

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KARIŞIK SOFT/HARD YÜZEYLİ ŞERİTTEN
DÜZLEMSEL DALGANIN KIRINIMI

ALAA SERHAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2023

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KARIŞIK SOFT/HARD YÜZEYLİ
ŞERİTTEN DÜZLEMSEL DALGANIN
KIRINIMI

ALAA SERHAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
DOÇ.DR. FERAY HACİVELİOĞLU

GEBZE
2023

T.R.
GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

DIFFRACTION OF PLANE WAVES
BY A STRIP WITH SOFT/HARD FACES

ALAA SERHAN
A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

THESIS SUPERVISOR
ASSOC. PROF. DR. FERAY HACIVELİOĞLU

GEBZE
2023

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 13/07/2023 tarih ve 2023/39 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 07/08/2023 tarihinde tez savunma sınavı yapılan ALAA SERHAN'ın tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI)

: DOÇ. DR. FERAY HACİVELİOĞLU

ÜYE

: DOÇ. DR. HÜLYA ÖZTÜRK

ÜYE

: DOÇ. DR. BURHAN TİRYAKİOĞLU

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...../...../..... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

Bu çalışma, üst yüzeyinin sol tarafına yumuşak (Dirichlet) ve sağ tarafına sert (Neumann) sınır koşulları ve alt yüzeyinin tamamına yumuşak sınır koşulu uygulanan şeritten kırılan ikincil alanları araştırmaktadır. Bu çalışmada şeridin üst yüzeyindeki bağlantı noktasında ikincil kırılan alanları incelemek için Wiener-Hopf yöntemi ile Spektral İterasyon Tekniği kullanılmıştır. Şeridin simetrik olmayan uç ayrıtın, şeridin üst yüzündeki ayrıtta (kavşak) kırılan ikincil alanlar üzerindeki etkisi, MATLAB programı kullanılarak nümerik olarak çözülmüş ve grafikler elde edilmiştir. Problemin parametrelerin kırılan alanlar üzerindeki etkilerini göstermek için bazı grafikler sunulmuştur.

Bu tez TÜBİTAK ARDEB 1002 tarafından desteklenmektedir. , Proje No: 122F238

Anahtar Kelimeler: İkincil Kırılan Alanı, Dirichlet Sınır Koşulu, Neumann Sınır Koşulu, Spektral İterasyon Tekniği (SİT), Wiener-Hopf Yöntemi .

SUMMARY

This study investigates the doubly diffracted fields generated by the strip that has soft and hard boundary conditions on its upper face, and totally soft boundary condition on its lower face. The spectral iteration technique with the Wiener-Hopf method is employed in the study to examine the doubly diffracted fields at the junction on the upper face of the strip. The effect of the non-symmetrical end edges of the strip on the doubly diffracted field at the edge (junction) on the upper face of the strip is presented graphically for the various parameters of the problem. This system is solved numerically using MATLAB program and graphics were obtained. Some graphics are presented to show the effects of the problem parameters on the diffracted field.

This thesis is supported by TUBITAK ARDEB 1002, Research grant: 122F238.

Key Words: Doubly Diffracted Field, Dirichlet Boundary Condition, Neumann Boundary Condition, Spectral Iteration Technique (SIT), Wiener–Hopf Method.

TEŞEKKÜR

Başta, yüksek lisans eğitimimde desteğini ve emeklerini esirgemeyen bilgisi ve deneyimiyle ile bu çalışmanın oluşmasının yolunu açan bana inanıp beni yüreklendiren öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyacağım danışmanım sayın Doç. Dr. Feray HACİVELİOĞLU'ya teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Ayrıca tez jürimde bulunan Doç. Dr. Hülya ÖZTÜRK' a ve Doç. Dr. Burhan TİRYAKİOĞLU' na bana değerli vakitlerini ayırdıkları için teşekkür ederim

Eğitim hayatım boyunca yanımda olan çalışma azim ve gayretlerini her zaman örnek aldığım, dayanacağım kavi dağım, hakiki öğretmenim, babacığım Hayri ALSARHAN'a ve her adımımı hayır duasıyla attığımı bildiğim canım annem Faten ALSARHAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her alanında olduğu gibi lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca da her aşamada göstermiş olduğu desteklerinden dolayı sevgili eşim Mustafa SERHAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, tezimi desteklediği için TÜBİTAK'a da teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
1.GİRİŞ	1
2. PROBLEMİNİN FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜMÜ	3
2.1. Birincil Kırınan Alanlar	6
2.1.1. A Ayırıtından Kırınan Birincil Alan	7
2.1.2. O Ayırıtından Kırınan Birincil Alan	11
2.1.3. B Ayırıtından Kırınan Birincil Alan	11
2.2. İkincil Kırınan Alanlar	14
2.2.1. O Ayırıtından Kırınan İkincil Alan: u_{AO}	14
2.2.2. O Ayırıtından Kırınan İkincil Alan: u_{BO}	20
3. SAYISAL SONUÇLAR	25
4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	29
KAYNAKLAR	30
ÖZGEÇMİŞ	33

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil No:</u>	<u>Sayfa</u>
1: Problemin Geometrisi.	3
2: Kompleks α düzlemi.	5
3: Birincil Kırınan Alanların Geometrilere.	7
4: İki parçalı yarı-düzlem tarafından kırınan ikincil alanlar.	14
5: Dal kesimleri ve integrasyon çizgileri olan karmaşık düzlem.	16
6: L_+ integrasyon eğrisi alttan kapatmak.	17
7: L_- integrasyon eğrisi üstten kapatmak.	21
8: Birincil Kırınan Alanlar ve Açıları (Monostatik durumu) Grafiği.	25
9: İkincil Kırınan Alanlar ve Açıları (Monostatik durumu) Grafiği.	26
10: Birincil Alanlar ve İkincil Alanların Toplam Grafiği.	26
11: l_2 'ye göre Toplam Birincil Kırınan Alan Davranış Grafiği.	27
12: l_2 'ye göre Toplam İkincil Kırınan Alan Davranış Grafiği.	27
13: $l_1 = l_2, \varphi = \varphi_0 = 120^\circ$ iken İkincil Kırınan Alanlar davranış Grafiği.	28

1. GİRİŞ

Kırınım, dalgaların engellerle karşılaştığında yayılması olarak ortaya çıkan bir olaydır. Bu olay, ışık gibi elektromanyetik dalgaların yanı sıra ses gibi mekanik dalgalar için de geçerlidir. Bir dalga, bir engelle veya ayırıla karşılaştığında kırınmaya uğrar. Kırınan dalga, engelin ötesine çeşitli yönlerde yayılır ve bu süreç parlak ve karanlık bölgelerin sıralandığı bir desen oluşturur. Bu oluşuma "kırınan alanı" adı verilir. Günlük yaşamda sıkça karşılaşılan örnekler arasında arka planda duyulan fısıltı gibi seslerin, bir odadaki ısı veya ışık düzeylerinin kırınma sonucu olduğu yer alır. Kırınma sürecini bir kez anladığınızda, oldukça açık bir konsept olduğunu fark edersiniz. Elektromanyetik ve akustik dalgaların düzlemsel yapılardan geçerken gösterdiği kırınma, hem kırınım teorisi hem de mühendislik uygulamaları açısından büyük önem taşır, özellikle birden fazla ayırıt içeren şerit gibi yapılar söz konusu olduğunda. Bu tür yapılarla ilgili çoklu kırınan alanlar da son derece önemlidir. Şerit benzeri yapıların kırınma teorisine ilk klasik katkı Schwarzschild tarafından sunulmuş ve ardından 1956 yılında Karp ve Russek tarafından daha fazla çalışma yapılmıştır. Bu tarihten itibaren, karışık sınırlara sahip nesnelerden saçılma konusunda literatürde birçok çalışma ortaya çıkmıştır.

Mükemmel yarım düzlemleri içeren bazı problemler Senior [14] tarafından ele alınmıştır. Bucci ve Franceschetti [8], yarı-düzlem problemi için tekillikten bağımsız düzgün asimptotikleri geliştirdiler. Büyükaksoy ve Alkumru [20], Wiener-Hopf tekniği aracılığıyla yumuşak sert şeritlerde çoklu kırınım üzerine çalışmışlardır. Rastgele yüzey empedanslarına sahip bir şeritteki kırınım, Veliev [21] tarafından sonsuz lineer denklem sistemi kullanılarak incelenmiştir. İki ayırıtı olan bir şeridi ele alırsak, şeridin alt ve üst yüzeyleri boyunca ilerleyen birinci ayırıttan kırınan dalganın bir kısmı diğer ayırıta ikincil kırınan bir alan oluşturur. Bu çalışmanın odak noktası, üst yüzeyde yarı yumuşak ve yarı sert sınır koşullarına, alt yüzeyde ise tamamen yumuşak sınır koşuluna sahip bir şerit tarafından kırınan birincil alanı hesaplamak ve simetrik olmayan üç ayırıtın, şeridin üst yüzeyinde oluşturulan ikincil kırınan alanlar üzerindeki etkilerini açığa çıkarmaktır. Elektromanye-

tik ve akustik dalgaların çeşitli sınır koşullarına sahip şeritlerden çoklu kırınımını inceleyen makalelerden bazıları [5, 10, 15, 16, 20]'de bulunabilir. Şerit tarafından kırılan alanları bulmak için Spektral İterasyon Tekniği (SİT) Wiener-Hopf yöntemi ile birlikte kullanılmıştır.

2.Bölümde, Wiener-Hopf tekniği uygulanarak sınır değer probleminin neden doğrudan çözülemeyeceği açıklanmış ve şeridin ayrıştırlarında birincil kırınan alanlar verilmiştir.

Ayrıca, şeridin üç ayrıştırları tarafından uyarılan ikincil kırınan alanlar, spektral iterasyon tekniği (SİT) kullanılarak çıkarılmıştır. Bu çalışmada elde edilecek MWH (Matris Wiener-Hopf) denklemi, şeridin her iki yüzeyinin simetrik olup olmaması durumuna bağlı olarak skaler veya matris denklemi şeklinde ifade edilir. Jones [5, böl. 9.12] tarafından gösterildiği gibi, MWH denkleminin çözümü her zaman, çekirdek $\frac{1}{\alpha+\beta}$ ile ifade edilebilen ikinci türden iki ayrı Fredholm integral denkleminin çözümüne indirgenebilir. Jones daha sonra [5, böl. 9.12] farklı türden malzeme şeritlerinin analizine uygulanan bir iteratif yaklaşım sunarak, yaklaşık bir çözüm bulmak için temelde ayrıştırılabilen MWH denklemleriyle sonuçlandırdı [15, 17]. Hurd [7] tarafından tanıtılan Wiener-Hopf Hilbert yöntemi, çalışmamızda çekirdek matrisi $G(\alpha)$ olarak adlandırılan durumda yalnızca dallanma noktası tekilliklerine sahip olduğunda etkilidir. Bu yaklaşımın, Rawlins ve Williams [12] tarafından ifade edilen durumu da içerdiği görülmektedir. Çekirdek matrisinin yalnızca kutuplara veya kutuplara ve dallanma noktası tekilliklerine sahip olduğu genel durumlara uygulanabilen daha genel bir yöntem Khrapkov [6], Daniele [9], Rawlins [11] ve Jones [13] tarafından açıklanmıştır. 3.bölüm, kırınan birincil ve ikincil alanların sayısal hesaplamalarını içerir. Sonuç ve değerlendirme Bölüm 4'te verilmektedir.

2. PROBLEMİNİN FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜMÜ

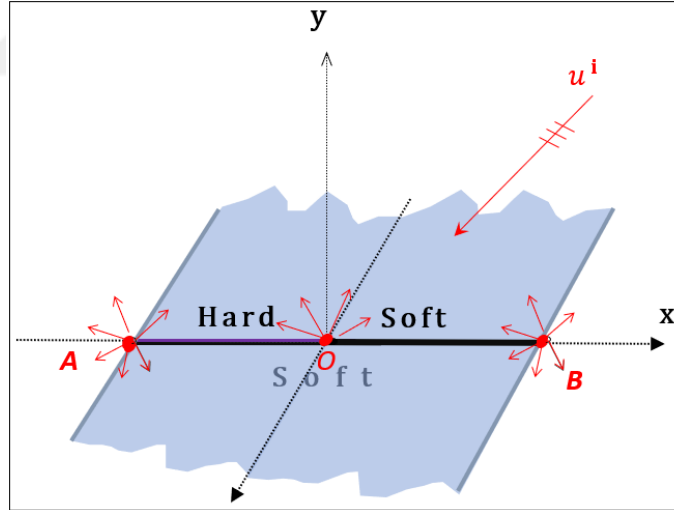
Bu tez çalışmasında, geometrisi Şekil 1’de verilen $S = \{(x, y, z) : x \in (-l_1, l_2), y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$ şeridinden

$$u^i(x, y) = e^{-ik(x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0)} \quad (2.1)$$

düzlemsel dalganın kırınımı incelenmiştir. Burada $\varphi_0 \in (0, \pi)$ geliş açısı ve c dalganın hızı olmak üzere, $k = \frac{\omega}{c}$ dalga sayısıdır. Analitik kolaylık sağlamak amacıyla k ’nın küçük bir sanal bileşene sahip olduğu varsayılmıştır. Dalganın zaman içindeki değişimi ω açısal frekansı ile ifade edilir ve genel olarak $e^{-i\omega t}$ biçimindedir.

