/\beta - (ik_x/\beta)(\alpha + \tilde{\alpha})/2\sqrt{\alpha\tilde{\alpha}}}{\tilde{y}}\right)u_2$$

$\alpha + \tilde{\alpha} = 0$, $\alpha - \tilde{\alpha} = -\frac{2iB_0}{\beta}$ tanımları yapılırsa;

$$\tilde{y} = \tau_2 w \text{ değişken dönüşümü ile} \quad \frac{d}{d\tilde{y}} = \frac{dw}{d\tilde{y}} \frac{d}{dw} = \frac{1}{\tau_2} \frac{d}{dw}$$

denklem (4.103) elde edilir.

$$\frac{du_1}{dw} = \left(\frac{2k_x B_0/2\sqrt{\alpha\tilde{\alpha}}\beta^2 - \tilde{y}}{W}\right)u_1 + \frac{k/\beta}{w}u_2 \quad (4.103)$$

$$\tau_2 = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\tilde{\alpha}}} \quad , \quad \tilde{\alpha} = \frac{2k_x B_0}{\beta^2} \tau_2$$

Yukarıdaki tanımlar yapılırsa denklem (4.104) elde edilir.

$$\frac{du_1}{dw} = \left(\frac{\tilde{\alpha} - \tilde{y}}{w}\right)u_1 + \frac{k/\beta}{w}u_2 \quad (4.104)$$

Denklem (4.102) çözümü için;

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{\alpha\tilde{\alpha}}\frac{du_2}{d\tilde{y}} + 2\sqrt{\alpha\tilde{\alpha}}\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{y}} - \sqrt{\alpha\tilde{\alpha}}\right)u_2 \\
 = \frac{2k/\beta\sqrt{\alpha\tilde{\alpha}}}{\tilde{y}}u_1 + (\alpha + \tilde{\alpha})\frac{ik_x/\beta}{\tilde{y}}u_1 + 2\tilde{\alpha}au_2 + (\alpha - \tilde{\alpha})\frac{ik_x/\beta}{\tilde{y}}u_2
 \end{aligned} \quad [4.102]$$

$$\frac{du_2}{d\tilde{y}} = \left(\frac{k/\beta + (\alpha + \tilde{\alpha})ik_x/2\beta\sqrt{\alpha\tilde{\alpha}}}{\tilde{y}}\right)u_1 + \left(2\sqrt{\alpha\tilde{\alpha}} + \frac{(\alpha - \tilde{\alpha})ik_x/2\sqrt{\alpha\tilde{\alpha}}\beta - \tilde{y}}{\tilde{y}}\right)u_2$$

$$\frac{du_2}{d\tilde{y}} = \frac{k/\beta}{\tilde{y}}u_1 + \left(2\sqrt{\alpha\tilde{\alpha}} - \frac{2k_x B_0}{2\sqrt{\alpha\tilde{\alpha}}\beta^2} \frac{1}{\tilde{y}} - \frac{\tilde{y}}{\tilde{y}}\right)u_2 \quad (4.105)$$

denklem (4.101) için yapılan dönüşümler ve tanımların aynısı yukarıdaki (4.105) denklemi için yapılırsa denklem (4.106) elde edilir.

$$\frac{du_2}{dw} = \frac{k/\beta}{w}u_1 + \left(1 - \frac{\tilde{\alpha} + \tilde{y}}{w}\right)u_2 \quad (4.106)$$

Denklem (4.106)'dan

$$u_1 = \frac{w}{k/\beta} \left(\frac{d}{dw} - 1 + \frac{\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}}{w} \right) u_2 \quad (4.107)$$

bulunur. Denklem (4.107) denklem (4.104)'te yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dw} - \frac{\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}}{w} \right) w \left(\frac{d}{dw} - 1 + \frac{\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}}{w} \right) u_2 &= \frac{k^2/\beta^2}{w} u_2 \\ \left(\frac{d}{dw} - 1 + \frac{\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}}{w} \right) u_2 + w \frac{d}{dw} \left(\frac{d}{dw} - 1 + \frac{\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}}{w} \right) u_2 - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}) \left(\frac{d}{dw} - 1 + \frac{\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}}{w} \right) u_2 &= \frac{k^2/\beta^2}{w} u_2 \\ w \frac{d^2 u_2}{dw^2} + (1 + \tilde{\alpha} + \tilde{\gamma} - w - \tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}) \frac{du_2}{dw} + \left(-1 + \frac{\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}}{w} - \frac{\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}}{w} + \tilde{\alpha} - \tilde{\gamma} - \frac{\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\gamma}^2}{w} - \frac{k^2/\beta^2}{w} \right) u_2 &= 0 \end{aligned}$$

aşağıdaki denklem elde edilir:

$$w \frac{d^2 u_2}{dw^2} + (1 + 2\tilde{\gamma} - w) \frac{du_2}{dw} + \left(\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma} - 1 - \frac{\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\gamma}^2 + k^2/\beta^2}{w} \right) u_2 = 0$$

Burada son terimin kesirli kısmının pay kısmı yine sıfırdır ($\tilde{\alpha} = \frac{2k_x B_0}{\beta^2}$, $\tau_2 = \frac{k_x}{\beta}$ ve $\tilde{\gamma}^2 = \frac{k^2 + k_x^2}{\beta^2}$).

