

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

BULANIK KISMİ METRİK YAPILARIN KATEGORİK
OLARAK İNCELENMESİ VE UYGULAMALARI

ELİF GÜNER

KOCAELİ 2023

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

BULANIK KISMİ METRİK YAPILARIN KATEGORİK
OLARAK İNCELENMESİ VE UYGULAMALARI

ELİF GÜNER

Prof. Dr. Halis AYGÜN

Danışman, Kocaeli Üniversitesi

.....

Doç. Dr. Banu PAZAR VAROL

Jüri Üyesi, Kocaeli Üniversitesi

.....

Doç. Dr. İzzettin Demir

Jüri Üyesi, Düzce Üniversitesi

.....

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK

Jüri Üyesi, Düzce Üniversitesi

.....

Dr. Öğr. Üyesi Cüneyt YAZICI

Jüri Üyesi, Kocaeli Üniversitesi

.....

Tezin Savunulduğu Tarih: 23.05.2023

ETİK BEYAN VE ARAŞTIRMA FONU DESTEĞİ

Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez/proje çalışmada,

- Bu tezin/projenin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu,
- Çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı,
- Bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi,
- Bu çalışmanın Kocaeli Üniversitesi'nin abone olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun olduğunu,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Tezin/Projenin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez/proje çalışması olarak sunmadığımı,

beyan ederim.

☒ Bu tez/proje çalışmasının herhangi bir aşaması hiçbir kurum/kuruluş tarafından maddi/alt yapı desteği ile desteklenmemiştir.

☐ Bu tez/proje çalışması kapsamında üretilen veri ve bilgiler tarafından no'lu proje kapsamında maddi/alt yapı desteği alınarak gerçekleştirilmiştir.

Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Elif GÜNER

YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI

Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/projemin tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda belirtilen koşullarla kullanıma açma izninin Kocaeli Üniversitesi'ne verdiğimi beyan ederim. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin/projemin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanımı bana ait olacaktır.

Tezin/projenin kendi özgün çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin/projenin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim kurulu tarafından yayınlanan **“Lisanüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge”** kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricinde YÖK Ulusal Tez Merkezi/ Kocaeli Üniversitesi Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

- ☐ Enstitü yönetim kurulu kararı ile tezimin/projemin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 2 yıl ertelenmiştir.
- ☐ Enstitü yönetim kurulu gerekçeli kararı ile tezimin/projemin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 6 ay ertelenmiştir.
- ☒ Tezim/projem ile ilgili gizlilik kararı verilmemiştir.

Elif GÜNER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması, bulanık (kısmi) metrik uzay yapıları üzerinde çeşitli sabit nokta teoremlerinin elde edilmesi, yakınsaklık ve tamlık gibi temel özelliklerinin incelenmesi, bu yapılardan çeşitli topolojiler üretilmesi, metrik-koruyan fonksiyonların çalışılması ve kısmi modüler metrik uzaylar ile kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörleri arasındaki dualitelerin elde edilmesi amacıyla gerçekleştirilmiştir.

Tez çalışmamda desteğini esirgemeyen, çalışmalarına yön veren, bana güvenen ve yüreklendiren, başarılı bir şekilde bugünlere gelmemde üzerimde en çok emeği olan, disiplinli ve titiz bir şekilde çalışmayı aşılmasının yanı sıra ahlaki ve insani değerler ile örnek edindiğim danışmanım Prof. Dr. Halis AYGÜN'e sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Bu tezin konusu ile ilgili İspanya Balearic Island Üniversitesi'nde kendileriyle çalışma fırsatı veren ve bu çalışmaların yürütülmesine destek olan Prof. Dr. Oscar VALERO ve Doç. Dr. Juan-Jose MINANA'ya teşekkür ederim. Ayrıca çalışma arkadaşlarım ve dostlarım Arş. Gör. Dr. Ebru AYDOĞDU, Arş. Gör. Dr. Süleyman ÇETİNKAYA, Arş. Gör. Başak ALDEMİR ve Arş. Gör. Melike KELEŞ'e teşekkür ederim.

Hayatım boyunca bana güç veren, attığım her adımda destekçim olan, her aşamada sıkıntılarımı ve mutluluklarımı paylaşan sevgili annem Emel ÇAKIR'a ve aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Son olarak bilim insanlarının yetişmesinde büyük katkısı olan ve doktora çalışmalarım süresince yurt içinde ve yurt dışında beni maddi olarak destekleyen TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı'na da teşekkürü bir borç bilirim.

Mayıs-2023

Elif GÜNER

İÇİNDEKİLER

ETİK BEYAN VE ARAŞTIRMA FONU DESTEĞİ.....	i
YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
TABLolar DİZİNİ.....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	6
2.1. Üçgensel Normlar ve Rezidiyum Operatörleri	6
2.2. Bulanık Kümeler ve Bulanık Sayılar	11
2.3. Bulanık ve Bulanıklaştırılmış Topolojik Uzaylar	16
3. BULANIK METRİK UZAYLAR.....	19
3.1. KS-Bulanık Metrik Uzaylar	19
3.2. KM-Bulanık Metrik Uzaylar ve GV-Bulanık Metrik Uzaylar	25
3.2.1. KM(GV)-Bulanık Metrik Uzak Tanımı ve Temel Özellikleri	25
3.2.2. KM-Bulanık Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri	30
4. SE-BULANIK KISMİ METRİK UZAYLAR	42
4.1. Kısmi Metrik Uzak Tanımı ve Temel Özellikleri.....	42
4.2. SE-Bulanık Kısmi Metrik Uzak Tanımı ve Temel Özellikleri	45
4.3. SE-Bulanık Kısmi Metrik-Koruyan Fonksiyonlar.....	48
5. KM-BULANIK KISMİ METRİK UZAYLAR VE GV-BULANIK KISMİ METRİK UZAYLAR	67
5.1. KM(GV)-Bulanık Kısmi Metrik Uzak Tanımı ve Temel Özellikleri.....	67
5.2. KM-Bulanık Kısmi Metrik Uzaylar ile KM-Bulanık Metrik Uzaylar Arasındaki İlişkiler	72
5.3. KM-Bulanık Kısmi Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri	80
6. KS-BULANIK KISMİ METRİK UZAYLAR.....	87
6.1. KS-Bulanık Kısmi Metrik Uzak Tanımı ve Temel Özellikleri.....	87
6.2. KS-Bulanık Kısmi Metrik Uzaylar ile KS-Bulanık ((Ağırlıklandırılmış) Quasi) Metrik Uzaylar Arasındaki İlişkiler	92
6.3. KS-Bulanık Kısmi Metrikler Tarafından Üretilen Topolojiler.....	97
7. AYIRTEDİLEMEZLİK OPERATÖRLERİ	105
7.1. Modüler (Pseudo-)Metrik Uzaylar ve Modüler Ayırtedilemezlik Operatörleri.....	105
7.2. Kısmi Modüler (Pseudo-)Metrik Uzaylar ve Kısmi Modüler Ayırtedilemezlik Operatörleri.....	108
7.2.1. Kısmi Modüler Ayırtedilemezlik Operatörleri Tarafından Üretilen Kısmi Modüler (Pseudo-)Metrikler.....	112
7.2.2. Kısmi Modüler (Pseudo-)Metrikler Tarafından Üretilen Kısmi Modüler Ayırtedilemezlik Operatörleri.....	121
8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	129
KAYNAKLAR	135
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER.....	140
ÖZGEÇMİŞ.....	143

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 8.1. Kavramlararası İlişkiler Tablosu.....	129
--	-----



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

χ_A	: A klasik kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\subseteq$	: Alt küme
$\underline{\alpha}$	: α değerli sabit bulanık alt küme
$\bigcap(\cup)$	: Arakesit (Birleşim)
$\emptyset$	: Boş küme
X	: Boştan farklı klasik küme
$\mathcal{T}$	: Bulanık (bulanıklaştırılmış) topoloji
$I^{\mathbb{R}}$	: Bulanık sayıların kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\in$	: Eleman
$\forall$	: Evrensel niceleyici, her
$\Leftrightarrow$	: Gerek ve yeter şart
$\wedge$	: Infimum
I	: $[0,1]$ kapalı aralığı
$\mathbb{P}$	: Kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü
w^p	: Kısmi modüler metrik
p	: Klasik kısmi metrik
τ_p	: Klasik kısmi metrikten üretilen klasik topoloji
d	: Klasik metrik
τ	: Klasik topoloji
P	: KM(GV)-Bulanık kısmi metrik
τ_P	: KM(GV)-Bulanık kısmi metrikten üretilen klasik topoloji
M	: KM(GV)-Bulanık metrik
$\mathcal{T}_{\mathbb{P}}$	: KS-Bulanık kısmi metrikten üretilen bulanıklaştırılmış topoloji
τ_M	: KM(GV)-Bulanık metrikten üretilen klasik topoloji
$\mathbb{P}$	: KS-Bulanık kısmi metrik
$\tau_{\mathbb{P}}$	: KS-Bulanık kısmi metrikten üretilen klasik topoloji
$\mathcal{T}_{\mathbb{P}}^{\mu}(\mathcal{T}_{\mathbb{P}}^{\nu})$	: KS-Bulanık kısmi metrikten üretilen Lowen bulanık topoloji
$\mathbb{d}$	: KS-Bulanık metrik
$\tau_{\mathbb{d}}$	: KS-Bulanık metrikten üretilen klasik topoloji
$\mathbb{M}$	: Modüler ayırtedilemezlik operatörü
w	: Modüler metrik
$\mathbb{R}^+$	: Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\rightarrow_*$	: *-rezidiyum operatörü
F	: SE-Bulanık kısmi metrik
τ_F	: SE-Bulanık metrikten üretilen klasik topoloji
$\vee$	: Supremum
$:\Leftrightarrow$	: Tanım olarak ancak ve ancak
$\diamond$	: t-conorm
$*$	: t-norm
$[x]_{\alpha}$	: x bulanık sayısının α seviye kümesi
2^X	: X 'in güç kümesi
I^X	: X kümesi üzerindeki bulanık kümelerin ailesi
$\exists$	: Varlıksal niceleyici, en az bir

BULANIK KISMI METRİK YAPILARIN KATEGORİK OLARAK İNCELENMESİ VE UYGULAMALARI

ÖZET

Bu tez sekiz bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, bahsedilen kavramlara ait literatür özeti sunulmaktadır. İkinci bölümde, üçgensel norm, rezidiyum operatörleri, bulanık küme, bulanık nokta, bulanık ve bulanıklaştırılmış topoloji gibi kavramlar temel özellikleri ile birlikte verilmektedir.

Üçüncü bölümde, Kramosil ve Michalek (1975), Kaleva ve Seikkala (1984) ile George ve Veeramani (1994) tarafından sunulan bulanık metrik uzay yapılarının tanımları verildikten sonra Kramosil ve Michalek anlamındaki bulanık metrik (KM-bulanık metrik) uzaylarda Gregori ve Miñana (2021) tarafından verilmiş olan Banach daralma koşulunun farklı genellemeleri elde edilmektedir. Bu genellemelere ek olarak, rezidiyum operatörlerine dayalı yeni bir bulanık daralma koşulu da örnekler ile birlikte sunulmaktadır.

Dördüncü bölümde, Matthews (1994) tarafından verilen kısmi metrik uzay kavramı ile bu kavramın bir genelleştirilmesi olan ve Sedghi ve diğ. (2015) tarafından tanıtılan bulanık kısmi metrik (SE-bulanık kısmi metrik) uzay yapısı temel özellikleri ile birlikte sunulmaktadır. Ayrıca, bir SE-bulanık kısmi metrikten başka bir SE-bulanık kısmi metrik üreten ve bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyonlar olarak adlandırılan fonksiyonlar verilerek bazı özellikleri ve karakterizasyonları incelenmektedir.

Beşinci bölümde, Gregori ve diğ. (2019) tarafından tanımlanan bulanık kısmi metrik (KM(GV)-bulanık kısmi metrik) uzay yapısı hatırlatılarak GV-bulanık kısmi metrik uzaylarda yakınsaklık, Cauchy dizileri ve tamlık gibi temel topolojik kavramlar incelenmektedir. Daha sonra, Haghi ve diğ. (2013)'ne benzer bir bakış açısıyla bir KM-bulanık kısmi metrikten nasıl KM-bulanık metrik üretileceği ve bu sayede KM-bulanık metrik uzaylarda mevcut olan sabit nokta teoremlerinin doğrudan KM-bulanık kısmi metrik uzaylar için genişletilebileceği gösterilmektedir.

Altıncı bölümde, Kaleva ve Seikkala anlamındaki bulanık kısmi metrik (KS-bulanık kısmi metrik) uzay kavramı tanımlanarak bazı temel özellikleri ile birlikte KS-bulanık ((ağırlıklandırılmış) quasi) metrik uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmektedir. Bunlara ek olarak, KS-bulanık kısmi metrikler tarafından klasik topoloji, Lowen anlamında bulanık topoloji ve bulanıklaştırılmış topoloji üretildiği gösterilmektedir.

Yedinci bölümde, kısmi modüler metrik kavramı parametrelerdeki öz mesafe üzerindeki sınırlamanın esnetilmesiyle yeniden tanımlanarak, bu yapı ile modüler ayırtedilemezlik operatörlerinin bir genelleştirilmesi olarak sunduğumuz kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörleri arasındaki ilişkiler çalışılmaktadır. Son olarak, sekizinci bölümde ise bu tez çalışması ile elde edilen sonuçlara yer verilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Ayırtedilemezlik Operatörleri, Bulanık Kısmi Metrik, Bulanık Metrik, Kısmi Modüler Metrik, Sabit Nokta Teoremleri.

CATEGORICAL ANALYSIS OF FUZZY PARTIAL METRIC STRUCTURES AND THEIR APPLICATIONS

ABSTRACT

This thesis includes eight chapters. In the first chapter, a literature summary of the mentioned notions was presented. In the second chapter, some fundamental concepts such as triangular norms, residuum operators, fuzzy set, fuzzy points, fuzzy topology and fuzzifying topology were recalled with their properties.

In the third chapter, after giving the definitions of fuzzy metric space introduced by Kramosil and Michalek (1975), Kaleva and Seikkala (1984) and George and Veeramani (1994), it was investigated different generalizations of the Banach contraction mapping on fuzzy metric spaces in the meaning of Kramosil and Michalek (named KM-fuzzy metric spaces). In addition to these generalizations, a new fuzzy contraction condition based on residuum operators was presented with examples.

In the fourth chapter, the notion of partial metric space given by Matthews (1994) and fuzzy partial metric space, given by Sedghi et al. (2015), which is a generalization of the fuzzy manner of the notion of partial metric space (named SE-fuzzy partial metric) were presented with some of their properties. Then the notion of fuzzy partial metric preserving function which allows generating a new SE-fuzzy partial metric from an existing one was investigated with some characterizations.

In the fifth chapter, by recalling the definition of fuzzy partial metric space initiated by Gregori et al. (2019) some basic topological concepts such as convergence, Cauchy sequences and completeness were studied in GV-fuzzy partial metric spaces. In addition, with a similar view of Haghi et al. (2013), it was shown how to generate a KM-fuzzy metric from a KM-fuzzy partial metric, and by this way, it was presented that many fixed point theorems existed in KM-fuzzy metric spaces can be directly extended for KM-fuzzy partial metric spaces.

In the sixth chapter, the concept of fuzzy partial metric space in the sense of Kaleva and Seikkala (named KS-fuzzy partial metric) was defined and the relations between KS fuzzy partial metric space and KS-fuzzy ((weighted) quasi) metric spaces were obtained. In addition to these, it is shown that classical topology, fuzzy topology in the sense of Lowen, and fuzzifying topology were generated by KS-fuzzy partial metrics.

In the seventh chapter, the partial modular metric concept was redefined by relaxing the condition on the self-distance of parameters. Then, the duality relations between this structure and the partial modular indistinguishability operators, which we present as a generalization of the modular indistinguishability operators, were studied. Finally, in the eighth chapter, the results of this thesis study were given.

Keywords: Indistinguishability Operators, Fuzzy Partial Metric, Fuzzy Metric, Partial Modular Metric, Fixed Point Theorems.

1. GİRİŞ

Metrik veya uzaklık kavramı bilimin farklı alanlarında ortaya çıkan birçok problemde önemli bir rol oynamaktadır. Bu tür problemlerde doğal olarak iki nesne arasındaki uzaklığın ölçülmesi gerekir ve burada metrik kavramı bu ölçümü sağlayan araç olarak karşımıza çıkmaktadır. Ancak bazı durumlarda, bir metriği tanımlayan aksiyomların, ele alınan probleme yaklaşmak için çok kısıtlayıcı olması nedeniyle mevcut kavram, karşılaşılan problemi çözmek için yeterli olmayabilir. Bu tür durumların üstesinden gelebilmek için, literatürde metrik kavramının pseudo-metrik, quasi-metrik, kısmi metrik, (kısmi) modüler metrik vb. birçok farklı genelleştirmeleri vardır. Bu genelleştirilmiş metrik yapıları üzerine literatürde çeşitli çalışmalar yapılmıştır (Alghamdi ve diğ., 2012; Bugajewski ve diğ., 2020; Han ve diğ., 2017; Mykhaylyuk ve Myronyk 2020; Oltra ve Valero, 2004; Shahzad ve Valero, 2013; Valero, 2005). Ancak karşılaşılan bu problemler aynı zamanda bazı belirsizlikleri de içerebildiğinden dolayı ortaya konulan genelleştirilmiş metrik yapıları da yetersiz kalmaktadır.

Belirsizlik içeren problemlerin modellenmesi için 1965 yılında Zadeh tarafından bulanık küme teorisi ortaya konmuştur. Her elemanın üyelik derecesi ile göz önüne alındığı bu teori ile birlikte klasik mantıktaki evet-hayır, iyi-kötü, doğru-yanlış gibi kesinlik ifadeleri yerini kısmen doğru, kesin doğru ve kısmen yanlış kesin yanlış gibi ifadelere bırakmıştır. Bulanık küme teorisinin önemli bir araştırma alanı olan bulanık topoloji kavramı 1968’de Chang tarafından verilmiştir. Daha sonra Lowen (1976) klasik topolojideki bazı özellikleri bulanık topolojilerde de elde edebilmek için bulanık topoloji tanımını yeniden vermiştir. Ancak bahsedilen tanımların her birinde kümeler bulanık olmasına rağmen topoloji aksiyomları klasik anlamdadır. Bunun üzerine Shostak, 1985’de klasik topoloji aksiyomlarının bulanık olduğu ve böylece bulanık kümelerin açıklığının derecelendirildiği bulanık topoloji kavramını vermiştir. Sonrasında Ying (1991) klasik kümelerin açıklığının derecelendirildiği bulanıklaştırılmış topoloji kavramını vererek klasik topolojik uzaylarda mevcut bazı kavramları bulanıklaştırılmış topolojik uzaylara taşımıştır. Bulanık topolojik uzaylarda süreklilik, kompaktlık ve ayırma aksiyomları üzerinde çeşitli önemli çalışmalar Aygün (2000) ve Aygün ve diğ. (1997, 1999, 2000, 2004, 2007) tarafından yapılmıştır. Hem teorik bakış açısından hem de gerçek problemlere uygulanabilirliği açısından geniş bir araştırma yelpazesine sahip olan bulanık

küme teorisi birçok bilim insanının dikkatini çekerek günümüzde de hala önemli bir araştırma konusu olma niteliğindedir.

Bulanık metrik uzay kavramı olasılıksal metrik uzay kavramının genelleştirilmesi olarak Kramosil ve Michalek (1975) ile Kaleva ve Seikkala (1984) tarafından iki farklı şekilde verilmiştir. Daha sonra George ve Veeramani (1994), Kramosil ve Michalek (1975) anlamındaki bulanık metrik (KM-bulanık metrik) uzay tanımında değişiklik yaparak, yeni bir bulanık metrik (GV-bulanık metrik) uzay tanımı vermiştir. KM(GV)-bulanık metrik ile bir parametreye göre iki noktanın birbirine yakın olma derecesi ölçülmektedir. George ve Veeramani (1994) GV-bulanık metrik uzaydan Hausdorff topolojik uzay elde etmiş ve bu uzayın özelliklerini araştırmışlardır. GV-bulanık metrik uzayların tamlaştırılması, yakınsaklık çeşitleri, farklı alanlara uygulanması ile ilgili çok sayıda çalışma Gregori ve diğ., (2000, 2004, 2009, 2010, 2018) tarafından yapılmıştır. Ayrıca bu yapılar üzerinde çeşitli sabit nokta teoremleri ve bu yapıların farklı alanlara uygulamaları birçok yazar tarafından çalışılmıştır (Camarena ve diğ., 2008; Demir, 2021a; Demir, 2021b; Ralevic ve diğ., 2022; Varol ve Aygün, 2012; Varol, 2022).

Son zamanlarda bulanık metrik uzaydan bulanık ve bulanıklaştırılmış topolojik uzay üretme problemi üzerine çalışmalar yapılmaktadır. 2015’de Mardones-Pérez ve De Prada Vicente, Kramosil ve Michalek (1975) anlamındaki bulanık metrik uzaylardan bulanıklaştırılmış komşuluk sistemi yardımıyla bulanıklaştırılmış topoloji elde etmiş ve özelliklerini araştırmışlardır. 2016 yılında Miñana ve Shostak, güçlü GV-bulanık metrik uzaylardan seviye topolojileri yardımıyla bulanıklaştırılmış topolojik uzaylar üretmişlerdir. Aygünoğlu ve diğ. (2020) KM-bulanık metrik uzaylardan bulanık topolojik uzay ve bu uzay için taban elde etmiştir.

KM(GV)-bulanık metrik uzay ve kısmi metrik uzay yapıları birlikte göz önüne alınarak Yue ve Gu (2014), Sedghi ve diğ. (2015), Gregori ve diğ. (2019) tarafından bulanık kısmi metrik uzay kavramı üç farklı şekilde tanımlanmıştır. Yue ve Gu (2014), KM-bulanık metrik uzay yapısını kısmi metrik aksiyomlarını göz önüne alarak ve minimum t-norm kullanarak vermiştir. Bu anlamdaki bulanık kısmi metrik uzaylardan bulanıklaştırılmış topoloji üretildiğini göstermişlerdir. Sedghi ve diğ. (2015) güçlü KM-bulanık metrik uzayın bir genelleştirilmesi olarak bulanık kısmi metrik (SE-bulanık kısmi metrik) uzay yapısını tanıtmışlardır. Gregori ve diğ. (2019) ise hem KM-bulanık metrik uzaylarda hem

de GV-bulanık metrik uzaylarda sürekli t-normlar ile ilişkili olan rezidyum operatörlerini kullanarak bu yapılardaki aksiyomları genelleştirerek bir bulanık kısmi metrik (KM(GV)-bulanık kısmi metrik) uzay kavramını vermişlerdir. Ayrıca, KM-bulanık metrik uzaylar ile KM-bulanık quasi metrik uzaylar arasındaki ilişkiler ve bu uzaylarda Banach sabit nokta teoremi de yine Gregori ve Miñana (2020, 2021) tarafından çalışılmıştır.

Klasik metrik teorisinin bir başka çalışma alanı ise 1981 yılında Borsík ve Dobš tarafından verilen ve metrik-koruyan fonksiyonlar olarak adlandırılan bir metriği başka bir metriğe dönüştüren fonksiyonlardır. Yazarlar, aynı çalışmada, bu fonksiyonların konkav, alt-toplamsal ve azalmayan olma özellikleri ile üçgen üçlüsü kavramına göre bazı karakterizasyonları elde edilmiştir. Ayrıca bu fonksiyonlar altında bir metrik tarafından üretilen topolojinin korunmadığı gösterilerek metrik-koruyan fonksiyonlar sınıfının bir alt ailesini oluşturan güçlü metrik-koruyan fonksiyonlar verilerek süreklilik ile ilgili ilişkileri incelenmiştir. Dahası, metrik-koruyan fonksiyonlar ile ilgili çeşitli çalışmalar Pradera ve diğ. (2000), Mayor ve Valero (2019), Fuster-Parra ve diğ. (2020) tarafından yapılmıştır. Bulanık metrik yapılarda metrik-koruyan fonksiyonlarla ilgili çalışmalar ise Pedraza ve diğ. tarafından 2020 yılında yapılmıştır. Bu çalışmada, Pedraza ve diğ. (2020) öncelikle bulanık ikili işlemlerden yeni bir ikili işlem oluşturan toplama-fonksiyonlarını ele alarak bu fonksiyonların özelliklerini incelemişlerdir. Daha sonra, hangi fonksiyonların bir KM-bulanık metriğini yeni bir KM-bulanık metriğe dönüştürdüğünü üzerine çalışmışlar ve bu tür fonksiyonların bazı karakterizasyonlarını elde etmişlerdir.

Bir uzayda iki nokta arasındaki mesafenin ölçülmesine tekrar dönecek olursak literatürde iki noktanın ne kadar benzer (ayrıtılamaz) olduğunu derecelendiren bir başka kavram ise Trillas (1982) tarafından verilen ayrıtılamazlık operatörleridir. Her halükarda, yukarıda belirtilen tüm ölçüm kavramları metrik kavramının genellemeleri olarak kabul edilmektedir. Ancak bunlar iki farklı sınıfa ayrılmaktadır: ilki, farklılık (benzemezlik) ölçümü olarak adlandırılan ve metrik kavramı ile genellemelerini içeren sınıftır; ikincisi ise benzerlik ölçümleri denilen ve ayrıtılamazlık operatörü, bulanık metrik ve bulanık kısmi metrik kavramlarını içeren sınıftır. Bu iki sınıf arasındaki temel fark, birinci sınıfa ait ölçümün değeri $[0, \infty)$ aralığındadır ve burada 0 ise iki ögenin aynı (ayrıt edilemez) olduğunu ve değer ne kadar büyükse nesnelerin o kadar ayrıt edilebilir olduğunu gösterir. Bununla birlikte, benzerlik ölçümleri $I = [0,1]$ aralığında değer alır ve burada 1, iki

noktanın tamamen aynı (ayırt edilemez) olduğu ve bu nedenle maksimum benzerlik derecesine sahip olması anlamına gelirken, 0, öğelerin tamamen farklı (ayırt edilebilir) olduğu anlamına gelmektedir. Literatürde ayırtedilemezlik operatörleri ile ilgili birçok çalışma mevcuttur (Bibiloni-Femenias ve diğ., 2021; Calvo-Sánchez ve diğ., 2018; Guerrero ve diğ., 2017; Miñana ve Valero, 2021; Recasens, 2010). Bunlara ek olarak, Miñana ve Valero (2017) ayırtedilemezlik operatörü kavramını, benzerlik ölçümlerinin bir parametreye göre yapılabileceği ve böylece klasik ayırtedilemezlik operatörleri ve bulanık metriklerin özel bir durum olarak alınabileceği şekilde genelleştirilerek modüler ayırtedilemezlik operatörü kavramını vermişlerdir. Ayrıca modüler metriklerden modüler ayırtedilemezlik operatörleri ve modüler ayırtedilemezlik operatörlerinden de modüler metrikler üretildiğini göstermişlerdir.

Bu çalışmada, öncelikle bahsedilen bulanık metrik uzay ve bulanık kısmi metrik uzay yapıları bir bütün olarak sunulmaktadır. İlk olarak, KM-bulanık metrik uzaylar için verilmiş olan Banach daralma koşulunun farklı genellemeleri verilmektedir. Bu genellemelere ek olarak, rezidiyum operatörlerine dayalı yeni bir bulanık daralma koşulu sunulmaktadır. Bunun sonucunda, bulanık metrik uzaylar için Banach daralma ilkesinin farklı versiyonları da elde edilmektedir. Daha sonra, bu yeni daralma koşulunu sağlayan dönüşümlerin, bulanık metriğin tamlığı üzerinde herhangi bir ek koşul gerektirmeden ve Arşimet olmayan t-normları kullanılarak, bir tek sabit noktaya sahip olduğu gösterilmektedir. Devamında, SE-bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyonlar tanımlanarak bu fonksiyonların bazı karakterizasyonları verilmektedir. Ayrıca bulanık metrik-koruyan fonksiyonlar ile bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyonlar arasındaki ilişkiler araştırılarak bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyonların hangi koşullar altında daralma-koruyan fonksiyonlar olduğu gösterilmektedir. Dahası, GV-bulanık kısmi metrik uzaylarda Cauchy dizileri ve tamlık incelenerek KM-bulanık kısmi metrikten nasıl KM-bulanık metrik üretileceği ve bu sayede KM-bulanık metrik uzaylarda mevcut olan birçok sabit nokta sonucunun doğrudan KM-bulanık kısmi metrik uzaylar için genişletilebileceğinin gösterilmektedir. Daha sonra, Kaleva-Seikkala anlamında bulanık kısmi metrik uzay kavramı (KS-bulanık metrik uzay) tanımlanarak bu yapının kısmi metrik uzayların bir genelleştirilmesi olduğu gösterilmektedir. Klasik metrik uzaylara benzer şekilde KS-bulanık (ağırlıklandırılmış (quasi-)) metrik uzay yapıları tanımlanarak KS-bulanık kısmi metrik uzaylar ile bu yapılar arasındaki ilişkiler incelenmektedir.

Ayrıca, KS-bulanık metrik uzaylarda yakınsaklık ve tamlık gibi temel kavramlar ile KS-bulanık metrikten klasik, Lowen bulanık ve bulanıklaştırılmış topolojiler üretildiği gösterilmektedir. Son olarak, modüler metrik uzaylar ve modüler ayırtedilemezlik operatörleri arasında mevcut olan ilişkiler bulanık kısmi metrik uzaylar için tartışılmaktadır. Bunun için, ilk olarak modüler ayırtedilemezlik operatörleri ile ayırt edici koşulu sağlayan bulanık kısmi metriklerin bir genellemesi olan kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü kavramı tanımlanmaktadır. Daha sonra, Hosseinzadeh ve Parvaneh (2020) kısmi modüler metrik kavramını parametrelerdeki öz mesafe üzerindeki sınırlama ortadan kaldırılarak yeniden tanıtmaktadır. Bu yeni tanımla, modüler ayırtedilemezlik operatörlerinden modüler metrikler oluşturmak için verilen benzer yöntemin ve bunun tersinin, kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörlerini ve kısmi modüler metrik uzaylar için de sağlandığı gösterilmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezin devamında kullanılacak olan üçgensel (eş)norm, rezidiyum operatörü, bulanık küme, bulanık nokta, bulanık ve bulanıklaştırılmış topoloji kavramlarına yer verilecektir.

2.1. Üçgensel Normlar ve Rezidiyum Operatörleri

Tanım 2.1.1: $*$, I üzerinde bir ikili işlem olmak üzere $x, y, z \in I$ iken

$$(T1) \quad x * y = y * x,$$

$$(T2) \quad x * (y * z) = (x * y) * z,$$

$$(T3) \quad y \leq z \Rightarrow x * y \leq x * z,$$

$$(T4) \quad x * 1 = x$$

koşulları sağlanıyorsa $*$: $I \times I \rightarrow I$ fonksiyonuna bir üçgensel norm (veya t-norm) adı verilir (Klement ve diğ, 2000).

Örnek 2.1.2: I üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan ikili işlemler bilinen en temel t-norm örnekleridir.

$$x \wedge y = \min\{x, y\}, \quad (\text{Minimum t-norm})$$

$$x *_p y = x \cdot y, \quad (\text{Çarpım t-norm})$$

$$x *_L y = \max\{x + y - 1, 0\}, \quad (\text{Lukasiewicz t-norm})$$

$$x *_D y = \begin{cases} 0, & \text{eğer } (x, y) \in [0, 1) \times [0, 1) \text{ ise} \\ \min\{x, y\}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (\text{Drastic çarpım t-norm})$$

$$x *_H y = \begin{cases} 0, & x = y = 0 \\ \frac{xy}{x+y-xy}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (\text{Hamacher çarpım t-norm})$$

(Klement ve diğ, 2000).

Uyarı 2.1.3: (1) Tanım 2.1.1'den $x \in I$ iken

$$0 * x = x * 0 = 0$$

eşitliğinin sağlandığı görülmektedir.

(2) Tanım 2.1.1'deki (T1) ve (T3) aksiyomları birlikte göz önüne alınırsa, her t-normun her iki bileşene göre de monoton artan olduğu görülmektedir. Bir başka ifade ile aşağıdaki özellik sağlanır (Klement ve diğ., 2000).

$$x_1 \leq x_2 \text{ ve } y_1 \leq y_2 \Rightarrow x_1 * y_1 \leq x_2 * y_2.$$

Tanım 2.1.4: $*$: $I \times I \rightarrow I$ bir t-norm olmak üzere $x, y \in I$ iken $x * \dots *^{(n)} x < y$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ mevcut ise $*$ t-normuna Arşimet t-norm denir.

Çarpım ($*_p$) ve Lukasiewicz ($*_{\mathcal{L}}$) birer Arşimet t-norm iken minimum ($\wedge$) Arşimet olmayan bir t-normdur (Klement ve diğ., 2000).

Tanım 2.1.5: $\diamond$, I üzerinde bir ikili işlem olmak üzere $x, y, z \in I$ iken

$$(S1) \quad x \diamond y = y \diamond x,$$

$$(S2) \quad x \diamond (y \diamond z) = (x \diamond y) \diamond z,$$

$$(S3) \quad y \leq z \Rightarrow x \diamond y \leq x \diamond z,$$

$$(S4) \quad x \diamond 0 = x$$

koşulları sağlanıyorsa $\diamond : I \times I \rightarrow I$ fonksiyonuna bir üçgensel eşnorm (kısaca, s-norm veya t-conorm) adı verilir (Klement ve diğ., 2000).

Örnek 2.1.6: $[0, 1]$ üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan ikili işlemler bilinen en temel t-conorm örnekleridir.

$$x \vee y = \max\{x, y\}, \quad (\text{Maksimum t-conorm})$$

$$x \diamond_p y = x + y - x \cdot y, \quad (\text{İstatistiksel toplam})$$

$$x \diamond_{\mathcal{L}} y = \min\{x + y, 1\}, \quad (\text{Lukasiewicz t-conorm})$$

$$x \diamond_D y = \begin{cases} 1, & \text{eğer } (x, y) \in (0,1] \times (0,1] \text{ ise} \\ \max\{x, y\}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (\text{Drastic toplam t-conorm})$$

(Klement ve diğ, 2000).

Uyarı 2.1.7: (1) Tanım 2.1.5'den $x \in I$ iken

$$1 \diamond x = x \diamond 1 = 1$$

eşitliğinin sağlandığı görülmektedir.

(2) Tanım 2.1.5'deki (S1) ve (S3) aksiyomları birlikte göz önüne alındığında her t-conormun her iki bileşene göre de monoton artan olduğu görülmektedir. Bir başka ifade ile aşağıdaki özellik sağlanır.

$$x_1 \leq x_2 \text{ ve } y_1 \leq y_2 \Rightarrow x_1 \diamond y_1 \leq x_2 \diamond y_2 \quad (\text{Klement ve diğ, 2000}).$$

Tanım 2.1.8: $\diamond: I \times I \rightarrow I$ bir t-conorm olmak üzere $x, y \in I$ iken $x \diamond \dots \diamond^{(n)} x > y$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ mevcut ise $\diamond$ t-conormuna Arşimet t-conorm denir.

Çarpım ($\diamond_P$) ve Lukasiewicz ($\diamond_L$) birer Arşimet t-conorm iken maximum ($\vee$) Arşimet olmayan bir t-conormdur (Klement ve diğ., 2000).

Önerme 2.1.9: $\diamond: I \times I \rightarrow I$ fonksiyonu bir t-conormdur $\Leftrightarrow x, y \in I$ iken

$$x \diamond y = 1 - ((1 - x) * (1 - y))$$

olacak şekilde bir $*$ t-normu mevcuttur (Klement ve diğ, 2000).

Tanım 2.1.10: Bir $*$ t-normu (benzer şekilde $\diamond$ t-conormu) I ve $I \times I$ üzerindeki standart topolojilere göre bir fonksiyon olarak sürekli ise bu $*$ t-normuna (benzer şekilde $\diamond$ t-conormuna) süreklidir denir (Klement ve diğ, 2000).

Örnek 2.1.11: Örnek 2.1.2'de verilen $\wedge, *_P, *_L$ t-normları ile Örnek 2.1.6'da verilen ve bunların dualleri olan $\vee, \diamond_P, \diamond_L$ t-conormları süreklidirler (Klement ve diğ, 2000).

Uyarı 2.1.12: (1) t-norm (benzer şekilde t-conorm) tanımlarındaki ilk özelliklerinden (değişme özelliğinden) görülmektedir ki, $*$ fonksiyonunun (benzer şekilde $\diamond$ fonksiyonunun) sürekliliği ilk bileşene göre sürekliliğe denktir.

(2) Özel olarak, bir t-normun veya bir t-conormun üstten (alttan) yarı-sürekli olması için gerek ve yeter koşul fonksiyonunun ilk bileşene göre sağdan sürekli (soldan sürekli) olmasıdır (Klement ve diğ., 2000).

Örnek 2.1.13: (1) Aşağıdaki şekilde tanımlanan $*_N$ nilpotent t-norm alttan yarı-sürekli, fakat üstten yarı-sürekli olmadığından sürekli değildir.

$$x *_N y = \begin{cases} 0, & \text{eğer } x + y \leq 1 \text{ ise} \\ \min\{x, y\}, & \text{eğer } x + y > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

(2) $*_D$ Drastic çarpım t-norm üstten yarı sürekli, fakat alttan yarı-sürekli olmadığından sürekli değildir (Klement ve diğ., 2000).

Tanım 2.1.14: $\mathfrak{R}: I \times I \rightarrow I$ bir fonksiyon olmak üzere $x, y \in I$ iken

$$\mathfrak{R}(x, y) = \sup\{z \in I: x * z \leq y\} \quad (2.1)$$

olacak şekilde bir $*$ t-normu mevcut ise $\mathfrak{R}$ 'ye rezidual gerektirme (residual implication) adı verilir. Eğer $\mathfrak{R}$ bir $*$ t-normundan üretilen rezidual gerektirme ise $\mathfrak{R}$ fonksiyonu " $\rightarrow_*$ " şeklinde gösterilir. Ayrıca " $\rightarrow_*$ " operatörüne $*$ t-normunun $*$ -reziduumu ($*$ -residuum) denir.

Her $*$ t-normu için $x \in I$ iken $x * 0 = 0$ olduğundan Eşitlik (2.1)'de tanımlanan kümenin boştan farklı olduğu açıktır (Klement ve diğ., 2000).

Önerme 2.1.15: $\rightarrow_*: I \times I \rightarrow I$ bir $*$ -reziduum operatörü ise $x, y, z \in I$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) $x \rightarrow_* x = 1, 1 \rightarrow_* x = x, 0 \rightarrow_* 1 = 1.$
- (ii) $(x * y) \rightarrow_* z = x \rightarrow_* (y \rightarrow_* z).$
- (iii) $(x \rightarrow_* y) \vee (y \rightarrow_* x) = 1.$
- (iv) $\rightarrow_*$ operatörü birinci bileşenine göre artmayan ve ikinci bileşenine göre azalmayandır (Klement ve diğ., 2000).

Önerme 2.1.16: $*$: $I \times I \rightarrow I$ bir t-norm olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) $*$ sol-sürekli bir t-normdur.
- (ii) $x, y, w \in I$ iken $x * w \leq y \Leftrightarrow x \rightarrow_* y \geq w$.
- (iii) $x, y \in I$ iken $x \rightarrow_* y = \max\{u \in I: x * u \leq y\}$.

(Klement ve diğ., 2000).

Eşitlik (2.1) ve Önerme 2.1.16 birlikte göz önüne alındığında sürekli bir $*$ t-normunun $*$ -rezidiyum operatörünün ($\rightarrow_*$) aşağıdaki şekilde tek türlü belirli olduğu elde edilir.

$$x \rightarrow_* y = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \sup\{w \in I | x * w = y\}, & x > y \end{cases} \quad (2.2)$$

Bu durumda Eşitlik (2.2)'den minimum ($\wedge$), çarpım ($*_p$), Lukasiewicz ($*_L$) ve Hamacher çarpım ($*_H$) t-normlarının $*$ -rezidiyum operatörleri sırasıyla aşağıdaki şekildedir.

$$x \rightarrow_{\wedge} y = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$x \rightarrow_{*p} y = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$x \rightarrow_{*L} y = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ 1 + y - x, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$x \rightarrow_{*H} y = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \frac{xy}{xy+x-y}, & \text{diğer} \end{cases} \quad (\text{Klement ve diğ., 2000}).$$

Sonuç 2.1.17: $*$: $I \times I \rightarrow I$ ikili işleminin sürekli bir t-norm olması için gerek ve yeter koşul $x, y \in I$ iken $x \wedge y = (x \rightarrow_* y) * x$ olmasıdır (Klement ve diğ., 2000).

Tanım 2.1.18: $*$: $I \times I \rightarrow I$ bir t-norm, $f_*: I \rightarrow [0, \infty]$ kesin azalan, 0 noktasında sağ-sürekli ve $f_*(1) = 0$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Eğer $x, y \in I$ iken

$$(1) f_*(x) + f_*(y) \in \text{Ran}(f_*) \cup [f_*(0), \infty]$$

$$(2) x * y = f_*^{(-1)}(f_*(x) + f_*(y))$$

koşulları sağlanıyorsa f_* fonksiyonuna $*$ t-normunun toplamsal üretici denir. Burada $f_*^{(-1)}$, f_* fonksiyonunun yarı-tersidir.

$f_*: [a, b] \rightarrow [c, d]$, $([a, b], [c, d] \subseteq [-\infty, \infty])$ monoton bir fonksiyon olmak üzere $f_*^{(-1)}(y) = \{x \in [a, b]: (f(x) - y)(f(b) - f(a)) < 0\}$ şeklinde tanımlanan $f_*^{(-1)}: [c, d] \rightarrow [a, b]$ fonksiyonuna f_* fonksiyonunun yarı-tersi denir (Klement ve diğ., 2000).

Teorem 2.1.19: $*$: $I \times I \rightarrow I$ ikili işleminin sürekli bir Arşimet t-norm olması için gerek ve yeter koşul $*$ ikili işleminin sürekli bir toplamsal üretece (f_*) sahip olmasıdır.

$*$ sürekli Arşimet t-normunun $*$ -rezidiyumu, toplamsal üretici f_* ile aşağıdaki gibi basit bir şekilde bulunmaktadır.

$$x \rightarrow_* y = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ f_*^{(-1)}(\max\{f_*(y) - f_*(x), 0\}), & x, y \in (0, 1] \end{cases} \quad (2.3)$$

Dikkat edilirse her sürekli toplamsal üreteç f_* için

$$f_*^{(-1)}(y) = f_*^{-1}(\min\{f_*(0), y\})$$

sağlanır (Klement ve diğ., 2000).

Sonuç 2.1.20: $*$ sürekli bir Arşimet t-norm olmak üzere $\rightarrow_*$ rezidiyum operatörü $(0, 1] \times (0, 1]$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur. Fakat bu durum Arşimet olmayan t-norm için sağlanmamaktadır (Klement ve diğ., 2000).

2.2. Bulanık Kümeler ve Bulanık Sayılar

Tanım 2.2.1: X bir küme olmak üzere her $\lambda: X \rightarrow I$ dönüşümüne X 'in bir bulanık alt kümesi denir.

X 'in bütün bulanık alt kümelerinin ailesi I^X ile gösterilir. Yani, $I^X = \{\lambda | \lambda: X \rightarrow I\}$ dir.

$a \in X$ ve $\lambda \in I^X$ olmak üzere $\lambda(a)$ değerine a elemanının λ bulanık kümesine ait olma (üyelik) derecesi adı verilir.

$\{a \in X: \lambda(a) > 0\} \subseteq X$ alt kümesine λ bulanık kümesinin desteği denir ve bu küme $\text{supp}\lambda$ ile gösterilir.

$\alpha \in I$ olmak üzere $\{a \in X: \lambda(a) \geq \alpha\} \subseteq X$ alt kümesine λ bulanık kümesinin α -seviyesi adı verilir ve bu küme λ_α ile gösterilir.

$\alpha \in I$ olmak üzere her $a \in X$ için $\underline{\alpha}(a) = \alpha$ olarak tanımlanan $\underline{\alpha}$ bulanık kümesine X 'in sabit bulanık alt kümesi denir (Zadeh, 1965).

Örnek 2.2.2: $A \subseteq X$ olmak üzere $\chi_A(a) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$ şeklinde tanımlanan $\chi_A: X \rightarrow \{0,1\} \subset I$ dönüşümü X 'in bir bulanık alt kümesidir (Zadeh, 1965).

Yukarıdaki örnekten de görüleceği üzere klasik her küme bir bulanık kümedir.

Tanım 2.2.3: $\lambda_1, \lambda_2 \in I^X$ olmak üzere

(1) $\lambda_1 = \lambda_2: \Leftrightarrow$ Her $a \in X$ için $\lambda_1(a) = \lambda_2(a)$.

(2) $\lambda_1 \subseteq \lambda_2: \Leftrightarrow$ Her $a \in X$ için $\lambda_1(a) \leq \lambda_2(a)$.

(3) λ_1 ve λ_2 bulanık kümelerinin birleşim ve kesişim işlemleri sırasıyla $(\lambda_1 \vee \lambda_2)(a) = \max\{\lambda_1(a), \lambda_2(a)\}$ ve $(\lambda_1 \wedge \lambda_2)(a) = \min\{\lambda_1(a), \lambda_2(a)\}$ ($\forall a \in X$) olarak tanımlanır. Daha genel olarak, $\{\lambda_i\}_{i \in J} \subseteq I^X$ ailesi için birleşim ve kesişim işlemleri sırasıyla

$$(\bigvee_{i \in J} \lambda_i)(a) := \bigvee_{i \in J} \lambda_i(a) \text{ ve } (\bigwedge_{i \in J} \lambda_i)(a) = \bigwedge_{i \in J} \lambda_i(a) \quad (\forall a \in X)$$

şeklinde tanımlanır (Zadeh, 1965).

(4) λ bulanık kümesinin tümleyeni her $a \in X$ için $\lambda'(a) = 1 - \lambda(a)$ şeklinde tanımlanan $\lambda': X \rightarrow I$ dönüşümüdür (Zadeh, 1965).

Önerme 2.2.4: $\{\lambda_i\}_{i \in J} \subseteq I^X$ olmak üzere De-Morgan kuralları sağlanmaktadır.

- (i) $(\bigvee_{i \in J} \lambda_i)' = \bigwedge_{i \in J} \lambda_i',$
- (ii) $(\bigwedge_{i \in J} \lambda_i)' = \bigvee_{i \in J} \lambda_i'$

dir (Zadeh, 1965).

Tanım 2.2.5: X ve Y boştan farklı iki klasik küme ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

(1) $\lambda \in I^X$ bulanık alt kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$f(\lambda)(y) = \begin{cases} \sup\{\lambda(x): x \in X, y = f(x)\}, & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}, \quad (\forall y \in Y).$$

(2) $\mu \in I^Y$ bulanık alt kümesinin f fonksiyonu altındaki ters görüntüsü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$f^{-1}(\mu)(x) = (\mu \circ f)(x) = \mu(f(x)), \quad (\forall x \in X)$$

(Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Tanım 2.2.6: Her $x: \mathbb{R} \rightarrow I$ dönüşümüne bir bulanık sayı adı verilir. Bir başka ifade ile $\mathbb{R}$ 'nin bulanık alt kümelerine bulanık sayı denir. Tüm bulanık sayıların kümesi $I^{\mathbb{R}}$ ile gösterilir. Yani, $I^{\mathbb{R}} = \{\lambda | \lambda: \mathbb{R} \rightarrow I\}$ dir (Zadeh, 1965; Mizumoto ve Tanaka, 1979).

Tanım 2.2.7: $x \in I^{\mathbb{R}}$ olsun.

(1) Eğer $s \leq u \leq t$ iken $x(u) \geq \min(x(s), x(t))$ oluyorsa x bulanık sayısına konveks denir.

(2) $x(t) = 1$ olacak şekilde bir $t \in \mathbb{R}$ mevcut ise x bulanık sayısına normal denir (Mizumoto ve Tanaka, 1979).

Tanım 2.2.8: $x \in I^{\mathbb{R}}$ ve $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere $\{t | x(t) \geq \alpha\}$ kümesine x bulanık sayısının α -seviye kümesi denir ve bu küme $[x]_{\alpha}$ ile gösterilir. Yani, $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere $[x]_{\alpha} = \{t | x(t) \geq \alpha\}$ dir (Zadeh, 1965).

Önerme 2.2.9: $x \in I^{\mathbb{R}}$ bulanık sayısının konveks olması için gerek ve yeter koşul her $\alpha \in (0,1]$ için $[x]_{\alpha}$ kümesinin $\mathbb{R}$ 'de konveks olmasıdır (Mizumoto ve Tanaka, 1979).

Önerme 2.2.10: $x \in I^{\mathbb{R}}$ üst yarı-sürekli, konveks ve normal ise her $\alpha \in (0,1]$ için $[x]_{\alpha}$ kümesi kapalı bir aralıktır. Yani, $a^{\alpha}, b^{\alpha} \in \mathbb{R}$ olmak üzere $[x]_{\alpha} = [a^{\alpha}, b^{\alpha}]$ şeklindedir (Mizumoto ve Tanaka, 1979).

Notasyon 2.2.11: Üst yarı-sürekli, konveks ve normal bulanık sayıların kümesi E ile gösterilecektir. Yani, $E = \{x \in I^{\mathbb{R}} | x \text{ üst yarı-sürekli, konveks, normal}\}$ dir (Mizumoto ve Tanaka, 1979).

Uyarı 2.2.12: $x \in \mathbb{R}$ iken $\bar{x}(t) = \begin{cases} 1, & t = x \\ 0, & t \neq x \end{cases}$ şeklinde tanımlanan $\bar{x}: \mathbb{R} \rightarrow I$ fonksiyonu için $\bar{x} \in E$ olmaktadır. Yani her reel sayı bir üst yarı-sürekli, konveks ve normal bulanık sayı olmaktadır (Mizumoto ve Tanaka, 1979).

Tanım 2.2.13: $x \in I^{\mathbb{R}}$ iken $t < 0$ için $x(t) = 0$ oluyorsa x bulanık sayısına negatif olmayan bulanık sayı denir.

Negatif olmayan üst yarı-sürekli, konveks ve normal bulanık sayıların kümesi G ile gösterilir. Yani, $G = \{x \in I^{\mathbb{R}} | x \text{ negatif olmayan, üst yarı-sürekli, konveks, normal}\}$ dir (Mizumoto ve Tanaka, 1979).

