



B-LİFT EĞRİLERİ İÇİN BAZI KARAKTERİZASYONLAR

Anıl ALTINKAYA

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2023

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Anıl ALTINKAYA

26/07/2023

B-LİFT EĞRİLERİ İÇİN BAZI KARAKTERİZASYONLAR

(Doktora Tezi)

Anıl ALTINKAYA

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Temmuz 2023

ÖZET

Bu tez çalışmasının esas amacı, B-Lift eğrileri yardımıyla slant helis (ya da Darboux helis) ve genel helis arasındaki ilişkileri ortaya koymaktır. Bu bağlamda, ilk olarak, 3-boyutlu Öklid uzayında esas eğrinin her noktasındaki binormal vektörünün uç noktalarının birleştirilmesiyle elde edilen B-Lift eğrileri tanımlanmıştır ve Frenet operatörleri elde edilmiştir. Ayrıca, B-Lift eğrisinin Frenet operatörleri ile tabii lift eğrisinin Frenet operatörleri arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. Daha sonra, B-Lift eğrisinin teğet, normal ve binormal yüzeyleri olarak adlandırılan regle yüzeylerin geometrik değişmezleri ve tekillikleri incelenmiştir. Ardından, 3- boyutlu Lorentz uzayında B-Lift eğrisi tanımlanarak, Frenet vektörleri bulunmuştur. Dahası, esas eğrinin Bertrand eğrisi ve involüt eğrisinin Frenet vektörleri ile esas eğrinin B-Lift eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilerin spacelike veya timelike olma durumlarına göre karşılaştırılmıştır. Sonrasında, B-Lift eğrileri dual uzayda tanımlanmıştır ve esas eğrinin slant helis (ya da Darboux helis) olma durumuna göre B-Lift eğrisinin durumu incelenmiştir. Son olarak ise, uzaysal kuaterniyonik B-Lift eğrisi tanımlanarak, esas eğrinin slant helis olması için gerekli koşullar incelenmiştir ve kuaterniyonik slant helisler ve kuaterniyonik genel helisler arasındaki ilişkiler B-Lift eğrisi yardımıyla keşfedilmiştir.

Bilim Kodu : 20402
Anahtar Kelimeler : B-lift eğrisi, kuaterniyon, dual uzay, lorentz uzay, Öklid uzay, regle yüzey.
Sayfa Adedi : 77
Danışman : Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

SOME CHARACTERIZATIONS FOR THE B-LIFT CURVES

(Ph. D. Thesis)

Amr ALTINKAYA

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2023

ABSTRACT

The main purpose of this thesis is to reveal the relationships between the slant helix (or Darboux helix) and the general helix with the help of B-Lift curves. In this context, firstly, B-Lift curves obtained by combining the endpoints of the binormal vector at each point of the principal curve in 3-dimensional Euclidean space are defined and Frenet operators are obtained. In addition, the relations between the Frenet operators of the B-Lift curve and the Frenet operators of the natural lift curve are obtained. After that, geometric invariants and singularities of ruled surfaces, which are called tangential, normal and binormal surfaces of the B-Lift curve are investigated. Then, Frenet vectors are found by defining the B-Lift curve in 3-dimensional Lorentz space. Moreover, the Bertrand curve and the involute curve are compared with the B-Lift curve. Afterwards, B-Lift curves are defined in dual space and the state of the B-Lift curve is examined according to whether the main curve is a slant helix (or a Darboux helix). Finally, the spatial quaternionic B-Lift curve are defined, the conditions necessary for the principal curve to be slant helix are investigated, and the relationships between the quaternionic slant helices and the quaternionic general helices are discovered with the help of the B-Lift curve.

Science Code : 20402

Keywords : B-lift curve, quaternion, dual space, lorentzian space, Euclidean space, ruled surface.

Number of pages : 77

Supervisor : Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

TEŞEKKÜR

Tezimin her aşamasında bilgisinden ve tecrübesinden faydalandığım, akademik ve insani görgüsüne hayran kaldığım, bana her anlamda vizyon katan değerli hocam Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN'a, çalışmam boyunca vermiş oldukları kıymetli katkılarından dolayı tez izleme komitesi üyeleri hocalarım Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ ve Prof. Dr. Mustafa ÖZKAN'a, beraber çalışma fırsatı bulduğum ve her zaman fikirlerinden faydalandığım Dr. Öğr. Üyesi Emel KARACA'ya, beni yetiştirip bugünlere gelmemi sağlayan sevgili annem Naciye ALTINKAYA ve sevgili babam Mustafa ALTINKAYA'ya, sevgisi, anlayışı ve desteğiyle daima yanımda olan en büyük şansım, biricik eşim Rümeysa Sacide ALTINKAYA'ya çok teşekkür ederim.

Doktora eğitimim boyunca 2211-A Yurt İçi Genel Doktora Burs Programı ile maddi olarak destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumuna (TÜBİTAK) teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	x
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR.....	5
2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar	5
2.2. Lorentz Uzayında Temel Kavramlar	15
2.3. Dual Uzayda Temel Kavramlar	24
3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA B-LİFT EĞRİLERİ	29
3.1. $\mathbb{R}^3$ Uzayında B-Lift Eğrileri İçin Karakterizasyonlar	29
3.2. B-Lift Eğrileri ve Tabii Lift Eğrileri Arasındaki İlişkiler	34
4. B-LİFT EĞRİLERİ VE ÜRETTİKLERİ REGLE YÜZEYLER	37
4.1. B-Lift Eğrisinin Ürettiği Teğet Yüzey	37
4.2. B-Lift Eğrisinin Ürettiği Normal Yüzey	39
4.3. B-Lift Eğrisinin Ürettiği Binormal Yüzey	41
5. 3-BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA B-LİFT EĞRİLERİ	47
5.1. $\mathbb{R}_1^3$ Uzayında B-Lift Eğrileri İçin Karakterizasyonlar	47
5.2. Bertrand Eğrileri ve B-Lift Eğrileri Arasındaki İlişkiler	50
5.3. İnvolüt Eğrileri ve B-Lift Eğrileri Arasındaki İlişkiler	55
6. DUAL UZAYDA B-LİFT EĞRİLERİ.....	59
6.1. $\mathbb{D}^3$ Uzayında B-Lift Eğrileri İçin Karakterizasyonlar	59

	Sayfa
7. KUATERNİYONİK B-LİFT EĞRİLERİ	65
7.1. Kuaterniyonik B-Lift Eğrileri İçin Karakterizasyonlar	65
8. SONUÇ VE ÖNERİLER	69
KAYNAKLAR	71
ÖZGEÇMİŞ	75



ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1. Slant helis eğrisi $\gamma(s)$	33
Şekil 3.2. B-Lift eğrisi $\gamma_B(s)$	34
Şekil 4.1. Soldan sağa sırasıyla ϕ_{T_B} , ϕ_{N_B} ve ϕ_{B_B} regle yüzeyleri	44



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^3$	Üç boyutlu reel uzay
$\mathbb{R}_1^3$	Lorentz uzay
$\mathbb{D}$	Dual uzay
$\mathbb{D}^3$	$\mathbb{D}$ -Modül
$\gamma(s)$	Eğrinin parametrik gösterimi
$\bar{\gamma}(s)$	Tabii lift eğrisi
$\gamma_B(s)$	B-Lift eğrisi
$\langle, \rangle$	$\mathbb{R}^3$ de iç çarpım
$\ , \ $	$\mathbb{R}^3$ de norm
$\mathbf{k}_g$	Jeodezik eğrilik
$\mathbf{k}_n$	Normal eğrilik
τ_g	Jeodezik burulma
$\times$	$\mathbb{R}^3$ de vektörel çarpım
$\langle, \rangle_{\mathbb{L}}$	Lorenziyen iç çarpım
$\times_{\mathbb{L}}$	Lorenziyen vektörel çarpım
$\mathbb{H}$	Kuaterniyonlar kümesi

Kısaltmalar

Açıklamalar

bkz.	Bakınız
ve ark.	ve arkadaşları

1. GİRİŞ

Eğriler teorisi diferensiyel geometri, kinematik, fizik, bilgisayar bilimi vb. alanlarda önemli bir rol oynamaktadır. En çok bilinen eğrilerden biri de tabii lift eğrisidir. Tabii lift eğrisinin tanımına ilk olarak Thorpe'un "Elementary Topics in Differential Geometry" kitabında rastlanmıştır, bkz. [1]. Tanıma göre, bir eğrinin birim teğet vektörlerinin uç noktaları birleştirilerek tabii lift eğrisi oluşturulmuştur. Tabii lift eğrileri birçok matematikçinin dikkatini çekmiştir. Bu çalışmalardan bazıları [2–4]'dür. [2]'de araştırmacılar, ana eğrinin Frenet operatörleri cinsinden tabii lift eğrisinin Frenet operatörlerini tanıtmışlardır. Eğriler teorisine ek olarak, yüzey teorisi diferansiyel geometride büyük bir yere sahiptir. Bu yüzeylerin en önemlilerinden biri de regle yüzeydir. Regle yüzey, bir doğrunun bir eğri boyunca hareketi ile oluşan yüzeylerdir [5]. Geometrik değişmezlerinin incelenmesi sebebiyle, bu yüzeylerin yorumlanması birçok yazarın ilgisini cezbetmiştir [6–11]. E. Ergün ve M. Çalışkan [11] bir eğrinin tabii liftini dayanak eğrisi olarak kabul ederek regle yüzeyler oluşturmuş ve bu yüzeyleri karakterize etmişlerdir.

