

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PERİYODİK EĞRİLİKLİ KOMPOZİT ŞERİT PLAKLARIN
SERBEST TİTREŞİM FREKANSLARININ ARALIK
ANALİZİ İLE TESPİTİ

Orhan ŞENYENER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Mekanik Programı

Danışman
Doç. Dr. Zafer KÜTÜĞ

Temmuz, 2019

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PERİYODİK EĞRİLİKLİ KOMPOZİT ŞERİT PLAKLARIN SERBEST
TİTREŞİM FREKANSLARININ ARALIK ANALİZİ İLE TESPİTİ

Orhan ŞENYENER tarafından hazırlanan tez çalışması 04.07.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

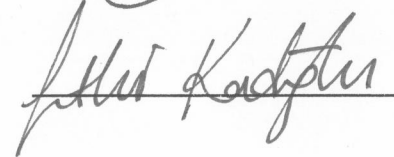
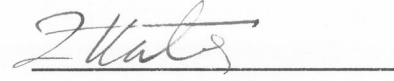
Doç. Dr. Zafer KÜTÜĞ
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Zafer KÜTÜĞ, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

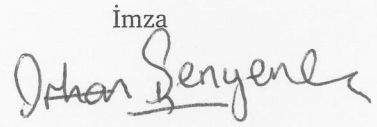
Doç. Dr. Ayşe Erdölen, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Fethi Kadioğlu, Üye
İstanbul Teknik Üniversitesi



Danışmanım Doç. Dr. Zafer KÜTÜĞ sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Periyodik Eğrilikli Kompozit Şerit Plakların Serbest Titreşim Frekanslarının Aralık Analizi İle Tespiti başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Orhan ŞENYENER

İmza


Aileme



TEŞEKKÜR

Uzun ve yorucu tez sürecinde emeklerini, birikimini, güler yüzünü eksik etmeyen, bu çalışmayı beraber yapmış olmaktan dolayı kıvanç duyduğum danışman hocam Sayın Doç. Dr. Zafer Kütüğü'e, tez kapsamında birlikte çalışma fırsatı bulduğum için çok şanslı hissettiğim değerli hocam Sayın Doç. Dr. Ayşe Erdölen'e, desteğini ve güvenini hiçbir zaman esirgemeyen aileme teşekkür ederim. Sizleri çok seviyorum.

Orhan ŞENYENER

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	vii
ŞEKİL LİSTESİ	viii
TABLO LİSTESİ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
1 Giriş	1
1.1 Literatür Özeti	2
1.2 Tezin Amacı	4
1.3 Hipotez	4
2 Kompozit Malzemenin Süreklilik Teorisi	6
2.1 Süreklilik Teorileri Hakkında Bazı Bilgiler	6
2.2 Gerekli Notasyon ve Kabuller	8
2.3 Elastisite Bağlıntıları	9
3 Plakların Doğal Titreşim Denklemlerinin Elde Edilmesi	14
3.1 Elastisite Teorisinin 3 Boyutlu Hareket Denklemlerinden Plak Hareket Denklemlerinin Elde Edilmesi	14
3.2 Üçüncü Mertebeden Geliştirilmiş Plak Teorisi Çerçevesinde Plak Kirişin Titreşim Denklemleri	22
4 Galerkin Yönteminin Probleme Uygulanması	24
5 Hesap Algoritması	30
6 Interval Analiz	32
6.1 Interval Analiz İşlem Operatörleri	33
6.2 Interval Analizin Çalışmaya Uygulanması	33
7 Sonuç ve Öneriler	34

7.1 Çalışmanın Değerlendirilmesi ve Öneriler	36
Referanslar	37
Tezden Üretilmiş Yayınlar	41



SİMGE LİSTESİ

A_{ijkl}^0	Normalize Edilmiş Elastisite Sabitleri
E	Elastisite Modülü
h	Plak Kalınlığı
J	Kayma Şekil Değişirmelerinin Plak Kalınlığı
l_1	x_1 Doğrultusundaki Plak Açıklığı
l_3	x_3 Doğrultusundaki Plak Açıklığı
M	Momentlerin Ortalama Değerleri
V	Plaktaki İç Kuvvetlerin Ortalama Değerleri
u	x_1 Doğrultusundaki Yer Değişirmeler
v	x_3 Doğrultusundaki Yer Değişirmeler
w	x_2 Doğrultusundaki Yer Değişirmeler
t	Zaman
δ	Kronecker Deltası
ϵ	Malzeme Eğriselliğinin Büyüklüğünü Gösteren Parametre
η	Hacim Oranları
μ	Lame Sabiti
ν	Poison Oranları
γ	l_1 Boyundaki Tam Yarım Dalga Sayısı
Λ	Yarım Dalganın Boyu
λ	Lame Sabiti
ω	Kompozit Plagın Doğal Titreşim Frekansı
ϕ	x_3 Eksenine Dik Olan Kesitlerdeki Dönme

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1	Cam takviyeli liflerden oluşan kumaş tipli kompozit liflerin periyodik eğriselliği	1
Şekil 2.1	Periyodik eğrilikli kompozit malzemedan hazırlanmış cismin $x_1=sb$ ve $x_3=sb$ kesitleri	8
Şekil 2.2	Şerit plak malzeme yapısındaki periyodik eğriselliğin geometrisi . .	10
Şekil 3.1	Periyodik eğrilığe sahip iki ucundan basit mesnetli plak	14
Şekil 7.1	$E=[8,12]$ aralığı için frekans ($\bar{\omega}^2$) değeri	35
Şekil 7.2	$E=[18,22]$ aralığı için frekans ($\bar{\omega}^2$) değeri	35

TABLO LİSTESİ

Tablo 7.1	$E=[8,12]$ aralığı için frekans ($\bar{\omega}^2$) değerleri	34
Tablo 7.2	$E=[18,22]$ aralığı için frekans ($\bar{\omega}^2$) değerleri	35



Periyodik Eğrilikli Kompozit Şerit Plakların Serbest Titreşim Frekanslarının Aralık Analizi İle Tespiti

Orhan ŞENYENER

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Zafer KÜTÜĞ

Uçak, uzay ve gemi sanayileri yanında tıp ve inşaat sektörlerinde de yaygın olarak kullanılan kompozit malzemeler, biri güçlendirici ve biri dolgu olmak üzere iki farklı malzemenin mekanik veya kimyasal işlemler sonucu birleştirilerek daha güçlü bir malzemenin oluşturulması esasına dayanır. Kompozit malzemenin tasarımından dolayı lif ve levhaların yapısında periyodik eğilmeler ortaya çıkabilmektedir. Buna örnek olarak, liflerden hazırlanmış dokuma kumaş tipli levhaları olan katmanlı kompozitler gösterilebilir. Bu tip kompozit malzemelerin mekanik ve teknik özelliklerinin araştırılması çok yaygın olmakla birlikte doğal olarak modellenmelerinden kaynaklanan çözülmesi güç matematiksel denklemler içermektedir. Bu çalışmada, yapısında periyodik eğriliklerin olduğu tabakalı kompozit malzemeden oluşan bir şerit plağın (kirişin) serbest titreşimine ait doğal frekansların belirlenmesi “aralık (interval) analizi” çerçevesinde yapılmıştır. İnterval Analiz, geometrik ve dinamik büyüklüklerin belli bir aralıkta verilmesi durumunda elde edilmesi amaçlanan büyüklüklerin kesin değerlerinin hangi aralıkta olabileceğini gösteren bir yöntemdir. Böyle bir probleme ilk defa uygulanan interval analizle elde edilen sonuçlar, literatürde daha önce elde edilen sonuçlara yeter derecede yakın değerler vermiştir.

Anahtar Kelimeler: Aralık Analizi, Doğal Frekans, Kompozit, Titreşim.

ABSTRACT

Determination of Natural Vibration Frequencies of Composite Strip Plates by Interval Analysis

Orhan ŞENYENER

Department of Civil Engineering

Master of Science Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Zafer KÜTÜĞ

Composite materials are increasingly becoming common in important industries such as health, construction, aviation, and ship building. Composites have high strength obtained by combining two or more different materials with the result of mechanical or chemical processes as reinforcement and filling material. Due to the designing of composite materials, periodical curvings may occur in the structure of the fibers and plates. The plates in layered composites, that are constituted of a material having woven fabric threads, can be given as an example. Although it is very common to investigate the mechanical and technical properties of such composite materials, it naturally involves challenging mathematical equations resulting from their models. In this study, natural vibration frequencies are calculated for a strip-plate (beam) having periodical curvings in its layers by using interval analysis method. Interval analysis is a method that gives the exact range of the values which are obtained to determine if geometrical and dynamic values are given in a specific range. The results obtained by the interval analysis, applied for the first time to such a problem, were found close enough to the results obtained in the literature.

Keywords: Composite, Natural Frequency, Interval Analysis, Vibration.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

Kompozit malzemeler geleneksel malzemelere göre daha hafif, daha yüksek mukavemet sahibi, daha rijit olmaları vb. gibi pek çok üstün özellik taşıdıkları için uçak, gemi, inşaat, otomotiv, savunma sanayiinde, tıpta ve modern teknolojinin birçok alanında yaygın olarak kullanılmaktadırlar. Benzer nedenlerden dolayı ilgili bilim dallarında kompozit malzemelerin söz konusu alanlara uygun problemleri araştırılmaktadır. Kompozit malzemeler mekaniğinin en önemli problemlerinden biri, bu malzemelerin yapısında olan belirli özelliklere ilişkin problemlerdir. Bu özelliklerden en önemlisi ise malzemelerin eğrilikli yapıya sahip olmasıdır.

Kompozit malzemedeki lif ve levhaların yapısındaki eğilmeler, bu malzemelerin dizaynından oluşabildiği gibi kompozitin hazırlanma aşamasında kullanılan teknolojik işlemlerin uyumsuzluklarının sonucu da olabilir. İlk durumda eğilmeler periyodik şekilli olur. Bu duruma örnek olarak Şekil 1.1’de cam takviyeli liflerden oluşan kumaş tipli kompozitteki liflerin eğilmesi görülmektedir.



Şekil 1.1 Cam takviyeli liflerden oluşan kumaş tipli kompozit liflerin periyodik eğriselliği

1.1 Literatür Özeti

Guz ve Akbarov'a ait çalışmalardan görüldüğü üzere eğrilikli yapıya sahip kompozit malzemeler mekaniği problemleri iki grupta incelenmektedir [1, 2]. Güçlendirici lif ya da levhaların boyutu eğrilik boyutundan çok büyük olanlarda gerilme ve şekil değiştirme dağılımlarının araştırılmasında bu ilk grup yöntem kullanılmıştır. Literatürde Bolotin [3], Bazhant [4], Vanin [5], Whitney [6] ve Manisfield'in [7] çalışmaları mevcuttur. 1995 yılında Akbarov tarafından yapılan çalışmada periyodik eğrilikli kompozitin normalize edilmiş mekanik özellikleri bulunmuştur [2]. Diğer grup araştırmalarda ise eğriliğin gerilme ve şekil değiştirmelere etkisinde boyutları eğrilik boyutunda ya da daha az olanlarda kullanılabilecek yöntemler teklif edilmiştir. Çalışmalarda, parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde sürekli ortamlar mekaniğinin kesin denklemleri kullanılarak Akbarov-Guz süreklilik teorisi kullanılarak incelenmiştir [8]. Bu teorinin öncekilerden farkı problemi iki boyutta göz önüne alabilmesidir. Teoriye göre eğrilikli yapıdaki parçalı, homojen malzeme, anizotrop, homojen olmayan hale getirilir ve problem değişken katsayılı diferansiyel denklemler durumuna gelir ve uygun sınır koşulları altında çözümü için küçük parametreler yöntemi teklif edilir. Akbarov, 1992 tarihli yayınında eğrilikli yapıya sahip kompozit malzemeden yapılmış elemanın doğal titreşiminin hesaplanmasında Hamilton varyasyonel yaklaşımını kullanan bir yöntem teklif etmiştir [1]. Akbarov ve Yahnioglu tarafından yapılan çalışmalarda kompozit malzemeler mekaniğinin bazı sınır değer problemleri sonlu elemanlar metoduyla araştırılmıştır [9, 10]. Bu çalışmalarda ele alınan problemlerin elastisite teorisinin kesin hareket denklemleri çerçevesinde incelenmesinde büyük matematiksel zorluklar oluşmakta ve incelemede geliştirilmiş plak teorilerinin kullanılması gerektiği görülmektedir. Bu tez çalışmasında da şerit plakların doğal titreşimleri Akbarov ve Guz süreklilik teorisi çerçevesinde üçüncü mertebeden geliştirilmiş plak teorisiyle ele alınmaktadır.