S şeridinin $S_1 = (x, y, z) : x \in (-l_1, 0), y = 0^+, z \in (-\infty, \infty)$ yüzeyine Neumann Sınır koşulu (Hard - Sert), $S_2 = (x, y, z) : x \in (0, l_2), y = 0^+, z \in (-\infty, \infty)$ yüzeyine Dirichlet Sınır koşulu (Soft - Yumuşak) ve $S_3 = (x, y, z) : x \in (-l_1, l_2), y = 0^-, z \in (-\infty, \infty)$ alt yüzeyine ise Dirichlet Sınır koşulu uygulanmıştır.

Bu düzenleme, problemin farklı yüzeylerinde farklı sınır davranışlarını yansıtmaktadır.



Şekil 1: Problemin Geometrisi.

Şekil 1’de görülen $A = \{x = -l_1, y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$, $O = \{x = 0, y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$ ve $B = \{x = l_2, y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$ noktaları, S şeridindeki ayrıtları temsil etmektedir. (2.1)’deki gelen dalganın S şeridi ile etkileşimi sonucu oluşan toplam alan aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$u^T(x, y) = u^i(x, y) + u(x, y) \quad (2.2)$$

Burada $u(x, y)$, saçılan dalganın alanını temsil eder ve S yüzeyinin dışında aşağıdaki Helmholtz denklemini sağlar:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) u(x, y) = 0 \quad y \neq 0. \quad (2.3)$$

Şerit yüzeyinde sağlanan sınır koşulları:

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x, 0^+) = ik \sin \varphi_0 e^{-ikx \cos \varphi_0}, \quad -l_1 < x < 0 \quad (2.4a)$$

$$u(x, 0^+) = -e^{-ikx \cos \varphi_0}, \quad 0 < x < l_2 \quad (2.4b)$$

$$u(x, 0^-) = -e^{-ikx \cos \varphi_0}, \quad -l_1 < x < l_2 \quad (2.4c)$$

olup, şeridin dışında sağlanan süreklilik koşulları:

$$u(x, 0^+) = u(x, 0^-), \quad (x < -l_1) \cup (x > l_2) \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x, 0^+) = \frac{\partial}{\partial y} u(x, 0^-), \quad (x < -l_1) \cup (x > l_2) \quad (2.5b)$$

şeklindedir. Burada saçılan alan

$$u(x, y) = \begin{cases} \int_L P(\alpha) e^{iK(\alpha)y - i\alpha x} d\alpha & , y > 0 \\ \int_L Q(\alpha) e^{iK(\alpha)y - i\alpha x} d\alpha & , y < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

şeklinde aranacaktır. Bu ifade, (2.3) denkleminin Fourier dönüşümü uygulanmasıyla elde edilen denklemin genel ifadesidir. Burada $P(\alpha)$ ve $Q(\alpha)$, belirlenmesi gereken spektral katsayılarıdır. (2.4a-c) ve (2.5a-b) koşulları, (2.6) ifadesiyle birlikte kullanıldığında elde edilen modifiye matris Wiener-Hopf denklemi aşağıdaki gibidir:

$$G(\alpha)P(\alpha) = e^{-i\alpha l_1} \Phi^-(\alpha) + e^{i\alpha l_2} \Phi^+(\alpha) + Q(\alpha) + \frac{k \sin \varphi_0}{2\pi i} \frac{1 - e^{-i(\alpha - k \cos \varphi_0)l_1}}{\alpha - k \cos \varphi_0} F \quad (2.7)$$

$$-Im(k) < Im(\alpha) < Im(k)$$

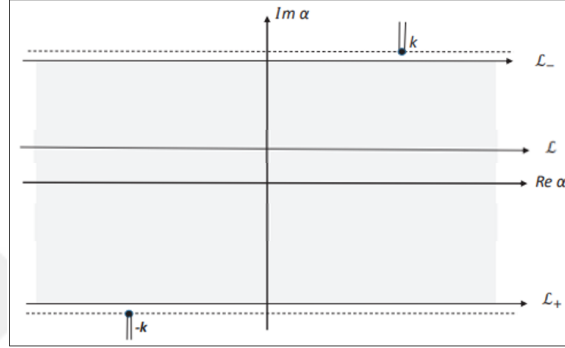
Burada $P(\alpha)$, $Q(\alpha)$ ve $\Phi^\pm(\alpha)$ belirlenmesi gereken (2×1) boyutlu vektörler olup

$$G(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ K(\alpha) & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 \\ -k \sin \varphi_0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

şeklindedir. Buradaki $K(\alpha)$ ifadesi

$$K(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$$

şeklinde bir karekök fonksiyonudur ve bu fonksiyon Şekil 2'deki gibi kesilmiş kompleks α -düzleminde $K(0) = k$ olacak şekilde tanımlıdır.



Şekil 2: Kompleks α Düzlemi.

(2.7) denklemi $-Im(k) < Im(\alpha) < Im(k)$ bandında geçerlidir. $P(\alpha)$ ve $Q(\alpha)$ bu bandın içinde yer alırken, $\Phi^+(\alpha)$ üst yarı-düzlemde ($Im(\alpha) > -Im(k)$ düzleminde) ve $\Phi^-(\alpha)$ alt yarı-düzlemde ($Im(\alpha) < Im(k)$ düzleminde) analitik fonksiyonlardır.

Bu denklemin çözülebilmesi için öncelikle çekirdek matris $G(\alpha)$ 'nın faktörize edilebilmesi (çarpanlara ayrılması) gerekmektedir. Yani,

$$G(\alpha) = G^+(\alpha).G^-(\alpha)$$

şeklinde yazılabilir olmalıdır. $G^\pm(\alpha)$ 'nın üst yarı-düzlemde (alt yarı-düzlemde) tekil olmayan analitik matrisler olmaları gerekmektedir. Ancak bu faktörizasyon işlemi her matris için mümkün değildir (Lawrie ve Abrahams [23]). Bazı özel yapıdaki matrisler için geliştirilmiş Daniele-Khrapkov yöntemi (Khrapkov [6], Daniele [9]) ve Wiener-Hopf-Hilbert yöntemi (Bucci ve Franceschetti [8]) gibi özel faktörizasyon yöntemleri bulunmaktadır. Bu alandaki çalışmalar halen devam etmektedir (Kisil [28]; Rougerie, Kisil [29]; Kisil [30]; Priddin [31]). Eğer bu faktörizasyon işlemi gerçekleştirilebiliyorsa, (2.7) denkleminin her iki yanı $G^+(\alpha)$ matrisinin tersi, $[G^+(\alpha)]^{-1}$ ile çarpılır ve aşağıdaki denklem elde edilir:

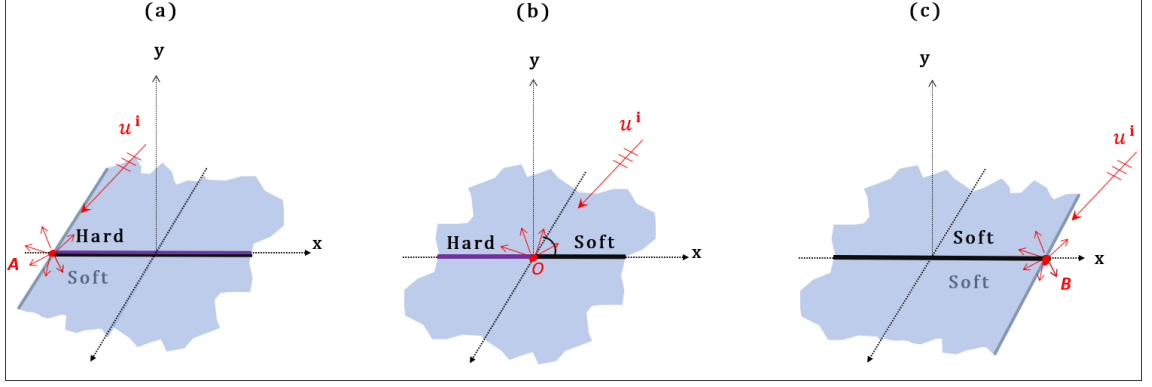
$$G^-(\alpha)P(\alpha) = e^{-i\alpha l_1}[G^+(\alpha)]^{-1}\Phi^-(\alpha) + e^{i\alpha l_2}[G^+(\alpha)]^{-1}\Phi^+(\alpha) + [G^+(\alpha)]^{-1}Q(\alpha) + \frac{k \sin \varphi_0}{2\pi i} \frac{1 - e^{-i(\alpha - k \cos \varphi_0)l_1}}{\alpha - k \cos \varphi_0} [G^+(\alpha)]^{-1}F \quad (2.9)$$

(2.9) denklemi, bir tarafında üst yarı-düzlemde, diğer tarafında ise alt yarı-düzlemde analitik fonksiyonlar olacak şekilde düzenlenir. Analitik devam ilkesi ve Liouville teoremi kullanılarak son durumdaki denklemin her iki yanının neye eşit olduğu belirlenir. Bu sonucu kullanarak saçılan alanın elde edilmesi için bulunması gereken (2.6)'daki spektral katsayılar, (2.9) denklemindeki $P(\alpha)$ kullanılarak bulunur. Ancak $P(\alpha)$ 'nın bulunabilmesi için (2.9)'un sağ tarafındaki ilk terimin ayrıştırılmasından (dekompoze işlemi: söz konusu terimin üst yarı-düzlemde analitik bir fonksiyon ile alt yarı-düzlemde analitik olan bir fonksiyonun toplamı şeklinde yazılması işlemidir.) gelen terimin içinde bilinmeyen $\Phi^-(\alpha)$ olduğu için $P(\alpha)$ 'nın bulunması mümkün olmayacaktır. Bu ayrıştırma işlemi için Cauchy integral formülü kullanılır. Sonuç olarak, hem (2.8)'de verilen çekirdek matris faktörize edilemediği, hem de elde edilen Wiener-Hopf denklemi çözülebilir olmadığı için bu problemin asimptotik çözümünde Wiener-Hopf yöntemi doğrudan kullanılamamaktadır.

Yüksek frekanslarda, birden fazla ayırıt içeren yapılar tarafından kırınan dalga, bir veya daha fazla kez kırınan alanların toplamı olarak ifade edilir. Bu tez çalışmasında, ikincil alanlar elde edilirken Spektral İterasyon Tekniği (SİT) kullanılabilmektedir. SİT, ilk defa 1989'da Büyükaksoy tarafından [16]'da ele alınmış ve şeritler, yarıç gibi birden fazla ayırıt içeren yapılardan kırınan çoklu alanların elde edilmesinde kullanılan asimptotik bir yöntemdir. Bu yaklaşımda, bir ayırıttan kırınan birincil alan, diğer ayırıtta ait yarım düzlem problemine ait gelen alan olarak kabul edilir ve oluşan problem Wiener-Hopf yöntemi ile çözülür. Bu nedenle, tez çalışmasının konusu olan O ayırıtından kırınan ikincil alanları bulabilmek için öncelikle A , O ve B ayırıtlarından kırınan birincil alanların bilinmesi gerekmektedir.

2.1. Birincil Kırınan Alanlar

Bu bölümde A , O ve B ayırıtlarından kırınan birincil alanlar incelenecektir. Bunun için, Keller tarafından ortaya atılan yerellik özelliği kullanılacaktır [4], yani A , O ve B ayırıtlarından kırınan birincil alanlar sanki bu ayırıtlar, sırasıyla Şekil 3'teki geometrilerin ayırıtlarıymış gibi düşünerek elde edilecektir.