Bu durumda

$$w \frac{d^2 u_2}{dw^2} + (1 + 2\tilde{\gamma} - w) \frac{du_2}{dw} - (\tilde{\gamma} + 1 - \tilde{\alpha}) u_2 = 0 \quad (4.108)$$

denklemini elde edilir ve bu denklemin de çözümü de yine Kummer konfluent hipergeometrik fonksiyonlarıdır.

$$u_2 = C_1 {}_1F_1(\tilde{\gamma} + 1 - \tilde{\alpha}, 1 + 2\tilde{\gamma}; w) + C_2 w^{-2\tilde{\gamma}} {}_1F_1(1 - \tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}, 1 - 2\tilde{\gamma}; w)$$

$$u_2(\tilde{y}) = C_1 {}_1F_1(\tilde{\gamma} + 1 - \tilde{\alpha}, 1 + 2\tilde{\gamma}; \tilde{y}/\tau_2) + C_2 (\tilde{y}/\tau_2)^{-2\tilde{\gamma}} {}_1F_1(1 - \tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}, 1 - 2\tilde{\gamma}; \tilde{y}/\tau_2)$$

Şimdi u_1 'i bulalım. Denklem (4.104)'ten

$$u_2 = \frac{w}{k/\beta} \left(\frac{d}{dw} - \frac{\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}}{w} \right) u_1 \quad (4.109)$$

yazılır.

Denklem (4.109) denklem (4.106)'da yerine yazılır ve düzenlenirse yine Kummer denklemine ulaşılır:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dw} - 1 + \frac{\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}}{w}\right) w \left(\frac{d}{dw} - \frac{\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}}{w}\right) u_1 &= \frac{k^2/\beta^2}{w} u_1 \\ \left(\frac{d}{dw} - \frac{\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}}{w}\right) u_1 + w \frac{d}{dw} \left(\frac{d}{dw} - \frac{\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}}{w}\right) u_1 - w \left(\frac{d}{dw} - \frac{\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}}{w}\right) u_1 + (\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}) \left(\frac{d}{dw} - \frac{\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}}{w}\right) u_1 &= \frac{k^2/\beta^2}{w} u_1 \\ w \frac{d^2}{dw^2} + (1 - \tilde{\alpha} + \tilde{\gamma} - w + \tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}) \frac{d}{dw} + \left(-\frac{\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}}{w} + \frac{\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}}{w} + \tilde{\alpha} - \tilde{\gamma} - \frac{\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\gamma}^2}{w} - \frac{k^2/\beta^2}{w}\right) u_1 &= 0 \\ \left[w \frac{d^2}{dw^2} + (1 + 2\tilde{\gamma} - w) \frac{d}{dw} - (\tilde{\gamma} - \tilde{\alpha})\right] u_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.110)$$

Çözümler:

$$u_1(w) = \tilde{C}_1 {}_1F_1(\tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}; 1 + 2\tilde{\gamma}; w) + \tilde{C}_2 w^{-2\tilde{\gamma}} {}_1F_1(-\tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}; 1 - 2\tilde{\gamma}; w)$$

$$u_1(\tilde{y}) = \tilde{C}_1 {}_1F_1(\tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}; 1 + 2\tilde{\gamma}; \tilde{y}/\tau_2) + \tilde{C}_2 (\tilde{y}/\tau_2)^{-2\tilde{\gamma}} {}_1F_1(-\tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}; 1 - 2\tilde{\gamma}; \tilde{y}/\tau_2)$$

$u_1(\tilde{y})$ ve $u_2(\tilde{y})$ çözümlerini kullanarak $\Phi_1(\tilde{y})$ ve $\Phi_3(\tilde{y})$ fonksiyonları yazılarak:

$$\Phi_1(\tilde{y}) = \sqrt{ieB_0/\beta} \tilde{y}^{\tilde{\gamma}} e^{-B_0e/\beta \tilde{y}} (u_1 + u_2)$$

$$\Phi_3(\tilde{y}) = \sqrt{-ieB_0/\beta} \tilde{y}^{\tilde{\gamma}} e^{-B_0e/\beta \tilde{y}} (u_1 - u_2)$$

aşağıdaki çözümler elde edilir:

$$\Phi_1(\tilde{y}) = \sqrt{ieB_0e/\beta} \tilde{y}^{\tilde{\gamma}} e^{-B_0e/\beta \tilde{y}} [(C_1 F_3 + \tilde{C}_1 \tilde{F}_3) + (\tilde{y}/\tau_2)^{-2\tilde{\gamma}} (C_2 F_4 + \tilde{C}_2 \tilde{F}_4)] \quad (4.111)$$

$$\Phi_3(\tilde{y}) = \sqrt{-ieB_0e/\beta} \tilde{y}^{\tilde{\gamma}} e^{-B_0e/\beta \tilde{y}} [(\tilde{C}_1 \tilde{F}_3 - C_1 F_3) + (\tilde{y}/\tau_2)^{-2\tilde{\gamma}} (\tilde{C}_2 \tilde{F}_4 - C_2 F_4)] \quad (4.112)$$

Burada denklem (4.111) ve denklem (4.112) yazılırken şu kısaltmalar yapılmıştır:

$$F_3 = {}_1F_1(\tilde{\gamma} + 1 - \tilde{\alpha}, 1 + 2\tilde{\gamma}; \tilde{y}/\tau_2)$$

$$\tilde{F}_3 = {}_1F_1(\tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}, 1 + 2\tilde{\gamma}; \tilde{y}/\tau_2)$$

$$F_4 = {}_1F_1(1 - \tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}, 1 - 2\tilde{\gamma}; \tilde{y}/\tau_2)$$

$$\tilde{F}_4 = {}_1F_1(-\tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}, 1 - 2\tilde{\gamma}; \tilde{y}/\tau_2)$$