Tanım 2.2.14: $x, y \in I^{\mathbb{R}}$ ve $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $I^{\mathbb{R}}$ üzerindeki cebirsel işlemler aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$(1) (x + y)(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \min(x(s), y(t - s)),$$

$$(2) (x - y)(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \min(x(s), y(s - t)),$$

$$(3) (x \cdot y)(t) = \sup_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s \neq 0}} \min\left(x(s), y\left(\frac{t}{s}\right)\right),$$

$$(4) \left(\frac{x}{y}\right)(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \min(x(ts), y(s)).$$

Burada "+" ve "-" işlemine göre birim elemanlar sırasıyla $\bar{0}, \bar{1} \in G$ olup $\bar{0}(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$ ve $\bar{1}(t) = \begin{cases} 1, & t = 1 \\ 0, & t \neq 1 \end{cases}$ şeklindedir.

$x \in I^{\mathbb{R}}$ için $-x := \bar{0} - x$ şeklinde tanımlanır ve $(-x)(t) = x(-t)$ dir. Ayrıca $x \in I^{\mathbb{R}}$ nin mutlak değeri ise $|x|(t) := \begin{cases} \max(x(-t), x(t)), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ şeklindedir (Mizumoto ve Tanaka, 1979).

Önerme 2.2.15: $x, y \in E, \alpha \in (0,1]$ için $[x]_{\alpha} = [a_1^{\alpha}, b_1^{\alpha}]$ ve $[y]_{\alpha} = [a_2^{\alpha}, b_2^{\alpha}]$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) $[x + y]_{\alpha} = [a_1^{\alpha} + a_2^{\alpha}, b_1^{\alpha} + b_2^{\alpha}]$,
- (ii) $[x - y]_{\alpha} = [a_1^{\alpha} - b_2^{\alpha}, b_1^{\alpha} - a_2^{\alpha}]$,
- (iii) $[x \cdot y]_{\alpha} = [a_1^{\alpha} \cdot a_2^{\alpha}, b_1^{\alpha} \cdot b_2^{\alpha}]$,
- (iv) $\left[\frac{1}{x}\right]_{\alpha} = \left[\frac{1}{b_1^{\alpha}}, \frac{1}{a_1^{\alpha}}\right] \text{ (} a_1^{\alpha} > 0 \text{ ise)}$,
- (v) $[|x|]_{\alpha} = [\max(0, a_1^{\alpha}, -b_1^{\alpha}), \max(|a_1^{\alpha}|, |b_1^{\alpha}|)]$

(Mizumoto ve Tanaka, 1979).

Aşağıdaki önerme $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere $[a^{\alpha}, b^{\alpha}]$ kapalı aralığının hangi koşullar altında bir bulanık sayı ifade ettiğini göstermektedir.

Önerme 2.2.16: $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere $\{[a^{\alpha}, b^{\alpha}]\}$ boştan farklı aralıkların bir ailesi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $[a^{\alpha}, b^{\alpha}]$ kapalı aralığı bir $x \in E$ bulanık sayısının α -seviye kümesini temsil etmektedir.

- (i) Her $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$ için $[a^{\alpha_2}, b^{\alpha_2}] \subset [a^{\alpha_1}, b^{\alpha_1}]$.
- (ii) $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0,1]$ dizisi α noktasına yakınsayan artan bir dizi iken $\left[\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\alpha_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} b^{\alpha_n}\right] = [a^{\alpha}, b^{\alpha}]$.

Tersine $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere $[a^\alpha, b^\alpha]$ kapalı aralığı bir $x \in E$ bulanık sayısının α -seviye kümesi ise (i) ve (ii) koşulları sağlanır (Mizumoto ve Tanaka, 1979).

Önerme 2.2.17: $x, y \in E, \alpha \in (0,1]$ için $[x]_\alpha = [a_1^\alpha, b_1^\alpha]$ ve $[y]_\alpha = [a_2^\alpha, b_2^\alpha]$ olmak üzere aşağıda tanımlanan $\preceq$ bağıntısı E kümesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

$x \preceq y: \Leftrightarrow$ Her $\alpha \in (0,1]$ için $a_1^\alpha \leq a_2^\alpha$ ve $b_1^\alpha \leq b_2^\alpha$ (Mizumoto ve Tanaka, 1979).

2.3. Bulanık ve Bulanıklaştırılmış Topolojik Uzaylar

Tanım 2.3.1: X bir küme ve $\mathcal{T} \subset I^X$ olsun. Eğer $\mathcal{T}$ ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\mathcal{T}$ 'ya X üzerinde Chang anlamında bir bulanık topoloji denir.

(C1) $\underline{0}, \underline{1} \in \mathcal{T}$.

(C2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \tau$ ise $\lambda_1 \wedge \lambda_2 \in \mathcal{T}$.

(C2) Her $i \in J$ için $\lambda_i \in \tau$ ise $\bigvee_{i \in J} \lambda_i \in \mathcal{T}$.

$(X, \mathcal{T})$ ikilisine de bir Chang bulanık topolojik uzay denir (Chang, 1968).

Örnek 2.3.2: (X, τ) bir klasik topolojik uzay olmak üzere $\mathcal{T} = \chi_\tau := \{\chi_G: G \in \tau\}$ ailesi X üzerinde Chang anlamında bir bulanık topolojidir (Chang, 1968).

Yukarıdaki örnekten de görüleceği üzere klasik anlamdaki her topoloji Chang anlamında bir bulanık topolojidir.

Tanım 2.3.3: $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(X, \mathcal{T}_2)$ iki Chang bulanık topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $\lambda \in \mathcal{T}_2$ için $f^{-1}(\lambda) \in \mathcal{T}_1$ oluyorsa f fonksiyonuna sürekli denir (Chang, 1968).

Uyarı 2.3.4: Klasik topolojik uzaylar arasındaki sabit her fonksiyon sürekli iken Chang bulanık topolojik uzaylar arasındaki sabit fonksiyonların sürekli olması gerekmez. Bu özelliği bulanık topolojik uzaylarda elde etmek için Lowen (1976), bulanık topolojik uzay tanımını aşağıdaki şekilde vermiştir. Ancak bu durumda da bulanık topolojik uzayların klasik topolojik uzayların bir genelleştirilmesi olması kaybedilmiştir.

Tanım 2.3.5: X bir küme ve $\mathcal{T} \subset I^X$ olsun. Eğer $\mathcal{T}$ ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\mathcal{T}$ 'ya X üzerinde Lowen anlamında bir bulanık topoloji denir.

(L1) Her $\alpha \in I$ için $\underline{\alpha} \in \mathcal{T}$.

(L2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \tau$ ise $\lambda_1 \wedge \lambda_2 \in \mathcal{T}$.

(L2) Her $i \in J$ için $\lambda_i \in \tau$ ise $\bigvee_{i \in J} \lambda_i \in \mathcal{T}$.

$(X, \mathcal{T})$ ikilisine de bir Lowen bulanık topolojik uzay adı verilir (Lowen, 1976).

Dikkat edilirse Chang ve Lowen anlamındaki bulanık topoloji tanımlarında kümeler bulanık olmasına rağmen topoloji aksiyomları klasik anlamdadır. Bulanık kümelerin açıklığının derecelendirildiği bulanık topoloji kavramı Shostak (1985) tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 2.3.6: X bir küme olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{T}: I^X \rightarrow I$ dönüşümüne X üzerinde Shostak anlamında bulanık topoloji denir.

(BT1) $\mathcal{T}(\underline{0}) = \mathcal{T}(\underline{1}) = 1$.

(BT2) Her $\lambda_1, \lambda_2 \in I^X$ için $\mathcal{T}(\lambda_1) \wedge \mathcal{T}(\lambda_2) \leq \mathcal{T}(\lambda_1 \wedge \lambda_2)$.

(BT3) Her $\{\lambda_i | i \in J\} \subseteq I^X$ için $\bigwedge_{i \in J} \mathcal{T}(\lambda_i) \leq \mathcal{T}(\bigvee_{i \in J} \lambda_i)$.

$(X, \mathcal{T})$ ikilisine de Shostak bulanık topolojik uzay adı verilir. $\lambda \in I^X$ olmak üzere $\mathcal{T}(\lambda)$ değerine de λ bulanık kümesinin açıklık derecesi denir (Shostak, 1985).

Daha sonra, yukarıdaki yapının özel bir hali olan klasik kümelerin açıklığının derecelendirildiği bulanıklaştırılmış topolojik uzay yapısı Ying (1991) tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 2.3.7: X bir küme olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{T}: 2^X \rightarrow I$ dönüşümüne X üzerinde bulanıklaştırılmış topoloji denir.

(BT1) $\mathcal{T}(X) = \mathcal{T}(\emptyset) = 1$.

(BT2) Her $U, V \in 2^X$ için $\mathcal{T}(U) \wedge \mathcal{T}(V) \leq \mathcal{T}(U \cap V)$.

(BT3) Her $\{U_i | i \in I\} \subseteq 2^X$ için $\bigwedge_{i \in I} \mathcal{T}(U_i) \leq \mathcal{T}(\bigcup_{i \in I} U_i)$.

$(X, \mathcal{T})$ ikilisine de bulanıklaştırılmış topolojik uzay adı verilir. $A \subseteq X$ olmak üzere $\mathcal{T}(A)$ değerine de A kümesinin açıklık derecesi denir (Ying, 1991).

Örnek 2.3.8: (X, τ) bir klasik topolojik uzay olmak üzere her $A \in 2^X$ için $\mathcal{T}(A) = \begin{cases} 1, & A \in \tau \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$ şeklinde tanımlanan $\mathcal{T}: 2^X \rightarrow \{0,1\} \subset I$ dönüşümü bir bulanıklaştırılmış topolojidir (Ying, 1991).

Yukarıdaki örnekten de görüleceği üzere klasik anlamındaki her topoloji bulanıklaştırılmış bir topolojidir.

Önerme 2.3.9: $(X, \mathcal{T})$ bir bulanıklaştırılmış topolojik uzay ve $\alpha \in I$ olsun. Bu durumda, $\tau_\alpha = \{A \in 2^X : \mathcal{T}(A) \geq \alpha\}$ ailesi X üzerinde klasik bir topolojidir. Bu topolojiye $\mathcal{T}$ bulanıklaştırılmış topolojisinin α -seviye topolojisi adı verilir (Shostak, 1989).

Önerme 2.3.10: $(X, \mathcal{T})$ bir bulanıklaştırılmış topolojik uzay ve $\alpha, \beta \in I$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) $\alpha \leq \beta$ iken $\mathcal{T}_\beta \subseteq \mathcal{T}_\alpha$. Yani, $\{\mathcal{T}_\alpha : \alpha \in I\}$ ailesi bulanıklaştırılmış topolojilerin α -seviye topolojilerinin azalan bir ailesidir.
- (ii) Her $\alpha \in I$ için $\mathcal{T}_\alpha$ alttan-yarı süreklidir, yani $\mathcal{T}_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} \mathcal{T}_\beta$ ($\mathcal{T}_0 = 2^X$) dır (Miñana ve Shostak, 2016).

Aşağıdaki önermede, Miñana ve Shostak (2016) tarafından klasik topolojiler ailesinden bulanıklaştırılmış topolojinin nasıl üretileceği gösterilmektedir.

Önerme 2.3.11: X bir küme, $D \subseteq I$ yoğun bir küme ve $\{\tau_\alpha : \alpha \in D\}$, X üzerindeki klasik topolojilerin azalan bir ailesi olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{T}(A) = \sup\{\alpha \in D : A \in \tau_\alpha\} \text{ (sup}\emptyset = 0\text{)}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{T}: 2^X \rightarrow I$ dönüşümü bir bulanıklaştırılmış topolojidir (Miñana ve Shostak, 2016).

3. BULANIK METRİK UZAYLAR

Bu bölümde Kramosil ve Michalek (1975), Kaleva ve Seikkala (1984), ile George ve Veeramani (1994) tarafından farklı şekillerde tanımlanan bulanık metrik uzay yapıları tanıtılarak, temel özellikleri ile birlikte incelenecektir. Daha sonra Kramosil ve Michalek anlamındaki bulanık metrik uzaylarda elde edilen bazı sabit nokta teoremleri verilecektir.

3.1. KS-Bulanık Metrik Uzaylar

Tanım 3.1.1: X bir küme, $L, R: I \times I \rightarrow I$ simetrik, azalmayan ve $L(0,0) = 0$ ve $R(1,1) = 1$ koşullarını sağlayan iki dönüşüm olsun. $\mathbb{d}: X \times X \rightarrow G$ dönüşümü için $x, y \in X$ ve $\alpha \in (0,1]$ iken $[\mathbb{d}(x,y)]_\alpha = [\lambda_\alpha(x,y), \rho_\alpha(x,y)]$ olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $\mathbb{d}$ dönüşümüne X üzerinde bir KS-bulanık metrik adı verilir.

(KS1) Her $x, y \in X$ için $\mathbb{d}(x, y) = \bar{0} \Leftrightarrow x = y$.

(KS2) Her $x, y \in X$ için $\mathbb{d}(x, y) = \mathbb{d}(y, x)$.

(KS3) Her $x, y, z \in X$ için

(1) $s \leq \lambda_1(x, z)$, $t \leq \lambda_1(z, y)$ ve $s + t \leq \lambda_1(x, y)$ iken
 $\mathbb{d}(x, y)(s + t) \geq L(\mathbb{d}(x, z)(s), \mathbb{d}(z, y)(t))$,

(2) $s \geq \lambda_1(x, z)$, $t \geq \lambda_1(z, y)$ ve $s + t \geq \lambda_1(x, y)$ iken
 $\mathbb{d}(x, y)(s + t) \leq R(\mathbb{d}(x, z)(s), \mathbb{d}(z, y)(t))$.

Üzerinde bir $\mathbb{d}$ KS-bulanık metriği tanımlanmış olan X kümesine KS-bulanık metrik uzay adı verilir ve bu uzay $(X, \mathbb{d}, L, R)$ dördlüsü ile gösterilir. Burada, $\mathbb{d}(x, y)(t)$ değeri x ile y noktaları arasındaki uzaklığın t olma olasılığını ifade etmektedir. Yani, $\mathbb{d}(x, y)(t) = Poss(dis(x, y) = t)$ olarak yorumlanmaktadır (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Uyarı 3.1.2: KS-bulanık metrik uzaylar klasik metrik uzayların bir genellemesidir. Ayrıca, $(X, \mathbb{d}, L, R)$ KS-bulanık metrik uzayında özel olarak $L(a, b) \equiv 0$ ve $R(a, b) = \begin{cases} 0, & a = b = 0 \\ 1, & \text{diğer} \end{cases}$ alınırsa bu durumda $(X, \mathbb{d})$ bir klasik metrik uzay olmaktadır (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Önerme 3.1.3: $(X, \mathbb{d}, L, R)$ bir KS-bulanık metrik uzay olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) $L \geq \vee$ ise her $x, y \in X$ için $\lambda_1(x, y) = 0$.
- (ii) $R \leq \wedge$ ise her $t > \lambda_1(x, y)$ için $\mathbb{d}(x, y)(t) = 0$.

Önerme 3.1.4: $(X, \mathbb{d}, L, R)$ bir KS-bulanık metrik uzay olmak üzere her $x, y \in X$ için $\mathbb{d}(x, y)(\cdot): [0, \lambda_1(x, y)] \rightarrow I$ fonksiyonu azalmayan ve $\mathbb{d}(x, y)(\cdot): (\lambda_1(x, y), \infty] \rightarrow I$ fonksiyonu ise artmayandır (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Önerme 3.1.5: $(X, \mathbb{d}, L, R)$ bir KS-bulanık metrik uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) $R = \vee$.
- (ii) $\alpha \in (0, 1]$ ve $x, y, z \in X$ iken $\rho_\alpha(x, y) \leq \rho_\alpha(x, z) + \rho_\alpha(z, y)$

(Kaleva ve Seikkala, 1984).

Önerme 3.1.6: $(X, \mathbb{d}, L, R)$ bir KS-bulanık metrik uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) $L = \wedge$.
- (ii) $\alpha \in (0, 1]$ ve $x, y, z \in X$ iken $\lambda_\alpha(x, y) \leq \lambda_\alpha(x, z) + \lambda_\alpha(z, y)$

(Kaleva ve Seikkala, 1984).

Sonuç 3.1.7: $(X, \mathbb{d}, L, R)$ bir KS-bulanık metrik uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) $R = \vee$ ve $L = \wedge$.
- (ii) $x, y, z \in X$ iken $\mathbb{d}(x, y) \leq \mathbb{d}(x, z) + \mathbb{d}(z, y)$

(Kaleva ve Seikkala, 1984).

Uyarı 3.1.8: $\star: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ simetrik, sürekli ve azalmayan bir dönüşüm olsun. Eğer $x, y \in G$ ise $(x \star y)(t) = \sup_{\substack{(u,v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ u \star v = t}} \min(x(u), y(v))$ şeklinde tanımlanan $x \star y \in I^{\mathbb{R}}$ elde edilir (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Önerme 3.1.9: $x, y \in G, \alpha \in (0,1]$ için $[x]_{\alpha} = [a_1^{\alpha}, b_1^{\alpha}]$ ve $[y]_{\alpha} = [a_2^{\alpha}, b_2^{\alpha}]$ olmak üzere

$$[x \star y]_{\alpha} = [x]_{\alpha} \star [y]_{\alpha} = \{t \in \mathbb{R} | t = u \star v, u \in [x]_{\alpha}, v \in [y]_{\alpha}\}$$

sağlanır. Hatta, $\star$ sürekli olduğundan

$$[x \star y]_{\alpha} = [a_1^{\alpha} \star b_1^{\alpha}, a_2^{\alpha} \star b_2^{\alpha}]$$

bulunur (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Sonuç 3.1.10: $(X, \mathbb{d}, L, R)$ bir KS-bulanık metrik uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) $R = \vee$ ve $L = \wedge$.
- (ii) $x, y, z \in X$ iken $\mathbb{d}(x, y) \leq \mathbb{d}(x, z) \star \mathbb{d}(z, y)$.

Burada $\star = +$ alınırsa Sonuç 3.1.7 ve $\star = \vee$ alınırsa KS-bulanık ultrametrik uzay elde edilir (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Örnek 3.1.11: $\{\lambda_{\alpha}\}_{\alpha \in (0,1]}$ ve $\{\rho_{\alpha}\}_{\alpha \in (0,1]}$, X üzerinde pseudo-metriklerin birer ailesi, her $(x, y) \in X \times X$ için $\lambda_1(x, y) \leq \rho_1(x, y)$ ve $\lambda_{\alpha}(x, y)$, α 'ya göre sol-sürekli ve azalmayan; $\rho_{\alpha}(x, y)$, α 'ya göre sol-sürekli ve artmayan olsun. Eğer her $\alpha \in (0,1]$ için $\rho_{\alpha}(x, y) = 0$ iken $x = y$ sağlanıyorsa $x, y \in X$ iken $[\mathbb{d}(x, y)]_{\alpha} = [\lambda_{\alpha}(x, y), \rho_{\alpha}(x, y)]$ eşitliği ile Sonuç 3.1.7(ii)'deki üçgen eşitsizliğini sağlayan $\mathbb{d}: X \times X \rightarrow G$ KS-bulanık metriği elde edilir. Önerme 2.2.11'den bu eşitliğin bir bulanık sayı tanımladığı açıktır. Eğer sadece $\{\rho_{\alpha}\}_{\alpha \in (0,1]}$ verilirse, bu durumda $\lambda_{\alpha}(x, y) = \alpha \rho_{\alpha}(x, y)$ olarak alınır (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Örnek 3.1.12: $X = E$ olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\mathbb{d}(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & x \neq y \\ \bar{0}, & x = y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{d}: E \times E \rightarrow G$ dönüşümünü ele alalım. Önerme 2.2.10'dan $\alpha \in (0, 1]$ iken $[x]_\alpha = [a_1^\alpha, b_1^\alpha]$ ve $[y]_\alpha = [a_2^\alpha, b_2^\alpha]$ olmak üzere

$$[\mathbb{d}(x, y)]_\alpha = [\max(0, a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha), \max(|a_1^\alpha - b_2^\alpha|, |a_2^\alpha - b_1^\alpha|)]$$

sağlanır. Ayrıca $R = \vee$ ve $L \equiv 0$ alınırsa $(X, \mathbb{d}, L, R)$ bir KS-bulanık metrik uzay olmaktadır (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Tanım 3.1.13: $(X, \mathbb{d}, L, R)$ bir KS-bulanık metrik uzay, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{d}(x_n, x) = \bar{0}$ oluyorsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine x noktasına yakınsaktır denir (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Önerme 3.1.14: $(X, \mathbb{d}, L, R)$ bir KS-bulanık metrik uzay olsun. Eğer $\lim_{a \rightarrow 0^+} R(a, a) = 0$ sağlanıyorsa yakınsak her dizinin bir tek limit noktası vardır (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Tanım 3.1.15: $(X, \mathbb{d}, L, R)$ bir KS-bulanık metrik uzay, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \mathbb{d}(x_n, x_m) = \bar{0}$ oluyorsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Tanım 3.1.16: $(X, \mathbb{d}, L, R)$ bir KS-bulanık metrik uzay olsun. Eğer X 'deki her Cauchy dizisi bu uzaydaki bir noktaya yakınsak ise $(X, \mathbb{d}, L, R)$ KS-bulanık metrik uzayına bir tam KS-bulanık metrik uzay adı verilir (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Önerme 3.1.17: $(X, \mathbb{d}, L, \vee)$ KS-bulanık metrik uzayında yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Bu kısımdan itibaren aksi belirtilmedikçe $(X, \mathbb{d}, L, R)$ ile $\lim_{a \rightarrow 0^+} R(a, a) = 0$ koşulunu sağlayan KS-bulanık metrik uzaylar gösterilecektir.

Teorem 3.1.18: $(X, \mathbb{d}, L, R)$ bir KS-bulanık metrik uzay, $\varepsilon > 0$ ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun. $U(\varepsilon, \alpha) = \{(x, y) \in X \times X \mid \rho_\alpha(x, y) < \varepsilon\}$ olmak üzere $\{U(\varepsilon, \alpha) \mid \varepsilon > 0, \alpha \in (0, 1]\}$ küme ailesi $X \times X$ kümesi üzerinde bir Hausdorff düzgün uzayı $\mathcal{U}$ için bir tabandır. Dahası,

$N_x(\varepsilon, \alpha) = \{y \in X | \rho_\alpha(x, y) < \varepsilon\}$ olmak üzere $\{N_x(\varepsilon, \alpha) | \varepsilon > 0, \alpha \in (0, 1]\}$ küme ailesi X kümesi üzerinde bir Hausdorff topolojik uzayı için bir tabandır ve bu uzay metriklenelirdir (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Notasyon 3.1.19:

$\mathcal{G} = \{x \in R^I | u \text{ normal, quasi - konkav, üst yarı - sürekli, kompakt desteğe sahip}\}$ olsun.

$x \in \mathcal{G}$ ve $\alpha \in I$ olmak üzere x 'in α seviye kümesi $[x]_\alpha = [a^\alpha, b^\alpha]$ şeklinde gösterilir ve bu küme $\mathbb{R}$ de boştan farklı, kompakt bir aralıktır (Kaleva ve Kauhanen, 2014).

Tanım 3.1.20: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}$ bir dizi ve $x \in \mathcal{G}$ olmak üzere $\alpha \in I$ için $[x]_\alpha = [a^\alpha, b^\alpha]$ ve $[x_n]_\alpha = [a_n^\alpha, b_n^\alpha]$ olarak gösterilsin. Eğer her $\alpha \in I$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^\alpha = a^\alpha$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^\alpha = b^\alpha$ oluyorsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi x noktasına seviye yakınsaktır (Kaleva ve Kauhanen, 2014).

Önerme 3.1.21: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}$ bir dizi ve $x = \bar{0}$ ise her $\alpha \in I$ için

$$0 = a^\alpha = b^\alpha \leq a_n^\alpha \leq b_n^\alpha \leq b_n^0$$

dir. Buradan, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{0} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^0 = 0$ sağlanır (Kaleva ve Kauhanen, 2014).

$(X, \mathbb{d}, L, R)$ ile $\mathbb{d}: X \times X \rightarrow \mathcal{G}$ olmak üzere Tanım 3.1.1 deki tüm aksiyomları sağlayan KS-bulanık metrik uzayı ifade edilsin. Bu durumda, Teorem 3.1.18 aşağıdaki şekilde yeniden verilmiştir.

Teorem 3.1.22: $(X, \mathbb{d}, L, R)$ bir KS-bulanık metrik uzay, $\varepsilon > 0$ ve $\alpha \in I$ olsun. $U(\varepsilon, \alpha) = \{(x, y) \in X \times X | \rho_\alpha(x, y) < \varepsilon\}$ olmak üzere $\{U(\varepsilon, \alpha) | \varepsilon > 0, \alpha \in I\}$ küme ailesi $X \times X$ kümesi üzerinde bir Hausdorff düzgün uzayı $\mathcal{U}$ için bir tabandır. Eğer $(\varepsilon_n, \alpha_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$ ise $\{U(\varepsilon_n, \alpha_n) | n \in \mathbb{N}\}$ küme ailesi $\mathcal{U}$ için sayılabilir bir tabandır. Dahası,

$N_x(\varepsilon, \alpha) = \{y \in X | \rho_\alpha(x, y) < \varepsilon\}$ olmak üzere $\{N_x(\varepsilon, \alpha) | \varepsilon > 0, \alpha \in I\}$ küme ailesi X kümesi üzerinde bir Hausdorff topolojisi için bir tabandır, bu şekilde üretilen topolojiye KS-bulanık metrik topoloji adı verilir ve $\tau_{\mathbb{d}}$ ile gösterilir. Dahası, $\tau_{\mathbb{d}}$ metriklenelirdir (Kaleva ve Kauhanen, 2014).

Sonuç 3.1.23: $(X, \tau_{\mathbb{A}})$ KS-bulanık metrik topolojik uzayı birinci sayılabilir (Kaleva ve Kauhanen, 2014).

Sonuç 3.1.24: $(X, \tau_{\mathbb{A}})$ KS-bulanık metrik topolojik uzayı olmak üzere $\tau_{\rho_0} = \tau_{\mathbb{A}}$ sağlanır (Kaleva ve Kauhanen, 2014).

Sonuç 3.1.25: Bir dizinin KS-bulanık metrik uzaydaki yakınsaklığı ile KS-bulanık metriğin ürettiği topolojik uzaydaki yakınsaklığı birbirine denktir. Bir başka ifade ile

$$x_n \xrightarrow{\mathbb{A}} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\tau_{\mathbb{A}}} x \quad (\text{Kaleva ve Kauhanen, 2014}).$$

Tanım 3.1.26: $(X, \mathbb{A}, L, R)$ bir KS-bulanık metrik uzay olmak üzere eğer $(X, \tau_{\mathbb{A}})$ topolojik uzayı kompakt ise $(X, \mathbb{A}, L, R)$ KS-bulanık metrik uzayına kompakt denir. Eğer $(X, \mathbb{A}, L, R)$ deki her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa bu uzaya dizisel kompakt uzay denir (Kaleva ve Kauhanen, 2014).

Önerme 3.1.27: $(X, \mathbb{A}, L, R)$ KS-bulanık metrik uzayı kompakt ise $(X, \tau_{\mathbb{A}})$ ikinci sayılabilir ve ayrılabilir (Kaleva ve Kauhanen, 2014).

Teorem 3.1.28: $(X, \mathbb{A}, L, R)$ KS-bulanık metrik uzayının kompakt olması için gerek ve yeter şart dizisel kompakt olmasıdır (Kaleva ve Kauhanen, 2014).

Tanım 3.1.29: $(X, \mathbb{A}, L, R)$ bir KS-bulanık metrik uzay olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\bigcup_{i=1}^n N_{x_i}(\varepsilon, 0)$, X in bir açık örtümü olacak şekilde $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ mevcut ise $(X, \mathbb{A}, L, R)$ KS-bulanık metrik uzayına tamamen sınırlı denir (Kaleva ve Kauhanen, 2014).

Teorem 3.1.30: $(X, \mathbb{A}, L, R)$ KS-bulanık metrik uzayının kompakt olması için gerek ve yeter şart tamamen sınırlı ve tam olmasıdır (Kaleva ve Kauhanen, 2014).

Tanım 3.1.31: (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere $\tau = \tau_{\mathbb{A}}$ olacak şekilde bir $(X, \mathbb{A}, L, R)$ KS-bulanık metrik uzayı varsa (X, τ) topolojik uzayına uyumlu KS-bulanık metrik uzayına sahiptir denir (Kaleva ve Kauhanen, 2014).

Teorem 3.1.32: (X, τ) topolojik uzayının metriklenebilir olması için gerek ve yeter şart uyumlu bir KS-bulanık metrik uzaya sahip olmasıdır (Kaleva ve Kauhanen, 2014).

Teorem 3.1.33: Metriklenebilir bir (X, τ) topolojik uzayının kompakt olması için gerek ve yeter şart sahip olduğu her uyumlu $(X, \mathbb{A}, L, R)$ KS-bulanık metrik uzayın tam olmasıdır (Kaleva ve Kauhanen, 2014).

Teorem 3.1.34: Metriklenebilir bir (X, τ) topolojik uzayının kompakt olması için gerek ve yeter şart sahip olduğu her uyumlu $(X, \mathbb{A}, L, R)$ KS-bulanık metrik uzayın tam veya sınırlı olmasıdır (Kaleva ve Kauhanen, 2014).

3.2. KM-Bulanık Metrik Uzaylar ve GV-Bulanık Metrik Uzaylar

3.2.1. KM(GV)-Bulanık Metrik Uzak Tanımı ve Temel Özellikleri

Tanım 3.2.1.1: X bir küme, $*$ sürekli bir t-norm ve $M: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ bir dönüşüm olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $(M, *)$ ikilisine X üzerinde bir KM-bulanık metrik adı verilir.

$$(KM1) \quad x, y \in X \text{ iken } M(x, y, 0) = 0.$$

$$(KM2) \quad x, y \in X \text{ ve } t > 0 \text{ iken } M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y.$$

$$(KM3) \quad x, y \in X \text{ ve } t > 0 \text{ iken } M(x, y, t) = M(y, x, t).$$

$$(KM4) \quad x, y, z \in X \text{ ve } t, s > 0 \text{ iken } M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s).$$

$$(KM5) \quad x, y \in X \text{ iken } M(x, y, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow I \text{ sol sürekli.}$$

Üzerinde bir $(M, *)$ KM-bulanık metriği tanımlanmış olan X kümesine KM-bulanık metrik uzak adı verilir ve bu uzak $(X, M, *)$ üçlüsü ile gösterilir (Kramosil ve Michalek, 1975).

$(X, M, *)$ KM-bulanık metrik uzakı aşağıdaki şartı sağlıyorsa bu uzaya güçlü (strong) KM-bulanık metrik uzak denir. $x, y, z \in X$ ve $s, t > 0$ iken

$$M(x, y, t) * M(y, z, t) \leq M(x, z, t)$$

veya denk olarak

$$M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, \max\{t, s\}) \text{ (Gregori ve diğ., 2010).}$$

KM-bulanık metriği ile üretilen topoloji her zaman Hausdorff olmayabilir. Bu özelliği elde etmek için George ve Veeramani (1994) KM-bulanık metrik uzay tanımını aşağıdaki şekilde yeniden vermiştir.

Tanım 3.2.1.2: X bir küme, $*$ sürekli bir t-norm ve $M: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ bir dönüşüm olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $(M, *)$ ikilisine X üzerinde bir GV-bulanık metrik adı verilir.

(FPGV1) Her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $M(x, y, t) > 0$.

(FPGV2) Her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$.

(FPGV3) Her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $M(x, y, t) = M(y, x, t)$.

(FPGV4) Her $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ için $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$.

(FPGV5) Her $x, y \in X$ için $M(x, y, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow I$ süreklidir.

Üzerinde bir $(M, *)$ GV-bulanık metriği tanımlanmış olan X kümesine GV-bulanık metrik uzay adı verilir ve bu uzay $(X, M, *)$ üçlüsü ile gösterilir.

$M(x, y, t)$ değeri x ile y 'nin t parametresine göre birbirine yakın olma derecesidir. $M(x, y, t) = 1$ olması $x = y$ anlamına gelirken $M(x, y, t) = 0$ olması noktaların birbirine çok uzak (veya birbirinden farklı) olması anlamına gelir (George ve Veeramani, 1994).

KM-bulanık metrik uzay ya da GV-bulanık metrik uzay olarak belirtilmedikçe verilen ifadeler her iki uzay için de geçerlidir.

Lemma 3.2.1.3: $x, y \in X$ iken $M(x, y, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonu azalmayandır (Grabiec, 1998).

Örnek 3.2.1.4: Her $x, y \in \mathbb{R}$ ve $t \in (0, \infty)$ için $M: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ dönüşümü $M(x, y, t) = \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}}}$ olarak tanımlansın. Burada, $(\mathbb{R}, M, *_p)$ bir GV-bulanık metrik uzaydır.

Bu örnekte, $\mathbb{R}$ yerine herhangi bir X kümesi ve $|x - y|$ yerine de X üzerinde tanımlı herhangi bir $d(x, y)$ metriği alındığında $(X, M, *_p)$ yine bir GV-bulanık metrik uzay olmaktadır. Hatta $\wedge$ t-normu alındığında da $(\mathbb{R}, M, \wedge)$ bir GV-bulanık metrik uzaydır. (George ve Veeramani, 1994).

Örnek 3.2.1.5: (X, d) klasik bir metrik uzay olsun. $* = *_p$ veya $x = \wedge$ t-normu göz önüne alınsın. $k, m, n \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $M_d: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü

$$M_d(x, y, t) = \frac{kt^n}{md(x, y) + kt^n}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, $(X, M_d, *)$ X üzerinde bir KM-bulanık metrik uzaydır. Bu şekilde her klasik metrikten bir bulanık metrik üretmek mümkündür. Özel olarak $k = m = n = 1$ alındığında elde edilen

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{d(x, y) + t}$$

bulanık metriğine d metriği tarafından üretilen standart bulanık metrik denir (George ve Veeramani, 1994).

Her bulanık metriğin bir standart bulanık metrik olarak ifade edilemeyeceği aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 3.2.1.6: Her $x, y \in \mathbb{N}$ ve $t \in [0, \infty)$ için $M: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times [0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ dönüşümü

$$M(x, y, t) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & y \leq x \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, $(\mathbb{N}, M, *_p)$ bir KM-bulanık metrik uzaydır. Fakat bu bulanık metriğin $M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$ olarak ifade edilebileceği X üzerinde tanımlı hiçbir d metriği yoktur (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 3.2.1.7: $(X, M, *)$ bulanık metrik uzay, $x \in X$, $r \in (0, 1)$ ve $t > 0$ olsun. $B(x, r, t) = \{y \in X \mid M(x, y, t) > 1 - r\}$

kümesine x merkezli, r yarıçaplı ve t parametreli açık yuvar denir (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 3.2.1.8: $(X, M, *)$ bulanık metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $a \in A$ için $B(a, r, t) \subseteq A$ olacak şekilde $r \in I$ varsa A kümesine açık küme denir (George ve Veeramani, 1994).

Teorem 3.2.1.9: $(X, M, *)$ bulanık metrik uzayında her açık yuvar bir açık kümedir (George ve Veeramani, 1994).

Teorem 3.2.1.10: $(X, M, *)$ bulanık metrik uzay olsun.

$$\tau_M = \{A \subseteq X \mid \text{Her } x \in A \text{ için } \exists t > 0, r \in (0,1) : B(x, r, t) \subseteq A\}$$

olarak tanımlanan τ_M ailesi X üzerinde bir topolojidir. (George ve Veeramani, 1994).

Teorem 3.2.1.11: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay, τ_M bu bulanık metrikten elde edilen klasik topoloji ve $x \in X$ olsun. $\{B(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ailesi x 'in bir komşuluk tabanıdır (George ve Veeramani, 1994).

Sonuç 3.2.1.12: Teorem 3.2.11'e göre (X, τ) topolojisi birinci sayılabilir uzaydır (George ve Veeramani, 1994).

Teorem 3.2.1.13: Her GV-bulanık metrik uzay Hausdorff uzayıdır (George ve Veeramani, 1994).

Teorem 3.2.1.14: (X, d) bir klasik metrik uzay ve M_d , d metriği tarafından üretilen standart bulanık metrik olsun. d klasik metriği tarafından üretilen klasik topoloji τ_d ile M_d standart bulanık metriği tarafından üretilen klasik topoloji τ_{M_d} aynıdır (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 3.2.1.15: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon \in (0,1)$ için $n \geq n_0$ iken $M(x_n, x_0, t) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve $x_n \rightarrow x_0$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ile gösterilir (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 3.2.1.16: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ bir dizi olsun. Her $p > 0$ ve $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{n+p}, x_n, t) = 1$ ise $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine G-Cauchy dizisi denir (Grabiec, 1998).

Tanım 3.2.1.17: $(X, M, *)$ bulanık metrik uzayında her G-Cauchy dizisi yakınsaksa bu uzaya G-tam denir (Grabiec, 1998).

Uyarı 3.2.1.18: $(\mathbb{R}, M_d, *)$ standart bulanık metrik uzayı G-tam değildir (George ve Veeramani, 1994).

Örnek 3.2.1.19: $(\mathbb{R}, e)$ Öklid metrik uzay ve M_e , e Öklid metriği tarafından üretilen standart bulanık metrik olsun. $(\mathbb{R}, M_e, *_p)$ bulanık metrik uzayında $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ olmak üzere $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini ele alalım. Her $p > 0$ için,

$$M_e(S_{n+p}, S_n, t) = \frac{t}{|S_{n+p} - S_n| + t} = \frac{t}{\left(\frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+p}\right) + t}$$

dir. Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} M_e(S_{n+p}, S_n, t) = 1$ olur. Bu durumda $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $(\mathbb{R}, M_e, *_p)$ bulanık metrik uzayında bir G-Cauchy dizisidir.

Şimdi de $(\mathbb{R}, M_e, *_p)$ bulanık metrik uzayının G-tam olduğunu varsayalım. Bu durumda $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ G-Cauchy dizisi en az bir $x \in \mathbb{R}$ noktasına yakınsaktır, yani $\lim_{n \rightarrow \infty} M_e(S_n, x, t) = 1$ bulunur. Buradan, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{t + |S_n - x|} = 1$ ve dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - x| = 0$ elde edilir. Böylece $(\mathbb{R}, e)$ klasik metrik uzayında (S_n) dizisi x 'e yakınsak olur. Ancak $(\mathbb{R}, e)$ 'de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi yakınsak bir dizi değildir. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak, $(\mathbb{R}, M_e, *_p)$ bulanık metrik uzayı G-tam değildir (George ve Veeramani, 1994).

$\mathbb{R}$ 'nin tamlığını elde etmek için George ve Veeramani (1994) farklı bir Cauchy dizisi tanımını aşağıdaki gibi vermişlerdir.

Tanım 3.2.1.20: $(X, M, *)$ bulanık metrik uzayı ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $t > 0$ için $n, m \geq n_0$ iken $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine M-Cauchy dizisi denir (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 3.2.1.21: $(X, M, *)$ bulanık metrik uzayında her M-Cauchy dizisi yakınsaksa bu uzaya M-tam bulanık metrik uzay denir (George ve Veeramani, 1994).

Önerme 3.2.1.22: (X, d) klasik bir metrik uzay ve $(X, M_d, *)$ bu klasik metriktan üretilen standart bulanık metrik uzay olsun. $(X, M_d, *)$ bulanık metrik uzayının M-tam olabilmesi için gerek ve yeter şart (X, d) metrik uzayının tam olmasıdır (George ve Veeramani, 1994).

Sonuç 3.2.1.23: Tanım 3.2.21'e göre $(\mathbb{R}, M_e, *_p)$ bir M-tam bulanık metrik uzay olur (George ve Veeramani, 1994).

3.2.2. KM-Bulanık Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Tanım 3.2.2.1: $(X, M, *)$ bir KM-bulanık metrik uzay, $\diamond$ bir t-conorm ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken

$$M(Tx, Ty, t) \geq k \diamond M(x, y, t) \quad (3.1)$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ mevcut ise T 'ye bulanık $\diamond$ -daralma dönüşümü denir (Gregori ve Miñana, 2021).

Teorem 3.2.2.2: $(X, M, *)$ bir tam KM-bulanık metrik uzay, $\diamond$ bir t-conorm ve $T: X \rightarrow X$ bir bulanık $\diamond$ -daralma dönüşümü olsun. Eğer $\diamond$ bir Arşimet t-conorm ise T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır (Gregori ve Miñana, 2021).

Yukarıdaki daralma koşulunun zayıflatılmasıyla elde edilen sabit nokta teoremi aşağıda verilmektedir.

Teorem 3.2.2.3: $(X, M, *)$ bir tam KM-bulanık metrik uzay, $\diamond$ sürekli bir t-conorm ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\diamond$ bir Arşimet t-conorm ve her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için

$$M(Tx, Ty, t) \geq k \diamond (M(x, Tx, t) \wedge M(y, Ty, t) \wedge M(x, y, t)) \quad (3.2)$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ mevcut ise T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

İspat: $x_0 \in X$ olsun. x_0 'ın T fonksiyonu altında n-inci iterasyonu ile oluşturulan $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (T^n x_0)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini ele alalım. $t > 0$ sabit turalım. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. İlk olarak, her $n \in \mathbb{N}$ için $M(x_{n+1}, x_n, t) \geq k_\diamond^{(n)}$

eşitsizliğinin sağlandığını tümevarım yöntemi ile gösterelim. Eşitsizlik (3.2)'de $x = x_1$ ve $y = x_0$ alınırsa $k \in (0,1)$ için

$$M(x_2, x_1, t) = M(Tx_1, Tx_0, t) \geq k \diamond (M(x_1, Tx_1, t) \wedge M(x_0, Tx_0, t) \wedge M(x_1, x_0, t)) \geq k$$

elde edilir. Yani $n = 1$ için Eşitsizlik (3.2) sağlanmaktadır. Şimdi n için Eşitsizlik (3.2)'nin sağlandığını kabul edelim. Yani $k \in (0,1)$ iken $M(x_{n+1}, x_n, t) \geq k_\diamond^{(n)}$ olsun. Bu durumda, Eşitsizlik (3.2)'de $x = x_{n+1}$ ve $y = x_n$ alınırsa $k \in (0,1)$ için

$$M(x_{n+2}, x_{n+1}, t) = M(Tx_{n+1}, Tx_n, t)$$

$$\geq k \diamond (M(x_{n+1}, Tx_{n+1}, t) \wedge M(x_n, Tx_n, t) \wedge M(x_{n+1}, x_n, t))$$

$$= k \diamond (M(x_{n+2}, x_{n+1}, t) \wedge M(x_{n+1}, x_n, t))$$

elde edilir. $k \diamond M(x_{n+2}, x_{n+1}, t) \geq M(x_{n+2}, x_{n+1}, t)$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlikten

$$M(x_{n+2}, x_{n+1}, t) \geq k \diamond M(x_{n+1}, x_n, t)$$

olur. Hipotezden $M(x_{n+2}, x_{n+1}, t) \geq k_\diamond^{(n+1)}$ olur ki bu da Eşitsizlik (3.2)'nin $n + 1$ için sağlandığını göstermektedir. O halde, her $t > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $k \in (0,1)$ iken $M(x_{n+1}, x_n, t) \geq k_\diamond^{(n)}$ sağlanmaktadır. Buradan, her $n \in \mathbb{N}$ için $k \in (0,1)$ iken $\bigwedge_{t>0} M(x_{n+1}, x_n, t) \geq k_\diamond^{(n)}$ elde edilir. $\diamond$ bir Arşimet t-conorm olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bigwedge_{t>0} M(x_{n+1}, x_n, t) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} k_\diamond^{(n)} = 1$$

olur. Şimdi ise $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olmadığını varsayalım. Bu durumda, öyle $\varepsilon \in (0,1)$ ve $t > 0$ vardır ki her $n \in \mathbb{N}$ için $n \leq l(n) < m(n)$ ve $M(x_{m(n)}, x_{l(n)}, t) \leq 1 - \varepsilon$ olacak şekilde $m(n), l(n) \in \mathbb{N}$ doğal sayıları bulunabilir. Bu durumda, $(x_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ve $(x_{l_n})_{n \in \mathbb{N}}$ dizilerini $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin iki alt dizisi olacak şekilde aşağıdaki gibi oluşturabiliriz: $n = 1$ ve $l_1 = l(1)$ olsun. $m_1, M(x_{m_1}, x_{l_1}, t) \leq 1 - \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan l_1 'den büyük en küçük tam sayı olsun. O halde, $M(x_{m_1-1}, x_{l_1}, t) > 1 - \varepsilon$ dir. Bu durumda, her $m_n \in \mathbb{N}$ için

$M(x_{m(m_n)}, x_{l(m_n)}, t) \leq 1 - \varepsilon$ olacak şekilde $m(m_n) > l(m_n) > m_n (> l_n)$ vardır.

Buradan, her $n \in \mathbb{N}$ ve $s \in (0, t)$ için

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\geq M(x_{m_n}, x_{l_n}, t) \geq M(x_{m_n}, x_{m_n-1}, s) * M(x_{m_n-1}, x_{l_n}, t - s) \\ &\geq M(x_{m_n-1}, x_{l_n}, t - s) * \left(\bigwedge_{t>0} M(x_{m_n}, x_{m_n-1}, t) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Her $x, y \in X$ için $M(x, y, \cdot): (0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonu sol-sürekli olduğundan

$$1 - \varepsilon \geq M(x_{m_n}, x_{l_n}, t) \geq (\bigwedge_{t>0} M(x_{m_n}, x_{m_n-1}, t)) * (1 - \varepsilon)$$

olur. $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa $*$ sürekli bir t-norm olduğundan

$$1 - \varepsilon \geq \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{m_n}, x_{l_n}, t) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (\bigwedge_{t>0} M(x_{m_n}, x_{m_n-1}, t)) * (1 - \varepsilon) = 1 - \varepsilon$$

bulunur. Bu ise $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{m_n}, x_{l_n}, t) = 1 - \varepsilon$ olduğu anlamına gelir. Ayrıca, Eşitsizlik

(3.2)'de ifade edilen daralma koşulundan her $s \in (0, t)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\geq M(x_{m_n}, x_{l_n}, t) \geq M(x_{m_n}, x_{m_n+1}, \frac{s}{2}) * M(x_{l_n+1}, x_{l_n}, \frac{s}{2}) \\ &\geq M(x_{m_n}, x_{m_n+1}, \frac{s}{2}) * M(x_{m_n+1}, x_{l_n+1}, t - s) * M(x_{l_n+1}, x_{l_n}, \frac{s}{2}) \\ &* \left[k \diamond \left(M(x_{m_n}, x_{m_n+1}, t - s) \wedge M(x_{l_n}, x_{l_n+1}, t - s) \wedge M(x_{m_n}, x_{l_n}, t - s) \right) \right] \\ &\geq \left(\bigwedge_{t>0} M(x_{m_n}, x_{m_n+1}, t) \right) * \left(\bigwedge_{t>0} M(x_{l_n+1}, x_{l_n}, t) \right) \\ &* \left[k \diamond \left(M(x_{m_n}, x_{m_n+1}, t - s) \wedge M(x_{l_n}, x_{l_n+1}, t - s) \wedge M(x_{m_n}, x_{l_n}, t - s) \right) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Her $x, y \in X$ için $M(x, y, \cdot): (0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonu sol-sürekli olduğundan

$$1 - \varepsilon \geq M(x_{m_n}, x_{l_n}, t) \geq \left(\bigwedge_{t>0} M(x_{m_n}, x_{m_n+1}, t) \right) * \left(\bigwedge_{t>0} M(x_{l_n+1}, x_{l_n}, t) \right)$$

$$* \left[k \diamond \left(M(x_{m_n}, x_{m_n+1}, t) \wedge M(x_{l_n}, x_{l_n+1}, t) \wedge M(x_{m_n}, x_{l_n}, t) \right) \right]$$

bulunur. $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa $*$ sürekli bir t-norm ve $\diamond$ sürekli bir t-conorm olduğundan

$$1 - \varepsilon \geq \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{m_n}, x_{l_n}, t)$$

$$\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\bigwedge_{t>0} M(x_{m_n}, x_{m_n+1}, t) \right) * \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\bigwedge_{t>0} M(x_{l_n+1}, x_{l_n}, t) \right)$$

$$* \left[k \diamond \left(\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{m_n}, x_{m_n+1}, t) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{l_n}, x_{l_n+1}, t) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{m_n}, x_{l_n}, t) \right) \right]$$

$$= 1 * [k \diamond (1 \wedge (1 - \varepsilon) \wedge 1)] * 1 = k \diamond (1 - \varepsilon)$$

olur ki bu ise $\varepsilon \in (0,1)$ olduğundan bir çelişkidir. O halde, varsayımımız yanlış olup $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. $(X, M, *)$ KM-bulanık metrik uzayı tam olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası vardır. Şimdi $Tx = x$ olduğunu göstereyim. $t > 0$ sabit turalım. Eşitsizlik (3.2)'den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$M(x, Tx, t) \geq M\left(x, x_n, \frac{t}{2}\right) * M\left(x_n, Tx, \frac{t}{2}\right)$$

$$\geq M\left(x, x_n, \frac{t}{2}\right) * \left[k \diamond \left(M\left(x_{n-1}, x_n, \frac{t}{2}\right) \wedge M\left(x, Tx, \frac{t}{2}\right) \wedge M\left(x_{n-1}, x, \frac{t}{2}\right) \right) \right]$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa $*$ sürekli bir t-norm ve $\diamond$ sürekli bir t-conorm olduğundan

$$M(x, Tx, t) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} M\left(x, x_n, \frac{t}{2}\right) * \left[k \diamond \left(\lim_{n \rightarrow \infty} M\left(x_{n-1}, x_n, \frac{t}{2}\right) \wedge M\left(x, Tx, \frac{t}{2}\right) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} M\left(x_{n-1}, x, \frac{t}{2}\right) \right) \right]$$

$$= k \diamond M\left(x, Tx, \frac{t}{2}\right) \geq k_{\diamond}^{(n)} \diamond M\left(x, Tx, \frac{t}{2^n}\right) \geq k_{\diamond}^{(n)}$$

olur. $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa $\diamond$ sürekli bir Arşimet t-conorm olduğundan $M(x, Tx, t) = 1$ elde edilir. O halde, x noktası T fonksiyonunun bir sabit noktasıdır. Son

olarak, tekliği ispatlamak için x ve y 'nin T fonksiyonunun birbirinden farklı iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. Eşitsizlik (3.2)'den her $t > 0$ için $k \in (0,1)$ iken

$$\begin{aligned} M(x, y, t) &= M(Tx, Ty, t) \geq k \diamond (M(x, Tx, t) \wedge M(y, Ty, t) \wedge M(x, y, t)) \\ &= k \diamond (M(x, x, t) \wedge M(y, y, t) \wedge M(x, y, t)) = k \diamond M(x, y, t) \end{aligned}$$

elde edilir. $k \in (0,1)$ ve $\diamond$ bir Arşimet t-conorm olduğundan $M(x, y, t) = 1$ bulunur. Sonuç olarak $x = y$ olup T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Örnek 3.2.2.4: Her $x, y \in (0,1)$ ve $t > 0$ için $M(x, y, t) = \begin{cases} 1, & x = y \\ xyt, & x \neq y, t \leq 1 \\ xy, & x \neq y, t > 1 \end{cases}$ ve

$M(x, y, 0) = 0$ şeklinde tanımlanan $M: (0,1) \times (0,1) \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile verilen $((0,1), M, *_p)$ tam KM-bulanık metrik uzayını ele alalım (Gregori ve diğ., 2009).