3-boyutlu Öklid uzayında tanımlanan bir eğri eğrilik ve burulmasının durumuna göre karakterize edilmektedir. Bu karakterizasyonu yapmak için, iki Fransız matematikçi J. F. Frenet (1847) ve J. A. Serret (1851) tarafından bağımsız olarak keşfedilen Frenet-Serret formülleri önemli bir rol oynamaktadır. Bu formüller, uzay eğrilerinin incelenmesi için Frenet çerçevesini oluşturan üç vektör alanının türevlerini $\{T, N, B\}$ vektör alanları cinsinden ifade etmek için eğrilik ve burulma kullanan denklemlerdir. Örneğin bir doğrunun eğriliği yoktur (yani $\kappa=0$) ve düzlemsel bir eğrinin burulması yoktur (yani $\tau=0$) [5]. Bir eğrinin teğet vektörü sabit bir doğruyla sabit açı yapıyorsa bu eğriye genel helis denilmektedir [5]. 1802 yılında M. A. Lancret, genel heliste eğrilikler oranının eğri boyunca sabit olduğunu kanıtlamıştır [12]. Birçok yazar [6, 13–17] helisler ve farklı tipte helisler hakkında makaleler yazmıştır. S. Izumiya ve N. Takeuchi [6] eğrinin normal vektörünü sabit bir doğruyla sabit açı yapıyorsa bu eğriyi slant helis olarak adlandırmıştır. Sonrasında L. Kula, N. Ekmekci, Y. Yaylı, K. İlarslan [16] slant helislerin bazı karakterizasyonlarını verdi ve $\mathbb{R}^3$ 'de slant helislerin Frenet operatörlerini tanıtmıştır. E. Zıplar, A. Şenol ve Y. Yaylı [17] bir eğrinin Darboux vektörünün sabit bir doğru ile sabit bir

açı yapıyorsa Darboux helis adını verdikleri eğriyi tanımlamışlardır. Ayrıca slant helisler ile Darboux helisler arasındaki ilişkileri de vermişlerdir.

Riemann geometrisi teorik fiziğin gelişmesinde önemli bir rol oynamıştır. Ancak özel ve genel göreliliği açıklamada yetersiz kalmıştır. Böylece düzgün bir manifold üzerinde bir metrik ile tanımlanan Lorenziyen geometri ortaya çıkmıştır. Uzun yıllar boyunca Riemann geometrisi ve Lorenziyen geometri ayrı ayrı geliştirilmiştir. Bu alan, 20. yüzyılda Einstein'ın özel ve genel görelilik teorilerinde kullanılmasıyla popüleritesini artırmış ve dolayısıyla gelişme fırsatı bulmuştur. Daha yakın zamanlarda da fizikçilerin artan ilgisi ile bu fark tersine dönmüş ve ortak çalışmalar yapılmıştır. Günümüzde ister teorik, ister uygulamalı olsun bilimin her alanında kullanılan bir yapı haline gelmiştir. Lorenziyen uzay, Öklid uzayı ile farklılıklara ve benzerliklere sahiptir. Bu uzaydaki eğriler, uzaysal (spacelike), zamansal (timelike) veya ışıksal (null) gibi Lorenziyen karakterlere sahiptir [5].

Bir uzay eğrisi parametreye bağlı olarak tanımlanabilir ve eğrinin Frenet operatörleri karakterize edilebilir. Uzayda iki eğrinin karşılıklı noktalarında eğrilerin Frenet vektörleri arasında ilişkiler kurularak bazı özel eğri tanımları verilmiştir. Bertrand eğrileri ve involüt-evolüt eğrileri bu eğrilerden bazılarıdır. Bertrand eğrisinin ortaya çıkışı, 1845'te Venant tarafından ortaya atılan problemten kaynaklanmaktadır. Venant, bir eğrinin asli normalleri üzerinde üretilen bir yüzey üzerinde normalleri lineer olarak bağımlı olan başka bir eğri olup olmadığı sorununu ortaya koymuştur. Bertrand bu problemi 1850 yılında çözmüştür. 2018'de N. Ekmekci ve K. İllarslan Bertrand eğrileri üzerine temel bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmada Lorentzian uzayında Bertrand eğrilerini karakterize etmişlerdir [18]. Bir eğrinin involütü, genellikle, birim hızlı bir eğrinin teğet vektörlerinin dik yörüngeleri olarak adlandırılır. 1668'de, involüt eğriler fikri ilk olarak C. Huygens tarafından optik çalışmaları sırasında keşfedildi. Daha sonra Millman ve Parker (1977) [19] ve Hacısalihoğlu (1983) [20] involüt eğriler üzerine bazı temel teorem ve sonuçları vermişlerdir. M. Çalışkan ve M. Bilici tarafından 2002 yılında involüt-evolüt eğrileri üzerine temel bir çalışma incelenmiştir [21]. Bu çalışmada, esas eğrinin Frenet operatörleri ile involüt eğrisinin Frenet operatörleri arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır. Ayrıca 2009'da yazarlar [22] involüt eğriler için, Lorentziyen uzayda null olmayan eğrilerin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulma ile ilgili bazı önemli sonuçlar ortaya koymuşlardır.

Dual sayılar, W. K. Clifford (1843-1879) tarafından geometrik araştırmaları için bir araç olarak ortaya atıldı. Sonrasında E. Study [23] dual sayı ve dual vektörü, çizgi geometrisi ve kinematik çalışmalarında sistematik olarak uyguladı ve birim dual kürenin noktaları ile $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğruların arasında birebir eşleme olduğunu kanıtladı. Birçok matematikçi dual uzayda eğriler üzerine çalışmalar yapmıştır. Dual uzayda involüt eğriler üzerine temel bir alışma S. şenyurt, M. Bilici ve M. Çalışkan tarafından incelenmiştir [24]. Bu çalışmada esas eğrinin Frenet operatörleri ile involüt eğrinin Frenet operatörleri arasındaki ilişkiyi ortaya koymuşlardır. S. Özkaldı, K. İlarıslan ve Y. Yaylı, bir eğrinin Mannheim çiftini $\mathbb{D}^3$ dual uzayda tanımlamışlar ve aynı uzayda eğrinin Mannheim ifti için gerekli karakterizasyonları elde etmişlerdir [25]. Sonrasında, M. A. Güngör ve M. Tosun dual uzayda esas eğri ve onun Mannheim çiftinin eğrilik ve burulması arasındaki ilişkileri kanıtlamışlardır [26].

Literatürde, kuaterniyonlar ilk olarak İrlandalı matematikçi W. R. Hamilton [27] tarafından karmaşık sayıları genelleştirmek için tanımlanmıştır. Cebirsel yapısına bakıldığında, kuaterniyonlar, tanımlanan çarpma işlemine göre değişmeli olmamaları nedeniyle karmaşık sayılardan farklıdır. Günümüz dünyasında kuaterniyonlar dönme hareketinin temsilinde çok kullanılışlıdır, bu nedenle robotik, DNA yapısının analizi, astrofizik, navigasyon sistemleri vb. alanlarda uygulamalara sahiptir. 1985 yılında, K. Bharathi ve M. Nagaraj [28], kuaterniyonik eğriyi 3-boyutlu ve 4-boyutlu uzaylarda tanıtmışlar ve bu eğrinin Frenet aparatlarını vermişlerdir. Sonrasında kuaterniyonik eğrilerin diferensiyel geometrisi birçok yazarın ilgisini çekmiştir. Bu çalışmalardan bazıları [29–37]’dur. [30]’da Kocayiğit ve Pekacar, $\mathbb{E}^3$ ve $\mathbb{E}^4$ ’deki kuaterniyonik slant helislerin karakterizasyonlarını incelemişlerdir. [31]’de şahiner, uzaysal kuaterniyonik slant helislerin Frenet çerçevelerini keşfetmiştir. [35]’de, şenyurt ve ark., Smarandache eğrisinin birim Darboux vektörüne ve normal vektörüne göre uzaysal kuaterniyonik involüt eğrisinin esas eğrililiğini ve burulmasını hesaplamışlardır.

Bu tez sekiz bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde giriş kısmına yer verilmiştir.

İkinci bölümde, Öklid uzayında, Lorentz uzayında ve dual uzaydaki temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında B-Lift eğrileri tanımlanmıştır. Sonrasında, B-Lift eğrisinin Frenet vektörleri bulunarak, B-Lift eğrisi ile tabii lift eğrisinin Frenet vektörleri arasındaki eşitlikler elde edilmiştir. Ayrıca esas eğrinin slant helis (ya da Darboux helis) olma durumuna göre, B-Lift eğrisi karakterize edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise B-Lift eğrisinin teğet, normal ve binormal yüzeyi olarak adlandırılan regle yüzeyler tanıtılmıştır. Ek olarak, bu regle yüzeylerin geometrik değişmezleri ve tekillikleri incelenmiştir. Ayrıca, bu regle yüzeylerin Darboux alanı oluşturularak, B-Lift eğrisinin jeodezik eğri, asimtotik eğri ve eğrilik çizgisi olma durumuna değinilmiştir.

Beşinci bölüm 3-boyutlu Lorentz uzayında B-Lift eğrilerinin incelenmesi için ayrılmıştır. Bunun yanında, bir eğrinin Bertrand eğrisi ve B-Lift eğrisinin Frenet vektör alanları arasındaki eşitlikler ile bir eğrinin involüt eğrisi ve B-Lift eğrisinin Frenet vektör alanları arasındaki eşitlikler elde edilmiştir.

Altıncı bölümde, ilk olarak, dual uzayda B-Lift eğrileri tanımlanmıştır. Ardından dual uzayda verilen bir eğrinin B-Lift eğrisinin Frenet operatörleri bulunmuştur. Sonrasında, eğrinin dual slant helis ya da dual Darboux helis olma durumuna göre esas eğrinin B-Lift eğrisinin dual genel helis olmasının gerek ve yeter şart olduğu ispatlanmıştır.