4.3. DKP Denkleminin Çözümü

Bölüm 3.3.3 de ifade edildiği gibi (3+1) boyutta DKP denkleminin çözümleri on altı bileşen içerir ve burada belirtildiği gibi çiftlenimli on altı denkleme analitik olarak çözmek oldukça zordur. Bu nedenle fiziksel sistem hakkında bazı öngörülerde bulunmak için bu matematiksel zorlukları daha düşük boyutlarda çalışarak gidermek tercih edilir. (1+1) boyutta çalışıldığında Dirac matrisleri yerini Pauli matrislerine bırakır ve DKP denkleminde yer alan Kemmer matrisleri artık on altı bileşenli değil dört bileşenli matrisler olurlar. Düşük boyuta indirildiğinde DKP denkleminin için yine Schrödinger'in ikinci kuantizasyon yaklaşımlığı göz önüne alınarak kütleli spin-1 parçacığı, iki özdeş spin-1/2 parçacıktan oluşan bir sistem olarak düşünülecektir. Bu kesimde (1+1) boyutta, dış alanların varlığında DKP denkleminin analitik olarak çözülerek, Bogoliubov dönüşüm tekniği kullanılarak parçacık yaratma sayı yoğunluğu elde edilecektir.

(1+1) Boyutta eğri-uzay zamanda elektromanyetik alanların varlığında DKP denkleminin kovaryant genellemesi aşağıdaki gibidir.

$$[i\beta^\mu(\partial_\mu - \Sigma_\mu + eA_\mu) - m]\Psi(t, \vec{x}) = 0 \quad (4.113)$$

Burada β^μ Kemmer matrisleri, Σ_μ spin bağlantı katsayısı, A_μ vektör potansiyelidir. Bu çalışmada dış alanların varlığında DKP denklemini çözmek için spin bağlantı katsayısında mevcut olan Christoffel sembollerinin hesaplanması gerekir. Bunun içinde öncelikle metrik tensör ve tetradlar hesaplanmalıdır. Bu bileşenlerle beraber A_μ vektör potansiyeli de denkleminde yerine koyulur ve çözümler elde edilir.

DKP denkleminin çözümünde kullanacak (1+1) boyutta eğri uzay-zamanda Riemann geometrisini betimleyen çizgi elemanı

$$ds^2 = C_1^2(t, x)dt^2 - C_2^2(t, x)dx^2 \quad (4.114)$$

Biçimindedir ve $C_1(t, x) = C_1$, $C_2(t, x) = C_2$ kısaltması kullanılacak $C_1 = \frac{1}{a(t)}$, $C_2 = a(t)$ tanımı yapılmıştır. Ayrıca (1+1) boyutta çalışılacağından, tanımlanan ve A_μ vektör potansiyeli, $a(t) = a_0\sqrt{t}$ olmak üzere,

$$A_\mu = (0, -E_0 a(t)) \quad (4.115)$$

biçiminde tanımlanır. Seçilen çizgi elemanına karşılık gelen metrik tensörün kovaryant ve kontrovaryant biçimleri aşağıdaki gibidir.

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} C_1^2 & 0 \\ 0 & -C_2^2 \end{bmatrix} \quad g^{\mu\nu} = \frac{cof g_{\mu\nu}}{det g_{\mu\nu}} \quad g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1/C_1^2 & 0 \\ 0 & -1/C_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

Eğri uzay- zaman ile düz uzay-zaman arasındaki ilişkiyi tetradlar sağlar. Tetradları bulmak için

$$g^{\mu\nu} = e_{(i)}^{\mu} e_{(j)}^{\nu} \eta^{(i)(j)} \quad (4.117)$$

bağıntısı kullanılır. Burada $\eta^{(i)(j)}$ düz uzay-zaman metriğidir ve $\eta = (1, -1)$ seçimi yapılırsa tetradlar aşağıdaki gibi elde edilir. Burada ve ileriki denklemlerde parantez içinde belirtilen üst indisler Minkowski uzayını temsil etmektedir.

$$e_{(i)}^{\mu} = \begin{bmatrix} C_1^{-1} & 0 \\ 0 & C_2^{-1} \end{bmatrix}, \quad e_{\mu}^{(i)} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

Tetradlar yardımıyla eğri uzay-zaman Dirac matrisleri ile düz uzay-zaman matrisleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir;

$$\gamma^{\mu} = e_{(i)}^{\mu} \gamma^{(i)} \quad (4.119)$$

$$\gamma^0 = e_{(0)}^0 \gamma^0 = \frac{1}{C_1} \gamma^{(0)} \quad (4.119. a)$$

$$\gamma^1 = e_{(1)}^1 \gamma^{(1)} = \frac{1}{C_2} \gamma^{(1)} \quad (4.119. b)$$

DKP denklemindeki Σ_{μ} spin bağlantı katsayısının hesaplanması için öncelikle Christoffel sembollerinin bulunması gerekir.

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} (\partial_{\mu} g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu} g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha} g_{\mu\nu}) \quad (4.120)$$

Aşağıda verilen sonuçlarda $(.) = \partial_t$ ve $(') = \partial_x$ türevlerini temsil etmektedir.