$T: (0,1) \rightarrow (0,1)$ fonksiyonu her $x \in (0,1)$ için $Tx = \sqrt{\frac{x}{2}}$ şeklinde tanımlansın. “ $\diamond_p$ ”

sürekli Arşimet t-conormunu göz önüne alalım. Öncelikle, T fonksiyonunun Eşitsizlik (3.2)'de verilen daralma koşulunu sağladığını gösterelim. İlk olarak $t \leq 1$ olarak alalım.

$x \leq 0.5$ iken $x \leq \sqrt{\frac{x}{2}}$ ve $x \geq 0.5$ iken $x \geq \sqrt{\frac{x}{2}}$ olduğundan T fonksiyonunun Eşitsizlik

(3.2)'de verilen daralma koşulunu sağladığını göstermek için $x < y \leq 0.5$, $y < x \leq 0.5$, $x \leq 0.5 \leq y$, $y \leq 0.5 \leq x$, $0.5 \leq x < y$ ve $0.5 \leq y < x$ durumları ayrı ayrı incelenir.

$x < y \leq 0.5$ olsun. $\Rightarrow x \leq \sqrt{\frac{x}{2}}$ ve $y \leq \sqrt{\frac{y}{2}}$ dir. $t \leq 1$ için

$$M(x, Tx, t) \wedge M(y, Ty, t) \wedge M(x, y, t) = M\left(x, \sqrt{\frac{x}{2}}, t\right) \wedge M\left(y, \sqrt{\frac{y}{2}}, t\right) \wedge M(x, y, t)$$

$$= x\sqrt{\frac{x}{2}}t \wedge y\sqrt{\frac{y}{2}}t \wedge xyt = x\sqrt{\frac{x}{2}}t \wedge xyt$$

bulunur. Eğer $x < y \leq \sqrt{\frac{x}{2}}$ ise $x\sqrt{\frac{x}{2}}t \wedge xyt = xyt$ dir. Diğer durumda, yani $x \leq \sqrt{\frac{x}{2}} \leq y$

ise $x\sqrt{\frac{x}{2}}t \wedge xyt = x\sqrt{\frac{x}{2}}t$ olur.

$x < y \leq \sqrt{\frac{x}{2}} \leq 0.5$ olması durumunda

$$k \diamond_p (M(x, Tx, t) \wedge M(y, Ty, t) \wedge M(x, y, t))$$

$$= k \diamond_p \left(M\left(x, \sqrt{\frac{x}{2}}, t\right) \wedge M\left(y, \sqrt{\frac{y}{2}}, t\right) \wedge M(x, y, t) \right) = k \diamond_p xyt = k + (1 - k)xyt$$

Bulunur. Her $0 < x < y \leq \sqrt{\frac{x}{2}} \leq 0.5$ ve $0 < t \leq 1$ için $\frac{txy\left(\sqrt{\frac{t^2xy}{(txy-1)^2}+2}\right) - \sqrt{\frac{t^2xy}{(txy-1)^2}}}{2txy-2} > 0$ ve

$$k \leq \frac{txy\left(\sqrt{\frac{t^2xy}{(txy-1)^2}+2}\right) - \sqrt{\frac{t^2xy}{(txy-1)^2}}}{2txy-2} \text{ için}$$

$$M(Tx, Ty, t) = M\left(\sqrt{\frac{x}{2}}, \sqrt{\frac{y}{2}}, t\right) \geq k \diamond_p \left(M\left(x, \sqrt{\frac{x}{2}}, t\right) \wedge M\left(y, \sqrt{\frac{y}{2}}, t\right) \wedge M(x, y, t) \right)$$

sağlanacak şekilde $k \in (0,1)$ mevcut olur. Benzer inceleme ile diğer durumlar için de T fonksiyonunun Eşitsizlik (3.2)'de verilen daralma koşulunu sağladığı görülür. O halde, Teorem 3.2.2.3'ün tüm koşulları sağlanır ve gerçekten $x = \frac{1}{2}$, T fonksiyonunun bir tek sabit noktasıdır.

Yukarıdaki teoremden yer alan “ $\diamond$ bir Arşimet t-conormdur” koşulunun kaldırılamayacağı aşağıdaki örnekte gösterilmektedir.

Örnek 3.2.2.5: Her $x, y \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $M(x, y, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t \leq |x - y| \\ 1, & t > |x - y| \end{cases}$ ve

$M(x, y, 0) = 0$ şeklinde tanımlanan $M: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile verilen $(\mathbb{R}, M, \wedge)$ tam KM-bulanık metrik uzayını ele alalım (Gregori ve Miñana, 2021).

$T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = x + 1$ şeklinde tanımlansın. Ayrıca Arşimet olmayan “ $\vee$ ” sürekli t-conormunu göz önüne alalım. Her $x, y \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $M(Tx, Ty, t) = M(x, y, t)$ olduğu M 'nin tanımından açıktır. Ayrıca her $x, y \in \mathbb{R}$ ve

$t > 0$ için $M(x, Tx, t) = M(y, Ty, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t \leq 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$ dir. İlk olarak, T fonksiyonunun

Eşitsizlik (3.2)'de verilen daralma koşulunu sağladığını gösterelim. Her $x, y \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $M(Tx, Ty, t) = M(x, y, t)$ olduğundan T fonksiyonunun bu koşulu sağladığını göstermek için

$$M(x, y, t) \geq k \vee (M(x, Tx, y) \wedge M(x, y, t)) \quad (3.3)$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ reel sayısının mevcut olduğunu göstermeliyiz. Her $a, b \in I$ için $k \leq a$ iken $a \geq k \vee (a \wedge b)$ eşitsizliği sağlandığından $k \leq \frac{1}{2}$ iken Eşitsizlik (3.3) sağlanır. Bu durumda, Teorem 3.2.3'ün bütün koşulları sağlanır. Ancak T fonksiyonun sabit noktasının olmadığı açıktır. Sonuç olarak “ $\diamond$ bir Arşimet t-conormdur” koşulu Teorem 3.2.3'den kaldırılamaz.

Sonuç 3.2.2.6: $(X, M, *)$ bir tam KM-bulanık metrik uzay, $\diamond$ sürekli bir t-conorm ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\diamond$ bir Arşimet t-conorm ve her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için

$$M(Tx, Ty, t) \geq k \diamond (M(x, Tx, t) \wedge M(y, Ty, t)) \quad (3.4)$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ mevcut ise T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Eşitsizlik (3.4)'de ifade edilen daralma koşulunun yalnızca “ $\wedge$ ” t-normu için sağlandığı yani herhangi bir başka sürekli t-norm ile değiştirilemeyeceği aşağıdaki örnekte gösterilmektedir.

Örnek 3.2.2.7: $(\mathbb{R}, \rho)$ ayrık metrik uzay olmak üzere $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken $M_\rho(x, y, t) = \frac{t}{t + \rho(x, y)}$ ve $M_\rho(x, y, 0) = 0$ şeklinde tanımlanan $M_\rho: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile verilen $(\mathbb{R}, M_\rho, *_p)$ KM-bulanık metrik uzayını ele alalım. $(\mathbb{R}, \rho)$ ayrık metrik uzayı tam olduğundan $(\mathbb{R}, M_\rho, *_p)$ KM-bulanık metrik uzayı da tamdır. $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = x + 1$ şeklinde tanımlansın. Ayrıca, $\diamond_p$ sürekli Arşimet t-conormunu göz önüne alalım. Her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için

$$M(Tx, Ty, t) \geq k \diamond_p (M(x, Tx, t) *_L M(y, Ty, t)) \quad (3.5)$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ reel sayısının mevcut olduğunu gösterelim. Eğer $x = y$ ise Eşitsizlik (3.5) direkt sağlanmaktadır. $x \neq y$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $M(Tx, Ty, t) = M(x + 1, y + 1, t) = \frac{t}{t+1}$ ve

$$k \diamond_p (M(x, Tx, t) *_L M(y, Ty, t)) = k \diamond_p (M(x, x + 1, t) *_L M(y, y + 1, t))$$

$$= k \diamond_p \left(\frac{t}{t+1} *_{\mathcal{L}} \frac{t}{t+1} \right) = k \diamond_p \max \left(0, \frac{t-1}{t+1} \right) = \begin{cases} k, & 0 < t \leq 1 \\ k + \frac{t-1}{t+1} - \frac{k(t-1)}{t+1}, & t > 1 \end{cases}$$

elde edilir.

Durum I: $0 < t \leq 1$ olsun. Bu durumda, $\frac{t}{t+1}$ fonksiyonu t 'ye göre artan olduğundan

$$\max_{0 < t \leq 1} \frac{t}{t+1} = \frac{1}{2} \text{ olup } k \geq \frac{1}{2} \text{ için Eşitsizlik (3.5) sağlanır.}$$

Durum II: $t > 1$ olsun. Bu durumda, $k \leq \frac{1}{2}$ iken

$$k + \frac{t-1}{t+1} - \frac{k(t-1)}{t+1} = \frac{2k}{t+1} + \frac{t-1}{t+1} \leq \frac{t}{t+1}$$

elde edilir. Yani $k \leq \frac{1}{2}$ iken Eşitsizlik (3.5) sağlanır.

Sonuç olarak, $k = \frac{1}{2}$ iken her $t > 0$ için Eşitsizlik (3.5) sağlanmaktadır. Ancak T fonksiyonun sabit noktasının olmadığı açıktır.

Ayrıca, dikkat edilirse Teorem 3.2.3'ün bir başka sonucu olarak Teorem 3.2.2 elde edilmektedir.

Aşağıdaki teoremden rezidiyum operatörlerine dayalı olan daralma koşulu ile bir sabit nokta teoremi verilmektedir.

Teorem 3.2.2.8: $(X, M, *)$ bir tam KM-bulanık metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $*$ bir Arşimet t-norm olmak üzere $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken

$$M(Tx, Ty, t) \geq k \rightarrow_* M(x, y, t) \quad (3.6)$$

olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ mevcut ise T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

İspat: $x_0 \in X$ olsun. x_0 'ın T fonksiyonu altında n -inci iterasyonu ile oluşturulan $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (T^n x_0)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini ele alalım. $t > 0$ sabit turalım. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. İlk olarak, her $n \in \mathbb{N}$ için $M(x_{n+1}, x_n, t) \geq k_*^{(n)} \rightarrow_* M(x_1, x_0, t)$ eşitsizliğinin sağlandığını tümevarım yöntemi ile gösterelim. Eşitsizlik (3.6)'da $x = x_1$ ve $y = x_0$ alınırsa $k \in (0, 1)$ için

$$M(x_2, x_1, t) = M(Tx_1, Tx_0, t) \geq k \rightarrow_* M(x_1, x_0, t)$$

elde edilir. Yani $n = 1$ için Eşitsizlik (3.6) sağlanmaktadır. Şimdi n için Eşitsizlik (3.6)'nın sağlandığını kabul edelim. Yani $k \in (0,1)$ iken $M(x_{n+1}, x_n, t) \geq k_*^{(n)} \rightarrow_* M(x_1, x_0, t)$ olsun. Bu durumda, Eşitsizlik (3.6)'da $x = x_{n+1}$ ve $y = x_n$ alınırsa $k \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned} M(x_{n+2}, x_{n+1}, t) &= M(Tx_{n+1}, Tx_n, t) \geq k \rightarrow_* M(x_{n+1}, x_n, t) \\ &\geq k \rightarrow_* \left(k_*^{(n)} \rightarrow_* M(x_1, x_0, t) \right) = \left(k_*^{(n)} * k \right) \rightarrow_* M(x_1, x_0, t) = k_*^{(n+1)} \rightarrow_* M(x_1, x_0, t) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da Eşitsizlik (3.6)'nın $n + 1$ için sağlandığını göstermektedir. O halde, her $t > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $k \in (0,1)$ iken $M(x_{n+1}, x_n, t) \geq k_*^{(n)} \rightarrow_* M(x_1, x_0, t)$ dir. Buradan, her $n \in \mathbb{N}$ için $k \in (0,1)$ iken $\bigwedge_{t>0} M(x_{n+1}, x_n, t) \geq k_*^{(n)} \rightarrow_* \bigwedge_{t>0} M(x_1, x_0, t)$ elde edilir. $*$ bir Arşimet t-norm olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bigwedge_{t>0} M(x_{n+1}, x_n, t) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} k_*^{(n)} \rightarrow_* \bigwedge_{t>0} M(x_1, x_0, t) = 0 \rightarrow_* \bigwedge_{t>0} M(x_1, x_0, t) = 1$$

olur. Şimdi ise $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olmadığını varsayalım. Bu durumda, öyle $\varepsilon \in (0,1)$ ve $t > 0$ vardır ki her $n \in \mathbb{N}$ için $n \leq l(n) < m(n)$ ve $M(x_{m(n)}, x_{l(n)}, t) \leq 1 - \varepsilon$ olacak şekilde $m(n), l(n) \in \mathbb{N}$ doğal sayılarını bulabiliriz. Bu durumda, $(x_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ve $(x_{l_n})_{n \in \mathbb{N}}$ dizilerini $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin iki alt dizisi olacak şekilde aşağıdaki gibi oluşturabiliriz: $n = 1$ ve $l_1 = l(1)$ olsun. $m_1, M(x_{m_1}, x_{l_1}, t) \leq 1 - \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan l_1 'den büyük en küçük tam sayı olsun. O halde, $M(x_{m_1-1}, x_{l_1}, t) > 1 - \varepsilon$ dir. Bu durumda, her $m_n \in \mathbb{N}$ için $M(x_{m(m_n)}, x_{l(m_n)}, t) \leq 1 - \varepsilon$ olacak şekilde $m(m_n) > l(m_n) > m_n (> l_n)$ vardır. Buradan, her $n \in \mathbb{N}$ ve $s \in (0, t)$ için

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\geq M(x_{m_n}, x_{l_n}, t) \geq M(x_{m_n}, x_{m_n-1}, s) * M(x_{m_n-1}, x_{l_n}, t - s) \\ &\geq \left(\bigwedge_{t>0} M(x_{m_n}, x_{m_n-1}, t) \right) * M(x_{m_n-1}, x_{l_n}, t - s) \end{aligned}$$

sağlanır. Her $x, y \in X$ için $M(x, y, \cdot): (0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonu sol-sürekliliğinden

$$1 - \varepsilon \geq M(x_{m_n}, x_{l_n}, t) \geq \left(\bigwedge_{t>0} M(x_{m_n}, x_{m_n-1}, t) \right) * (1 - \varepsilon)$$

olur. $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa $*$ sürekli bir t-norm olduğundan

$$1 - \varepsilon \geq \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{m_n}, x_{l_n}, t) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\bigwedge_{t>0} M(x_{m_n}, x_{m_n-1}, t) \right) * (1 - \varepsilon) = 1 - \varepsilon$$

bulunur. Bu ise $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{m_n}, x_{l_n}, t) = 1 - \varepsilon$ olduğu anlamına gelir. Ayrıca, Eşitsizlik (3.6)'dan her $s \in (0, t)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\geq M(x_{m_n}, x_{l_n}, t) \\ &\geq M\left(x_{m_n}, x_{m_n+1}, \frac{s}{2}\right) * M(x_{m_n+1}, x_{l_n+1}, t - s) * M\left(x_{l_n+1}, x_{l_n}, \frac{s}{2}\right) \\ &\geq M\left(x_{m_n}, x_{m_n+1}, \frac{s}{2}\right) * [k \rightarrow_* M(x_{m_n}, x_{l_n}, t - s)] * M\left(x_{l_n+1}, x_{l_n}, \frac{s}{2}\right) \\ &\geq \left(\bigwedge_{t>0} M(x_{m_n}, x_{m_n+1}, t) \right) * [k \rightarrow_* M(x_{m_n}, x_{l_n}, t - s)] * \left(\bigwedge_{t>0} M(x_{l_n+1}, x_{l_n}, t) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Her $x, y \in X$ için $M(x, y, \cdot): (0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonu sol-sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\geq M(x_{m_n}, x_{l_n}, t) \\ &\geq \left(\bigwedge_{t>0} M(x_{m_n}, x_{m_n+1}, t) \right) * [k \rightarrow_* M(x_{m_n}, x_{l_n}, t)] * \left(\bigwedge_{t>0} M(x_{l_n+1}, x_{l_n}, t) \right) \end{aligned}$$

bulunur. $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa $*$ sürekli bir t-norm olduğundan

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{m_n}, x_{l_n}, t) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\bigwedge_{t>0} M(x_{m_n}, x_{m_n+1}, t) \right) * [k \rightarrow_* \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{m_n}, x_{l_n}, t)] \end{aligned}$$

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\bigwedge_{t > 0} M(x_{l_n+1}, x_{l_n}, t) \right) = 1 * [k \rightarrow_* (1 - \varepsilon)] * 1 = k \rightarrow_* (1 - \varepsilon)$$

olur ki bu ise $\varepsilon \in (0,1)$ olduğundan bir çelişkidir. O halde, varsayımımız yanlış olup $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. $(X, M, *)$ KM-bulanık metrik uzayı tam olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası vardır. Şimdi $Tx = x$ olduğunu gösterelim. $t > 0$ sabit turalım. Eşitsizlik (3.6)'dan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$M(x, Tx, t) \geq M\left(x, x_n, \frac{t}{2}\right) * M\left(x_n, Tx, \frac{t}{2}\right) \geq M\left(x, x_n, \frac{t}{2}\right) * \left[k \rightarrow_* M\left(x_{n-1}, x, \frac{t}{2}\right)\right]$$

sağlanır. $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa $*$ sürekli bir Arşimet t-norm olduğundan

$$M(x, Tx, t) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} M\left(x, x_n, \frac{t}{2}\right) * \left[k \rightarrow_* \lim_{n \rightarrow \infty} M\left(x_{n-1}, x, \frac{t}{2}\right)\right] = 1 * (k \rightarrow_* 1) = 1$$

olur. O halde, x noktası T fonksiyonunun bir sabit noktasıdır. Son olarak, tekliği ispatlamak için x ve y 'nin T fonksiyonunun birbirinden farklı iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. Eşitsizlik (3.6)'dan her $t > 0$ için $k \in (0,1)$ iken

$$M(x, y, t) = M(Tx, Ty, t) \geq k \rightarrow_* M(x, y, t) = k \rightarrow_* M(Tx, Ty, t)$$

$$\geq k \rightarrow_* (k \rightarrow_* M(x, y, t)) = (k * k) \rightarrow_* M(x, y, t) \geq \dots \geq k_*^{(n)} \rightarrow_* M(x, y, t)$$

elde edilir. $k \in (0,1)$ ve $*$ sürekli Arşimet t-norm olduğundan $M(x, y, t) = 1$ bulunur. Sonuç olarak, $x = y$ olup T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Yukarıdaki teoremden yer alan “ $*$ bir Arşimet t-normdur” koşulunun kaldırılamayacağı aşağıdaki örnekte gösterilmektedir.

Örnek 3.2.2.9: $x, y \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ iken $M(x, y, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t \leq |x - y| \\ 1, & t > |x - y| \end{cases}$ ve $M(x, y, 0) = 0$

şeklinde tanımlanan $M: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile verilen $(\mathbb{R}, M, *_\wedge)$ KM-bulanık metrik uzayını (Gregori ve Miñana, 2021) ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = x + 1$ şeklinde tanımlanan $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu ele alalım. Burada, her $x, y \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $M(x, y, t) = M(Tx, Ty, t)$ sağlanır. Eğer $t \leq |x - y|$ ise $k > \frac{1}{2}$ iken

$$M(Tx, Ty, t) = \frac{1}{2} \geq k \rightarrow_{\wedge} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = k \rightarrow_{\wedge} M(x, y, t)$$

olmaktadır. $t > |x - y|$ olması durumunda $M(Tx, Ty, t) = 1$ olduğundan Eşitsizlik (3.6) “ $\wedge$ ” t-normu için direkt sağlanmaktadır. Bu durumda, T fonksiyonu Teorem 3.2.7’nin tüm koşullarını sağlamaktadır. Ancak T fonksiyonun sabit noktasının olmadığı tanımından açıktır.

Aşağıdaki teoremden ise Teorem 3.2.2.2 ve Teorem 3.2.2.8’de verilen daralma koşullarının bir başka versiyonu verilerek bir sabit nokta teoremi elde edilmektedir.

Teorem 3.2.2.10: $(X, M, *)$ bir tam KM-bulanık metrik uzay, $\diamond$ sürekli bir t-conorm ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken

$$M(Tx, Ty, t) \geq k \diamond (M(x, Tx, t) \rightarrow_* M(y, Ty, t)) \quad (3.7)$$

olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ mevcut ise T sabit bir fonksiyondur. Böylece T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

İspat: $x = y$ ise her $t > 0$ için $M(Tx, Ty, t) = 1$ olduğundan ispat açıktır. Farzedelim ki $x \neq y$ olsun. Bu durumda, hipotezden her $t > 0$ için

$$M(Tx, Ty, t) \geq k \diamond (M(x, Tx, t) \rightarrow_* M(y, Ty, t)) \text{ ve}$$

$$M(Tx, Ty, t) \geq k \diamond (M(y, Ty, t) \rightarrow_* M(x, Tx, t))$$

elde edilir. Buradan, her $t > 0$ için

$$M(Tx, Ty, t) \geq [(M(x, Tx, t) \rightarrow_* M(y, Ty, t)) \diamond k]$$

$$\vee [k \diamond (M(y, Ty, t) \rightarrow_* M(x, Tx, t))]$$

$$= [(M(x, Tx, t) \rightarrow_* M(y, Ty, t)) \vee (M(y, Ty, t) \rightarrow_* M(x, Tx, t))] \diamond k = 1 \diamond k = 1$$

sağlanır. Bu ise $x \neq y$ iken $Tx = Ty$ olduğu anlamına gelir. Böylece T sabit bir fonksiyondur.

4. SE-BULANIK KISMI METRİK UZAYLAR

Bu bölümde, Matthews (1994) tarafından verilen kısmi metrik uzay kavramı ile bu kavramın bir genelleştirilmesi olan ve Sedghi ve diğ. (2015) tarafından tanıtılan bulanık kısmi metrik (SE-bulanık kısmi metrik) uzay yapısı temel özellikleri ile birlikte sunulacaktır. Daha sonra, mevcut bir SE-bulanık kısmi metriktan başka bir SE-bulanık kısmi metrik üreten ve bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyonlar olarak adlandırılan fonksiyonlar verilerek bazı özellikleri incelenecektir.

4.1. Kısmi Metrik Uzay Tanımı ve Temel Özellikleri

Tanım 4.1.1: X bir küme olmak üzere aşağıda ifade edilen (PM1), (PM3) ve (PM4) koşullarını sağlayan $p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümüne X üzerinde bir kısmi pseudo-metrik, (PM1)-(PM4) koşullarını sağlayan $p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümüne ise X üzerinde bir kısmi metrik adı verilir.

(PM1) Her $x, y \in X$ için $p(x, y) \geq p(x, x)$.

(PM2) Her $x, y \in X$ için $x = y \Leftrightarrow p(x, x) = p(y, y) = p(x, y)$.

(PM3) Her $x, y \in X$ için $p(x, y) = p(y, x)$.

(PM4) Her $x, y, z \in X$ için $p(x, y) \leq p(x, z) - p(z, z) + p(z, y)$.

Üzerinde bir p kısmi (pseudo-)metriği tanımlanmış olan X kümesine kısmi (pseudo-)metrik uzay denir ve bu uzay (X, p) ikilisi ile gösterilir. Eğer $p(x, y) = 0$ ise (PM1) ve (PM2) özelliklerinden $x = y$ olduğu görülmektedir. Fakat $x = y$ ise $p(x, y)$ değeri sıfır olmayabilir (Matthews, 1994).

Tanımlardan kolayca görülmektedir ki her metrik bir kısmi metriktir. Yani kısmi metrik uzaylar metrik uzayların bir genelleştirilmesidir.

Örnek 4.1.2: (1) $x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $p(x, y) = \max\{x, y\}$ olarak tanımlanan $p: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü $\mathbb{R}^+$ üzerinde bir kısmi metriktir.

(2) $x, y \in \mathbb{R}^-$ olmak üzere $p(x, y) = -\min\{x, y\}$ olarak tanımlanan $p: \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü $\mathbb{R}^-$ üzerinde bir kısmi metriktir.

(3) $K = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ olmak üzere $p([a, b], [c, d]) = \max\{b, d\} - \min\{a, c\}$ olarak tanımlanan $p: K \times K \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü K üzerinde bir kısmi metriktir (Matthews, 1994).

Tanım 4.1.3: (X, p) bir kısmi metrik uzay, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x) = p(x, x)$ oluyorsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine x noktasına yakınsaktır denir. Bu durum $x_n \xrightarrow{p} x$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x) = p(x, x)$ ile gösterilir (Matthews, 1994).

Tanım 4.1.4: (X, p) bir kısmi metrik uzay ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ bir dizi olmak üzere $\lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m)$ limiti mevcut ve sonlu ise $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine Cauchy dizisi denir (Matthews, 1994).

Tanım 4.1.5: (X, p) bir kısmi metrik uzay olmak üzere her $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ Cauchy dizisi bu uzaydaki bir x noktasına yakınsak ve $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) = p(x, x)$ koşulu sağlanıyorsa (X, p) kısmi metrik uzayına tam kısmi metrik uzay denir (Matthews, 1994).

Uyarı 4.1.6: Kısmi metrik uzaylarda, metrik uzaylardan farklı olarak, yakınsak her dizinin Cauchy dizisi olması gerekmez (Matthews, 1994).

Örnek 4.1.7: $\mathbb{R}^-$ üzerinde tanımlanan $p(x, y) = -\min\{x, y\}$ kısmi metriğini göz önüne alındığında bu uzaydaki $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{0, -1, 0, -1, \dots\}$ dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, -1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\min\{x_n, -1\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1) = 1 = p(-1, -1)$$

sağlandığından bu dizi $-1 \in \mathbb{R}^-$ noktasına yakınsaktır. Ancak $x_n = 0$ veya $x_n = -1$ olduğundan $\lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m)$ mevcut değildir. Böylece $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak bir dizi iken Cauchy dizisi olmadığı görülmektedir (Matthews, 1994).

Tanım 4.1.8: (X, p) bir kısmi metrik uzay, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n) = p(x, x)$ oluyorsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine x noktasına p -yakınsaktır adı verilir (Matthews, 1994).

Lemma 4.1.9: Kısmi metrik uzaylarda p -yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir (Matthews, 1994).

Tanım 4.1.10: (X, p) bir kısmi metrik uzay ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ bir dizi olmak üzere $\lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) = 0$ sağlanıyorsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine 0-Cauchy dizisi denir (Romaguera, 2010).

Tanım 4.1.11: (X, p) bir kısmi metrik uzay iken her $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ 0-Cauchy dizisi bu uzayda $p(x, x) = 0$ olacak şekilde bir x noktasına yakınsak ise (X, p) kısmi metrik uzayına bir 0-tam kısmi metrik uzay denir (Romaguera, 2010).

Lemma 4.1.12: Her tam kısmi metrik uzay bir 0-tam kısmi metrik uzaydır (Romaguera, 2010).

Yukarıdaki lemmanın tersinin her zaman sağlanmayabileceği aşağıdaki örnekte gösterilmektedir.

Örnek 4.1.13: $X = \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$ kümesi üzerinde tanımlanmış olan $p_{\max}(x, y) = \max\{x, y\}$ bir kısmi metrik olmak üzere (X, p) kısmi metrik uzayı 0-tam olup tam metrik uzay değildir (Romaguera, 2010).

Tanım 4.1.14: (X, p) bir kısmi metrik uzay, $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda,

(1) $D_p(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid p(x, y) < \varepsilon\}$ olarak tanımlanan kümeye x merkezli ve ε yarıçaplı açık yuvar denir.

(2) $\overline{D}_p[x, \varepsilon] = \{y \in X \mid p(x, y) \leq \varepsilon\}$ olarak tanımlanan kümeye x merkezli ve ε yarıçaplı kapalı yuvar denir (Matthews, 1994).

Örnek 4.1.15: (1) Örnek 4.1.2(1)'de verilen $\mathbb{R}^+$ üzerinde tanımlanan $p(x, y) = \max\{x, y\}$ kısmi metriğini göz önüne alalım. $(\mathbb{R}^+, p)$ kısmi metrik uzayında $x \in X$ merkezli ve $\varepsilon > 0$ yarıçaplı bir açık yuvar $D_p(x, \varepsilon) = \begin{cases} (0, \varepsilon), & x < \varepsilon \\ \emptyset, & x \geq \varepsilon \end{cases}$ şeklindedir.

(2) Örnek 4.1.2(2)'de verilen $\mathbb{R}^-$ üzerinde tanımlanan $p(x, y) = -\min\{x, y\}$ kısmi metriğini göz önüne alalım. $(\mathbb{R}^-, p)$ kısmi metrik uzayında $x \in X$ merkezli ve $\varepsilon > 0$ yarıçaplı bir açık yuvar $D_p(x, \varepsilon) = \begin{cases} (-\varepsilon, 0), & x \leq \varepsilon \\ \emptyset, & x > \varepsilon \end{cases}$ şeklindedir (Matthews, 1994).

Uyarı 4.1.16: Bir (X, p) kısmi metrik uzayında $x \in X$ merkezli ve $\varepsilon > 0$ yarıçaplı $D_p(x, \varepsilon)$ açık yuvarı, yukarıdaki örnekten de görüldüğü üzere, her durumda boştan farklı bir küme olmayabilir. Hatta her $x \in X$ ve $\varepsilon = p(x, x)$ için $D_p(x, p(x, x)) = \{y \in X \mid p(x, y) < p(x, x)\}$ açık yuvarı boş kümedir. Bu nedenle, kısmi metrik uzaylarda $x \in X$ merkezli ve $\varepsilon > 0$ yarıçaplı açık yuvar tanımı aşağıdaki gibi yeniden verilmiştir (Matthews, 1994).

Tanım 4.1.17: (X, p) bir kısmi metrik uzay, $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda,

- (1) $B_p(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid p(x, y) < p(x, x) + \varepsilon\}$ olarak tanımlanan kümeye x merkezli ve ε yarıçaplı açık yuvar denir.
- (2) $\overline{B}_p[x, \varepsilon] = \{y \in X \mid p(x, y) \leq p(x, x) + \varepsilon\}$ olarak tanımlanan kümeye x merkezli ve ε yarıçaplı kapalı yuvar denir (Matthews, 1994).

Teorem 4.1.18: (X, p) bir kısmi metrik uzay olmak üzere bu uzaydaki açık yuvarların ailesi olan $\mathcal{B} = \{B_p(x, \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ kümesi X üzerindeki bir topoloji için tabandır. Bu şekilde üretilen topolojiye kısmi metrik topoloji denir ve τ_p ile gösterilir. Dahası her kısmi metrik topolojik uzay (X, τ_p) T_0 -uzaydır (Matthews, 1994).

Teorem 4.1.19: Kısmi metrik uzaydaki yakınsama ile kısmi metriğin ürettiği topolojik uzaydaki yakınsama birbirine denktir. Yani,

$$x_n \xrightarrow{p} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\tau_p} x$$

dir (Matthews, 1994).

4.2. SE-Bulanık Kısmi Metrik Uzay Tanımı ve Temel Özellikleri

Tanım 4.2.1: X bir küme, $*$ sürekli bir t-norm ve $F: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ bir dönüşüm olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $(F, *)$ ikilisine X üzerinde bir SE-bulanık kısmi metrik adı verilir.

$$(FPSE1) \quad x, y \in X \text{ ve } t > 0 \text{ iken } x = y \Leftrightarrow F(x, x, t) = F(y, y, t) = F(x, y, t).$$

$$(FPSE2) \quad x, y \in X \text{ ve } t > 0 \text{ iken } 0 < F(x, y, t) \leq F(x, x, t).$$

tanımlansın. Bu durumda, $(F_p, *_p)$ ve $(F_{p_e}, *_p)$ ikilileri X üzerinde birer SE-bulanık kısmi metriktir. Burada, $p_{max}(x, y) = \max\{x, y\}$ kısmi metriği alındığında $(F_p, *_p)$ ve $(F_{p_e}, *_p)$ ikililerinin X üzerinde birer GV-bulanık metrik olmadığı görülmektedir (Sedghi ve diğ., 2015).

Teorem 4.2.5: $(X, F, *)$ bir SE-bulanık kısmi metrik uzay olsun. $*$ sürekli t-normu her $a, b, c \in I$ için $a * b \leq a * c$ iken $b \leq c$ koşulunu sağlıyorsa her $x, y \in X$ için $F(x, y, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonu azalmayandır (Sedghi ve diğ., 2015).

Tanım 4.2.6: $(X, F, *)$ bir SE-bulanık kısmi metrik uzay, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = F(x, x, t)$ oluyorsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi x noktasına yakınsaktır denir ve bu durum $x_n \xrightarrow{F} x$ şeklinde gösterilir (Sedghi ve diğ., 2015).

Tanım 4.2.7: $(X, F, *)$ bir SE-bulanık kısmi metrik uzay ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t)$ mevcut ise $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine Cauchy dizisi adı verilir (Sedghi ve diğ., 2015).

Tanım 4.2.8: $(X, F, *)$ bir SE-bulanık kısmi metrik uzay olsun. Eğer X 'deki her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsak ise $(X, F, *)$ SE-bulanık kısmi metrik uzayına bir tam SE-bulanık kısmi metrik uzay denir (Sedghi ve diğ., 2015).

Uyarı 4.2.9: SE-bulanık kısmi metrik uzaylarda, bulanık metrik uzaylardan farklı olarak yakınsak her dizinin bir Cauchy dizisi olması gerekmez.

Örnek 4.2.10: $X = \mathbb{R}^+$ ve $F_p(x, y, t) = \frac{t}{t + \max\{x, y\}}$ olarak tanımlanan $F_p: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(F_p, *_p)$ ikilisinin X üzerinde SE-bulanık kısmi metrik uzay olduğu bilinmektedir. Bu uzayda $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{1, 2, 1, 2, \dots\}$ dizisini ele alalım. Her $x \geq 2$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = F(x, x, t)$ olduğundan $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi yakınsaktır. Bu dizinin yakınsadığı noktaların kümesi $L(x_n)$ ile gösterilirse $L(x_n) = \{x \in X | x_n \rightarrow x\} = [2, \infty)$ olur. Buradan, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin limitinin tek olmadığı görülmektedir. Ayrıca, $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t)$ mevcut olmadığından $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bir Cauchy dizisi değildir (Sedghi ve diğ., 2015).

Lemma 4.2.11: $(X, F, *)$ bir SE-bulanık kısmi metrik uzay, $x, y \in X$ ($x \neq y$) olmak üzere $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ dizisi x ve y noktalarına yakınsak olsun. Eğer $*$, her $a, b, c \in I$ için

$a * b \leq a * c$ iken $b \leq c$ koşulunu sağlayan sürekli bir t-norm ve $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = F(x, x, t) = F(y, y, t)$ ise $x = y$ dir (Sedghi ve diğ., 2015).

Lemma 4.2.12: $(X, F, *)$ bir SE-bulanık kısmi metrik uzay ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ iki dizi olsun. Eğer $*$, her $a, b, c \in I$ için $a * b \leq a * c$ iken $b \leq c$ koşulunu sağlayan sürekli bir t-norm, $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x_n, t) = F(x, x, t)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n, y, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n, y_n, t) = F(y, y, t)$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, y_n, t) = F(x, y, t)$ dir (Sedghi ve diğ., 2015).

4.3. SE-Bulanık Kısmi Metrik-Koruyan Fonksiyonlar

Bu altbölüm, SE-bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyonlarının tanıtılarak temel özelliklerinin incelendiği, güçlü SE-bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyonların ve daralma koruyan fonksiyonların sunulduğu üç kısımdan oluşmaktadır.

4.3.1. SE-Bulanık Kısmi Metrik-Koruyan Fonksiyon Tanımı ve Temel Özellikleri

Tanım 4.3.1.1: $f: I \rightarrow I$ bir fonksiyon olmak üzere $f^{-1}(1) \neq \{1\}$ oluyorsa f fonksiyonuna trivial çekirdeğe sahiptir denir (Pedraza ve diğ., 2021).

Tanım 4.3.1.2: $f: I \rightarrow I$ bir fonksiyon, $*$ bir t-norm ve $a_1, a_2 \in I$ olmak üzere $f(a_1) * f(a_2) \leq f(a_1 * a_2)$ koşulu sağlanıyorsa f 'ye $*$ -altçarpımsal fonksiyon denir (Pedraza ve diğ., 2021).

Tanım 4.3.1.3: $f: I \rightarrow I$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $(X, M, *)$ KM-bulanık metrik uzayı için $x, y \in X$ ve $t \geq 0$ iken $M_f(x, y, t) = f(M(x, y, t))$ olarak tanımlanan $M_f: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(M_f, *)$ ikilisi X üzerinde bir KM-bulanık metrik oluyorsa f 'ye $*$ -bulanık metrik-koruyan fonksiyon denir (Pedraza ve diğ., 2021).

Teorem 4.3.1.4: $f: I \rightarrow I$ bir fonksiyon ve $*$ bir t-norm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) f bir $*$ -bulanık metrik-koruyan fonksiyondur.
- (ii) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, f monoton artan, $*$ -altçarpımsal, sol-sürekli ve trivial çekirdeğe sahiptir (Pedraza ve diğ., 2021).

Bu kısımdan itibaren SE-bulanık kısmi metrik uzay ile Kramosil ve Michalek anlamındaki aşağıdaki şekilde tanımlanan SE-bulanık kısmi metrik uzay yapısı anlaşılacaktır.

Tanım 4.3.1.5: X bir küme, $*$ sürekli bir t-norm ve $F: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ bir dönüşüm olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $(F, *)$ ikilisine X üzerinde bir SE-bulanık kısmi metrik adı verilir.

(KMSE1) Her $x, y \in X$ için $F(x, y, 0) = 0$.

(KMSE2) Her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $x = y \Leftrightarrow F(x, x, t) = F(x, y, t) = F(y, y, t)$.

(KMSE3) Her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $0 < F(x, y, t) \leq F(x, x, t)$.

(KMSE4) Her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $F(x, y, t) = F(y, x, t)$.

(KMSE5) Her $x, y, z \in X$ ve $s, t > 0$ için

$$F(x, y, t) * F(y, z, s) \leq F(x, y, \max\{t, s\}) * F(z, z, \max\{t, s\}).$$

(KMSE6) Her $x, y \in X$ için $F(x, y, \cdot): (0, \infty) \rightarrow I$ sol-süreklidir.

Üzerinde bir $(F, *)$ SE-bulanık kısmi metriği tanımlanmış olan X kümesine SE-bulanık kısmi metrik uzay adı verilir ve bu uzay $(X, F, *)$ üçlüsü ile gösterilir.

Tanım 4.3.1.6: $f: I \rightarrow I$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $(X, F, *)$ (sabit) SE-bulanık kısmi metrik uzayı için $x, y \in X$ ve $t \geq 0$ iken $F_f(x, y, t) = f(F(x, y, t))$ şeklinde tanımlanan $F_f: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(F_f, *)$ ikilisi X üzerinde bir SE-bulanık kısmi metrik oluyorsa f 'ye $*$ -(sabit) bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon denir.

Önerme 4.3.1.7: Eğer $f: I \rightarrow I$ bir $*$ -bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon ise f monoton artan ve $f(0) = 0$ dır.

İspat: $X = I$ ve $*$ sürekli bir t-norm olsun. Her $x, y \in X$ ve $t \geq 0$ için

$$F_f(x, y, t) = \begin{cases} t \min\{x, y\}, & 0 \leq t < 1 \\ \min\{x, y\}, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $F_f: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(F_f, *)$ ikilisi X üzerinde bir SE-bulanık kısmi metrik olmaktadır. $f: I \rightarrow I$ bir $*$ -bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon ve $a_1, a_2 \in I$ için $a_1 \leq a_2$ olsun. Bu durumda, $(F_f, *)$ ikilisi X üzerinde bir

SE-bulanık kısmi metrik olduğundan $t \geq 1$ iken $F_f(a_1, a_2, t) \leq F_f(a_2, a_2, t)$ eşitsizliği sağlanmaktadır. Buradan, $f(F((a_1, a_2, t))) \leq f(F(a_2, a_2, t))$, $\forall t \geq 1$, olup $f(a_1) \leq f(a_2)$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Ayrıca her $x, y \in X$ için

$$f(0) = f(F(x, y, 0)) = F_f(x, y, 0) = 0$$

bulunur.

Aşağıdaki örnekte *-bulanık metrik-koruyan fonksiyonlar için sağlanan $f(1) = 1$ özelliğinin *-bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyonlar için sağlanmadığı gösterilmektedir.

Örnek 4.3.1.8: $(I, F, *)$ bir SE-bulanık kısmi metrik uzay ve $a \in (0, 1)$ olsun. $x, y \in I$ ve $t \geq 0$ iken $F_M(x, y, t) = a \wedge F(x, y, t)$ olarak tanımlanan $F_M: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümünü ele alalım. Bu durumda, $(X, F_M, *)$ bir SE-bulanık kısmi metrik uzaydır. Ayrıca, $f(x) = \min\{x, a\}$ şeklinde tanımlanan $f: I \rightarrow I$ dönüşümü bir *-bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyondur. Ancak, $f(1) = \min\{a, 1\} = a \neq 1$ dir.

Önerme 4.3.1.9: Eğer $f: I \rightarrow I$ bir *-bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon ise f *-altçarpımsaldır.

İspat: * sürekli bir t-norm olmak üzere $f: I \rightarrow I$ bir *-bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon ve $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ olmak üzere $x, y \in X$ ve $t \geq 0$ iken

$$F(x, y, t) = F(y, x, t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ a, & x = x_1, y \in \{x_1, x_2\}, t > 0 \\ b, & x \in \{x_2, x_3\}, y = x_3, t > 0 \\ a * b, & x = x_1, y = x_3, t > 0 \\ 1, & x = x_2, y = x_2, t > 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $F: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(F, *)$ ikilisi X üzerinde bir SE-bulanık kısmi metrik olmaktadır. Buradan, $(X, F_f, *)$ bir bulanık kısmi metrik uzay olduğundan

$$F_f(x_1, x_2, 2) * F_f(x_2, x_3, 2) \leq F_f(x_1, x_3, 2) * F_f(x_2, x_2, 2)$$

$$\Rightarrow f(a) * f(b) \leq f(a * b) * f(1) \leq f(a * b)$$

elde edilir. Yani, f fonksiyonu $*$ -altçarpımsaldır.

Sonuç 4.3.1.10: Eğer $f: I \rightarrow I$ bir $*$ -bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon ise f monoton artan, $*$ -altçarpımsal ve $f(0) = 0$ dir.

Önerme 4.3.1.11: $*=\wedge$ veya $*$, her $a, b, c \in I$ için $a * c \leq a * b$ iken $c \leq b$ koşulunu sağlayan bir t-norm olsun. Eğer $f: I \rightarrow I$ bir $*$ -bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon ise $x, y \in X$ iken $F_f(x, y, \cdot): [0, \infty) \rightarrow I$ azalmayan bir dönüşümdür.

İspat: $*=\wedge$ veya $*$, her $a, b, c \in I$ için $a * c \leq a * b$ iken $c \leq b$ koşulunu sağlayan bir t-norm, $f: I \rightarrow I$ bir $*$ -bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon ve $(X, F, *)$ bir SE-bulanık kısmi metrik uzay olsun. $f: I \rightarrow I$ bir $*$ -bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon olduğundan her $x, y \in X$ ve $t \geq 0$ için $F_f(x, y, t) = f(F(x, y, t))$ şeklinde tanımlı $F_f: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonu ile $(F_f, *)$ ikilisi X üzerinde bir SE-bulanık kısmi metriktir. Teorem 4.2.5 gereğince $*$, her $a, b, c \in I$ için $a * c \leq a * b$ iken $c \leq b$ koşulunu sağlayan bir t-norm iken her $x, y \in X$ için $F_f(x, y, \cdot): [0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonu azalmayandır. Şimdi, $*=\wedge$ olarak alalım. $(X, F, \wedge)$ bir SE-bulanık kısmi metrik uzay olduğundan her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için

$$F(x, y, \max\{s, t\}) \wedge F(y, y, \max\{s, t\}) \geq F(x, y, t) \wedge F(y, y, s)$$

dir. $f: I \rightarrow I$ bir $\wedge$ -bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon olduğundan monoton artan olup

$$f(F(x, y, \max\{s, t\}) \wedge F(y, y, \max\{s, t\})) \geq f(F(x, y, t) \wedge F(y, y, s))$$

elde edilir. Ayrıca, f $\wedge$ -altçarpımsal olduğundan

$$f(F(x, y, \max\{s, t\}) \wedge F(y, y, \max\{s, t\})) \geq f(F(x, y, t) \wedge F(y, y, s))$$

$$\geq f(F(x, y, t)) \wedge f(F(y, y, s)) = F_f(x, y, t) \wedge F_f(y, y, s)$$

sağlanır. Farzedelim ki, her $x, y \in X$ için $s \geq t$ iken $F_f(x, y, s) < F_f(x, y, t)$ olsun. Bu durumda, yukarıdaki eşitsizlikten

$$F_f(x, y, s) = f(F(x, y, s)) = f(F(x, y, s) \wedge F(y, y, s))$$

$$\geq F_f(x, y, t) \wedge F_f(y, y, s) > F_f(x, y, t)$$

çelişkisi bulunur. O halde, $*=\wedge$ iken her $x, y \in X$ için $F_f(x, y, \cdot): [0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonu azalmayandır.

Farzedelim ki, $s \geq t$ iken $F_f(x, y, s) < F_f(x, y, t)$ olsun.

Teorem 4.3.1.12: $*$ bir t-norm olmak üzere eğer $f: I \rightarrow I$ bir $*$ -bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon ise her $a, b, c, d \in I$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) f sol-süreklidir.
- (ii) $\max\{a, b\} \leq d$ ve $a * b \leq c * d$ iken $f(a) * f(b) \leq f(c) * f(d)$.
- (iii) Eğer $a \leq \min\{b, c\}$ ve $f(a) = f(b) = f(c)$ ise $a = b = c$.

İspat: $f: I \rightarrow I$ bir $*$ -bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon olsun.

(i) $X = \mathbb{R}^+$ ve $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I$, $t \in I$ noktasına yakınsayan bir dizi olsun. Buradan, $\frac{s_n}{s_n+1} = t_n$ olacak şekilde azalmayan bir $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I$ dizisi bulabiliriz. $x, y \in X$ ve $t \geq 0$ iken

$$F_{p_{max}}(x, y, t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \frac{t}{t + \max\{x, y\}}, & t > 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $F_{p_{max}}: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile X üzerinde bir SE-bulanık kısmi metrik olan $(F_{p_{max}}, *_p)$ ikilisini ele alalım. Dikkat edilirse, $F_{p_{max}}(1, 1, s_n) = t_n \rightarrow t$ dir. Ayrıca, $\frac{s}{s+1} = t$ olacak şekilde bir $s \in I$ vardır. Buradan,

$$F_{p_{max}}(1, 1, s_n) = t_n \rightarrow t = \frac{s}{s+1} = F_{p_{max}}(1, 1, s)$$

elde edilir. Her $x, y \in X$ için $(F_{p_{max}})_f(x, y, \cdot): [0, \infty) \rightarrow I$ sol-süreklidir olduğundan $(F_{p_{max}})_f(1, 1, s_n) \rightarrow (F_{p_{max}})_f(1, 1, s)$ bulunur. Buradan ise $f(t_n) \rightarrow f(t)$ ve dolayısıyla f fonksiyonun sol-süreklidir elde edilir.

(ii) $a, b, c, d \in I$ için $\max\{a, b\} \leq d$ ve $a * b \leq c * d$ olsun. Eğer $a \leq b \leq c \leq d$, $a \leq c \leq b \leq d$, $a \leq b \leq d \leq c$, $b \leq a \leq c \leq d$, $b \leq a \leq d \leq c$ veya $b \leq c \leq a \leq d$ ise $f(a) * f(b) \leq f(c) * f(d)$ olduğu açıktır. $c \leq a \leq b \leq d$ veya $c \leq b \leq a \leq d$ iken $a * b \leq c * d$ ve f monoton artan olduğundan $f(a) * f(b) \leq f(c) * f(d)$ eşitsizliğinin sağlandığı görülmektedir.

(iii) $a \leq \min\{b, c\}$ ve $f(a) = f(b) = f(c)$ olsun. $x, y \in X$ ve $t \geq 0$ iken

$$F_{p_{max}}(x, y, t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \frac{t}{t + \max\{x, y\}}, & t > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan $F_{p_{max}}: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile X üzerinde bir SE-bulanık kısmi metrik olan $(F_{p_{max}}, *_p)$ ikilisini ele alalım. Eğer $a, b, c \in (0, 1]$ ise her $t > 0$ için $a = F_{p_{max}}(x_3, x_3, t) \leq F_{p_{max}}(x_1, x_2, t)$, $b = F_{p_{max}}(x_1, x_1, t)$ ve $c = F_{p_{max}}(x_2, x_2, t)$ olacak şekilde $x_1, x_2, x_3 \in X$ vardır. Buradan, $(F_{p_{max}})_f(x_3, x_3, t) \leq (F_{p_{max}})_f(x_1, x_2, t) \leq (F_{p_{max}})_f(x_1, x_1, t)$ eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $f(b) = f(a) = f(c)$ olduğundan her $t > 0$ için $(F_{p_{max}})_f(x_1, x_2, t) = (F_{p_{max}})_f(x_1, x_1, t) = (F_{p_{max}})_f(x_2, x_2, t)$ bulunur. $(X, (F_{p_{max}})_f, *_p)$ bir SE-bulanık kısmi metrik uzay olduğundan $x_1 = x_2$ elde edilir. Ayrıca, her $t > 0$ için $F_{p_{max}}(x_3, x_3, t) \leq F_{p_{max}}(x_1, x_1, t)$ ise $\frac{t}{t+x_3} \leq \frac{t}{t+x_1}$ eşitsizliğinde $x_3 \geq x_1$ olduğu bulunur. Buradan, her $t > 0$ için $F_{p_{max}}(x_3, x_3, t) = F_{p_{max}}(x_1, x_3, t)$ elde edilir. Dolayısıyla, her $t > 0$ için

$$(F_{p_{max}})_f(x_3, x_3, t) = (F_{p_{max}})_f(x_1, x_3, t) = (F_{p_{max}})_f(x_1, x_1, t)$$

bulunur ve bu ise $x_1 = x_3$ olduğunu göstermektedir. Sonuç olarak, $a = b = c$ elde edilir.