Plak teorilerinin ortaya konmasındaki amaç genel olarak elastisite teorisinin 3 boyutlu problemlerinin 2 boyuta indirgenmesidir. Böylelikle aranan büyüklüklerin boyutlardan birine göre yayılımı hipotez olarak kabul edilir ve dolayısıyla bunların sağladığı denklem ve sınır koşulları boyutları da 3'ten 2'ye indirilmiş olur. Gerilme ya da yerdeğiştirmeden hangisinin plak kalınlığı boyunca yayılımının hipotez şeklinde kabul edildiğine bağlı olarak literatürdeki plak teorileri "Gerilme Esaslı Teoriler" ve "Yerdeğiştirme Esaslı Teoriler" olmak üzere ikiye ayrılırlar. Gerilme esaslı plak teorisi Reissner'in araştırmalarında ortaya konmuştur [11–13]. Goldenveiser, 1957 yılında Reissner'in teorisini geliştiren bir çalışma ortaya koymuştur [14]. Anizotrop plak ve kabukların genel teorilerinin elde edilmesinde Hildebrand [15], ve Librescu [16, 17] gibi araştırmacıların çalışmaları mevcuttur. Yerdeğiştirme esaslı plak teorilerine ait ilk çalışma Basset tarafından yapılmıştır [18]. Reddy [19], Lo ve Christensen [20] ile Lo,

Christensen ve Wu'nun [21, 22] konu hakkında çalışmaları mevcuttur. Gerilme esaslı plak teorisi kapsamında yerdeğiştirmelerin plak kalınlığı boyunca olan koordinata bağlı değişimi vererek yapılan plak teorileri de mevcuttur. Örnek olarak bu çalışmada da kullanılan Kromm Teorisi gösterilebilir [23, 24]. Geliştirilmiş plak teorilerinin kompozit malzemelere uygulanması iki şekilde yapılabilir. Bunlardan ilkinde göre plak normalize edilmiş mekanik özellikli anizotrop bir malzemedendir yapılmış tek katlı bir plak gibi göz önüne alınırsa teori plağın tümüne uygulanır. Eğer plak çok katlı, farklı özellikli levhalardan yapılmış ve plak davranışında bu katlarının etkisi hassas biçimde araştırılmak istenirse, teori plağı oluşturan her bir levhaya ayrı uygulanır. Tez çalışmasında kompozit plağın doğal titreşim frekansı incelendiğinden geliştirilmiş plak teorisi ilk durumda verilen şekilde, plağın tümüne uygulanarak kullanılmıştır. Plak titreşimlerine ait problemlerin formül ve çözümleri Timoshenko Vd. tarafından verilmektedir [25, 26]. Literatürde ayrıca kompozit anizotrop plakların titreşimlerine ait problemlerle alakalı Ambartsumyan [27], Leknitskii [28], Gorman [29], Leissa [30] yazarlarının yayınları bulunmaktadır. Kompozit plakların titreşimlerinin incelenmesinde, geliştirilmiş plak teorilerinin, sonuçlara etkilerini inceleyen Rohwer [31], Anderson ve Kennedy [32], Noor ve Peters [33], Noor ve Burton [34] ile Reddy ve Phan'ın [35] araştırmaları bulunmaktadır. Kompozit malzeme özelliklerinin plak titreşimine klasik durumlarda rastlanmayan etkilerinin incelenmesinde Anders vd [36], Pandey vd [37], Yu Vd. [38], Abrate [39], Koo ve Lee'nin [40] çalışmaları mevcuttur. Klasik plak titreşim problemlerinin kompozit plaklar için genelleştiriliş hallerinin araştırılmasına yönelik çalışmalar Liew ve Lam [41] ile Bhimaraddi [42] tarafından yapılmıştır. Tez kapsamında bizim içim daha fazla önem arz eden ve klasik durumlarda rastlanmayan, çok katlı kompozitten oluşan plakların doğal titreşim ve stabilitesi ile malzemedeki delaminasyonun etkisini inceleyen araştırmalara örnek olarak da Hu ve Hwu [43] ile Chen Vd. [44] çalışmalarını gösterebiliriz. Kompozit malzeme yapısındaki önemli bir kusur olduğunu belirttiğimiz eğrilikli yapıyla ilgili bir çalışma Kütüğ tarafından yapılmıştır [45].

Interval analiz uygulamalarının ilk örnekleri 1920li yıllara dayanmaktadır[46]. 1931 yılında Young ve 1958 yılında Sunaga tarafından konu hakkında yapılmış çalışmalar bulunmaktadır [47, 48]. Literatürde, interval analiz konusu ve uygulamaları ile ilgili en kapsamlı çalışmalar Moore tarafından yapılmıştır [49, 50]. İnterval analiz yönteminin kullanıldığı yayınları taradığımızda inşaat mühendisliğiyle alakalı olarak yapılmış ilk yayın olarak Nuding ve Wilhelm'in çalışmalarını görmekteyiz [51]. Rao ve Berke doğrusal analizde kesin sonuç aldıkları çalışmalarında aralık değerlerde küçük ölçekte kalmışlardır [52]. Muhanna ve Mullen, fuzzy sonlu elemanlar metodu uyguladıkları çalışmalarında interval analiz için belirsiz yükleri göz önüne almışlardır [53–55]. Köylüoğlu ve Elishakoff, perdeli sistemlerde, elastisite modülü

belirsizlik içeren bir çalışmayı sonlu elemanlar metodu ile yapmışlardır. Bu çalışmada interval aralıkların geniş ve sonuçların yaklaşık değerleri içerdiği görülmektedir [56]. Muhanna ve Mullen, elastisite modülünde belirsizlik bulunan ve sonlu elemanlar yöntemi kullandıkları, interval aralığı dar ve kesin sonuçlara ulaştıkları bir çalışma yapmışlardır [57]. Muhanna vd interval analiz yöntemiyle geliştirdikleri bir çerçeve sistem çözümü sunmuşlardır [58]. Rao ve Pownuk, yapı sistem dizaynında interval analiz uyguladıkları bir yöntem sunmuşlardır [59].

1.2 Tezin Amacı

Tez çalışmasında, Akbarov ve Guz süreklilik teorisi altında üçüncü mertebeden geliştirilmiş plak teorilerine ait denklemler kullanılarak, periyodik eğrilikli kompozit malzemeden oluşan plakların doğal titreşim problemlerinin formülize edilmesi, bunun için de elastisite teorisinin kesin hareket denklemlerinden plak titreşim denklemlerinin ve uygun sınır koşullarının bulunması ile formülasyonu yapılmış problemin incelemesindeki zorlukları ortadan kaldırmak üzere probleme Galerkin metodunun uygulanması hedeflenmektedir. Sayısal verileri elde etmek için Matlab programında bir algoritma oluşturulacaktır. Hesap algoritması son kısımda tez çalışmasının esas konusu olan interval analize ait sonuçları sunacak şekilde düzenlenecektir. Plak malzeme yapısındaki eğriliğin doğal titreşim frekansına etkisi oluşturulacak tablo ve grafikler üzerinde incelenecek, interval analize ait sınır değerler klasik yöntemden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılarak değerlendirilecektir.

1.3 Hipotez

Periyodik eğrilikli kompozit plakların doğal titreşimlerinin incelenmesi üçüncü mertebeden geliştirilmiş plak teorisi çerçevesinde yapılacağından teorinin eğrilikli malzemeye uygulanabilir olmasının gösterilmesi açısından önem arz etmektedir. Uygulama açısından ise, kompozit malzeme yapısındaki eğriliklerin bu malzemeden yapılmış yapı elemanlarında gerilme dağılımlarına etkisinin öneminden dolayı kompozit malzemeler mekaniğine ait statik problemlerin dinamik problemlere genelleştirilmesi ve bu elemanların doğal titreşim frekanslarının belirlenmesini gerektirmektedir.

Çalışma kapsamında, bu tip bir probleme ilk defa uygulanacak olan interval analiz yöntemiyle, belirsizlik içeren parametre için verilecek aralık değerler ile belirsizlik sınırlarının belirlenmesi ve böylelikle ulaşılmak istenen sonucun öngörülen hata payı içerisinde kesin olarak elde edilmesi hedeflenmektedir. Bu çalışmada, elastisite modülleri oranlarında belirsizlik bulunmaktadır. Seçilecek farklı elastisite modülleri

oranı ve belirlenecek farklı tolerans oranları için hesaplanacak interval sınırlarına ait alt ve üst frekans değerleri literatürde daha önce bulunmuş değerlere yeter ölçüde yakın olacağı öngörülmektedir.



2.1 Süreklilik Teorileri Hakkında Bazı Bilgiler

Kompozit malzemeler mekaniği problemlerinin incelenmesi kompozit malzemelerin mikro mekaniği ve kompozit malzemelerin makro mekaniği olmak üzere iki türde yapılır. Mikro mekaniğinde takviye ve matristen oluşmuş homojen olmayan malzemeye bakılır ve mikro mekanik genellikle atom seviyesinde araştırma yapılmasını veya yüksek mertebeli gerilme tensörlerinin kullanılmasını göz önüne almaz. Kompozit malzemelerin en önemli problemlerinden biri normalize edilmiş mekanik özelliklerinin, yani belirli sınır koşulları altında gerilme ile şekil değiştirme tensörlerinin ortalastırılmış bileşenlerini birbirine bağlayan mekanik sabitlerinin bulunmasıdır. Bu sınır koşulları iki tip olabilir.

Sınırdaki yerdeğiştirmeler verilebilir.

$$u_i(S) = \epsilon_{ij}^0 x_j \quad (2.1)$$

Sınırdaki gerilmeler verilebilir.

$$T_i(S) = \sigma_{ij}^0 n_j \quad (2.2)$$

x_j , S yüzey noktalarının koordinatları, n_j malzemeyi sınırlayan yüzeyin normal birim vektörünün bileşenleri, ϵ_{ij}^0 ve σ_{ij}^0 sabit şekil değiştirme ve gerilme bileşenleridir. Yani, homojen cisimde (2.1) sınır koşulu verildiğinde şekil değiştirmeler ϵ_{ij}^0 , (2.2) sınır koşulu verildiğinde de gerilmeler σ_{ij}^0 'ye eşittir. Cisim homojen değilse o zaman bu cisme (2.1) sınır koşulları verildiğinde şekil değiştirmelerin hacim üzerindeki değeri ϵ_{ij}^0 , (2.2) sınır koşullarında da gerilmelerin hacim üzerindeki değeri σ_{ij}^0 'ye eşit olmaktadır. Bu durum (2.3) ve (2.4) eşitliklerinde görülmektedir.

$$\int_V \epsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_S (u_i n_j + u_j n_i) dS \quad (2.3)$$

$$\int_V \sigma_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_S (T_i x_j + T_j x_i) dS \quad (2.4)$$

Bu eşitliklerde V , S yüzeyi ile sınırlanan hacmi göstermektedir. (2.3) eşitliği, fazlar arasında homojen olmayan malzemenin bileşenlerini ayıran yüzeylerde yerdeğiştirmelerin sürekli olduğu durumda, (2.4) eşitliği ise gerilmelerin fazlar arasında sürekli olduğu durumlarda doğrudur. (2.3) ve (2.4) eşitlikleri Gauss integral dönüşüm formülü ile ispatlanmaktadır. (2.1) ve (2.3) denklemlerinden (2.5),

$$\epsilon_{ij}^0 = \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij} dV \quad (2.5)$$

(2.3) ve (2.4) eşitlikleri kullanılarak,

$$\sigma_{ij}^0 = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \quad (2.6)$$

elde edilir. (2.1) sınır koşulu ve Gauss integral dönüşüm formülü kullanılarak,

$$\epsilon_{ij}^0 = \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij} dV \quad (2.7)$$

elde edilir. (2.1) ve (2.2) sınır koşullarında malzemenin normalize edilmiş μ_{ijkl} elastisite sabitleri,

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \mu_{ijkl} \langle \epsilon_{kl} \rangle \quad (2.8)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \quad , \quad \langle \epsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij} dV \quad (2.9)$$

işaretlemleri uygulanmıştır. (2.1) koşullarında elde edilen μ_{ijkl} değerleri ile (2.2) koşullarından elde edilen değerler farklı olmaktadır. Farklılık yoksa bulunan değerler malzemenin kesin normalize edilmiş elastisite sabitleridir. Farklılık varsa malzemenin yaklaşık normalize edilmiş elastisite sabitleridir. Kompozitin mekanik özellikleri, bileşenlerinin formuna, hacim oranlarına ve elastisite özelliklerine bağlıdır [20].

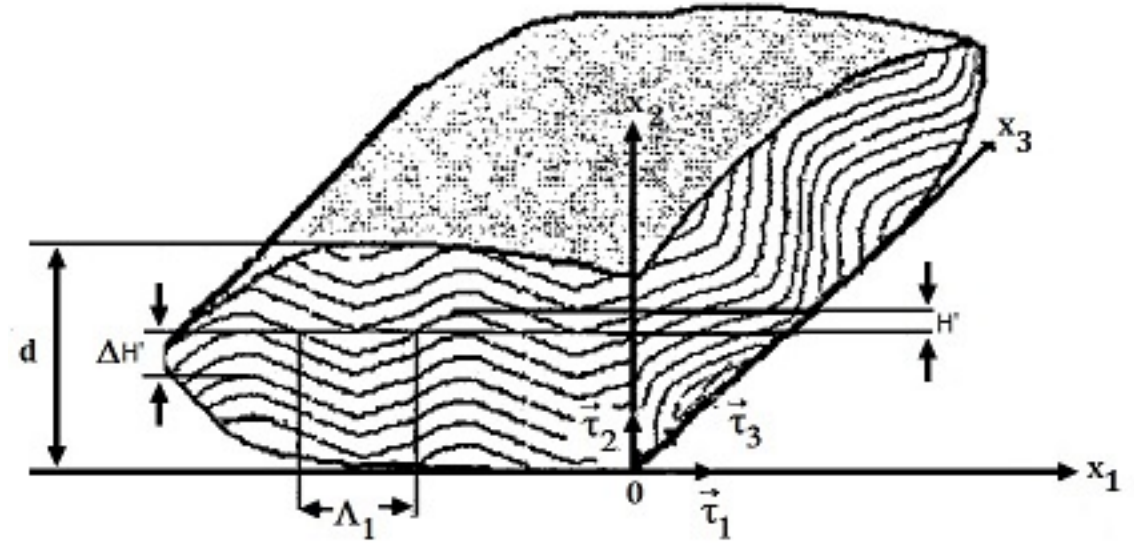
Kompozit malzemeler mikro mekaniğinin en önemli kavramlarından biri belirleyici eleman kavramıdır. Belirleyici eleman kompozit malzemenin öyle bir alanını kapsar ki o alanda gerilme ve şekil değıştirme tensörü bileşenleri, belirleyici elemanın hacim üzerinde alınmış değerleri, kompozit malzemenin tüm hacim üzerinde alınmış değerine eşit olur. (2.1) ve (2.2) sınır koşulları belirleyici eleman sınırında verilirse,

elde edilen $\langle \sigma_{ij} \rangle$ ve $\langle \epsilon_{ij} \rangle$ değerleri, aynı koşullar altında bütün kompozit malzeme için elde edilen $\langle \sigma_{ij} \rangle$ ve $\langle \epsilon_{ij} \rangle$ değerlerine eşit olur. (2.8) denklemindeki μ_{ijkl} değerlerinin bulunması için (2.1) ve (2.2) sınır koşullarında belirleyici elemanda σ_{ij} ve ϵ_{ij} değerlerinin dağılımlarının bulunması gerekmektedir. Bu çözümler belli modeller çerçevesinde yapılır [10].