$i. \alpha = 0 \quad \beta = 0$

$\mu = \nu = 0$ için;

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{00}) = \frac{\dot{C}_1}{C_1} \quad (4.120. a)$$

$\mu = 0 \quad \nu = 1$ için;

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} \partial_1 g_{00} = \frac{C_1'}{C_1} \quad (4.120. b)$$

$\mu = 1 \quad \alpha = 1$ için;

$$\Gamma_{11}^0 = -\frac{1}{2} g^{00} (-\partial_0 g_{11}) = \frac{C_2 \dot{C}_2}{C_1^2} \quad (4.120. c)$$

ii. $\alpha = 1 \quad \beta = 1$

$\mu = \nu = 0$ için;

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (-\partial_1 g_{00}) = \frac{C_1 C_1'}{C_2^2} \quad (4.120. d)$$

$\mu = 0 \quad \nu = 1$ için;

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \partial_0 g_{11} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{C_2^2} \right) \alpha_0 (-C_2^2) = \frac{\dot{C}_2}{C_2} \quad (4.120. e)$$

Ayrıca $\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1$

$\mu = 1 \quad \nu = 1$ için;

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{11} = \frac{C_2'}{C_2} \quad (4.120. f)$$

Elde edilen Christoffel sembollerinin matris biçimi denklem (4.121)'de verilmiştir.

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\dot{C}_1}{C_1} & \frac{C_1'}{C_1} \\ \frac{C_1'}{C_1} & \frac{C_2 \dot{C}_2}{C_1^2} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{\mu\nu}^1 = \begin{bmatrix} \frac{C_1 C_1'}{C_2^2} & \frac{\dot{C}_2}{C_2} \\ \frac{\dot{C}_2}{C_2} & \frac{C_2'}{C_2} \end{bmatrix} \quad (4.121)$$

Christoffel sembolleri ile spin bağlantı katsayısı arasındaki bağıntı

$$\Gamma_{\lambda} = -\frac{1}{8} g_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] \quad (4.122)$$

şeklinde ifade edilir.

i. $\lambda = 0$ için;

$$\Gamma_0 = -\frac{1}{8} g_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu 0}^{\alpha} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$$

$\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ yazılırsa;

$$-\frac{1}{8} g_{\mu 0} \Gamma_{\nu 0}^0 [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] + g_{\mu 1} \Gamma_{\nu 0}^1 [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$$

$\mu = 0$ ve $\mu = 1$ yazılırsa;

$$-\frac{1}{8} g_{00} \Gamma_{\nu 0}^0 [\gamma^0, \gamma^{\nu}] + g_{01} \Gamma_{\nu 0}^1 [\gamma^0, \gamma^{\nu}] + g_{10} \Gamma_{\nu 0}^0 [\gamma^1, \gamma^{\nu}] + g_{11} \Gamma_{\nu 0}^1 [\gamma^1, \gamma^{\nu}]$$

$\nu = 1$ ve $\nu = 0$ için

$$-\frac{1}{8} (g_{00} \Gamma_{10}^0 [\gamma^0, \gamma^1] + g_{11} \Gamma_{00}^1 [\gamma^1, \gamma^0])$$

$$\Gamma_0 = -\frac{C_1 C'_1}{2} \gamma^0 \gamma^1 \quad (4.122. a)$$

Ayrıca ;

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}$$

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu$$

bağlantıları da kullanılmıştır.

ii. $\lambda = 1$ için;

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{8} g_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu 1}^\alpha [\gamma^\mu \gamma^\nu]$$

$\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ için;

$$-\frac{1}{8} (g_{\mu 0} \Gamma_{\nu 1}^0 [\gamma^\mu, \gamma^\nu] + g_{\mu 1} \Gamma_{\nu 1}^1 [\gamma^\mu, \gamma^\nu])$$

$\mu = 0$ ve $\mu = 1$ için;

$$-\frac{1}{8} (g_{00} \Gamma_{\nu 1}^0 [\gamma^0, \gamma^\nu] + g_{01} \Gamma_{\nu 1}^1 [\gamma^0, \gamma^\nu] + g_{10} \Gamma_{\nu 1}^0 [\gamma^1, \gamma^\nu] + g_{11} \Gamma_{\nu 1}^1 [\gamma^1, \gamma^\nu])$$

$\nu = 1$ ve $\nu = 0$ için;

$$-\frac{1}{8} (g_{00} \Gamma_{11}^0 [\gamma^0, \gamma^1] + g_{11} \Gamma_{01}^1 [\gamma^1, \gamma^0])$$

$$\Gamma_1 = -\frac{C_2 \dot{C}_2}{2} \gamma^0 \gamma^1 \quad (4.122. b)$$

Hesaplanan spin bağlantı katsayıları düz uzay-zaman Dirac matrisleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\Gamma_0 = -\frac{C_1 C'_1}{2} \gamma^0 \gamma^1 = \frac{-1}{2} \frac{C'_1}{C_2} \gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \quad (4.123)$$

$$\Gamma_1 = -\frac{C_2 \dot{C}_2}{2} \gamma^0 \gamma^1 = \frac{\dot{C}_2}{2C_1} \gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \quad (4.124)$$

Burada $\beta^{(\mu)}$ Kemmer matrisleri;

$$\beta^{(\mu)} = \gamma^{(\mu)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(\mu)} \quad (4.125)$$

şeklinde ifade edilir. Σ_μ spin bağlantı katsayısı ve Kemmer matrisleri arasındaki bağlantı

$$\Sigma_\mu = \Gamma_\mu \otimes I + I \otimes \Gamma_\mu \quad (4.126)$$

biçimindedir.

$$\Sigma_0 = \Gamma_0 \otimes I + I \otimes \Gamma_0 = -\frac{1}{2} \frac{C_1'}{C_2} (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) \quad (4.126. a)$$

$$\Sigma_1 = \Gamma_1 \otimes I + I \otimes \Gamma_1 = -\frac{1}{2} \frac{\dot{C}_2}{C_1} (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) \quad (4.126. b)$$

Kemmer matrislerini (4.125) ve spin bağlantı katsayısı (4.126) DKP denkleminde (4.113) yerine yazılırsa denklem (4.128) elde edilir.