Yedinci bölümde ise birim hızlı uzaysal kuaterniyonik bir eğrinin B-Lifti olarak adlandırılan eğri tanımlanmıştır. Daha sonra, B-Lift eğrisinin Frenet operatörleri, esas eğrinin Frenet operatörleri cinsinden ifade edilmiştir. Son olarak, birim hızlı uzaysal kuaterniyonik eğrinin slant helis olması için uzaysal kuaterniyonik B-Lift eğrisinin genel helis olmasının gerek ve yeter şart olduğu gösterilmiştir.

Son olarak, sekizinci bölümde sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde, diferensiyel geometrideki bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca, tabii lift eğrisi, genel helis, Darboux helis, involüt-evolüt eğriler, Bertrand eğrileri gibi temel kavramlar tanıtılacaktır. İlk olarak, Öklid uzayında temel kavramları verelim.

2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

2.1.1. Tanım

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{A}=(a_1, a_2, a_3)$ vektörü verilsin. $\|\vec{A}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ eşitliğiyle tanımlanan fonksiyona norm fonksiyonu (A 'nın normu) denir. Eğer $\|\vec{A}\| = 1$ ise $\vec{A}$ vektörüne $\mathbb{R}^3$ de birim vektör denir [38].

2.1.2. Tanım

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörleri verilsin. $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ şeklinde tanımlanan fonksiyona $\mathbb{R}^3$ de iç çarpım fonksiyonu denir [38].

2.1.3. Tanım

$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametre eğrisi verilsin. Eğer $\gamma'(s) \neq 0$, $s \in I$ ise, γ eğrisine regüler eğri denir [38].

2.1.4. Tanım

$\mathbb{R}^3$ uzayındaki γ eğrisi için $\gamma'(s) = 1$ oluyorsa γ eğrisine birim hızlı eğri denir [38].

2.1.5. Tanım

$\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı γ eğrisi verilsin. $\{T(s), N(s), B(s)\}$, γ eğrisinin Frenet-Serret alanları olarak adlandırılır, burada $T(s) = \gamma'(s)$, $\gamma(s)$ eğrisinin birim tanjant vektörüdür, birim asli normal ve binormal vektörleri de sırasıyla $N(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$ ve $B(s) = T(s) \times N(s)$ şeklindedir [38].

2.1.6. Tanım

$\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı γ eğrisinin Frenet-Serret formülleri aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s)N(s), \\ N'(s) &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s), \\ B'(s) &= -\tau(s)N(s), \end{aligned}$$

burada $\kappa(s) = \|\gamma''(s)\|$ ve $\tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$ sırasıyla $\gamma(s)$ eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır [38].

2.1.7. Tanım

$M \subset \mathbb{R}^3$ bir hiperyüzey olmak üzere $\gamma : I \rightarrow M$ birim hızlı eğrisi verilsin. O halde γ eğrisinin integral eğrisi

$$\gamma'(s) = X(\gamma(s))$$

olarak tanımlanır, burada X , M üzerinde diferensiyellenebilir bir vektör alanıdır [2].

2.1.8. Tanım

$\gamma : I \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun. O halde γ eğrisinin tabii lifti $\bar{\gamma} : I \rightarrow TM$ aşağıdaki şekilde tanımlanır [2]:

$$\bar{\gamma}(s) = (\gamma(s), \gamma'(s)) = \gamma'(s)|_{\gamma(s)}.$$

Bu nedenle,

$$\frac{d\bar{\gamma}(s)}{ds} = \frac{d}{ds}(\gamma'(s))|_{\gamma(s)} = D_{\gamma'(s)}\gamma'(s)$$

yazabiliriz. Burada D , $\mathbb{R}^3$ uzayında Levi-Civita konneksiyonudur.

2.1.9. Teorem

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\gamma(s)$ eğrisinin tabii lifti $\bar{\gamma}(s)$ olsun. O halde, $\gamma(s)$ ve $\bar{\gamma}(s)$ eğrilerinin Frenet vektör alanları arasında aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$\begin{aligned}\bar{T}(s) &= N(s), \\ \bar{N}(s) &= -\frac{\kappa(s)}{\|W(s)\|}T(s) + \frac{\tau(s)}{\|W(s)\|}B(s), \\ \bar{B}(s) &= \frac{\tau(s)}{\|W(s)\|}T(s) + \frac{\kappa(s)}{\|W(s)\|}B(s),\end{aligned}$$

burada $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\{\bar{T}(s), \bar{N}(s), \bar{B}(s)\}$ sırasıyla esas eğrinin ve tabii lift eğrisinin Frenet vektör alanlarıdır. W Darboux vektörü $W = \tau T + \kappa B$ şeklindedir. Ayrıca, $\kappa = \|W\| \cos \varphi$ ve $\tau = \|W\| \sin \varphi$, $\gamma(s)$ eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır. Son olarak φ , $\gamma(s)$ eğrisinin Darboux vektörü ve binormal vektörü arasındaki açıdır [2].

2.1.10. Tanım

γ regüler eğrisinin tabii lifti $\bar{\gamma}(s)$ olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\bar{\kappa}(s) = \frac{\kappa^2 + \tau^2}{\|W\|}, \bar{\tau}(s) = \frac{-\kappa'(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau'(s)}{\|W\|^2}$$

burada $\bar{\kappa}$ ve $\bar{\tau}$ sırasıyla $\bar{\gamma}(s)$ eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır [2].

2.1.11. Önerme

$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi κ eğriligi ve τ burulmasıyla verilsin. γ eğrisi genel helistir gerek ve yeter şart $\frac{\tau}{\kappa}$ oranı sabittir [6].

2.1.12. Önerme

$\kappa \neq 0$ ile birlikte $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi verilsin. γ , slant helistir gerek ve yeter şart

$$\sigma(s) = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s)$$

sabit bir fonksiyondur [6].

2.1.13. Teorem

$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi Darboux helistir gerek ve yeter şart

$$\sigma^*(s) = \frac{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}{\kappa^2} \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s)}$$

sabit bir fonksiyondur [17].

2.1.14. Teorem

$\frac{\tau}{\kappa}$ oranı sabit olmama şartıyla, $\mathbb{R}^3$ uzayında γ eğrisi verilsin. O halde γ eğrisi slant helistir gerek ve yeter şart γ eğrisi Darboux helistir [17].

2.1.15. Tanım

$M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi verilsin. M yüzeyinin her noktasında, $\mathbb{R}^3$ uzayının M yüzeyinde kalan bir doğrusu varsa M yüzeyine bir regle yüzey denir ve aşağıdaki parametrizasyonla verilir:

$$\phi(s, v) = \gamma(s) + v\omega(s),$$

burada $\gamma(s)$ dayanak eğrisi, $\omega(s)$ de birim doğrultman vektörü ifade etmektedir [20].

2.1.16. Tanım

$\phi(s, v)$ regle yüzeyinin komşu iki doğrultmanının orta dikmesinin doğrultmanlar üzerindeki ayaklarına striksiyon noktası denir [20].

2.1.17. Tanım

$\phi(s, v)$ regle yüzeyinin ana doğrusu dayanak eğrisini oluştururken striksiyon noktalarının geometrik yerine striksiyon eğrisi denir ve striksiyon eğrisinin yer vektörü aşağıdaki şekilde tanımlanır [20]:

$$b(s) = \gamma(s) - \frac{\langle \gamma'(s), \omega'(s) \rangle}{\langle \omega'(s), \omega'(s) \rangle} \omega(s).$$

2.1.18. Tanım

$\phi(s, v)$ regle yüzeyinin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı kalıyorsa regle yüzeye açılabilir denir [20].

2.1.19. Tanım

Regle yüzeyin komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın ana doğrular arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (dral) denir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır [20]:

$$P_w = \frac{\det(\gamma', \omega, \omega')}{\|\omega'\|^2}.$$

2.1.20. Teorem

$\phi(s, v)$ regle yüzeyi açılabilirdir gerek ve yeter şart $P_w = 0$ dır [20].

2.1.21. Teorem

$\phi(s, v)$ bir regle yüzey olsun. O halde $\phi(s, v)$ regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla aşağıdaki şekildedir:

$$K(s, v) = -\frac{(\det(\gamma'(s), \omega(s), \omega'(s)))^2}{(EG - F^2)^2},$$

$$H(s, v) = \frac{-2 \langle \gamma'(s), \omega(s) \rangle \det(\gamma'(s), \omega(s), \omega'(s)) + \det(\gamma''(s) + v\omega''(s), \gamma'(s) + v\omega'(s), \omega(s))}{2(EG - F^2)^{3/2}},$$

burada $E = E(s, v) = \|\gamma'(s) + v\omega'(s)\|^2, F = F(s, v) = \langle \gamma'(s), \omega(s) \rangle, G = G(s, v) = 1$ dir [39].

2.1.22. Tanım

$\gamma, \mathbb{R}^3$ uzayında regüler bir eğri ve $\{T(s), N(s), B(s)\}$ de γ eğrisinin Frenet vektörleri olsun. O halde, γ eğrisinin teğet, normal ve binormal yüzeyleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır [39]:

$$\phi_T(s, v) = \gamma(s) + vT(s)$$

$$\phi_N(s, v) = \gamma(s) + vN(s)$$

$$\phi_B(s, v) = \gamma(s) + vB(s)$$

ve ϕ regle yüzeyi için birim normal vektör $\frac{\phi_s \times \phi_v}{\|\phi_s \times \phi_v\|}$ şeklindedir.