Kompozit malzemelerin normalize edilmiş mekanik özellikleri belirlendikten sonra, makro mekaniği (2.8) bağıntısı çerçevesinde incelenir. Gerilme ve şekil değiştirme dağılımları, boyutu belirleyici eleman boyutundan küçük alanlarda malzemelerin mikro mekaniği, büyük alanlarda ise malzemelerin makro mekaniği ile araştırılmalıdır.

2.2 Gerekli Notasyon ve Kabuller

Şekilde verilen $x_1x_2x_3$ kartezyen koordinat takımında $x_1=sb$ ve $x_3=sb$ kesitleri gösterilen periyodik eğrilikli cismin güçlendirici liflerinin x_1ox_3 düzlemine yerleştirildiği kabul edilmiştir.



Şekil 2.1 Periyodik eğrilikli kompozit malzemeden hazırlanmış cismin $x_1=sb$ ve $x_3=sb$ kesitleri

Burada, malzeme yapısındaki eğilme genliğinin boyutu, H' , ox_1 eksenine doğrultusundaki yarı dalganın uzunluğu, λ_1 , incelenen malzemenin en küçük boyutu, d notasyonları ile gösterilmiştir.

Takviye malzemesindeki güçlendirici levhaların ox_2 doğrultusunda belirli periyotta tekrarlandığını kabul edersek eğilmenin karakteri aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar.

$$\Lambda_1 \ll d, \quad \Lambda_3 \ll d, \quad H' < \Lambda_1, \quad H' < \Lambda_3 \quad (2.10)$$

Buradaki birinci ve ikinci eşitsizliğe göre malzeme yapısındaki eğrisellik o malzemeden yapılmış elemanın en küçük boyutuna göre çok çok küçük olmaktadır. Üçüncü ve dördüncü eşitsizliklere göreyse periyodik şekilli eğriliklerde eğilme genliğinin eğilme şeklinin yarı periyodundan küçük olmasını gerektirir. Söz konusu eşitsizlikler tez kapsamında, Akbarov ve Guz'un [8] yayınındaki biçimde, denklem (2.11)'de gösterildiği şekilde kabul edilmiştir.

$$H' \ll \Lambda_1, \quad H' \ll \Lambda_3 \quad (2.11)$$

Ayrıca, indis notasyonu ile gösterilen ifadelerde iki indis tekrarlanıyorsa o ifadeye tekrarlana indisin alabileceği bütün değerlerin elde edilen toplamı alınacaktır.

2.3 Elastisite Bağlıları

Elastisite bağıntılarını elde etmek için eğrisel yapıya sahip malzemeden $\Delta H'$ kalınlığında ve yeterince ince bir levha alalım. Bu levhanın orta yüzey formunun, malzemenin eğrilik formu ile aynı olduğunu ve aşağıdaki (2.12) eşitsizliklerini sağladığını kabul edelim.

$$h' \ll \Delta H', \quad \Delta H' \ll \Lambda_1, \quad \Delta H' \ll \Lambda_3 \quad (2.12)$$

Levha orta yüzeyinin her bir noktasını $o'x'_1x'_2x'_3$ kartezyen koordinat takımına (Şekil 2.1) bağlarsak $o'x'_2$ eksenini aynı noktada orta yüzeye normal olan birim $\vec{\tau}'_2$ vektörü yönünde, $o'x'_1$ ve $o'x'_3$ eksenleri ise aynı noktada orta yüzeye teğet olan birim $\vec{\tau}'_1$ ve $\vec{\tau}'_3$ vektörleri doğrultusunda yönlendirilmişlerdir. Malzemede eğrisellik olmadığı durumda bu vektörler $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$ ve $\vec{\tau}_3$ vektörleriyle aynı yönde olurlar. (Şekil 2.1)

(2.12)'nin ilk eşitsizliğine göre, incelenen levhanın $\sim (\Delta H')^3$ hacmindeki kısmını $o'x'_1x'_2x'_3$ kartezyen koordinat takımında asal simetri eksenleri $o'x'_1$, $o'x'_2$ ve $o'x'_3$ olan homojen ortotrop malzeme gibi araştırabiliriz. Malzeme yapısında eğrilik olmadığında $\Delta H'$ boyutu belirleyici elemanın boyutu olarak alınır. Levhanın herhangi bir noktasındaki $o'x'_1$, $o'x'_2$ ve $o'x'_3$ koordinat takımına göre elastisite bağıntıları,

$$\sigma_{ij}^0 = \mu_{ij\alpha\beta} \epsilon'_{\alpha\beta} \quad (2.13)$$

ile verilmektedir. Burada,

$$\begin{aligned} \mu_{ij\alpha\beta}^0 &= \delta_i^j \delta_\alpha^\beta A_{i\beta}^0 + (1 - \delta_i^j) (\delta_i^\alpha \delta_j^\beta + \delta_i^\beta \delta_j^\alpha) G_{ij}^0 \\ A_{44}^0 &= G_{13}^0, \quad A_{55}^0 = G_{23}^0, \quad A_{66}^0 = G_{12}^0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

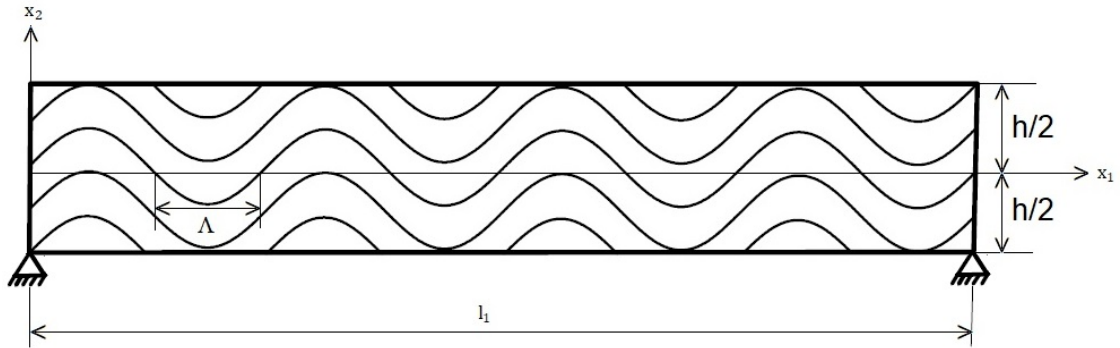
olarak verilmektedir. A_{ij}^0 ve G_{ij}^0 terimleri ortotrop malzemenin elastisite sabitleridir. Bu terimler aynı zamanda malzemede eğrilik olmadığı durumda malzemenin normalize edilmiş mekanik sabitleri olarak da düşünülebilir. Bazı kompozit malzemeler için A_{ij}^0 ve G_{ij}^0 terimlerinin bulunması [10]'da verilmiştir. Böylelikle (2.13)'teki σ'_{ij} ve ϵ'_{ij} terimleri $\sim (\Delta H')^3$ belirleyici elemanın hacmi üzerinde alınmış gerilme ve şekil değiştirme tensörünün $o'x'_1$, $o'x'_2$ ve $o'x'_3$ koordinat takımındaki bileşenleri olurlar.

Levha orta yüzeyin $x_1x_2x_3$ koordinat takımındaki denklemi,

$$x_2 = F(x_1, x_3) = \epsilon f(x_1, x_3) \quad (2.15)$$

(2.15) ile gösterildiği gibi olsun. (2.10)'daki üç ve dördüncü eşitsizliklerden malzeme eğriselliğinin büyüklüğünü gösteren boyutsuz küçük $\epsilon \in [0, 1)$ parametresi dahil edilmiştir. $f(x_1, x_3)$ fonksiyonunun ve birinci mertebeden kısmi türevlerinin sürekli fonksiyonlar olduğu kabulüyle bu fonksiyonun (2.16) koşullarını sağladığı da göz önüne alınır [8].

$$\left| \epsilon \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| < 1 \quad , \quad \left| \epsilon \frac{\partial f}{\partial x_3} \right| < 1 \quad (2.16)$$



Şekil 2.2 Şerit plak malzeme yapısındaki periyodik eğriselliğin geometrisi

Plaktaki eğriselliğin geometrisi Şekil (2.2), formu ise eşitlik (2.17) ile verilmektedir.

$$\epsilon.f(x) = \epsilon.\sin(\gamma\pi x + \delta) \quad (2.17)$$

İki ucundan basit mesnetli, x_3 doğrultusunda sonsuz uzun periyodik eğrilikli şerit plağa ait bu eşitlikte, $\gamma = [l_1/\Lambda]$ olup l_1 boyundaki yarım dalga sayısı, Λ ise yarım dalganın boyudur. $\delta = \pi\delta'/l_1$ biçiminde olup δ' , $x_1 = 0$ 'dan $f(x_1) = 0$ 'a karşı gelen noda kadar olan uzaklıktır. Hesaplarda $\gamma = 10$ alınmıştır.

İncelenen kompozitin $ox_1x_2x_3$ koordinat takımındaki elastisite bağıntılarını elde etmek için $o'x'_i$ ve ox_j eksenleri arasındaki açının kosinüslerini belirleyelim. (2.15) denklemini vektör formunda yazılırsa;

$$\vec{r} = x_1\vec{\tau}_1 + F(x_1, x_3)\vec{\tau}_2 + x_3\vec{\tau}_3 \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \vec{\tau}'_1 &= \nu_1 \left(\vec{\tau}_1 + \frac{\partial F}{\partial x_1} \vec{\tau}_2 \right) , \quad \vec{\tau}'_3 = \nu_1 \left(\vec{\tau}_3 + \frac{\partial F}{\partial x_3} \vec{\tau}_2 \right) \\ \vec{\tau}'_2 &= -\nu_1 \nu_3 \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \vec{\tau}_1 - \vec{\tau}_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} \vec{\tau}_3 \right) \\ \nu_1 &= \left(1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 \right)^{-1/2} , \quad \nu_3 = \left(1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^2 \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$o'x'_i$ ve ox_j eksenleri arasındaki açılarının kosinüsleri $l_{ij} = \vec{\tau}'_i \cdot \vec{\tau}_j$ formülüyle aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned} l_{11} &= \nu_1 , \quad l_{12} = \nu_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} , \quad l_{13} = 0 \\ l_{21} &= -\nu_1 \nu_3 \frac{\partial F}{\partial x_1} , \quad l_{22} = \nu_1 \nu_3 , \quad l_{23} = -\nu_1 \nu_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} \\ l_{31} &= 0 , \quad l_{32} = \nu_1 \nu_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} , \quad l_{33} = \nu_3 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Koordinat eksenleri döndürüldüğünde elastisite sabitleri ve dönüşüm formülleri kullanılarak $\mu_{ij\alpha\beta}$ terimleri aşağıda (2.21)'de gösterildiği şekilde yazılabilir [28].

$$\mu_{ij\alpha\beta}(x_1, x_3) = \mu_{nmsp}^0 l_{in} l_{jm} l_{as} l_{\beta p} \quad (2.21)$$

Böylece eğrilikli kompozit malzemenin $x_1x_2x_3$ koordinat takımındaki elastisite bağıntıları (2.22) ifadesindeki gibi olmaktadır.

$$\sigma_{ij} = \mu_{ij\alpha\beta}(x_1, x_3) \epsilon_{\alpha\beta} \quad (2.22)$$

Burada, σ_{ij} ve $\epsilon_{\alpha\beta}$ terimleri, boyutları $\sim (\Delta H')$ olan belirleyici elemanın hacmi üzerinde alınmış gerilme ve şekil değiştirme tensörünün $ox_1x_2x_3$ eksen takımındaki bileşenleridir. Bu bağıntılar, eğrisel yapıya sahip kompozit malzemelerin süreklilik teorisi olarak adlandırılır. Bu teoriye göre parçalı-homojen malzeme, sürekli-homojen olmayan anizotrop malzeme haline getirilir. Süreklilik teorisi ele alınırken, sürekli ortamlar mekaniğinin geometrik bağıntılarında hiçbir kısıtlama bulunmamaktadır. Bu nedenle, teori hem geometrik-lineer hem de geometrik-lineer olmayan problemler için

geçerlidir. Söz konusu bağıntılar geometrik-lineer problemlerde (2.23)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.23)$$

Geometrik-lineer olmayan problemlerde ise (2.24) ile verildiği gibidir.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} \right) \quad i, j, \alpha = 1, 2, 3 \quad (2.24)$$

Tez kapsamında, kompozit malzemedeki eğriliklerin yalnızca x_1 yönünde olduğu kabul edilmektedir. Dolayısı ile (2.22)'deki $\mu_{ij\alpha\beta}$ terimleri yalnızca x_1 koordinatına bağlı olmaktadır. $\mu_{ij\alpha\beta}^0$ terimleri (2.14)'teki gibi verildiğinde ise (2.22) bağıntılarındaki $\mu_{ij\alpha\beta}(x_1)$ fonksiyonlarının sıfırdan farklı olanlarının açık ifadeleri aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\begin{aligned} \mu_{1111} &= A_{11}^0 \Phi_1^4(x_1) + 2(A_{12}^0 + 2G_{12}^0) \Phi_1^2(x_1) + A_{22}^0 \Phi_2^4(x_1) \\ \mu_{2222} &= A_{11}^0 \Phi_2^4(x_1) + 2(A_{12}^0 + 2G_{12}^0) \Phi_1^2(x_1) + A_{22}^0 \Phi_2^4(x_1) \\ \mu_{3333} &= A_{33}^0, \quad \mu_{1313} = A_{44}^0 \Phi_1^2(x_1) + A_{55}^0 \Phi_2^2(x_1), \quad \mu_{2323} = A_{44}^0 \Phi_2^2(x_1) + A_{55}^0 \Phi_1^2(x_1) \\ \mu_{1212} &= (A_{11}^0 + A_{22}^0 - 2A_{12}^0 - 2AA_{66}^0) \Phi_1^2(x_1) \Phi_2^2(x_1) + A_{66}^0 (\Phi_1^4(x_1) + \Phi_2^4(x_1)) \\ \mu_{1122} &= (A_{11}^0 + A_{22}^0 - 4A_{66}^0) \Phi_1^2(x_1) \Phi_2^2(x_1) + A_{66}^0 (\Phi_1^4(x_1) + \Phi_2^4(x_1)) \\ \mu_{1112} &= (A_{12}^0 - A_{11}^0 + 2A_{66}^0) \Phi_1^3(x_1) \Phi_2(x_1) + (A_{22}^0 + A_{12}^0 - 2A_{66}^0) \Phi_1(x_1) + \Phi_2^3(x_1) \\ \mu_{1133} &= A_{13}^0 \Phi_1^2(x_1) + A_{23}^0 \Phi_2^2(x_1), \quad \mu_{2233} = A_{23}^0 \Phi_1^2(x_1) + A_{13}^0 \Phi_2^2(x_1) \\ \mu_{2212} &= (A_{12}^0 - A_{11}^0 + 2A_{66}^0) \Phi_1^3(x_1) \Phi_2(x_1) + (A_{22}^0 - A_{12}^0 - 2A_{66}^0) \Phi_1(x_1) + \Phi_2^3(x_1) \\ \mu_{3312} &= (A_{23}^0 - A_{13}^0) \Phi_1(x_1) \Phi_2(x_1), \quad \mu_{1323} = (A_{44}^0 - A_{55}^0) \Phi_1(x_1) \Phi_2(x_1) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Yapılacak işlemleri kolaylaştırmak için aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır.