$$\left[e_0^{(0)} \beta^{(0)} (\partial_t - \Sigma_0 + ieA_0) + e_1^{(1)} \beta^{(1)} (\partial_x - \Sigma_1 + ieA_1) + im \right] \Psi_{(t,x)} = 0 \quad (4.127)$$

$$\left[\frac{1}{C_1} (\gamma^{(0)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)}) (\partial_0 + ieA_0) + \frac{1}{C_2} (\gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(1)}) (\partial_1 + ieA_1) + \frac{C_1'}{2C_2 C_1} (\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0) (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) + \frac{\dot{C}_2}{2C_1 C_2} (\gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(1)}) (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) + im \right] \Psi_{(t,x)} = 0 \quad (4.128)$$

Denklem (4.128) soldan $\gamma^0 \otimes \gamma^0$ ile çarpılırsa denklem (4.129) elde edilir.

$$\left[\frac{1}{C_1} (\gamma^{(0)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)}) (\partial_0 + ieA_0) + \frac{1}{C_2} (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes \gamma^{(0)} + \gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) (\partial_1 + ieA_1) + \frac{C_1'}{2C_1 C_2} (\gamma^{(0)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)}) (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) + \frac{\dot{C}_2}{2C_1 C_2} (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes \gamma^{(0)} + \gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) + im \gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)} \right] \Psi_{(t,x)} = 0 \quad (4.129)$$

Dirac matrislerinin Pauli matrisleri cinsinden $\gamma^{(i)} = (\sigma^3, i\sigma^2)$ biçiminde seçimi yapılırsa Kemmer matrisleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\gamma^0 = \sigma_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = -i\sigma_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu matris seçimleri kullanılarak DKP denkleminde yer alan matrisler hesaplanırsa;

$$\beta^{(0)} = \gamma^{(0)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^{(0)}\gamma^{(1)} \otimes \gamma^{(0)} + \gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}\gamma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^{(0)}\gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)}\gamma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu matrisler denklem (4.129)'da yerine yazılıp $\Psi(x,t) = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{\bar{0}} \\ \Psi_2 \end{bmatrix}$ tanımlanırsa

denklem (4.130) elde edilir:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{C_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} (\partial_t + ieA_0) + \frac{1}{C_2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} (\partial_x + ieA_x) + \\ \frac{C'_1}{2C_1C_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + im \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ \frac{\dot{C}_2}{2C_1C_2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{\bar{0}} \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.130)$$

Denklem (4.130) aşağıdaki matris biçiminde yazılabilir:

$$\left[\begin{array}{cccc} \frac{2}{C_1}(\partial_t + ieA_0) + \frac{\dot{C}_2}{C_2C_1} + im & -\left(\frac{1}{C_2}(\partial_x + ieA_x) + \frac{C'_1}{C_1C_2}\right) & -\left(\frac{1}{C_2}(\partial_x + ieA_x) + \frac{C'_1}{C_1C_2}\right) & \frac{\dot{C}_2}{C_2C_1} \\ -\frac{1}{C_2}(\partial_x + ieA_x) & -im & 0 & \frac{1}{C_2}(\partial_x + ieA_x) \\ -\frac{1}{C_2}(\partial_x + ieA_x) & 0 & -im & \frac{1}{C_2}(\partial_x + ieA_x) \\ -\frac{\dot{C}_2}{C_2C_1} & \left(\frac{1}{C_2}(\partial_x + ieA_x) + \frac{C'_1}{C_1C_2}\right) & \left(\frac{1}{C_2}(\partial_x + ieA_x) + \frac{C'_1}{C_1C_2}\right) & -\frac{2}{C_1}(\partial_t + ieA_0) - \frac{\dot{C}_2}{C_2C_1} + im \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{\bar{0}} \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bu matrisin ikinci ve üçüncü satırı aynı denklemleri verir, bu nedenle bunlardan sadece biri alınır ve toplamda çiftlenimli üç diferansiyel denklem elde edilir:

$$\left[\frac{2}{C_1}(\partial_t + ieA_0) + \frac{\dot{C}_2}{C_1C_2} \right] \Psi_1 + im\Psi_1 - 2 \left[\frac{1}{C_2}(\partial_x + ieA_1) + \frac{C'_1}{C_1C_2} \right] \Psi_0 + \frac{\dot{C}_2}{C_1C_2} \Psi_2 = 0 \quad (4.131)$$

$$\left[\frac{2}{C_1}(\partial_t + ieA_0) + \frac{\dot{C}_2}{C_1C_2} \right] \Psi_2 - im\Psi_2 - 2 \left[\frac{1}{C_2}(\partial_x + ieA_2) + \frac{C'_1}{C_1C_2} \right] \Psi_0 + \frac{\dot{C}_2}{C_1C_2} \Psi_1 = 0 \quad (4.132)$$

$$\Psi_0 = \Psi_{\bar{0}} = \frac{1}{imC_2} (\partial_x + ieA_1)(\Psi_2 - \Psi_1) \quad (4.133)$$