2.1.23. Tanım

$M, \mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey ve γ da M üzerinde bir eğri olsun. O halde, $\{T, V, U\}$ Darboux alanı olarak adlandırılır, burada $T = \gamma', U$, M nin birim normal vektörü ve $V = U \times T$ dir. Darboux alanı için Frenet-Serret formülleri aşağıdaki şekildedir [38]:

$$\begin{pmatrix} T' \\ V' \\ U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ V \\ U \end{pmatrix},$$

burada $k_g = \langle U \times T, T' \rangle, k_n = \langle \gamma'', U \rangle$ ve $\tau_g = \langle T, U \times U' \rangle$ sırasıyla jeodezik eğrilik, normal eğrilik ve jeodezik burulmadır.

2.1.24. Tanım

γ, M yüzeyi üzerinde yatan regüler bir eğri olsun. O halde, aşağıdaki eşitlikler sağlanır [38]:

i) γ jeodezik bir eğridir gerek ve yeter şart $k_g = 0$ dır.

ii) γ asimtotik bir eğridir gerek ve yeter şart $k_n = 0$ dır.

iii) γ eğrisi bir eğrilik çizgisidir gerek ve yeter şart $\tau_g = 0$ dır.

2.1.25. Tanım

Kuaterniyonların kümesi aşağıdaki şekilde temsil edilir [27]:

$$\mathbb{H} = \{q = a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

bu küme $\mathbb{R}$ üzerinde 4-boyutlu bir vektör uzayıdır ve burada a, b, c, d reel sayılar, i, j ve k birim vektörleri arasında da aşağıdaki eşitlikler vardır [40]:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, \\ jk = -kj = i, ijk = -1, ki = -ik = j. \end{aligned}$$

2.1.26. Tanım

Bir $q = a + bi + cj + dk$ kuaterniyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$q = S_q + V_q,$$

burada $S_q = a \in \mathbb{R}$ skalar kısım, $V_q = bi + cj + dk \in \mathbb{R}^3$ de vektörel kısımdır [40].

2.1.27. Tanım

Bir kuaterniyonun eşleniği aşağıdaki şekilde tanımlanır [40]:

$$\bar{q} = S_q - V_q.$$

2.1.28. Tanım

Kuaterniyonik iç çarpım aşağıdaki şekilde tanımlıdır [40]:

$$h : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, h(q, p) = \frac{1}{2}(q \times \bar{p} + p \times \bar{q}).$$

2.1.29. Tanım

Bir kuaterniyonun normu

$$\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

şeklinde tanımlıdır [40].

2.1.30. Tanım

$q + \bar{q} = 0$ eşitliğini sağlayan q kuaterniyonuna uzaysal kuaterniyon denir [41].

2.1.31. Tanım

Herhangi $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$, $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ kuaterniyonları için toplama ve çarpma işlemleri sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlıdır [41]:

$$q_1 + q_2 = S_{q_1+q_2} + V_{q_1+q_2},$$

$$\begin{aligned} q_1 \times q_2 &= (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) \times (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (c_1d_2 + b_1a_2 - d_1c_2 + c_1d_2)i \\ &\quad + (c_1a_2 + a_1c_2 - b_1d_2 + d_1b_2)j + (d_1a_2 + a_1d_2 - c_1b_2 + b_1c_2)k. \end{aligned}$$

2.1.32. Tanım

3-boyutlu Öklid uzayında uzaysal kuaterniyonların kümesi $\mathbb{Q}_{\mathbb{H}} = \{q \in \mathbb{H} : q + \bar{q} = 0\}$ şeklinde bariz olarak tanımlanabilir. $I = [0, 1]$, $\mathbb{R}$ de açık bir aralık ve $s \in I$ da eğri boyunca tanımlı bir parametre olsun. O halde aşağıdaki şekilde tanımlanan γ eğrisine uzaysal kuaterniyonik eğri

denir:

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{Q}_{\mathbb{H}}, \gamma(s) = \sum_{i=1}^3 \gamma_i(s) e_i \quad (1 \leq i \leq 3),$$

burada $\gamma' = t$ birim teğet vektör, yani her $s \in I$ için $\|t\| = 1$ dir [28].

2.1.33. Tanım

γ , s yay uzunluğu parametresi ile birlikte bir diferensiyellenebilir uzaysal kuaterniyonik eğri olsun. O halde, $\gamma(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlıdır [28]:

$$t(s) = \gamma'(s), \quad n(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}, \quad b(s) = t(s) \times n(s)$$

ve

$$\kappa(s) = \|\gamma'(s) \times \gamma''(s)\|, \quad \tau(s) = \frac{h(\gamma'(s) \times \gamma''(s), \gamma'''(s))}{\|\gamma'(s) \times \gamma''(s)\|^2}$$

Ek olarak, aşağıdaki eşitlikler sağlanır [29]:

$$t(s) \times t(s) = n(s) \times n(s) = b(s) \times b(s) = -1,$$

$$t(s) \times n(s) = b(s) = -n(s) \times t(s),$$

$$n(s) \times b(s) = t(s) = -b(s) \times n(s),$$

$$b(s) \times t(s) = n(s) = -t(s) \times b(s).$$

2.1.34. Tanım

γ , $\mathbb{Q}_{\mathbb{H}}$ üzerinde tanımlı birim hızlı uzaysal kuaterniyonik eğri ve $\{t(s), n(s), b(s)\}$, γ eğrisinin

Frenet alanları olsun. O halde γ eğrisinin Frenet formülleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır [29]:

$$\begin{aligned} t'(s) &= \kappa(s)n(s) \\ n'(s) &= -\kappa(s)t(s) + \tau(s)b(s) \\ b'(s) &= -\tau(s)n(s) \end{aligned}$$

burada κ ve τ sırasıyla γ eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır.

2.1.35. Tanım

γ bir uzaysal kuaterniyonik eğri olsun. γ eğrisinin birim teğet vektörü t , sabit birim U kuaterniyonuyla sabit bir açı yapıyorsa γ eğrisine uzaysal kuaterniyonik helis adı verilir [29].

2.1.36. Teorem

$\kappa \neq 0$ ile birlikte γ uzaysal kuaterniyonik eğrisi verilsin. γ uzaysal kuaterniyonik bir eğridir gerek ve yeter şart aşağıdaki eşitlik sağlanır [29]:

$$\frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}.$$

2.1.37. Tanım

γ bir uzaysal kuaterniyonik eğri olsun. γ eğrisinin birim asli normal vektörü n , sabit birim U kuaterniyonuyla sabit bir açı yapıyorsa γ eğrisine uzaysal kuaterniyonik slant helis adı verilir [29].

2.1.38. Teorem

$\kappa \neq 0$ ile birlikte γ uzaysal kuaterniyonik eğrisi verilsin. γ uzaysal kuaterniyonik slant helistir gerek ve yeter şart aşağıdaki eşitlik sağlanır [29]:

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 + \kappa^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = \text{sabit}.$$

Şimdi Lorentz uzayında temel kavramları inceleyelim.

2.2. Lorentz Uzayında Temel Kavramlar

2.2.1. Tanım

$\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayı üzerinde tanımlı aşağıdaki şekilde tanımlı fonksiyona Lorenziyen iç çarpım denir ve Lorentz uzayı $\mathbb{R}_1^3$ ile gösterilir [42]:

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{L}} = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

burada $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dir.

2.2.2. Tanım

$x = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında tanımlı bir vektör olsun. O halde, $\langle x, x \rangle > 0$ ya da $x = 0$ ise x vektörü spacelike, $\langle x, x \rangle < 0$ ise x vektörü timelike ve eğer $\langle x, x \rangle = 0$ ve $x \neq 0$ ise x vektörü lightlike (null) olarak adlandırılır [42].

2.2.3. Tanım

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisi verilsin. Eğer $\gamma'(s)$ herhangi bir $s \in I$ noktasında spacelike, timelike ya da lightlike ise γ eğrisi sırasıyla spacelike, timelike ya da lightlike dır denir [42].

2.2.4. Tanım

Lorenziyen iç çarpım kullanılarak $x = (x_1, x_2, x_3)$ vektörünün normu aşağıdaki şekilde tanımlanır [42]:

$$\|x\|_{\mathbb{L}} = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}.$$

2.2.5. Tanım

$\|x\|=1$ ise x vektörü birim vektör olarak adlandırılır [42].

2.2.6. Tanım

$\mathbb{R}_1^3$ de x ve y vektörleri verilsin. x ve y vektörlerinin vektörel çarpımı Lorentziyen vektörel çarpım olarak adlandırılır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır [43]:

$$x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & -e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

2.2.7. Tanım

γ eğrisi Lorentz uzayında tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesi γ eğrisinin Frenet vektörlerinin kümesidir ve sırasıyla teğet, normal ve binormal vektör olarak adlandırılır. γ eğrisinin Lorentziyen karakteri Frenet formüllerine göre aşağıdaki şekilde karakterize edilir [44]:

i) γ eğrisi birim hızlı spacelike binormalli spacelike bir eğri olsun. O halde, T ve B spacelike vektörler, N timelike bir vektördür. Bu şartlarda aşağıdakileri yazabiliriz:

$$N \times B = -T, \quad T \times N = -B, \quad B \times T = -N.$$

Frenet formülleri de aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N, \\ N' &= \kappa T + \tau B, \\ B' &= \tau N. \end{aligned}$$

ii) γ eğrisi birim hızlı timelike binormalli spacelike bir eğri olsun. O halde, T ve N spacelike vektörlerdir, B timelike bir vektördür. Bu şartlarda aşağıdakileri yazabiliriz:

$$N \times B = -T, \quad T \times N = B, \quad B \times T = -N.$$

Frenet formülleri de aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N, \\ N' &= -\kappa T + \tau B, \\ B' &= \tau N. \end{aligned}$$

iii) γ eğrisi birim hızlı timelike bir eğri olsun. O halde, N, B spacelike vektörlerdir ve T bir timelike vektördür. Bu şartlarda, aşağıdakiler sağlanır:

$$N \times B = T, \quad T \times N = -B \quad B \times T = -N.$$

Frenet formülleri de aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N, \\ N' &= \kappa T + \tau B, \\ B' &= -\tau N. \end{aligned}$$

2.2.8. Lemma

x ve y , $\mathbb{R}_1^3$ de bir spacelike alt vektör uzayı tarafından gerilen lineer bağımsız spacelike vektörler olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [45]:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Buradan aşağıdakiler yazılabilir:

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cos \varphi.$$

burada φ , x ve y arasındaki Lorentziyen spacelike açıdır.