Şekil 3: Birincil Kırınan Alanların Geometrilere

2.1.1. 'A' Ayırıtından Kırınan Birincil Alan

Gelen dalganın A ayırıtında kırınması sonucu oluşan birincil kırınan alanı bulmak için, diğer iki ayırıt (O ve B ayırıtları) sonsuza gönderilir. Bu şekilde, üst yüzeyine Neumann sınır koşulu, alt yüzeyine ise Dirichlet sınır koşulu uygulanmış olan Şekil 3a'daki yarım düzlemde saçılma problemi incelenerek A 'dan kırınan birincil alan $u_A(x, y)$ elde edilir. Analiz için toplam alanı:

$$u^T(x, y) = u^i(x, y) + u_A(x, y) \quad (2.10)$$

şeklinde ifade edelim, (2.3) Helmholtz denklemini sağlayan $u_A(x, y)$ alanının integral gösterilimi

$$u_A(x, y) = \begin{cases} \int_L P_A(\alpha) e^{iK(\alpha)y - i\alpha x} d\alpha & , y > 0 \\ \int_L Q_A(\alpha) e^{iK(\alpha)y - i\alpha x} d\alpha & , y < 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki $P_A(\alpha)$ ve $Q_A(\alpha)$ spektral katsayıları (2.12a-d) sınır koşulları ve süreklilik bağıntıları ile belirlenecektir.

$$\frac{\partial}{\partial y} u_A(x, 0^+) = ik \sin \varphi_0 e^{-ikx \cos \varphi_0} , x > -l_1 \quad (2.12a)$$

$$u_A(x, 0^-) = -e^{-ikx \cos \varphi_0} , x > -l_1 \quad (2.12b)$$

$$u_A(x, 0^+) = u_A(x, 0^-) , x < -l_1 \quad (2.12c)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_A(x, 0^+) = \frac{\partial}{\partial y} u_A(x, 0^-) , x < -l_1 \quad (2.12d)$$

Problemin çözümünün tekliğini sağlamak için [22]'den

$$\begin{cases} u_A(x, 0) = e^{-ikl_1 \cos \varphi_0} + O((x + l_1)^{1/4}) & , x \rightarrow -l_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} u_A(x, 0) = O((x + l_1)^{-3/4}) & , x \rightarrow -l_1 \end{cases} \quad (2.13)$$

ayrıt koşulları ve

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = O(r^{-1/2}), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \quad (2.14)$$

radyasyon koşulu da dikkate alınacaktır.

(2.11)'i (2.12a-d)'de kullanılması ile aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$K(\alpha)P_A(\alpha) = e^{-i(\alpha)l_1} \Phi_1^-(\alpha) - \frac{k \sin \varphi_0}{2\pi i} \frac{e^{-i(\alpha - k \cos \varphi_0)l_1}}{\alpha - k \cos \varphi_0} \quad (2.15a)$$

$$Q_A(\alpha) = e^{-i\alpha l_1} \Phi_2^-(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{-i(\alpha - k \cos \varphi_0)l_1}}{\alpha - k \cos \varphi_0} \quad (2.15b)$$

$$P_A(\alpha) - Q_A(\alpha) = -2e^{-i\alpha l_1} \Phi_1^+(\alpha) \quad (2.15c)$$

$$P_A(\alpha) + Q_A(\alpha) = 2 \frac{e^{-i\alpha l_1}}{K(\alpha)} \Phi_2^+(\alpha) \quad (2.15d)$$

Burada $\Phi_{1,2}^+$, $Im(\alpha) > Im(k \cos \varphi_0)$ üst yarı-düzlemde, $\Phi_{1,2}^-$ ise $Im(\alpha) < Im(k)$ alt yarı-düzlemde analitik fonksiyonlar olmak üzere

$$\Phi_1^-(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-l_1} \frac{\partial u_A(x, 0^+)}{\partial y} e^{i\alpha(x+l_1)} dx \quad (2.16a)$$

$$\Phi_2^-(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-l_1} u_A(x, 0^+) e^{i\alpha(x+l_1)} dx \quad (2.16b)$$

$$\Phi_1^+(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l_1}^{\infty} \left[u_A(x, 0^+) - u_A(x, 0^-) \right] e^{i\alpha(x+l_1)} dx \quad (2.16c)$$

$$\Phi_2^+(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l_1}^{\infty} \left[\frac{\partial u_A(x, 0^+)}{\partial y} - \frac{\partial u_A(x, 0^-)}{\partial y} \right] e^{i\alpha(x+l_1)} dx \quad (2.16d)$$

şeklindedir. (2.13)'teki ayrıt koşulları kullanılarak, $|\alpha| \rightarrow \infty$ iken

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1^+(\alpha) &= O(\alpha^{-5/4}), \quad \Phi_2^+(\alpha) = O(\alpha^{-1/4}) \\ \Phi_1^-(\alpha) &= O(\alpha^{-1/4}), \quad \Phi_2^-(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i \alpha} + O(\alpha^{-5/4}) \end{aligned} \right\}. \quad (2.17)$$

olur. $P_A(\alpha)$ ve $Q_A(\alpha)$ 'nın (2.15a-d) denklemlerinde yok edilmesi ile, aşağıdaki matris

Wiener-Hopf denklemi elde edilir:

$$G(\alpha)\Phi^+(\alpha) = \Phi^-(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{ikl_1 \cos \varphi_0}}{\alpha - k \cos \varphi_0} \begin{bmatrix} 1 \\ -k \sin \varphi_0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$Im(k \cos \varphi_0) < Im(\alpha) < Im(k)$$

Bu problemde bahsedilen matris Wiener-Hopf yöntemi SİT kullanılarak çözülecektir.

Burada, $G(\alpha)$ ve $\Phi^\pm(\alpha)$ aşağıdaki gibidir.

$$G(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{K(\alpha)} \\ -K(\alpha) & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19a)$$

$$\Phi^+(\alpha) = \begin{bmatrix} \Phi_1^+(\alpha) \\ \Phi_2^+(\alpha) \end{bmatrix}, \Phi^-(\alpha) = \begin{bmatrix} \Phi_2^-(\alpha) \\ \Phi_1^-(\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.19b)$$

$G(\alpha)$ matris çekirdiği [19]'daki gibi:

$$G^+(\alpha) = 2^{1/4} \begin{bmatrix} \cosh \chi(\alpha) & \frac{\sinh \chi(\alpha)}{\Upsilon(\alpha)} \\ \Upsilon(\alpha) \cdot \sinh \chi(\alpha) & \cosh \chi(\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.20a)$$

$$G^-(\alpha) = G^+(-\alpha) \quad (2.20b)$$

$|\alpha| \rightarrow \infty$ için asimptotik davranışları bu şekildedir:

$$G^\pm(\alpha) \sim (4k)^{-1/4} \begin{bmatrix} (\pm\alpha)^{1/4} & (\pm\alpha)^{-3/4} \\ (\pm\alpha)^{5/4} & (\pm\alpha)^{1/4} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

ve

$$\chi(\alpha) = -\frac{i}{4} \arccos\left(\frac{\alpha}{k}\right), \chi(-\alpha) = -\frac{i}{4} \left\{ \pi - \arccos\left(\frac{\alpha}{k}\right) \right\} \quad (2.22a)$$

$$\Upsilon(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - k^2} \quad (2.22b)$$

olmak üzere $G(\alpha) = G^-(\alpha).G^+(\alpha)$ şeklinde faktörize edilip klasik WH adımları uygulandığında

$$G^+(\alpha)\Phi^+(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{ikl_1 \cos \varphi_0}}{\alpha - \cos \varphi_0} [G^-(k \cos \varphi_0)]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -k \sin \varphi_0 \end{bmatrix} =$$

$$[G^-(\alpha)]^{-1} \Phi^-(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{ikl_1 \cos \varphi_0}}{\alpha - \cos \varphi_0} \left[[G^-(\alpha)]^{-1} - [G^-(k \cos \varphi_0)]^{-1} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ -k \sin \varphi_0 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

elde edilir. Burada, (2.23)'ün sol tarafı üst yarı-düzlem ($Im(\alpha) > Im(k \cos \varphi_0)$)'de analitik iken, sağ tarafı alt yarı-düzlem ($Im(\alpha) < Im(k)$)'de analitiktir. Bu nedenle, analitik devam ilkesine göre (2.23), matris değerli bir tam $P(\alpha)$ fonksiyonunu tanımlar. (2.17) ve (2.21)'i dikkate alınarak Liouville Teoremi kullanılırsa $P(\alpha)$ 'nin $P(\alpha) = p \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ şeklinde sabit matris olduğu sonucuna varılır. Böylece, (2.18) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$G^+(\alpha)\Phi^+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{ikl_1 \cos \varphi_0}}{\alpha - \cos \varphi_0} [G^-(k \cos \varphi_0)]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -k \sin \varphi_0 \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

(2.15a-d) ve (2.24)'ün kullanılması ile spektral katsayılar aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} P_A(\alpha) \\ Q_A(\alpha) \end{bmatrix} = 2^{3/4} \cdot \frac{p}{\Upsilon(\alpha)} \begin{bmatrix} -i \cosh \chi(-\alpha) \\ \sinh \chi(-\alpha) \end{bmatrix} e^{-i\alpha l_1} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha - k \cos \varphi_0} \cdot \begin{bmatrix} -\cos \frac{\varphi_0}{4} \cdot \sinh \chi(-\alpha) + k \sin \varphi_0 \sin \frac{\varphi_0}{4} \cdot \frac{\cosh \chi(-\alpha)}{\Upsilon(\alpha)} \\ -i \cos \frac{\varphi_0}{4} \cdot \cosh \chi(-\alpha) + ik \sin \varphi_0 \sin \frac{\varphi_0}{4} \cdot \frac{\sinh \chi(-\alpha)}{\Upsilon(\alpha)} \end{bmatrix} \cdot e^{-i(\alpha - k \cos \varphi)l_1} \quad (2.25)$$

(2.15a-b)'dan, $P_A(\alpha)$ ve $Q_A(\alpha)$ 'nın, $|\alpha| \rightarrow \infty$ için $O(\alpha^{-5/4})$ olması gerektiği görülür. (2.25)'te $|\alpha| \rightarrow \infty$ için spektral katsayıların asimptotik davranışları incelendiğinde aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{bmatrix} P_A(\alpha) \\ Q_A(\alpha) \end{bmatrix} \sim (8k)^{-1/4} \left[2^{3/4} p + \frac{\sqrt{2}}{\pi i} \cos \frac{\varphi_0}{4} e^{ikl_1 \cos \varphi_0} \right] \begin{bmatrix} \pm i \\ 1 \end{bmatrix} (-\alpha)^{-3/4} - O(\alpha^{-7/4}) \quad (2.26)$$

Bu durumda, kabul edilebilir ayırıt davranışını elde edebilmek için p 'nin aşağıdaki gibi olması gerektiği bulunur:

$$p = \frac{2^{-1/4}}{\pi} i \cos \frac{\varphi_0}{4} e^{ikl_1 \cos \varphi_0} \quad (2.27)$$

(2.27)'nin (2.25)'te kullanılması ile $P_A(\alpha)$ ve $Q_A(\alpha)$ tamamen belirlenmiş olur.

$$\begin{bmatrix} P_A(\alpha) \\ Q_A(\alpha) \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{\cos \frac{\varphi_0}{4}}{\Upsilon(\alpha)} \begin{bmatrix} \cosh \chi(-\alpha) \\ i \sinh \chi(-\alpha) \end{bmatrix} + \frac{1}{\alpha - k \cos \varphi_0} \cdot \begin{bmatrix} -\cos \frac{\varphi_0}{4} \cdot \sinh \chi(-\alpha) + k \sin \varphi_0 \sin \frac{\varphi_0}{4} \cdot \frac{\cosh \chi(-\alpha)}{\Upsilon(\alpha)} \\ -i \cos \frac{\varphi_0}{4} \cdot \cosh \chi(-\alpha) + ik \sin \varphi_0 \sin \frac{\varphi_0}{4} \cdot \frac{\sinh \chi(-\alpha)}{\Upsilon(\alpha)} \end{bmatrix} \right) e^{-i(\alpha - k \cos \varphi)l_1} \quad (2.28)$$

(2.28)'in (2.11)'de kullanıp En dik iniş çizgisi yöntemi uygulanması ile u_A kırınan alanı:

$$u_A(r, \varphi) \sim 4i \cos \frac{\varphi_0}{4} \cos \frac{\varphi}{4} \left[1 - \frac{\cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\varphi_0}{2} - 1}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} \right] \frac{e^{ikr - i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi k r}} e^{ikl_1 \cos \varphi_0} \quad 0 < \varphi < \pi \quad (2.29)$$

$$u_A(r, \varphi) \sim 4i \cos \frac{\varphi_0}{4} \sin \frac{\varphi}{4} \left[1 + \frac{\cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{\varphi_0}{2} + 1}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} \right] \frac{e^{ikr-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi kr}} e^{ikl_1 \cos \varphi_0} \quad \pi < \varphi < 2\pi \quad (2.30)$$

şeklinde elde edilir.

2.1.2. 'O' Ayırıtından Kırınan Birincil Alan

O ayırıtından kırınan birincil alanı bulmak için, şeridin A ayırıtı negatif sonsuza, B ayırıtı ise pozitif sonsuza gönderilir. Bu durumda problem, sol yarısına Neumann sınır koşulu, sağ yarısına ise Dirichlet sınır koşulu uygulanmış iki parçalı düzlemde saçılma problemine dönüşür.