Denklem (4.131) ve denklem (4.132) bir kez toplanır ve bir kez de farkı alınır, sırasıyla aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned} \left[\frac{2}{C_1} (\partial_t + ieA_0) + \frac{\dot{C}_2}{C_1 C_2} \right] (\Psi_1 + \Psi_2) + im(\Psi_1 - \Psi_2) - 4 \left[\frac{1}{C_2} (\partial_x + ieA_1) + \frac{C'_1}{C_1 C_2} \right] \Psi_0 \\ + \frac{\dot{C}_1}{C_1 C_2} (\Psi_1 + \Psi_2) = 0 \end{aligned} \quad (4.134)$$

$$\left[\frac{2}{C_1} (\partial_t + ieA_0) + \frac{\dot{C}_2}{C_1 C_2} \right] (\Psi_1 - \Psi_2) + im(\Psi_1 + \Psi_2) - \frac{\dot{C}_2}{C_1 C_2} (\Psi_1 - \Psi_2) = 0$$

$$\frac{2}{C_1} (\partial_t + ieA_0)(\Psi_1 - \Psi_2) + im(\Psi_1 + \Psi_2) = 0$$

$$(\Psi_1 + \Psi_2) = \frac{i}{m} \frac{2}{C_1} (\partial_t + ieA_0)(\Psi_1 - \Psi_2) \quad (4.135)$$

Denklem (4.133) ve denklem (4.135), (4.134) denkleminde yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{C_1} (\partial_t + ieA_0) + \frac{\dot{C}_2}{C_1 C_2} \right] \frac{1}{C_1} (\partial_t + ieA_0)(\Psi_1 - \Psi_2) + \frac{m^2}{4} (\Psi_1 - \Psi_2) \\ - \left[\frac{1}{C_2} (\partial_x + ieA_1) + \frac{C'_1}{C_1 C_2} \right] \frac{1}{C_2} (\partial_x + ieA_1)(\Psi_1 - \Psi_2) = 0 \end{aligned} \quad (4.136)$$

elde edilir. Denklem (4.136)'da A_μ yerine yazılıp $(\Psi_1 - \Psi_2)$ yerine $X(t)$ kısaltması yapılır ve $u = a_0 t^{1/2}$ dönüşümü tanımlanır, denklem (4.137) elde edilir:

$$\left[\frac{1}{u^2} \frac{d^2}{du^2} - \frac{1}{u^3} \frac{d}{du} + \left(\frac{m}{2} \right)^2 \frac{1}{u^2} + \left(\frac{k_x}{u^2} - \frac{eE_0}{u} \right)^2 \right] X(u) = 0 \quad (4.137)$$

Denklem (4.137)'deki birinci mertebeden türevi yok etmek için $X(u) = u^\alpha f(u)$ dönüşümü yapılır, α yerine $-\frac{1}{2}$ yazılırsa, denklem (4.138) elde edilir.

$$\left(\frac{d^2}{du^2} + \frac{1}{4u^2} + \left(\frac{m}{2} \right)^2 + \frac{k_x^2}{u^2} + e^2 E_0^2 - \frac{2k_x e E_0}{4} \right) f(u) = 0 \quad (4.138)$$

Denklem (4.138)' i Whittaker fonksiyonuna benzetmek için $\gamma^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 + (eE_0)^2$ tanımı ve $\rho = 2i\gamma u$ değişken dönüşümü yapılırsa;

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{1}{4} + k_x^2 \right) + \frac{ik_x eE_0}{\gamma} \frac{1}{\rho} - \frac{1}{4} \right] f(\rho) = 0 \quad (4.139)$$

denklem (4.139) elde edilir. Tanımı önceki bölümde verilen Whittaker denklemi burada yeniden hatırlanırsa:

$$\left[\partial_y^2 + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{y^2} + \frac{k}{y} - \frac{1}{4} \right] \phi(y) = 0$$

O halde çözümler; $k = \frac{ik_x eE_0}{\gamma} = \frac{ik_x}{\sqrt{1 + \left(\frac{m}{2eE_0}\right)^2}}$, $\mu = \pm ik_x$ olmak üzere, Whittaker fonksiyonlarıdır:

$$f(\rho) = A M_{k,\mu}(\rho) + B W_{k,\mu} \quad (4.140)$$

4.3.1. DKP Denklemi İçin Parçacık Yaratma Süreci

Bu kesimde DKP denklemi için elde edilen çözümlerden parçacık yaratma sayı yoğunluğu elde edilecektir. Bogoliubov katsayılarını belirlemek için Kesim 3.3.1.1. de elde edilen yarı klasik çözümler göz önüne alınacaktır. İlk olarak pozitif ve negatif frekanslı çözümler belirlenecektir:

$\rho \rightarrow \infty$ için $W_{k,\mu}(\rho)$ nın asimptotik davranışı aşağıdaki gibi tanımlanabilir;

$$W_{k,\mu}(\rho) \rightarrow e^{-\rho/2} \rho^k$$

Buna göre, $f_\infty^+ = C_\infty^+ W_{k,\mu}(\rho)$ ve

$$f_\infty^- = [C_\infty^+ W_{k,\mu}(\rho)]^* = C_\infty^+ W_{-k,\mu}(-\rho) \quad (4.141)$$

elde edilir. Ayrıca $\rho \rightarrow 0$ için $M_{k,\mu}(\rho)$ nun asimptotik davranışı;

$$M_{k,\mu}(\rho) \rightarrow e^{-\rho/2} \rho^{\mu+1/2}$$

biçiminde verilebilir. $\rho \rightarrow 0$ için pozitif ve negatif frekanslı kipler şöyle olacaktır:

$$f_0^+ = C_0^+ M_{k,\mu}(\rho)$$

$$f_0^- = [C_0^+ M_{k,\mu}(\rho)]^* = C_0^+ (-1)^{-\mu+\frac{1}{2}} M_{k,-\mu}(\rho) \quad (4.142)$$