Teorem 4.3.1.13: $f: I \rightarrow I$ bir fonksiyon ve $*$, her $a, b, c \in I$ için $a * b \geq a * c$ iken $b \geq c$ koşulunu sağlayan bir t-norm olsun. Eğer her $a, b, c, d \in I$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa f bir $*$ -bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyondur.

(i) $f(0) = 0$,

(ii) f sol-süreklidir.

(iii) $\max\{a, b\} \leq d$ ve $a * b \leq c * d$ iken $f(a) * f(b) \leq f(c) * f(d)$.

(iv) Eğer $a \leq \min\{b, c\}$ ve $f(a) = f(b) = f(c)$ ise $a = b = c$.

İspat: (i)-(iv) koşulları sağlansın. $(X, F, *)$ bir SE-bulanık kısmi metrik uzay olsun. Bu durumda, her $x, y, z \in X$ ve $s, t > 0$ için aşağıdaki koşulların sağlandığı elde edilir.

(KMSE1) $F_f(x, y, 0) = f(F(x, y, 0)) = f(0) = 0$ olmaktadır.

(KMSE2) $F_f(x, y, t) = F_f(x, x, t) = F_f(y, y, t)$ olsun. $F(x, y, t) \leq F(x, x, t)$ ve $F(x, y, t) \leq F(y, y, t)$ olduğundan (iv)'den $F(x, x, t) = F(x, y, t) = F(y, y, t)$ elde edilir. Buradan, $x = y$ bulunur. Diğer durumda ise $F_f(x, y, t) = F_f(x, x, t) = F_f(y, y, t)$ olduğu açıktır.

(KMSE3) $F_f(x, y, t) = f(F(x, y, t)) = f(F(y, x, t)) = F_f(y, x, t)$ bulunur.

(KMSE4) $F(x, y, t) \leq F(y, y, \max\{s, t\})$, $F(y, z, s) \leq F(y, y, \max\{s, t\})$ ve $F(x, y, t) * F(y, z, s) \leq F(x, z, \max\{s, t\}) * F(y, y, \max\{s, t\})$ olduğundan (iii)'den $F_f(x, y, t) * F_f(y, z, s) \leq F_f(x, z, \max\{s, t\}) * F_f(y, y, \max\{s, t\})$ elde edilir.

(KMSE5) Her $x, y \in X$ için $F(x, y, \cdot): [0, \infty) \rightarrow I$ ve $f: I \rightarrow I$ fonksiyonları sol-süreklili olduğundan $F_f(x, y, \cdot) = f(F(x, y, \cdot)): [0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonu da sol-süreklidir.

Sonuç olarak, $(X, F_f, *)$ bir SE-bulanık kısmi metrik uzay olduğundan f bir *-bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyondur.

Teorem 4.3.1.14: $f: I \rightarrow I$ bir fonksiyon olsun. f 'nin $\wedge$ -bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul her $a, b, c \in I$ için aşağıdaki koşulları sağlamasıdır.

(i) $f(0) = 0$.

(ii) f sol-süreklidir.

(iii) $a \leq \min\{b, c\}$ ve $f(a) = f(b) = f(c)$ iken $a = b = c$.

İspat: $f: I \rightarrow I$ bir $\wedge$ -bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon iken Önerme 4.3.1.7 ve Teorem 4.3.1.12'den (i), (ii) ve (iii) özelliklerinin sağlandığı açıktır. Tersine ise Teorem 4.3.1.13'e benzer şekilde, $*=\wedge$ alınarak, ispatlanmaktadır.

Sonuç 4.3.1.15: $f: I \rightarrow I$ bir fonksiyon ve $*=\wedge$ veya $*$, her $a, b, c \in I$ için $a * b \geq a * c$ iken $b \geq c$ koşulunu sağlayan bir t-norm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) f bir $*$ -bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyondur.

(2) Her $a, b, c, d \in I$ için f aşağıdaki özellikleri sağlar.

(2.1) $f(0) = 0$.

(2.2) f sol-süreklidir.

(2.3) $\max\{a, b\} \leq d$ ve $a * b \leq c * d$ iken $f(a) * f(b) \leq f(c) * f(d)$.

(2.4) Eğer $a \leq \min\{b, c\}$ ve $f(a) = f(b) = f(c)$ ise $a = b = c$.

Sonuç 4.3.1.16: $f: I \rightarrow I$ bir fonksiyon ve $*$ sürekli bir t-norm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) f bir $*$ -sabit bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyondur.

(2) Her $a, b, c, d \in I$ için f aşağıdaki özellikleri sağlar.

(2.1) $f(0) = 0$.

(2.2) $\max\{a, b\} \leq d$ ve $a * b \leq c * d$ iken $f(a) * f(b) \leq f(c) * f(d)$.

(2.3) Eğer $a \leq \min\{b, c\}$ ve $f(a) = f(b) = f(c)$ ise $a = b = c$.

Sonuç 4.3.1.17: $f: I \rightarrow I$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) f bir $\wedge$ -sabit bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyondur.

(2) Her $a, b, c, d \in I$ için f aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$(2.1) f(0) = 0.$$

$$(2.2) \text{ Eğer } a \leq \min\{b, c\} \text{ ve } f(a) = f(b) = f(c) \text{ ise } a = b = c.$$

Sonuç 4.3.1.18: Eğer $f: I \rightarrow I$ trivial çekirdeğe sahip olan bir $*$ -bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon ise f bir $*$ -bulanık metrik-koruyan fonksiyondur.

İspat: $f: I \rightarrow I$ trivial çekirdeğe sahip olan bir $*$ -bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon ise $f(1) = 1$ dir. Ayrıca, $f(0) = 0$ ve f monoton artan bir fonksiyondur. Dahası, f , $*$ -altçarpımsal ve sol-süreklidir. Sonuç olarak, Teorem 4.3.1.4'den f 'nin $*$ -bulanık metrik-koruyan fonksiyon olduğu elde edilir.

4.3.2. Güçlü SE-Bulanık Kısmi Metrik-Koruyan Fonksiyonlar

$(X, F, \wedge)$ bir SE-bulanık kısmi metrik uzay olsun. $x \in X$, $r \in (0,1)$ ve $t > 0$ iken $B_F(x, r, t) = \{z \in X \mid F(x, z, t) > F(x, x, t) - r\}$ olmak üzere

$$\tau_F = \{A \subseteq X \mid \text{Her } x \in A \text{ için } \exists t > 0, r \in (0,1): B_F(x, r, t) \subseteq A\}$$

olarak tanımlanan τ_F ailesi X üzerinde bir topolojidir (Aydoğdu ve diğ., 2020).

Aşağıdaki örnekte bir $\wedge$ -sabit bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyonun her zaman topolojiyi korumadığı gösterilmektedir. Yani, bulanık kısmi metriğin ürettiği topoloji ile bir $\wedge$ -sabit bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon altında dönüştürülen bulanık kısmi metriğin ürettiği topolojinin aynı olmadığı anlaşılmaktadır:

Örnek 4.3.2.1: Her $x \in I$ için

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1+x}{2+x}, & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $f: I \rightarrow I$ fonksiyonu, Sonuç 4.3.1.17'den, bir $\wedge$ -sabit bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyondur. Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ ve $t \geq 0$ için

$$F_{p_{max}}(x, y, t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \frac{1}{1+\max\{x,y\}}, & t > 0 \end{cases} \text{ şeklindeki } F_{p_{max}}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0, \infty) \rightarrow I \text{ dönüşümü}$$

ile $\mathbb{R}^+$ üzerinde bir SE-bulanık kısmi metrik olan $(F_{p_{max}}, \wedge)$ ikilisini ele alalım. Buradan, her $x, y \in \mathbb{R}^+$ ve $t \geq 0$ için

$$(F_{p_{max}})_f(x, y, t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \frac{2 + \max\{x, y\}}{3 + \max\{x, y\}}, & t > 0 \end{cases}$$

elde edilir. Dikkat edilirse, $B_{F_f}(0, \frac{1}{4}) = \{0\}$ ve $\delta \in (0, 1)$ için $B_F(0, \delta) = [0, \frac{\delta}{1-\delta})$ olup $[0, \frac{\delta}{1-\delta}) \subseteq \{0\}$ olacak şekilde bir $\delta \in (0, 1)$ mevcut değildir. Buradan, $\tau_{F_{p_{max}}} \neq \tau_{(F_{p_{max}})_f}$ olduğu görülmektedir.

Tanım 4.3.2.2: f bir $*$ -(sabit) bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon olsun. Eğer her $(X, F, *)$ (sabit) SE-bulanık kısmi metrik uzayı için $(F, *)$ ve $(F_f, *)$ bulanık kısmi metrikleri topolojik olarak denk ise f 'ye güçlü $*$ -(sabit) bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon adı verilir.

Örnek 4.3.2.3: : Her $x \in I$ için $f(x) = \frac{x}{2}$ olarak tanımlanan $f: I \rightarrow I$ fonksiyonu, Sonuç 4.3.2.3'den, bir $\wedge$ -sabit bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyondur. Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ ve

$$t \geq 0 \text{ için } F_{p_{max}}(x, y, t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \frac{t}{t + \max\{x, y\}}, & t > 0 \end{cases} \text{ şeklindeki } F_{p_{max}}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0, \infty) \rightarrow I$$

dönüşümü ile $\mathbb{R}^+$ üzerinde bir SE-bulanık kısmi metrik olan $(F_{p_{max}}, \wedge)$ ikilisini ele alalım. Buradan, her $x, y \in \mathbb{R}^+$ ve $t \geq 0$ için

$$(F_{p_{max}})_f(x, y, t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \frac{t}{2(t + \max\{x, y\})}, & t > 0 \end{cases}$$

bulunur. $x \in \mathbb{R}^+$, $r \in (0, 1)$ ve $t > 0$ iken

$$\begin{aligned} B_{(F_{p_{max}})_f}(x, r, t) &= \{y \in X \mid (F_{p_{max}})_f(x, y, t) > (F_{p_{max}})_f(x, x, t) - r\} \\ &= \left\{y \in X \mid \frac{t}{2(t + \max\{x, y\})} > \frac{t}{2(t + x)} - r\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $r' = 2r$ olarak alınırsa her $x \in \mathbb{R}^+$ ve $t > 0$ için

$$\begin{aligned}
B_{(F_{p_{max}})_f}(x, r, t) &= \left\{ y \in X \mid \frac{t}{2(t + \max\{x, y\})} > \frac{t}{2(t + x)} - \frac{r'}{2} \right\} \\
&= \left\{ y \in X \mid \frac{t}{t + \max\{x, y\}} > \frac{t}{t + x} - r' \right\} = B_{F_{p_{max}}}(x, r', t)
\end{aligned}$$

sağlanır. Yani, $\tau_{F_{p_{max}}} = \tau_{(F_{p_{max}})_f}$ dir. Dolayısıyla, f bir güçlü Λ -bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyondır.

Teorem 4.3.2.4: Eğer $f: I \rightarrow I$ bir güçlü Λ -sabit bulanık kısmi metrik-koruyan (veya $*_p$ -sabit bulanık kısmi metrik-koruyan) fonksiyon ise $f, x = 1$ noktasında süreklidir.

İspat: $X = (0, 1]$ olsun. $x, y \in X$ ve $t \geq 0$ iken

$$F(x, y, t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \min\{x, y\}, & t > 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $F: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile (F, Λ) ikilisi X üzerinde bir sabit SE-bulanık kısmi metrik olmaktadır. $f: I \rightarrow I$ bir güçlü Λ -sabit bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon olduğundan (F, Λ) ve (F_f, Λ) bulanık kısmi metrikleri topolojik olarak denktir. $\varepsilon \in (0, 1)$ olsun. Bu durumda, $t > 0$ iken $B_F(1, \delta, t) \subseteq B_{F_f}(1, \varepsilon, t)$ olacak şekilde bir $\delta \in (0, 1)$ vardır. Buradan, $y > 1 - \delta$ iken $f(y) > 1 - \varepsilon$ olduğu görülmektedir. Bu ise f fonksiyonunun 1 noktasında sürekli olduğu anlamına gelmektedir.

Teorem 4.3.2.5: Eğer $f: I \rightarrow I$ güçlü Λ -sabit bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyonu $f(1) = 1$ koşulunu sağlıyorsa aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (i) (X, F, Λ) bir 1-tam sabit SE-bulanık kısmi metrik uzaydır.
- (ii) (X, F_f, Λ) bir 1-tam sabit SE-bulanık kısmi metrik uzaydır.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii): (X, F, Λ) bir 1-tam sabit SE-bulanık kısmi metrik uzay ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, (X, F_f, Λ) sabit SE-bulanık kısmi metrik uzayında bir 1-Cauchy dizisi olsun. Bu durumda, her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F_f(x_n, x_m, t) = 1$ dir. f kesin artan bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}: [0, f(1)] \rightarrow I$ süreklidir ve her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t) = 1$ elde edilir.

Buradan, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(X, F, \wedge)$ sabit SE-bulanık kısmi metrik uzayında bir 1-Cauchy dizisidir. $(X, F, \wedge)$ sabit SE-bulanık kısmi metrik uzayı 1-tam olduğundan her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = F(x, x, t) = 1$ olacak şekilde bir $x \in X$ mevcuttur. f fonksiyonu 1 noktasında sürekli olduğundan her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F_f(x_n, x_m, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_f(x_n, x, t) = F_f(x, x, t) = f(1) = 1$ elde edilir. Dolayısıyla $(X, F_f, \wedge)$ bir 1-tam sabit SE-bulanık kısmi metrik uzaydır.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $(X, F_f, \wedge)$ bir 1-tam sabit SE-bulanık kısmi metrik uzay ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(X, F, \wedge)$ sabit SE-bulanık kısmi metrik uzayında bir 1-Cauchy dizisi olsun. Bu durumda, her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t) = 1$ dir. f fonksiyonu 1 noktasında sürekli olduğundan her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F_f(x_n, x_m, t) = f(1) = 1$ elde edilir. Bu ise $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $(X, F_f, \wedge)$ sabit SE-bulanık kısmi metrik uzayında bir 1-Cauchy dizisi olduğunu ifade eder. $(X, F_f, \wedge)$ sabit SE-bulanık kısmi metrik uzayı 1-tam olduğundan her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F_f(x_n, x_m, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_f(x_n, x, t) = F_f(x, x, t) = 1$ olacak şekilde bir $x \in X$ mevcuttur. f kesin artan bir fonksiyon olduğundan her $t > 0$ için $F(x, x, t) = 1$ bulunur. Şimdi, her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = F(x, x, t) = 1$ olduğunu gösterelim.

$\varepsilon \in (0, 1)$ olsun. f bir güçlü $\wedge$ -sabit SE-bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon olduğundan her $x \in X$ ve $t > 0$ için $B_{F_f}(x, \delta, t) \subseteq B_F(x, \varepsilon, t)$ olacak şekilde bir $\delta \in (0, 1)$ vardır. Her $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} F_f(x_n, x, t) = F_f(x, x, t) = 1$ olduğundan her $t > 0$ için $x_n \in B_F(x, \varepsilon, t)$ elde edilir. Buradan ise her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = F(x, x, t) = 1$ olduğu görülmektedir. Sonuç olarak $(X, F, \wedge)$ bir 1-tam sabit SE-bulanık kısmi metrik uzaydır.

Teorem 4.3.2.6: Eğer $f: I \rightarrow I$ kesin artan ve örten güçlü $*$ -sabit bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyonu ise aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) $(X, F, *)$ bir tam sabit SE-bulanık kısmi metrik uzaydır.
- (ii) $(X, F_f, *)$ bir tam sabit SE-bulanık kısmi metrik uzaydır.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii): $(X, F, *)$ bir tam sabit SE-bulanık kısmi metrik uzay ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(X, F_f, *)$ sabit SE-bulanık kısmi metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda, $t > 0$ iken $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F_f(x, y, t) = b_0$ olacak şekilde bir $b_0 \in I$ mevcuttur. f örten bir fonksiyon olduğundan $f(a_0) = b_0$ olacak şekilde bir $a_0 \in I$ vardır. Ayrıca f kesin artan bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}: [0, f(1)] \rightarrow I$ süreklidir ve her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t) = a_0$ elde edilir. Buradan, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(X, F, *)$ sabit SE-bulanık kısmi metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. $(X, F, *)$ sabit SE-bulanık kısmi metrik uzayı tam olduğundan her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = F(x, x, t) = a_0$ olacak şekilde bir $x \in X$ mevcuttur. Diğer yandan f fonksiyonu kesin artan ve örten olduğundan süreklidir. Bu durumda, $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F_f(x_n, x_m, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_f(x_n, x, t) = F_f(x, x, t) = f(a_0) = b_0$ elde edilir. Dolayısıyla $(X, F_f, *)$ bir tam sabit SE-bulanık kısmi metrik uzaydır.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $(X, F_f, *)$ bir tam sabit SE-bulanık kısmi metrik uzay ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(X, F, *)$ sabit SE-bulanık kısmi metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda, her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t) = a_0$ olacak şekilde bir $a_0 \in I$ mevcuttur. f fonksiyonu sürekli olduğundan her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F_f(x_n, x_m, t) = f(a_0)$ elde edilir. Bu ise $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $(X, F_f, *)$ sabit SE-bulanık kısmi metrik uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu ifade eder. $(X, F_f, *)$ sabit SE-bulanık kısmi metrik uzayı tam olduğundan her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F_f(x_n, x_m, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_f(x_n, x, t) = F_f(x, x, t) = f(a_0)$ olacak şekilde bir $x \in X$ mevcuttur. f kesin artan bir fonksiyon olduğundan her $t > 0$ için $F(x, x, t) = a_0$ bulunur. Şimdi her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = F(x, x, t) = a_0$ olduğunu gösterelim.

$\varepsilon \in (0, 1)$ olsun. f bir güçlü $*$ -sabit bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon olduğundan her $x \in X$ ve $t > 0$ için $B_{F_f}(x, \delta, t) \subseteq B_F(x, \varepsilon, t)$ olacak şekilde bir $\delta \in (0, 1)$ vardır. Her $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} F_f(x_n, x, t) = F_f(x, x, t) = f(a_0)$ olduğundan her $t > 0$ için $x_n \in B_F(x, \varepsilon, t)$ elde edilir. Buradan ise her $t > 0$ için

$\lim_{n,m \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = F(x, x, t) = a_0$ olduğu görülmektedir. Sonuç olarak $(X, F, *)$ bir tam sabit SE-bulanık kısmi metrik uzaydır.

4.3.3. Daralma-Koruyan Fonksiyonlar

Tanım 4.3.3.1: $(X, F, *)$ bir SE-bulanık kısmi metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun.

(1) $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken

$$F(Tx, Ty, kt) \geq F(x, y, t)$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ mevcut ise T 'ye F -daralma dönüşümü denir.

(2) $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken

$$k \left(\frac{1}{F(x, y, t)} - 1 \right) \geq \frac{1}{F(Tx, Ty, t)} - 1$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ mevcut ise T 'ye GS- F -daralma dönüşümü denir (Aldemir ve diğ., 2020).

Tanım 4.3.3.2: $f: I \rightarrow I$ bir $*$ -bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon olsun. Eğer $(X, F, *)$ SE-bulanık kısmi metrik uzayındaki her (GS)- F -daralma dönüşümü aynı zamanda $(X, F_f, *)$ SE-bulanık kısmi metrik uzayında bir (GS)- F_f -daralma dönüşümü ise f 'ye (GS-)daralma-koruyan fonksiyon denir.

Uyarı 4.3.3.3: Her $f: I \rightarrow I$ $*$ -bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyonu bir daralma-koruyan fonksiyondur. Ancak aşağıdaki örnekte her $f: I \rightarrow I$ $*$ -bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyonunun bir GS-daralma-koruyan fonksiyon olmadığı gösterilmektedir.

Örnek 4.3.3.4: $X = \mathbb{R}^+$ olmak üzere $x, y \in X$ ve $t \geq 0$ iken

$$F(x, y, t) = \begin{cases} 0, & t \leq |x - y| \\ 1, & t > |x - y| \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $F: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümünü ele alalım. Burada, $(X, F, \wedge)$ bir SE-bulanık kısmi metrik uzay olmaktadır. Her $x \in X$ için $Tx = x + 1$ şeklinde tanımlanan $T: X \rightarrow X$ fonksiyonunu göz önüne alalım. T 'nin $(X, F, \wedge)$ SE-bulanık kısmi

metrik uzayında GS-daralma-koruyan fonksiyonu olduğu kolaylıkla görülmektedir. Ayrıca her $x \in I$ için $f(x) = \frac{x}{2}$ şeklinde tanımlanan $f: I \rightarrow I$ fonksiyonu bir $\wedge$ -bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon olmaktadır. Buradan, $x, y \in X$ ve $t \geq 0$ iken

$$F_f(x, y, t) = \begin{cases} 0, & t \leq |x - y| \\ \frac{1}{2}, & t > |x - y| \end{cases}$$

elde edilir. Ancak her $k \in (0,1)$ için

$$F_f(T1, T2, 3) = F_f(2, 3, 3) = \frac{1}{2} < \frac{1}{k+1} = \frac{F_f(1, 2, 3)}{k + (1-k)F_f(1, 2, 3)}$$

olduğundan T fonksiyonu $(X, F_f, \wedge)$ SE-bulanık kısmi metrik uzayında bir GS-daralma dönüşümü olmamaktadır.

Teorem 4.3.3.5: Eğer $f: I \rightarrow I$ bir $*$ -bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyonu ise aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) f bir GS-daralma-koruyan fonksiyonudur.

(ii) Her $k \in (0,1)$ ve $x \in I$ için $\frac{f(x)}{c+(1-c)f(x)} \leq f\left(\frac{x}{k+(1-k)x}\right)$ olacak şekilde bir $c \in (0,1)$ vardır.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii): f bir GS-daralma-koruyan fonksiyon olsun. Öyle bir $k_0 \in (0,1)$ mevcut olsun ki her $c \in (0,1)$ için $x_c \in I$ olmak üzere $\frac{f(x_c)}{c+(1-c)f(x_c)} > f\left(\frac{x_c}{k+(1-k)x_c}\right)$ eşitsizliği sağlansın. Her $x, y \in (0,1]$ ve $t \geq 0$ için

$$F(x, y, t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \max\{x, y\}, & t > 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $F: (0,1] \times (0,1] \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(F, *_p)$ ikilisi $(0,1]$ üzerinde bir SE-bulanık kısmi metrik olmaktadır. Her $x \in (0,1]$ için $Tx = k_0x$ şeklinde tanımlanan $T: (0,1] \rightarrow (0,1]$ fonksiyonunu ele alalım. Her $x, y \in (0,1]$ ve $t > 0$ için

$$F(Tx, Ty, t) = F(k_0x, k_0y, t) = 1 - \frac{k_0}{2} \max\{x, y\}$$

$$\geq \frac{2 - \max\{x, y\}}{2 - \max\{x, y\} + k_0 \max\{x, y\}} = \frac{F(x, y, t)}{k_0 + (1 - k_0)F(x, y, t)}$$

sağlanmaktadır. Bu durumda, T bir GS-F-daralma dönüşümüdür. Ancak, her $t > 0$ için

$$F_f(Tx_c, T1, t) = f(F(Tx_c, T1, t)) = f(F(k_0x_c, k_0, t)) = f\left(1 - \frac{k_0}{2}\right) \leq f\left(\frac{2}{2+k_0}\right)$$

$$= f\left(\frac{1}{1+\frac{k_0}{2}}\right) = f\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{k_0}{2}}\right) = f\left(\frac{F(x_c, 1, t)}{\frac{k_0}{2} + \left(1 - \frac{k_0}{2}\right)F(x_c, 1, t)}\right) < \frac{f(F(x_c, 1, t))}{c + (1-c)f(F(x_c, 1, t))} = \frac{F_f(x_c, 1, t)}{c + (1-c)F_f(x_c, 1, t)}$$

elde edilir ki bu da f 'nin bir GS-daralma-koruyan fonksiyonu olması ile çelişmektedir.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $(X, F, *)$ bir SE-bulanık kısmi metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir GS- F -daralma dönüşümü olsun. Bu durumda, her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için

$$F(Tx, Ty, t) \geq \frac{F(x, y, t)}{k + (1 - k)F(x, y, t)}$$

olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ reel sayısı mevcuttur. Hipotezden, $x \in I$ olmak üzere

$$\frac{f(x)}{c + (1-c)f(x)} \leq f\left(\frac{x}{k + (1-k)x}\right) \text{ olacak şekilde bir } c \in (0, 1) \text{ vardır. Ayrıca } f \text{ monoton artan}$$

olduğundan her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $k \in (0, 1)$ olmak üzere

$$F_f(Tx, Ty, t) = f(F(Tx, Ty, t)) \geq f\left(\frac{F(x, y, t)}{k + (1-k)F(x, y, t)}\right)$$

$$\geq \frac{f(F(x, y, t))}{c + (1-c)f(F(x, y, t))} = \frac{F_f(x, y, t)}{k + (1-k)F_f(x, y, t)}$$

sağlanmaktadır. Buradan, T 'nin bir GS- F_f -daralma dönüşümü olduğu elde edilir. Sonuç olarak, f bir GS-daralma-koruyan fonksiyonudur.

Sonuç 4.3.3.6: Eğer $f: I \rightarrow I$ *-bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyonu GS-daralma-koruyan ise f bir *-bulanık metrik-koruyan fonksiyondur.

Tanım 4.3.3.2’de bulanık kısmi metrik uzaylar ve *-bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyonlar yerine bulanık metrik uzaylar ve *-bulanık metrik-koruyan fonksiyonlar alınır. Bu tipteki fonksiyonlara bulanık (GS-)daralma-koruyan fonksiyonların tanımı elde edilir. Bu tipteki fonksiyonlara bulanık (GS-)daralma-koruyan fonksiyonlar adı verilir. Aşağıdaki teoremden GS-daralma-koruyan fonksiyonlar ile bulanık GS-daralma-koruyan fonksiyonlar arasındaki ilişkiye yer verilmektedir.

Teorem 4.3.3.7: Eğer $f: I \rightarrow I$ bir *-bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon ise aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) f bir GS-daralma-koruyan fonksiyondur.
- (ii) f bir bulanık metrik GS-daralma-koruyan fonksiyondur.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii): f bir GS-daralma-koruyan fonksiyon olsun. Sonuç 4.3.3.6’den f ’nin bir *-bulanık metrik-koruyan fonksiyon olduğu görülmektedir. Yani $(X, M, *)$ bir KM-bulanık metrik uzay olmak üzere $(X, M_f = f \circ g, *)$ bir KM-bulanık metrik uzaydır. Ayrıca Teorem 4.3.3.5’den, her $k \in (0,1)$ ve $x \in I$ için $\frac{f(x)}{c+(1-c)f(x)} \leq f\left(\frac{x}{k+(1-k)x}\right)$ olacak şekilde bir $c \in (0,1)$ vardır. $T: X \times X$ dönüşümü $(X, M, *)$ KM-bulanık metrik uzayında $k_0 \in (0,1)$ daralma sabiti ile bir bulanık GS-daralma dönüşümü olsun. Bu durumda, her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için

$$\begin{aligned} M_f(Tx, Ty, t) &= f(M(Tx, Ty, t)) \geq f\left(\frac{M(Tx, Ty, t)}{k_0 + (1 - k_0)M(Tx, Ty, t)}\right) \\ &\geq \frac{f(M(Tx, Ty, t))}{c + (1 - c)f(M(Tx, Ty, t))} = \frac{M_f(Tx, Ty, t)}{c + (1 - c)M_f(Tx, Ty, t)} \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $c \in (0,1)$ vardır. O halde, T dönüşümü $(X, M_f, *)$ KM-bulanık metrik uzayında $c \in (0,1)$ daralma sabiti ile bir bulanık GS-daralma dönüşümüdür. Sonuç olarak, f bir bulanık metrik GS-daralma-koruyan fonksiyondur.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Farzedelim ki f bir GS-daralma-koruyan fonksiyon olmasın. Bu durumda, Teorem 4.3.3.5'den, öyle bir $k_0 \in (0,1)$ mevcuttur ki her $c \in (0,1)$ için $x_c \in [0,1]$ olmak üzere $\frac{f(x_c)}{c+(1-c)f(x_c)} > f\left(\frac{x_c}{k+(1-k)x_c}\right)$ eşitsizliği sağlanır. $x, y \in \mathbb{R}^+$ ve $t \geq 0$ iken

$$F_{p_{max}}(x, y, t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \frac{t}{t + \max\{x, y\}}, & t > 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $F_{p_{max}}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(\mathbb{R}^+, F_{p_{max}}, *_p)$ SE-bulanık kısmi metrik uzayını ele alalım. $T: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $Tx = k_0x$ olarak tanımlansın. T 'nin bir GS-daralma dönüşümü olduğu kolaylıkla görülmektedir. $x, y \in \mathbb{R}^+$ ve $t \geq 0$ iken

$$M_{F_{p_{max}}}(x, y, t) = \begin{cases} 1, & x = y \\ F_{p_{max}}(x, y, t), & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $M_{F_{p_{max}}}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(\mathbb{R}^+, M_{F_{p_{max}}}, *_p)$ üçlününün bir KM-bulanık metrik uzay olduğu kolayca gösterilmektedir. Ayrıca, T 'nin $(\mathbb{R}^+, M_{F_{p_{max}}}, *_p)$ KM-bulanık metrik uzayında bir bulanık GS-daralma dönüşümü olduğu basit bir şekilde elde edilmektedir. f bir bulanık metrik GS-daralma-koruyan fonksiyon olduğundan T dönüşümü de $(\mathbb{R}^+, (M_{F_{p_{max}}})_f, *_p)$ KM-bulanık metrik uzayında bir bulanık GS-daralma dönüşümü olmaktadır. Yani her $x, y \in \mathbb{R}^+$ ve $t > 0$ için

$$(M_{F_{p_{max}}})_f(Tx, Ty, t) \geq \frac{(M_{F_{p_{max}}})_f(x, y, t)}{k_1 + (1 - k_1)(M_{F_{p_{max}}})_f(x, y, t)}$$

olacak şekilde bir $k_1 \in (0,1)$ reel sayısı mevcuttur. Buradan ise her $x, y \in \mathbb{R}^+$ ($x \neq y$) ve $t > 0$ için $k_1 \in (0,1)$ olmak üzere

$$(F_{p_{max}})_f(Tx, Ty, t) \geq \frac{(F_{p_{max}})_f(x, y, t)}{k_1 + (1 - k_1)(F_{p_{max}})_f(x, y, t)}$$

sağlanır. Yukarıdaki eşitsizlikte $y = 1$ ve $t = 0.5$ alınırsa her $x \in \mathbb{R}^+$ için

$$(F_{p_{max}})_f(Tx, T1, 0.5) = (F_{p_{max}})_f(k_0x, k_0, 0.5) \geq \frac{(F_{p_{max}})_f(x, 1, 0.5)}{k_1 + (1 - k_1)(F_{p_{max}})_f(x, 1, 0.5)}$$

bulunur. Buradan ise her $x \in I$ için

$$\frac{f\left(\frac{0.5}{0.5+1}\right)}{k_1 + (1 - k_1)f\left(\frac{0.5}{0.5+1}\right)} > f\left(\frac{0.5}{0.5+k_0}\right) \geq \frac{f\left(\frac{0.5}{0.5+1}\right)}{k_1 + (1 - k_1)f\left(\frac{0.5}{0.5+1}\right)}$$

eşitsizliği elde edilir ki bu ise bir çelişkidir. O halde, f bir GS-daralma-koruyan fonksiyondur.



5. KM-BULANIK KISMI METRİK UZAYLAR VE GV-BULANIK KISMI METRİK UZAYLAR

Bu bölümde ilk olarak Gregori ve diğ. tarafından 2019 yılında tanımlanan bulanık kısmi metrik (KM(GV)-bulanık kısmi metrik) uzay yapısı tanıtılacaktır. Daha sonra Haghi ve diğ. (2013)'ne benzer bir bakış açısıyla KM-bulanık metrik uzaylardaki sabit nokta teoremlerinin KM-bulanık kısmi metrik uzaylara hangi koşullar altında doğrudan genelleştirilebileceği elde edilcektir. Ayrıca KM-bulanık metrik uzaylarda mevcut olmayan bir daralma dönüşümü KM-bulanık kısmi metrik uzaylarda verilerek bu dönüşüme bağlı olan başka bir sabit nokta teoremi incelenecektir.

5.1. KM(GV)-Bulanık Kısmi Metrik Uzay Tanımı ve Temel Özellikleri

Tanım 5.1.1: X bir küme, $*$ sürekli bir t-norm ve $P: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ bir dönüşüm olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $(P, *)$ ikilisine X üzerinde bir KM-bulanık kısmi metrik adı verilir.

$$(FPM0) \quad x, y \in X \text{ iken } P(x, y, 0) = 0.$$

$$(FPM1) \quad x, y \in X \text{ ve } t > 0 \text{ iken } P(x, y, t) \leq P(x, x, t).$$

$$(FPM2) \quad x, y \in X \text{ ve } t > 0 \text{ iken } P(x, x, t) = P(y, y, t) = P(x, y, t) \Leftrightarrow x = y.$$

$$(FPM3) \quad x, y \in X \text{ ve } t > 0 \text{ iken } P(x, y, t) = P(y, x, t).$$

$$(FPM4) \quad x, y, z \in X \text{ ve } t, s > 0 \text{ iken}$$

$$(P(x, x, t) \rightarrow_* P(x, y, t)) * (P(y, y, s) \rightarrow_* P(y, z, s)) \leq (P(x, x, t + s) \rightarrow_* P(x, z, t + s)).$$

$$(FPM5) \quad x, y \in X \text{ iken } P(x, y, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow I \text{ sol-sürekli.}$$

Üzerinde bir $(P, *)$ KM-bulanık kısmi metriği tanımlanmış olan X kümesine KM-bulanık kısmi metrik uzay adı verilir ve bu uzay $(X, P, *)$ üçlüsü ile gösterilir (Gregori ve diğ., 2019).

Tanım 5.1.2: X bir küme, $*$ sürekli t-norm ve $P: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ bir dönüşüm olmak üzere $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ iken (FPM2), (FPM3), (FPM4) ve

(FPGV1) $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken $0 < P(x, y, t) \leq P(x, x, t)$.

(FPGV5) $x, y \in X$ iken $P(x, y, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow I$ süreklidir

koşulları sağlanıyorsa $(P, *)$ ikilisine de X üzerinde bir GV-bulanık kısmi metrik, $(X, P, *)$ üçlüsüne ise GV-bulanık kısmi metrik uzay denir.

KM-bulanık kısmi metrik uzaylar ve GV-bulanık kısmi metrik uzaylar, sırasıyla KM-bulanık metrik uzaylar ve GV-bulanık metrik uzayların birer genelleştirilmesidir. $(X, M, *)$ KM(GV)-bulanık metriği $x \in X$ ve $t > 0$ iken $M(x, x, t) = 1$ koşulunu sağlayan bir KM(GV)-bulanık kısmi metriktir (Gregori ve diğ., 2019).

Uyarı 5.1.3: GV-bulanık metrik uzaylarda olduğu gibi $(X, P, *)$ bir GV-bulanık kısmi metrik uzay iken her $x, y \in X$ için $P(x, y, 0) = 0$ olarak KM-bulanık kısmi metrik uzay tanımlanabilir (Gregori ve diğ., 2019).

Önerme 5.1.4: (X, p) bir kısmi metrik uzay ve $P_e: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü $x, y \in X$ iken $P_e(x, y, t) = e^{-\frac{p(x,y)}{t}}$ olarak tanımlansın. Bu durumda $(X, P_e, *_P)$ bir GV-bulanık kısmi metrik uzaydır (Gregori ve diğ., 2019).

Önerme 5.1.5: (X, p) bir kısmi metrik uzay ve $P_d: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü her $x, y \in X$ için $P_d(x, y, t) = \frac{t}{t+p(x,y)}$ olarak tanımlansın. Bu durumda $(X, P_d, *_H)$ bir GV-bulanık kısmi metrik uzaydır (Gregori ve diğ., 2019).

Uyarı 5.1.6: Yukarıdaki önermelerde tanımlanan dönüşümler için $(X, P_e, *_\wedge)$ ve $(X, P_d, *_\wedge)$ birer GV-bulanık kısmi metrik uzay olmaktadır. Ancak $(X, P_d, *_\mathcal{L})$ nın bir GV-bulanık kısmi metrik uzay olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir (Gregori ve diğ., 2019).

Örnek 5.1.7: $X = \mathbb{R}^+$ ve $p_{max}(x, y) = \max\{x, y\}$ olmak üzere (X, p_{max}) kısmi metrik uzayını ele alalım. Burada, her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $P_d(x, y, t) = \frac{t}{t+p_{max}(x,y)}$ olarak tanımlanan $P_d: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(X, P_d, *_\mathcal{L})$ bir GV-bulanık kısmi metrik uzay olmamaktadır. Bunu göstermek için $u, v \in X$ ve $r \in (0, \infty)$ olsun. $*$ -rezidiyum tanımından

$$P_d(u, u, r) \rightarrow_{*\mathcal{L}} P_d(u, v, r) = 1 + \frac{r}{\max\{u, v\} + r} - \frac{r}{u + r}$$

dir. Burada $x = 1, y = 2, z = 10$ ve $t = s = 1$ alınırsa

$$P_d(x, x, t + s) \rightarrow_{*\mathcal{L}} P_d(x, z, t + s) = 1 + \frac{1 + 1}{1 + 1 + 10} - \frac{1 + 1}{1 + 1 + 1} = 1 + \frac{1}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} & \left(P(x, x, t) \rightarrow_{*\mathcal{L}} P(x, y, t) \right) *_{\mathcal{L}} \left(P(y, y, s) \rightarrow_{*\mathcal{L}} P(y, z, s) \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{1 + 2} - \frac{1}{1 + 1} \right) + \left(1 + \frac{1}{1 + 10} - \frac{1}{1 + 2} \right) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{11} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\left(P(x, x, t) \rightarrow_* P(x, y, t) \right) * \left(P(y, y, s) \rightarrow_* P(y, z, s) \right) > \left(P(x, x, t + s) \rightarrow_* P(x, z, t + s) \right)$$

olduğu görülmektedir (Gregori ve diğ., 2019).

Uyarı 5.1.8: $(X, M, *)$ bir $\text{KM}(\text{GV})$ -bulanık metrik uzay ve $\diamond \leq *$ iken $(X, M, \diamond)$ üçlüsü de bir $\text{KM}(\text{GV})$ -bulanık metrik uzay olmaktadır. Dikkat edilirse, $*_H \geq *_{\mathcal{L}}$ olup yukarıdaki örnekte de görüldüğü gibi bu durum $\text{KM}(\text{GV})$ -bulanık kısmi metrik uzaylar için sağlanmamaktadır.

Sıradaki örnekte ise $\text{KM}(\text{GV})$ -bulanık metrik uzaylar ile $\text{KM}(\text{GV})$ -bulanık kısmi metrik uzaylar arasındaki bir başka fark olan her $x, y \in X$ için $P(x, y, \cdot): (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümünün artan olmadığı gösterilmektedir.

Örnek 5.1.9: $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $P: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü

$$P(x, y, t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ e^{-t}, & x = y \\ \frac{1}{2}e^{-t}, & x \neq y \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(X, P, *_P)$ bir KM -bulanık kısmi metrik uzaydır. Ayrıca $x, y \in \mathbb{R}$ iken $P(x, y, \cdot): (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümünün artan olmadığı tanımdan açıktır (Gregori ve diğ., 2019).

Aşağıdaki örnekte bir KM-bulanık kısmi metrik uzayın her zaman bir kısmi metrik tarafından üretilmediği gösterilmektedir (Gregori ve diğ., 2019).

Örnek 5.1.10: $X = (0,1]$ olmak üzere $P: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü

$$P(x, y, t) = \begin{cases} \min\{x, y\} \cdot \frac{t^2}{t+1}, & x \neq y, t \in (0,1] \\ \min\{x, y\} \cdot \frac{t}{t+1}, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(X, P, \wedge)$ bir KM-bulanık kısmi metrik uzaydır (Gregori ve diğ., 2019).

Aşağıda KM-bulanık kısmi metrik uzay olup GV-bulanık kısmi metrik uzay olmayan bir örnek verilmektedir (Gregori ve diğ., 2019).

Örnek 5.1.11: (X, d) bir metrik uzay ve $c \in (0,1]$ olmak üzere $P_0: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü

$$P_0(x, y, t) = \begin{cases} 0, & d(x, y) \geq t \\ c, & d(x, y) < t \end{cases}$$

olarak tanımlansın. O halde $(X, P, *_\wedge)$ bir KM-bulanık kısmi metrik uzaydır, fakat (FPGV5) aksiyomu sağlanmadığından bir GV-bulanık kısmi metrik uzay değildir (Gregori ve diğ., 2019).

Tanım 5.1.12: $(X, P, *)$ bir KM-bulanık kısmi metrik uzay, $x \in X$, $r \in (0,1)$ ve $t > 0$ olmak üzere

$$\widetilde{B}_P(x, r, t) = \{z \in X | P(x, x, t) \rightarrow_* P(x, z, t) > 1 - r\}$$

kümesine x merkezli, r yarıçaplı ve t parametrelili açık yuvar denir (Gregori ve diğ., 2019).

$x, y \in X$ iken $P_{x,x,y}(t) = P(x, x, t) \rightarrow_* P(x, y, t)$ olarak tanımlanan $P_{x,x,y}: (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü iyi tanımlıdır. Aslında, $P_{x,x,y}(t) = \sup\{c \in I | P(x, x, t) * c = P(x, y, t)\}$ değeridir. (FPKM4) aksiyomundan $P_{x,x,y}: (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü azalmayıdır. Ancak

aşağıdaki örnekte de görüleceği üzere bu dönüşüm her zaman sol-sürekli olmak zorunda değildir.

Örnek 5.1.13: Örnek 5.1.9’da verilen $(X, P, *_\wedge)$ KM-bulanık kısmi metrik uzayını ele alalım. $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$ ve $t > 0$ iken $P(x, x, t) = \frac{t}{4(t+1)}$ ve

$$P(x, y, t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4(t+1)}, & t \in (0, 1] \\ \frac{t}{4(t+1)}, & \text{diğer} \end{cases} \text{ dir. Buradan, } P_{x,x,y}(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4(t+1)}, & t \in (0, 1) \\ 1, & t \in [1, \infty) \end{cases} \text{ olup}$$

$P_{x,x,y}$ ’nin $t = 1$ de sol-sürekli olmadığı açıktır (Gregori ve diğ., 2019).

KM-bulanık kısmi metrikten topoloji üretirken $P_{x,x,y}$ ’nin sol-sürekliliği gerekli olduğundan açık yuvar tanımı aşağıdaki şekilde Gregori ve diğ., (2019) tarafından yeniden verilmiştir.

Tanım 5.1.14: $(X, P, *)$ bir KM-bulanık kısmi metrik uzay, $x \in X$, $r \in (0, 1)$, $t > 0$ ve $P'_{x,x,y}(t) = \sup\{P(x, x, s) \rightarrow_* P(x, y, s) | s \in (0, t)\}$ olmak üzere.

$$B_P(x, r, t) = \{y \in X | P'_{x,x,y}(t) > 1 - r\}$$

kümesine x merkezli, r yarıçaplı ve t parametrelili açık yuvar denir (Gregori ve diğ., 2019).

Lemma 5.1.15: $(X, P, *)$ bir KM-bulanık kısmi metrik uzay olmak üzere $P'_{x,x,y}(t) = \sup\{P(x, x, s) \rightarrow_* P(x, y, s) | s \in (0, t)\}$ şeklinde tanımlanan $P'_{x,x,y}: (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü sol-süreklidir (Gregori ve diğ., 2019).

Sonuç 5.1.16: Eğer her $x, y \in X$ için $P_{x,x,y}: (0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonu sol-sürekli ise her $r \in (0, 1)$ ve $t > 0$ için $\widetilde{B}_P(x, r, t) = B_P(x, r, t)$ dir (Gregori ve diğ., 2019).

Lemma 5.1.17: $(X, P, *)$ bir KM-bulanık kısmi metrik uzay olmak üzere $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ iken aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$P'_{x,x,z}(t + s) \geq P'_{x,x,y}(t) * P'_{y,y,z}(s) \text{ (Gregori ve diğ., 2019).}$$

Teorem 5.1.18: $(X, P, *)$ bir KM-bulanık kısmi metrik uzay olmak üzere bu uzaydaki açık yuvarların ailesi olan $\mathcal{B} = \{B_P(x, r, t) | x \in X, r \in (0, 1), t > 0\}$ kümesi X üzerinde bir

topoloji için tabandır. Bu şekilde üretilen topolojiye KM-bulanık kısmi metrik topoloji adı verilir ve τ_P ile gösterilir. Ayrıca her KM-bulanık kısmi metrik topolojik uzay (X, τ_P) T_0 -uzayıdır.

Uyarı 5.1.19: KM-bulanık kısmi metrikten topoloji üretirken $P(x, y, 0) = 0$ olması yapının kurulmasında herhangi bir rol oynamadığından dolayı verilen özellikler GV-bulanık kısmi metrik uzay için de geçerlidir (Gregori ve diğ., 2019).

5.2. KM-Bulanık Kısmi Metrik Uzaylar ile KM-Bulanık Metrik Uzaylar Arasındaki İlişkiler

Aşağıdaki örnekte, kısmi metrik uzayların aksine, $(X, P, *)$ bir KM-bulanık kısmi metrik uzay olmak üzere $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken

$$M_P(x, y, t) = \begin{cases} 1, & x = y \\ P(x, y, t), & x \neq y \end{cases}$$

ve $M_P(x, y, 0) = 0$ şeklinde tanımlanan $M_P: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(X, M_P, *)$ üçlüsünün bir KM-bulanık metrik uzay olmadığı gösterilmektedir.

Örnek 5.2.1: $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $x, y \in X$ iken

$$P(x, y, t) = \begin{cases} e^{-t}, & x = y \\ \frac{1}{2}e^{-t}, & x \neq y \end{cases}, \forall t > 0 \text{ ve } P(x, y, 0) = 0$$

şeklinde tanımlanan $P: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(X, P, *_p)$ üçlüsünün bir bulanık kısmi metrik uzay olduğu bilinmektedir. $x, y \in X$ iken

$$M_P(x, y, t) = \begin{cases} 1, & x = y \\ P(x, y, t), & x \neq y \end{cases}, \forall t > 0 \text{ ve } M_P(x, y, 0) = 0$$

şeklinde tanımlanan $M_P: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümünü ele alalım. Dikkat edilirse, $x \neq z$ ve $y = z$ alındığında $t, s > 0$ iken $M_P(x, z, t + s) = \frac{1}{2}e^{-(s+t)}$, $M_P(x, y, t) = \frac{1}{2}e^{-t}$ ve $M_P(y, z, s) = 1$ olup $M_P(x, z, t + s) < M_P(x, y, t) *_p M_P(y, z, s)$

elde edilir ki bu ise M_p dönüşümünün (KM4) koşulunu sağlamadığını gösterir. Bu durumda, $(X, M_p, *_p)$ bir KM-bulanık metrik uzay değildir.

Önerme 5.2.2: $(X, P, *)$ bir KM-bulanık kısmi metrik uzay olsun. Eğer her $x, y \in X$ için $P_{x,y}: (0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonu azalmayan ise $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ iken aşağıdaki koşul sağlanır.

$$(FPM4^*) P(x, z, t + s) \geq P(x, y, t) * (P(y, y, s) \rightarrow_* P(y, z, s)).$$

İspat: $x, y, z \in X$ ve $s, t > 0$ olsun. $P_{x,x}: (0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonu azalmayan olduğundan $P(x, x, s + t) \geq P(x, x, t)$ dir. Bu durumda, (FPM4) koşulundan

$$\begin{aligned} & P(x, x, t + s) * (P(x, x, t + s) \rightarrow_* P(x, z, t + s)) \\ & \geq P(x, x, t) * (P(x, x, t) \rightarrow_* P(x, y, t)) * (P(y, y, s) \rightarrow_* P(y, z, s)) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik ve Sonuç 2.1.17'den

$$P(x, x, t + s) \wedge P(x, z, t + s) \geq (P(x, x, t) \rightarrow_* P(x, y, t)) * (P(y, y, s) \rightarrow_* P(y, z, s))$$

bulunur. Ayrıca, (FPM1) koşulundan ise

$$P(x, z, t + s) \geq P(x, y, t) * (P(y, y, s) \rightarrow_* P(y, z, s))$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülmektedir.

Yukarıdaki önermeden aşağıdaki sonuçlar elde edilmektedir.

Sonuç 5.2.3: (X, p) bir kısmi metrik uzay olsun. $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken $P_e(x, y, t) = e^{-p(x,y)/t}$ şeklinde tanımlanan $P_e: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(X, P_e, *_p)$ KM-bulanık kısmi metrik uzayı (FPM4*) koşulunu sağlamaktadır.

Sonuç 5.2.4: (X, p) bir kısmi metrik uzay olsun. $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken $P_d(x, y, t) = \frac{t}{t+p(x,y)}$ şeklinde tanımlanan $P_d: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(X, P_d, *_H)$ KM-bulanık kısmi metrik uzayı (FPM4*) koşulunu sağlamaktadır.