2.2.9. Lemma

x ve y , $\mathbb{R}_1^3$ de bir timelike alt vektör uzayı tarafından gerilen lineer bağımsız spacelike

vektörler olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler sağlanmış olur [45]:

$$|\langle x, y \rangle| > \|x\| \cdot \|y\|.$$

Buradan da aşağıdakileri yazabiliriz:

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cos \varphi.$$

burada φ , x ve y arasındaki Lorentziyen spacelike açıdır.

2.2.10. Lemma

$\mathbb{R}_1^3$ de x spacelike vektörü ve y timelike vektörü verilsin. Bu durumda, aşağıdakiler sağlanır [45]:

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \sinh \varphi.$$

burada φ , x ve y arasındaki Lorentziyen timelike açıdır.

2.2.11. Lemma

$\mathbb{R}_1^3$ de x ve y timelike vektörleri verilsin. Bu durumda, aşağıdakiler sağlanır [45]:

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cosh \varphi.$$

burada φ , x ve y arasındaki Lorentziyen timelike açıdır.

2.2.12. Tanım

$\gamma = (\gamma(s); T(s), N(s), B(s))$ ve $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}(\tilde{s}); \tilde{T}(\tilde{s}), \tilde{N}(\tilde{s}), \tilde{B}(\tilde{s}))$, $\mathbb{R}_1^3$ de tanımlı regüler eğriler olsun. $N(s)$ ve $\tilde{N}(\tilde{s})$ vektörleri lineer bağımlı ise bu durumda $(\gamma, \tilde{\gamma})$ Bertrand çifti olarak adlandırılır [18].

2.2.13. Önerme

$(\gamma, \tilde{\gamma})$, timelike-spacelike Bertrand çifti olsun. γ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ ile $\tilde{\gamma}$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}\}$ arasında aşağıdaki eşitlikler vardır [46]:

$$\begin{pmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh\theta & 0 & \cosh\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cosh\theta & 0 & -\sinh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

burada θ , T ve $\tilde{T}$ arasındaki hiperbolik timelike açıdır.

2.2.14. Önerme

$(\gamma, \tilde{\gamma})$ timelike Bertrand çifti olsun. Aşağıdaki eşitlikler sağlanır [46]:

$$\begin{pmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{N} \\ \tilde{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & 0 & \sinh\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\theta & 0 & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

burada θ , T ve $\tilde{T}$ arasındaki hiperbolik timelike açıdır.

2.2.15. Önerme

γ ve $\tilde{\gamma}$ spacelike binormalı spacelike eğriler olsun. O halde, γ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ ile $\tilde{\gamma}$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}\}$ arasında aşağıdaki eşitlikler vardır [46]:

$$\begin{pmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{N} \\ \tilde{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix},$$

burada, $\langle T, \tilde{T} \rangle = \cos\theta = \text{sabit}$ dir.

2.2.16. Önerme

γ timelike binormalı spacelike eğri olsun. O halde, γ eğrisinin Bertrand eğrisi spacelike eğridir ve $\tilde{B}$ timelike vektördür. γ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ ile $\tilde{\gamma}$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}\}$ arasında aşağıdaki eşitlikler sağlanır [46]:

$$\begin{pmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{N} \\ \tilde{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & 0 & \sinh\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh\theta & 0 & -\cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix},$$

burada, $\langle T, \tilde{T} \rangle = \cosh\theta = \text{sabit}$ dir.

2.2.17. Önerme

Timelike binormalı spacelike γ eğrisi verilsin. O halde, γ eğrisinin Bertrand eğrisi timelike eğridir. γ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ ile $\tilde{\gamma}$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}\}$ arasında aşağıdaki eşitlikler vardır [46]:

$$\begin{pmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{N} \\ \tilde{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh\theta & 0 & \cosh\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cosh\theta & 0 & -\sinh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

burada, $\langle T, \tilde{T} \rangle = \sinh\theta = \text{sabit}$ dir.

2.2.18. Tanım

$\gamma = (\gamma(s); T(s), N(s), B(s))$ ve $\gamma^* = (\gamma^*(s^*); T^*(s^*), N^*(s^*), B^*(s^*))$, $\mathbb{R}_1^3$ de tanımlı eğriler olsun. Eğer, $\langle T(s), T^*(s^*) \rangle = 0$ oluyorsa $\gamma^*(s^*)$ eğrisine $\gamma(s)$ nin involütü $\gamma(s)$ eğrisine de $\gamma^*(s^*)$ in evolütü denir. Bu durumda, (γ, γ^*) involüt-evolüt eğri çifti olarak adlandırılır [47].

2.2.19. Önerme

γ timelike bir eğri olsun. O halde, γ^* timelike ya da spacelike binormalı spacelike eğridir.

γ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ ile γ^* eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T^*, N^*, B^*\}$ arasında aşağıdaki eşitlikler vardır [47]:

i) γ^* spacelike binormalli spacelike eğri olsun.

a) Eğer W Darboux vektörü timelike ise, aşağıdakiler sağlanır:

$$\begin{pmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sinh\theta & 0 & \cosh\theta \\ -\cosh\theta & 0 & -\sinh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

b) Eğer W Darboux vektörü spacelike ise, aşağıdakiler sağlanır:

$$\begin{pmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cosh\theta & 0 & \sinh\theta \\ -\sinh\theta & 0 & -\cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

ii) γ^* timelike binormalli spacelike eğri olsun.

a) W Darboux vektörü timelike ise aşağıdakiler sağlanır:

$$\begin{pmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\theta & 0 & -\cosh\theta \\ -\cosh\theta & 0 & -\sinh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

b) Eğer W Darboux vektörü spacelike ise, aşağıdakiler sağlanır:

$$\begin{pmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cosh\theta & 0 & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & 0 & -\cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

2.2.20. Önerme

γ eğrisi timelike veya spacelike binormalli spacelike eğri olsun. O halde, γ^* eğrisi spacelike eğridir. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır [47]:

i) γ^* eğrisi spacelike binormalli spacelike eğri olsun.

$$\begin{pmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ \sin\theta & 0 & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix},$$

ii) γ^* eğrisi timelike binormalli spacelike eğri olsun.

a) Eğer W Darboux vektörü timelike ise aşağıdaki denklemler sağlanır:

$$\begin{pmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cosh\theta & 0 & -\sinh\theta \\ \sinh\theta & 0 & -\cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

b) Eğer W Darboux vektörü spacelike ise aşağıdaki denklemler sağlanır:

$$\begin{pmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sinh\theta & 0 & -\cosh\theta \\ \cosh\theta & 0 & -\sinh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

2.2.21. Önerme

γ spacelike binormalli spacelike eğri olsun. O halde, γ^* eğrisi spacelike eğridir. γ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ ile γ^* eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T^*, N^*, B^*\}$ arasında aşağıdaki eşitlikler vardır [47]:

i) γ^* spacelike binormalli spacelike eğri olsun.

$$\begin{pmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & -\cos\theta \\ -\cos\theta & 0 & -\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

ii) γ^* timelike binormalli spacelike eğri olsun.

$$\begin{pmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & -\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

2.2.22. Önerme

γ eğrisi timelike binormalı spacelike eğri olsun. O halde, γ^* spacelike bir eğridir. Bu durumda, γ^* eğrisi spacelike eğridir. γ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ ile γ^* eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T^*, N^*, B^*\}$ arasında aşağıdaki eşitlikler sağlanır [47]:

i) γ^* spacelike binormalı spacelike eğri olsun.

a) Eğer W Darboux vektörü spacelike ise o halde aşağıdakiler sağlanır:

$$\begin{pmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\theta & 0 & \cosh\theta \\ \cosh\theta & 0 & -\sinh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

b) Eğer W Darboux vektörü timelike ise o halde aşağıdakiler sağlanır:

$$\begin{pmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cosh\theta & 0 & \sinh\theta \\ \sinh\theta & 0 & -\cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

ii) γ^* timelike binormalı spacelike eğri olsun.

a) Eğer W Darboux vektörü spacelike ise aşağıdakiler sağlanır:

$$\begin{pmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sinh\theta & 0 & -\cosh\theta \\ \cosh\theta & 0 & -\sinh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

b) Eğer W Darboux vektörü timelike ise aşağıdakiler sağlanır:

$$\begin{pmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cosh\theta & 0 & -\sinh\theta \\ \sinh\theta & 0 & -\cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

Şimdi de dual uzayda temel kavramları verelim.