$\rho \rightarrow \infty$ iken pozitif ve negatif frekans kipleri, $\rho \rightarrow 0$ daki pozitif ve negatif frekans kiplerinin çizgisel birleşimi olarak yazılabilir [18];

$$f_{\infty}^+ = \alpha_k f_0^+ + \beta_k f_0^- \quad (4.143)$$

Buna göre;

$$W_{k,\mu}(\rho) = \frac{C_0^+}{C_{\infty}^+} \alpha_k M_{k,\mu}(\rho) + \frac{C_0^+}{C_{\infty}^+} \beta_k (-1)^{-\mu+1/2} M_{k,-\mu}(\rho)$$

ifadesi elde edilir. Whittaker fonksiyonları için aşağıdaki özellik kullanılır:

$$W_{k,\mu}(\rho) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - k\right)} M_{k,\mu}(\rho) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - k\right)} M_{k,-\mu}(\rho) \quad (4.144)$$

Böylece α ve β katsayıları aşağıdaki gibi bulunur:

$$\alpha_k = \frac{C_{\infty}^+}{C_0^+} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - k\right)}, \quad \beta_k = \frac{C_{\infty}^+}{C_0^+} (e^{i\pi})^{\mu-1/2} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - k\right)}$$

Buradan,

$$\frac{|\alpha_k|^2}{|\beta_k|^2} = e^{2\pi k_x} \frac{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - k\right)\right|^2}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - k\right)\right|^2} \quad (4.145)$$

Gamma fonksiyonlarının aşağıdaki özelliği [17] yardımıyla,

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = \frac{-\pi}{x \sin \pi x}, \quad |\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sin h\pi y}$$

Ayrıca dalga fonksiyonu için, Bose-Einstein istatistiğine uygun olarak $|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1$ koşulu sağlanarak, parçacık yaratma sayı yoğunluğu için şu bağıntı elde edilir:

$$N \simeq |\beta_k|^2 = \frac{\cosh(\pi y)}{e^{2\pi k_x} \cosh(\pi \tilde{y}) - \cosh(\pi y)} \quad (4.146)$$

Burada $y = \tilde{\mu} - \frac{k_x}{\sqrt{1 + \left(\frac{m}{2eE_0}\right)^2}}$ ve $y = -\tilde{\mu} - \frac{k_x}{\sqrt{1 + \left(\frac{m}{2eE_0}\right)^2}}$ eşittir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında görelî parçacık denklemlerinin, konuma ve zamana bağılı manyetik ve elektrik alanların varlığında Robertson-Walker evren modeli için analitik çözümleri elde edilmiştir. Seçilen dış alanlar ve RW metriği için ölçek çarpanı her bir görelî denklem için şöyle özetlenebilir:

Tablo 5. 1. Analitik Çözümler İçin Seçilen Dış Alanlar ve RW Metrik Ölçeği

Görelî Denklem	Dış Alan		RW Metriği için $a(t)$
	Manyetik Alan	Elektrik Alan	
Klein-Gordon	$\vec{B} = B_0 e^{-\beta y} \hat{k}$	$\vec{E} = E_0 \dot{a}(t) \hat{k}$	$a(t) = \sqrt{t}$
Dirac Denklemi	$\vec{B} = B_0 e^{-\beta y} \hat{k}$	$\vec{E} = E_0 \dot{a}(t) \hat{k}$	$a(t) = \sqrt{\Gamma + \Lambda t}$
DKP Denklemi	$\vec{B} = 0$	$\vec{E} = E_0 \dot{a}(t) \hat{i}$	$a(t) = a_0 \sqrt{t}$

Tez konusunun ana hedefi dış alanların varlığında ve eğri uzayda Dirac denkleminin analitik çözümlerini elde etmektir. Dirac denklemi için literatür incelendiğinde genel olarak ya sadece dış alanların varlığı ya da sadece gravitasyonel alanların varlığı irdelenmiştir. İki durumun birlikte yer aldığı çok az çalışma tespit edilmiştir. Bu durum Dirac denkleminin dört bileşenli olması ve dört çiftlenimli denklemin analitik çözümü için matematiksel zorlukların oluşundan kaynaklıdır. Bu bağlamda ilk olarak (3+1) boyutlu RW metriği için görelî spinsiz parçacıkları temsil eden Klein-Gordon denkleminin, ardından Dirac denkleminin tam çözümleri bulunmuştur. Tezin son aşamasında ise sadece elektrik alan varlığında, (1+1) boyutlu RW metriği için DKP denkleminin çözümleri türetilmiştir. DKP denklemi 16 bileşene sahip olduğundan analitik çözümlerin elde edilmesi çok zordur. Bu nedenle düşük boyutlar için yapılan çalışmalar daha yaygındır.

Dirac denklemi (spin - $\frac{1}{2}$) ile beraber KG denkleminin (spin-0) çözümlerinin de elde edilmiş olması görelî çözümlere spinden gelen katkıları yani spin ile manyetik alanın etkileşmesini tartışmak için yararlı olacaktır. Elde edilen çözümlerden parçacıkların enerji bağıntıları türetilebilir ve enerjiye dış alanların ve spin-alan etkileşmesinin sağladığı katkılar tartışılabilir. DKP denkleminin çözümlerinin elde edilmesi ise KG denklemi için geri bildirim niteliğindedir. Düşük boyutlarda spin-alan etkileşmelerini analitik çözümlerden görmek mümkün değildir, yani spin katkısı çözümlerde görülmeyecektir. Ancak tez çalışmasından elde edilen sonuçlar değerlendirildiğinde (3+1) boyutlu uzayda KG denklemi için elde edilen diferansiyel denklemin ve dolayısıyla da bu denklemin çözümünün, (1+1) boyutta DKP denklemi için elde edilen denklem ile aynı olduğunu ve aynı çözümlerin elde edileceğini göstermiştir. Bu sonuca göre KG denklemi için (3+1) boyutta yapılan birçok çalışmanın matematiksel sonucu, yüksek boyutlarda çalışılması oldukça güç olan DKP denkleminin düşük boyutlardaki doğasının anlaşılmasına da ışık tutacaktır.