Bu problemin çözümü [26]'de ele alınmış olup alanın asimptotik ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$u_O(r, \varphi) \sim \sqrt{2}(1+i) \frac{\sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2}}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{\pi kr}} \quad (2.31)$$

2.1.3. 'B' Ayırıtından Kırınan Birincil Alan

Gelen dalganın B ayırıtında kırınması sonucu oluşan birincil alanı bulmak için, diğer iki ayırıt (O ve A ayırıtı) eksi sonsuza gönderilir. Böylece, üst yüzeyine ve alt yüzeyine Dirichlet sınır koşulu uygulanmış olan Şekil 3c'deki yarım düzlemde saçılma problemi incelenerek B 'dan kırınan birincil alan $u_B(x, y)$ elde edilir.

(2.3) Helmholtz denklemini sağlayan $u_B(x, y)$ alanının integral gösterilimi aşağıdaki gibi olur:

$$u_B(x, y) = \begin{cases} \int_L P_B(\alpha) e^{iK(\alpha)y-i\alpha x} d\alpha & , y > 0 \\ \int_L Q_B(\alpha) e^{iK(\alpha)y-i\alpha x} d\alpha & , y < 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

$P_B(\alpha)$ ve $Q_B(\alpha)$ spektral katsayıları sınır koşulları ve süreklilik bağıntıları ile belirlenecektir.

$$u_B(x, 0^+) = -e^{-ikx \cos \varphi_0} , x < l_2 \quad (2.33a)$$

$$u_B(x, 0^-) = -e^{-ikx \cos \varphi_0} , x < l_2 \quad (2.33b)$$

$$u_B(x, 0^+) = u_B(x, 0^-) , x > l_2 \quad (2.33c)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_B(x, 0^+) = \frac{\partial}{\partial y} u_B(x, 0^-) , x > l_2 \quad (2.33d)$$

Problemin çözümünün tekliğini sağlamak için

$$\begin{cases} u_B(x, 0) = O(1) & , x \rightarrow -l_2 \\ \frac{\partial}{\partial y} u_B(x, 0) = O((x - l_2)^{-1/2}) & , x \rightarrow -l_2 \end{cases} \quad (2.34)$$

ayrıt koşulları ve

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = O(r^{-1/2}), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \quad (2.35)$$

radasyon koşulu da dikkate alınacaktır. (2.32)'yi (2.33a-d)'de kullanılması ile aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$P_B(\alpha) = Q_B(\alpha) = e^{i\alpha l_2} \Phi^+(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{i(\alpha - k \cos \varphi_0)l_2}}{\alpha - k \cos \varphi_0} \quad (2.36a)$$

$$P_B(\alpha) = \Phi^-(\alpha) \frac{e^{i\alpha l_2}}{K(\alpha)} \quad (2.36b)$$

Burada $\Phi^+(\alpha)$, üst yarı-düzlemde ($Im(\alpha) > -Im(k)$), $\Phi^-(\alpha)$ ise alt yarı-düzlemde ($Im(\alpha) < Im(k \cos \varphi_0)$) analitik fonksiyonlar olmak üzere

$$\Phi^+(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{l_2}^{\infty} u_B(x, 0^+) e^{i\alpha(x-l_2)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{l_2}^{\infty} u_B(x, 0^-) e^{i\alpha(x-l_2)} dx \quad (2.37a)$$

$$\Phi^-(\alpha) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{l_2} \left[\frac{\partial}{\partial y} u_B(x, 0^+) - \frac{\partial}{\partial y} u_B(x, 0^-) \right] e^{i\alpha(x-l_2)} dx \quad (2.37b)$$

şeklindedir. (2.34)'teki ayırıt koşullarını kullanılarak, $|\alpha| \rightarrow \infty$ iken

$$\left. \begin{aligned} \Phi^+(\alpha) &= O(\alpha^{-1}), \\ \Phi^-(\alpha) &= O(\alpha^{-1/2}) \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

olur. $P_B(\alpha)$ 'nın (2.36a-b) denklemlerinden yok edilmesiyle, aşağıdaki Wiener-Hopf denklemini elde edilir:

$$K(\alpha) \Phi^+(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} e^{-ikl_2 \cos \varphi_0} \frac{K(\alpha)}{\alpha - k \cos \varphi_0} = \Phi^-(\alpha) \quad (2.39)$$

$$-Im(k) < Im(\alpha) < Im(k \cos \varphi_0)$$

Bu denklemin çözülebilmesi için öncelikle karekök faktör $K(\alpha)$ 'nın faktörize edilebilmeli, yani $K(\alpha)$ üst yarı-düzlemde ($Im(\alpha) > -Im(k)$) analitik, alt yarı-düzlemde ($Im(\alpha) < Im(k \cos \varphi_0)$) analitik olacak şekilde iki fonksiyonun çarpımı olarak yazılması gerekmektedir:

$$K(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2} = \sqrt{k + \alpha} \cdot \sqrt{k - \alpha} = K^+(\alpha) \cdot K^-(\alpha) \quad (2.40)$$

Bu durumda denklemin her iki yanını $K^-(\alpha)$ 'ya bölünür ve aşağıdaki denklem elde edilir:

$$K^+(\alpha) \Phi^+(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} e^{-ikl_2 \cos \varphi_0} \frac{K^+(\alpha)}{\alpha - k \cos \varphi_0} = \Phi^-(\alpha) \frac{1}{K^-(\alpha)} \quad (2.41)$$

Öncelikle işlemlerde kolaylık sağlaması için

$$H(\alpha) = \frac{K^+(\alpha)}{\alpha - k \cos \varphi_0} \quad (2.42)$$

şeklinde tanımlanır. Bu ifade dekompoze edilerek üst ve alt düzlemlerde regüler olan fonksiyonların toplam şeklinde yazılacaktır. İlk olarak $H(\alpha) = H^+(\alpha) + H^-(\alpha)$ olacak şekilde yazılabilir

ve

$$H_{\pm}(\alpha) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\pm}} \frac{H(\tau)}{\tau - \alpha} d\tau \quad (2.43)$$

elde edilir. Burada $L_{\pm}$ üst ve alt yarı düzlemde yer alan entegre edilme yolunu ifade eder. İfadenin içerisine $H(\tau)$ yerine yerleştirerek

$$H^{\pm}(\alpha) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\pm}} \frac{K^+(\tau)}{(\tau - k \cos \varphi_0)(\tau - \alpha)} d\tau \quad (2.44)$$

elde edilir. $\tau = k \cos \varphi_0$ ve $\tau = \alpha$ noktalarının kutupları göz önünde bulundurulduğunda,

$$H^+(\alpha) = \frac{1}{\alpha - k \cos \varphi_0} [K^+(\alpha) - K^+(k \cos \varphi_0)] \quad (2.45)$$

ve

$$H^-(\alpha) = \frac{1}{\alpha - k \cos \varphi_0} K^+(k \cos \varphi_0) \quad (2.46)$$

bulunur. Ayrıca, $|\alpha| \rightarrow \infty$ için asimptotik davranışları:

$$\left. \begin{aligned} H^+(\alpha) &= O(\alpha^{-1/2}), \\ H^-(\alpha) &= O(\alpha^{-1}) \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

şeklindedir. İde edilen bu regüler fonksiyonlar (2.41)'de yerine yazıldığında,

$$K^+(\alpha)\Phi^+(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} e^{-ikl_2 \cos \varphi_0} H^+(\alpha) = \Phi^-(\alpha) \frac{1}{K^-(\alpha)} + \frac{1}{2\pi i} e^{-ikl_2 \cos \varphi_0} H^-(\alpha) \quad (2.48)$$

elde edilir. Sonrasında (2.38) ve (2.47) denklemleri dikkate alınarak Liouville Teoremi uygulandığında

$$P(\alpha) \cong 0$$

sonucuna varılır. Böylece, (2.48) denkleminin çözümü aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$K^+(\alpha)\Phi^+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} e^{-ikl_2 \cos \varphi_0} \frac{1}{\alpha - k \cos \varphi_0} [K^+(\alpha) - K^+(k \cos \varphi_0)] \quad (2.49)$$

şeklinde yazılabilir. (2.36a-b) ve (2.49)'un kullanılması ile spektral katsayılar aşağıdaki gibi elde edilir:

$$P_B(\alpha) = Q_B(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{K^+(k \cos \varphi_0)}{K^+(\alpha)} \frac{e^{i(\alpha - k \cos \varphi_0) \cdot l_2}}{\alpha - k \cos \varphi_0} \quad (2.50)$$

(2.50)'nin (2.32)'de kullanılması ve En dik iniş çizgisi yöntemi uygulanması ile u_B kırınan alanı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_B(r, \varphi) \sim -\sqrt{2} \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi_0 + \cos \varphi} \frac{e^{i(kr - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{\pi k r}} e^{-ikl_2 \cos \varphi_0} \quad (2.51a)$$

$$0 < \varphi < \pi$$

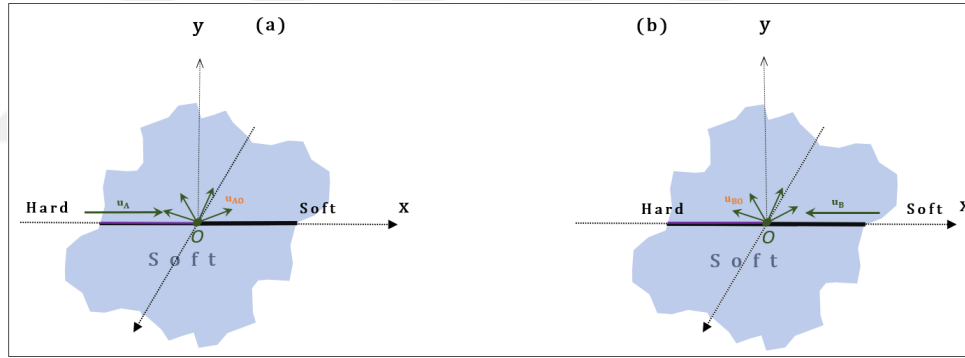
$$u_B(r, \varphi) \sim \sqrt{2} \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi_0 + \cos \varphi} \frac{e^{i(kr - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{\pi k r}} e^{-ikl_2 \cos \varphi_0} \quad (2.51b)$$

$$\pi < \varphi < 2\pi$$

(2.28) ve (2.50)'deki spektral katsayıları, O ayrıtı tarafından ikincil kırınan alanları elde etmekte kullanılacaktır.

2.2. İkincil Kırınan Alanlar

Gelen dalganın A ve B ayrıtılarında kırınması sonucu oluşan birincil alanlar, şeridin üst yüzeyindeki O ayrıtında ikincil kırınmalara neden olur. Şekil 4 görülmektedir.



Şekil 4: İki parçalı yarı-düzlem tarafından kırınan ikincil alanlar.

2.2.1. 'O' Ayrıtından Kırınan İkincil Alan: u_{AO}

Gelen dalganın O ayrıtında kırınması sonucu oluşan ikincil alanı bulmak için, A ayrıtı negatif sonsuza, B ayrıtı pozitif sonsuza gönderilir. Böylece, $x < 0$ üst sol yüzeyine Neumann sınır koşulu, $x > 0$ üst sağ yüzeyine ise Dirichlet sınır koşulu uygulanmış olan Şekil 4'teki iki parçalı yarı düzlemden saçılma problemi incelenerek O ayrıtında kırınan ikincil alan $u_{AO}(x, y)$ elde edilir.

(2.3) Helmholtz denklemini sağlayan $u_{AO}(x, y)$ alanının integral gösterilimi

$$u_{AO}(x, y) = \int_L P_{AO}(\alpha) e^{iK(\alpha)y - i\alpha x} d\alpha, \quad y > 0 \quad (2.52)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki $P_{AO}(\alpha)$ spektral katsayısı (2.53) sınır koşulları ile belirlenecektir:

$$\frac{\partial}{\partial y} u_{AO}(x, 0^+) = 0, x < 0 \quad (2.53a)$$

$$u_A(x, 0^+) + u_{AO}(x, 0^+) = 0, x > 0 \quad (2.53b)$$

Problemin çözümünün tekliğini sağlamak için

$$\frac{\partial}{\partial y} u_{AO}(x, 0) = O(x^{-1/2}), x \rightarrow 0 \quad (2.54a)$$

$$u_{AO}(x, 0) = O(x^{1/2}), x \rightarrow 0 \quad (2.54b)$$

ayrıt koşulları da dikkate alınacaktır.