Aşağıdaki önermede KM-bulanık kısmi metrik uzaylar için her zaman sağlanmayan “her $x, y \in X$ için $P_{x,y}: (0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonu azalmayandır” özelliğinin (FPKM4*) koşulunu sağlayan KM-bulanık kısmi metrik uzaylar için sağlandığı verilmektedir:

Önerme 5.2.5: $(X, P, *)$ KM-bulanık kısmi metrik uzayı (FPKM4*) koşulunu sağlıyorsa her $x, y \in X$ için $P_{x,y}: (0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonu azalmayandır.

İspat: $(X, P, *)$ KM-bulanık kısmi metrik uzayı (FPKM4*) koşulunu sağlasın. Varsayalım ki $t, s > 0, t > s$ için $P(x, y, s) > P(x, y, t)$ olsun. Bu durumda, (FPKM4*) koşulundan

$$P(x, z, t) \geq P(x, y, s) * (P(y, y, t - s) \rightarrow_* P(y, z, t - s))$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $z = y$ alınır

$$P(x, y, t) \geq P(x, y, s) * (P(y, y, t - s) \rightarrow_* P(y, y, t - s))$$

bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla her $x, y \in X$ için $P_{x,y}: (0, \infty) \rightarrow I$ azalmayan bir fonksiyondur.

Önerme 5.2.2 ve Önerme 5.2.5’den KM-bulanık kısmi metrik uzayların aşağıdaki karakterizasyonu elde edilir.

Sonu 5.2.6: $(X, P, *)$ KM-bulanık kısmi metrik uzayının (FPKM4*) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart her $x, y \in X$ için $P_{x,y}: (0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonunun azalmayan olmasıdır.

Aşağıdaki önermede (FPKM4*) koşulu altında verilen bir KM-bulanık kısmi metrik uzaydan KM-bulanık metrik uzay üretilbileceği gösterilmektedir.

Önerme 5.2.7: $(X, P, *)$ KM-bulanık kısmi metrik uzayı (FPKM4*) koşulunu sağlasın. Bu durumda, $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken

$$M_P(x, y, t) = \begin{cases} 1, & x = y \\ P(x, y, t), & x \neq y \end{cases}$$

ve $M_P(x, y, 0) = 0$ şeklinde tanımlanan $M_P: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(X, M_P, *)$ üçlüsü bir KM-bulanık metrik uzaydır.

İspat: $x, y, z \in X$ ve $s, t > 0$ olsun. (KM1) ve (KM2) koşullarının sağlandığı açıktır.

(KM2) Her $t > 0$ için $M_P(x, y, t) = 1$ olsun. Bu durumda, M_P 'nin tanımından her $t > 0$ için $P(x, y, t) = 1$ olduğu açıktır. (FPKM1) koşulundan $P(x, x, t) = 1$ ve $P(y, y, t) = 1$ olduğu bulunur. (FPKM2) koşulundan ise $x = y$ bulunur. Tersine, $x = y$ ise her $t > 0$ için $M_P(x, y, t) = 1$ olduğu açıktır.

(KM4) (FPKM4*) koşulundan ve Sonuç 5.2.6'dan, $x, y, z \in X$ ve $s, t > 0$ iken

$$M_P(x, z, t + s) = P(x, z, t + s) \geq P(x, y, t) * (P(y, y, s) \rightarrow_* P(y, z, s))$$

$$\geq P(x, y, t) * P(y, z, s) = M_P(x, y, t) * M_P(y, z, s)$$

elde edilir.

(KM5) Şimdi ise her $x, y \in X$ için $(M_P)_{x,y}: (0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonunun sol-sürekli olduğunu gösterelim. $x \neq y$ ise $(M_P)_{x,y} = P_{x,y}$ olup $P_{x,y}: (0, \infty) \rightarrow I$ sol-sürekli olduğundan $(M_P)_{x,y}: (0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonu sol-sürekli. Eğer $x = y$ ise her $t > 0$ için $(M_P)_{x,y}(t) = 1$ olup (sol-)sürekli.

Aşağıdaki teoremde P KM-bulanık kısmi metriğinin ürettiği topoloji ile M_P KM-bulanık metriğinin ürettiği topolojiler arasındaki ilişki verilmektedir.

Teorem 5.2.8: $(X, P, *)$ KM-bulanık kısmi metrik uzayı (FPKM4*) koşulunu sağlasın. $(X, M_P, *)$ üçlüsü Önerme 5.2.7 şeklinde tanımlanan KM-bulanık metrik uzay olmak üzere $\tau_P \subseteq \tau_{M_P}$ dir.

İspat: $(X, P, *)$ KM-bulanık kısmi metrik uzayı (FPKM4*) koşulunu sağlasın. $\tau_P \subseteq \tau_{M_P}$ olduğunu ispatlamak için $x, y \in X$ ve $r \in (0, 1)$ ve $t > 0$ iken $B_{M_P}(x, y, t) \subseteq B_P(x, y, t)$ olduğunu gösterelim. Öncelikle, $x \in X$, $r \in (0, 1)$ ve $t > 0$ iken $x \in B_P(x, x, t)$ dir. Gerçekten, her $x \in X$ ve $s \in (0, t)$ için $P(x, x, s) \rightarrow_* P(x, x, s) = 1$ olmaktadır.

Şimdi $x \in X$, $r \in (0, 1)$ ve $t > 0$ için $B_{M_P}(x, r, t)$ kümesini ele alalım. Aşağıdaki gibi iki durum mevcuttur:

Durum I: $y \in X$ ve $x \neq y$ iken $P(x, y, t) \leq 1 - r$ olduğunu kabul edelim. Buradan, $B_{M_P}(x, r, t) = \{x\} \subset B_P(x, r, t)$ elde edilir.

Durum II: Şimdi ise $1 - r < P(x, y, t)$ olacak şekilde $y \in X$ ve $x \neq y$ mevcut olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $y \in B_{M_P}(x, r, t)$ olacak şekilde en az bir $y \neq x$ vardır. (FPKM5) koşulundan $P(x, y, s) > 1 - r$ olacak şekilde $s \in (0, t)$ bulunur. O halde, Önerme 2.1.15'den

$$P(x, x, s) \rightarrow_* P(x, y, s) \geq P(x, y, s) > 1 - r$$

dir. Buradan,

$$\sup\{\alpha \in (0, t) : P(x, x, \alpha) \rightarrow_* P(x, y, \alpha)\} \geq P(x, x, s) \rightarrow_* P(x, y, s) > 1 - r$$

sağlanır ki bu da $y \in B_P(x, y, t)$ olduğu anlamına gelir. Sonuç olarak, $x, y \in X$ ve $r \in (0, 1)$ ve $t > 0$ iken $B_{M_P}(x, y, t) \subseteq B_P(x, y, t)$ olmaktadır.

Yukarıdaki teoremin tersinin sağlanmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmektedir.

Örnek 5.2.9: $X = I$ olsun. (X, p_{max}) kısmi metrik uzayını ele alalım. Her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $P_d(x, y, t) = \frac{t}{t + p_{max}(x, y)}$ şeklinde tanımlanan $P_d: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(X, P_d, *_H)$ KM-bulanık kısmi metrik uzayını göz önüne alalım. Her $x, y \in X$ için $(P_d)_{x, y}: (0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonu azalmayan olduğundan, Önerme 5.2.2'den, $(X, P_d, *_H)$ KM-bulanık kısmi metrik uzayında (FPKM4*) koşulunun sağlandığı görülmektedir. Şimdi ise $\tau_{P_d} \neq \tau_{M_{P_d}}$ olduğunu gösterelim. İlk olarak, $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken

$$P(x, x, t) \rightarrow_{*_H} P(x, y, t) = \frac{t}{t + p_{max}(x, y) - p_{max}(x, x)}$$

dir. Ayrıca, $B_{M_P}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \{1\}$ olduğundan $\{1\} \in \tau_{M_{P_d}}$ dir. Gerçekten, eğer $y \neq 1$ için $y \in B_{M_P}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ise

$$\frac{1}{2} \leq M_{P_d} \left(1, y, \frac{1}{2}\right) = P_d \left(1, y, \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \max\{1, y\}} \leq \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{3}$$

olur ki bu ise bir çelişkidir.

Diğer yandan, her $r \in (0,1)$ ve $t > 0$ için $I \subseteq B_{P_d}(1, r, t)$ dir. Gerçekten, $y \in I$ ve $s > 0$ iken

$$P_d(1,1,s) \rightarrow_{*H} P(1,y,s) = \frac{t}{t + p_{max}(1,y) - p_{max}(1,1)} = 1$$

olur ki bu da her $r \in (0,1)$ ve $t > 0$ için $y \in B_{P_d}(1, r, t)$ olduğu anlamına gelir. Böylece $\{1\} \notin \tau_{P_d}$ dir. Yani, $\tau_{P_d} \neq \tau_{M_{P_d}}$ bulunur.

Uyarı 5.2.10: $(X, P, *)$ bir KM-bulanık kısmi metrik uzay olsun. Bu durumda, x merkezli, r yarıçaplı ve t parametrelili $\widetilde{B}_P(x, r, t) = \{z \in X : P(x, x, t) \rightarrow_* P(x, z, t) > 1 - r\}$ açık yuvarı x noktasının τ_P topolojisine göre bir komşuluğudur. Gerçekten, $P(x, x, \cdot) \rightarrow_* P(x, y, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonu azalmayan olduğundan $t > 0$ olmak üzere her $s \in (0, t)$ için $P(x, x, t) \rightarrow_* P(x, y, t) \geq P(x, x, s) \rightarrow_* P(x, y, s)$ dir. Buradan, $P(x, x, t) \rightarrow_* P(x, y, t) \geq \sup\{P(x, x, s) \rightarrow_* P(x, y, s) : s \in (0, t)\}$ elde edilir ki bu da her $x \in X$, $r \in (0,1)$ ve $t > 0$ için $x \in B_P(x, r, t) \subseteq \widetilde{B}_P(x, r, t)$ olduğu anlamına gelmektedir.

KM-bulanık kısmi metrik uzaylarda τ_P topolojisine göre dizilerin yakınsaklığını karakterize etmek için kullanmak üzere aşağıdaki lemma verilmektedir.

Lemma 5.2.11: $*$ sürekli bir t-norm ve $a_1 \geq a_2$ olmak üzere $a_1, a_2, a_3 \in I$ olsun. Eğer $a_2 > a_1 * a_3$ ise $a_1 \rightarrow_* a_2 > a_3$ sağlanır.

İspat: $*$ sürekli bir t-norm, $a_1, a_2, a_3 \in I$ ($a_1 \geq a_2$) ve $a_2 > a_1 * a_3$ olsun. Eğer $a_1 = a_2$ ise hipotezden $a_1 > a_1 * a_3$ olup $a_3 < 1 = a_1 \rightarrow_* a_1$ elde edilir. Eğer $a_1 > a_2$ ise $a_3 \notin \{a_4 \in I : a_1 * a_4 = a_2\}$ dir. Ayrıca, her $a'_4 \in \{a_4 \in I : a_1 * a_4 = a_2\}$ için $a'_4 > a_3$ dir. Gerçekten, eğer $a'_4 \leq a_3$ ise $a_2 = a_1 * a'_4 \leq a_1 * a_3$ olup bu ise bir çelişkidir. Böylece, $a_1 \rightarrow_* a_2 > a_3$ olduğu görülmektedir.

Teorem 5.2.12: $(X, P, *)$ bir KM-bulanık kısmi metrik uzay, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin τ_P topolojisine göre x noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart her $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n, x, t) = P(x, x, t)$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi τ_P topolojisine göre x noktasına yakınsak olsun. Bu durumda, x noktasının τ_P topolojisine göre her U komşuluğu için $n \geq n_0$ iken $x_n \in U$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı mevcuttur. $t > 0$ sabit tutalım ve $\varepsilon \in (0,1)$ olsun. Buradan, $n \geq n_0$ iken $x_n \in \widetilde{B}_P(x, \varepsilon, t)$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Yani, $n \geq n_0$ iken $P(x, x, t) \rightarrow_* P(x, x_n, t) > 1 - \varepsilon$ dir. O halde, her $n \geq n_0$ için $P(x, x_n, t) \geq (1 - \varepsilon) * P(x, x, t)$ sağlanır. Ayrıca (FPKM1) koşulundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $P(x, x, t) \geq P(x, x_n, t)$ olduğu göz önünde bulundurularak her $n \geq n_0$ için $P(x, x, t) \geq P(x, x_n, t) \geq (1 - \varepsilon) * P(x, x, t)$ eşitsizliği sağlanır ki bu da her $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n, x, t) = P(x, x, t)$ olduğu anlamına gelmektedir.

$(\Leftarrow)$ Farzedelim ki her $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n, x, t) = P(x, x, t)$ olsun. Her $t > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $P(x, x, t) \geq P(x, x_n, t)$ olduğundan verilen bir $\varepsilon \in (0,1)$ için $n \geq n_0$ iken $P(x, x_n, t) \geq (1 - \varepsilon) * P(x, x, t)$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı mevcuttur. Lemma 5.2.11' den her $n \geq n_0$ için $P(x, x, t) \rightarrow_* P(x, x_n, t) > 1 - \varepsilon$ olduğu bulunur. $t > 0$ sabit tutalım ve $s_0 \in (t, \infty)$ olsun. Bu durumda, verilen bir $\varepsilon \in (0,1)$ için $n \geq n_0$ iken $P(x, x, s_0) \rightarrow_* P(x, x_n, s_0) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $P(x, x, \cdot) \rightarrow_* P(x, y, \cdot): (0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonu azalmayan olduğundan $s \in (s_0, t)$ ve $n \geq n_0$ iken $P(x, x, s) \rightarrow_* P(x, x_n, s) > 1 - \varepsilon$ dir. Böylece, $n \geq n_0$ iken $\sup\{P(x, x, s) \rightarrow_* P(x, x_n, s): s \in (0, t)\} > 1 - \varepsilon$ elde edilir ki bu da her $n \geq n_0$ için $x_n \in B_P(x, \varepsilon, t)$ olduğu anlamına gelir.

Şimdi ise U , x noktasının τ_P topolojisine göre bir komşuluğu olsun. Bu durumda, $B_P(x, r, t) \subseteq U$ olacak şekilde $r \in (0,1)$ ve $t > 0$ vardır. O halde, $r \in (0,1)$ ve $t > 0$ için $n \geq n_0$ iken $x_n \in B_P(x, \varepsilon, t) \subseteq U$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısının mevcut olduğu elde edilir. Böylece, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi τ_P topolojisine göre x noktasına yakınsaktır.

Tanım 5.2.13: $(X, P, *)$ bir KM-bulanık kısmi metrik uzay ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ bir dizi olsun.

(1) Her $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n, x_m, t) > 0$ limiti mevcut ise $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine Cauchy dizisi adı verilir. Eğer her $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n, x_m, t) = 1$ oluyorsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi 1-Cauchy dizisi olarak adlandırılır.

(2) Eğer X 'deki her Cauchy dizisi bu uzaydaki bir $x \in X$ noktasına τ_P topolojisine göre yakınsak ve her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} P(x_n, x_m, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n, x, t) = P(x, x, t)$ sağlanıyorsa $(X, P, *)$ KM-bulanık kısmi metrik uzayına bir tam KM-bulanık kısmi metrik uzay adı verilir. Eğer X 'deki her 1-Cauchy dizisi bu uzaydaki bir $x \in X$ noktasına τ_P topolojisine her $t > 0$ iken $P(x, x, t) = 1$ sağlanacak şekilde yakınsak ise $(X, P, *)$ KM-bulanık kısmi metrik uzayına bir 1-tam KM-bulanık kısmi metrik uzay denir.

Dikkat edilirse, her tam KM-bulanık kısmi metrik uzay 1-tam KM-bulanık kısmi metrik uzaydır.

KM-bulanık kısmi metrik uzaylarda, KM-bulanık metrik uzaylardan farklı olarak, yakınsak her dizinin bir Cauchy dizisi olması gerekmez.

Örnek 5.2.14: $X = [0, \infty)$ olsun. (X, p_{max}) kısmi metrik uzayını, her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $P_d(x, y, t) = \frac{t}{t + p_{max}(x, y)}$ ve $P_d(x, y, 0) = 0$ şeklinde tanımlanan $P_d: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(X, P_d, *_H)$ KM-bulanık kısmi metrik uzayını ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, \dots)$ dizisini ele alalım. Her $t > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n, 1, t) = \frac{t}{t + \max\{x_n, 1\}} = \frac{t}{t + 1} = P_d(1, 1, t)$$

olduğundan $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, \dots)$ dizisi $1 \in X$ noktasına τ_P topolojisine göre yakınsaktır. Ancak her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} P(x_n, x_m, t)$ mevcut olmadığından $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, \dots)$ dizisi $(X, P_d, *_H)$ KM-bulanık kısmi metrik uzayında bir Cauchy dizisi değildir.

Teorem 5.2.15: $(X, P, *)$ (FPKM4*) koşulunu sağlayan bir KM-bulanık kısmi metrik uzay ve $(X, M_P, *)$ Önerme 5.2.7'de tanımlanan KM-bulanık metrik uzay olsun. Bu durumda, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $(X, M_P, *)$ KM-bulanık metrik uzayında bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart bu dizinin $(X, P, *)$ KM-bulanık kısmi metrik uzayında 1-Cauchy dizisi

olmasıdır. Dahası, $(X, M_P, *)$ KM-bulanık metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter şart $(X, P, *)$ KM-bulanık kısmi metrik uzayının 1-tam olmasıdır.

İspat: Eğer $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ sabit bir dizi ise ispat açıktır. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ sabitten farklı bir dizi olsun. Farzedelim ki $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $(X, M_P, *)$ KM-bulanık metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda, her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} M_P(x_n, x_m, t) = 1$ dir. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ sabitten farklı bir dizi olduğundan her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} P(x_n, x_m, t) = 1$ olduğu elde edilir. O halde, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $(X, P, *)$ KM-bulanık kısmi metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. İfadenin tersi de benzer şekilde gösterilmektedir.

Şimdi ise $(X, P, *)$ bir 1-tam KM-bulanık kısmi metrik uzay ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $(X, M_P, *)$ KM-bulanık metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Eğer $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ sabit bir dizi ise bu dizinin $(X, M_P, *)$ KM-bulanık metrik uzayında yakınsak olduğu açıktır. Farzedelim ki $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ sabitten farklı bir dizi olsun. Bu ise $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $(X, P, *)$ KM-bulanık kısmi metrik uzayında bir 1-Cauchy dizisi olduğunu ifade eder. $(X, P, *)$ bir 1-tam KM-bulanık kısmi metrik uzay olduğundan, her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} P(x_n, x_m, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n, x, t) = 1$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Buradan, her $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} M_P(x_n, x, t) = 1$ elde edilir ki bu da $(X, M_P, *)$ KM-bulanık metrik uzayının tam olduğunu göstermektedir. Tersine, $(X, M_P, *)$ bir tam KM-bulanık metrik uzay ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $(X, P, *)$ KM-bulanık metrik uzayında bir 1-Cauchy dizisi olsun. Eğer $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi sabit bir dizi ise her $n \geq n_0$ için $x_n = x_{n_0}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. Buradan, her $t > 0$ için $1 = \lim_{n, m \rightarrow \infty} P(x_n, x_m, t) = P(x_{n_0}, x_{n_0}, t)$ olduğu elde edilir. Yani, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $x_{n_0} \in X$ noktasına τ_P topolojisine göre yakınsaktır ve her $t > 0$ için $P(x_{n_0}, x_{n_0}, t) = 1$ olur. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin sabit bir dizi olmadığı durumda ise ispat benzer şekilde tamamlanmaktadır.

5.3. KM-Bulanık Kısmi Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Daha önce de belirtildiği üzere KM(GV)-bulanık metrik uzaylar KM(GV)-bulanık kısmi metrik uzayların özel bir durumudur. (FPKM4*) koşulunu sağlayan KM(GV)-bulanık kısmi metrik uzaylardan, Önerme 5.2.7 anlamında, KM(GV)-bulanık metrik uzay üretilerildiğinden dolayı bu koşulu sağlayan KM(GV)-bulanık kısmi metrik uzaylar

için KM(GV)-bulanık metrik uzaylarda mevcut olan sabit nokta teoremleri direkt elde edilmektedir. Bu şekilde elde edilen bir sabit nokta teoremi aşağıda gösterilmektedir.

Teorem 5.3.1: $(X, P, *)$ (FPKM4*) koşulunu sağlayan bir tam KM-bulanık kısmi metrik uzay, $\diamond$ bir t-conorm ve $T: X \rightarrow X$ bir bulanık $\diamond$ -daralma dönüşümü olsun. Eğer $\diamond$ bir Arşimet t-conorm ise T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

İspat: $(X, P, *)$ (FPKM4*) koşulunu sağlayan bir tam KM-bulanık kısmi metrik uzay ise $(X, M_P, *)$ KM-bulanık metrik uzayı da tamdır. T , $(X, P, *)$ üzerinde $\diamond$ -daralma dönüşümü olsun. Bu durumda, her $x, y \in X (x \neq y)$ ve $t > 0$ için

$$M_P(Tx, Ty, t) = P(Tx, Ty, t) \geq k \diamond P(x, y, t) = k \diamond M_P(x, y, t)$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$ mevcuttur. Eğer $x = y$ ise her $t > 0$ için

$$M_P(Tx, Ty, t) = 1 \geq k \diamond 1 = k \diamond M_P(x, y, t)$$

sağlanır. Dolayısıyla, T , $(X, M_P, *)$ üzerinde bir $\diamond$ -daralma dönüşümüdür. Böylece Teorem 3.2.2'den T fonksiyonunun bir tek sabit noktası olduğu elde edilir.

Aşağıda ise KM-bulanık metrik uzaylardaki daralma dönüşümlerinden farklı bir daralma dönüşümü KM-bulanık kısmi metrik uzaylar için verilmektedir.

Teorem 5.3.2: $(X, P, *)$ bir tam KM-bulanık kısmi metrik uzay, $\diamond$ sürekli bir t-conorm ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken

$$\begin{aligned} & (P(Tx, Tx, t) \vee P(Ty, Ty, t) \vee P(x, x, t) \vee P(y, y, t)) \rightarrow_* P(Tx, Ty, t) \\ & \geq k \diamond \left((P(x, x, t) \wedge P(y, y, t)) \rightarrow_* P(x, y, t) \right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ mevcut, $*$ bir Arşimet t-norm ve $\diamond$ bir Arşimet t-conorm ise T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

İspat: $x_0 \in X$ olsun. x_0 'ın T fonksiyonu altında n-inci iterasyonu ile oluşturulan $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (T^n x_0)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini ele alalım. $t > 0$ sabit turalım. İlk olarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$P(x_{n+1}, x_{n+1}, t) \geq P(x_n, x_n, t)$ olduğunu iddia ediyoruz. (5.1) eşitsizliğinde $x = y = x_n$ alınırsa $k \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned} & (P(Tx_n, Tx_n, t) \vee P(Tx_n, Tx_n, t) \vee P(x_n, x_n, t) \vee P(x_n, x_n, t)) \rightarrow_* P(Tx_n, Tx_n, t) \\ & \geq k \diamond \left((P(x_n, x_n, t) \wedge P(x_n, x_n, t)) \rightarrow_* P(x_n, x_n, t) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} & (P(x_{n+1}, x_{n+1}, t) \vee P(x_n, x_n, t)) \rightarrow_* P(x_{n+1}, x_{n+1}, t) \\ & \geq k \diamond (P(x_n, x_n, t) \rightarrow_* P(x_n, x_n, t)) = k \diamond 1 = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizlikten ise

$$P(x_{n+1}, x_{n+1}, t) \vee P(x_n, x_n, t) \leq P(x_{n+1}, x_{n+1}, t) \leq P(x_{n+1}, x_{n+1}, t) \vee P(x_n, x_n, t)$$

sağlanır ki bu da her $n \in \mathbb{N}$ için $P(x_{n+1}, x_{n+1}, t) \geq P(x_n, x_n, t)$ olduğunu gösterir. Şimdi ise her $n \in \mathbb{N}$ için $k \in (0,1)$ iken

$$P(x_n, x_n, t) \rightarrow_* P(x_n, x_{n+1}, t) \geq k_\diamond^{(n)} \quad (5.2)$$

eşitsizliğinin sağlandığını tümevarım yöntemi ile göstereyim. (5.1) eşitsizliğinde $x = x_1$ ve $y = x_0$ alınırsa $k \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned} & (P(x_2, x_2, t) \vee P(x_1, x_1, t) \vee P(x_1, x_1, t) \vee P(x_0, x_0, t)) \rightarrow_* P(x_2, x_1, t) \\ & \geq k \diamond \left((P(x_1, x_1, t) \wedge P(x_0, x_0, t)) \rightarrow_* P(x_1, x_0, t) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $k \in (0,1)$ iken $P(x_1, x_1, t) \rightarrow_* P(x_1, x_2, t) \geq k \diamond P(x_1, x_0, t) \geq k$ olur ki bu da $n = 1$ için (5.2) eşitsizliğinin sağlandığını gösterir. n için (5.2) eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. Yani $k \in (0,1)$ iken

$P(x_{n+1}, x_{n+1}, t) \rightarrow_* P(x_{n+1}, x_{n+2}, t) \geq k_\diamond^{(n+1)}$ olsun. Bu durumda, (5.1) eşitsizliğinde $x = x_{n+1}$ ve $y = x_n$ alınırsa $k \in (0,1)$ için

$$(P(x_{n+2}, x_{n+2}, t) \vee P(x_{n+1}, x_{n+1}, t) \vee P(x_{n+1}, x_{n+1}, t) \vee P(x_n, x_n, t)) \rightarrow_* P(x_{n+2}, x_{n+1}, t)$$

$$\geq k \diamond \left((P(x_{n+1}, x_{n+1}, t) \wedge P(x_n, x_n, t)) \rightarrow_* P(x_{n+1}, x_n, t) \right)$$

elde edilir. Buradan, $k \in (0,1)$ iken

$$P(x_{n+1}, x_{n+1}, t) \rightarrow_* P(x_{n+2}, x_{n+1}, t) \geq k \diamond (P(x_n, x_n, t) \rightarrow_* P(x_{n+1}, x_n, t))$$

$$\geq k \diamond k_\diamond^{(n)} = k_\diamond^{(n+1)}$$

olur. Yani (5.2) eşitsizliği $n + 1$ için sağlanmaktadır. $\diamond$ sürekli bir Arşimet t-conorm olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\bigwedge_{t>0} P(x_n, x_n, t) \rightarrow_* P(x_{n+1}, x_n, t) \right) = 1$$

elde edilir. Şimdi ise $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Farzedelim ki $\lim_{n,m \rightarrow \infty} (P(x_n, x_n, t) \rightarrow_* P(x_n, x_m, t)) \neq 1$ olsun. Bu durumda, öyle $\varepsilon \in (0,1)$ ve $t > 0$ vardır ki her $k \in \mathbb{N}$ için $k \leq n(k) < m(k)$ ve $P(x_{m(k)}, x_{m(k)}, t) \rightarrow_* P(x_{m(k)}, x_{n(k)}, t) \leq 1 - \varepsilon$ olacak şekilde $m(k), n(k) \in \mathbb{N}$ bulabiliriz. $k \in \mathbb{N}$ sabit olsun. Verilen bir $n(k)$ için $m_n(k) > n(k)$ ve $P(x_{m_n(k)}, x_{m_n(k)}, t) \rightarrow_* P(x_{m_n(k)}, x_{n(k)}, t) \leq 1 - \varepsilon$ olacak şekildeki $m_n(k)$ terimini seçelim. Bu durumda, $P(x_{m_n(k)-1}, x_{m_n(k)-1}, t) \rightarrow_* P(x_{m_n(k)-1}, x_{n(k)}, t) > 1 - \varepsilon$ olur. O halde, $s \in (0, t)$ için

$$1 - \varepsilon \geq P(x_{m(k)}, x_{m(k)}, t) \rightarrow_* P(x_{m(k)}, x_{n(k)}, t)$$

$$\geq (P(x_{m_n(k)}, x_{m_n(k)}, s) \rightarrow_* P(x_{m_n(k)-1}, x_{m_n(k)-1}, s))$$

$$* (P(x_{m_n(k)-1}, x_{m_n(k)-1}, t-s) \rightarrow_* P(x_{m_n(k)-1}, x_{n(k)}, t-s))$$

bulunur. Her $x, y \in X$ için $P(x, x, \cdot) \rightarrow_* P(x, y, \cdot): (0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonu sol-sürekli olduğundan yukarıdaki eşitsizlikten

$$1 - \varepsilon \geq \bigwedge_{t>0} (P(x_{m_n(k)}, x_{m_n(k)}, t) \rightarrow_* P(x_{m_n(k)-1}, x_{m_n(k)-1}, t)) * (1 - \varepsilon)$$

elde edilir. Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} \bigwedge_{t>0} \left(P(x_{m_n(k)}, x_{m_n(k)}, t) \rightarrow_* P(x_{m_n(k)-1}, x_{m_n(k)-1}, t) \right) = 1$ bulunur. Ayrıca, $s \in (0, t)$ için

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\geq P(x_{m_n(k)}, x_{m_n(k)}, t) \rightarrow_* P(x_{m_n(k)}, x_{n(k)}, t) \\ &\geq \left(P(x_{m_n(k)}, x_{m_n(k)}, \frac{s}{2}) \rightarrow_* P(x_{m_n(k)}, x_{m_n(k)+1}, \frac{s}{2}) \right) \\ &\quad * \left(P(x_{m_n(k)+1}, x_{m_n(k)+1}, t-s) \rightarrow_* P(x_{m_n(k)+1}, x_{n(k)+1}, t-s) \right) \\ &\quad * \left(P(x_{n(k)+1}, x_{n(k)+1}, \frac{s}{2}) \rightarrow_* P(x_{n(k)+1}, x_{n(k)}, \frac{s}{2}) \right) \end{aligned}$$

dir. Her $x, y \in X$ için $P(x, x, \cdot) \rightarrow_* P(x, y, \cdot): (0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonu sol-sürekli olduğundan ve (5.1) eşitsizliğinden $k \in (0, 1)$ için

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\geq \bigwedge_{t>0} \left(P(x_{m_n(k)}, x_{m_n(k)}, t) \rightarrow_* P(x_{m_n(k)}, x_{m_n(k)+1}, t) \right) \\ &\quad * \bigwedge_{t>0} \left(P(x_{n(k)+1}, x_{n(k)+1}, t) \rightarrow_* P(x_{n(k)+1}, x_{n(k)}, t) \right) \\ &\quad * \left(k \diamond \left(\left(P(x_{m_n(k)}, x_{m_n(k)}, t-s) \wedge P(x_{n(k)}, x_{n(k)}, t-s) \right) \rightarrow_* P(x_{m_n(k)}, x_{n(k)}, t-s) \right) \right) \\ &\geq 1 * 1 * (k \diamond 1) = 1 \end{aligned}$$

bulunur ki bu da $\varepsilon \leq 0$ olduğu anlamına gelir ve varsayımımız ile çelişir. O halde,

$\lim_{n, m \rightarrow \infty} (P(x_n, x_n, t) \rightarrow_* P(x_n, x_m, t)) = 1$ dir. $(P(x_n, x_n, t))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi artan, $*$ sürekli bir

Arşimet t-norm ve $\lim_{n, m \rightarrow \infty} (P(x_n, x_n, t) \rightarrow_* P(x_n, x_m, t)) = 1$ olduğundan

$\lim_{n, m \rightarrow \infty} P(x_n, x_m, t)$ mevcuttur. Gerçekten, $*$ sürekli bir Arşimet t-norm olduğundan

$$1 = \lim_{n, m \rightarrow \infty} (P(x_n, x_n, t) \rightarrow_* P(x_n, x_m, t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n, x_n, t) \rightarrow_* \lim_{n, m \rightarrow \infty} P(x_n, x_m, t)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n, x_n, t) \leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} P(x_n, x_m, t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n, x_n, t)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n, x_n, t) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} P(x_n, x_m, t)$$

olur. $(P(x_n, x_n, t))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi artan ve üstten sınırlı olduğundan

$\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n, x_n, t) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} P(x_n, x_m, t)$ mevcuttur. O halde, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bir Cauchy dizisidir.

$(X, P, *)$ bir tam KM-bulanık kısmi metrik uzay olduğundan her $t > 0$ için

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} P(x_n, x_m, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n, x, t) = P(x, x, t) \text{ olacak şekilde bir } x \in X \text{ noktası}$$

vardır. Şimdi $Tx = x$ olduğunu gösterelim. Her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için

$$P(x, x, t) \rightarrow_* P(Tx, x, t) \geq (P(x, x, s) \rightarrow_* P(x, x_{n+1}, s))$$

$$* (P(x_{n+1}, x_{n+1}, t - s) \rightarrow_* P(x_{n+1}, Tx, t - s))$$

$$\geq (P(x, x, s) \rightarrow_* P(x, x_{n+1}, s)) * (k \diamond ((P(x, x, t - s) \wedge P(x_n, x_n, t - s)) \rightarrow_* P(x_n, x, t - s)))$$

$$\geq 1 * (k \diamond 1) = 1 \Rightarrow P(x, x, t) \leq P(Tx, x, t) \Rightarrow P(x, x, t) = P(Tx, x, t)$$

sağlanır. Benzer bir inceleme ile $P(x, x, t) = P(Tx, Tx, t)$ olduğu gösterilir. Sonuç olarak, $P(x, x, t) = P(Tx, Tx, t) = P(Tx, x, t)$ sağlandığından $Tx = x$ dir. Son olarak, tekliği ispatlamak için x ve y 'nin T fonksiyonunun birbirinden farklı iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. (5.1) eşitsizliğinden $k \in (0, 1)$ için

$$P(x, x, t) \rightarrow_* P(x, y, t) = P(x, x, t) \rightarrow_* P(Tx, Ty, t)$$

$$\geq k \diamond ((P(x, x, t) \wedge P(y, y, t)) \rightarrow_* P(x, y, t))$$

$$\geq k \diamond (P(x, x, t) \rightarrow_* P(x, y, t)) \geq P(x, x, t) \rightarrow_* P(x, y, t)$$

bulunur. $k \in (0, 1)$ olduğundan $P(x, x, t) \rightarrow_* P(x, y, t) = 1$ olmalıdır. Buradan ise $P(x, x, t) \leq P(x, y, t)$ olup $P(x, x, t) = P(x, y, t)$ sonucuna varılır. Benzer şekilde $P(y, y, t) = P(x, y, t)$ olduğu gösterilir. Bu durumda, $x = y$ olur ki bu da sabit noktanın bir tek olduğunu ispatlamaktadır.

Yukarıdaki teoremden yer alan “ $\diamond$ bir Arşimet t-conormdur” koşulunun kaldırılamayacağı aşağıdaki örnekte gösterilmektedir.

Örnek 5.3.3: $(\mathbb{R}, \rho)$ ayrık metrik uzay olmak üzere $P_0(x, y, t) = \begin{cases} 0, & \rho(x, y) \geq t \\ \frac{1}{2}, & \rho(x, y) < t \end{cases}$ şeklinde tanımlanan $P_0: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(\mathbb{R}, P_0, *_L)$ üçlüsü bir KM-bulanık kısmi metrik uzaydır.

İlk olarak, $(\mathbb{R}, P_0, *_L)$ KM-bulanık kısmi metrik uzayının tam olduğunu gösterelim. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\mathbb{R}, P_0, *_L)$ KM-bulanık kısmi metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda, her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} P_0(x_n, x_m, t) > 0$ mevcuttur. P_0 'ın tanımından her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} P_0(x_n, x_m, t) = \frac{1}{2}$ elde edilir. O halde, her $\varepsilon \in (0, 1)$ ve $t > 0$ için $n, m \geq n_0$ iken $P_0(x_n, x_m, t) > \frac{1}{2} - \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. Bu ise her $t > 0$ için $n, m \geq n_0$ iken $\rho(x_n, x_m) < t$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısının mevcut olduğunu ifade eder. Yani $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\mathbb{R}, \rho)$ ayrık metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. $(\mathbb{R}, \rho)$ ayrık metrik uzayı tam olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}$ vardır. Bu ise her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} P_0(x_n, x_m, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_0(x_n, x, t) = P(x, x, t) = \frac{1}{2}$ eşitliğinin sağlandığını gösterir. O halde $(\mathbb{R}, P_0, *_L)$ bir tam KM-bulanık kısmi metrik uzaydır.

Şimdi her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = x + 1$ şeklinde tanımlanan $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünü ve “V” sürekli t-conormunu ele alalım. T 'nin (5.1) eşitsizliğini sağladığını gösterelim. Her $x, y \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $P_0(x, x, t) = P_0(y, y, t) = P_0(Tx, Tx, t) = P_0(Ty, Ty, t)$ olduğundan

$$P_0(x, x, t) \rightarrow_{*_L} P_0(Tx, Ty, t) \geq k \diamond (P_0(x, x, t) \rightarrow_{*_L} P_0(x, y, t)) \quad (5.3)$$

olacak şekilde $k \in (0, 1)$ mevcut olduğunu göstermeliyiz. $x \neq y$ için $t \in (0, 1]$ iken (5.3) eşitsizliğinin her $k \leq \frac{1}{2}$ için, $t > 1$ iken her $k \in (0, 1)$ için sağlandığı kolaylıkla görülmektedir. Sonuç olarak, T fonksiyonu (5.1) eşitsizliğini sağlamasına rağmen T 'nin sabit noktasının olmadığı açıktır.

6. KS-BULANIK KISMİ METRİK UZAYLAR

Bu bölümde, Kaleva ve Seikkala anlamındaki bulanık kısmi metrik (KS-bulanık kısmi metrik) uzay kavramı tanımlanarak bazı temel özellikleri incelenecektir. Daha sonra KS-bulanık kısmi metrik uzaylar ile KS-bulanık ((ağırlıklandırılmış) quasi) metrik uzaylar arasındaki ilişkiler verilecektir. Son olarak KS-bulanık kısmi metrikler tarafından klasik topoloji, Lowen anlamında bulanık topoloji ve bulanıklaştırılmış topoloji üretildiği gösterilecektir.

6.1. KS-Bulanık Kısmi Metrik Uzay Tanımı ve Temel Özellikleri

Tanım 6.1.1: X bir küme ve $L, R: I \times I \rightarrow I$ simetrik, azalmayan, her $a, b \in I$ için $L(a, b) \leq a$, $L(a, b) \leq b$, $R(a, b) \geq a$ ve $R(a, b) \geq b$ koşullarını sağlayan iki dönüşüm olsun. $\mathbb{P}: X \times X \rightarrow G$ dönüşümü için $x, y \in X$ ve $\alpha \in (0, 1]$ iken $[\mathbb{P}(x, y)]_\alpha = [\mu_\alpha(x, y), \nu_\alpha(x, y)]$ olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $\mathbb{P}$ dönüşümüne X üzerinde bir KS-bulanık kısmi metrik adı verilir.

(BKM1) Her $x, y \in X$ için $\mathbb{P}(x, y) = \mathbb{P}(x, x) = \mathbb{P}(y, y) \Leftrightarrow x = y$.

(BKM2) Her $x, y \in X$ için $\mathbb{P}(x, y) = \mathbb{P}(y, x)$.

(BKM3) Her $x, y \in X$ için $\mathbb{P}(x, x) \leq \mathbb{P}(x, y)$.

(BKM4) Her $x, y, z \in X$ için

(1) $s \leq \mu_1(x, z)$, $t \leq \mu_1(z, y)$, $u \leq \mu_1(z, z)$ ve $s + t - u \leq \mu_1(x, y)$ iken $L(\mathbb{P}(x, y)(s + t - u), \mathbb{P}(z, z)(u)) \geq L(\mathbb{P}(x, z)(s), \mathbb{P}(z, y)(t))$,

(2) $s \geq \mu_1(x, z)$, $t \geq \mu_1(z, y)$, $u \geq \mu_1(z, z)$ ve $s + t - u \geq \mu_1(x, y)$ iken $R(\mathbb{P}(x, y)(s + t - u), \mathbb{P}(z, z)(u)) \leq R(\mathbb{P}(x, z)(s), \mathbb{P}(z, y)(t))$.

Üzerinde bir $\mathbb{P}$ KS-bulanık kısmi metriği tanımlanmış olan X kümesine KS-bulanık kısmi metrik uzay adı verilir ve bu uzay $(X, \mathbb{P}, L, R)$ dördlüsü ile gösterilir. Burada $x \in X$ ve $t > 0$ için $\mathbb{P}(x, x)(t)$ değeri 0 olmayabilir. Bu değer, x 'in kendisine olan uzaklığının t olma olasılığını ifade etmektedir.

Uyarı 6.1.2: (1) Her KS-bulanık metrik uzay bir KS-bulanık kısmi metrik uzaydır.

(2) Kısmi metrik uzaylar, KS-bulanık kısmi metrik uzayların özel bir halidir. Bir başka deyişle, her kısmi metrik uzay bir KS-bulanık kısmi metrik uzaydır.

Gerçekten, (X, p) bir kısmi metrik uzay olmak üzere $\mathbb{R} \subset G$ olduğundan $p: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \subset G$ olarak düşünülebilir. Burada, her $a, b \in I$ için $L(a, b) = 0$ ve $R(a, b) = 1$ olarak alındığında (X, p, L, R) bir KS-bulanık kısmi metrik uzay olmaktadır.

Örnek 6.1.3: $x, y \in \mathbb{R}^+$ iken $\mathbb{P}_{max}(x, y) = \overline{\max\{x, y\}}$ şeklinde tanımlanan $\mathbb{P}_{max}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ dönüşümü $\mathbb{R}^+$ üzerinde bir KS-bulanık kısmi metriktir.

Lemma 6.1.4: $R = \vee$ ile (BKM4)(ii) eşitsizliği her $x, y, z \in X$ ve $\alpha \in (0, 1]$ için

$$v_\alpha(x, y) \leq v_\alpha(x, z) + v_\alpha(z, y) - v_\alpha(z, z) \quad (6.1)$$

eşitsizliğine denktir.

İspat. Her $x, y, z \in X$ ve $\alpha \in (0, 1]$ için Eşitsizlik (6.1) sağlansın. $s \geq \mu_1(x, z)$, $t \geq \mu_1(z, y)$ ve $u \geq \mu_1(z, z)$ olsun. $\alpha = \mathbb{P}(x, y)(s + t - u)$ olarak alalım. Buradan,

$$s + t - u \leq v_\alpha(x, y) \leq v_\alpha(x, z) + v_\alpha(z, y) - v_\alpha(z, z)$$

elde edilir. Bu ise, $s \leq v_\alpha(x, z)$ veya $t \leq v_\alpha(z, y)$ veya $-u \leq -v_\alpha(z, z)$ olduğu anlamına gelir. Yani, $\mathbb{P}(x, z)(s) \geq \alpha$ veya $\mathbb{P}(z, y)(t) \geq \alpha$ veya $\mathbb{P}(z, z)(u) < \alpha$ dır. O halde,

$$\mathbb{P}(x, z)(s) \vee \mathbb{P}(z, y)(t) \geq \alpha = \mathbb{P}(x, y)(s + t - u)$$

$$= \mathbb{P}(x, y)(s + t - u) \vee \mathbb{P}(z, z)(u)$$

sağlanır. Şimdi ise (BKM4)(ii), $R = \vee$ ile sağlansın. $x, y, z \in X$ ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun. $v_\alpha(x, z) < \infty$ ve $v_\alpha(z, y) < \infty$ olduğunu kabul edelim. Aksi durumda Eşitsizlik (6.1) direkt sağlanmaktadır. Ayrıca,

$$v_\alpha(x, y) > v_\alpha(x, z) + v_\alpha(z, y) - v_\alpha(z, z)$$

olduğunu kabul edelim. $u = \mu_\alpha(z, z)$ olsun. Bu durumda, $s + t - u = v_\alpha(x, y) \geq \lambda_1(x, y)$ olacak şekilde $s > v_\alpha(x, z) \geq \lambda_1(x, z)$ ve $t > v_\alpha(z, y) \geq \lambda_\alpha(z, y)$ vardır. (BKM4)(ii)'den

$$\alpha = \mathbb{P}(x, y)(s + t - u) \leq \mathbb{P}(x, y)(s + t - u) \vee \mathbb{P}(z, z)(u)$$

$$\leq \mathbb{P}(x, z)(s) \vee \mathbb{P}(z, y)(t) < \alpha$$

elde edilir ki bu ise bir çelişkidir. O halde, varsayımımız yanlış olup $x, y, z \in X$ ve $\alpha \in (0, 1]$ iken

$$\nu_\alpha(x, y) \leq \nu_\alpha(x, z) + \nu_\alpha(z, y) - \nu_\alpha(z, z)$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma 6.1.5: $L = \wedge$ ile (BKM4)(i) eşitsizliği $x, y, z \in X$ ve $\alpha \in (0, 1]$ iken

$$\mu_\alpha(x, y) \leq \mu_\alpha(x, z) + \mu_\alpha(z, y) - \mu_\alpha(z, z) \quad (6.2)$$

eşitsizliğine denktir.

İspat. $x, y, z \in X$ ve $\alpha \in (0, 1]$ iken Eşitsizlik (6.2) sağlansın. $s \leq \mu_1(x, z)$, $t \leq \mu_1(z, y)$ ve $u \leq \mu_1(z, z)$ iken $s + t - u \leq \mu_1(x, y)$ olsun. $\alpha = \mathbb{P}(x, z)(s)$, $\beta = \mathbb{P}(z, y)(t)$, $\varepsilon = \min\{\alpha, \beta\}$ ve $u = \mu_\varepsilon(z, z)$ olarak alalım. Buradan, $\mu_\alpha(x, z) \leq s$ ve $\mu_\alpha(z, y) \leq t$ sağlanır. Eşitsizlik (6.2)'den,

$$\mu_\varepsilon(x, y) \leq \mu_\varepsilon(x, z) + \mu_\varepsilon(z, y) - \mu_\varepsilon(z, z)$$

elde edilir. μ_α, α 'ya göre azalmayan olduğundan

$$\mu_\varepsilon(x, y) + \mu_\varepsilon(z, z) \leq \mu_\varepsilon(x, z) + \mu_\varepsilon(z, y) \leq \mu_\alpha(x, z) + \mu_\beta(z, y) \leq s + t$$

bulunur. $u = \mu_\varepsilon(z, z)$ olarak alındığından $\mu_\varepsilon(x, y) \leq s + t - u$ olur. Yani, $\mathbb{P}(x, y)(s + t - u) \geq \varepsilon$ elde edilir. Bu durumda,

$$\mathbb{P}(x, y)(s + t - u) \wedge \mathbb{P}(z, z)(u) \geq \varepsilon \geq \mathbb{P}(x, z)(s) \wedge \mathbb{P}(z, y)(t)$$

sağlanır. Şimdi ise (BKM4)(i), $L = \min$ ile sağlansın. $x, y, z \in X$ ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun. Eğer $\mu_\alpha(x, z) + \mu_\alpha(z, y) - \mu_\alpha(z, z) \leq \mu_1(x, y)$ ise (BKM4)(i)'den

$$\mathbb{P}(x, y)(\mu_\alpha(x, z) + \mu_\alpha(z, y) - \mu_\alpha(z, z)) \wedge \mathbb{P}(z, z)(\mu_\alpha(z, z))$$

$$\geq \mathbb{P}(x, z)(\mu_\alpha(x, z)) \wedge \mathbb{P}(z, y)(\mu_\alpha(z, y)) \geq \alpha$$

bulunur. Buradan ise, $\mathbb{P}(x, y)(\mu_\alpha(x, z) + \mu_\alpha(z, y) - \mu_\alpha(z, z)) \geq \alpha$ olduğu bulunur.

Yani $\mu_\alpha(x, z) + \mu_\alpha(z, y) - \mu_\alpha(z, z) \geq \mu_\alpha(x, y)$ sağlanır. Eğer $\mu_\alpha(x, z) + \mu_\alpha(z, y) - \mu_\alpha(z, z) \geq \mu_1(x, y)$ ise μ_α , α' ya göre azalmayan olduğundan $\mu_1(x, y) \geq \mu_\alpha(x, y)$ elde edilir ve istenen eşitliğin sağlandığı görülmektedir.

Sonuç 6.1.6: $(X, \mathbb{P}, L, R)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

$$(i) \quad R = \vee \text{ ve } L = \wedge.$$

$$(ii) \quad x, y, z \in X \text{ iken } \mathbb{P}(x, y) + \mathbb{P}(z, z) \leq \mathbb{P}(x, z) + \mathbb{P}(z, y).$$

Sonuç 6.1.7: (X, p) bir kısmi metrik uzay olmak üzere $x, y \in X$ ve $t \geq 0$ iken $\mathbb{P}(x, y)(t) = \bar{0}(t - p(x, y))$ şeklinde tanımlanan $\mathbb{P}: X \times X \rightarrow G$ dönüşümü ile $(X, \mathbb{P}, \wedge, \vee)$ dörtlüsü bir KS-bulanık kısmi metrik uzaydır.

Örnek 6.1.8: Her $x, y \in E$ için $\mathbb{P}(x, y) = |x - y|$ şeklinde tanımlanan $\mathbb{P}: E \times E \rightarrow G$ dönüşümünü ele alalım. $\alpha \in (0, 1]$ için $[x]_\alpha = [a_1^\alpha, b_1^\alpha]$, $[y]_\alpha = [a_2^\alpha, b_2^\alpha]$ ve $[z]_\alpha = [a_3^\alpha, b_3^\alpha]$ olmak üzere, Önerme 2.2.15'den,

$$[\mathbb{P}(x, y)]_\alpha = [\max(0, a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha), \max(|a_1^\alpha - b_2^\alpha|, |a_2^\alpha - b_1^\alpha|)]$$

$$[\mathbb{P}(z, z)]_\alpha = [\max(0, a_3^\alpha - b_3^\alpha), |a_3^\alpha - b_3^\alpha|]$$

elde edilir. Ayrıca $R = \vee$ ve $L \equiv 0$ alınırsa $(X, \mathbb{P}, L, R)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay olmaktadır.

Tanım 6.1.9: $(X, \mathbb{P}, L, R)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(x_n, x) = \mathbb{P}(x, x)$ oluyorsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine x noktasına yakınsaktır denir.

Tanım 6.1.10: $(X, \mathbb{P}, L, R)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(x_m, x_n)$ mevcut ise $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 6.1.11: $(X, \mathbb{P}, L, R)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay olsun. Eğer X 'deki her Cauchy dizisi bu uzaydaki bir noktaya yakınsak ve $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(x_n, x) = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(x_n, x_m) = \mathbb{P}(x, x)$ eşitliği sağlanıyor ise $(X, \mathbb{P}, L, R)$ KS-bulanık kısmi metrik uzayına bir tam KS-bulanık kısmi metrik uzay adı verilir.