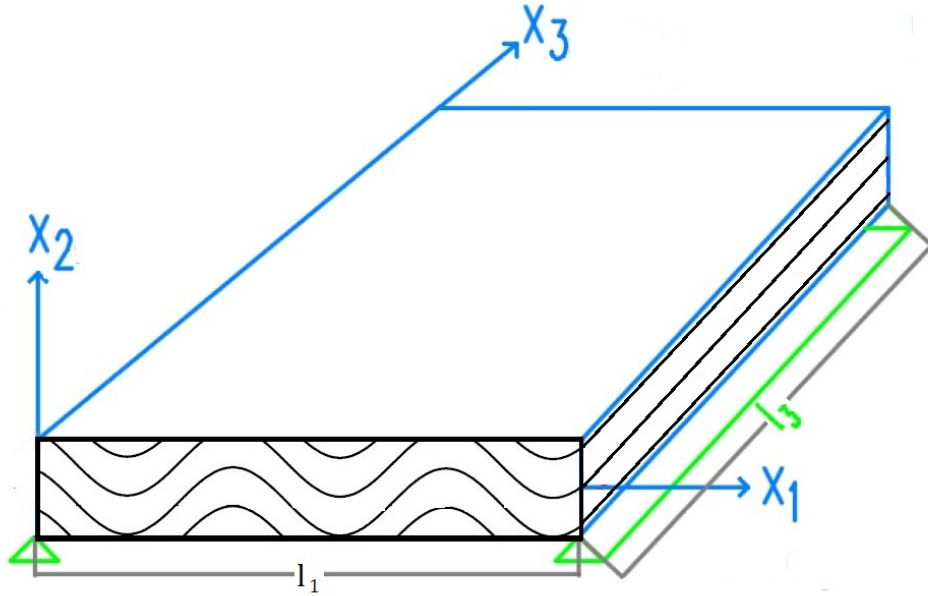
$$\begin{aligned} A_{11}(x_1) &= \mu_{1111}(x_1), \quad A_{22}(x_1) = \mu_{2222}(x_1), \quad A_{33}(x_1) = \mu_{3333}(x_1) \\ A_{44}(x_1) &= \mu_{1313}(x_1), \quad A_{55}(x_1) = \mu_{2323}(x_1), \quad A_{66}(x_1) = \mu_{1212}(x_1) \\ A_{12}(x_1) &= \mu_{1122}(x_1), \quad A_{13}(x_1) = \mu_{1133}(x_1), \quad A_{16}(x_1) = \mu_{1112}(x_1) \\ A_{23}(x_1) &= \mu_{2233}(x_1), \quad A_{26}(x_1) = \mu_{2212}(x_1), \quad A_{36}(x_1) = \mu_{3312}(x_1) \\ A_{45}(x_1) &= \mu_{1323}(x_1) \end{aligned} \quad (2.26)$$

$\Phi_1(x_1)$ ve $\Phi_2(x_1)$ ifadelerinin açık şekli (2.27) denklemleriyle verilmektedir.

$$\begin{aligned}\Phi_1(x_1) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\epsilon \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2}} \\ \Phi_2(x_1) &= \epsilon \frac{\partial f}{\partial x_1} \Phi_1(x_1)\end{aligned}\tag{2.27}$$



3.1 Elastisite Teorisinin 3 Boyutlu Hareket Denklemlerinden Plak Hareket Denklemlerinin Elde Edilmesi



Şekil 3.1 Periyodik eğriliğe sahip iki ucundan basit mesnetli plak

Şekil (3.1)'de görülen eğrisel yapıya sahip kompozit malzemedan hazırlanmış plak,

$$0 \leq x_1 \leq l_1, \quad -h/2 \leq x_2 \leq h/2, \quad 0 \leq x_3 \leq l_3 \quad (3.1)$$

alanını kapsamakta olup, yer değiştirmeleri,

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3, t), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3, t), \quad u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3, t) \quad (3.2)$$

biçimindedir. Hareket denklemleri,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.3)$$

Bünye denklemleri,

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ & & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ & & & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ & & & & A_{55} & A_{56} \\ & & & & & A_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

biçimindedir. Burada,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.5)$$

(3.4) eşitliğinin sağındaki değişken malzeme parametre matrisinin elemanları bölüm 2.3'te (2.24) ve (2.26) eşitliklerinde belirtildiği gibidir. Hatırlanacağı üzere, (2.24) ve (2.26) ifadelerindeki $A_{11}^0, A_{22}^0, A_{33}^0, A_{44}^0, A_{55}^0, A_{66}^0, A_{12}^0, A_{13}^0, A_{23}^0$ terimleri göz önüne alınan plakta hiçbir eğriselliğin olmadığı ideal durumdaki plak malzemesinin normalize edilmiş mekanik özellikleridir.

Plak kenarlarındaki sınır şartları,

$$\begin{aligned} u_2 &= 0 \quad (x_1 = 0, l_1, \quad x_3 = 0, l_3) \\ \sigma_{11} &= 0 \quad (x_1 = 0, l_1) \\ \sigma_{33} &= 0 \quad (x_3 = 0, l_3) \end{aligned} \quad (3.6)$$

olsun. Plagın üst ve alt yüzeylerinde ise

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{23} = 0 \quad (x_2 = \pm h/2) \quad (3.7)$$

koşulları sağlanır. Böylece ele alınan plagın doğal titreşiminin elastisite teorisinin kesin hareket denklemleri çerçevesinde (3.3)-(3.7) ile (2.25)-(2.27) özdeğer problemlerinin çözümüne indirgense de bu çözüm matematiksel olarak çok zor ve birçok halde imkansızdır. Bu nedenle söz konusu özdeğer probleminin incelenmesinde geliştirilmiş plak teorisi kullanılması gereği ortaya çıkmaktadır. Tez kapsamında geliştirilmiş plak teorisi olarak, Kromm Teorisi kullanılmaktadır. Bu teoriye göre (3.2) yer değiştirmelerinin plak kalınlığı boyunca olan koordinata göre değişimi aşağıdaki şekilde verilir. Kromm Teorisi'ne [23, 24] göre plak yer değiştirmeleri,

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = u_i(x_1, 0, x_3, t) - x_2 \frac{\partial w(x_1, x_3, t)}{\partial x_i} + J_i(x_2) \phi_i(x_1, x_3, t)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3, t) = w(x_1, x_3, t) \quad (3.8)$$

$\phi_i(x_1, x_3, t)$ plağın ox_i ($i=1,3$) eksenine dik kesitindeki kayma şekil değiştirmesinin ortalama değerini ifade eden bir fonksiyon olmak üzere,

$$u(x_1, x_3, t) = u_1(x_1, 0, x_3, t)$$

$$w(x_1, x_3, t) = u_2(x_1, 0, x_3, t)$$

$$v(x_1, x_3, t) = u_3(x_1, 0, x_3, t) \quad (3.9)$$

ifadeleri plak orta yüzeyinin yer değiştirmeleri olup, $\phi_i(x_1, x_3, t)$ fonksiyonunun plak kalınlığı boyunca değişimini gösteren, $J_1(x_2)$ ve $J_3(x_2)$ ifadeleri aşağıdaki biçimdedir.

$$J_1(x_2) = J_3(x_2) = J(x_2) = \frac{1}{4} \left(\frac{h^2}{4x_2} - \frac{x_2^3}{3} \right) \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_1} dx_2 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dx_2, \\ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_3} dx_2 &= \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dx_2 \quad (i = 1, 3) \end{aligned} \quad (3.11)$$

(3.11) ifadeleri göz önüne alınarak (3.3) hareket denklemleri $-h/2$ 'den $+h/2$ 'ye kadar x_2 'ye göre integre edilirse,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dx_2 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_2 \\ &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} u_1(x_1, x_2, x_3, t) dx_2 \\ &\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21} dx_2 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_2 \\ &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} u_2(x_1, x_2, x_3, t) dx_2 \\ &\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{31} dx_2 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{33} dx_2 \end{aligned}$$

$$= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} u_3(x_1, x_2, x_3, t) dx_2 \quad (3.12)$$

plağın alt ve üst yüzeyi için (3.7)'de verilen koşullar, (3.12)'de kullanılır ve

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} dx_2 = \sigma_{i2} \Big|_{-h/2}^{h/2} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} V_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dx_2, \quad V_{13} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_2, \quad V_{33} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{33} dx_2 \\ V_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dx_2, \quad V_{23} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

(3.13) ile (3.14) denklemlerindeki işaretlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial V_{13}}{\partial x_3} &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial V_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial V_{23}}{\partial x_3} &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial V_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial V_{33}}{\partial x_3} &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

elde edilir. Buradaki V_{11} , V_{13} , V_{33} , V_{12} , V_{23} ifadeleri plaktaki iç kuvvetlerin ortalama değerleri olup, birinci indis kuvvetin etkidiği yüzeyin normalini, ikinci indis ise kuvvetin yönünü göstermektedir. (3.3) hareket denklemlerinin x_2 ile çarpımları yine $-h/2$ 'den $+h/2$ 'ye kadar x_2 'ye göre integre edilirse,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_2 dx_2 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} x_2 dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} x_2 dx_2 \\ = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} x_2 u_1(x_1, x_2, x_3, t) dx_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21} x_2 dx_2 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} x_2 dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} x_2 dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} x_2 u_2(x_1, x_2, x_3, t) dx_2 \\
&\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{31} x_2 dx_2 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} x_2 dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{33} x_2 dx_2 \\
&= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} x_2 u_3(x_1, x_2, x_3, t) dx_2 \tag{3.16}
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Plak teorisinde genelde yapılan $\sigma_{22} = 0$ (plağın alt ve üst yüzeylerinde gerilmelerin sıfır olması) kabulüyle birlikte (3.12) denklemlerinin ikinci terimlerine kısmi integrasyon uygulanıp plağın alt ve üst yüzeyleri için (3.7)'de verilen koşullar göz önünde tutulursa,

$$\begin{aligned}
\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} x_2 dx_2 &= \sigma_{12} \Big|_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dx_2 \\
\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} x_2 dx_2 &= \sigma_{22} \Big|_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} dx_2 \\
\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} x_2 dx_2 &= \sigma_{32} \Big|_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{32} dx_2 \tag{3.17}
\end{aligned}$$

elde edilir. Momentlerin ortalama değerleri,

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_2 dx_2 \quad ; \quad M_{13} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} x_2 dx_2 \quad ; \quad M_{33} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{33} x_2 dx_2 \tag{3.18}$$

eşitliklerinden hesaplanır. Burada,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{13}}{\partial x_3} - V_{12} &= -2\rho I_1(h) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} + \rho I_2(h) \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \\
\frac{\partial M_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{33}}{\partial x_3} - V_{23} &= -2\rho I_1(h) \frac{\partial^3 w}{\partial x_3 \partial t^2} + \rho I_2(h) \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \tag{3.19}
\end{aligned}$$

biçiminde gösterilirse,

$$I_1(h) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{dJ(x_2)}{dx_2} dx_2 = \frac{h^3}{24} \quad ; \quad I_2(h) = \int_{-h/2}^{h/2} x_2 J(x_2) dx_2 = \frac{h^3}{240} \quad (3.20)$$