2.3. Dual Uzayda Temel Kavramlar

2.3.1. Tanım

Dual sayılar kümesi $\mathbb{D} = \{A = a + \varepsilon a^* : a, a^* \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\}$ şeklinde tanımlanır. Bu küme üzerinde toplama ve çarpma işlemleri sırasıyla aşağıdaki şekildedir [40]:

$$\begin{aligned}(a + \varepsilon a^*) + (b + \varepsilon b^*) &= (a + b) + \varepsilon(a^* + b^*), \\ (a + \varepsilon a^*) \cdot (b + \varepsilon b^*) &= ab + \varepsilon(ab^* + a^*b)\end{aligned}$$

2.3.2. Tanım

$\mathbb{D}^3 = \{\vec{A} : \vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}^3\}$ kümesinin elemanları dual vektörler olarak adlandırılır. Bu küme üzerinde toplama ve çarpma operasyonları sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlıdır [40]:

$$\begin{aligned}\vec{A} \oplus \vec{B} &= (\vec{a} + \vec{b}) + \varepsilon(\vec{a}^* + \vec{b}^*), \\ \tilde{\lambda} \odot \vec{A} &= \lambda \vec{a} + \varepsilon(\lambda \vec{a}^* + \lambda^* \vec{a})\end{aligned}$$

burada $\tilde{\lambda} = \lambda + \varepsilon \lambda^* \in \mathbb{D}$.

2.3.3. Tanım

$(\mathbb{D}^3, \oplus)$ kümesi $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ halkası üzerinde bir modüldür ve $\mathbb{D}$ -Modül olarak adlandırılır. $\mathbb{D}^3$ deki dual vektörlerin iç çarpımı ve vektörel çarpımı sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır [40]:

$$\begin{aligned}\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle &= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle), \\ \vec{A} \wedge \vec{B} &= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon(\vec{a} \wedge \vec{b}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{b}).\end{aligned}$$

2.3.4. Tanım

Sıfırdan farklı $\vec{A}$ için $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ dual vektörünün normu aşağıdaki şekilde tanımlıdır [40]:

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle} = \|\vec{a}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|}, \|\vec{a}\| \neq 0.$$

2.3.5. Tanım

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ dual vektörleri arasındaki $\Phi = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ dual açısı şu şekilde tanımlanır [40]:

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos \Phi = \cos \varphi - \varepsilon \varphi^* \sin \varphi.$$

2.3.6. Tanım

$\tilde{\gamma}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}^3$, $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(s) + \varepsilon \gamma^*(s)$, $\mathbb{D}^3$ de tanımlı diferensiyellenebilir birim hızlı dual eğri olsun. $T(s), N(s), B(s), \tilde{\gamma}(s)$ eğrisinin Frenet-Serret alanları olarak adlandırılır. O halde, T , N ve B sırasıyla dual teğet, dual esas normal and dual binormal vektörlerdir. $\kappa(s) = k_1 + \varepsilon k_1^*$ ve $\tau(s) = k_2 + \varepsilon k_2^*$ fonksiyonları da sırasıyla dual eğrilik ve dual burulma olarak adlandırılır [48].

2.3.7. Tanım

$\tilde{\gamma}(s)$, $\mathbb{D}^3$ de tanımlı diferensiyellenebilir birim hızlı dual eğri olsun. $\tilde{\gamma}(s)$ eğrisinin Frenet formülleri aşağıdaki şekildedir [48]:

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s)N(s), \\ N'(s) &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s), \\ B'(s) &= -\tau(s)N(s), \end{aligned}$$

burada $\kappa(s) = \sqrt{\langle T', T' \rangle}$ ve $\tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$ sırasıyla $\tilde{\gamma}(s)$ eğrisinin dual eğrilik ve dual burulma fonksiyonlarıdır.

2.3.8. Tanım

B ve W dual vektörleri arasındaki dual açı Φ olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır [48]:

$$\cos\Phi = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}, \quad \sin\Phi = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2},$$

burada

$$\cos\Phi = \cos(\varphi + \varepsilon\varphi) = \cos\varphi - \varepsilon\varphi^* \sin\varphi, \quad \sin\Phi = \sin(\varphi + \varepsilon\varphi) = \sin\varphi + \varepsilon\varphi^* \cos\varphi$$

şeklindedir. $\cos\Phi = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}$ reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \\ \sin\varphi &= \frac{2k_1^2 + k_1^* + 2k_1k_2k_2^* - k_1^2k_1^* - k_2^2k_1^*}{\varphi(k_1^2 + k_2^2)^2}. \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $\sin\Phi = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}$ reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{k_2}{k_1^2 + k_2^2} \\ \cos\varphi &= \frac{k_1^2 + k_2^* - 2k_1k_2k_1^* - 2k_2^2k_2^*}{\varphi(k_1^2 + k_2^2)^2}. \end{aligned}$$

elde edilir.

2.3.9. Tanım

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{D}^3$ eğrisinin dual teğet vektörü sabit bir birim dual vektörle sabit bir dual açı yapıyorsa γ eğrisi dual genel helis olarak adlandırılır [49].

2.3.10. Tanım

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{D}^3$ eğrisinin dual Darboux vektörü ile sabit bir birim dual vektörle sabit açı yapıyorsa γ eğrisi dual Darboux helis olarak adlandırılır [50].

2.3.11. Tanım

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{D}^3$ eğrisinin dual normal vektörü ile sabit bir birim dual vektör sabit açı yapıyorsa γ eğrisi dual slant helis olarak adlandırılır [49].

2.3.12. Önerme

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{D}^3$ eğrisi, κ ve τ dual eğrilikleri ile birlikte birim hızlı bir dual eğri olsun. O halde, γ eğrisi dual genel helistir gerek ve yeter şart $\frac{\tau}{\kappa}$ oranı dual bir sabittir [49].

2.3.13. Önerme

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{D}^3$ eğrisi, κ ve τ dual eğrilikleri ile birlikte birim hızlı bir dual eğri olsun. γ eğrisi dual slant helistir gerek ve yeter şart

$$\sigma(s) = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s)$$

oranı dual sabit fonksiyondur [49].

2.3.14. Önerme

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{D}^3$ eğrisi dual Darboux helistir gerek ve yeter şart

$$\sigma^*(s) = \frac{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}{\kappa^2} \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s)}$$

oranı dual sabit bir fonksiyondur [50].



3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA B-LİFT EĞRİLERİ

Bu bölümde, esas eğrinin binormal vektörlerinin uç noktalarının birleştirilmesiyle elde edilen B-Lift eğrisini tanımlıyoruz. Ayrıca B-Lift eğrilerinin Frenet operatörlerini elde edip, B-Lift eğrilerinin Frenet operatörlerini tabii lift eğrilerinin Frenet operatörleri ile karşılaştırıyoruz. Ayrıca esas eğrinin slant helis ya da Darboux helix mi olma durumuna göre B-Lift eğrisinin durumunu inceliyoruz ve bu durumlarla ilgili örnek veriyoruz.

3.1. $\mathbb{R}^3$ Uzayında B-Lift Eğrileri İçin Karakterizasyonlar

3.1.1. Tanım

Herhangi bir birim hızlı $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin B-Lifti $\gamma_B : I \rightarrow TM$ şu şekilde tanımlanır:

$$\gamma_B(s) = (\gamma(s), B(s)) = B(s)|_{\gamma(s)} \quad (3.1)$$

burada B , γ eğrisinin binormal vektörüdür.

3.1.2. Teorem

γ_B eğrisi regüler bir γ eğrisinin B-Lifti olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{aligned} T_B(s) &= -N(s), \\ N_B(s) &= \frac{\kappa(s)}{\|W(s)\|} T(s) - \frac{\tau(s)}{\|W(s)\|} B(s), \\ B_B(s) &= \frac{\tau(s)}{\|W(s)\|} T(s) + \frac{\kappa(s)}{\|W(s)\|} B(s) \end{aligned}$$

burada $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\{T_B(s), N_B(s), B_B(s)\}$ sırasıyla γ ve γ_B eğrilerinin Frenet vektörleridir. Ek olarak, κ ve τ , γ eğrisinin eğrilikleri $W = \tau T + \kappa B$ da γ eğrisinin Darboux vektörüdür. (Özel olarak, burulma pozitif kabul edilmiştir.)

İspat

γ_B eğrisi γ eğrisinin B-Lifti olsun, o halde aşağıdakileri yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
 \gamma_B &= B, \quad \gamma'_B = -\tau N \\
 T_B(s) &= \frac{\gamma'_B}{\|\gamma'_B\|} = \frac{-\tau N}{|\tau|} = -N \quad (\tau > 0), \\
 \gamma''_B &= -\tau' N - \tau(-\kappa T + \tau B), \\
 \gamma''_B &= \kappa\tau T - \tau' N - \tau^2 B, \\
 \gamma'_B \times \gamma''_B &= \tau^3 T + \kappa\tau^2 B, \\
 \|\gamma'_B \times \gamma''_B\| &= \tau^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$B_B(s) = \frac{\gamma'_B \times \gamma''_B}{\|\gamma'_B \times \gamma''_B\|}$ ve (3.2) eşitliği kullanılırsa

$$B_B(s) = \frac{\tau}{\|W\|} T + \frac{\kappa}{\|W\|} B. \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.2) ve (3.3) eşitlikleri kullanılarak aşağıdakilere sahip oluruz:

$$N_B(s) = B_B(s) \times T_B(s) = \frac{\kappa}{\|W\|} T - \frac{\tau}{\|W\|} B. \tag{3.4}$$

(3.2), (3.3) ve (3.4) denklemleriyle ispat tamamlanır.

3.1.3. Teorem

$\mathbb{R}^3$ de verilen regüler bir γ eğrisinin B-Lifti γ_B olsun. O halde, aşağıdaki formüller sağlanır:

$$\kappa_B(s) = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\tau}, \quad \tau_B(s) = \frac{\kappa' \tau - \kappa \tau'}{\tau(\kappa^2 + \tau^2)},$$

burada κ_B ve τ_B sırasıyla γ_B eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır.