Uyarı 6.1.12: KS-bulanık kısmi metrik uzaylarda, KS-bulanık metrik uzaylardan farklı olarak, yakınsak her dizinin bir Cauchy dizisi ve yakınsak her dizinin bir tek limit noktasına sahip olması gerekmez.

Tanım 6.1.13: $(X, \mathbb{P}, L, R)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(x_n, x_n) = \mathbb{P}(x, x)$ oluyorsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine x noktasına p-yakınsaktır denir.

Lemma 6.1.14: $(X, \mathbb{P}, \wedge, \vee)$ KS-bulanık kısmi metrik uzaylarda p-yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.

İspat: $(X, \mathbb{P}, \wedge, \vee)$ KS-bulanık kısmi metrik uzayında $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi x noktasına p-yakınsak olsun. Bu durumda,

$$\mathbb{P}(x_n, x_n) \leq \mathbb{P}(x_n, x_m) \leq \mathbb{P}(x_n, x) + \mathbb{P}(x, x_m) - \mathbb{P}(x, x)$$

sağlanır. Buradan, $n, m \rightarrow \infty$ iken limit alınır

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(x_n, x_n) \leq \lim_{n,m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(x_n, x_m) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(x_n, x) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(x, x_n) - \mathbb{P}(x, x)$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(x_n, x_m) = \mathbb{P}(x, x)$ bulunur. O halde, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bir Cauchy dizisidir.

Tanım 6.1.15: $(X, \mathbb{P}, L, R)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(x_n, x_m) = \bar{0}$ oluyorsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine 0-Cauchy dizisi denir.

Tanım 6.1.16: $(X, \mathbb{P}, L, R)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay olsun. Eğer her 0-Cauchy dizisi bu uzayda $\mathbb{P}(x, x) = \bar{0}$ olacak şekilde bir x noktasına yakınsak ise $(X, \mathbb{P}, L, R)$ KS-bulanık kısmi metrik uzayına bir 0-tam KS-bulanık kısmi metrik uzay denir.

Lemma 6.1.17: Her tam KS-bulanık kısmi metrik uzay bir 0-tam bulanık kısmi metrik uzaydır. Fakat bu ifadenin tersi genelde doğru değildir.

Örnek 6.1.18: Örnek 6.1.3’de verilen $(X, \mathbb{P}, \wedge, \vee)$ KS-bulanık kısmi metrik uzayı bir 0-tam KS-bulanık kısmi metrik uzay olup tam KS-bulanık kısmi metrik uzay değildir.

6.2. KS-Bulanık Kısmi Metrik Uzaylar ile KS-Bulanık ((Ağırlıklandırılmış) Quasi) Metrik Uzaylar Arasındaki İlişkiler

Tanım 6.2.1: $(X, \mathbb{d}, L, R)$ bir KS-bulanık metrik uzay olmak üzere $x, y \in X$ iken

$$\mathbb{d}(x, y) \geq |x| - |y|$$

sağlanacak şekilde bir $|\cdot|: X \rightarrow G$ dönüşümü mevcut ise $(X, \mathbb{d}, L, R)$ ’ye KS-bulanık ağırlıklandırılmış metrik uzaylar adı verilir.

Tanım 6.2.2: X bir küme, $L, R: I \times I \rightarrow I$ simetrik, azalmayan ve $L(0,0) = 0$ ve $R(1,1) = 1$ koşullarını sağlayan iki dönüşüm olsun. $\mathbb{q}: X \times X \rightarrow G$ dönüşümü için $x, y \in X$ ve $\alpha \in (0,1]$ iken $[q(x, y)]_\alpha = [\eta_\alpha(x, y), \xi_\alpha(x, y)]$ olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa q dönüşümüne X üzerinde bir KS-bulanık quasi-metrik adı verilir ve $(X, \mathbb{q}, L, R)$ dördlüsü ile KS-bulanık quasi-metrik uzay ifade edilir.

$$(BQM1^*) \mathbb{q}(x, y) = \mathbb{q}(y, x) = \bar{0} \Leftrightarrow x = y.$$

(BQM2) Her $x, y, z \in X$ için

$$(1) s \leq \lambda_1(x, z), \quad t \leq \lambda_1(z, y) \quad \text{ve} \quad s + t \leq \lambda_1(x, y) \quad \text{iken}$$

$$\mathbb{q}(x, y)(s + t) \geq L(\mathbb{q}(x, z)(s), \mathbb{q}(z, y)(t)),$$

$$(2) s \geq \lambda_1(x, z), \quad t \geq \lambda_1(z, y) \quad \text{ve} \quad s + t \geq \lambda_1(x, y) \quad \text{iken}$$

$$\mathbb{q}(x, y)(s + t) \leq R(\mathbb{q}(x, z)(s), \mathbb{q}(z, y)(t)).$$

Uyarı 6.2.3: KS-bulanık quasi-metrik uzay KS-bulanık metrik uzayın bir genelleştirilmesidir.

Tanım 6.2.4: $(X, \mathbb{q}, L, R)$ bir KS-bulanık quasi-metrik uzay olmak üzere $x, y \in X$ iken

$$\mathbb{q}(x, y) + |x| = \mathbb{q}(y, x) + |y|$$

olacak şekilde bir $|\cdot|: X \rightarrow G$ dönüşümü mevcut ise $(X, \mathbb{Q}, L, R)$ 'ye KS-bulanık ağırlıklandırılmış quasi-metrik uzaylar adı verilir.

Teorem 6.2.5: $(X, \mathbb{P}, \wedge, \vee)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay iken

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{P}}(x, y) = \mathbb{P}(x, y) - \mathbb{P}(x, x)$$

olarak tanımlanan $\mathbb{Q}_{\mathbb{P}}: X \times X \rightarrow G$ dönüşümü X üzerinde bir KS-bulanık quasi-metriktr. Burada, her $x \in X$ için $|x| = \mathbb{P}(x, x)$ olarak alınırsa $(X, \mathbb{Q}_{\mathbb{P}}, \wedge, \vee)$ bir KS-bulanık ağırlıklı quasi-metrik uzaydır.

İspat. (BM1*) $\mathbb{Q}_{\mathbb{P}}(x, y) = \mathbb{Q}_{\mathbb{P}}(y, x) = \bar{0}$ olsun. Buradan, $\mathbb{P}(x, y) = \mathbb{P}(x, x) = \mathbb{P}(y, y)$ olup $\mathbb{P}$ bir KS-bulanık kısmi metrik olduğundan $x = y$ bulunur. $x = y$ ise $\mathbb{Q}_{\mathbb{P}}(x, y) = \mathbb{Q}_{\mathbb{P}}(y, x) = \bar{0}$ olduğu $\mathbb{Q}_{\mathbb{P}}$ nin tanımından açıktır.

(BM3) Sonuç 6.1.6'dan, $x, y, z \in X$ iken

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{\mathbb{P}}(x, y) &= \mathbb{P}(x, y) - \mathbb{P}(x, x) \leq \mathbb{P}(x, z) + \mathbb{P}(z, y) - \mathbb{P}(z, z) - \mathbb{P}(x, x) \\ &= \mathbb{Q}_{\mathbb{P}}(x, z) - \mathbb{Q}_{\mathbb{P}}(z, y) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $(X, \mathbb{Q}_{\mathbb{P}}, \wedge, \vee)$ bir KS-bulanık quasi-metrik uzaydır.

Önerme 6.2.6: $(X, \mathbb{P}, L, R)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay olsun. $x, y \in X$ iken

$$\mathbb{d}_{\mathbb{P}}(x, y) = \begin{cases} \bar{0}, & x = y \\ \mathbb{P}(x, y), & x \neq y \end{cases} \quad \text{şeklinde tanımlanan } \mathbb{d}_{\mathbb{P}}: X \times X \rightarrow G \text{ dönüşümü ile } (X, \mathbb{d}_{\mathbb{P}}, L, R) \text{ bir KS-bulanık metrik uzaydır.}$$

(BM1) $x = y$ iken $\mathbb{P}(x, y) = \bar{0}$ olduğu tanımdan açıktır. $\mathbb{P}(x, y) = \bar{0}$ olsun. (BKM3)'den $\mathbb{P}(x, x) \leq \mathbb{P}(x, y) = \bar{0}$ ve $\mathbb{P}(y, y) \leq \mathbb{P}(x, y) = \bar{0}$ elde edilir. Buradan, $t > 0$ için $\mathbb{P}(x, x)(t) = 0$ ve $\mathbb{P}(y, y)(t) = 0$ bulunur. Ancak $\mathbb{P}(x, x), \mathbb{P}(y, y) \in G$ olduğundan $\mathbb{P}(x, x)(0) = 1$ ve $\mathbb{P}(y, y)(0) = 1$ olmalıdır. Bu durumda, $\mathbb{P}(x, x) = \mathbb{P}(y, y) = \bar{0} = \mathbb{P}(x, y)$ sağlanır. Bu ise, (BKM1)'den $x = y$ olduğu anlamına gelir.

(BM2) $x, y \in X$ iken $\mathbb{d}_{\mathbb{P}}(x, y) = \mathbb{d}_{\mathbb{P}}(y, x)$ olduğu tanımdan açıktır.

(BM3) (i) $s \leq \mu_1(x, z)$, $t \leq \mu_1(z, y)$ ve $s + t \leq \mu_1(x, y)$ iken

$$\mathbb{d}_{\mathbb{p}}(x, y)(t + s) \geq L\left(\mathbb{d}_{\mathbb{p}}(x, z)(s), \mathbb{d}_{\mathbb{p}}(z, y)(t)\right)$$

olduğunu göstermeliyiz. (BKM4)(i)'den $s \leq \mu_1(x, z)$, $t \leq \mu_1(z, y)$, $u \leq \mu_1(z, z)$ ve $s + t - u \leq \mu_1(x, y)$ iken

$$L(\mathbb{p}(x, y)(s + t - u), \mathbb{p}(z, z)(u)) \geq L(\mathbb{p}(x, z)(s), \mathbb{p}(z, y)(t))$$

olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\mathbb{p}(x, y)(s + t - u) \geq L(\mathbb{p}(x, y)(s + t - u), \mathbb{p}(z, z)(u)) \geq L(\mathbb{p}(x, z)(s), \mathbb{p}(z, y)(t))$$

elde edilir. $\mathbb{p}(x, y) \in G$, $(0, \mu_1(x, y)]$ aralığında azalmayan olduğundan

$$\begin{aligned} \mathbb{d}_{\mathbb{p}}(x, y)(t + s) &= \mathbb{p}(x, y)(t + s) \geq \mathbb{p}(x, y)(s + t - u) \geq L(\mathbb{p}(x, z)(s), \mathbb{p}(z, y)(t)) \\ &= L\left(\mathbb{d}_{\mathbb{p}}(x, z)(s), \mathbb{d}_{\mathbb{p}}(z, y)(t)\right) \end{aligned}$$

sağlanır.

(ii) Şimdi ise $s \geq \mu_1(x, z)$, $t \geq \mu_1(z, y)$ ve $s + t \geq \mu_1(x, y)$ iken

$$\mathbb{d}_{\mathbb{p}}(x, y)(t + s) \leq R\left(\mathbb{d}_{\mathbb{p}}(x, z)(s), \mathbb{d}_{\mathbb{p}}(z, y)(t)\right)$$

olduğunu gösterelim. (BKM4)(i)'den $s \geq \mu_1(x, z)$, $t \geq \mu_1(z, y)$, $u \geq \mu_1(z, z)$ ve $s + t - u \geq \mu_1(x, y)$ iken

$$R(\mathbb{p}(x, y)(s + t - u), \mathbb{p}(z, z)(u)) \leq R(\mathbb{p}(x, z)(s), \mathbb{p}(z, y)(t))$$

olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\mathbb{p}(x, y)(s + t - u) \leq R(\mathbb{p}(x, y)(s + t - u), \mathbb{p}(z, z)(u)) \leq R(\mathbb{p}(x, z)(s), \mathbb{p}(z, y)(t))$$

elde edilir. $\mathbb{p}(x, y) \in G$, $[\mu_1(x, y), \infty)$ aralığında artmayan olduğundan

$$\mathbb{d}_{\mathbb{p}}(x, y)(s + t) = \mathbb{p}(x, y)(s + t) \leq \mathbb{p}(x, y)(s + t - u) \leq R(\mathbb{p}(x, z)(s), \mathbb{p}(z, y)(t))$$

$$= R \left(\mathbb{d}_{\mathbb{P}}(x, z)(s), \mathbb{d}_{\mathbb{P}}(z, y)(t) \right)$$

bulunur.

Teorem 6.2.7: $(X, \mathbb{P}, \wedge, \vee)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay olmak üzere $x, y \in X$ iken

$$\mathbb{d}_{\mathbb{P}}^*(x, y) = 2\mathbb{P}(x, y) - \mathbb{P}(x, x) - \mathbb{P}(y, y)$$

olarak tanımlanan $\mathbb{d}_{\mathbb{P}}^*: X \times X \rightarrow G$ dönüşümü X üzerinde bir KS-bulanık metriktir. Eğer $(X, \mathbb{P}, \wedge, \vee)$ KS-bulanık kısmi metrik uzayı tam ise $(X, \mathbb{d}_{\mathbb{P}}, \wedge, \vee)$ KS-bulanık metrik uzayı da tamdır. Ayrıca, her $x \in X$ için $|x| = \mathbb{P}(x, x)$ olarak alınırsa $(X, \mathbb{d}_{\mathbb{P}}^*, \wedge, \vee)$ bir KS-bulanık ağırlıklı metrik uzaydır.

İspat: (KS1) Her $x, y \in X$ için $\mathbb{d}_{\mathbb{P}}^*(x, y) = \bar{0}$ olsun. Buradan, $\mathbb{d}_{\mathbb{P}}^*(x, y) = 2\mathbb{P}(x, y) - \mathbb{P}(x, x) - \mathbb{P}(y, y) = \bar{0}$ olup $\mathbb{P}(x, y) - \mathbb{P}(x, x) = \bar{0}$ ve $\mathbb{P}(x, y) - \mathbb{P}(y, y) = \bar{0}$ elde edilir. Bu ise $\mathbb{P}(x, y) = \mathbb{P}(x, x) = \mathbb{P}(y, y)$ olduğu anlamına gelir ve $(X, \mathbb{P}, \wedge, \vee)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay olduğundan $x = y$ bulunur. Tersine $x = y$ iken $\mathbb{d}_{\mathbb{P}}^*(x, y) = \bar{0}$ olduğu açıktır.

(KS2) Her $x, y \in X$ için $\mathbb{d}_{\mathbb{P}}^*(x, y) = \mathbb{d}_{\mathbb{P}}^*(y, x)$ eşitliğinin sağlandığı tanımdan görülmektedir.

(KS3) Her $x, y, z \in X$ için $\mathbb{P}$, X üzerinde bir KS-bulanık kısmi metrik olduğundan

$$\mathbb{d}_{\mathbb{P}}^*(x, z) = 2\mathbb{P}(x, z) - \mathbb{P}(x, x) - \mathbb{P}(z, z)$$

$$\leq 2(\mathbb{P}(x, y) + \mathbb{P}(y, z) - \mathbb{P}(y, y)) - \mathbb{P}(x, x) - \mathbb{P}(z, z)$$

$$= 2\mathbb{P}(x, y) - \mathbb{P}(x, x) - \mathbb{P}(y, y) + 2\mathbb{P}(y, z) - \mathbb{P}(y, y) - \mathbb{P}(z, z) = \mathbb{d}_{\mathbb{P}}^*(x, y) + \mathbb{d}_{\mathbb{P}}^*(y, z)$$

elde edilir. O halde, $\mathbb{d}_{\mathbb{P}}^*: X \times X \rightarrow G$ dönüşümü X üzerinde bir KS-bulanık metriktir.

Sonuç 6.2.8: $(X, \mathbb{P}, \wedge, \vee)$ KS-bulanık kısmi metrik uzayı, her $x \in X$ için $\mathbb{P}(x, x) = \bar{a}$ ($a \in \mathbb{R}$) ve $x, y \in X$ ($x \neq y$) iken $\mathbb{P}(x, x) < \mathbb{P}(x, y)$ koşullarını sağlıyorsa, her $x, y \in X$ için

$$\mathbb{d}_{\mathbb{P}}^*(x, y) = \mathbb{P}(x, y) - \mathbb{P}(x, x)$$

olarak tanımlanan $\mathbb{d}_{\mathbb{P}}^*: X \times X \rightarrow G$ dönüşümü X üzerinde bir KS-bulanık metriktir.

Teorem 6.2.9: L sürekli bir t-norm ve R sürekli bir t-conorm olmak üzere $(X, \mathbb{Q}, L, R)$ bir KS-bulanık quasi-metrik uzay olsun. Bu durumda, $x, y \in X$ ve $s, t \geq 0$ iken

$$\mathbb{d}_{\mathbb{Q}}(x, y)(s + t) = \mathbb{Q}(x, y)(s) \vee \mathbb{Q}(y, x)(t)$$

olarak tanımlanan $\mathbb{d}_{\mathbb{Q}}: X \times X \rightarrow G$ dönüşümü X üzerinde bir KS-bulanık metriktir.

İspat. (BM1) $x = y$ olsun. $s > 0$ için

$$\mathbb{d}_{\mathbb{Q}}(x, x)(s) = \mathbb{Q}(x, x)\left(\frac{s}{2}\right) \vee \mathbb{Q}(x, x)\left(\frac{s}{2}\right) = \mathbb{Q}(x, x)\left(\frac{s}{2}\right) = 0$$

elde edilir. Ayrıca, $s = 0$ için

$$\mathbb{d}_{\mathbb{Q}}(x, x)(0) = \mathbb{Q}(x, x)(0) \vee \mathbb{Q}(x, x)(0) = \mathbb{Q}(x, x)(0) = 1$$

olduğundan $\mathbb{d}_{\mathbb{Q}}(x, x) = \bar{0}$ dır. Şimdi ise $x, y \in X$ iken $\mathbb{d}_{\mathbb{Q}}(x, y) = \bar{0}$ sağlansın. $s > 0$ için

$$\mathbb{d}_{\mathbb{Q}}(x, y)(2s) = \mathbb{Q}(x, y)(s) \vee \mathbb{Q}(y, x)(s) = 0$$

elde edilir. Buradan, $\mathbb{Q}(x, y)(s) = 0$ ve $\mathbb{Q}(y, x)(s) = 0$ dır. O halde, $\mathbb{Q}(x, y) = \mathbb{Q}(y, x) = \bar{0}$ olup $x = y$ elde edilir.

(BM2) $x, y \in X$ iken $\mathbb{d}_{\mathbb{Q}}(x, y) = \mathbb{d}_{\mathbb{Q}}(y, x)$ olduğu tanımdan açıktır.

(BM3) (i) $s \leq \lambda_1(x, z)$, $t \leq \lambda_1(z, y)$ ve $s + t \leq \lambda_1(x, y)$ olsun. Buradan,

$$\mathbb{d}_{\mathbb{Q}}(x, y)(s + t) = \mathbb{Q}(x, y)(s) \vee \mathbb{Q}(y, x)(t)$$

$$\geq L(\mathbb{Q}(x, z)(s - t), \mathbb{Q}(z, y)(s)) \vee L(\mathbb{Q}(y, z)(t - s), \mathbb{Q}(z, x)(t))$$

$$\begin{aligned}
&= L(\mathbb{Q}(x, z)(s - t) \vee \mathbb{Q}(z, x)(t), \mathbb{Q}(z, y)(s) \vee \mathbb{Q}(y, z)(t - s)) \\
&= L(\mathbb{d}_{\mathbb{Q}}(x, z)(s), \mathbb{d}_{\mathbb{Q}}(z, y)(t))
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $s \geq \lambda_1(x, z)$, $t \geq \lambda_1(z, y)$ ve $s + t \geq \lambda_1(x, y)$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}
\mathbb{d}_{\mathbb{Q}}(x, y)(s + t) &= \mathbb{Q}(x, y)(s) \vee \mathbb{Q}(y, x)(t) \\
&\leq R(\mathbb{Q}(x, z)(s - t), \mathbb{Q}(z, y)(s)) \vee L(\mathbb{Q}(y, z)(t - s), \mathbb{Q}(z, x)(t)) \\
&= R(\mathbb{Q}(x, z)(s - t) \vee \mathbb{Q}(z, x)(t), \mathbb{Q}(z, y)(s) \vee \mathbb{Q}(y, z)(t - s)) \\
&= R(\mathbb{d}_{\mathbb{Q}}(x, z)(s), \mathbb{d}_{\mathbb{Q}}(z, y)(t))
\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 6.2.10: $(X, \mathbb{P}, \wedge, \vee)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay olmak üzere her $x, y \in X$ ve $t, s \geq 0$ için

$$\widetilde{\mathbb{d}}_{\mathbb{P}}(x, y)(s + t) = \mathbb{P}(x, y)(s) - \mathbb{P}(x, x)(s) \vee \mathbb{P}(x, y)(t) - \mathbb{P}(y, y)(t)$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{\mathbb{d}}_{\mathbb{P}}: X \times X \rightarrow G$ dönüşümü X üzerinde bir KS-bulanık metriktir.

6.3. KS-Bulanık Kısmi Metrikler Tarafından Üretilen Topolojiler

Teorem 6.3.1: $(X, \mathbb{P}, L, \vee)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay, $\varepsilon > 0$ ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun. $B_{\alpha}^{\vee}(x, \varepsilon) = \{y | v_{\alpha}(x, y) < v_{\alpha}(x, x) + \varepsilon\}$ olmak üzere $\{B_{\alpha}^{\vee}(x, \varepsilon) | x \in X, \varepsilon > 0\}$ küme ailesi X kümesi üzerindeki bir topoloji için tabandır ve bu topoloji $(\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha}^{\vee}$ ile gösterilir. Yani, $(\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha}^{\vee} = \langle \{B_{\alpha}^{\vee}(x, \varepsilon) | x \in X, \varepsilon > 0\} \rangle$ dir.

İspat: $\alpha \in (0, 1]$ olsun. Her $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $x \in B_{\alpha}^{\vee}(x, \varepsilon)$ dir. Böylece $X = \bigcup_{\varepsilon > 0} B_{\alpha}^{\vee}(x, \varepsilon)$ dir. $x, y \in X$ ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ için $B_{\alpha}^{\vee}(x, \varepsilon_1) \cap B_{\alpha}^{\vee}(y, \varepsilon_2) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda, $a \in B_{\alpha}^{\vee}(x, \varepsilon_1) \cap B_{\alpha}^{\vee}(y, \varepsilon_2)$ olacak şekilde $a \in X$ vardır. $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 + v_{\alpha}(x, x) - v_{\alpha}(x, a), \varepsilon_2 + v_{\alpha}(y, y) - v_{\alpha}(y, a)\} > 0$ olarak alalım. Şimdi

ise $B_\alpha^v(a, \varepsilon) \subseteq B_\alpha^v(x, \varepsilon_1) \cap B_\alpha^v(y, \varepsilon_2)$ olduğunu gösterelim. $z \in B_\alpha^v(a, \varepsilon)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} v_\alpha(x, z) &\leq v_\alpha(x, a) + v_\alpha(a, z) - v_\alpha(a, a) < v_\alpha(x, a) + v_\alpha(a, a) + \varepsilon - v_\alpha(a, a) \\ &< v_\alpha(x, a) + \varepsilon_1 + v_\alpha(x, x) - v_\alpha(x, a) = v_\alpha(x, x) + \varepsilon_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $z \in B_\alpha^v(x, \varepsilon_1)$ olduğunu ifade eder. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} v_\alpha(y, z) &\leq v_\alpha(y, a) + v_\alpha(a, z) - v_\alpha(a, a) < v_\alpha(y, a) + v_\alpha(a, a) + \varepsilon - v_\alpha(a, a) \\ &< v_\alpha(y, a) + \varepsilon_2 + v_\alpha(y, y) - v_\alpha(y, a) = v_\alpha(y, y) + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan, $B_\alpha^v(a, \varepsilon) \subseteq B_\alpha^v(x, \varepsilon_1) \cap B_\alpha^v(y, \varepsilon_2)$ olduğu görülmektedir. Sonuç olarak, $\{B_\alpha^v(x, \varepsilon) | x \in X, \varepsilon > 0\}$ küme ailesi X kümesi üzerindeki bir topoloji için tabandır.

Teorem 6.3.2: $(X, \mathbb{P}, \wedge, R)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay, $\varepsilon > 0$ ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun. $B_\alpha^\mu(x, \varepsilon) = \{y | \mu_\alpha(x, y) < \mu_\alpha(x, x) + \varepsilon\}$ olmak üzere $\{B_\alpha^\mu(x, \varepsilon) | x \in X, \varepsilon > 0\}$ küme ailesi X kümesi üzerindeki bir topoloji için tabandır ve bu topoloji $(\tau_\mathbb{P})_\alpha^\mu$ ile gösterilir. Yani, $(\tau_\mathbb{P})_\alpha^\mu = \langle \{B_\alpha^\mu(x, \varepsilon) | x \in X, \varepsilon > 0\} \rangle$ dir.

İspat. $\alpha \in (0, 1]$ olsun. Her $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $x \in B_\alpha^\mu(x, \varepsilon)$ dir. Böylece $X = \bigcup_{\varepsilon > 0} B_\alpha^\mu(x, \varepsilon)$ dir. $x, y \in X$ ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ için $B_\alpha^\mu(x, \varepsilon_1) \cap B_\alpha^\mu(y, \varepsilon_2) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda, $a \in B_\alpha^\mu(x, \varepsilon_1) \cap B_\alpha^\mu(y, \varepsilon_2)$ olacak şekilde $a \in X$ vardır. $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 + \mu_\alpha(x, x) - \mu_\alpha(x, a), \varepsilon_2 + \mu_\alpha(y, y) - \mu_\alpha(y, a)\} > 0$ olarak alalım. Şimdi ise $B_\alpha^\mu(a, \varepsilon) \subseteq B_\alpha^\mu(x, \varepsilon_1) \cap B_\alpha^\mu(y, \varepsilon_2)$ olduğunu gösterelim. $z \in B_\alpha^\mu(a, \varepsilon)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \mu_\alpha(x, z) &\leq \mu_\alpha(x, a) + \mu_\alpha(a, z) - \mu_\alpha(a, a) < \mu_\alpha(x, a) + \mu_\alpha(a, a) + \varepsilon - \mu_\alpha(a, a) \\ &< \mu_\alpha(x, a) + \varepsilon_1 + \mu_\alpha(x, x) - \mu_\alpha(x, a) = \mu_\alpha(x, x) + \varepsilon_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $z \in B_\alpha^\mu(x, \varepsilon_1)$ olduğunu ifade eder. Benzer şekilde,

$$\mu_\alpha(y, z) \leq \mu_\alpha(y, a) + \mu_\alpha(a, z) - \mu_\alpha(a, a) < \mu_\alpha(y, a) + \mu_\alpha(a, a) + \varepsilon - \mu_\alpha(a, a)$$

$$< \mu_\alpha(y, a) + \varepsilon_2 + \mu_\alpha(y, y) - \mu_\alpha(y, a) = \mu_\alpha(y, y) + \varepsilon_2$$

bulunur. Buradan, $B_\alpha^\mu(a, \varepsilon) \subseteq B_\alpha^\mu(x, \varepsilon_1) \cap B_\alpha^\mu(y, \varepsilon_2)$ olduğu görülmektedir. O halde, $\{B_\alpha^\mu(x, \varepsilon) | x \in X, \varepsilon > 0\}$ küme ailesi X kümesi üzerindeki bir topoloji için taban olmaktadır.

Sonuç 6.3.3: $(X, \mathbb{P}, \wedge, \vee)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay olmak üzere $(\tau_{\mathbb{P}})_\alpha^\mu = (\tau_{\mathbb{P}})_\alpha^\vee$ dir.

İspat. $x \in X$, $\varepsilon > 0$ ve $\alpha \in (0,1]$ için $z \in B_\alpha^\vee(x, \varepsilon)$ olsun. $\varepsilon^* = v_\alpha(x, x) - \mu_\alpha(x, x) + \varepsilon > 0$ olarak alalım. Buradan,

$$\begin{aligned} \mu_\alpha(x, z) &\leq v_\alpha(x, z) < v_\alpha(x, x) + \varepsilon = v_\alpha(x, x) + \varepsilon^* - v_\alpha(x, x) + \mu_\alpha(x, x) \\ &= \mu_\alpha(x, x) + \varepsilon^* \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $z \in B_\alpha^\mu(x, \varepsilon^*)$ olup $B_\alpha^\vee(x, \varepsilon) \subset B_\alpha^\mu(x, \varepsilon^*)$ sağlanır. Şimdi ise $x \in X$, $\varepsilon > 0$ ve $\alpha \in (0,1]$ için $z \in B_\alpha^\mu(x, \varepsilon)$ olsun. $\varepsilon^* = v_\alpha(x, z) - \mu_\alpha(x, z) + \varepsilon > 0$ olarak alınırsa,

$$\mu_\alpha(x, z) < \mu_\alpha(x, x) + \varepsilon \leq v_\alpha(x, x) + \varepsilon = v_\alpha(x, x) + \varepsilon^* - v_\alpha(x, z) + \mu_\alpha(x, z)$$

elde edilir. Buradan,

$$v_\alpha(x, z) < v_\alpha(x, x) + \varepsilon^*$$

olup $z \in B_\alpha^\vee(x, \varepsilon^*)$ bulunur. O halde, $B_\alpha^\mu(x, \varepsilon) \subset B_\alpha^\vee(x, \varepsilon^*)$ sağlanır. Sonuç olarak $(\tau_{\mathbb{P}})_\alpha^\mu = (\tau_{\mathbb{P}})_\alpha^\vee$ dir.

Önerme 6.3.4: (X, p) bir kısmi metrik uzay ve $(X, \mathbb{P}, \wedge, \vee)$, Sonuç 6.1.7’de oluşturulan KS-bulanık kısmi metrik uzay olmak üzere $\tau_p = (\tau_{\mathbb{P}})_\alpha^\mu = (\tau_{\mathbb{P}})_\alpha^\vee$ dir.

İspat: $x, y \in X$ ve $\alpha \in (0,1]$ iken $[\mathbb{P}(x, y)]_\alpha = \{t | \mathbb{P}(x, y)(t) \geq \alpha\} = \{p(x, y)\}$ olduğu göz önüne alınarak yukarıdaki teoremin ispatına benzer şekilde elde edilmektedir.

Uyarı 6.3.5: Bir (X, τ) topolojik uzayının metriklenebilir olması için gerek ve yeter şartın uyumlu bir bulanık metriğe sahip olmasından dolayı (Kaleva ve Kauhanen, 2014)'de verilen Örnek 2.1 göz önüne alınarak her bulanık kısmi metriğin ürettiği topolojinin uyumlu bir bulanık metriğe sahip olamayacağı görülmektedir.

Aşağıdaki örnekte bulanık kısmi metriğin ürettiği topoloji ile bulanık kısmi metrikten Önerme 6.2.6 anlamında oluşturulan bulanık metrikten üretilen topolojinin aynı olmadığı gösterilmektedir.

Örnek 6.3.6: Örnek 6.1.3'de verilen $(\mathbb{R}^+, \mathbb{p}_{max}, \wedge, \vee)$ KS-bulanık kısmi metrik uzayını ve $x, y \in \mathbb{R}^+$ iken $\mathbb{d}_{\mathbb{p}_{max}}(x, y) = \begin{cases} \bar{0}, & x = y \\ \mathbb{p}_{max}(x, y), & \text{diğer} \end{cases}$ şeklindeki $d_{\mathbb{p}_{max}}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow G$ dönüşümü ile $(\mathbb{R}^+, \mathbb{d}_{\mathbb{p}_{max}}, \wedge, \vee)$ KS-bulanık metrik uzayını ele alalım. Burada, $x, y \in \mathbb{R}^+$ ve $\alpha \in (0, 1]$ iken $[\mathbb{p}_{max}(x, y)]_\alpha = \{t \mid \overline{\max\{x, y\}}(t) \geq \alpha\} = \{\max\{x, y\}\}$ olmaktadır. Ayrıca, her $\alpha \in (0, 1]$ için $B_\alpha^\mu\left(1, \frac{1}{4}\right) = \left[0, \frac{5}{4}\right)$ ve $N_1\left(\frac{1}{4}, \alpha\right) = \{1\}$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla, $\left[0, \frac{5}{4}\right) \subseteq \{1\}$ olacak şekilde bir $\alpha \in (0, 1]$ mevcut değildir. Buradan, $\mathbb{p}_{max}$ tarafından üretilen $(\tau_{\mathbb{p}_{max}})_\alpha^\mu = (\tau_{\mathbb{p}_{max}})_\alpha^\nu$ topolojisi ile $\mathbb{d}_{\mathbb{p}_{max}}$ tarafından üretilen $\tau_{\mathbb{d}_{\mathbb{p}_{max}}}$ topolojisinin aynı olmadığı görülmektedir.

Aşağıdaki önermede KS-bulanık kısmi metriğin ürettiği topoloji ile KS-bulanık kısmi metrikten, Teorem 6.2.7 anlamında, oluşturulan bulanık metrikten üretilen topoloji arasındaki ilişkiler verilmektedir.

Önerme 6.3.7: $(X, \mathbb{p}, \wedge, \vee)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) $(\tau_{\mathbb{p}})_\alpha^\mu = (\tau_{\mathbb{p}})_\alpha^\nu \subseteq \tau_{\mathbb{d}_{\mathbb{p}}}.$
- (ii) Eğer her $x \in X$ için $\mathbb{p}(x, x) = \bar{c}$ ($c \in \mathbb{R}$) ise $(\tau_{\mathbb{p}})_\alpha^\mu = (\tau_{\mathbb{p}})_\alpha^\nu = \tau_{\mathbb{d}_{\mathbb{p}}}^*.$
- (iii) $\tau_{\mathbb{d}_{\mathbb{p}}}^* \subseteq \tau_{\mathbb{d}_{\mathbb{p}}}.$

İspat: (ii) $x, y \in X$ ve $\alpha \in (0, 1]$ iken $[\mathbb{p}(x, y)]_\alpha = [\mu_\alpha(x, y), \nu_\alpha(x, y)]$ ve $[\mathbb{p}(x, x)]_\alpha = [\mu_\alpha(x, x), \nu_\alpha(x, x)]$ ise Önerme 2.2.15'den

$[\mathbb{d}_{\mathbb{P}}^*(x, y)]_{\alpha} = [\mu_{\alpha}(x, y) - v_{\alpha}(x, x), v_{\alpha}(x, y) - \mu_{\alpha}(x, x)]$ dir. $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $z \in B_{\alpha}^v(x, \varepsilon)$ olsun. Buradan, $v_{\alpha}(x, z) < v_{\alpha}(x, x) + \varepsilon$ sağlanır. $x \in X$ iken $\mathbb{p}(x, x) = \bar{a}$ ($a \in \mathbb{R}$) olduğundan $\mu_{\alpha}(x, x) = v_{\alpha}(x, x) = a$ olur. Bu durumda, $\mu_{\alpha}(x, z) \leq v_{\alpha}(x, z) < \mu_{\alpha}(x, x) + \varepsilon$ eşitliği sağlanır ki bu da $z \in N_x(\varepsilon, \alpha)$ olduğu anlamına gelir. Buradan ise $\tau_{\mathbb{d}_{\mathbb{P}}^*} \subseteq (\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha}^{\mu} = (\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha}^v$ bulunur. Bu ifadenin tersi de benzer şekilde ispatlanmaktadır.

Sonuç 6.3.8: $(X, \mathbb{p}, \wedge, \vee)$ KS-bulanık kısmi metrik uzayı her $x \in X$ için $\mathbb{p}(x, x) = \bar{c}$ ($c \in \mathbb{R}$) ve her $x, y \in X$ ($x \neq y$) için $\mathbb{p}(x, x) < \mathbb{p}(x, y)$ koşullarını sağlıyorsa $(X, (\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha}^{\mu})$ topolojik uzayı Hausdorff uzayıdır. Ayrıca, $(X, (\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha}^{\mu})$ topolojik uzayı metriklenebilir.

Aşağıdaki teoremden KS-bulanık kısmi metrikten Lowen anlamında bulanık topoloji üretildiği gösterilmektedir.

Teorem 6.3.9: $(X, \mathbb{p}, L, \vee)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay ve $\{(\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha}^v : \alpha \in (0, 1]\}$ bu metrikten üretilen topolojiler ailesi olmak üzere

$$\mathcal{T}_{\mathbb{P}}^v := \{x : \text{her } \alpha \in (0, 1] \text{ için } [x]_{\alpha} \in (\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha}^v\}$$

şeklinde tanımlanan bulanık kümelerin ailesi Lowen anlamında bir bulanık topolojidir.

İspat. (L1) $\alpha \in (0, 1]$ olsun. Eğer $a \geq \alpha$ ise $[\underline{a}]_{\alpha} = X \in (\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha}^v$ dir. Diğer türlü, eğer $a < \alpha$ ise $[\underline{a}]_{\alpha} = \emptyset \in (\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha}^v$ olmaktadır. Bu durumda, $\underline{a} \in \mathcal{T}_{\mathbb{P}}^v$ dir.

(L2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{T}_{\mathbb{P}}^v$ olsun. Buradan, her $\alpha \in (0, 1]$ için $[\lambda_1]_{\alpha} \in (\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha}^v$ ve $[\lambda_2]_{\alpha} \in (\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha}^v$ dir. Her $\alpha \in (0, 1]$ için $(\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha}^v$ bir topoloji olduğundan $[\lambda_1]_{\alpha} \cap [\lambda_2]_{\alpha} \in (\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha}^v$ dir. Bu durumda, $[\lambda_1 \wedge \lambda_2]_{\alpha} \in (\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha}^v$ elde edilir. O halde, $\lambda_1 \wedge \lambda_2 \in \mathcal{T}_{\mathbb{P}}^v$ bulunur.

(L3) Her $i \in J$ için $\lambda_i \in \mathcal{T}_{\mathbb{P}}^v$ olsun. Buradan, her $\alpha \in (0,1]$ için $[\lambda_i]_{\alpha} \in (\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha}^v$ dir. Her $\alpha \in (0,1]$ için $(\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha}^v$ bir topoloji olduğundan $\bigcup_{i \in J} [\lambda_i]_{\alpha} \in (\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha}^v$ dir. Bu durumda, $[\bigvee_{i \in J} \lambda_i]_{\alpha} \in (\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha}^v$ elde edilir. O halde, $\bigvee_{i \in J} \lambda_i \in \mathcal{T}_{\mathbb{P}}^v$ bulunur.

Teorem 6.3.10: $(X, \mathbb{P}, \wedge, R)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay ve $\{(\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha}^{\mu} : \alpha \in (0,1]\}$ bu metrikten üretilen topolojiler ailesi olmak üzere

$$\mathcal{T}_{\mathbb{P}}^{\mu} := \{x : [x]_{\alpha} \in (\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha}^{\mu}\}$$

şeklinde tanımlanan bulanık kümelerin ailesi Lowen anlamında bir bulanık topolojidir.

İspat. Teorem 6.3.9'un ispatına benzer şekilde elde edilmektedir.

Sonuç 6.3.11: $(X, \mathbb{P}, \wedge, v)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay olmak üzere $\mathcal{T}_{\mathbb{P}}^{\mu} = \mathcal{T}_{\mathbb{P}}^v$ dir.

Tanım 6.3.12: (1) $(X, \mathbb{P}, L, v)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay, $x \in X$, $r > 0$ ve $\alpha, \beta \in (0,1]$ olmak üzere

$$\beta B_{\alpha}^v(x, r)(y) = \begin{cases} \beta, & y \in B_{\alpha}^v(x, r) \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bulanık kümeye x -merkezli r -yarıçaplı $\beta - v$ açık yuvar denir.

(2) $(X, \mathbb{P}, \wedge, R)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay, $x \in X$, $r > 0$ ve $\alpha, \beta \in (0,1]$ olmak üzere

$$\beta B_{\alpha}^{\mu}(x, r)(y) = \begin{cases} \beta, & y \in B_{\alpha}^{\mu}(x, r) \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bulanık kümeye x -merkezli r -yarıçaplı $\beta - \mu$ açık yuvar denir.

Uyarı 6.3.13: $(X, \mathbb{P}, \wedge, v)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay olmak üzere x -merkezli r -yarıçaplı $\beta - \mu$ açık yuvarlar ile $\beta - v$ açık yuvarlar çakışıktır.

Teorem 6.3.14: $(X, \mathbb{P}, L, v)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay olmak üzere

$$\mathfrak{B}_1 = \{\beta B_{\alpha}^v(x, r) : x \in X, r > 0, \alpha \in (0,1], \beta \in [\alpha, 1]\}$$

bulanık küme ailesi Lowen anlamındaki bulanık topoloji olan $\mathcal{T}_{\mathbb{P}}^{\nu}$ için bir tabandır.

İspat. İlk olarak $\mathfrak{B}_1 \subset \mathcal{T}_{\mathbb{P}}^{\nu}$ olduğunu gösterelim. Bunun için, $x \in X, r > 0, \alpha \in (0,1]$ ve $\beta \in [\alpha, 1]$ iken $\beta B_{\alpha}^{\nu}(x, r) \in \mathfrak{B}_1$ alalım. $\alpha \leq \beta$ olduğundan $[\beta B_{\alpha}^{\nu}(x, r)]_{\alpha} = B_{\alpha}^{\nu}(x, r) \in (\tau_{\mathbb{P}}^{\nu})_{\alpha}^{\nu}$ dir. Böylece, $\beta B_{\alpha}^{\nu}(x, r) \in \mathcal{T}_{\mathbb{P}}^{\nu}$ dir. Şimdi ise $\lambda \in \mathcal{T}_{\mathbb{P}}^{\nu}$ ve $\lambda(x) > 0$ olsun. $\lambda(x) \geq \alpha$ olan her $\alpha \in (0,1]$ için $[\lambda]_{\alpha} \in (\tau_{\mathbb{P}}^{\nu})_{\alpha}^{\nu}$ dir. Bu durumda, $x \in [\lambda]_{\alpha}$ iken $[\lambda]_{\alpha} \in (\tau_{\mathbb{P}}^{\nu})_{\alpha}^{\nu}$ olup $(\tau_{\mathbb{P}}^{\nu})_{\alpha}^{\nu}$ topolojisi tanımından $B_{\alpha}^{\nu}(x, r_1) \subset [\lambda]_{\alpha}$ olacak şekilde bir $r_1 > 0$ reel sayısı mevcuttur. Yani, $y \in B_{\alpha}^{\nu}(x, r_1)$ olan her $y \in X$ için $\lambda(y) \geq \alpha$ dir. Buradan, $\alpha B_{\alpha}^{\nu}(x, r_1) \leq \lambda$ bulunur.

Teorem 6.3.15: $(X, \mathbb{P}, \wedge, R)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay olmak üzere

$$\mathfrak{B}_2 = \{\beta B_{\alpha}^{\mu}(x, r) : x \in X, r > 0, \alpha \in (0,1], \beta \in [\alpha, 1]\}$$

bulanık küme ailesi Lowen anlamındaki bulanık topoloji olan $\mathcal{T}_{\mathbb{P}}^{\mu}$ için bir tabandır.

İspat. Teorem 6.3.14'ün ispatına benzer şekilde elde edilmektedir.

Teorem 6.3.16: $(X, \mathbb{P}, L, \vee)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay, her $x \in X$ için $\mathbb{P}(x, x) = \bar{a}$ ($a \in \mathbb{R}$) ve $\{(\tau_{\mathbb{P}}^{\nu})_{\alpha}^{\nu} : \alpha \in (0,1]\}$ bu metrikten üretilen topolojiler ailesi olmak üzere

$$\mathcal{T}_{\mathbb{P}}(A) = \sup \left\{ \alpha \in (0,1] : A \in (\tau_{\mathbb{P}}^{\nu})_{\alpha}^{\nu} \right\}$$

olarak tanımlanan $\mathcal{T}_{\mathbb{P}} : 2^X \rightarrow I$ dönüşümü bir bulanıklaştırılmış topolojidir.

İspat. $\alpha_1 < \alpha_2$ olsun. İlk olarak, $(\tau_{\mathbb{P}}^{\nu})_{\alpha_2}^{\nu} \subseteq (\tau_{\mathbb{P}}^{\nu})_{\alpha_1}^{\nu}$ olduğunu gösterelim. Bunun için $x \in X$ ve $r > 0$ iken $y \in B_{\alpha_1}^{\nu}(x, r)$ olsun. Buradan, $\nu_{\alpha_1}(x, y) < \nu_{\alpha_1}(x, x) + r$ dir. ν, α 'ya göre artmayan olduğundan

$$\nu_{\alpha_2}(x, y) \leq \nu_{\alpha_1}(x, y) < \nu_{\alpha_1}(x, x) + r = \nu_{\alpha_2}(x, x) + r$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise $y \in B_{\alpha_2}^v(x, r)$ olduğu anlamına gelir. O halde, $(\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha_2}^v \subseteq (\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha_1}^v$ dir. Yani, $\{(T_{\mathbb{P}})_{\alpha}^v : \alpha \in (0, 1]\}$, α 'ya göre artmayandır. Bu durumda, Önerme 2.3.11'e göre $\mathcal{T}_{\mathbb{P}}(A) = \sup \{\alpha \in (0, 1] : A \in (\tau_{\mathbb{P}})_{\alpha}^v\}$ olarak tanımlanan $\mathcal{T}_{\mathbb{P}} : 2^X \rightarrow I$ dönüşümü bir bulanıklaştırılmış topolojidir.

Teorem 6.3.17: $(X, \mathbb{P}, \wedge, \vee)$ bir KS-bulanık kısmi metrik uzay olsun. $N_x^{\mathbb{P}} : 2^X \rightarrow I$ dönüşümü her $A \in 2^X$ için

$$N_x^{\mathbb{P}}(A) = \bigvee_{t>0} \bigwedge_{y \notin A} \mathbb{P}(x, y)(t)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, her $A \in 2^X$ için $\mathcal{T}'_{\mathbb{P}}(A) = \bigwedge_{x \in A} N_x^{\mathbb{P}}(A)$ şeklinde tanımlanan $\mathcal{T}'_{\mathbb{P}} : 2^X \rightarrow I$ dönüşümü X üzerinde bir bulanıklaştırılmış topolojidir.

İspat: Her $A \in 2^X$ için $N_x^{\mathbb{P}}(A) = \bigvee_{t>0} \bigwedge_{y \notin A} \mathbb{P}(x, y)(t)$ şeklinde tanımlanan $N_x^{\mathbb{P}} : 2^X \rightarrow I$ dönüşümünün aşağıdaki özellikleri sağladığı kolayca görülmektedir:

(PGN1) $N_x^{\mathbb{P}}(X) = 1$.

(PGN2) $A \subset B$ ise $N_x^{\mathbb{P}}(A) \leq N_x^{\mathbb{P}}(B)$.

(PGN3) $N_x^{\mathbb{P}}(A) \wedge N_x^{\mathbb{P}}(B) \leq N_x^{\mathbb{P}}(A \cap B)$.

(PGN4) $x \notin A$ ise $N_x^{\mathbb{P}}(A) = N_x^{\mathbb{P}}(\emptyset)$ dir.

(PGN5) $N_x^{\mathbb{P}}(A) = \bigvee_{B \subseteq A} (N_x^{\mathbb{P}}(B) \wedge \bigwedge_{y \in B} N_y^{\mathbb{P}}(A))$.

Buradan, her $A \in 2^X$ için $\mathcal{T}'_{\mathbb{P}}(A) = \bigwedge_{x \in A} N_x^{\mathbb{P}}(A)$ şeklinde tanımlanan $\mathcal{T}'_{\mathbb{P}} : 2^X \rightarrow I$ dönüşümünün X üzerinde bir bulanıklaştırılmış topoloji olduğu Teorem 5.2 (Yue ve Gu, 2014)'nin ispatına benzer şekilde gösterilir.

Uyarı 6.3.18: Teorem 6.3.16'da üretilen $\mathcal{T}_{\mathbb{P}}$ bulanıklaştırılmış topolojisi ile Teorem 6.3.17'de üretilen $\mathcal{T}'_{\mathbb{P}}$ bulanıklaştırılmış topolojisi çakışıktır.

7. AYIRTEDİLEMEZLİK OPERATÖRLERİ

Bu bölümde, Chistyakov (2006) tarafından verilen modüler metrik kavramı, Miñana ve Valero (2017) tarafından verilen modüler ayırtedilemezlik operatörü ile Hosseinzadeh ve Parvaneh (2020) tarafından verilen kısmi modüler metrik kavramı tanıtılacaktır. Daha sonra modüler ayırtedilemezlik operatörlerinin ve hatta GV-bulanık kısmi-metrik kavramının bir genellemesi olan kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörleri tanımlanacaktır. Son olarak Miñana ve Valero (2017) tarafından elde edilen modüler metrik uzaylar ve modüler ayırtedilemezlik operatörleri arasında mevcut olan ilişkiler kısmi modüler metrik uzaylar ve kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörleri için çalışılacaktır.

7.1. Modüler (Pseudo-)Metrik Uzaylar ve Modüler Ayırtedilemezlik Operatörleri

Tanım 7.1.1: X bir küme olmak üzere her $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ için $w(\lambda, x, y) = w_\lambda(x, y)$ şeklinde tanımlanan $w: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü aşağıda verilen (W0), (W2), (W3) koşullarını sağlıyorsa X üzerinde bir modüler pseudo-metrik, (W1)-(W3) koşullarını sağlıyorsa X üzerinde bir modüler metrik olarak adlandırılır.

$$(W0) \quad x \in X \text{ ve } \lambda > 0 \text{ iken } w_\lambda(x, x) = 0.$$

$$(W1) \quad x, y \in X \text{ ve } \lambda > 0 \text{ iken } w_\lambda(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$(W2) \quad x, y \in X \text{ ve } \lambda > 0 \text{ iken } w_\lambda(x, y) = w_\lambda(y, x).$$

$$(W3) \quad x, y, z \in X \text{ ve } \lambda, \mu > 0 \text{ ike } w_{\lambda+\mu}(x, z) \leq w_\lambda(x, y) + w_\mu(y, z)$$

(Chistyakov, 2006).

Tanım 7.1.2: X bir küme ve $*$ bir t-norm olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathbb{M}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümüne $*$ için bir modüler ayırtedilemezlik operatörü denir.

$$(ME1) \quad x \in X \text{ ve } t > 0 \text{ iken } \mathbb{M}(x, x, t) = 1.$$

$$(ME2) \quad x, y \in X \text{ ve } t > 0 \text{ iken } \mathbb{M}(x, y, t) = \mathbb{M}(y, x, t).$$

$$(ME3) \quad x, y, z \in X \text{ ve } t, s > 0 \text{ iken } \mathbb{M}(x, y, t) * \mathbb{M}(y, z, s) \leq \mathbb{M}(x, z, t + s).$$

Yukarıdaki koşullara ek olarak aşağıdaki koşulu sağlayan $\mathbb{M}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümüne ise $*$ için noktaları ayıran modüler ayırtedilemezlik operatörü adı verilir.