Seçilen metriğin ölçek çarpanının ve dış alanların aynı olması durumu için her bir görelî denklemin çözümleri ve spinden gelen katıklar doğrudan karşılaştırılabilir. Örneğin, DKP denklemleri için kullanılan ölçek çarpanında a_0 'ın 1 alınması, Dirac denklemleri için ise $\Lambda = 1$, $\Gamma = 0$ olması durumunda KG denklemleriyle karşılaştırma yapılabilir.



KAYNAKLAR

- [1]. Shankar, R. (1994). *Principles of Quantum Mechanics*. New York: Plenum Press.
- [2]. Greiner, W. (2000). *Relativistic Quantum Mechanics Wave Equations*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [3]. Önengüt, G. (Ed.). (2015). *Temel Parçacıklara Giriş*. Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti.
- [4]. Gross, F. (2004). *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*. Germany: Wiley-VCH.
- [5]. Cheng, T. (2005). *Relativity, Gravitation and Cosmology A Basic Introduction*. New York: Oxford University Press.
- [6]. Rindler, W. (2006). *Relativity Special, General, and Cosmological*. New York: Oxford University Press.
- [7]. Birrell, N. D., Davies, P. C. (1982). *Quantum fields in curved space*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [8]. Sogut, K. 2001. *Kütleli Spin-1 Parçacığının Sabit Bir Manyetik Alandaki Hareketi*. Mersin Üniversitesi, Mersin.
- [9]. Sogut, K., Havare, A. (2006). A Spin-1 particle in an electrical field in (1+1)-dimensional Schrodinger spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, 23, 7129-7142.
- [10]. Havare, A., Yetkin, T., Sogut, K. (2003). On the Equivalence of the Massless DKP Equation and Maxwell Equations in Robertson-Walker Spacetime. *Chinese Journal of Physics*, 41 (5), 465.
- [11]. Grib, A. A., Mamayev, S. G., Mostepanenko. (1988). *Quantum Vacuum Effects in Strong Fields*. Moscow: Energatomizdat.
- [12]. Chitre, D. M., Hartle, J. B. (1977). Path-integral quantization and cosmological particle production: An example. *Physical Review D*, 16 (2), 251-260.
- [13]. Gavrilov, S., Gitman, D. M., Odintsov, S. D. (1997). Quantum Scalar Field in the FRW Universe with A Constant Electromagnetic Background. *International Journal of Modern Physics A*, 12 (27), 4837-4867.
- [14]. Winitzki, S. (2005). Cosmological Particle Production and The Precision of The WKB Approximation. *Physical Review D*, 72 (10), 104011.

- [15]. Parker, L. (1968). Particle Creation In Expanding Universes. *Physical Review Letters*, 21 (8), 562-564.
- [16]. Sogut, K., Havare, A. (2015). On The Scalar Particle Creation by Electromagnetic Fields in Robertson-Walker Spacetime. *Nuclear Physics B*, 901, 76-84.
- [17]. Abramowitz, M. (Ed.), Stegun, I. (Ed.). (1974). *Handbook of mathematical functions*. New York: Dover Publications.
- [18]. Villalba, V. M., Greiner, W. (2001). Creation of scalar and Dirac particles in the presence of a time varying electric field in an anisotropic Bianchi type I universe. *Physical Review D*, 65(2), 025007.
- [19]. Shishkin, G. V., Villalba, V. M. (1991). The Dirac equation in external fields: Variable Separation in Cartesian Coordinates. *Journal of Mathematical Physics*, 32 (11), 3184-3188.
- [20]. Kangal, E. E., Yanar, H., Havare, A., Sogut, K. (2014). Creation Of Vector Bosons By An Electric Field In Curved Spacetime. *Annals of Physics*, 343, 40-48.
- [21]. Çiftçi, H., Hall, R.L., & Saad, N. (2005). Iterative solutions to the Dirac equation. *Physical Review A*, 72 (2), 022101.
- [22]. Buchholz, H. (2014). *The Confluent Hypergeometric Function*. Berlin: Springer Tract in Natural Philosophy.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı :Nilüfer Parlak

Doğum Tarihi :21 Ağustos 1981

E-mail :nilufer.prlk@gmail.com

Öğrenim Durumu :

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lisans	Fizik	Çukurova Üniversitesi	2009-2011
Yüksek Lisans	Fizik	Mersin Üniversitesi	2015-2019

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

1. Parlak, N.; Kangal, E.; Söğüt, K., Solutions Of Dkp Equation In Curved Spacetime For The Presence Of An External Field. Bilmes Congress, II. International Scientific and Vocational Studies Congress, Kırıkkale University, Kırıkkale, October 2018

2. Parlak, N.; Saltı, M.; Aydoğdu, O.; Söğüt, K., On The Scalar Particle Creation By Electromagnetic Fields In Robertson-Walker Spacetime. International Engineering and Natural Sciences Conference, Dicle University, Diyarbakır, Turkey, 04 November 2018.

3. Parlak, N.; Saltı, M.; Aydoğdu, O.; Söğüt, K., Dynamical Casımır Effect In The Robertson-Walker Spacetime. Ifscom2019, 6th Ifs And Contemporary Mathematics Conference, Mersin Üniversitesi, Mersin, Turkey, 07-10 June 2019