İspat

(3.2) eşitliğinden biliyoruz ki

$$\|\gamma'_B \times \gamma''_B\| = \tau \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}, \quad \|\gamma'_B\| = \tau. \tag{3.5}$$

$\kappa_B = \frac{\|\gamma_B' \times \gamma_B''\|}{\|\gamma_B'\|^3}$ eşitliğinden aşağıdaki denklem sağlanır:

$$\kappa_B(s) = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\tau}. \quad (3.6)$$

γ_B nin burulması aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\tau_B = \frac{\langle \gamma_B' \times \gamma_B'', \gamma_B''' \rangle}{\|\gamma_B' \times \gamma_B''\|^2}. \quad (3.7)$$

(3.2) kullanılarak aşağıdaki eşitliğe sahip oluruz:

$$\gamma_B''' = (\kappa' \tau + 2\kappa \tau')T + (\kappa^2 \tau - \tau'' + \tau^3)N - 3\tau \tau' B. \quad (3.8)$$

(3.2) ve (3.8) eşitliklerinden aşağıdaki eşitliğe sahip oluruz:

$$\tau_B(s) = \frac{\kappa' \tau - \kappa \tau'}{\tau(\kappa^2 + \tau^2)}. \quad (3.9)$$

3.1.4. Teorem

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi slant helistir gerek ve yeter şart γ_B eğrisi genel helistir.

İspat

Kabul edelim ki γ eğrisi slant helis olsun. Önerme 2.1.12 den aşağıdakiler sağlanır:

$$\sigma(s) = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s) = \text{sabit},$$

burada κ ve τ , γ eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır. (3.11) ve (3.14) denklemlerinden

$$\frac{\tau_B}{\kappa_B} = -\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s) = -\sigma(s) = \text{sabit}. \quad (3.10)$$

elde edilir. O halde, γ_B eğrisinin eğrilikleri oranı sabit olduğundan genel helistir. Tersine, γ_B eğrisi genel helis olsun. Bu durumda

$$\frac{\tau_B}{\kappa_B} = -\sigma(s) = \text{sabit}$$

bulunur. Buradan

$$\sigma(s) = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s) = \text{sabit}$$

denklemini elde edilir. O halde, γ eğrisi slant helistir.

3.1.5. Sonuç

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi Darboux helistir gerek ve yeter şart γ_B eğrisi genel helistir.

3.1.6. Teorem

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi genel helistir gerek ve yeter şart γ_B eğrisi düzlemsel bir eğridir.

İspat

γ eğrisi genel helis olsun. O halde $\frac{\tau}{\kappa}$ oranı sabittir. Buradan $\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = 0$ olarak bulunur ve sonuç olarak

$$-\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s) = \frac{\tau_B}{\kappa_B} = 0$$

olarak bulunur. $\frac{\tau_B}{\kappa_B} = 0$ olduğundan $\tau_B = 0$ elde edilir. O halde γ_B eğrisi düzlemsel bir eğridir.

Tersine γ_B eğrisi düzlemsel bir eğri olsun. Bu durumda $\tau_B = 0$ dır ve (3.16) eşitliğinden

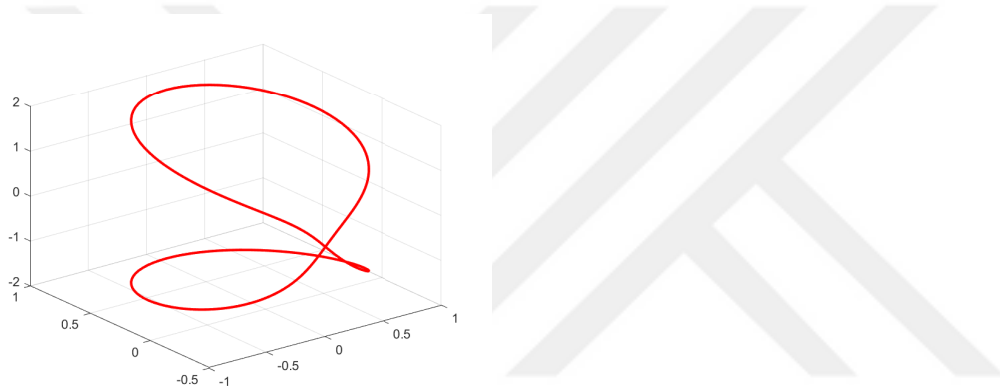
$$\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s) = 0$$

elde edilir. Buradan $\frac{\tau}{\kappa}$ oranı sabit olarak bulunur. $\frac{\tau}{\kappa}$ oranı sabit olduğundan γ eğrisi bir genel helistir.

3.1.7. Örnek

Birim hızlı slant helis aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\gamma(s) = \left(\frac{2}{3}\sin s + \frac{1}{6}\sin 2s, \frac{2}{3}\cos s + \frac{1}{6}\cos 2s, \frac{4\sqrt{2}}{3}\cos \frac{s}{2} \right).$$



Şekil 3.1. Slant helis eğrisi $\gamma(s)$

O halde, γ eğrisinin Frenet vektörleri aşağıdaki şekildedir:

$$T(s) = \left(\frac{2}{3}\cos s + \frac{1}{3}\cos 2s, -\frac{2}{3}\sin s - \frac{1}{3}\sin 2s, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\sin \frac{s}{2} \right),$$

$$N(s) = \left(-\frac{4}{3\sqrt{2}}\sin \frac{3s}{2}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\cos \frac{3s}{2}, -\frac{1}{3} \right),$$

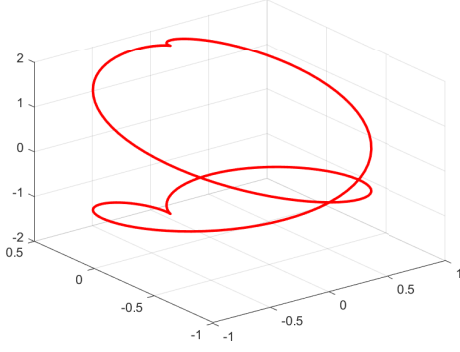
$$B(s) = \left(\frac{2}{3}\sin s - \frac{1}{3}\sin 2s, \frac{2}{3}\cos s - \frac{1}{3}\cos 2s, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\cos \frac{s}{2} \right).$$

$\gamma_B(s) = B(s)$ olduğundan aşağıdaki eşitliklere sahip oluruz:

$$\gamma_B'(s) \times \gamma_B''(s) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sin^2 \frac{s}{2}\sin \frac{3s}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\sin^2 \frac{s}{2}\cos \frac{3s}{2}, -\frac{8}{3}\sin^2 \frac{s}{2} \right),$$

$$\kappa_B(s) = \frac{\|\gamma_B' \times \gamma_B''\|}{\|\gamma_B'\|^3} = \frac{1}{\sin^2 \frac{s}{2}},$$

$$\tau_B(s) = \frac{\langle \gamma_B' \times \gamma_B'', \gamma_B''' \rangle}{\|\gamma_B' \times \gamma_B''\|^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sin^2 \frac{s}{2}}.$$



Şekil 3.2. B-Lift eğrisi $\gamma_B(s)$

Buradan da

$$\frac{\tau_B}{\kappa_B} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = \text{sabit}$$

olarak elde edilir. Eğrilikler oranı sabit olduğundan γ_B eğrisi bir genel helistir.

3.2. B-Lift Eğrileri ve Tabii Lift Eğrileri Arasındaki İlişkiler

3.2.1. Sonuç

γ_B ve $\bar{\gamma}$ sırasıyla γ eğrisinin B-Lifti ve tabii lifti olsunlar. O halde, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$T_B(s) = -\bar{T}(s),$$

$$N_B(s) = -\bar{N}(s),$$

$$B_B(s) = \bar{B}(s),$$

burada $\{T_B(s), N_B(s), B_B(s)\}$ ve $\{\bar{T}(s), \bar{N}(s), \bar{B}(s)\}$ sırasıyla γ_B ve $\bar{\gamma}$ eğrilerinin Frenet vektörleridir.

3.2.2. Sonuç

γ_B ve $\bar{\gamma}$ eğrileri sırasıyla γ regüler eğrisinin B-Lifti ve tabii lifti olsun. O halde, B-Lift eğrisi

ve tabii lift eğrisinin Frenet vektörleri arasında aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$\frac{\tau_B}{\kappa_B} = -\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}}. \quad (3.11)$$



4. B-LİFT EĞRİLERİ VE ÜRETTİKLERİ REGLE YÜZEYLER

Bu kısımda, B-Lift eğrisinin teğet, normal ve binormal yüzeyleri olarak adlandırılan regle yüzeyler tanımlanacaktır. Ardından bu yüzeylerin geometrik değişmezleri ve tekillikleri incelenecektir. Son olarak da bu yüzeylerin Darboux alanı oluşturulacak ve esas eğrinin durumuna göre B-Lift eğrisinin jeodezik eğri, asimtotik eğri ve eğrilik çizgisi olma durumu araştırılacaktır.