$u_A(x, 0^+)$ alanının yalnızca $x > 0$ için sınır koşulunda görünmektedir. Bu $u_A(x, 0^+)$ alanının, sonsuza uzanan Dirichlet sınır koşulunu halihazırda sağlamasından kaynaklanmaktadır. (2.11) ve (2.53a-b)'nin (2.52)'de kullanılması ile aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$K(\alpha).P_{AO}(\alpha) = \Psi^+(\alpha) \quad (2.55a)$$

$$P_{AO}(\alpha) = \Psi^-(\alpha) - P_A(\alpha) \quad (2.55b)$$

Burada $\Psi^+(\alpha)$, $Im(\alpha) > Im(-k)$ üst yarı-düzlemde ve $\Psi^-(\alpha)$, $Im(\alpha) < Im(k)$ alt yarı-düzlemde analitik fonksiyonlar olmak üzere

$$\Psi^+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} u_{AO}(x, 0^+) e^{i\alpha x} dx \quad (2.56a)$$

$$\Psi^-(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \left[u_{AO}(x, 0^+) + u_A(x, 0^+) \right] e^{i\alpha x} dx \quad (2.56b)$$

şeklindedir. $|\alpha| \rightarrow \infty$ iken asimptotik davranışları

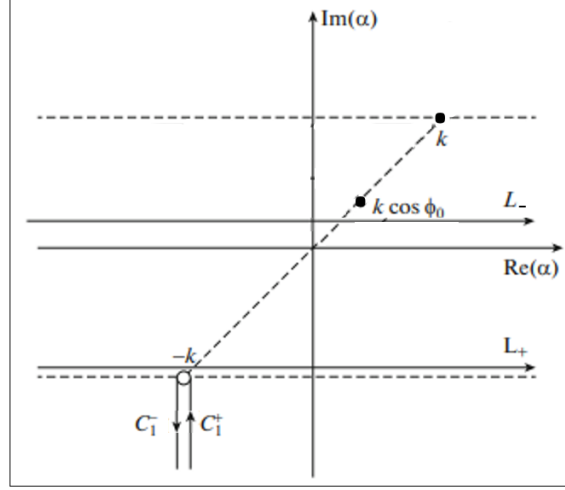
$$\left. \begin{aligned} \Psi^+(\alpha) &= O(\alpha^{-3/2}), \\ \Psi^-(\alpha) &= O(\alpha^{-1}), \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

şeklindedir.

$P_{AO}(\alpha)$ 'yı (2.55a-b) denklemlerinden yok edilmesi ile aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\Psi^-(\alpha) - P_A(\alpha) = \frac{\Psi^+(\alpha)}{K(\alpha)} \quad (2.58)$$

Elde edilen denkleme (2.28)'deki $P_A(\alpha)$ yazılarak Wiener-Hopf denklemi elde edilir:



Şekil 5: Dal kesimleri ve integrasyon çizgileri olan karmaşık düzlem.

$$\begin{aligned} \frac{\Psi^+(\alpha)}{K(\alpha)} = \Psi^-(\alpha) - \sqrt{2} \cos \frac{\varphi_0}{4} e^{ikl_1 \cos \varphi_0} \frac{\cosh \chi(-\alpha)}{K(\alpha)} e^{-i\alpha l_1} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos \frac{\varphi_0}{4} \frac{e^{-i(\alpha - k \cos \varphi_0)l_1}}{\alpha - k \cos \varphi_0} \\ \cdot \sinh \chi(-\alpha) - \frac{\sqrt{2}k}{\pi i} \sin \varphi_0 \sin \frac{\varphi_0}{4} \frac{e^{-i(\alpha - k \cos \varphi_0)l_1}}{\alpha - k \cos \varphi_0} \frac{\cosh \chi(-\alpha)}{K(\alpha)} \quad (2.59) \end{aligned}$$

WH denklemin regülerlik bandı her ne kadar $-Im(k) < Im(\alpha) < Im(k)$ olsa da, bundan sonraki analiz bakımından söz konusu band

$$-Im(k) < Im(\alpha) < Im(k \cos \varphi_0)$$

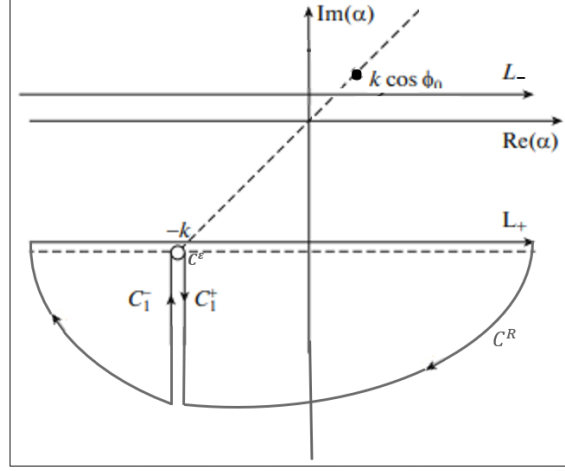
bandına kısıtlanacaktır. (2.40)'taki çarpıma istinaden denklemin her iki yanı $K^-(\alpha)$ ile çarpılır ve aşağıdaki denklemi elde edilir:

$$\frac{\Psi^+(\alpha)}{K^+(\alpha)} = K^-(\alpha) \Psi^-(\alpha) - H(\alpha) \quad (2.60)$$

İşlemlerde kolaylık sağlanması için

$$\begin{aligned} H(\alpha) = \sqrt{2} \cos \frac{\varphi_0}{4} e^{ikl_1 \cos \varphi_0} \frac{\cosh \chi(-\alpha)}{K^+(\alpha)} e^{-i\alpha l_1} \\ - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos \frac{\varphi_0}{4} \frac{e^{-i(\alpha - k \cos \varphi_0)l_1}}{\alpha - k \cos \varphi_0} K^-(\alpha) \sinh \chi(-\alpha) \\ - \frac{\sqrt{2}k}{\pi i} \sin \varphi_0 \sin \frac{\varphi_0}{4} \frac{e^{-i(\alpha - k \cos \varphi_0)l_1}}{\alpha - k \cos \varphi_0} \frac{\cosh \chi(-\alpha)}{K^+(\alpha)} \quad (2.61) \end{aligned}$$

ile tanımlanır.



Şekil 6: L_+ integrasyon eğrisi alttan kapatmak.

$$H_1(\alpha) = \frac{\cosh \chi(-\alpha)}{K^+(\alpha)} e^{-i\alpha l_1} \quad (2.62a)$$

$$H_2(\alpha) = \frac{e^{-i(\alpha - k \cos \varphi_0)l_1}}{\alpha - k \cos \varphi_0} K^-(\alpha) \sinh \chi(-\alpha) \quad (2.62b)$$

$$H_3(\alpha) = \frac{e^{-i(\alpha - k \cos \varphi_0)l_1}}{\alpha - k \cos \varphi_0} \frac{\cosh \chi(-\alpha)}{K^+(\alpha)} \quad (2.62c)$$

Buradaki $H(\alpha)$, terimleri dekompoze edilerek $Im(\alpha) > -Im(k)$ üst yarı-düzlemde ve $Im(\alpha) < Im(k \cos \varphi_0)$ alt yarı-düzlemde regüler olan fonksiyonların toplam şeklinde yazılacaktır. Burada $L_{\pm}$ integral çizgileri Şekil 5'te gösterilmektedir. $H_1(\alpha) = H_1^+(\alpha) + H_1^-(\alpha)$ şeklinde dekompoze edilir. Burada

$$H_1^{\pm}(\alpha) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\pm}} \frac{H_1(\tau)}{\tau - \alpha} d\tau \quad (2.63)$$

şeklindedir.

(2.62a)'da $l_1 > 0$ olduğu için L_+ eğrisi alttan kapatılır ve Cauchy teoremi uyarınca

$$0 = - \int_{L_+} \frac{H_1(\tau)}{\tau - \alpha} d\tau - \int_{C^R} \frac{H_1(\tau)}{\tau - \alpha} d\tau + \int_{C_1^+} \frac{H_1(\tau)}{\tau - \alpha} d\tau - \int_{C^\varepsilon} \frac{H_1(\tau)}{\tau - \alpha} d\tau + \int_{C_1^-} \frac{H_1(\tau)}{\tau - \alpha} d\tau$$

olur. $R \rightarrow \infty$ ve $\varepsilon \rightarrow 0$ için C^R ve C^ε üzerindeki integraller, $l_1 > 0$ olduğu için, Jordan Lemması uyarınca, sıfıra gider. Böylece,

$$\int_{L_+} \frac{H_1(\tau)}{\tau - \alpha} d\tau = \int_{C_1^+} \frac{H_1(\tau)}{\tau - \alpha} d\tau + \int_{C_1^-} \frac{H_1(\tau)}{\tau - \alpha} d\tau \quad (2.64)$$

olur. Yani L_+ üzerindeki integral, kesim çizgisi üzerindeki integrallere indirgenmiş oldu.

$$H_1^+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1^+ + C_1^-} \frac{\cosh \chi(-\tau)}{K^+(\tau)} \frac{e^{-i\tau l_1}}{\tau - \alpha} d\tau \quad (2.65)$$

Kesim çizgisinin her iki tarafında, $C_1^+ \cup C_1^-$ üzerinde yazılmış integral,

$$\kappa + \tau = \begin{cases} te^{-i\frac{\pi}{2}} & , t > 0 \\ te^{i3\frac{\pi}{2}} & , t < 0 \end{cases} , C_1^+ de \quad (2.66)$$

dönüşümleri aracılığı ile, pozitif reel doğru üzerinde yazılmış (2.67) integraline dönüşür.

$$H_1^+(\alpha) = \frac{e^{i(kl_1 + \frac{\pi}{4})}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cosh \chi(it + k)}{\sqrt{t}} \frac{e^{-tl_1}}{it + k + \alpha} dt \quad (2.67)$$

l_1 yeterince büyükse, (2.67)'deki integralin ana katkısı t 'nin yaklaşık olarak sıfır olduğu bölgeden gelir. Bu durumda $\cosh \chi(it + k)$ fonksiyonu, $t = 0$ değeri ile yaklaşık olarak hesaplanabilir ve integralden dışarı çıkarılabilir. Bu şekilde,

$$\int_0^\infty e^{-tl_1} \frac{\sqrt{t}}{t + z} dt = \sqrt{\frac{\pi}{l_1}} [1 - F(il_1 z)] \quad (2.68)$$

modifiye Fresnel integrali olmak üzere,

$$F(z) = 2i\sqrt{z}e^{iz} \int_{\sqrt{z}}^\infty e^{-it^2} dt \quad (2.69)$$

bağıntısından yararlanarak,

$$H_1^+(\alpha) = \frac{e^{i(kl_1 + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{\pi l_1}} \frac{F(kl_1[1 + \frac{\alpha}{k}])}{k + \alpha} \quad (2.70)$$

elde edilir. Benzer şekilde $H_1^-(\alpha)$ integrali hesaplanırken, L_- integrasyon eğrisi alttan kapatılıp Cauchy Teoremi ve Jordan Lemması uygulanarak elde edilir:

$$H_1^-(\alpha) = \frac{\cosh \chi(-\alpha)}{K^+(\alpha)} e^{-i\alpha l_1} - \frac{e^{i(kl_1 + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{\pi l_1}} \frac{F(kl_1[1 + \frac{\alpha}{k}])}{k + \alpha} \quad (2.71)$$

Benzer şekilde, $H_2^+(\alpha)$ ve $H_3^+(\alpha)$ dekompoze edilirse üst yarı-düzlemde analitik olan $H^+(\alpha)$ bu şekilde elde edilir:

$$H^+(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} i \cos \frac{\varphi_0}{4} \frac{F(kl_1[1 + \frac{\alpha}{k}])}{k + \alpha} \frac{e^{ik(1+\cos \varphi_0)l_1}}{\sqrt{\pi l_1}} e^{i\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{2}k}{\pi} i \sin \varphi_0 \sin \frac{\varphi_0}{4} \frac{1}{\alpha - k \cos \varphi_0} \left[\frac{F(kl_1[1 + \frac{\alpha}{k}])}{k + \alpha} - \frac{F(kl_1[1 + \cos \varphi_0])}{k(1 + \cos \varphi_0)} \right] \frac{e^{ik(1+\cos \varphi_0)l_1}}{\sqrt{\pi l_1}} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (2.72)$$

olur. (2.60) denkleme yazılınca WH denklemin çözümü bu şekilde elde edilmiş olur:

$$\frac{\Psi^+(\alpha)}{K^+(\alpha)} + H^+(\alpha) = K^-(\alpha)\Psi^-(\alpha) - H^-(\alpha) \quad (2.73)$$

Analitik devam ilkesine kullanılarak, regüler fonksiyonlar (2.73) denkleminde yerine konur ve (2.73) denklemi tam bir $P(\alpha)$ fonksiyonunu tanımlar, $|\alpha| \rightarrow \infty$ durumunda asimptotik davranışlarını dikkate alınarak Liouville Teoremi uygulandığında, $P(\alpha) \cong 0$ sonucuna varılır ve aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\Psi^+(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\pi i} K^+(\alpha) \left[\cos \frac{\varphi_0}{4} \frac{F(kl_1[1 + \frac{\alpha}{k}])}{k + \alpha} - k \sin \varphi_0 \sin \frac{\varphi_0}{4} \frac{1}{\alpha - k \cos \varphi_0} \right. \\ \left. \left[\frac{F(kl_1[1 + \frac{\alpha}{k}])}{k + \alpha} - \frac{F(kl_1[1 + \cos \varphi_0])}{k(1 + \cos \varphi_0)} \right] \right] \frac{e^{ik(1 + \cos \varphi_0)l_1}}{\sqrt{\pi l_1}} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (2.74)$$