Kuvvet ve momentlerle yer değiştirmeler arasındaki bağıntıları elde etmek üzere (3.10) ve (3.8) ifadeleri (3.5)'te yerlerine konulur ve (2.25) ifadesiyle (3.4) 'e gidilir. $\sigma_{22} = 0$ olarak kabul edilir ve (3.14)-(3.20) ifadeleri gerçekleşirse,

$$\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{33} \\ V_{23} \\ V_{13} \\ V_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & 0 & 0 & A_{16} \\ A_{13} & A_{33} & 0 & 0 & A_{36} \\ 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & 0 \\ 0 & 0 & A_{45} & A_{55} & 0 \\ A_{16} & A_{36} & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} hu_{,1} \\ hv_{,3} \\ I_1(h)\phi_3 \\ h(u_{,3} + v_{,1}) \\ I_1(h)\phi_1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$\begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{33} \\ M_{13} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & 0 \\ A_{13} & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -2I_1(h)w_{,11} + I_2(h)\phi_{1,1} \\ -2I_1(h)w_{,33} + I_2(h)\phi_{3,3} \\ -4I_1(h)w_{,13} + I_2(h)(\phi_{1,3} + \phi_{3,1}) \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

elde edilir. (2.26) ifadeleriyle birlikte (3.15) ve (3.19) ifadelerinde yerlerine konursa, yer değiştirmeler cinsinden plak hareket denklemleri,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(hA_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} + hA_{13} \frac{\partial v}{\partial x_3} + I_1(h)A_{16}\phi_1 \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial x_3} \left(I_1(h)A_{45}\phi_3 + hA_{55} \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) \right) = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(I_1(h)A_{45}\phi_3 + hA_{55} \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(hA_{13} \frac{\partial u}{\partial x_1} + hA_{33} \frac{\partial v}{\partial x_3} + I_1(h)A_{36}\phi_1 \right) = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(hA_{16} \frac{\partial u}{\partial x_1} + hA_{36} \frac{\partial v}{\partial x_3} + I_1(h)A_{66}\phi_1 \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(I_1(h)A_{44}\phi_3 + hA_{45} \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) \right) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_1} \left[A_{11} \left(-2I_1(h) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + I_2(h) \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \right) + A_{13} \left(-2I_1(h) \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} + I_2(h) \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} \right) \right) \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[A_{55} \left(-2I_1(h) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_3} + I_2(h) \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \right) \right] \\
& - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(hA_{16} \frac{\partial u}{\partial x_1} + hA_{36} \frac{\partial v}{\partial x_3} + I_1(h)A_{66}\phi_1 \right) = -\rho I_1(h) \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x_1} + \rho I_2(h) \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \\
& \frac{\partial}{\partial x_1} \left[A_{55} \left(-4I_1(h) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_3} + I_2(h) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \right) \right) \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[A_{13} \left(-2I_1(h) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + I_2(h) \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \right) A_{13} \left(-2I_1(h) \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} + I_2(h) \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} \right) \right] \\
& - \left(hA_{45} \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) + I_1(h)A_{44}\phi_3 \right) = -\rho I_1(h) \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x_3} + \rho I_2(h) \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial t^2} \quad (3.24)
\end{aligned}$$

(3.14) – (3.18) işlemleri plağın (3.6)'daki sınır şartlarına da uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
V_{11} &= 0 \quad , \quad M_{11} = 0 \quad , \quad w = 0 \quad (x_1 = 0, l_1) \\
V_{33} &= 0 \quad , \quad M_{33} = 0 \quad , \quad w = 0 \quad (x_3 = 0, l_3) \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Göz önüne alınan plağın doğal titreşiminin zamana bağlı yer değiştirmeleri,

$$\begin{aligned}
u(x_1, x_3, t) &= X_u(x_1, x_3)e^{i\omega t} \\
w(x_1, x_3, t) &= X_w(x_1, x_3)e^{i\omega t} \\
v(x_1, x_3, t) &= X_v(x_1, x_3)e^{i\omega t} \\
\varphi_1(x_1, x_3, t) &= X_{\varphi_1}(x_1, x_3)e^{i\omega t} \\
\varphi_3(x_1, x_3, t) &= X_{\varphi_3}(x_1, x_3)e^{i\omega t} \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Burada, " ω " ele alınan plağın doğal titreşim frekansıdır. (3.26) ifadeleri (3.23) ve

(3.24) hareket denklemlerinde yerlerine konursa,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_1} \left(hA_{11} \frac{\partial X_u}{\partial x_1} + hA_{13} \frac{\partial X_v}{\partial x_3} + I_1(h)A_{16}X_{\phi_1} \right) + \\
& \frac{\partial}{\partial x_3} \left(I_1(h)A_{45}X_{\phi_3} + hA_{55} \left(\frac{\partial X_u}{\partial x_3} + \frac{\partial X_v}{\partial x_1} \right) \right) = -\omega^2 \rho h X_u \\
& \frac{\partial}{\partial x_1} \left(I_1(h)A_{45}X_{\phi_3} + hA_{55} \left(\frac{\partial X_u}{\partial x_3} + \frac{\partial X_v}{\partial x_1} \right) \right) + \\
& \frac{\partial}{\partial x_3} \left(hA_{13} \frac{\partial X_u}{\partial x_1} + hA_{33} \frac{\partial X_v}{\partial x_3} + I_1(h)A_{36}X_{\phi_1} \right) = -\omega^2 \rho h X_v \\
& \frac{\partial}{\partial x_1} \left(hA_{16} \frac{\partial X_u}{\partial x_1} + hA_{36} \frac{\partial X_v}{\partial x_3} + I_1(h)A_{66}X_{\phi_1} \right) + \\
& \frac{\partial}{\partial x_3} \left(I_1(h)A_{44}X_{\phi_3} + hA_{45} \left(\frac{\partial X_u}{\partial x_3} + \frac{\partial X_v}{\partial x_1} \right) \right) = -\omega^2 \rho h X_w \tag{3.27}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[A_{11} \left(-2I_1(h) \frac{\partial^2 X_w}{\partial x_1^2} + I_2(h) \frac{\partial X_{\phi_1}}{\partial x_1} \right) + A_{13} \left(-2I_1(h) \frac{\partial^2 X_w}{\partial x_3^2} + I_2(h) \frac{\partial X_{\phi_3}}{\partial x_3} \right) \right] +$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left[A_{55} \left(-4I_1(h) \frac{\partial^2 X_w}{\partial x_1 \partial x_3} + I_2(h) \left(\frac{\partial X_{\phi_1}}{\partial x_3} + \frac{\partial X_{\phi_3}}{\partial x_1} \right) \right) \right] -$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(hA_{16} \frac{\partial X_u}{\partial x_1} + hA_{36} \frac{\partial X_v}{\partial x_3} + I_1(h)A_{66}X_{\phi_1} \right) = -\omega^2 \rho I_2(h)X_{\phi_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[A_{55} \left(-4I_1(h) \frac{\partial^2 X_w}{\partial x_1 \partial x_3} + I_2(h) \left(\frac{\partial X_{\phi_1}}{\partial x_3} + \frac{\partial X_{\phi_3}}{\partial x_1} \right) \right) \right] +$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left[A_{13} \left(-2I_1(h) \frac{\partial^2 X_w}{\partial x_1^2} + I_2(h) \frac{\partial X_{\phi_1}}{\partial x_1} \right) + A_{33} \left(-2I_1(h) \frac{\partial^2 X_w}{\partial x_3^2} + I_2(h) \frac{\partial X_{\phi_3}}{\partial x_3} \right) \right] -$$

$$\left(hA_{45} \left(\frac{\partial X_u}{\partial x_3} + \frac{\partial X_v}{\partial x_1} \right) + I_1(h)A_{44}X_{\phi_3} \right) = \omega^2 \rho I_1(h) \frac{\partial X_w}{\partial x_3} - \omega^2 \rho I_2(h)X_{\phi_3} \tag{3.28}$$

elde edilir. Ayrıca (3.26) ifadeleri, (3.21) ve (3.22) göz önünde tutularak (3.25) sınır koşullarında yerlerine konursa,

$$\begin{aligned} & \left[A_{11} \left(-2 I_1(h) \frac{\partial^2 X_w}{\partial x_1^2} + I_2(h) \frac{\partial X_{\varphi_1}}{\partial x_3} \right) + A_{13} \left(-2 I_1(h) \frac{\partial^2 X_w}{\partial x_3^2} + I_2(h) \frac{\partial X_{\varphi_1}}{\partial x_1} \right) \right] \Big|_{x_1=0, l_1} = 0 \\ & \left[A_{11} h \frac{\partial X_u}{\partial x_1} + A_{13} h \frac{\partial X_v}{\partial x_3} + A_{13} I_1(h) X_{\varphi_1} \right] \Big|_{x_1=0, l_1} = 0 \\ & \left[A_{13} \left(-2 I_1(h) \frac{\partial^2 X_w}{\partial x_1^2} + I_2(h) \frac{\partial X_{\varphi_1}}{\partial x_1} \right) + A_{33} \left(-2 I_1(h) \frac{\partial^2 X_w}{\partial x_3^2} + I_2(h) \frac{\partial X_{\varphi_1}}{\partial x_3} \right) \right] \Big|_{x_3=0, l_3} = 0 \\ & \left[A_{13} h \frac{\partial X_u}{\partial x_1} + A_{33} h \frac{\partial X_v}{\partial x_3} + A_{36} I_1(h) X_{\varphi_1} \right] \Big|_{x_1=0, l_3} = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

elde edilir. Böylece göz önüne alınan plağın doğal titreşim problemi (3.29) sınır koşulları altında (3.27) ve (3.28) özdeğer problemlerinin çözümüne indirgenmiş olur.

3.2 Üçüncü Mertebeden Geliştirilmiş Plak Teorisi Çerçevesinde Plak Kirişin Titreşim Denklemleri

Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış plak-kiriş,

$$0 \leq x_1 \leq l_1 \quad , \quad -h/2 \leq x_2 \leq h/2 \quad , \quad -\infty \leq x_3 \leq +\infty \quad (3.30)$$

alanını kapsasın. Bu tip plaklarda, plağın x_3 doğrultusundaki boyutu x_1 boyutuna göre çok büyük olmaktadır. Plağa etki eden dış kuvvetler x_3 'ten bağımsız ise plaktaki gerilme ve yerdeğştirmeler ile bunların sağladığı denklemler x_3 'ten bağımsız olmaktadır. Elastisite teorisinden bilindiği üzere, bu gibi durumlar düzlem şekil değıştirme durumları olarak adlandırılırlar. Bu durumda x_3 yönündeki yerdeğştirme sıfır kabul edilerek başka problem büyüklüklerinin x_3 'ten bağımsız olduğu varsayılır. Söylenenleri incelenen probleme uyguladığımızda plak probleminin bir boyutu (x_3 boyutu) düşürülebildiğinden bu tip yapılara şerit plak denmektedir.

Bölüm 3.1'de verilmiş olan (3.4) bünye denklemleri, düzlem şekil değıştirme halinde, yani şerit plak probleminin incelenmesinde aşağıdaki şekli alacaktır.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ & A_{22} & A_{26} \\ & & A_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

(3.31) eşitliğindeki terimler Bölüm 3.1’de bahsedildiği gibidir. Bölüm 3.1’de yapılan işaretlemeler ve işlemler uygulandığında plak-kirişin doğal titreşimindeki yerdeğiştirme genliklerinin sağladığı denklemler,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_1} \left(hA_{11} \frac{dX_u}{dx_1} + I_1(h)A_{16}X_{\varphi 1} \right) &= -\omega^2 \rho hX_u \\ \frac{d}{dx_1} \left(hA_{16} \frac{dX_u}{dx_1} + I_1(h)A_{66}X_{\varphi 1} \right) &= -\omega^2 \rho hX_w \\ \frac{d}{dx_1} \left[A_{11}(-2I_1(h) \frac{d^2X_w}{dx_{\phi 1}^2} + I_2(h) \frac{dX_{\phi 1}}{dx_1}) \right] - \left(hA_{16} \frac{dX_u}{dx_1} + I_1(h)A_{66}X_{\phi 1} \right) \\ &= \omega^2 \rho I_1(h) \frac{dX_w}{dx_1} - \omega^2 \rho I_2(h)X_{\phi 1} \end{aligned} \quad (3.32)$$

biçiminde olacaktır. Denklemlere ait işaretlemeler Bölüm 3.1’de verilmiştir. Yine Bölüm 3.1’de verilmiş sınır şartları yukarıda anlatılanlar çerçevesinde, şerit plak için

$$\left[A_{11}(-2I_1(h) \frac{d^2X_w}{dx_1^2} + I_2(h) \frac{dX_{\phi 1}}{dx_1}) \right]_{x_1=0, l_1} = 0$$

$$\left[A_{11}h \frac{dX_u}{dx_1} + A_{16}I_1(h)X_{\phi 1} \right]_{x_1=0, l_1} = 0$$

$$X_w|_{x_1=0, l_1} = 0 \quad (3.33)$$

şeklinde olmaktadır. Böylelikle göz önüne alınan şerit plağın doğal titreşimi (3.32) ve (3.33) özdeğer problemlerinin çözümüne indirgenmiş olur.

Galerkin metodu, varyasyonel bir yöntem olarak integral ifadenin minimize edilmesine dayanır [60]. Yöntemin uygulanmasını önceki bölümde elde ettiğimiz (3.32) denklemlerini (3.33) sınır koşulları altında inceleyelim. (3.32) denklemleri değişken katsayılı diferansiyel denklemler olduğundan matematiksel olarak incelenmeleri ve kesin analitik çözümlerinin yapılması imkansızlaşır. Yöntemin uygulanabilmesi için aranan fonksiyonların tam fonksiyonlar olarak ifade edilebilmesi ve tam fonksiyonların her birinin istenen sınır koşullarının tam olarak sağlaması gerekmektedir. Galerkin yönteminin söz konusu denklemlere uygulanırken, (3.32) denklemlerinin değişken katsayıları, sabit katsayı + bir fonksiyon varsayımı ile yazılacak ve bu yeni durum için sabit katsayılarla verilen sınır koşulları elde edilecektir. (3.32) ve (3.33) ifadelerinin çözümünde aranan X_w , X_u , X_{ϕ_1} fonksiyonları sabit katsayılı özfonksiyonların serisi şeklinde aranır. Söz konusu tanımı örnek üzerinde gösterirsek ve $A_{11} = A_{11}^0$, $A_{16} = A_{16}^0$, $A_{66} = A_{66}^0$ kabul edilirse X_w , X_u ve X_{ϕ_1} özfonksiyonları elde edilir. $A_{16} = 0$ olduğundan (3.33) sınır koşulları bu özfonksiyonlar için otomatik olarak sağlanmaktadır. Problemin incelenmesi için fonksiyonların (4.1) denkleminde gösterildiği gibi seçilmesi gerekir.

$$\begin{aligned} X_u &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_{u_n}^0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} \\ X_w &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_{w_n}^0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} \\ X_{\phi_1} &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n X_{\phi_{1n}}^0 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} \end{aligned} \quad (4.1)$$

X_w , X_u ve X_{ϕ_1} fonksiyonlarının (3.33) sınır koşullarından 1. ve 3.sünü otomatik olarak sağladığı, (3.33) ifadesinin 2.denkleminin her zaman sağlanmadığı görülmektedir.