(ME0) $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken $\mathbb{M}(x, y, t) = 1$ ise $x = y$.

$\mathbb{M}(x, y, t)$ değeri x 'in y 'den t parametresine göre ayırtedilemezlik veya x 'in y 'ye t parametresine göre denk olma derecesi olarak yorumlanabilir. $\mathbb{M}(x, y, t)$ değeri ne kadar büyük olursa x ile y , t parametresine göre o kadar benzer olduğu anlamına gelmektedir. Ayrıca dikkat edilirse noktaları ayıran modüler ayırtedilemezlik operatörü (ayırtedilemezlik operatörü) GV-bulanık metrik (GV-bulanık pseudo-metrik) kavramının bir genellemesidir (Miñana ve Valero, 2017).

Örnek 7.1.3: $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ dönüşümü her $t > 0$ için $\varphi(t) = \frac{t}{t+1}$ olarak tanımlansın. $x, y \in I$ ve $t > 0$ iken

$$\mathbb{M}_D(x, y, t) = \begin{cases} 1, & x = y \\ \max\{x, y, \varphi(t)\}, & x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{M}_D: [0,1) \times [0,1) \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü $*_D$ için modüler ayırtedilemezlik operatörüdür (Miñana ve Valero, 2017).

Aşağıdaki teoremden 2017 yılında Miñana ve Valero tarafından elde edilen ayırtedilemezlik operatörlerinin modüler metrik tipindeki davranışları verilmektedir.

Teorem 7.1.4: X bir küme ve $*_1, f_*: I \rightarrow [0, \infty]$ şeklinde toplamsal üretece sahip olan sürekli bir t-norm olsun. Eğer $*_2$ bir t-norm ise aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) $*_1 \leq *_2$.

(ii) $\mathbb{M}, *_2$ için bir modüler ayırtedilemezlik operatörü iken her $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ için

$$(w^{\mathbb{M}, f_*})_{\lambda}(x, y) = f_*(\mathbb{M}(x, y, \lambda))$$

şeklinde tanımlanan $w^{\mathbb{M}, f_*}: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde bir modüler pseudo-metriktir.

(iii) $\mathbb{M}, *_2$ için noktaları ayıran bir modüler ayırtedilemezlik operatörü iken her $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ için

$$(w^{\mathbb{M}, f_*})_{\lambda}(x, y) = f_*(\mathbb{M}(x, y, \lambda))$$

şeklinde tanımlanan $w^{\mathbb{M}, f_*}: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde bir modüler metriktir (Miñana ve Valero, 2017).

Miñana ve Valero (2017) modüler metrikler yardımıyla modüler ayırtedilemezlik operatörleri ve hatta GV-bulanık (pseudo-)metrik üretildiğini aşağıdaki şekilde göstermişlerdir.

Teorem 7.1.5: X bir küme ve $*, f_*: I \rightarrow [0, \infty]$ şeklinde toplamsal üretece sahip olan sürekli bir t-norm olsun. Eğer $w: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde bir modüler pseudo-metrik ise $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken

$$\mathbb{M}_{w, f_*}(x, y, t) = f_*^{(-1)}(w_t(x, y))$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{M}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü $*$ için bir modüler ayırtedilemezlik operatörüdür. Dahası eğer $w: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde bir modüler metrik ise yukarıdaki şekilde tanımlanan $\mathbb{M}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü $*$ için noktaları ayıran bir modüler ayırtedilemezlik operatörüdür (Miñana ve Valero, 2017).

Teorem 7.1.6: X bir küme ve $*, f_*: I \rightarrow [0, \infty]$ şeklinde toplamsal üretece sahip olan sürekli bir t-norm olsun. Eğer $w: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde bir modüler pseudo-metrik ise $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken $\tilde{w}_t(x, y) = \inf_{0 < \lambda < t} w_\lambda(x, y)$ olmak üzere

$$M_{\tilde{w}, f_*}(x, y, t) = f_*^{(-1)}(\tilde{w}_t(x, y))$$

şeklinde tanımlanan $M_{\tilde{w}, f_*}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(M_{\tilde{w}, f_*}, *)$ ikilisi X üzerinde bir GV-bulanık pseudo-metriktir. Dahası, eğer $w: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde bir modüler metrik ise yukarıdaki şekilde tanımlanan $M_{\tilde{w}, f_*}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(M_{\tilde{w}, f_*}, *)$ ikilisi X üzerinde bir GV-bulanık metriktir.

7.2. Kısmi Modüler (Pseudo-)Metrik Uzaylar ve Kısmi Modüler Ayırtedilemezlik Operatörleri

Kısmi modüler metrik kavramı ilk olarak 2020 yılında Hosseinzadeh ve Parvaneh tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 7.2.1: X bir küme olmak üzere $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ iken $w^p(\lambda, x, y) = w_\lambda^p(x, y)$ şeklinde tanımlanan $w^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa X üzerinde bir kısmi modüler metrik olarak adlandırılır.

(IPW1) $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ iken $w_\lambda^p(x, x) = w_\lambda^p(x, y) = w_\lambda^p(y, y) \Leftrightarrow x = y$.

(IPW2) $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ iken $w_\lambda^p(x, x) \leq w_\lambda^p(x, y)$.

(IPW3) $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ iken $w_\lambda^p(x, y) = w_\lambda^p(y, x)$.

(IPW4) $x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu > 0$ iken

$$w_{\lambda+\mu}^p(x, z) \leq w_\lambda^p(x, y) + w_\mu^p(y, z) - \frac{w_\lambda^p(x, x) + w_\lambda^p(z, z) + w_\mu^p(z, z) + w_\lambda^p(y, y)}{2}$$

(Hosseinzadeh ve Parvaneh, 2020).

Kısmi metriklerde bir noktanın kendisine olan uzaklığı her zaman sıfır olmamasına rağmen, yukarıdaki tanıma göre bu özellik kısmi modüler metrikler için sağlanmaktadır. Bundan dolayı kısmi modüler metrik tanımı Das ve diğ. tarafından 2022 yılında aşağıdaki şekilde yeniden verilmiştir.

Tanım 7.2.2: X bir küme olmak üzere $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ iken $w^p(\lambda, x, y) = w_\lambda^p(x, y)$ şeklinde tanımlanan $w^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü (IPW2), (IPW3) ve aşağıdaki koşulları sağlıyorsa X üzerinde bir kısmi modüler metrik olarak adlandırılır.

(IPW1') $x, y \in X$ ve $\lambda, \mu > 0$ iken $w_\lambda^p(x, x) = w_\mu^p(x, x)$ ve $w_\lambda^p(x, x) = w_\lambda^p(x, y) = w_\lambda^p(y, y)$ olması için gerek ve yeter şart $x = y$ olmasıdır.

(IPW4') Her $x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu > 0$ için $w_{\lambda+\mu}^p(x, z) \leq w_\lambda^p(x, y) + w_\mu^p(y, z) - w_\lambda^p(y, y)$ (Das ve diğ., 2022).

Dikkat edilirse, yukarıdaki tanımda bir noktanın kendine olan uzaklığının her zaman sıfır olması gerekmemektedir. Ancak bu tanımın (IPW1') aksiyomunda yer alan her $x \in X$ ve $\lambda, \mu > 0$ için $w_\lambda^p(x, x) = w_\mu^p(x, x)$ olması koşulunun bir noktanın kendine olan

uzaklığının her zaman sıfır olmayabileceği özelliği için gerekli olmadığı görülmektedir. Bu noktadan hareketler, (IPW1') aksiyomunu esneterek kısmi modüler metrik kavramını aşağıdaki şekilde yeniden tanımlıyoruz.

Tanım 7.2.3: X bir küme olmak üzere $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ iken $w^p(\lambda, x, y) = w_\lambda^p(x, y)$ şeklinde tanımlanan $w^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü aşağıda ifade edilen (PW1)-(PW3), (PW3) koşullarını sağlıyorsa X üzerinde bir kısmi modüler pseudo-metrik, (PW0)-(PW3) koşullarını sağlıyorsa X üzerinde bir kısmi modüler metrik olarak adlandırılır.

(PW0) $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ iken $w_\lambda^p(x, y) = w_\lambda^p(x, y) = w_\lambda^p(y, y) \Leftrightarrow x = y$.

(PW1) $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ iken $w_\lambda^p(x, x) \leq w_\lambda^p(x, y)$.

(PW2) $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ iken $w_\lambda^p(x, y) = w_\lambda^p(y, x)$.

(PW3) $x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu > 0$ iken $w_{\lambda+\mu}^p(x, z) \leq w_\lambda^p(x, y) + w_\mu^p(y, z) - w_\lambda^p(y, y)$.

Dahası her $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ için aşağıdaki koşulu sağlayan $w^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ kısmi modüler (pseudo-)metriğine kısmi modüler (pseudo-)ultrametrik denir.

(PW4) $w_\lambda^p(x, x) \leq \max\{w_\lambda^p(x, y), w_\lambda^p(y, z)\}$

$w^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi modüler (pseudo-)metrik olmak üzere her $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ için $w_{x,y}^p(\lambda) = w^p(\lambda, x, y)$ şeklinde tanımlanan $w_{x,y}^p: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sabit bir fonksiyon ise w^p 'ye X üzerinde bir sabit kısmi modüler (pseudo-)metrik adı verilir. Bu durumda, kısmi modüler (pseudo-)metrik kavramı ile kısmi (pseudo-)metrik kavramı çakışmıştır.

Ayrıca, (PW3) aksiyomunda verilen her $x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu > 0$ için

$$w_{\lambda+\mu}^p(x, z) \leq w_\lambda^p(x, y) - w_\lambda^p(y, y) + w_\mu^p(y, z)$$

eşitsizliğin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$w_{\lambda+\mu}^p(x, z) \leq w_\lambda^p(x, y) - w_\mu^p(y, y) + w_\mu^p(y, z)$$

eşitsizliğin sağlanmasıdır.

Dikkat edilirse, Tanım 7.2.3’de verilen kısmi modüler metrik uzay kavramı Tanım 7.2.2’de verilen tanımın daha genel bir halidir. Aşağıdaki örnekte Tanım 7.2.3 anlamında kısmi modüler metrik olup Tanım 7.2.2 anlamında kısmi modüler metrik olmayan bir dönüşüm verilmektedir.

Örnek 7.2.4: (X, p) bir kısmi metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ için $w_\lambda^p(x, y) = \frac{p(x, y)}{\lambda}$ şeklinde tanımlanan $w^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü Tanım 7.2.3 anlamında bir kısmi modüler metrik iken $\lambda \neq \mu$ için $\frac{p(x, x)}{\lambda} \neq \frac{p(x, x)}{\mu}$ olduğundan Tanım 7.2.2 anlamında bir kısmi modüler metrik değildir.

Aşağıda yeni bir kavram olan kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörünün tanımı verilmektedir.

Tanım 7.2.5: X bir küme ve $*$ bir t-norm olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathbb{P}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümüne $*$ için bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü adı verilir.

$$(PME1) \quad x, y \in X \text{ ve } t > 0 \text{ iken } \mathbb{P}(x, x, t) \geq \mathbb{P}(x, y, t).$$

$$(PME2) \quad x, y \in X \text{ ve } t > 0 \text{ iken } \mathbb{P}(x, y, t) = \mathbb{P}(y, x, t).$$

$$(PME3) \quad x, y, z \in X \text{ ve } t, s > 0 \text{ iken}$$

$$\mathbb{P}(x, z, t + s) \geq \mathbb{P}(x, y, t) * (\mathbb{P}(y, y, s) \rightarrow_* \mathbb{P}(y, z, s)).$$

Yukarıdaki koşullara ek olarak aşağıdaki koşulu sağlayan $\mathbb{P}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümüne ise $*$ için noktaları ayıran kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü denir.

$$(PME0) \quad x, y \in X \text{ ve } t > 0 \text{ iken } \mathbb{P}(x, x, t) = \mathbb{P}(x, y, t) = \mathbb{P}(y, y, t) \Leftrightarrow x = y.$$

Ayrıca, her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için aşağıdaki koşulu sağlayan $\mathbb{P}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$, $*$ için (noktaları ayıran) kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörüne güçlü (noktaları ayıran) kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü denir.

$$(PW4) \quad \mathbb{P}(x, z, t) \geq \mathbb{P}(x, y, t) * (\mathbb{P}(y, y, t) \rightarrow_* \mathbb{P}(y, z, t)).$$

Dahası $\mathbb{P}$, $*$ için kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olmak üzere $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken $\mathbb{P}_{x, y}(t) = \mathbb{P}(x, y, t)$ şeklinde tanımlanan $\mathbb{P}_{x, y}: (0, \infty) \rightarrow I$ fonksiyonu sabit ise $\mathbb{P}$ ’ye $*$ için (noktaları ayıran) sabit kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü denir.

Dikkat edilirse, kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörleri (FPKM4*) koşulunu sağlayan bulanık GV-bulanık kısmi (pseudo-)metrik kavramının bir genellemesidir. Aşağıdaki örnekte de görüldüğü gibi kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olup (FPKM4*) koşulunu sağlamasına rağmen GV-bulanık kısmi metrik olmayan dönüşümler vardır.

Örnek 7.2.6: $(\mathbb{R}^+, p_{max})$ kısmi metrik uzayını ele alalım. $\mathbb{P}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü $x, y \in \mathbb{R}^+$ ve $t > 0$ iken $\mathbb{P}(x, y, t) = \frac{t}{t+p_{max}(x,y)}$ şeklinde tanımlansın. Örnek 5.1.7'den $(\mathbb{R}^+, \mathbb{P}, *_L)$ üçlüsünün bir GV-bulanık kısmi metrik uzay olmadığı bilinmektedir. Ancak, basit bir hesaplama ile $\mathbb{P}$ 'nin $\mathbb{R}^+$ üzerinde $*_L$ için noktaları ayıran kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olduğu görülmektedir.

Modüler ayırtedilemezlik operatörleri kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörlerinin özel bir halidir. X bir küme olmak üzere $\mathbb{P}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü $x \in X$ ve $t > 0$ iken $\mathbb{P}(x, x, t) = 1$ koşulunu sağlayan $*$ için bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü ise $*$ için bir modüler ayırtedilemezlik operatörü olmaktadır. Gerçekten, (PME3) aksiyomundan, her $x, y \in X$ ve $t, s > 0$ için

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x, z, t + s) &\geq \mathbb{P}(x, y, t) * (\mathbb{P}(y, y, s) \rightarrow_* \mathbb{P}(y, z, s)) = \mathbb{P}(x, y, t) * (1 \rightarrow_* \mathbb{P}(y, z, s)) \\ &= \mathbb{P}(x, y, t) * \mathbb{P}(y, z, s) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da (ME3) aksiyomunun sağlandığını göstermektedir. Ayrıca, aşağıdaki örnekte de görüldüğü gibi kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olup modüler ayırtedilemezlik operatörü olmayan dönüşümler vardır.

Örnek 7.2.7: (X, p) kısmi metrik uzayını ele alalım. $\mathbb{P}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken $\mathbb{P}(x, y, t) = \frac{t}{t+p(x,y)}$ şeklinde tanımlansın. Sonuç 5.2.4'ten $(X, \mathbb{P}, *_p)$ üçlüsünün (FPKM4*) koşulunu sağlayan bir GV-bulanık metrik uzay olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla $\mathbb{P}, *_p$ için noktaları ayıran bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörüdür. Ancak, $x \in X$ ve $t > 0$ iken $\mathbb{P}(x, x, t) = \frac{t}{t+p(x,x)}$ her zaman bire eşit olmayabileceğinden $\mathbb{P}$ bir modüler ayırtedilemezlik operatörü değildir.

7.2.1. Kısmi Modüler Ayırteçilemezlik Operatörleri Tarafından Üretilen Kısmi Modüler (Pseudo-)Metrikler

Teorem 7.2.1.1: X bir küme ve $*, f_*: I \rightarrow [0, \infty]$ şeklinde toplamsal üretece sahip olan sürekli bir t-norm olsun. Eğer $\mathbb{P}, *$ için bir kısmi modüler ayırteçilemezlik operatörü ise her $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ için

$$(w^{\mathbb{P}, f_*})_{\lambda}^p(x, y) = f_*(\mathbb{P}(x, y, \lambda)) \quad (7.1)$$

şeklinde tanımlanan $(w^{\mathbb{P}, f_*})^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi modüler pseudo-metriktir.

İspat: Denklem (7.1)'de tanımlanan $(w^{\mathbb{P}, f_*})^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümünün (PW1)-(PW3) aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

(PW1) $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ iken $\mathbb{P}(x, x, \lambda) \geq \mathbb{P}(x, y, \lambda)$ ve f_* kesin azalan olduğundan

$$(w^{\mathbb{P}, f_*})_{\lambda}^p(x, x) = f_*(\mathbb{P}(x, x, \lambda)) \leq f_*(\mathbb{P}(x, y, \lambda)) = (w^{\mathbb{P}, f_*})_{\lambda}^p(x, y) \text{ elde edilir.}$$

(PW2) $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ iken $\mathbb{P}(x, y, \lambda) = \mathbb{P}(y, x, \lambda)$ olduğundan $(w^{\mathbb{P}, f_*})_{\lambda}^p(x, y) = (w^{\mathbb{P}, f_*})_{\lambda}^p(y, x)$ eşitliğinin sağlandığı açıktır.

(PW3) $x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu > 0$ olsun.

$$(w^{\mathbb{P}, f_*})_{\lambda+\mu}^p(x, z) \leq (w^{\mathbb{P}, f_*})_{\lambda}^p(x, y) + (w^{\mathbb{P}, f_*})_{\mu}^p(y, z) - (w^{\mathbb{P}, f_*})_{\mu}^p(y, y)$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. $\mathbb{P}, *$ için bir kısmi modüler ayırteçilemezlik operatörü olduğundan

$$\mathbb{P}(x, z, \lambda + \mu) \geq \mathbb{P}(x, y, \lambda) * (\mathbb{P}(y, y, \mu) \rightarrow_* \mathbb{P}(y, z, \mu))$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. Dahası $f_*, *$ 'ın toplamsal üretici olduğundan

$$\mathbb{P}(x, y, \lambda) * (\mathbb{P}(y, y, \mu) \rightarrow_* \mathbb{P}(y, z, \mu))$$

$$= f_*^{(-1)}(\min\{f_*(0), f_*(\mathbb{P}(x, y, \lambda)) + f_*(\mathbb{P}(y, y, \mu) \rightarrow_* \mathbb{P}(y, z, \mu))\}) \text{ ve}$$

$$f_*(\mathbb{P}(y, y, \mu) \rightarrow_* \mathbb{P}(y, z, \mu)) = f_*\left(f_*^{(-1)}(\max\{f_*(\mathbb{P}(y, z, \mu)) - f_*(\mathbb{P}(y, y, \mu)), 0\})\right)$$

$$= f_*(\mathbb{P}(y, z, \mu)) - f_*(\mathbb{P}(y, y, \mu))$$

elde edilir. Buradan,

$$\mathbb{P}(x, y, \lambda) * (\mathbb{P}(y, y, \mu) \rightarrow_* \mathbb{P}(y, z, \mu))$$

$$= f_*^{(-1)}(\min\{f_*(0), f_*(\mathbb{P}(x, y, \lambda)) + f_*(\mathbb{P}(y, z, \mu)) - f_*(\mathbb{P}(y, y, \mu))\})$$

bulunur. Aşağıdaki şekilde iki durum mevcuttur.

Durum I: Farzedelim ki $f_*(\mathbb{P}(x, y, \lambda)) + f_*(\mathbb{P}(y, z, \mu)) - f_*(\mathbb{P}(y, y, \mu)) \in \text{Ran}(f_*)$ olsun. Bu durumda,

$$f_*(\mathbb{P}(x, y, \lambda)) + f_*(\mathbb{P}(y, z, \mu)) - f_*(\mathbb{P}(y, y, \mu)) \leq f_*(0)$$

elde edilir. $\mathbb{P}, *$ için bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olduğundan

$$\mathbb{P}(x, y, \lambda) * (\mathbb{P}(y, y, \mu) \rightarrow_* \mathbb{P}(y, z, \mu))$$

$$= f_*^{(-1)}(f_*(\mathbb{P}(x, y, \lambda)) + f_*(\mathbb{P}(y, z, \mu)) - f_*(\mathbb{P}(y, y, \mu))) \leq \mathbb{P}(x, z, \lambda + \mu)$$

sağlanır. Ayrıca f_* kesin azalan olduğundan

$$f_*\left(f_*^{(-1)}\left(f_*(\mathbb{P}(x, y, \lambda)) + f_*(\mathbb{P}(y, z, \mu)) - f_*(\mathbb{P}(y, y, \mu))\right)\right) \geq f_*(\mathbb{P}(x, z, \lambda + \mu))$$

bulunur. Buradan ise

$$(w^{\mathbb{P}, f_*})_{\lambda+\mu}^p(x, z) \leq (w^{\mathbb{P}, f_*})_{\lambda}^p(x, y) + (w^{\mathbb{P}, f_*})_{\mu}^p(y, z) - (w^{\mathbb{P}, f_*})_{\mu}^p(y, y)$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülmektedir.

Durum II: Farzedelim ki $f_*(\mathbb{P}(x, y, \lambda)) + f_*(\mathbb{P}(y, z, \mu)) - f_*(\mathbb{P}(y, y, \mu)) \notin \text{Ran}(f_*)$ olsun. Bu durumda,

$$f_*(\mathbb{P}(x, y, \lambda)) + f_*(\mathbb{P}(y, z, \mu)) - f_*(\mathbb{P}(y, y, \mu)) > f_*(0) \geq f_*(\mathbb{P}(x, z, \lambda + \mu))$$

eşitsizliği elde edilir ki bu ise

$$(w^{\mathbb{P},f_*})_{\lambda+\mu}^p(x,z) \leq (w^{\mathbb{P},f_*})_{\lambda}^p(x,y) + (w^{\mathbb{P},f_*})_{\mu}^p(y,z) - (w^{\mathbb{P},f_*})_{\mu}^p(y,y)$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermektedir.

Kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü yerine modüler ayırtedilemezlik operatörü alındığında yukarıdaki teoremden aşağıdaki sonuç elde edilmektedir.

Sonuç 7.2.1.2: X bir küme ve $*, f_*: I \rightarrow [0, \infty]$ şeklinde toplamsal üretece sahip olan sürekli bir t-norm olsun. Eğer $\mathbb{P}, *$ için bir modüler ayırtedilemezlik operatörü ise Denklem (7.1)'de tanımlanan $(w^{\mathbb{P},f_*})^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde bir modüler pseudo-metriktir.

İspat: Denklem (7.1)'de tanımlanan $(w^{\mathbb{P},f_*})^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümünün, Teorem 7.2.1.1'den, bir kısmi modüler pseudo-metrik olduğu bilinmektedir. Ayrıca, $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken

$$(w^{\mathbb{P},f_*})_{\lambda}^p(x, x) = f_*(\mathbb{P}(x, x, \lambda)) = f_*(1) = 0$$

olduğundan $(w^{\mathbb{P},f_*})^p, X$ üzerinde bir modüler pseudo-metriktir.

Aşağıdaki örnekte Teorem 7.2.1.1'de yer alan “ $*$ süreklidir” koşulunun ihmal edilemeyeceği gösterilmektedir.

Örnek 7.2.1.3: Örnek 7.1.3'de verilen, $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \varphi(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda+1}$ olmak üzere, $*_D$ için modüler ayırtedilemezlik operatörü olan

$$\mathbb{M}_D(x, y, \lambda) = \begin{cases} 1, & x = y \\ \max\{x, y, \varphi(\lambda)\}, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{M}_D: [0,1) \times [0,1) \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümünü ele alalım. Her modüler ayırtedilemezlik operatörü aynı zamanda bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olduğundan $\mathbb{M}_D, *_D$ için bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörüdür. Ayrıca, her $x, y \in [0,1)$ ve $\lambda > 0$ için

$$f_{*D}(\mathbb{M}_D(x, y, \lambda)) = \begin{cases} 1, & x = y \\ \max\{x, y, \varphi(\lambda)\}, & \text{diğer} \end{cases}$$

elde edilir. Ancak

$$f_{*D}(1.5) = (w^{\mathbb{M}_D, f_{*D}})_1^p(0.3, 0.5)$$

$$> (w^{\mathbb{M}_D, f_{*D}})_{0.2}^p(0.3, 0.1) + (w^{\mathbb{M}_D, f_{*D}})_{0.8}^p(0.1, 0.5) - (w^{\mathbb{M}_D, f_{*D}})_{0.2}^p(0.1, 0.1)$$

olduğundan $(w^{\mathbb{M}_D, f_{*D}})_\lambda^p(x, y) = f_{*D}(\mathbb{M}_D(x, y, \lambda))$ şeklinde tanımlanan $(w^{\mathbb{M}_D, f_{*D}})^p$, $[0, 1]$ üzerinde bir kısmi modüler pseudo-metrik değildir.

Eğer kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü noktaları ayırıyorsa aşağıdaki teorem elde edilmektedir.

Teorem 7.2.1.4: X bir küme ve $*$, $f_*: I \rightarrow [0, \infty]$ şeklinde toplamsal üretece sahip olan sürekli bir t-norm olsun. Eğer $\mathbb{P}$, $*$ için noktaları ayıran bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü ise Denklem (7.1)'de tanımlanan $(w^{\mathbb{P}, f_*})^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi modüler metriktir.

İspat: Teorem 7.2.1.1'den Denklem (7.1)'de tanımlanan $(w^{\mathbb{P}, f_*})^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümünün X üzerinde bir kısmi modüler pseudo-metrik olduğu bilinmektedir. Ayrıca, $\mathbb{P}$, $*$ için noktaları ayıran bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olduğundan $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ iken

$$\mathbb{P}(x, x, \lambda) = \mathbb{P}(x, y, \lambda) = \mathbb{P}(y, y, \lambda) \Leftrightarrow x = y$$

sağlanmaktadır. Buradan $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ iken

$$f_*(\mathbb{P}(x, x, \lambda)) = f_*(\mathbb{P}(x, y, \lambda)) = f_*(\mathbb{P}(y, y, \lambda)) \Leftrightarrow x = y$$

olduğu elde edilir. Sonuç olarak $(w^{\mathbb{P}, f_*})^p$, X üzerinde bir kısmi modüler metriktir.

Kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü yerine modüler ayırtedilemezlik operatörü alındığında yukarıdaki teoremden aşağıdaki sonuç elde edilmektedir.

Sonuç 7.2.1.5: X bir küme ve $*$, $f_*: I \rightarrow [0, \infty]$ şeklinde toplamsal üretece sahip olan sürekli bir t-norm olsun. Eğer $\mathbb{P}$, $*$ için noktaları ayıran bir modüler ayırtedilemezlik operatörü ise Denklem (7.1)'de tanımlanan $(w^{\mathbb{P}, f_*})^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde bir modüler metriktir.

İspat: Denklem (7.1)'de tanımlanan $(w^{\mathbb{P}, f_*})^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümünün, Sonuç 7.2.1.2'den, bir modüler pseudo-metrik olduğu bilinmektedir. Ayrıca, f_* kesin

azalan, $f_*(1) = 0$ ve $\mathbb{P}, *$ için noktaları ayıran bir modüler ayırtedilemezlik operatörü olduğundan her $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ için

$$0 = (w^{\mathbb{P}, f_*})_{\lambda}^p(x, y) = f_*(\mathbb{P}(x, y, \lambda)) \Leftrightarrow \mathbb{P}(x, y, \lambda) = 1 \Leftrightarrow x = y$$

elde edilir. Sonuç olarak, $(w^{\mathbb{P}, f_*})^p, X$ üzerinde bir modüler metriktir.

Aşağıdaki örnekte Teorem 7.2.1.1’de verilen yöntem ile oluşturulan kısmi modüler metriğin bir modüler metrik olmadığını gösterilmektedir.

Örnek 7.2.1.6: (I, p_{max}) kısmi metrik uzayını ele alalım.

$\mathbb{P}: I \times I \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü her $x, y \in I$ ve $\lambda > 0$ için $\mathbb{P}(x, y, t) = \frac{\lambda}{\lambda + p_{max}(x, y)}$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, $(I, \mathbb{P}, *_p)$ üçlüsü (FPKM4*) koşulunu sağlayan bir GV-bulanık kısmi metrik uzay olduğundan $\mathbb{P}, *_p$ için noktaları ayıran bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörüdür. $*_p$ t-normunun toplamsal üretici $f_{*_p}: I \rightarrow [0, \infty]$, $f_{*_p}(x) = \log(x)$ şeklinde olup $f_{*_p}(0) = \infty$ olarak alınmaktadır. $\mathbb{P}, *_p$ için noktaları ayıran bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatör olduğundan Denklem (7.1)’de tanımlanan $(w^{\mathbb{P}, f_{*_p}})^p: (0, \infty) \times I \times I \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü I üzerinde bir kısmi modüler metriktir. Ancak her $x, y \in I$ ve $\lambda > 0$ için

$$(w^{\mathbb{P}, f_{*_p}})^p_{\lambda}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

koşulu sağlanmadığından $(w^{\mathbb{P}, f_{*_p}})^p, I$ üzerinde bir modüler metrik değildir.

Teorem 7.1.4’ün kısmi modüler pseudo-metrik versiyonu aşağıdaki şekildedir.

Teorem 7.2.1.7: X bir küme ve $*_1, f_{*_1}: I \rightarrow [0, \infty]$ şeklinde toplamsal üretece sahip olan sürekli bir t-norm olsun. Eğer $*_2$ sürekli bir t-norm ise aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) $\mathbb{P}, *_2$ için bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olmak üzere Denklem (7.1)’deki gibi tanımlanan $(w^{\mathbb{P}, f_{*_1}})^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi modüler pseudo-metriktir.

(ii) $\mathbb{P}, *_2$ için noktaları ayıran bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olmak üzere Denklem (7.1)’deki gibi tanımlanan $(w^{\mathbb{P}, f_{*_1}})^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi modüler metriktir.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2): $\mathbb{P}, *_2$ için noktaları ayıran bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olsun. Hipotezden, Denklem (7.1)'deki gibi tanımlanan $(w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi modüler pseudo-metriktir. Şimdi, $(w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p$ 'nin (WP0) aksiyomunu sağladığını gösterelim. $\mathbb{P}, *_2$ için noktaları ayıran bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olduğundan $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ iken

$$\mathbb{P}(x, y, \lambda) = \mathbb{P}(x, x, \lambda) = \mathbb{P}(y, y, \lambda) \Leftrightarrow x = y$$

sağlanmaktadır. Buradan, f_{*1} kesin azalan olduğundan her $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ için

$$f_{*1}(\mathbb{P}(x, y, \lambda)) = f_{*1}(\mathbb{P}(x, x, \lambda)) = f_{*1}(\mathbb{P}(y, y, \lambda)) \Leftrightarrow x = y$$

elde edilir ki bu da $(w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p$ 'nin X üzerinde bir kısmi modüler metrik olduğunu ifade etmektedir.

(2) $\Rightarrow$ (1): Farzedelim ki öyle bir $*$ t-normu mevcut olsun ki $\mathbb{P}, *$ için bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü iken Denklem (7.1)'deki gibi tanımlanan $(w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi modüler pseudo-metrik olmasın. Buradan, $(w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p$, (WP1) veya (WP3) aksiyomlarından birini sağlamadığı anlaşılmaktadır. İlk olarak, $(w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p$ 'in (WP1) aksiyomunu sağlamadığını varsayalım. Bu durumda, öyle $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ vardır ki $(w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p_{\lambda}(x, x) > (w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p_{\lambda}(x, y)$ eşitsizliği sağlanır. Bu ise $f_{*1}(\mathbb{P}(x, x, \lambda)) > f_{*1}(\mathbb{P}(x, y, \lambda))$ olduğu anlamına gelmektedir. Buradan, $\mathbb{P}(x, x, \lambda) < \mathbb{P}(x, y, \lambda)$ eşitsizliği elde edilir ki bu da $\mathbb{P}, *$ için bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olduğundan bir çelişkidir.

Şimdi ise $(w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p$ 'in (WP3) aksiyomunu sağlamadığını varsayalım. Bu durumda,

$$(w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p_{\lambda+\mu}(x, z) > (w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p_{\lambda}(x, y) + (w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p_{\mu}(y, z) - (w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p_{\mu}(y, y) \quad (7.2)$$

ve

$$(w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p_{\lambda+\mu}(x, z) > (w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p_{\lambda}(x, y) + (w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p_{\mu}(y, z) - (w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p_{\lambda}(y, y) \quad (7.3)$$

olacak şekilde $x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu > 0$ mevcuttur. Şimdi $\max\{\mathbb{P}(x, z, \lambda + \mu), \mathbb{P}(x, y, \lambda), \mathbb{P}(y, z, \mu)\} < 1$ olduğunu gösterelim.

Durum I: $\mathbb{P}(x, z, \lambda + \mu) = 1$ olsun. Buradan,

$$0 = f_{*1}(1) = f_{*1}(\mathbb{P}(x, z, \lambda + \mu)) = (w^{\mathbb{P}, f_{*1}})_{\lambda+\mu}^p(x, z)$$

$$> (w^{\mathbb{P}, f_{*1}})_{\lambda}^p(x, y) + (w^{\mathbb{P}, f_{*1}})_{\mu}^p(y, z) - (w^{\mathbb{P}, f_{*1}})_{\lambda}^p(y, y) \geq 0$$

elde edilir ki bu ise bir çelişkidir.

Durum II: $\mathbb{P}(x, y, \lambda) = 1$ olsun. Bu durumda, $\mathbb{P}(y, y, \lambda) = 1$ olur ve buradan $(w^{\mathbb{P}, f_{*1}})_{\lambda}^p(x, y) = 0$ ve $(w^{\mathbb{P}, f_{*1}})_{\lambda}^p(y, y) = 0$ elde edilir. Eşitsizlik (7.3)'den $(w^{\mathbb{P}, f_{*1}})_{\lambda+\mu}^p(x, z) > (w^{\mathbb{P}, f_{*1}})_{\mu}^p(y, z)$ bulunur. Buradan, $\mathbb{P}(x, z, \lambda + \mu) < \mathbb{P}(y, z, \mu)$ eşitsizliğinin sağlandığı görülmektedir. Sonuç olarak, $\mathbb{P}, *$ için bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olduğundan

$$\mathbb{P}(x, z, \lambda + \mu) \geq \mathbb{P}(x, y, \lambda) * (\mathbb{P}(y, y, \mu) \rightarrow_* \mathbb{P}(y, z, \mu)) = 1 * \mathbb{P}(y, z, \mu) > \mathbb{P}(x, z, \lambda + \mu)$$

elde edilir ki bu ise bir çelişkidir.

Durum III: $\mathbb{P}(y, z, \mu) = 1$ olsun. Bu durumda, $\mathbb{P}(y, y, \mu) = 1$ olur ve buradan $(w^{\mathbb{P}, f_{*1}})_{\mu}^p(y, z) = 0$ ve $(w^{\mathbb{P}, f_{*1}})_{\mu}^p(y, y) = 0$ elde edilir. Eşitsizlik (7.2)'den $(w^{\mathbb{P}, f_{*1}})_{\lambda+\mu}^p(x, z) > (w^{\mathbb{P}, f_{*1}})_{\lambda}^p(x, y)$ bulunur. Buradan, $\mathbb{P}(x, z, \lambda + \mu) < \mathbb{P}(x, y, \lambda)$ eşitsizliğinin sağlandığı görülmektedir. Sonuç olarak, $\mathbb{P}, *$ için bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olduğundan

$$\mathbb{P}(x, z, \lambda + \mu) \geq \mathbb{P}(x, y, \lambda) * (\mathbb{P}(y, y, \mu) \rightarrow_* \mathbb{P}(y, z, \mu)) = \mathbb{P}(x, y, \lambda) * 1 > \mathbb{P}(x, z, \lambda + \mu)$$

elde edilir ki bu ise bir çelişkidir. O halde, $\max\{\mathbb{P}(x, z, \lambda + \mu), \mathbb{P}(x, y, \lambda), \mathbb{P}(y, z, \mu)\} < 1$ dir.

Şimdi ise $Y = \{x, y, z\}$ kümesini ele alalım. $\mathbb{P}': Y \times Y \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü her $u, v \in Y$ ve $\lambda > 0$ için

$$\mathbb{P}'(u, v, \lambda) = \begin{cases} \mathbb{P}(u, v, \lambda), & u \neq v \text{ veya } u = v = z \\ 1, & u = v \in Y \setminus \{z\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada, her $u, v \in Y$ ve $\lambda > 0$ için $\mathbb{P}'(u, u, \lambda) \geq \mathbb{P}'(u, v, \lambda)$ olduğu ve $\mathbb{P}'(u, v, \lambda) = \mathbb{P}'(u, u, \lambda) = \mathbb{P}'(v, v, \lambda) \Leftrightarrow x = y$ koşulunun sağlandığı açıktır. Ayrıca, her $u, w, v \in Y$ ve $\lambda, \mu > 0$ için

$$\mathbb{P}'(u, v, \lambda + \mu) = \mathbb{P}(u, v, \lambda + \mu) \geq \mathbb{P}(u, w, \lambda) * (\mathbb{P}(w, w, \mu) \rightarrow_* \mathbb{P}(w, v, \mu))$$

$$\geq \mathbb{P}'(u, w, \lambda) * (\mathbb{P}'(w, w, \mu) \rightarrow_* \mathbb{P}'(w, v, \mu))$$

elde edilir. O halde $\mathbb{P}'$, $*$ için bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörüdür. Hipotezden, $(w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi modüler metrik olup

$$(w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p_{\lambda+\mu}(x, z) \leq (w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p_{\lambda}(x, y) + (w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p_{\mu}(y, z) - (w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p_{\mu}(y, y)$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülmektedir. Bu ise varsayımımız ile çelişmektedir. O halde, $(w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p$, X üzerinde bir kısmi modüler pseudo-metriktir.

Aşağıdaki teoremden, Teorem 7.2.1.7'de verilen $*_1$ ve $*_2$ t-normları arasındaki ilişki verilmektedir.

Teorem 7.2.1.8: X bir küme, $*_1, *_2$ sürekli iki t-norm ve $f_{*1}: I \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu $*_1$ 'in toplamsal üretici olsun. Eğer $\mathbb{P}$, $*_2$ için noktaları ayıran bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü iken Denklem (7.1)'deki gibi tanımlanan $(w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi modüler metrik ise $*_1 \leq *_2$ dir.

İspat: $X = \{x, y, z\}$ ve $a, b \in I$ olsun. $\mathbb{P}: Y \times Y \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü $u, v \in X$ ve $\lambda > 0$ iken

$$\mathbb{P}(u, v, \lambda) = \mathbb{P}(v, u, \lambda) = \begin{cases} 1, & u = v \\ a *_2 b, & u = x, v = z \\ a, & u = x, v = y \\ b, & u = y, v = z \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\mathbb{P}$ 'nin $*_2$ için noktaları ayıran bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olduğu kolayca görülmektedir. Hipotezden, Denklem (7.1)'deki gibi tanımlanan $(w^{\mathbb{P}, f_{*1}})^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi modüler metriktir. Buradan, her $x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu > 0$ için

$$(w^{\mathbb{P}, f_{*1}})_{\lambda+\mu}^p(x, z) \leq (w^{\mathbb{P}, f_{*1}})_{\lambda}^p(x, y) + (w^{\mathbb{P}, f_{*1}})_{\mu}^p(y, z) - (w^{\mathbb{P}, f_{*1}})_{\mu}^p(y, y)$$

sağlanmaktadır. Buradan,

$$\begin{aligned} a *_2 b &= \mathbb{P}(x, z, \lambda + \mu) = f_{*1}^{(-1)} \left(f_{*1}(\mathbb{P}(x, z, \lambda + \mu)) \right) \\ &\geq f_{*1}^{(-1)} \left(f_{*1}(\mathbb{P}(x, y, \lambda)) + f_{*1}(\mathbb{P}(y, z, \mu)) - f_{*1}(\mathbb{P}(y, y, \mu)) \right) \\ &= f_{*1}^{(-1)} \left(f_{*1}(\mathbb{P}(x, y, \lambda)) + f_{*1}(\mathbb{P}(y, y, \mu) \rightarrow_* \mathbb{P}(y, z, \mu)) \right) \\ &= \mathbb{P}(x, y, \lambda) *_1 (\mathbb{P}(y, y, \mu) \rightarrow_* \mathbb{P}(y, z, \mu)) = \mathbb{P}(x, y, \lambda) *_1 \mathbb{P}(y, z, \mu) = a *_1 b \end{aligned}$$

elde edilir.

Aşağıdaki sonuç $\wedge$ t-normu için verilmektedir.

Sonuç 7.2.1.9: X bir küme, $*$ sürekli bir t-norm ve $\mathbb{P}, \wedge$ için (noktaları ayıran) bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olsun. Eğer $f_*: I \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu $*$ t-normunun bir toplamsal üretici ise Denklem (7.1)'deki gibi tanımlanan $(w^{\mathbb{P}, f_*})^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi modüler pseudo-metrik (kısmi modüler metrik)tir.

İspat: $\mathbb{P}, \wedge$ için (noktaları ayıran) bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olduğundan her $x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu > 0$ için

$$\mathbb{P}(x, z, \lambda + \mu) \geq \mathbb{P}(x, y, \lambda) \wedge (\mathbb{P}(y, y, \mu) \rightarrow_{\wedge} \mathbb{P}(y, z, \mu)) \text{ ve}$$

$$\mathbb{P}(x, z, \lambda + \mu) \geq \mathbb{P}(x, y, \mu) \wedge (\mathbb{P}(y, y, \lambda) \rightarrow_{\wedge} \mathbb{P}(y, z, \lambda)) \text{ eşitsizlikleri sağlanmaktadır.}$$

Buradan, $\mu > \lambda$ iken

$$\mathbb{P}(x, z, \lambda + \mu) \geq \mathbb{P}(x, y, \lambda) \wedge (\mathbb{P}(y, y, \mu) \rightarrow_{\wedge} \mathbb{P}(y, z, \mu))$$

$$\begin{aligned}
&\geq \mathbb{P}(x, y, \lambda) \wedge (1 \rightarrow_{\wedge} \mathbb{P}(y, z, \mu)) = \mathbb{P}(x, y, \lambda) \wedge \mathbb{P}(y, z, \mu) \\
&= \mathbb{P}(x, y, \lambda) * (\mathbb{P}(x, y, \lambda) \rightarrow_* \mathbb{P}(y, z, \mu)) \geq \mathbb{P}(x, y, \lambda) * (\mathbb{P}(y, y, \lambda) \rightarrow_* \mathbb{P}(y, z, \mu)) \\
&\geq \mathbb{P}(x, y, \lambda) * (\mathbb{P}(y, y, \mu) \rightarrow_* \mathbb{P}(y, z, \mu))
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $\lambda > \mu$ iken

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(x, z, \lambda + \mu) &\geq \mathbb{P}(x, y, \mu) \wedge (\mathbb{P}(y, y, \lambda) \rightarrow_{\wedge} \mathbb{P}(y, z, \lambda)) \\
&\geq \mathbb{P}(x, y, \mu) \wedge (1 \rightarrow_{\wedge} \mathbb{P}(y, z, \lambda)) = \mathbb{P}(x, y, \mu) \wedge \mathbb{P}(y, z, \lambda) \\
&= \mathbb{P}(x, y, \mu) * (\mathbb{P}(x, y, \mu) \rightarrow_* \mathbb{P}(y, z, \lambda)) \geq \mathbb{P}(x, y, \mu) * (\mathbb{P}(y, y, \mu) \rightarrow_* \mathbb{P}(y, z, \lambda)) \\
&\geq \mathbb{P}(x, y, \mu) * (\mathbb{P}(y, y, \lambda) \rightarrow_* \mathbb{P}(y, z, \lambda))
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $\mathbb{P}, *$ için bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olmaktadır.

Teorem 7.2.1.7'den Denklem (7.1)'deki gibi tanımlanan $(w^{\mathbb{P}, f_*})^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümünün X üzerinde bir kısmi modüler pseudo-metrik olduğu görülmektedir.

7.2.2. Kısmi Modüler (Pseudo-)Metrikler Tarafından Üretilen Kısmi Modüler Ayırtedilemezlik Operatörleri

Teorem 7.2.2.1: X bir küme ve $*, f_*: I \rightarrow [0, \infty]$ şeklinde toplamsal üretece sahip olan sürekli bir t-norm olsun. Eğer $w^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi modüler pseudo-metrik ise $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken

$$\mathbb{P}_{w^p, f_*}(x, y, t) = f_*^{(-1)}(w_t^p(x, y)) \quad (7.4)$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{P}_{w^p, f_*}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü $*$ için bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörüdür.

İspat: w^p , X üzerinde bir kısmi modüler pseudo-metrik iken $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken

$$\mathbb{P}_{w^p, f_*}(x, y, t) = f_*^{(-1)}(w_t^p(x, y)) \quad \text{şeklinde tanımlanan } \mathbb{P}_{w^p, f_*}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$$

dönüşümünün (PME1)-(PME3) koşullarını sağladığını gösterelim.

(PME1) w^p , X üzerinde bir kısmi modüler pseudo-metrik olduğundan $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken $w_t^p(x, x) \leq w_t^p(x, y)$ dir. $f_*^{(-1)}$ fonksiyonu kesin azalan olduğundan her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $f_*^{(-1)}(w_t^p(x, x)) \geq f_*^{(-1)}(w_t^p(x, y))$ elde edilir. Bu ise $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken $\mathbb{P}_{w^p, f_*}(x, x, t) \geq \mathbb{P}_{w^p, f_*}(x, y, t)$ olduğunu ifade etmektedir.

(PME2) $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken

$$\mathbb{P}_{w^p, f_*}(x, y, t) = f_*^{(-1)}(w_t^p(x, y)) = f_*^{(-1)}(w_t^p(y, x)) = \mathbb{P}_{w^p, f_*}(y, x, t) \text{ dir.}$$

(PME3) $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{w^p, f_*}(x, y, t) * \left(\mathbb{P}_{w^p, f_*}(y, y, s) \rightarrow_* \mathbb{P}_{w^p, f_*}(y, z, s) \right) \\ &= f_*^{-1} \left(\min \left\{ f_*(0), f_* \left(\mathbb{P}_{w^p, f_*}(x, y, t) \right) + f_* \left(\mathbb{P}_{w^p, f_*}(y, y, s) \rightarrow_* \mathbb{P}_{w^p, f_*}(y, z, s) \right) \right\} \right) \\ &= f_*^{-1} \left(\min \left\{ f_*(0), f_* \left(\mathbb{P}_{w^p, f_*}(x, y, t) \right) + f_* \left(\mathbb{P}_{w^p, f_*}(y, z, s) \right) - f_* \left(\mathbb{P}_{w^p, f_*}(y, y, s) \right) \right\} \right) \\ &= f_*^{-1} \left(\min \{ f_*(0), w_t^p(x, y) + w_s^p(y, z) - w_s^p(y, y) \} \right) \end{aligned}$$

olmaktadır. w^p , X üzerinde kısmi modüler pseudo-metrik olduğundan

$$w_{t+s}^p(x, z) \leq w_t^p(x, y) + w_s^p(y, z) - w_s^p(y, y)$$

dir. $f_*^{(-1)}$ fonksiyonu kesin azalan olduğundan yukarıdaki eşitsizlikten

$$f_*^{(-1)}(w_{t+s}^p(x, z)) \geq f_*^{(-1)}(w_t^p(x, y) + w_s^p(y, z) - w_s^p(y, y))$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$f_*^{-1}(\min \{ f_*(0), w_t^p(x, y) + w_s^p(y, z) - w_s^p(y, y) \}) \leq \mathbb{P}_{w^p, f_*}(x, z, t + s)$$

bulunur ki bu ise

$$\mathbb{P}_{w^p, f_*}(x, y, t) * \left(\mathbb{P}_{w^p, f_*}(y, y, s) \rightarrow_* \mathbb{P}_{w^p, f_*}(y, z, s) \right) \leq \mathbb{P}_{w^p, f_*}(x, z, t + s)$$

olduğu anlamına gelmektedir.

Teorem 7.2.1.1 ve Teorem 7.2.2.1'den kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörlerinin bir karakterizasyonu aşağıdaki şekilde elde edilmektedir.

Sonuç 7.2.2.2: X bir küme, $\mathbb{P}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ bir dönüşüm ve $*, f_*: I \rightarrow [0, \infty]$ şeklinde toplamsal üretece sahip olan sürekli bir t-norm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) $\mathbb{P}, *$ için bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörüdür.
- (ii) Denklem (7.1)'de tanımlanan $(w^{\mathbb{P}, f_*})^p: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi modüler pseudo-metriktir.

Yukarıdaki sonuçta $*_{\mathcal{L}}$ t-normunu ele alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 7.2.2.3: X bir küme ve $\mathbb{P}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) $\mathbb{P}, *_{\mathcal{L}}$ için bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörüdür.
- (ii) $1 - \mathbb{P}$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi modüler pseudo-metriktir.

$\wedge$ t-normu toplamsal üretece sahip olmadığından yukarıdaki sonuçlarda verilen karakterizasyonlar $\wedge$ t-normu için ayrıca ele alınmaktadır ve aşağıdaki şekilde elde edilmektedir.

Sonuç 7.2.2.4: X bir küme ve $\mathbb{P}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) $\mathbb{P}, \wedge$ için güçlü bir (noktaları ayıran) kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörüdür.
- (ii) $1 - \mathbb{P}$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi modüler pseudo-ultrametrik (kısmi modüler ultrametrik)tir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2): $\mathbb{P}, \wedge$ için güçlü bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olsun. $1 - \mathbb{P}$ dönüşümünün (WP1)-(WP3) aksiyomlarını sağladığı kolaylıkla görülmektedir. Şimdi (WP4) aksiyomunu sağladığını gösterelim. $\mathbb{P}, \wedge$ için güçlü bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olduğundan $x, y, z \in X$ ve $t > 0$ iken

$$\mathbb{P}(x, z, t) \geq \mathbb{P}(x, y, t) \wedge (\mathbb{P}(y, y, t) \rightarrow_{\wedge} \mathbb{P}(y, z, t)) \geq \mathbb{P}(x, y, t) \wedge \mathbb{P}(y, z, t)$$

$$\Rightarrow 1 - \mathbb{P}(x, z, t) \leq 1 - (\mathbb{P}(x, y, t) \wedge \mathbb{P}(y, z, t)) = \max\{1 - \mathbb{P}(x, y, t), 1 - \mathbb{P}(y, z, t)\}$$

elde edilir. O halde $1 - \mathbb{P}$, X üzerinde bir kısmi modüler pseudo-ultrametrik.