Burada, (2.55a) ve (2.74) denklemleri kullanılarak spektral katsayısı aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$P_{AO}(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\pi i} \frac{1}{K^-(\alpha)} \left[\cos \frac{\varphi_0}{4} \frac{F(kl_1[1 + \frac{\alpha}{k}])}{k + \alpha} - k \sin \varphi_0 \sin \frac{\varphi_0}{4} \frac{1}{\alpha - k \cos \varphi_0} \right. \\ \left. \left[\frac{F(kl_1[1 + \frac{\alpha}{k}])}{k + \alpha} - \frac{F(kl_1[1 + \cos \varphi_0])}{k(1 + \cos \varphi_0)} \right] \right] \frac{e^{ik(1 + \cos \varphi_0)l_1}}{\sqrt{\pi l_1}} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (2.75)$$

Kırınan alanı u_{AO} 'yu bulmak için (2.52) integral ile (2.75)'e aşağıdaki dönüşümü uygulanarak asimptotik olarak değerlendirilecektir:

$$\alpha = -k \cos t, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

ve (2.52)'de L doğrusu boyunca olan integral, Γ doğrusu boyunca olan integrale dönüşür:

$$u_{AO}(r, \varphi) = \int_{\Gamma} P_{AO}(-k \cos t) e^{ikr \cos(\varphi - t)} k \sin t dt \quad (2.76)$$

(2.76)'da elde edilen integrali En dik iniş çizgisi yöntemi kullanılarak değerlendirmek için uygundur.

$$I(k) = \int_C f(t) e^{iq(t)} dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{k|q''(z)|}} f(t_s) e^{iq(t_s) \pm i\frac{\pi}{4}} \quad q''(t_s) \geq 0 \quad (2.77)$$

Dolayısıyla, ikincil kırınan $u_{AO}(r, \varphi)$ alanı asimptotik ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_{AO}(r, \varphi) \sim 2\sqrt{2}ie^{i\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi_0}{4} \left[\frac{2 \cos \frac{\varphi_0}{2} - \cos \varphi_0 - 1}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} \left[\frac{F(kl_1[1 - \cos \varphi])}{1 - \cos \varphi} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{F(kl_1[1 + \cos \varphi_0])}{1 + \cos \varphi_0} \right] - \frac{F(kl_1[1 - \cos \varphi])}{1 - \cos \varphi} \right] \frac{e^{ikl_1(1 + \cos \varphi_0)}}{\sqrt{\pi kl_1}} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{\pi kr}} \quad (2.78)$$

$kl_1 \gg 1$ için Fresnel integralin asimptotik ifadesi kullanılabilir:

$$F(z) \sim 1 + \frac{1}{2iz}, \quad , \quad z \rightarrow \infty \quad (2.79)$$

Bu durumda kırınan alan aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_{AO}(r, \varphi) \sim -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{e^{ikl_1 \cos \varphi_0}}{\sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_0}{2}} \left[\cos \frac{3\varphi_0}{4} + \frac{1}{4ikl_1} \left[\frac{\cos \frac{3\varphi_0}{4}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi_0}{4}}{\cos^2 \frac{\varphi_0}{2}} \right] \right] \frac{e^{ikl_1}}{\sqrt{kl_1}} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \quad (2.80)$$

2.2.2. 'O' Ayırıtından Kırınan İkincil Alan: u_{BO}

B ayırıtında kırınan dalganın O ayırıtında meydana getirdiği ikincil kırınan alanı bulmak için, A ayırıtı negatif sonsuza, B ayırıtı pozitif sonsuza gönderilir. Böylece, $x < 0$ üst sol yüzeyine Neumann sınır koşulu, $x > 0$ üst sağ yüzeyine ise Dirichlet sınır koşulu uygulanmış olan Şekil 4'teki iki parçalı yarım düzlemden saçılma problemi incelenerek O ayırıtında kırınan ikincil alan $u_{BO}(x, y)$ elde edilir.

(2.3) Helmholtz denklemini sağlayan $u_{BO}(x, y)$ alanının integral gösterilimi:

$$u_{BO}(x, y) = \int_L P_{BO}(\alpha) e^{iK(\alpha)y - i\alpha x} d\alpha, \quad y > 0 \quad (2.81)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki $P_{BO}(\alpha)$ spektral katsayısı (2.82) sınır koşulları ile belirlenecektir:

$$u_{BO}(x, 0^+) = 0, \quad x > 0 \quad (2.82a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_{BO}(x, 0^+) + \frac{\partial}{\partial y} u_B(x, 0^+) = 0, \quad x < 0 \quad (2.82b)$$

Problemin çözümün tekliğini sağlamak için

$$\frac{\partial}{\partial y} u_{BO}(x, 0) = O(x^{-1/2}), \quad x \rightarrow 0 \quad (2.83a)$$

$$u_{BO}(x, 0) = O(x^{1/2}), \quad x \rightarrow 0 \quad (2.83b)$$

ayrıt koşulları da dikkate alınacaktır. (2.32) ve (2.82a-b)'nin (2.81)'de kullanılması ile aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\Psi^+(\alpha) = K(\alpha) \cdot P_{BO}(\alpha) + K(\alpha) \cdot P_B(\alpha) \quad (2.84a)$$

$$\Psi^-(\alpha) = P_{BO}(\alpha) \quad (2.84b)$$

Burada $\Psi^+(\alpha)$, $Im(\alpha) > Im(-k)$ üst yarı-düzlemde ve $\Psi^-(\alpha)$, $Im(\alpha) < Im(k)$ alt yarı-düzlemde analitik fonksiyonlar olmak üzere

$$\Psi^+(\alpha) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} (u_{BO}(x, 0^+) + u_B(x, 0^+)) e^{i\alpha x} dx \quad (2.85a)$$

$$\Psi^-(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 u_{BO}(x, 0^-) e^{i\alpha x} dx \quad (2.85b)$$

şeklindedir. $|\alpha| \rightarrow \infty$ iken asimptotik davranışları bu şekildedir:

$$\left. \begin{aligned} \Psi^+(\alpha) &= O(\alpha^{-1}), \\ \Psi^-(\alpha) &= O(\alpha^{-3/2}), \end{aligned} \right\} \quad (2.86)$$

$P_{BO}(\alpha)$ 'yı (2.84a-b) denklemlerinden yok edilmesi ile aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{\Psi^+(\alpha)}{K(\alpha)} = \Psi^-(\alpha) + P_B(\alpha) \quad (2.87)$$

Elde edilen denkleme (2.50)'deki $P_B(\alpha)$ yazılarak Wiener-Hopf denklemi elde edilir:

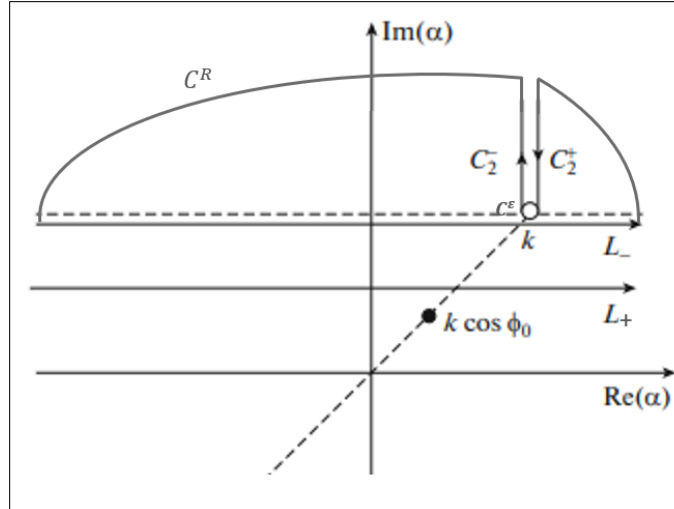
$$\frac{\Psi^+(\alpha)}{K(\alpha)} = \Psi^-(\alpha) + \frac{K^+(k \cos \varphi_0)}{2\pi i} \cdot e^{-ikl_1 \cos \varphi_0} \cdot \frac{1}{K(\alpha)} \cdot \frac{e^{i\alpha l_2}}{\alpha - k \cos \varphi_0} \quad (2.88)$$

WH denklemin regülerlik bandı her ne kadar $-Im(k) < Im(\alpha) < Im(k)$ olsa da, bundan sonraki analiz bakımından söz konusu band

$$Im(k \cos \varphi_0) < Im(\alpha) < Im(k)$$

bandına kısıtlanacaktır. (2.40)'taki karekök faktör eşitliğine göre (2.88) denklemin her iki yanını $K^-(\alpha)$ ile çarpılır ve aşağıdaki denklemi elde edilir:

$$\frac{\Psi^+(\alpha)}{K^+(\alpha)} = K^-(\alpha)\Psi^-(\alpha) + \frac{K^+(k \cos \varphi_0)}{2\pi i} \cdot e^{-ikl_1 \cos \varphi_0} \cdot \frac{K^-(\alpha)}{K^+(\alpha)} \cdot \frac{e^{i\alpha l_2}}{\alpha - k \cos \varphi_0} \quad (2.89)$$



Şekil 7: L_- integrasyon eğrisi üstten kapatmak.

İşlemlerde kolaylık sağlaması için

$$F(\alpha) = \frac{K^-(\alpha)}{K^+(\alpha)} \cdot \frac{e^{i\alpha l_2}}{\alpha - k \cos \varphi_0}$$

ile tanımlanır. Buradaki $F(\alpha)$ 'yı dekompoze edilerek $Im(\alpha) > Im(k \cos \varphi_0)$ üst yarı-düzlemde ve $Im(\alpha) < Im(k)$ alt yarı-düzlemde regüler olan fonksiyonların toplam şeklinde yazılacaktır. Ayrıca, bu dekompozisyonu yaparken $L_{\pm}$ integral çizgilerini kullanılacaktır, Şekil 7'de gösterilmektedir.

$F(\alpha) = F^+(\alpha) + F^-(\alpha)$ şeklinde dekompoze edilir. Burada

$$F^{\pm}(\alpha) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\pm}} \frac{F(\tau)}{\tau - \alpha} d\tau \quad (2.90)$$

şeklindedir. Burada, $F(\alpha)$ fonksiyonu için $l_2 < 0$ olduğu göz önüne alındığında, integrali inceleyerek, L_- eğrisinin üstten kapandığını ve Cauchy teoremi ile Jordan lemmasına göre aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\int_{L_-} \frac{F(\tau)}{\tau - \alpha} d\tau = - \int_{C_2^+} \frac{F(\tau)}{\tau - \alpha} d\tau - \int_{C_2^-} \frac{F(\tau)}{\tau - \alpha} d\tau$$

olur. Yani L_- üzerindeki integral, kesim çizgisi üzerindeki integrallere indirgenmiş oldu. Böylece,

$$F^-(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^+ + C_2^-} \frac{K^-(\tau)}{K^+(\tau)} \cdot \frac{1}{\tau - k \cos \varphi_0} \frac{e^{i\tau l_2}}{\tau - \alpha} d\tau \quad (2.91)$$

olur. Kesim çizgisinin her iki tarafında, $C_2^+ \cup C_2^-$ üzerinde yazılmış integral,

$$\kappa - \tau = \begin{cases} te^{i\frac{3\pi}{2}} & , t > 0 \\ te^{-i\frac{\pi}{2}} & , t < 0 \end{cases} \quad , C_2^+ \text{ de} \quad (2.92)$$

dönüşümler aracılığı ile, pozitif reel doğru üzerinde yazılmış

$$F^-(\alpha) = \frac{1}{\pi i} \frac{e^{i(kl_2 - \frac{\pi}{4})}}{\alpha - k \cos \varphi_0} \cdot \int_0^{\infty} \frac{K^-(k + it)}{K^+(k + it)} \left[\frac{1}{t - i(k - \alpha)} - \frac{1}{t - ik(1 - \cos \varphi_0)} \right] e^{-itl_2} dt \quad (2.93)$$

integraline dönüşür. l_2 yeterince büyük değerleri için, (2.93)'teki integrale ana katkı $t = 0$ civarından gelir. Bu durumda $K^-(k + it)$ fonksiyonu, $t = 0$ 'daki değerleri konularak integral dışına çıkartılabilir.