$$A_{16}(0) = A_{16}(l_1) = 0 \quad (4.2)$$

Bir özel durum olarak $A_{16}(x_1)$ fonksiyonu (4.2) ifadesindeki eşitliği sağladığında bu koşul da otomatik olarak sağlanmaktadır. Bu durum malzeme yapısındaki eğriselliğin formuna bağlıdır. (4.1) ifadesi (3.33) ifadesinde yerine konur ve $\sin(n\pi x_1/l_1)$ ve $\cos(n\pi x_1/l_1)$ fonksiyonlarının ortogonallığı göz önüne alındığında (4.1) ifadelerinde bilinmeyen B_n , C_n , D_n sabitleri için homojen, lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünün olması için sistemin katsayılar determinantı sıfıra eşit olmalıdır. Katsayılar determinantını sıfıra eşitlenmesinden elde edilen denkleme frekans denklemi denir. Frekans denkleminin çözümü bilgisayar programıyla yapılacak ve şerit plağın doğal titreşim frekansı hesaplanacaktır. (4.1) ifadesi (3.33)'de yerine konulursa,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} B_n h \left[-A_{11}(x_1) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right)^2 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} - \frac{dA_{11}(x_1)}{dx_1} \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} + \rho \omega^2 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} D_n I_1(h) \left[-A_{16}(x_1) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} - \frac{dA_{16}(x_1)}{dx_1} \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] = 0 \\
& \sum_{n=1}^{\infty} B_n h \left[-A_{16}(x_1) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right)^2 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} - \frac{dA_{16}(x_1)}{dx_1} \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[\rho h \omega^2 \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} D_n I_1(h) \left[-A_{66}(x_1) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right)^2 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} - \frac{dA_{66}(x_1)}{dx_1} \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] = 0 \\
& \sum_{n=1}^{\infty} B_n h \left[A_{16}(x_1) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} C_n 2I_1(h) \left[A_{11}(x_1) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right)^3 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} + \frac{dA_{11}(x_1)}{dx_1} \left(\frac{n\pi}{l_1} \right)^2 \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} - \rho \omega^2 \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} D_n I_2(h) \left[-A_{11}(x_1) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right)^2 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} - \frac{dA_{11}(x_1)}{dx_1} \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} - \right. \\
& \left. \frac{I_1(h)}{I_2(h)} A_{66}(x_1) \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} + \rho \omega^2 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Bu ifadede, (4.4) boyutsuzlaştırmaları ve (4.5) işaretlemeleri yapıldığında,

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\rho \omega^2 l_1^2}{A_{22}^0}, \quad x = \frac{x_1}{l_1} \tag{4.4}$$

$$A'_{11}(x) = \frac{A_{11}(x)}{A_{22}^0}, \quad A'_{16}(x) = \frac{A_{16}(x)}{A_{22}^0}, \quad A'_{66}(x) = \frac{A_{66}(x)}{A_{22}^0} \quad (4.5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{1}{l_1} \left[-A'_{11}(x) (n\pi)^2 \cos n\pi x - n\pi \frac{dA'_{11}(x)}{dx} \sin n\pi x + \bar{\omega}^2 \cos n\pi x \right] +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n l_1^2 \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[-n\pi A'_{16}(x) \sin n\pi x + \frac{dA'_{16}(x)}{dx} \cos n\pi x \right] = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{1}{l_1} \left(\frac{h}{l_1} \right) \left[(-n\pi)^2 A'_{16}(x) \cos n\pi x - n\pi \frac{dA'_{16}(x)}{dx} \sin n\pi x \right] +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{1}{l_1} \left(\frac{h}{l_1} \right) [\bar{\omega}^2 \sin n\pi x] +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n l_1^2 \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^3 \left[(-n\pi) A'_{66}(x) \sin n\pi x - n\pi \frac{dA'_{66}(x)}{dx} \cos n\pi x \right] = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{1}{l_1} \left(\frac{h}{l_1} \right) [n\pi A'_{16}(x) \sin n\pi x] +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{1}{12} \left(\frac{h}{l_1} \right)^3 \left[(n\pi)^3 A'_{11}(x) \cos n\pi x + (n\pi)^2 \frac{dA'_{11}(x)}{dx} \sin n\pi x - n\pi \bar{\omega}^2 \cos n\pi x \right] +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n l_1^2 \frac{1}{240} \left(\frac{h}{l_1} \right)^5 \left[-(n\pi)^2 A'_{11}(x) \cos n\pi x - (n\pi) \frac{dA'_{11}(x)}{dx} \sin n\pi x \right.$$

$$\left. -10 \left(\frac{h}{l_1} \right)^{-2} A'_{66}(x) \cos n\pi x + \bar{\omega}^2 \cos n\pi x \right] = 0 \quad (4.6)$$

(4.6)'nın 1 ve 3. ifadeleri $\cos(m\pi x)$ ikinci ifadesi $\sin(m\pi x)$ çarpılıp 0'dan 1'e , x'e göre integrasyonu yapılırsa B_n , C_n , D_n terimleri için (4.7) denklemleri elde edilir.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \frac{1}{l_1} \left[-(n\pi)^2 \int_0^1 (A'_{11}(x) \cos(n\pi x) \cos(m\pi x)) dx - \right.$$

$$n\pi \int_0^1 \left(\frac{dA'_{11}(x)}{dx} \sin(n\pi x) \cos(m\pi x) \right) dx + \bar{\omega}^2 \int_0^1 \cos(n\pi x) \cos(m\pi x) dx +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm} l_1^2 \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[n\pi \int_0^1 (A'_{16}(x) \sin(n\pi x) \cos(m\pi x)) dx + \right.$$

$$\left. \int_0^1 \left(\frac{dA'_{16}(x)}{dx} \cos(n\pi x) \cos(m\pi x) \right) dx = 0 \right.$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \frac{1}{l_1} \left[-(n\pi)^2 \int_0^1 (A'_{16}(x) \cos(n\pi x) \sin(m\pi x)) dx - \right.$$

$$\left. n\pi \int_0^1 \left(\frac{dA'_{16}(x)}{dx} \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) \right) dx + \right.$$

$$\left. \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{nm} \frac{1}{l_1} \left[\bar{\omega}^2 \int_0^1 \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) dx \right] + \right.$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm} l_1^2 \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[n\pi \int_0^1 (A'_{66}(x) \sin(n\pi x) \sin(m\pi x)) dx + \right.$$

$$\left. \int_0^1 \left(\frac{dA'_{66}(x)}{dx} \cos(n\pi x) \sin(m\pi x) \right) dx = 0 \right.$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \frac{1}{l_1} \left[n\pi \int_0^1 (A'_{16}(x) \sin(n\pi x) \cos(m\pi x)) dx \right] +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{nm} \frac{1}{l_1} \frac{1}{12} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[(n\pi)^3 \int_0^1 (A'_{11}(x) \cos(n\pi x) \cos(m\pi x)) dx + \right.$$

$$\left. (n\pi)^2 \int_0^1 (A'_{11}(x) \sin(n\pi x) \cos(m\pi x)) dx - n\pi \bar{\omega}^2 \int_0^1 \cos(n\pi x) \cos(m\pi x) dx + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm} \frac{1}{l_1} \frac{1}{240} \left(\frac{h}{l_1} \right)^4 \left[-(n\pi)^2 \int_0^1 (A'_{11}(x) \cos(n\pi x) \cos(m\pi x)) dx - \right. \\
& -n\pi \int_0^1 (A'_{16}(x) \sin(n\pi x) \cos(m\pi x)) dx - 10 \left(\frac{h}{l_1} \right)^{-2} \int_0^1 (A'_{66}(x) \cos(n\pi x) \cos(m\pi x)) + \\
& \left. \bar{\omega}^2 \int_0^1 \cos(n\pi x) \cos(m\pi x) dx \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
I_{1nm} &= \int_0^1 (A'_{11}(x) \cos(n\pi x) \cos(m\pi x)) dx \\
I_{2nm} &= \int_0^1 \left(\frac{dA'_{11}(x)}{dx} \sin(n\pi x) \cos(m\pi x) \right) dx \\
I_{3nm} &= \int_0^1 (A'_{16}(x) \sin(n\pi x) \cos(m\pi x)) dx \\
I_{4nm} &= \int_0^1 \left(\frac{dA'_{16}(x)}{dx} \cos(n\pi x) \cos(m\pi x) \right) dx \\
I_{5nm} &= \int_0^1 (A'_{16}(x) \cos(n\pi x) \sin(m\pi x)) dx \\
I_{6nm} &= \int_0^1 \left(\frac{dA'_{16}(x)}{dx} \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) \right) dx \\
I_{7nm} &= \int_0^1 (A'_{66}(x) \sin(n\pi x) \sin(m\pi x)) dx \\
I_{8nm} &= \int_0^1 \left(\frac{dA'_{66}(x)}{dx} \cos(n\pi x) \sin(m\pi x) \right) dx
\end{aligned}$$

$$I_{9nm} = \int_0^1 (A'_{66}(x) \cos(n\pi x) \cos(m\pi x)) dx \quad (4.8)$$

(4.8)'de verilen işaretlemeler yapıldığında,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \frac{1}{l_1} \left[-(n\pi)^2 I_{1nm} - n\pi I_{2nm} + \frac{1}{2} \delta_{nm} \bar{\omega}^2 \right] +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm} l_1^2 \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[-n\pi I_{3nm} + I_{4nm} \right] = 0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \frac{1}{l_1} \left[-(n\pi)^2 I_{5nm} - n\pi I_{6nm} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{nm} \frac{1}{l_1} \left[\frac{1}{2} \delta_{nm} \bar{\omega}^2 \right] +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm} l_1^2 \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[-n\pi I_{7nm} + I_{8nm} \right] = 0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \frac{1}{l_1} \left[n\pi I_{3nm} \right] +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{nm} \frac{1}{l_1} \frac{1}{12} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[(n\pi)^3 I_{1nm} + (n\pi)^2 I_{2nm} - n\pi \frac{1}{2} \delta_{nm} \bar{\omega}^2 \right] +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm} l_1^2 \frac{1}{240} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[-(n\pi)^2 I_{1nm} - n\pi I_{2nm} - 10 \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 I_{9nm} + \frac{1}{2} \delta_{nm} \bar{\omega}^2 \right] = 0 \quad (4.9)$$

δ_{nm} kronecker deltası olup aşağıda verildiği biçimdedir.

$$\delta_{nm} = 1 \quad , \quad (n = m)$$

$$\delta_{nm} = 0 \quad , \quad (n \neq m) \quad (4.10)$$

5 Hesap Algoritması

Galerkin Metodunun şerit plağın hareket denklemlerine uygulanmasıyla önceki kısımda elde ettiğimiz (4.9) denklem sisteminin katsayılar determinantını sıfır yapan frekans değerlerini bulmak için Matlab programında bir hesap algoritması oluşturulmuştur. Algoritma içerisinde önce (4.8) denklemleriyle verilmiş olan, n ve m sayıları 1'den ele alınan terim sayısı olan N 'e kadar değişebilmekle beraber, I_{inn} integralleri hesaplanmış ve hesaplanan terimler (4.9) denklemlerinde kullanılmıştır.

Tez kapsamında incelenen şerit plağın x_2 doğrultusunda birbirini tekrarlayan kompozit malzemedan oluştuğu varsayılmış, levhaların izotrop ve homojen oldukları kabul edilmiştir. Malzeme elastisite modülleri E_1 ve E_2 , Poisson oranları η_1 ve η_2 , Lamé sabitleri λ_1, μ_1 ile λ_2, μ_2 , hacim oranları ν_1 ve ν_2 ile gösterilmiş olup hesaplarda $\eta_1=\eta_2=0.25$ ve $\nu_1=\nu_2=0.5$ olarak alınmıştır. $A'_{11}(x)$, $A'_{16}(x)$, $A'_{66}(x)$ malzeme değişkenlerinin (2.25) ile verilen ifadelerindeki normalize edilmiş elastisite sabitleri (5.1) eşitliklerinde görülmektedir.

$$\begin{aligned} A_{11}^0 &= \mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2 + (\mu_1 + \eta_1) \eta_1 + (\mu_2 + \eta_2) \eta_2 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + 2\mu_1) \eta_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2) \eta_1} \\ A_{12}^0 &= \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 - (\lambda_1 - \lambda_2) \eta_1 \eta_2 \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)}{(\lambda_1 + 2\mu_1) \eta_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2) \eta_1} \\ A_{22}^0 &= (\lambda_1 + 2\mu_1) \eta_1 + (\lambda_2 + 2\mu_2) \eta_2 - \eta_1 \eta_2 \frac{[(\lambda_1 + 2\mu_1) - (\lambda_2 + 2\mu_2)]^2}{(\lambda_1 + 2\mu_1) \eta_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2) \eta_1} \\ A_{66}^0 &= \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \eta_2 + \mu_2 \eta_1} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Formüllerin çıkarılma şekli Christensen, 1979'da verilmektedir [20].