(2) $\Rightarrow$ (1): $1 - \mathbb{P}$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi modüler pseudo-ultrametrik olsun. Bu durumda, $1 - \mathbb{P}$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi modüler pseudo-metrik. Sonuç 7.2.2.3'ten $\mathbb{P}$, $*_{\mathcal{L}}$ için bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörüdür. O halde, $\mathbb{P}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü (PME1) ve (PME2) aksiyomlarını sağlamaktadır. Şimdi, (PME3) aksiyomunun sağlandığını gösterelim. $1 - \mathbb{P}$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi modüler pseudo-ultrametrik olduğundan $x, y, z \in X$ ve $t > 0$ iken $1 - \mathbb{P}(x, z, t) \leq \max\{1 - \mathbb{P}(x, y, t), 1 - \mathbb{P}(y, z, t)\}$ olmaktadır. Buradan ise her $x, y, z \in X$ ve $t > 0$ için

$$(\mathbb{P}(y, y, t) \rightarrow_{\wedge} \mathbb{P}(y, z, t)) \wedge \mathbb{P}(x, y, t) \leq \mathbb{P}(x, y, t) \wedge \mathbb{P}(y, z, t) \leq \mathbb{P}(x, z, t)$$

sağlanır.

Teorem 7.2.2.1'de kısmi modüler pseudo-metrik yerine modüler pseudo-metrik alınırsa bu teoremin bir sonucu olarak Teorem 7.1.5 elde edilmektedir.

Sonuç 7.2.2.5: X bir küme ve $*, f_*: I \rightarrow [0, \infty]$ şeklinde toplamsal üretece sahip olan sürekli bir t-norm olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) Eğer $w^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde bir modüler pseudo-metrik ise Denklem (7.4)'de tanımlanan $\mathbb{P}_{w^p, f_*}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü $*$ için bir modüler ayırtedilemezlik operatörüdür.

(ii) Eğer $w^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde bir modüler metrik ise Denklem (7.4)'de tanımlanan $\mathbb{P}_{w^p, f_*}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü $*$ için noktaları ayıran bir modüler ayırtedilemezlik operatörüdür.

İspat: (i) Her modüler pseudo-metrik aynı zamanda bir kısmi modüler pseudo-metrik olduğundan, Teorem 7.2.2.1'den, Denklem (7.4)'de tanımlanan $\mathbb{P}_{w^p, f_*}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü $*$ için kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörüdür. Ayrıca, $x \in X$ ve $t > 0$ iken

$$\mathbb{P}_{w^p, f_*}(x, x, t) = f_*^{(-1)}(w_t^p(x, x)) = f_*^{-1}(\min\{f_*(0), 0\}) = f_*^{-1}(0) = 1$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\mathbb{P}_{w^p, f_*}$ $*$ için modüler ayırtedilemezlik operatörüdür.

(ii) (i)'den Denklem (7.4)'de tanımlanan $\mathbb{P}_{w^p, f_*}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümünün $*$ için bir modüler ayırtedilemezlik operatörü olduğu bilinmektedir. $x, y \in X$ ve $t > 0$ iken $\mathbb{P}_{w^p, f_*}(x, y, t) = 1$ olduğunu kabul edelim. Buradan,

$$f_*^{(-1)}(w_t^p(x, y)) = 1 \Rightarrow f_*^{-1}(\min\{f_*(0), w_t^p(x, y)\}) = 1$$

bulunur. Bu ise $w_t^p(x, y) < f_*(0)$ olduğunu ifade etmektedir. Çünkü aksi takdirde $0 = f_*^{-1}(\min\{f_*(0), w_t^p(x, y)\}) = 1$ çelişkisi elde edilmektedir. O halde, $f_*^{-1}(w_t^p(x, y)) = 1$ olup buradan ise $w_t^p(x, y) = 0$ bulunur. w^p , X üzerinde bir modüler metrik olduğundan $x = y$ elde edilir.

Aşağıdaki örnekte Teorem 7.2.2.1'de kısmi modüler pseudo-metrik yerine kısmi modüler metrik alındığında Denklem (7.4)'de tanımlanan $\mathbb{P}_{w^p, f_*}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümünün her zaman noktaları ayıran bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olmadığı gösterilmektedir.

Örnek 7.2.2.6: Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ ve $t > 0$ için $w_t^{pmax}(x, y) = \frac{\max\{x, y\}}{t}$ şeklinde tanımlanan $\mathbb{R}^+$ üzerindeki w^{pmax} kısmi modüler metriğini ve $*_{\mathcal{L}}$ sürekli t-normunu ele alalım. Teorem 7.2.2.1'den $\mathbb{P}_{w^{pmax}, f_{*\mathcal{L}}}(x, y, t) = f_{*\mathcal{L}}^{(-1)}(w_t^{pmax}(x, y))$ şeklinde tanımlanan $\mathbb{P}_{w^{pmax}, f_{*\mathcal{L}}}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümünün $*_{\mathcal{L}}$ için bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olduğu bilinmektedir. Ancak, $x = 4$, $y = 2$ ve $t = 1$ alındığında $\mathbb{P}_{w^{pmax}, f_{*\mathcal{L}}}(2, 4, 1) = f_{*\mathcal{L}}^{(-1)}(4) = 0$, $\mathbb{P}_{w^{pmax}, f_{*\mathcal{L}}}(2, 2, 1) = f_{*\mathcal{L}}^{(-1)}(2) = 0$ ve $\mathbb{P}_{w^{pmax}, f_{*\mathcal{L}}}(4, 4, 1) = f_{*\mathcal{L}}^{(-1)}(4) = 0$ elde edilir ki bu ise $\mathbb{P}_{w^{pmax}, f_{*\mathcal{L}}}$ 'nin noktaları ayıran bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olmadığını göstermektedir.

Önerme 7.2.2.7: X bir küme ve $*$, $f_*: I \rightarrow [0, \infty]$ şeklinde toplamsal üretece sahip olan sürekli bir t-norm olsun. Eğer $w^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $w_t^p(x, y) \leq f_*(0)$ koşulunu sağlayan bir kısmi modüler pseudo-metrik ise Denklem (7.4)'de tanımlanan $\mathbb{P}_{w^p, f_*}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü $*$ için noktaları ayıran bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörüdür.

Teorem 7.1.6’da modüler pseudo-metrik yerine kısmi modüler pseudo-metrik alınarak, aynı koşullar altında, her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $\tilde{w}_t^p(x, y) = \inf_{0 < \lambda < t} w_\lambda^t(x, y)$ olmak üzere $\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}(x, y, t) = f_*^{(-1)}(\tilde{w}_t^p(x, y))$ şeklinde tanımlanan $\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümünün, klasik modüler metrik versiyonunun aksine, bir GV-bulanık kısmi pseudo-metrik olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmektedir.

Örnek 7.2.2.8: Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ ve $t > 0$ için $w_t^{pmax}(x, y) = \frac{\max\{x, y\}}{t}$ şeklinde tanımlanan $\mathbb{R}^+$ üzerindeki w^{pmax} kısmi modüler metriğini ve $*_{\mathcal{L}}$ sürekli t-normunu ele alalım. $*_{\mathcal{L}}$ t-normunun toplamsal üretici $f_{*_{\mathcal{L}}}: I \rightarrow [0, \infty]$, $f_{*_{\mathcal{L}}}(x) = 1 - x$ şeklindedir. Ayrıca $f_{*_{\mathcal{L}}}$ ’nin pseudo-tersinin $f_{*_{\mathcal{L}}}^{(-1)}(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$ şeklinde olduğu kolaylıkla görülmektedir. Şimdi, $\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_{*_{\mathcal{L}}}}(x, y, t) = f_{*_{\mathcal{L}}}^{(-1)}\left(\inf_{0 < \lambda < t} \frac{\max\{x, y\}}{\lambda}\right)$ olarak tanımlanan $\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_{*_{\mathcal{L}}}}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümünün (FPKM4) aksiyomunu sağlamadığını gösterelim. $x = 1, y = 2, z = 10$ ve $s, t = 1$ alınırsa

$$\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_{*_{\mathcal{L}}}}(1, 1, 2) \rightarrow_{*_{\mathcal{L}}} \mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_{*_{\mathcal{L}}}}(1, 10, 2) = f_{*_{\mathcal{L}}}^{(-1)}\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow_{*_{\mathcal{L}}} f_{*_{\mathcal{L}}}^{(-1)}(5) = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_{*_{\mathcal{L}}}}(1, 1, 1) \rightarrow_{*_{\mathcal{L}}} \mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_{*_{\mathcal{L}}}}(1, 2, 1) = f_{*_{\mathcal{L}}}^{(-1)}(1) \rightarrow_{*_{\mathcal{L}}} f_{*_{\mathcal{L}}}^{(-1)}(2) = 1,$$

$$\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_{*_{\mathcal{L}}}}(2, 2, 1) \rightarrow_{*_{\mathcal{L}}} \mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_{*_{\mathcal{L}}}}(2, 10, 1) = f_{*_{\mathcal{L}}}^{(-1)}(2) \rightarrow_{*_{\mathcal{L}}} f_{*_{\mathcal{L}}}^{(-1)}(10) = 1$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_{*_{\mathcal{L}}}}(1, 1, 2) \rightarrow_{*_{\mathcal{L}}} \mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_{*_{\mathcal{L}}}}(1, 10, 2)$$

$$< \left(\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_{*_{\mathcal{L}}}}(1, 1, 1) \rightarrow_{*_{\mathcal{L}}} \mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_{*_{\mathcal{L}}}}(1, 2, 1) \right) *_{\mathcal{L}} \left(\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_{*_{\mathcal{L}}}}(2, 2, 1) \rightarrow_{*_{\mathcal{L}}} \mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_{*_{\mathcal{L}}}}(2, 10, 1) \right)$$

bulunur ki bu da $(\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_{*_{\mathcal{L}}}}, *_{\mathcal{L}})$ ikilisinin $\mathbb{R}^+$ üzerinde bir GV-bulanık kısmi metrik olmadığını göstermektedir.

Teorem 7.1.6’da modüler pseudo-metrik yerine Tanım 7.2.2 anlamında kısmi modüler pseudo-metrik alındığında, aynı koşullar altında, her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $\tilde{w}_t^p(x, y) = \inf_{0 < \lambda < t} w_\lambda^t(x, y)$ olmak üzere $\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}(x, y, t) = f_*^{(-1)}(\tilde{w}_t^p(x, y))$ şeklinde

tanımlanan $\mathbb{P}_{w^p, f_*}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümünün bir GV-bulanık kısmi pseudo-metrik olduğu aşağıdaki teoremdedir.

Teorem 7.2.2.9: X bir küme ve $*, f_*: I \rightarrow [0, \infty]$ şeklinde toplamsal üretece sahip olan sürekli bir t -norm olsun. Eğer $w^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde Tanım 7.2.2 anlamında bir kısmi modüler pseudo-metrik ise her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $\tilde{w}_t^p(x, y) = \inf_{0 < \lambda < t} w_\lambda^p(x, y)$ olmak üzere

$$\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}(x, y, t) = f_*^{(-1)}(\tilde{w}_t^p(x, y))$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}, *)$ ikilisi X üzerinde bir GV-bulanık kısmi pseudo-metrik.

İspat: Her $x \in X$ ve $s, t > 0$ için $w_t^p(x, x) = w_s^p(x, x)$ olduğundan $\tilde{w}_t^p(x, x) = \tilde{w}_s^p(x, x)$ sağlanır. Ayrıca her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $\tilde{w}_t^p(x, y) = \inf_{0 < \lambda < t} w_\lambda^p(x, y)$ şeklinde tanımlanan $\tilde{w}^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümünün de bir kısmi modüler pseudo-metrik olduğu kolaylıkla görülmektedir. Dahası her $x, y \in X$ için $\tilde{w}_{x,y}^p: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu sol-süreklidir. O halde, Teorem 7.2.2.1'den $\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}(x, y, t) = f_*^{(-1)}(\tilde{w}_t^p(x, y))$ şeklinde tanımlanan $\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü $*$ için bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörüdür. Dolayısıyla, $\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}$ (FPGV1) ve (FPKM3) aksiyomlarını sağlar. Şimdi, $\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}$ 'nin (FPKM4) aksiyomunu sağladığını gösterelim. $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ olsun. Buradan,

$$(\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}(x, x, t) \rightarrow_* \mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}(x, y, t)) * (\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}(y, y, s) \rightarrow_* \mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}(y, z, s))$$

$$= f_*^{-1} \left(\min \left\{ f_*(0), f_*(\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}(x, y, t)) - f_*(\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}(x, x, t)) \right\} \right. \\ \left. + f_*(\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}(y, z, s)) - f_*(\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}(y, y, s)) \right)$$

$$= f_*^{-1}(\min\{f_*(0), \tilde{w}_t^p(x, y) - \tilde{w}_t^p(x, x) + \tilde{w}_s^p(y, z) - \tilde{w}_s^p(y, y)\})$$

elde edilir. $\tilde{w}^p$, X üzerinde kısmi modüler pseudo-metrik olduğundan

$$\tilde{w}_{t+s}^p(x, z) - \tilde{w}_{t+s}^p(x, x) = \tilde{w}_{t+s}^p(x, z) - \tilde{w}_t^p(x, x)$$

$$\leq \tilde{w}_t^p(x, y) - \tilde{w}_t^p(x, x) + \tilde{w}_s^p(y, z) - \tilde{w}_s^p(y, y)$$

dir. Yukarıdaki eşitsizlikler kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}(x, x, t) \rightarrow_* \mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}(x, y, t) \right) * \left(\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}(y, y, s) \rightarrow_* \mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}(y, z, s) \right) \\ &= f_*^{-1}(\min\{f_*(0), \tilde{w}_t^p(x, y) - \tilde{w}_t^p(x, x) + \tilde{w}_s^p(y, z) - \tilde{w}_s^p(y, y)\}) \\ &\leq f_*^{-1}(\tilde{w}_{t+s}^p(x, z) - \tilde{w}_{t+s}^p(x, x)) = f_*^{-1}(\max\{0, \tilde{w}_{t+s}^p(x, z) - \tilde{w}_{t+s}^p(x, x)\}) \\ &= \mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}(x, x, t+s) \rightarrow_* \mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}(x, z, t+s) \end{aligned}$$

bulunur. Yani, $\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}$ (FPKM4) aksiyomunu sağlamaktadır. Ayrıca, $f_*^{(-1)}$ sürekli ve $\tilde{w}^p$ sol-sürekli olduğundan her $x, y \in X$ için $(\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*})_{x,y}: (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü sol-süreklidir. O halde, $(\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}, *)$ ikilisi X üzerinde bir GV-bulanık kısmi pseudo-metrikdir.

Önerme 7.2.2.7 ve Teorem 7.2.2.9'dan aşağıdaki sonuç elde edilmektedir.

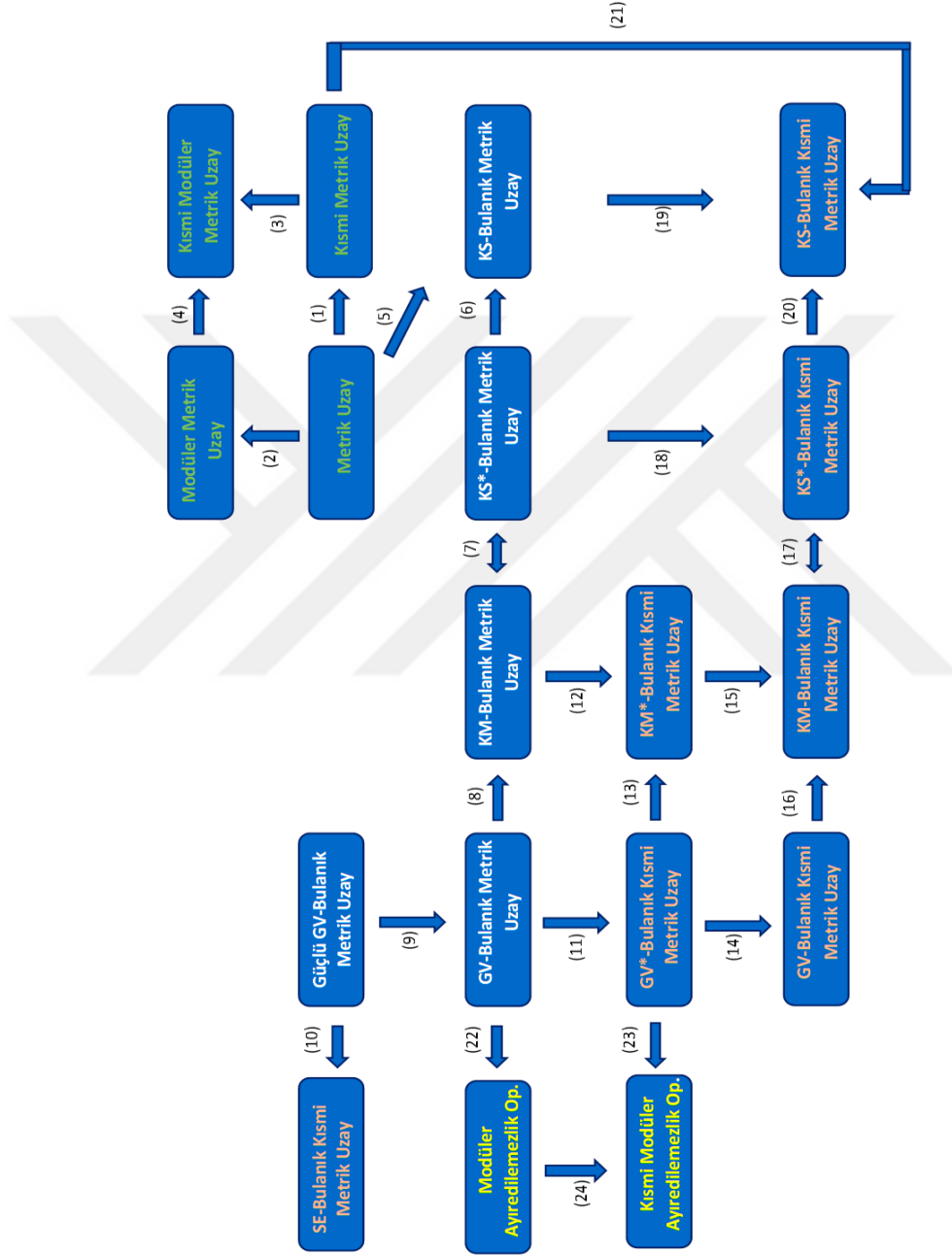
Sonuç 7.2.2.10: X bir küme ve $*, f_*: I \rightarrow [0, \infty]$ şeklinde toplamsal üretece sahip olan sürekli bir t-norm olsun. Eğer $w^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü X üzerinde Tanım 7.2.2 anlamında bir kısmi modüler metrik ise her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $\tilde{w}_t^p(x, y) = \inf_{0 < \lambda < t} w_\lambda^p(x, y)$ olmak üzere

$$\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}(x, y, t) = f_*^{(-1)}(\tilde{w}_t^p(x, y))$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(\mathbb{P}_{\tilde{w}^p, f_*}, *)$ ikilisi X üzerinde bir GV-bulanık kısmi metrikdir.

8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında sunulan kısmi (modüler) metrik, bulanık (kısmi) metrik yapıları ile (kısmi) modüler ayırtedilemezlik operatörleri arasındaki ilişkiler aşağıda gösterilmektedir.



Tablo 8.1. Kavramlararası İlişkiler Tablosu

Burada, R sürekli bir t -conorm olmak üzere KS^* -bulanık metrik uzayı ile $(X, \mathcal{A}, 0, R)$ yapısı; KS^* -bulanık kısmi metrik uzayı ile $(X, \mathcal{P}, 0, R)$ yapısı ifade edilmektedir. Ayrıca,

KM*-bulanık kısmi metrik uzay ile (FPKM4*) koşulunu sağlayan KM-bulanık metrik uzay ve GV*-bulanık kısmi metrik uzay ile (FPKM4*) koşulunu sağlayan GV-bulanık metrik uzay gösterilmektedir.

Yukarıdaki tabloda verilen kavramlar arasındaki ilişkiler aşığıdaki şekilde elde edilmektedir:

(1) (X, d) bir metrik uzay olmak üzere $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümünün Tanım 4.1.1'de verilen aksiyomları sağladığı açıktır. O halde her metrik uzay bir kısmi metrik uzaydır.

(2) (X, d) bir metrik uzay olmak üzere her $\lambda > 0$ ve $x, y \in X$ için $w(\lambda, x, y) = d(x, y)$ şeklinde tanımlanan $w: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü Tanım 7.1.1'de verilen aksiyomları sağladığından X üzerinde bir modüler metriktir.

(3) (X, p) bir kısmi metrik uzay olmak üzere her $\lambda > 0$ ve $x, y \in X$ için $w^p(\lambda, x, y) = p(x, y)$ şeklinde tanımlanan $w^p: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü Tanım 7.2.3'de verilen aksiyomları sağladığından X üzerinde bir kısmi modüler metriktir.

(4) w, X üzerinde bir modüler metrik olmak üzere $w: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümünün Tanım 7.2.3'de verilen aksiyomları sağladığı açıktır. Dolayısıyla, her modüler metrik bir kısmi modüler metriktir.

(5) (X, d) bir metrik uzay olmak üzere her $a, b \in I$ için $L(a, b) = 0$ ve $R(a, b) = \begin{cases} 0, & a = b = 0 \\ 1, & \text{diğer} \end{cases}$ alınırsa $\mathbb{R}^+ \subset G$ olduğundan (X, d, L, R) dörtlüsü bir KS-bulanık metrik uzay olmaktadır (Kaleva ve Seikkala, 1984).

(6) R sürekli bir t-conorm olmak üzere $(X, \mathbb{d}, 0, R)$ KS*-bulanık metrik uzay yapısı KS-bulanık metrik uzayların bir özel halidir.

(7) R sürekli bir t-conorm ve $M: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $t \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{d}: X \times X \rightarrow I^{\mathbb{R}}$ dönüşümü $\mathbb{d}_{xy}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - M(x, y, t), & t \geq 0 \end{cases}$ olarak tanımlansın. Bu durumda, her $a, b \in I$ için $R'(a, b) = 1 - R(1 - a, 1 - b)$ şeklinde tanımlanan $R': I \times I \rightarrow I$ sürekli bir t-norm olup (X, M, R') üçlüsünün bir KM-bulanık metrik uzay olması için gerek ve yeter koşul $(X, \mathbb{d}, 0, R)$ dörtlüsünün bir KS-bulanık metrik uzay olmasıdır (Roldán ve diğ., 2013).

(8) $(X, M, *)$ bir GV-bulanık metrik uzay olmak üzere $\overline{M}(x, y, t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ M(x, y, t), & t > 0 \end{cases}$

şeklinde tanımlanan $\overline{M}: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(X, \overline{M}, *)$ üçlüsü bir KM-bulanık metrik uzay olmaktadır.

(9) Güçlü GV-bulanık metrik uzaylar GV-bulanık metrik uzayların bir özel halidir.

(10) $(X, M, *)$ bir güçlü GV-bulanık metrik uzay olmak üzere $M: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü her $x \in X$ ve $t > 0$ için $M(x, x, t) = 1$ özelliğine sahip olduğundan Tanım 4.2.1’de verilen aksiyomları sağlar. Dolayısıyla, $(X, M, *)$ bir SE-bulanık kısmi metrik uzaydır.

(11) $(X, M, *)$ bir GV-bulanık metrik uzay olmak üzere $M: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü her $x \in X$ ve $t > 0$ için $M(x, x, t) = 1$ özelliğine sahip olduğundan (FPKM4*) aksiyomunu da sağlayan bir GV-bulanık kısmi metrik uzay olur. O halde, $(X, M, *)$ bir GV*-bulanık kısmi metrik uzaydır.

(12) $(X, M, *)$ bir KM-bulanık metrik uzay olmak üzere $M: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü her $x \in X$ ve $t > 0$ için $M(x, x, t) = 1$ özelliğine sahip olduğundan (FPKM4*) aksiyomunu da sağlayan bir KM-bulanık kısmi metrik uzay olur. O halde, $(X, M, *)$ bir KM*-bulanık kısmi metrik uzaydır.

(13) $(X, M, *)$ bir GV*-bulanık metrik uzay olmak üzere $\overline{M}(x, y, t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ M(x, y, t), & t > 0 \end{cases}$

şeklinde tanımlanan $\overline{M}: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile $(X, \overline{M}, *)$ üçlüsü bir KM*-bulanık metrik uzay olmaktadır.

(14) GV*-bulanık metrik uzaylar GV-bulanık metrik uzayların bir özel halidir.

(15) KM*-bulanık metrik uzaylar KM-bulanık metrik uzayların bir özel halidir.

(16) $(X, P, *)$ bir GV-bulanık kısmi metrik uzay olmak üzere

$\overline{P}(x, y, t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ P(x, y, t), & t > 0 \end{cases}$ şeklinde tanımlanan $\overline{P}: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü ile

$(X, \overline{P}, *)$ üçlüsü bir KM-bulanık kısmi metrik uzay olmaktadır.

(17) R sürekli bir t-conorm ve $P: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow I$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $t \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{p}: X \times X \rightarrow I^{\mathbb{R}}$ dönüşümü $\mathbb{p}_{xy}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - (P(x, x, t) \rightarrow_* P(x, y, t)), & t \geq 0 \end{cases}$ olarak tanımlansın. Bu durumda, her $a, b \in I$ için $R'(a, b) = 1 - R(1 - a, 1 - b)$ şeklinde tanımlanan $R': I \times I \rightarrow I$ sürekli bir t-norm olup (X, P, R') üçlüsünün bir KM-bulanık kısmi metrik uzay olması için gerek ve yeter koşul $(X, \mathbb{p}, 0, R)$ dörtlüsünün bir KS*-bulanık metrik uzay olmasıdır.

(18) R sürekli bir t-conorm olmak üzere $(X, \mathbb{d}, 0, R)$ KS*-bulanık metrik uzayı her $x \in X$ ve $t > 0$ için $\mathbb{d}(x, x)(t) = 0$ özelliğine sahip olduğundan Tanım 6.1.1'de verilen aksiyomlar sağlanır. O halde her KS*-bulanık metrik uzay bir KS*-bulanık kısmi metrik uzaydır.

(19) $(X, \mathbb{d}, L, R)$ KS-bulanık metrik uzayı her $x \in X$ ve $t > 0$ için $\mathbb{d}(x, x)(t) = 0$ özelliğine sahip olduğundan Tanım 6.1.1'de verilen aksiyomlar sağlanır. O halde her KS-bulanık metrik uzay bir KS-bulanık kısmi metrik uzaydır.

(20) R sürekli bir t-conorm olmak üzere $(X, \mathbb{p}, 0, R)$ KS*-bulanık kısmi metrik uzay yapısı KS-bulanık kısmi metrik uzayların bir özel halidir.

(21) (X, p) bir kısmi metrik uzay olmak üzere her $a, b \in I$ için $L(a, b) = 0$ ve $R(a, b) = \begin{cases} 0, & a = b = 0 \\ 1, & \text{diğer} \end{cases}$ alınırsa $\mathbb{R}^+ \subset G$ olduğundan (X, p, L, R) dörtlüsü bir KS-bulanık kısmi metrik uzay olmaktadır.

(22) $(X, M, *)$ bir GV-bulanık metrik uzay olmak üzere Tanım 3.2.1.2 ve Tanım 7.1.2'den $\mathbb{M}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümünün $*$ için bir modüler ayırtedilemezlik operatörü olduğu açıktır.

(23) $(X, P, *)$ (FPKM4*) koşulunu sağlayan bir GV-bulanık metrik uzay olmak üzere Tanım 5.1.2 ve Tanım 7.2.5'den $\mathbb{P}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümünün $*$ için bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörü olduğu görülmektedir.

(24) $\mathbb{M}: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow I$ dönüşümü $*$ için bir modüler ayırtedilemezlik operatörü olmak üzere Tanım 7.2.5'de verilen aksiyomları sağladığı açıktır. O halde $\mathbb{M}$, için bir kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörüdür.

Özetle bu çalışmada, bulanık metrik uzaylar ile bu uzayların bir genelleştirilmesi olan bulanık kısmi metrik uzaylar ve ayırtedilemezlik operatörleri üzerinde bütünlük oluşturacak şekilde aşağıdaki çalışmalar yapılmıştır:

1. KM-bulanık metrik uzaylar için Gregori ve Miñana (2021) tarafından verilmiş olan Banach daralma koşulunun farklı genellemeleri ve bu genellemelere ek olarak, rezidiyum operatörlerine dayalı yeni bir bulanık daralma dönüşümü elde edilmiştir. Ayrıca, bu yeni daralma koşulunu sağlayan dönüşümlerin, KM-bulanık metriğin tamlığı üzerinde herhangi bir ek koşul gerektirmeden ve Arşimet olmayan t-normları kullanılarak, bir tek sabit noktaya sahip olduğu gösterilmektedir.

2. Bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyon olarak adlandırılan, bir SE-bulanık metrikten başka bir SE-bulanık metrik üretmemize yardımcı olan fonksiyonlar sunularak bazı karakterizasyonları elde edilmiştir. Ayrıca bu fonksiyonların hangi koşullar altında bulanık kısmi metriğin ürettiği topolojiyi koruduğu çalışılmış ve bulanık metrik-koruyan fonksiyonlar ile bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyonlar arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Dahası bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyonların hangi koşullar altında daralma-koruyan fonksiyonlar olduğu gösterilmektedir.

3. GV-bulanık kısmi metrik uzaylarda yakınsaklık, Cauchy dizileri ve tamlık incelenerek KM-bulanık kısmi metrikten hangi koşul altında bir KM-bulanık metrik üretileceği gösterilmiştir. Bu sayede KM-bulanık metrik uzaylarda mevcut olan birçok sabit nokta teoreminin doğrudan KM-bulanık kısmi metrik uzaylar için genişletilebileceği elde edilmiş. Bunlara ek olarak, KM-bulanık metrik uzaylarda mevcut olmayan yeni bir daralma dönüşümü üzerinde çalışılarak bu dönüşümlerin sabit noktasının mevrut olması için gereken şartlar incelenmiştir.

4. Bulanık kısmi metrik uzaylara Kaleva-Seikkala anlamında bir bakış açısıyla kısmi metrik uzayların bir başka genelleştirilmesi olacak şekilde KS-bulanık kısmi metrik uzay olarak adlandırılan yeni bir bulanık kısmi metrik uzay yapısı tanımlanmıştır. Klasik metrik uzaylara benzer şekilde KS-bulanık (ağırlıklandırılmış (quasi-)) metrik uzay yapıları tanımlanarak KS-bulanık kısmi metrik uzaylar ile bu yapıların arasındaki ilişkiler çalışılmıştır. Ayrıca, KS-bulanık metrik uzaylarda yakınsaklık ve tamlık gibi temel kavramlar ile KS-bulanık metrikten klasik, Lowen bulanık ve bulanıklaştırılmış topolojiler üretildiği gösterilmiştir.

5. Literatürde mevcut olan kısmi modüler metrik kavramı, parametrelerdeki öz mesafe üzerindeki sınırlamanın kısmi metrik uzayların doğasına uygun olacak şekilde esnetilmesiyle, yeniden tanımlanmıştır. Ayrıca, kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörleri bazı özellikleri ile birlikte tanıtılmış ve bu iki kavram arasındaki ilişkiler çalışılmıştır. Bu yaklaşımla, kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörlerinden kısmi modüler metrikler oluşturmak ve bunun tersi olan kısmi modüler metriklerden de kısmi modüler ayırtedilemezlik operatörleri üretilebileceğine dair yöntemler sunulmuştur.

Bu çalışmalara ilave olarak, KM-bulanık kısmi metrik-koruyan fonksiyonlar tanıtılarak bazı özellikleri ile birlikte incelenebilir. Ayrıca, $KM(GV)$ -bulanık kısmi metrik uzaylarda kompaktlık, ayırma aksiyomları ve bu uzayların tamlaştırılması üzerine çalışmalar yapılabilir. Bunlara ek olarak, ayırtedilemezlik operatörlerinin bir araya gelmesiyle yani toplanmasıyla yeni ayırtedilemezlik operatörleri elde edilebilir ve dahası bu operatörlerin görüntü tanıma, görüntüde gürültü giderme ve karar verme problemlerine uygulamaları araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Alghamdi, M.A., Shahzad, N., Valero, O. (2012). On Fixed Point Theory in Partial Metric Spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2012(1), 175.
- Aldemir, B., Güner, E., Aydoğdu, E., Aygün, H. (2020). Some Fixed Point Theorems in Partial Fuzzy Metric Spaces. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 10(4), 2889-2900.
- Aydoğdu, E., Aldemir, B., Güner, E., Aygün, H. (2020). Some Properties of Partial Fuzzy Metric Topology. *International Conference on Intelligent and Fuzzy Systems*, Springer, Cham, 1267-1275.
- Aygün, H. (2000). α -Compactness in L-fuzzy Topological Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 116(3), 317-324.
- Aygün, H., Abbas, S.E. (2004). On Characterizations of Some Covering Properties in L-fuzzy Topological Spaces in Sostak's Sense. *Information Sciences*, 165(3-4), 221-233.
- Aygün, H., Abbas, S.E. (2007). Some Good Extensions of Compactness in Sostak's L-Fuzzy Topology. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 36(2), 115-125.
- Aygün, H., Kudri, S.R.T. (2000). Warner, M. W., Relative Compactness in L-fuzzy Topological Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 116(3), 311-316.
- Aygün, H., Warner, M.W. (1997). On Smooth L-fuzzy Topological Spaces. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 5, 321-338.
- Aygün, H., Warner, M.W., Kudri, S.R.T. (1999). Completely Induced L-fuzzy Topological Spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 103(3), 513-523.
- Aygünoğlu, A., Aydoğdu, E., Aygün, H. (2020). Construction of Fuzzy Topology by Using Fuzzy Metric, *Filomat*, 34(2), 433-441.
- Aygünoğlu, A., Aygün, H. (2009). Introduction to Fuzzy Soft Groups. *Computers and Mathematics with Applications*, 58, 1279-1286.
- Aygünoğlu, A., Aygün, H. (2021). Some Notes on Soft Topological Spaces. *Neural Computing and Applications*, 21(1), 113-119.
- Bibiloni-Femenias, M.M., Guerrero, J., Miñana, J.J., Valero, O. (2021). Indistinguishability Operators via Yager t-norms and their Applications to Swarm Multi-Agent Task Allocation. *Mathematics*, 9(2), 1-21.
- Borsík, J., Doboš, J. (1981). Functions Whose Composition with Every Metric is a Metric. *Math. Slovaca*, 31(1), 3-12.

- Bugajewski, D., Maćkowiak, P., Wang, R. (2020). On Compactness and Fixed Point Theorems in Partial Metric Spaces. *Fixed Point Theory*, 23, 163–178.
- Calvo Sánchez, T., Fuster-Parra, P., Valero, O. (2018). On the Problem of Aggregation of Partial T-Indistinguishability Operators. *International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, Springer, Cham, 207-218.
- Camarena, J.G., Gregori, V., Morillas, S., Sapena, A. (2008). Fast Detection and Removal of Impulsive Noise Using Peer Groups and Fuzzy Metrics. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 19(1), 20-29.
- Chang, C.L. (1968). Fuzzy Topological Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 24(1), 182-190.
- Chistyakov, V.V. (2006). Metric Modularity and their Application. *Doklady Mathematics, Nauka/Interperiodica*, 73(1), 32-35.
- Das, D., Narzary, S., Singh, Y.M., Khan, M.S., Sessa, S. (2022). Fixed Point Results on Partial Modular Metric Space. *Axioms*, 11(2), 1-18.
- Fuster-Parra, P., Martín, J., Recasens, J., Valero, O. (2020). T-Equivalences: The Metric Behavior Revisited. *Mathematics*, 8(4), 1-18.
- George, A., Veeramani, P. (1994). On Some Results in Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 64(3), 395-399.
- Grabiec, M. (1989). Fixed Points in Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 27, 385-389.
- Gregori, V., Miñana, J.J. (2021). A Banach Contraction Principle in Fuzzy Metric Spaces Defined by Means of t-conorms. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 115(3), 1-11.
- Gregori, V., Miñana, J.J., Miravet, D. (2019). Fuzzy Partial Metric Spaces. *International Journal of General Systems*, 48(3), 260-279.
- Gregori, V., Miñana, J.J., Miravet, D. (2020). A Duality Relationship Between Fuzzy Partial Metrics and Fuzzy Quasi-Metrics. *Mathematics*, 8, 1-16.
- Gregori, V., Miñana, J.J., Valero, O. (2018). A Technique for Fuzzifying Metric Spaces via Metric Preserving Mappings. *Fuzzy Sets and Systems*, 330, 1-15.
- Gregori, V., Morillas, S., Sapena, A. (2010). On a Class of Completable Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 161(16), 2193-2205.
- Gregori, V., Romaguera, S. (2000). Some Properties of Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 115(3), 485-489.

- Gregori, V., Romaguera, S. (2004). Characterizing Completable Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 144, 411-420.
- Gregori, V., Lopez-Crevillen, A., Morillas, S., Sapena, A. (2009). On Convergence in Fuzzy Metric Spaces. *Topology and its Applications*, 156(18), 3002-3006.
- Guerrero, J., Miñana, J.J., Valero, O., Oliver, G. (2017). Indistinguishability Operators Applied to Task Allocation Problems in Multi-Agent Aystems. *Applied Sciences*, 7, 1-16.
- Haghi, R.H., Rezapour, S., Shahzad, N. (2013). Be Careful on Partial Metric Fixed Point Results. *Topology and its Applications*, 160(3), 450-454.
- Han, S., Jianfeng, W., Dong, Z. (2017). Properties and Principles on Partial Metric Spaces. *Topology and its Applications*, 230, 77-98.
- Demir, I. (2021a). Some Soft Topological Properties and Fixed Soft Element Results in Soft Complex Valued Metric Spaces. *Turkish Journal of Mathematics*, 45(2), 971-987.
- Demir, I. (2021b). Fixed Point Theorems in Complex Valued Fuzzy b-Metric Spaces with Application to Integral Equations. *Miskolc Mathematical Notes*, 22(1), 153-171.
- Hosseinzadeh, H., Parvaneh, V. (2020). Meir-Keeler Type Contractive Mappings in Modular and Partial Modular Metric Spaces. *Asian-European Journal of Mathematics*, 13(5), 1-20.
- Kaleva, O., Seikkala, S. (1984). On Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 12(3), 215-229.
- Kaleva, O., Kauhanen, J. (2014). A Note on Compactness in a Fuzzy Metric Space. *Fuzzy Sets and Systems*, 238, 135-139.
- Klement, E.P., Mesiar, R., Pap, E. (2000). *Triangular Norms*. Netherlands: Springer.
- Kramosil, I., Michálek, J. (1975). Fuzzy Metrics and Statistical Metric Spaces. *Kybernetika*, 11(5), 336-344.
- Lowen, R. (1976). Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 56, 621-633.
- Mardones-Pérez, I., De Prada Vicente, M.A. (2015). Fuzzy Pseudometric Spaces vs Fuzzifying Structures. *Fuzzy Sets and Systems*, 267, 117-132.
- Matthews, S.G. (1994). Partial Metric Topology. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 728, 183-197.

- Mayor, G., Valero, O. (2019). Metric Aggregation Functions Revisited. *European Journal of Combinatorics*, 80, 390-400.
- Miñana, J.J., Shostak, A. (2016). Fuzzifying Topology Induced by a Strong Fuzzy Metric. *Fuzzy Sets and Systems*, 300, 24-39.
- Miñana, J.J., Valero, O. (2017). On Indistinguishability Operators, Fuzzy Metrics and Modular Metrics. *Axioms*, 6(4), 1-18.
- Miñana, J.J., Valero, O. (2021). Aggregation of Indistinguishability Fuzzy Relations Revisited. *Mathematics*, 9(12), 1-12.
- Mizumoto, M., Tanaka, J. (1979). Some Properties of Fuzzy Numbers. *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, 153–164.
- Mykhaylyuk, V., Myronyk, V. (2020). Compactness and Completeness in Partial Metric Spaces. *Topology and its Applications*, 270, 106925.
- Oltra, S., Valero, O. (2004). Banach's Fixed Point Theorem for Partial Metric Spaces. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 36, 17–26.
- Pazar Varol, B. (2022). Statistically Convergent Sequences in Intuitionistic Fuzzy Metric Spaces. *Axioms*, 11(4), 159.
- Pazar Varol, B., Aygün, H. (2012). Intuitionistic Fuzzy Metric Groups. *International Journal of Fuzzy Systems*, 14(3), 454-461.
- Pedraza, T., Rodríguez-López, J., Valero, O. (2021). Aggregation of Fuzzy Quasi-Metrics. *Information Sciences*, 581, 362-389.
- Pradera, A., Trillas, E., Castiñeira, E. (2000). On Distances Aggregation. *Proceedings of Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems International Conference*, Universidad Politécnica de Madrid Press, 2, 693-700.
- Ralevic, N.M., Delic, M., Nedovic, L. (2022). Aggregation of Fuzzy Metrics and its Application in Image Segmentation. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 19(3), 19-37.
- Recasens, J. (2010). *Indistinguishability Operators: Modelling Fuzzy Equalities and Fuzzy Equivalence Relations*. Berlin, Germany: Springer.
- Roldán, A., Martínez-Moreno, J., Roldán, C. (2013). On Interrelationships Between Fuzzy Metric Structures. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 10(2), 133-150.
- Romaguera, S. (2009). A Kirk Type Characterization of Completeness for Partial Metric Spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2010(1).

- Sedghi, S., Shobkolaei, N., Altun, I. (2015). Partial Fuzzy Metric Space and Some Fixed Point Results. *Communications in Mathematics*, 23(2), 131-142.
- Shahzad, N., Valero, O. (2013). On 0-Complete Partial Metric Spaces and Quantitative Fixed Point Techniques in Denotational Semantics. *Abstract and Applied Analysis*, 2013, 1-11.
- Shostak, A.P. (1985). On a fuzzy topological structure. *Proceedings of the 13th Winter School on Abstract Analysis*. Circolo Matematico di Palermo, 2(11), 89-103.
- Shostak, A. (1989). Two Decades of Fuzzy Topology: Basic Ideas, Notions and Results. *Russian Mathematical Surveys*, 44(6), 125-186.
- Trillas, E. (1982). Assaig Sobre Les Relacions D'indistingibilitat. *Actes del Primer Congress Catala de Logica Matematica*, Barcelona, Spain, 51-59.
- Valero, O. (2005). On Banach Fixed Point Theorems for Partial Metric Spaces. *Applied General Topology*, 6(2), 229-240.
- Ying, M. (1991). A New Approach to Fuzzy Topology (I). *Fuzzy Sets and Systems*, 39(3), 303-321.
- Ying-Ming, L., Mao-Kang, L. (1997). *Fuzzy Topology*. Singapore: World Scientific Publishing, 32-65.
- Yue, Y., Gu, M. (2014). Fuzzy Partial (Pseudo-)Metric Spaces. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 27(3), 1153-1159.
- Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

- Aldemir, B., **Güner, E.**, Aydoğdu, E., Aygün, H. (2020). Some Fixed Point Theorems in Partial Fuzzy Metric Spaces. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 10(4), 2889-2900.
- Aldemir, B., **Güner, E.**, Aydoğdu, E., Aygün, H. (2020). Fixed Point Results in Partial Fuzzy Metric Spaces. *4th International Marmara Sciences Congress*, Kocaeli, Turkey, 19-20 June 2020.
- Aldemir, B., **Güner, E.**, Aydoğdu, E., Aygün, H. (2021). Complex Spherical Fuzzy TOPSIS Method with Dombi Aggregation Operators. *1st International Symposium on Recent Advances in Fundamental and Applied Sciences*, Erzurum, Turkey, 10-12 September 2021.
- Aydoğdu, E., Aldemir, B., **Güner, E.**, Aygün, H. (2020). Some Properties of Partial Fuzzy Metric Topology. *International Conference on Intelligent and Fuzzy Systems*, Izmir, Turkey, 21-23 June 2020.
- Aydoğdu, E., Aldemir, B., **Güner, E.**, Aygün, H. (2022). COPRAS Method Based on Entropy Measure under Complex Spherical Fuzzy Information. *Studies on Scientific Developments in Geometry, Algebra, and Applied Mathematics*, Ankara, Turkey, 1-3 February 2022.
- Aydoğdu, E., **Güner, E.**, Aldemir, B., Aygün, H. (2023). Complex Spherical Fuzzy TOPSIS Based on Entropy. *Expert Systems with Applications*, 215, 119331.
- Aygün, H., **Güner, E.**, Miñana J. J., Valero, O. (2022). Fuzzy Partial Metric Spaces and Fixed Point Theorems. *Mathematics*, 10(17), 3092.
- Çetkin, V., **Güner, E.**, Aygün, H. (2018). On Fuzzy 2-Metric Spaces. *3rd International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences*, Girne, Cyprus, 4-6 May 2018.
- Çetkin, V., **Güner, E.**, Aygün, H. (2018). Intuitionistic Fuzzy 2-Metric Spaces: Fixed Point Theorems. *International Conference on Topology and its Applications*, Nafpaktos, Greece, 7-11 July 2018.
- Çetkin, V., **Güner, E.**, Aygün, H. (2020). On 2S-Metric Spaces. *Soft Computing*, 24(17), 12731-12742.
- Eroğlu, I., **Güner, E.**, Aygün, H., Valero, O. (2022). A Fixed Point Principle in Ordered Metric Spaces and Applications to Rational Type Contractions. *AIMS Mathematics*, 7(7), 13573-13594.
- Güner, E.**, Aldemir, B., Aydoğdu, E., Aygün, H. (2022). Spherical Fuzzy Sets: AHP-COPRAS Method Based on Hamacher Aggregation Operator. *Studies on Scientific*

Developments in Geometry, Algebra, and Applied Mathematics, Ankara, Turkey, 1-3 February 2022.

- Güner, E., Çetkin, V., Aygün, H. (2017).** On Some Fixed Point Theorems in Soft Metric Spaces. *International Conference on Mathematics and Engineering*, Istanbul, Turkey, 10-12 July 2017.
- Güner, E., Çetkin, V., Aygün, H. (2017).** Soft Fixed Point Theorems in terms of Soft Altering Distance Function. *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling*, Istanbul, Turkey, 3-7 July 2017.
- Güner, E., Çetkin, V., Aygün, H. (2018).** Soft Fixed Point Theorems in terms of Soft Altering Distance Function. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 9(3), 285-293.
- Güner, E., Çetkin, V., Aygün, H. (2018).** Fixed Point Results for $\tilde{A}$ -contractions in Soft Metric Spaces. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 36(2), 315-323.
- Güner, E., Çetkin, V., Aygün, H. (2018).** On Intuitionistic Fuzzy 2-Metric Spaces. *3rd International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences*, Girne, Cyprus, 4-6 May 2018.
- Güner, E., Çetkin, V., Aygün, H. (2018).** 2-Metric Spaces in the Soft Universe. *International Conference on Topology and its Applications*, Nafpaktos, Greece, 7-11 July 2018.
- Güner, E., Çetkin, V., Aygün, H. (2018).** 2-Metrik Uzaylarda Meir-Keeler Tipindeki Daralma Dönüşümleri, *International Marmara Science and Social Sciences Congress*, Kocaeli, Türkiye, 23-25 November 2018.
- Güner, E., Aygün, H. (2019).** Güçlü b_2 -Metrik Uzaylar, *14. Ankara Matematik Günleri Sempozyumu*, Ankara, Türkiye, 28-29 June 2019.
- Güner, E., Aygün, H. (2020).** Generalized Spherical Fuzzy Einstein Aggregation Operators: Application to Multi-Criteria Group Decision-Making Problems. *9th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications*, Skopje, North Macedonia, 25-28 August 2020.
- Güner, E., Aygün, H. (2020).** On 2-Fuzzy Metric Spaces. *International Conference on Intelligent and Fuzzy Systems*, Izmir, Turkey, 21-23 June 2020.
- Güner, E., Aygün, H. (2021).** On b_2 -Metric Spaces. *Konuralp Journal of Mathematics*, 9(1), 33-39.
- Güner, E., Aygün, H. (2022).** Spherical Fuzzy Soft Sets: Theory and Aggregation Operator with its Applications. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 19(2), 83-97.

- Güner, E., Aygün, H. (2022).** A New Approach to Fuzzy Partial Metric Spaces. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 51(6), 1563-1576
- Güner, E., Aygün, H. (2022).** Generalized Spherical Fuzzy Topological Spaces with Their Applications to the Multi-Criteria Decision-Making Problems. *6th International Conference on Mathematics "An Istanbul Meeting for World Mathematicians"*, Istanbul, Turkey, 21-24 June 2022.
- Güner, E., Aygün, H. (2022).** An Extension of TOPSIS Method to the Generalized Spherical Fuzzy Environment. *6th International Conference on Mathematics "An Istanbul Meeting for World Mathematicians"*, Istanbul, Turkey, 21-24 June 2022.
- Güner, E., Aygün, H. (2022).** Generalized Spherical Fuzzy Hamacher Aggregation Operators, *1st International Symposium on Current Developments in Fundamental and Applied Mathematics Sciences*, Erzurum, Turkey, 23-25 May 2022.
- Güner, E., Aygün, H. (2023).** On Some Triangular Inequalities and Applications in 2-Fuzzy Metric Spaces, *TWMS J. App. and Eng. Math.*, 13(2), 480-490.

ÖZGEÇMİŞ

İlk, orta ve lise öğrenimini İzmit'te tamamladı. 2010 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2015 yılında fakülte ve bölüm birincisi olarak mezun oldu. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2018 yılında yüksek lisansını tamamlayarak aynı enstitüde Doktora programına başladı. 2021-2022 akademik yılı güz döneminde İspanya Balearic Islands Üniversitesi'ne Erasmus öğrencisi olarak gitti. 2022-2023 akademik yılı güz döneminde ise aynı üniversitede TÜBİTAK 2214-A Yurt Dışı Doktora Sırası Araştırma Burs Programı desteği ile araştırmacı olarak bulundu. 2016 yılından beri Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.