$$F^-(\alpha) = \frac{1}{\pi i} \frac{e^{i(kl_2 - \frac{\pi}{4})}}{\alpha - k \cos \varphi_0} \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_0^{\infty} \left[\frac{\sqrt{t}}{t - i(k - \alpha)} - \frac{\sqrt{t}}{t - ik(1 - \cos \varphi_0)} \right] e^{-itl_2} dt \quad (2.94)$$

elde edilir. Böylece, (2.68) ile (2.69)'deki Fresnel integrali ve bağıntısından yararlanarak

$$F^-(\alpha) = \frac{e^{i(kl_2 - \frac{3\pi}{4})}}{\alpha - k \cos \varphi_0} \frac{1}{\sqrt{2k\pi l_2}} \left[F[kl_2(1 - \cos \varphi_0)] - F[l_2(k - \alpha)] \right] \quad (2.95)$$

elde edilir. Benzer şekilde $F^+(\alpha)$ integraline bakılırsa L_+ integrasyon eğrisi üstten kapatılıp Cauchy Teoremi ve Jordan Lemması uygulanarak elde edilir:

$$F^+(\alpha) = \frac{K^-(\alpha)}{K^+(\alpha)} \cdot \frac{e^{i\alpha l_2}}{\alpha - k \cos \varphi_0} - \frac{e^{i(kl_2 - \frac{3\pi}{4})}}{\alpha - k \cos \varphi_0} \frac{1}{\sqrt{2k\pi l_2}} \left[F[kl_2(1 - \cos \varphi_0)] - F[l_2(k - \alpha)] \right] \quad (2.96)$$

olur. $|\alpha| \rightarrow \infty$ iken asimptotik davranışları

$$\left. \begin{aligned} F^+(\alpha) &= O(\alpha^{-3/2}) \\ F^-(\alpha) &= O(\alpha^{-1}) \end{aligned} \right\}. \quad (2.97)$$

olur. $F^\pm$ 'yi (2.89) denkleme yazılınca:

$$\frac{\Psi^+(\alpha)}{K^+(\alpha)} - \frac{K^+(k \cos \varphi_0)}{2\pi i} \cdot e^{-ikl_2 \cos \varphi_0} \cdot F^+(\alpha) = K^-(\alpha) \Psi^-(\alpha) + \frac{K^+(k \cos \varphi_0)}{2\pi i} \cdot e^{-ikl_2 \cos \varphi_0} \cdot F^-(\alpha) \quad (2.98)$$

olup aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$P(\alpha) = \begin{cases} \frac{\Psi^+(\alpha)}{K^+(\alpha)} - \frac{K^+(k \cos \varphi_0)}{2\pi i} \cdot e^{-ikl_2 \cos \varphi_0} \cdot F^+(\alpha) & \text{Im}(\alpha) > \text{Im}(k \cos \varphi_0) \\ K^-(\alpha) \Psi^-(\alpha) + \frac{K^+(k \cos \varphi_0)}{2\pi i} \cdot e^{-ikl_2 \cos \varphi_0} \cdot F^-(\alpha) & \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k) \end{cases} \quad (2.99)$$

(2.86) ve (2.97)'daki asimptotik davranışları kullanılarak Liouville Teoremine göre

$$p(\alpha) \cong 0$$

olduğu sonucuna varılır. Böylece,

$$\Psi^-(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} K^+(k \cos \varphi_0) e^{-ikl_2 \cos \varphi_0} \cdot \frac{F^-(\alpha)}{K^-(\alpha)} \quad (2.100)$$

elde edilir. (2.84b) ve (2.100)'ün kullanılması ile spektral katsayısı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$P_{BO}(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{e^{-i3\frac{\pi}{4}}}{\alpha - k \cos \varphi_0} \frac{e^{ikl_2(1-\cos \varphi_0)}}{\sqrt{2\pi kl_2}} \frac{K^+(k \cos \varphi_0)}{K^-(\alpha)} \left[F[kl_2(1 - \cos \varphi_0)] - F[kl_2(1 - \frac{\alpha}{k})] \right] \quad (2.101)$$

Kırınan alanı bulmak için (2.81) integrale ile (2.101)'e aşağıdaki dönüşümü uygulanarak asimptotik olarak değerlendirilecektir.

$$\alpha = -k \cos t, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

(2.80)'daki L doğrusu boyunca olan integral, Γ doğrusu boyunca olan integrale dönüşür:

$$u_{BO}(r, \varphi) = \int_{\Gamma} P_{BO}(-k \cos t) e^{ikr \cos \varphi - t} \cdot k \sin t dt \quad (2.102)$$

(2.102)'de elde edilen integral (2.77) En dik iniş çizgisi yöntemi uygulanarak değerlendirmek için uygundur. Dolayısıyla, $u_{BO}(r, \varphi)$ kırınan ikincil alanının asimptotik ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir:

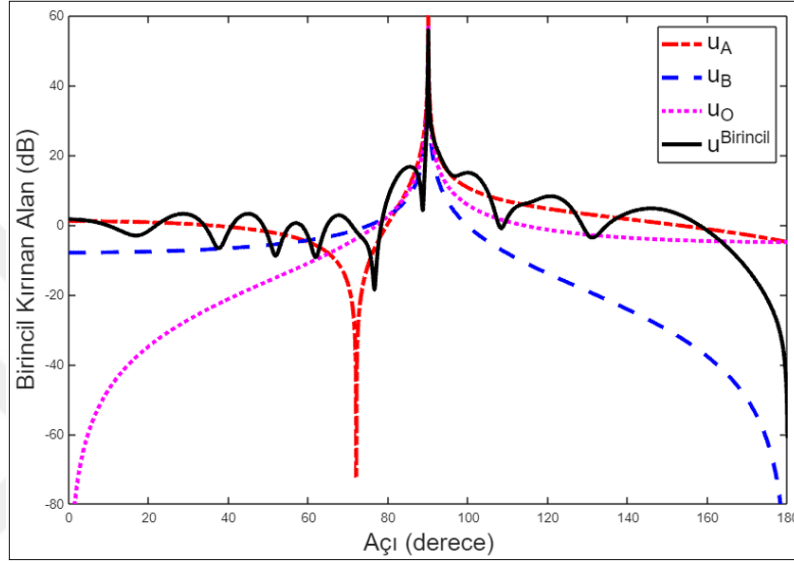
$$u_{BO}(r, \varphi) \sim \frac{i \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_0}{2}}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} \left[F[kl_2(1 - \cos \varphi_0)] - F[kl_2(1 + \cos \varphi)] \right] \frac{e^{ikr}}{\sqrt{\pi kr}} \frac{e^{ikl_2(1-\cos \varphi_0)}}{\sqrt{\pi kl_2}} \quad (2.103)$$

$kl_2 \gg 1$ için (2.79) Fresnel integralin asimptotik ifadesi kullanılabilir. Bu durumda kırınan alan aşağıdaki gibidir:

$$u_{BO}(r, \varphi) \sim \frac{e^{-ikl_2 \cos \varphi_0}}{2\pi kl_2} \frac{\sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_0}{2}}{(1 + \cos \varphi)(1 - \cos \varphi_0)} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \frac{e^{ikl_2}}{\sqrt{kl_2}} \quad (2.104)$$

3. SAYISAL SONUÇLAR

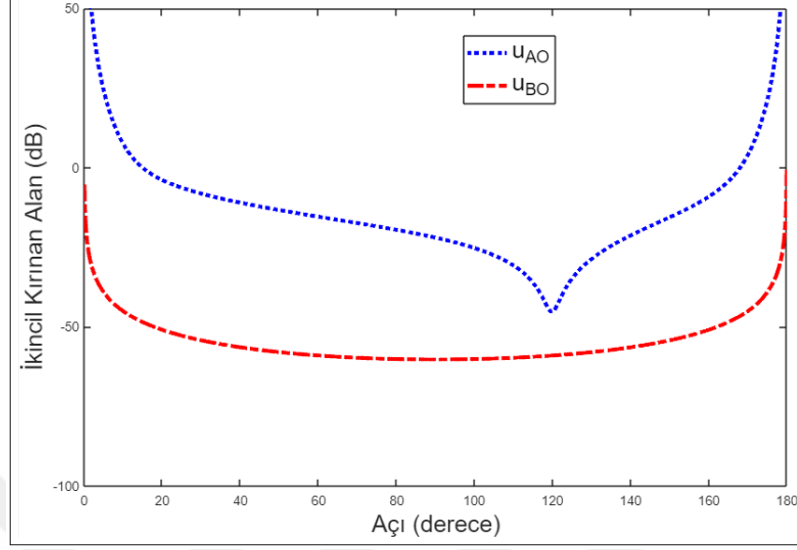
Bu bölümde, 2.bölümde analitik olarak elde edilen birincil ve ikincil kırınan alanların problemin parametrelerine göre davranışları MATLAB kullanılarak grafiksel olarak sunulmuştur. Bu grafiklerde $kl_1 = kl_2 = 6\pi$ ($l_1 = l_2 = 2\lambda$) alınmıştır.



Şekil 8: Birincil Kırınan Alanlar ve Açıları (Monostatik durumu) Grafiği.

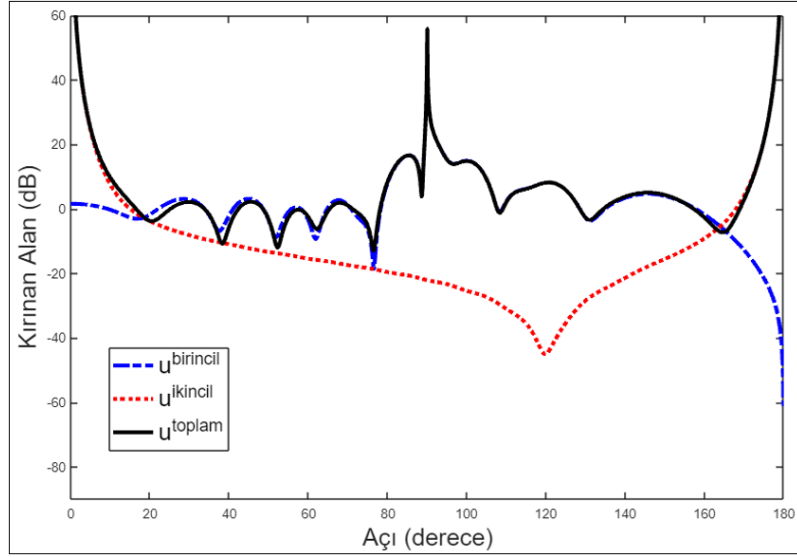
Şekil 8,9,10'da monostatik durumda, yani dalga'nın geliş açısı ile gözlem açısının birbirine eşit olduğu durumda kırınan alanların açığa göre davranışları görülmektedir.

Şekil 8'de A, O, B ayırıtlarından kırınan birincil alanlar ve toplam birincil alan görülmektedir. Dalga'nın yüzeye dik gelmesi durumunda ($\varphi_0 = 90^\circ$) her bir alanın geri yansımalarının maksimum seviyede olduğu ve toplam birincil alanın, her bir ayırıttaki birincil alandan farklı olarak salınım yaptığı görülmektedir.



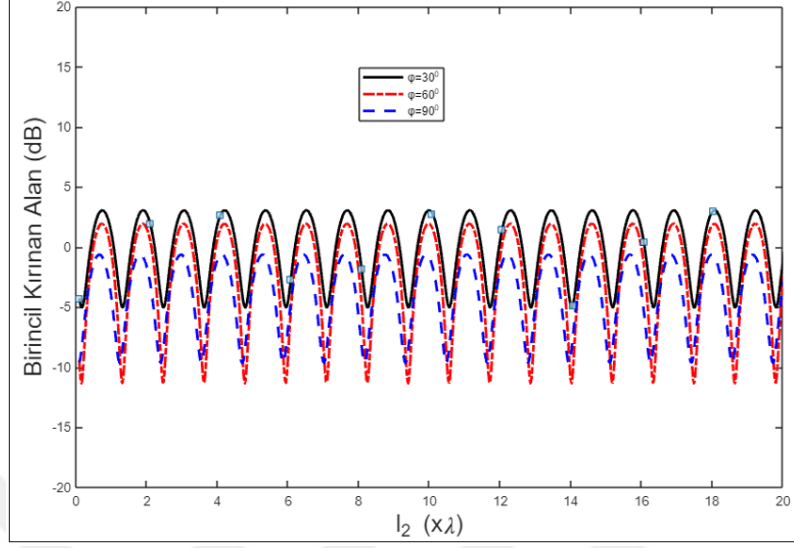
Şekil 9: İkincil Kırınan Alanlar ve Açıları (Monostatik durumu) Grafiği.

Şekil 9'da, O ayırından kırınan u_{AO} , u_{BO} ikincil alanları açıya göre davranışları görülmektedir. Dalganın yüzeye $\varphi_0 = 120^\circ$ açısıyla gelmesi durumunda u_{AO} ikincil kırınan alanının geri yansımalarının minimum seviyede olduğu görülmektedir.