(4.9) denklem sistemindeki B_{nm}/l_1 , C_{nm}/l_1 , $D_{nm}l_1^2$ terimlerinin katsayılarından ;

$$[A]_{3N \times 3N} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{1nm} & \bar{C}_{1nm} & \bar{D}_{1nm} \\ \bar{B}_{2nm} & \bar{C}_{2nm} & \bar{D}_{2nm} \\ \bar{B}_{3nm} & \bar{C}_{3nm} & \bar{D}_{3nm} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

3Nx3N boyutlu A matrisinin terimleri (5.3) eşitliğiyle verilmektedir.

$$\bar{B}_{1nm} = \left[-(n\pi)^2 I_{1nm} - (n\pi) I_{2nm} + \frac{1}{2} \delta_{nm} \bar{\omega}^2 \right]$$

$$\bar{B}_{2nm} = \left[-(n\pi)^2 I_{5nm} - (n\pi) I_{6nm} \right] \quad ; \quad \bar{B}_{3nm} = [n\pi I_{3nm}]$$

$$\bar{C}_{1nm} = [0] \quad ; \quad \bar{C}_{2nm} = \left[\frac{1}{2} \delta_{nm} \bar{\omega}^2 \right]$$

$$\bar{C}_{3nm} = \frac{1}{12} \left(\frac{h^2}{l_1} \right) \left[(n\pi)^3 I_{1nm} + (n\pi)^2 I_{2nm} - n\pi \frac{1}{2} \delta_{nm} \bar{\omega}^2 \right]$$

$$\bar{D}_{1nm} = \frac{1}{24} \left(\frac{h^2}{l_1} \right) [-n\pi I_{3nm} + I_{4nm}] \quad ; \quad \bar{D}_{2nm} = \frac{1}{24} \left(\frac{h^2}{l_1} \right) [-n\pi I_{7nm} + I_{8nm}]$$

$$\bar{D}_{3nm} = \frac{1}{240} \left(\frac{h^4}{l_1} \right) \left[-(n\pi)^- I_{1nm} - n\pi I_{2nm} - 10 \frac{h^{-2}}{l_1} I_{9nm} + \frac{1}{2} \delta_{nm} \bar{\omega}^2 \right] \quad (5.3)$$

6 Interval Analiz

Mühendislikte belirsizliğe sebep olan faktörler olarak, model ve modele ait parametreler, çözüm aşamasında hesaplarda oluşabilecek sayısal hatalar ile inşaat ya da imalat esnasında ortaya çıkabilecek kusurlar ve hata payları olarak söylenebilir [61]. Belirsizliklerin değerlendirilmesinde olasılıklar dikkate alınmakta ve ortaya çıkabilecek riskler güvenilirlik analizi yardımıyla belirlenmektedir [62]. Yüksek ölçüde belirsizlik içeren problemlerin çözümünde bu belirsizliklerin azaltılmasına yönelik klasik yaklaşımlardan ötürü de zaman ve maliyet açısından ekonomik olmayan neticeler ortaya çıkabilmektedir [62]. Mühendislikte, planlama ve tasarım süreçleri belirsizlikler içerir. Bu süreçlerde yapılan kabuller, varsayımlar ve verilen kararların hatalı olması, çözümleme sonuçlarının gerçeği yansıtmama ihtimali her zaman vardır. Bu nedenle planlama ve tasarımda bulunan mühendislerin tam ve kesin sonuçlara hiçbir zaman ulaşamayacaklarını göz önünde bulundurmaları gerekmektedir [63]. Yapı sistemlerinde tasarımlar gerçek sonuçların arandığı tanımları içeren denklemler, bilgisayar bazlı programlamalar veya benzeşim modellerine göre yapılır. Bu tasarımlarda matematiksel kolaylık sağlamak için basitleştirmeler yapılır. Dolayısı ile basitleştirmeler, varsayımlar ve kabuller ölçüsünde yapılmış hesaplar gerçeğe yakın sonuçlar verebileceği gibi gerçeği de yansıtmayabilir. Tasarım değişkenlerine örnek olarak malzeme parametreleri, yükler ve boyutlar verilebilir [63].

Yapı elemanlarının hesaplanmış boyutlarında imalat esnasında meydana gelebilecek sapmalar, varsayılan mukavemetin altında bir değere sahip olmalarına neden olacaktır. Bu hesaplarda kullanılmış malzeme özellikleri de tespit edilmiş seviyelerinin altında olabilir [64]. Dolayısı ile uygun bir tasarım sistem eleman geometrilerinin tümünün tolerans sınırlarını kapsayacak şekilde olmalıdır [65].

Tasarımdan daha iyi performans ve yüksek verim alabilmek için belirsizliğin temel nedenlerinden olan tolerans faktörünün sonucu etkileyebilecek tüm faktörler için ele alınması gerekmektedir. Sınırları belirli bir aralığa ait tüm değerler için geçerli toleransı kapsamak belirsizliği tanımlamanın gerçekçi bir yolu olabilir [61]. Belirsiz bir büyüklük ifade edilirken o değere bir aralık tanımlanır. Hesap aşamasının her

adımında o büyüklüğün alabileceği en küçük ve en büyük değerlerin kullanıldığı bu yöntem Interval Analiz denir. Interval (aralık) değerleri belirsizliği sayısal sınırlarla modellemektedir [61].

6.1 Interval Analiz İşlem Operatörleri

Interval sayılar ile işlemler sayısal uygulamalarda klasik matematiksel işlemlerle uyumlu olarak kullanılmaktadır. Belirsizliğin büyüklüğü aralığın genişliği ile ölçülmektedir. Belirsizlik büyüdükçe aralık da doğal olarak genişleyecektir. Aralık değerler kümesi R gerçel sayılar kümesi olmak üzere;

$$x \equiv [a^l, a^u] = \{\tilde{x} \in R \mid a^l \leq \tilde{x} \leq a^u\} \quad (6.1)$$

Aralık değerler, R gerçel sayı kümesinin alt ve üst sınırlarında bir alt kümesini oluşturmaktadır. Eğer bir aralığın alt ve üst sınırları birbirine eşit ise ($a^l = a^u$), böyle aralıklar ince (narrow) aralıklardır ve tek bir gerçel sayıyı ifade eder. Böyle bir aralık değeri şeklinde gösterilir. Matematikte kullanılan; toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlem operatörlerinin tümü aralık değerler analizinde aşağıdaki gibi kullanılmaktadır. $x = [a^l, a^u]$ ve $y = [b^l, b^u]$ iki aralık değeri olmak üzere,

$$[a^l, a^u] + [b^l, b^u] = [a^l + b^l, a^u + b^u] \quad (6.2)$$

$$[a^l, a^u] - [b^l, b^u] = [a^l - b^u, a^u - b^l] \quad (6.3)$$

Çarpma ve bölme için sonuçlar aralık sınırlarının işaretlerine bağlıdır.

$$[a^l, a^u] \times [b^l, b^u] = [\min(a^l b^l, a^l b^u, a^u b^l, a^u b^u), \max(a^l b^l, a^l b^u, a^u b^l, a^u b^u)] \quad (6.4)$$

$$[a^l, a^u] / [b^l, b^u] = [\min(a^l / b^l, a^l / b^u, a^u / b^l, a^u / b^u), \max(a^l / b^l, a^l / b^u, a^u / b^l, a^u / b^u)] \quad (6.5)$$

6.2 Interval Analizin Çalışmaya Uygulanması

Çalışmada, elastisite modülleri oranları (E), malzeme eğriselliğinin büyüklüğünü gösteren parametre (ϵ), belirsizlik içermektedir. Analizlerde yalnızca elastisite modülleri oranlarının (E), belirli bir aralıkta değişeceği dikkate alınarak, sonuçta ortaya çıkacak doğal titreşim frekanslarını (ω^2) nasıl etkileyeceği değerlendirilmiştir. Mekanik olarak davranışı tanımlanabilen bir problemde, probleme etki eden faktörlerin tamamı için interval analiz yaklaşımı kullanılabilir. Analizler, Matlab arayüzünde oluşturulmuş bir bilgisayar programı ile yapılmıştır.

7 Sonuç ve Öneriler

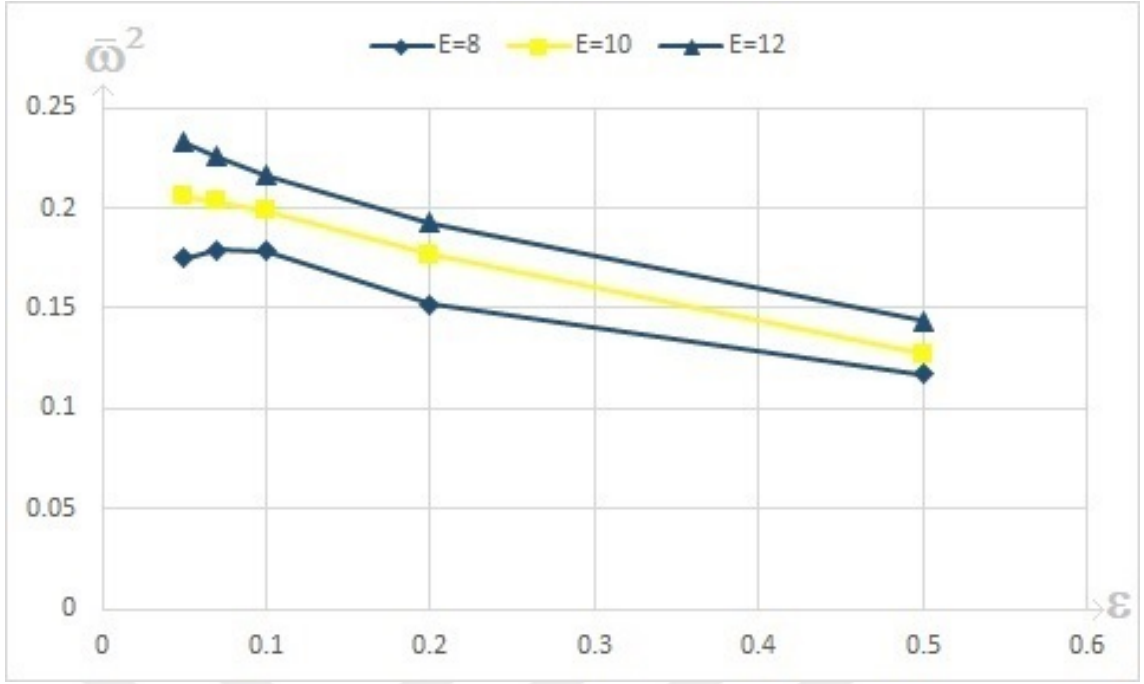
Önceki bölümlerde anlatılanlar doğrultusunda problemin çözümünde kullanılacak denklemlerin elde edilmesi, Galerkin yönteminin denkleme uygulanması, Matlab arayüzünde hesap algoritmasının oluşturulması ve kompozit malzeme bileşenlerine ait belirsizlik içeren elastisite modülü oranlarına ($E = E_2/E_1$), interval değerlerin Matlab üzerinde oluşturulmuş algoritmada uyarlanmasıyla aranan boyutsuz frekans ($\bar{\omega}^2$) değerleri bulunmuş, tablo ve grafiklerle gösterilmişlerdir. Interval analize ait sonuçlar literatürde daha önce yapılmış Kütüğü'e [45] ait çalışmadaki frekans değerleriyle kıyaslanmış ve interval analizin sonuçlara etkisi yorumlanmıştır.

ϵ	E=8	E=10	E=12
0.05	0.1750	0.2059	0.2327
0.07	0.1789	0.2033	0.2256
0.1	0.1786	0.1985	0.2163
0.2	0.1520	0.1768	0.1927
0.5	0.1172	0.1274	0.1439

Tablo 7.1 E=[8,12] aralığı için frekans ($\bar{\omega}^2$) değerleri

Tablo (7.1)'de, elastisite modülü oranları, E=[8,12] interval aralığı için frekans değerleri görülmektedir. Söz konusu tabloda E'nin interval aralıkları yüzde 20 tolerans ile belirlenmiştir. E=10 sütunu için verilmiş değerler Kütüğü [45] tarafından yapılmış çalışmadan alınmış olup, E=8 ve E=12 sütunlarında gösterilen değerler tez kapsamında oluşturulmuş algoritma ile hesaplanmıştır.

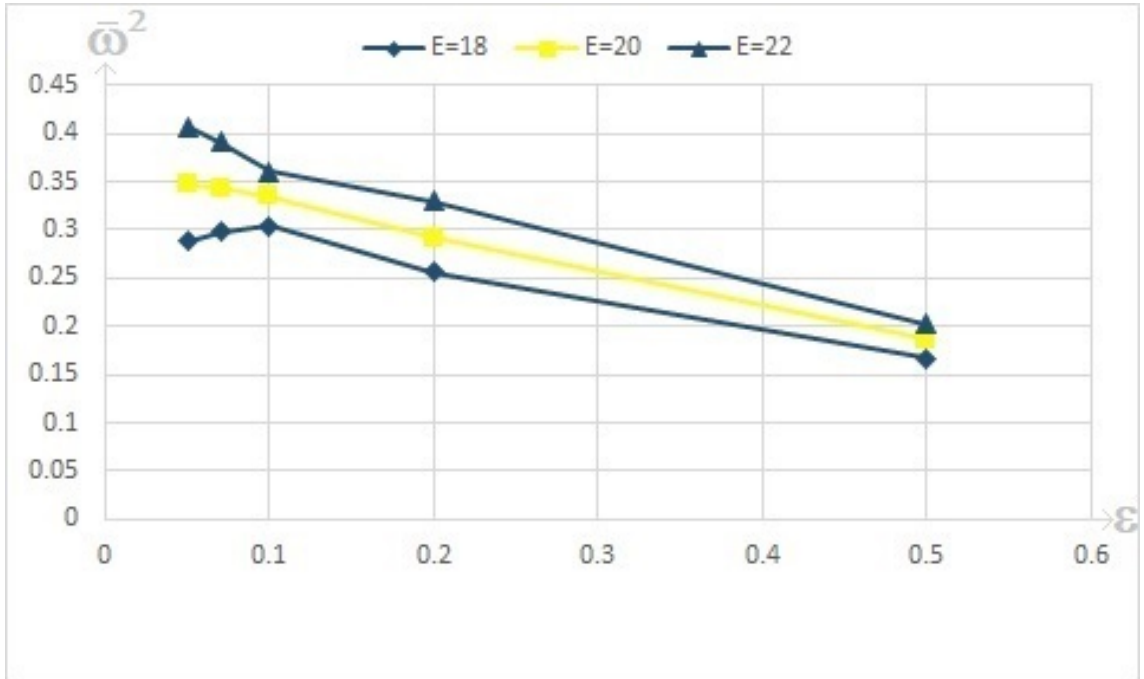
Aşağıda, Şekil (7.1)'de, Tablo (7.1)'e ait sonuçlardan oluşturulmuş frekans değerleri grafiği bulunmaktadır. Bu grafikte koyu renkle gösterilmiş olanlar interval sınır değerlerine ait frekanslar olup, açık renkle gösterilen değerler de literatürden alınmış frekanslardır. Tablodan da grafikten de açıkça görüldüğü gibi literatür sonuçları sınır değerlerden elde edilmiş sonuçların arasında kalmaktadır ve interval analiz aranan frekans değerlerini söz konusu aralıklar için kesin olarak belirtmektedir. ϵ 'un küçük değerleri için frekans değer aralıklarının daha geniş olduğu ve ϵ oranı büyüdükçe bu aralıkların daraldıkları gözlenmektedir.