Şekil 10: Birincil Alanlar ve İkincil Alanların Toplam Grafiği.

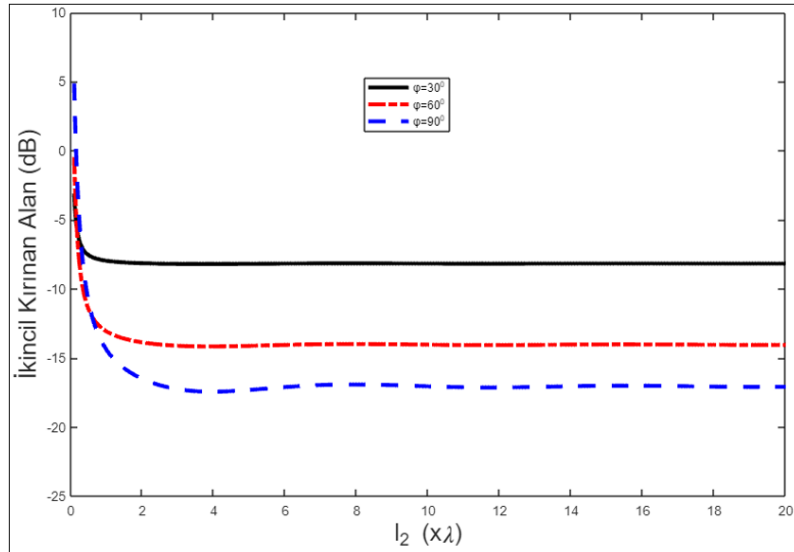
Şekil 10'da ise toplam birincil alan ($u^{Birincil}$), toplam ikincil alan ($u^{ikincil}$) ve bunların ikisinin toplamı (u^{Toplam}) görselleştirilmiştir. Toplam alanın $[80^\circ, 140^\circ]$ civarında birincil alan gibi davrandığını, ikincil alanın etkisinin 20° ve 170° civarında olduğu görülmektedir.



Şekil 11: l_2 'ye göre Toplam Birincil Kırınan Alan Davranış Grafiği.

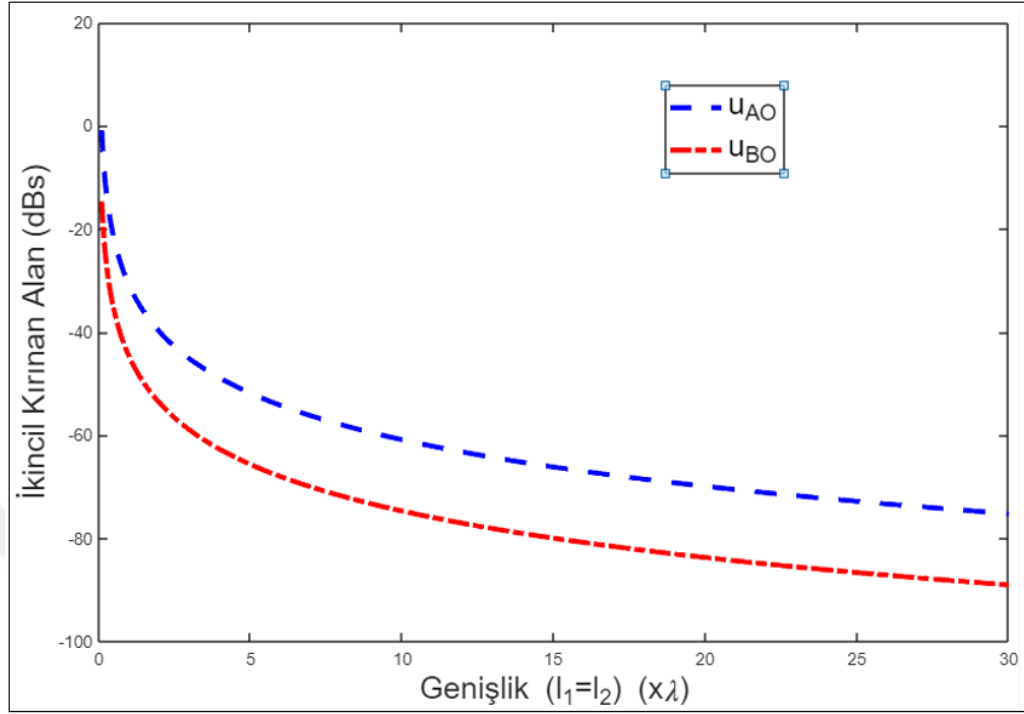
Şekil 11,12'de $\varphi_0 = 30^\circ$ ve Neumann sınır koşulunun uygulandığı yüzeyin uzunluğu $l_1 = 2\lambda$ olmak üzere, Şekil 11'de toplam birincil alanının, Şekil 12'de ise toplam ikincil alanın l_2 'ye yani Dirichlet sınır koşulunun uygulandığı yüzeyin uzunluğuna göre davranışları yer almaktadır.

Gözlem açısı değiştiğinde toplam birincil alanın davranışında l_2 arttıkça bir değişim



Şekil 12: l_2 'ye göre Toplam İkincil Kırınan Alan Davranış Grafiği.

gözlenmezken, ikincil alan gözlem açısı değiştiğinde $l_1 = 2\lambda$ 'den önce farklı davranışlar göstermekte ama $l_1 = 2\lambda$ 'den sonra değişim gözlenmemektedir.



Şekil 13: $l_1 = l_2, \varphi = \varphi_0 = 120^\circ$ iken İkincil Kırınan Alanlar davranış Grafiği.

Şekil 13'te ise $\varphi = \varphi_0 = 120^\circ$ için O 'dan kırınan ikincil alanların $l_1 = l_2$ uzunluklarına göre davranışları görülmektedir. Beklendiği gibi, Şeridin yüzey uzunluğu arttıkça ikincil alanların etkisi azalmaktadır.

4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada, düzlemsel dalgaların, üst yüzeyinin sol tarafında Neumann, sağ tarafında Dirichlet sınır koşulları ve alt yüzeyinde tamamen Dirichlet sınır koşulu olan bir şerit tarafından kırınımı, Fourier dönüşümü uygulanarak sınır ve süreklilik koşulları altında Spektral İterasyon tekniği Wiener-Hopf yöntemi kullanılarak tartışılmıştır. Şeridin üst yüzeyindeki bağlantı noktasında meydana gelen ikincil kırınan alanlara odaklanılmıştır.

Sayısal sonuçlar bölümünde ise belirli grafikler çizilerek simetrik olmayan üç ayrıtların birleşme noktasındaki ikincil kırınan alan üzerindeki etkilerini ortaya çıkarmak için bazı grafiksel sonuçlar sunulmuştur ve şerit genişliği arttıkça çift kırınımlı alanların etkilerinin azaldığı görülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Schwarzschild K., (1902), “Die beugung und polarisation des lichts durch einen spalt,” I. Math. Ann. 55, 177–247.
- [2] Karp S. N. and Russek A., (1956), “Diffraction by a wide slit,” J. Appl. Phys. 37, 886–894.
- [3] Malyuzhinetz G. D., (1960), “Das Sommerfeldische Integral und die Losung von Beugungsaufgaben in Winkelgebieten,” Ann. Phys., ser. 7, 6 (1,2), 107–112,
- [4] Keller, J. B. (1962). “Geometrical theory of diffraction”, Journal of Optical Society of America, 52 (2), 116-130
- [5] Jones D.S.,(1964), “The Theory of Electromagnetism.” Pergamon, London.
- [6] Khrapkov A.A.,(1971), “Certain cases of the elastic equilibrium of an infinite wedge with a nonsymmetric nodge at the vertex, subjected to concentrated forces.” Prikl.Math. Mekh. 35, 625-637.
- [7] Hurd R.A.,(1976), “The Wiener-Hopf-Hilbert method for diffraction problems.” Can. J.Phys. 54, 775-780.
- [8] Bucci O. M. and Franceschetti G.,(1976) “Electromagnetic scattering by a half-plane with two face impedances,” Radio Sci., 11, 49–59, Jan.
- [9] Daniele V.G.,(1978), “On the factorization of Wiener-Hopf matrices in problems solvable with Hurd’s method.” IEEE Trans. Antennas and Propagat. AP-26, 614-616.
- [10] Senior T. B. A., (1979), “Scattering by resistive strips,” Radio Sci. 14 (5), 911–924.
- [11] Rawlins A.D., (1980), “A note on the factorization of matrices occurring in Wiener-Hopf problems.” IEEE Trans. Antennas and Propagat. AP-28, 933-934.
- [12] Rawlins A.D. and Williams W. E.,(1981), Matrix Wiener-Hopf factorisation. Quart. J. Mech. Appl. Math. 34, 1-8.
- [13] Jones D.S.,(1984) “Factorization of a Wiener-Hopf Matrix.” IMA J. of Appl. Math. 32, 211-220.

- [14] Senior T. B. A.,(1987), “Some problems involving imperfect half-planes,” in Electromagnetic Scattering, P. L. E. Ushlenghi, Ed. New York, NY, USA: Academic, 185–219.
- [15] Büyükaksoy A. and Uzgoren G.,(1987) “Secondary diffraction of a plane wave by a metallic wide strip residing on the plane interface of two dielectric media,” Radio Sci. 22 (2), 183–191.
- [16] Büyükaksoy A., Serbest A. H., and Uzgoren G.,(1989), “Secondary diffraction of plane wave by an impedance strip,” Radio Sci. 24 (4), 455–464.
- [17] Kobayashi K.,(1991), “Plane wave diffraction by a strip: Exact and asymptotic solutions.” J.Phys. Soc. Jpn. 60, 1891-1905.
- [18] Büyükaksoy A.and Alkumru A.,(1995). “Multiple diffraction of plane waves by a soft/hard strip,” J. Eng. Math. 29, 105–120.
- [19] Büyükaksoy A., (1995), “A note on the plane wave diffraction by a soft-hard half plane,” Z. Angew. Math. Mech. 75 (2), 162–164.
- [20] Buyukaksoy A. and Alkumru A.,(1995), “Multiple diffraction of plane waves by soft/hard strip” J. Eng. Math., 29, 105–120.
- [21] Veliev E. I., Tsushima T., Kobayashi K., and Koshikawa S.,(1999), “Scattering by a strip with two different impedances,” in Proc. EMC Symp. 280–283.
- [22] Büyükaksoy A. and Uzgoren G.,(2005). “Kırınım Problemleri I”, Gebze Turkey.
- [23] Lawrie, J. B., Abrahams, I. D. (2007). “A brief historical perspective of the Wiener-Hopf technique”, Journal of Engineering Mathematics, 59, 351-358.
- [24] Cinar G.,(2009), “Wiener–Hopf analysis of a plane wave diffraction by an impedance strip attached on a perfectly conducting half-plane,” Electromagnetics 29 (2), 165–184.
- [25] Hacivelioglu F.,Sevgi L., and Ufimtsev P. Ya.,(2013),“Back scattering from a soft-hard strip,” IEEE Antennas Wireless Propag. Lett. 12, 249–252.
- [26] Ufimtsev P. Ya.,(2013), “Dffraction at a Wedge with one face electric and the other facemagnetic:Exact and Asymptotic solutions of the wave and parabolic equations.“

IEEE Antennas and Propagation Magazine 55 (5),63-73

- [27] Apaydin G., and Sevgi L.,(2015), “Method of moments modelling of backscattering by a soft-hard strip,” IEEE Trans. Antennas Propag. 63 (12), 5822–5826.
- [28] Kisil, A. V. (2015) “Stability analysis of matrix Wiener-Hopf factorization of Daniele-Khrapkov class and approximate factorization”, Philosophical Transactions of the Royal Society A, 471, 1-15.
- [29] Rougerie, T., Kisil, A. V. (2017). “Combining rational approximation with asymptotic Wiener-Hopf factorization algorithm for matrix functions: implementation and testing ” Journal of Applied Computational Mathematics, 6 (4)
- [30] Kisil, A. V. (2018). “An Iterative Wiener-Hopf method for triangular matrix functions with exponential factors”, SIAM Journal of Applied Mathematics, 78 (1), 45-62.
- [30] Priddin, M. J., Kisil, A. V., Ayton, L. J. (2019). “Applying an iterative method numerically to solve n by n matrix Wiener-Hopf equations with exponential factors”, Philosophical Transactions of the Royal Society A, 378, 1-18.
- [32] Hacivelioglu F.,(2022), “Diffraction of Sound Plane Waves by a Strip with Mixed Soft-Hard Faces” Computational Mathematics and Mathematical Physics, 62 (6) 1020-1031.

ÖZGEÇMİŞ

Alaa SERHAN, 2014 yılında başladığı Kocaeli Üniversitesi Matematik Bölümünü 2019 yılında başarıyla tamamlayarak 2020 yüksek lisans eğitimine Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başlamıştır.