Şekil 7.1 E=[8,12] aralığı için frekans ($\bar{\omega}^2$) değerleri

ϵ	E=18	E=20	E=22
0.05	0.2882	0.3473	0.4063
0.07	0.2983	0.3430	0.3910
0.1	0.3041	0.3342	0.3609
0.2	0.2567	0.2918	0.3297
0.5	0.1663	0.1869	0.2018

Tablo 7.2 E=[18,22] aralığı için frekans ($\bar{\omega}^2$) değerleri



Şekil 7.2 E=[18,22] aralığı için frekans ($\bar{\omega}^2$) değerleri

Benzer şekilde Tablo (7.2) ve Şekil (7.2)'de $E=[18,22]$ interval aralığı için frekans değerleri görülmektedir. Burada farklı olarak interval aralığında tolerans yüzde 10 olarak alınmıştır. Söz konusu interval aralığında yine önceki tabloda olduğu gibi ϵ 'un küçük değerleri için frekans değer aralıklarının daha geniş olduğu ve ϵ oranı büyüdükçe bu aralıkların daraldıkları gözlenmektedir. Fakat önceki tablo sonuçlarına kıyasla daha düşük tolerans verilmiş olmasına rağmen aynı ϵ değerleri için interval sonuç aralıklarının genişlediği belirlenmiştir.

7.1 Çalışmanın Değerlendirilmesi ve Öneriler

Çalışma kapsamında, yapısında periyodik eğrisellik bulunan kompozit malzemeden yapılmış şerit plağın doğal titreşim frekanslarının formülasyonu yapılmış, bu denklemler belirsizlik içeren elastisite modül oranlarına (E), Matlab arayüzünde hazırlanan algoritmaya interval analiz yönteminin uygulanmasıyla çözülerek interval sınırlara ait frekans ($\bar{\omega}^2$) değerleri elde edilmiş ve literatürde mevcut sonuçlarla kıyaslanarak belirsizliğin doğal titreşim frekanslarına nasıl etki edeceği incelenmiştir. İnterval analizden alınan değerlerle literatür değerleri kıyaslandığında,

- İnterval analize ait frekans sınır değerleri, literatürden elde edilmiş frekans değerlerine yüzde 85 oranında yaklaşıklık göstermiştir. Elastisite modülü (E) oranlarının daha küçük ve ϵ 'un daha büyük değerleri için bu oran ortalama olarak yüzde 90 civarında olmakta ve bazı değerlerde yüzde 90'ın üzerine çıkmaktadır.
- Elde edilen sonuçların yorumlanmasıyla belirsizlik içeren bileşenlerin hangi aralıklarında sınır frekans değerlerinin literatürden elde edilmiş frekans değerlerine daha yakın sonuçlar verdiği tablo ve grafiklerle net olarak ortaya konmuştur.
- Yaygın olarak risk analizlerinde kullanılan ve bu tip bir probleme ilk defa uygulanan interval analiz yönteminin karmaşık mühendislik problemlerinde de kullanılabileceği ve yeterli derecede yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.

- [1] S. Akbarov and A. Guz, "Statics of laminated and fibrous composites with curved structures," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 45, no. 2, pp. 17–34, 1992.
- [2] S. Akbarov, "On the determination of normalized nonlinear mechanical properties of composite materials with periodically curved layers," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 32, no. 21, pp. 3129–3143, 1995.
- [3] V. Bolotin and N. Novichkov Yu, *Mechanics of multilayered structures (moscow: Mashinostroenie)*, 1980.
- [4] Z. Bazhant, "The influence of the curvature of reinforced fibres on the elasticity modulus and strength of composite materials," *Mech. Polimerov*, vol. 2, pp. 314–321, 1968.
- [5] G. A. Vanin, *Micromechanics of composite materials*, 1985.
- [6] J. M. Whitney, "Geometrical effects of filament twist on the modulus and strength of graphite fiber-reinforced composites," *Textile Research Journal*, vol. 36, no. 9, pp. 765–770, 1966.
- [7] E. Mansfield, "Influence of fibre waviness mod& of unidirectional fibre reinforced composites," 1974.
- [8] S. Akbarov and A. Guz', "On a continuum theory in the mechanics of composite materials with small-scale curved structures," *Prikl. Mekh*, vol. 27, pp. 3–13, 1991.
- [9] S. Akbarov and N. Yahnioglu, "Stress distribution in a strip fabricated from a composite material with small-scale curved structure," *International applied mechanics*, vol. 32, no. 9, pp. 684–690, 1996.
- [10] N. Yahnioglu, "Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış yapı elemanlarının statığe uygun sınırdeğer probleminin fem ile incelenmesi," 1996.
- [11] E. Reissner, "On the theory of bending of elastic plates," *Journal of mathematics and physics*, vol. 23, no. 1-4, pp. 184–191, 1944.
- [12] —, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates," *J. appl. Mech.*, A69–A77, 1945.
- [13] —, "On bending of elastic plates," *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 5, no. 1, pp. 55–68, 1947.
- [14] A. Goldenveiser, "Equations of the theory of shells in displacements and stress functions," *Prikladnaia Matematika i Mekhanika*, vol. 21, pp. 801–814, 1957.
- [15] F. Hildebrand, E. Reissner, and G. Thomas, "Notes on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells," 1949.

- [16] L. Librescu, "On the theory of elastic anisotropic shells and plates," *Inzh. Zhurnal*, vol. 4, p. 3, 1964.
- [17] —, "The thermoelastic problem of shells and plates approached by eliminating the lovekirchhoff hypothesis," *Studii si Cercetari de Macanica Aplicata*, vol. 21, pp. 351–365, 1966.
- [18] A. B. Basset, "VI. on the extension and flexure of cylindrical and spherical thin elastic shells," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. (A.)*, no. 181, pp. 433–480, 1890.
- [19] J. N. Reddy, *Energy and variational methods in applied mechanics: with an introduction to the finite element method*. Wiley New York, 1984.
- [20] R. Christensen and K. Lo, "Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 27, no. 4, pp. 315–330, 1979.
- [21] K. Lo, R. Christensen, and E. Wu, "A high-order theory of plate deformation—part 1: Homogeneous plates," *Journal of applied mechanics*, vol. 44, no. 4, pp. 663–668, 1977.
- [22] —, "A high-order theory of plate deformation—part 2: Laminated plates," *Journal of applied mechanics*, vol. 44, no. 4, pp. 669–676, 1977.
- [23] v. A. Kromm, "Verallgemeinerte theorie der plattenstatik," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 21, no. 4, pp. 266–286, 1953.
- [24] A. Kromm, "Über die randquerkräfte bei gestützten platten," *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 35, no. 6-7, pp. 231–242, 1955.
- [25] S. P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of plates and shells*. McGraw-hill, 1959.
- [26] S. Timoshenko, D. Young, and J. Weaver, "W., 1974. vibration problems in engineering," ed: *John Wiley and Sons, New York*,
- [27] S. Ambartsumyan, "Theory of anisotropic plates.[translated from russian by t. cheron]," *Stamford: Technomic*, 1969.
- [28] S. G. Lekhnitskii, "Anisotropic plates," Foreign Technology Div Wright-Patterson Afb Oh, Tech. Rep., 1968.
- [29] D. J. Gorman, *Free vibration analysis of rectangular plates*. Elsevier New York, 1982.
- [30] A. W. Leissa, "Vibration of plates," OHIO STATE UNIV COLUMBUS, Tech. Rep., 1969.
- [31] K. Rohwer, "Application of higher order theories to the bending analysis of layered composite plates," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 29, no. 1, pp. 105–119, 1992.
- [32] M. S. Anderson and D. Kennedy, "Transverse shear deformation in exact buckling and vibration of composite plate assemblies," *AIAA journal*, vol. 31, no. 10, pp. 1963–1965, 1993.

- [33] A. K. Noor and J. M. Peters, "Thermomechanical buckling of multilayered composite plates," *Journal of engineering mechanics*, vol. 118, no. 2, pp. 351–366, 1992.
- [34] A. K. Noor and W. S. Burton, "Three-dimensional solutions for thermal buckling of multilayered anisotropic plates," *Journal of engineering mechanics*, vol. 118, no. 4, pp. 683–701, 1992.
- [35] J. Reddy and N. Phan, "Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory," *Journal of sound and vibration*, vol. 98, no. 2, pp. 157–170, 1985.
- [36] W. S. Anders, C. A. Rogers, and C. Fuller, "Vibration and low frequency acoustic analysis of piecewise-activated adaptive composite panels," *Journal of Composite Materials*, vol. 26, no. 1, pp. 103–120, 1992.
- [37] M. D. Pandey and A. N. Sherbourne, "Stability analysis of inhomogeneous, fibrous composite plates," *International journal of solids and structures*, vol. 30, no. 1, pp. 37–60, 1993.
- [38] S. Yu, W. Cleghorn, and R. Fenton, "Free vibration and buckling of symmetric cross-ply rectangular laminates," *AIAA journal*, vol. 32, no. 11, pp. 2300–2308, 1994.
- [39] S. Abrate, "Vibration of point-supported rectangular composite plates," *Composites science and technology*, vol. 53, no. 3, pp. 325–332, 1995.
- [40] K. Koo and I. Lee, "Vibration and damping analysis of composite laminates using shear deformable finite element," *AIAA journal*, vol. 31, no. 4, pp. 728–735, 1993.
- [41] K. Liew and K. Lam, "Vibrational response of symmetrically laminated trapezoidal composite plates with point constraints," *International journal of solids and structures*, vol. 29, no. 12, pp. 1535–1547, 1992.
- [42] A. Bhimaraddi, "Nonlinear free vibration of laminated composite plates," *Journal of engineering mechanics*, vol. 118, no. 1, pp. 174–189, 1992.
- [43] J. S. Hu and C. Hwu, "Free vibration of delaminated composite sandwich beams," *AIAA journal*, vol. 33, no. 10, pp. 1911–1918, 1995.
- [44] H.-P. Chen, J. J. Tracy, and R. Nonato, "Vibration analysis of delaminated composite laminates in prebuckled states based on a new constrained model," *Journal of composite materials*, vol. 29, no. 2, pp. 229–256, 1995.
- [45] Z. Kütüğü, "Lokal ve periyodik eğrilige sahip kompozit malzemeden hazırlanmış kiriş ve plakların doğal titreşim ve stabilitesi," 1998.
- [46] J. C. Burkill, "Functions of intervals," *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 2, no. 1, pp. 275–310, 1924.
- [47] R. C. Young, "The algebra of many-valued quantities," *Mathematische Annalen*, vol. 104, no. 1, pp. 260–290, 1931.
- [48] T. Sunaga, "Theory of interval algebra and its application to numerical analysis," *RAAG memoirs*, vol. 2, no. 29-46, p. 209, 1958.
- [49] R. E. Moore, *Interval analysis*. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1966, vol. 4.
- [50] —, *Methods and applications of interval analysis*. SIAM, 1979.

- [51] E. Nuding and J. Wilhelm, "Über gleichungen und über lösungen," *ZAMM*, vol. 52, T188–T190, 1972.
- [52] S. S. Rao and L. Berke, "Analysis of uncertain structural systems using interval analysis," *AIAA journal*, vol. 35, no. 4, pp. 727–735, 1997.
- [53] R. L. Muhanna and R. L. Mullen, "Development of interval based methods for fuzziness in continuum-mechanics," in *Proceedings of 3rd International Symposium on Uncertainty Modeling and Analysis and Annual Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society*, IEEE, 1995, pp. 705–710.
- [54] R. L. Mullen and R. L. Muhanna, "Structural analysis with fuzzy-based load uncertainty," in *Probabilistic Mechanics & Structural Reliability*, ASCE, 1996, pp. 310–313.
- [55] R. L. Muhanna and R. L. Mullen, "Formulation of fuzzy finite-element methods for solid mechanics problems," *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, vol. 14, no. 2, pp. 107–117, 1999.
- [56] I. Elishakoff *et al.*, "A comparison of stochastic and interval finite elements applied to shear frames with uncertain stiffness properties," *Computers & structures*, vol. 67, no. 1-3, pp. 91–98, 1998.
- [57] R. L. Muhanna and R. L. Mullen, "Uncertainty in mechanics problems—interval-based approach," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 127, no. 6, pp. 557–566, 2001.
- [58] R. L. Muhanna, H. Zhang, and R. L. Mullen, "Combined axial and bending stiffness in interval finite-element methods," *Journal of Structural Engineering*, vol. 133, no. 12, pp. 1700–1709, 2007.
- [59] M. R. Rao and A. Pownuk, "Design of truss and frame structures with interval and fuzzy parameters," in *NAFIPS 2008-2008 Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society*, IEEE, 2008, pp. 1–6.
- [60] S. Salon and M. Chari, *Numerical methods in electromagnetism*. Elsevier, 1999.
- [61] A. Erdölen, "Yapı sistemlerinde belirsizliklerin aralık (interval) değerlerle tanımlanması," 2010.
- [62] M. L. KOÇ, C. E. BALAS, and A. ARSLAN, "Taş dolgu dalgakıranların yapay sinir ağları ile ön tasarımı," *Teknik Dergi*, vol. 15, no. 74, 2004.
- [63] A. Gündüz, *Mühendislikte olasılık, istatistik, risk ve güvenilirlik*. Küre Basım Yayım San. ve LimitedŞti., 1996.
- [64] H. Deren, E. Uzgider, and F. Piroğlu, *Çelik yapılar, çağlayan kitabevi*, 2003.
- [65] G. Henzold, *Handbook of geometrical tolerancing: design, manufacturing, and inspection*. John Wiley & Sons, 1995.

Tezden Üretilmiş Yayınlar

İletişim Bilgileri: orhansenyener@hotmail.com

Konferans Bildirisi

1. O. Şenyener , Z. Kütüğ and A. Erdölen "Interval Analysis of Natural Frequency of Composite Beam of Which Material Having Periodical Curvings", 2nd International Conference on Mathematical Advances and Applications, 2019