4.1. B-Lift Eğrisinin Ürettiği Teğet Yüzey

γ_B eğrisi γ regüler eğrisinin B-Lifti olsun. O halde, γ_B eğrisinin teğet yüzeyi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\phi_{T_B}(s, v) = \gamma_B(s) + vT_B(s). \quad (4.1)$$

(3.1) ve (3.3) eşitliklerinden ϕ_{T_B} regle yüzeyi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\phi_{T_B}(s, v) = B(s) + v(-N(s)). \quad (4.2)$$

Şimdi ϕ_{T_B} regle yüzeyinin singüler noktasını inceleyelim.

$$\begin{aligned} (\phi_{T_B})_s \times (\phi_{T_B})_v &= B'(s) \times (-N(s)) + v(\kappa(s)T(s) - \tau(s)N(s)) \times -N(s) \\ &= -v\kappa(s)B(s) \end{aligned}$$

şeklindedir. Her $(s_0, v_0) \in I \times (\mathbb{R} - \{0\})$ için $(\phi_{T_B})_{s_0} \times (\phi_{T_B})_{v_0} = -v_0\kappa(s_0)B(s_0) \neq 0$ olduğundan ϕ_{T_B} regle yüzeyi singüler noktaya sahip değildir. Her $(s_0, v_0) \in I \times (\mathbb{R} - \{0\})$ için $\omega'(s_0) \times \omega(s_0) = \kappa(s_0)B(s_0) \neq 0$ olduğundan ϕ_{T_B} silindirik olmayan bir yüzeydir. ϕ_{T_B} teğet yüzeyinin dağılma parametresi

$$P_{T_B} = \frac{\det(B', -N, -N')}{\| -N' \|^2} = 0$$

şeklindedir. ϕ_{T_B} yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$b_{T_B}(s) = \gamma_B(s) - \frac{\langle \gamma'_B(s), T'_B(s) \rangle}{\langle T'_B(s), T'_B(s) \rangle} T_B(s)$$

$$\begin{aligned}
&= B(s) - \frac{\langle -\tau N, \kappa T - \tau B \rangle}{\langle \kappa T - \tau B, \kappa T - \tau B \rangle} (\kappa T - \tau B) \\
&= B(s)
\end{aligned}$$

dir. ϕ_{T_B} regle yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K_{T_B}(s, v) = -\frac{(\det(-\tau N, -N, \kappa T - \tau B))^2}{(EG - F^2)^2} = 0.$$

şeklindedir. ϕ_{T_B} teğet yüzeyinin esas eğriliği

$$\begin{aligned}
H_{T_B}(s, v) &= \frac{\det(\kappa \tau T - \tau' N - \tau^2 B + v(\kappa' T + (\kappa^2 + \tau^2)N - \tau' B, -\tau N + v(\kappa T - \tau B), -N)}{2(EG - F^2)^{3/2}} \\
&= \frac{v^2 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa^2}{2(EG - F^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. ϕ_{T_B} regle yüzeyinin birim normali aşağıdaki şekildedir:

$$U_{T_B} = \frac{(\phi_{T_B})_s \times (\phi_{T_B})_v}{\|(\phi_{T_B})_s \times (\phi_{T_B})_v\|} = \frac{(-v\tau, 0, -v\kappa)}{\sqrt{v^2 \kappa^2 + v^2 \tau^2}}.$$

ϕ_{T_B} regle yüzeyi için jeodezik eğrilik, normal eğrilik ve jeodezik burulmalar sırasıyla

$$k_g = \langle U_{T_B} \times T_B, T_B' \rangle = -v(\kappa^2 + \tau^2),$$

$$k_n = \langle \gamma_B'', U_{T_B} \rangle = -v(\kappa \kappa' + \tau \tau'),$$

$$\tau_g = \langle T_B, U_{T_B} \times U_{T_B}' \rangle = v^2 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa^2$$

şeklindedir.

4.1.1. Sonuç

ϕ_{T_B} regle yüzeyi açılabilir.

4.1.2. Sonuç

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi bir genel helis olsun. O halde, ϕ_{T_B} regle yüzeyi minimal bir yüzeydir.

4.1.3. Sonuç

γ regüler eğrisi için $\kappa\kappa' + \tau\tau' = 0$ dır gerek ve yeter şart γ_B eğrisi ϕ_{T_B} regle yüzeyinin asimtotik eğrisidir.

4.1.4. Sonuç

γ eğrisi genel helistir gerek ve yeter şart γ_B eğrisi ϕ_{T_B} regle yüzeyinin eğrilik çizgisidir.

4.2. B-Lift Eğrisinin Ürettiği Normal Yüzey

γ regüler eğrisinin B-Lifti γ_B olsun. O halde, B-Lift eğrisinin esas normal yüzeyi aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$\phi_{N_B}(s, v) = \gamma_B(s) + vN_B(s). \quad (4.3)$$

(3.1) ve (3.3) eşitliklerinden aşağıdaki sonucu yazabiliriz:

$$\phi_{N_B}(s, v) = B(s) + v\left(\frac{\kappa(s)}{\|W(s)\|}T(s) - \frac{\tau(s)}{\|W(s)\|}B(s)\right). \quad (4.4)$$

Buradan,

$$(\phi_{N_B})_s \times (\phi_{N_B})_v = \left(-\tau + \frac{\tau^2}{\|W\|}, v\left(\frac{\kappa'\tau - \kappa\tau'}{\|W\|^2}\right), -\kappa + \frac{\kappa\tau}{\|W\|}\right) \quad (4.5)$$

olarak bulunur. γ_B eğrisinin esas normal eğrisinin dağılma parametresi

$$\begin{aligned} P_{N_B} &= \frac{\det(B', N_B, N_B')}{\|N_B'\|^2} \\ &= \frac{\tau\left(-\frac{\kappa\tau'}{\|W\|^2} + \frac{\kappa'\tau}{\|W\|^2}\right)}{\left(\frac{\kappa'}{\|W\|}\right)^2 + \left(\frac{\kappa^2 + \tau^2}{\|W\|}\right)^2 + \left(\frac{\tau'}{\|W\|}\right)^2} \end{aligned}$$

şeklindedir. ϕ_{N_B} regle yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$\begin{aligned} b_{N_B}(s) &= \gamma_B(s) - \frac{\langle \gamma'_B(s), N'_B(s) \rangle}{\langle N'_B(s), N'_B(s) \rangle} N_B(s) \\ &= B(s) - \frac{\langle -\tau N, \frac{\kappa'}{\|W\|} T + \frac{\kappa^2 + \tau^2}{\|W\|} N - \frac{\tau'}{\|W\|} B \rangle}{\langle \frac{\kappa'}{\|W\|} T + \frac{\kappa^2 + \tau^2}{\|W\|} N - \frac{\tau'}{\|W\|} B, \frac{\kappa'}{\|W\|} T + \frac{\kappa^2 + \tau^2}{\|W\|} N - \frac{\tau'}{\|W\|} B \rangle} \left(\frac{\kappa}{\|W\|} T - \frac{\tau}{\|W\|} B \right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. ϕ_{N_B} regle yüzeyinin Gauss eğriliği

$$\begin{aligned} K_{N_B}(s, v) &= -\frac{(\det(\gamma'_B, N_B, N'_B))^2}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{\tau(-\frac{\kappa\tau'}{\|W\|^2} + \frac{\kappa'\tau}{\|W\|^2})}{(EG - F^2)^2} \end{aligned}$$

dir. ϕ_{N_B} regle yüzeyinin esas eğriliği

$$\begin{aligned} H_{N_B}(s, v) &= \frac{\det(\gamma''_B + vN''_B, \gamma'_B + vN'_B, N_B)}{2(EG - F^2)^{3/2}} \\ &= \frac{v^2(\frac{3\kappa\kappa' + 3\tau\tau'}{\|W\|^3})(\kappa'\tau - \kappa\tau') + v^2(\frac{\kappa^2 + \tau^2}{\|W\|^3})(\kappa\tau'' - \kappa''\tau) + v\tau'(\frac{\kappa\tau' - \tau\kappa'}{\|W\|^2}) + v\tau(\frac{\kappa''\tau - \tau''\kappa}{\|W\|^2})}{2(EG - F^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. ϕ_{N_B} regle yüzeyinin birim normali aşağıdaki şekildedir:

$$U_{N_B} = \frac{(\phi_{N_B})_s \times (\phi_{N_B})_v}{\|(\phi_{N_B})_s \times (\phi_{N_B})_v\|}.$$

ϕ_{N_B} regle yüzeyi için jeodezik eğrilik, normal eğrilik ve jeodezik burulmalar sırasıyla

$$k_g = \langle U_{N_B} \times T_B, T'_B \rangle = \frac{(\kappa^2 + \tau^2)(\tau - 1)}{\|W\|},$$

$$k_n = \langle \gamma''_B, U_{N_B} \rangle = -v \frac{\tau'(\kappa'\tau - \kappa\tau')}{\|W\|^2},$$

$$\tau_g = \langle T_B, U_{N_B} \times U'_{N_B} \rangle = (\tau'\kappa - \kappa'\tau) \cdot [1 + \frac{\tau^2}{\|W\|^2} - \frac{2\tau}{\|W\|}].$$

şeklindedir.

4.2.1. Sonuç

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi genel helis olsun. O halde, ϕ_{N_B} regle yüzeyi açılabilir bir yüzeydir.

4.2.2. Sonuç

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi genel helis olsun. O halde, ϕ_{N_B} regle yüzeyi minimal bir yüzeydir.

4.2.3. Sonuç

γ regüler bir eğri olsun. $\tau = 1$ dir gerek ve yeter şart γ_B eğrisi ϕ_{N_B} regle yüzeyinin jeodezik eğrisidir.

4.2.4. Sonuç

γ genel helistir gerek ve yeter şart γ_B eğrisi ϕ_{N_B} regle yüzeyinin asimtotik eğrisidir.

4.2.5. Sonuç

γ genel helistir gerek ve yeter şart γ_B eğrisi ϕ_{N_B} regle yüzeyinin eğrilik çizgisidir.

4.3. B-Lift Eğrisinin Ürettiği Binormal Yüzey

γ_B eğrisi γ regüler eğrisinin B-Lifti olsun. O halde, B-Lift eğrisinin binormal yüzeyi aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\phi_{B_B}(s, v) = \gamma_B(s) + vB_B(s). \quad (4.6)$$

(3.1) ve (3.3) eşitliklerinden

$$\phi_{B_B}(s, v) = B(s) + v\left(\frac{\tau(s)}{\|W(s)\|}T(s) + \frac{\kappa(s)}{\|W(s)\|}B(s)\right) \quad (4.7)$$

olarak yazılabilir. Buradan,

$$(\phi_{B_B})_s \times (\phi_{B_B})_v = \left(-\frac{\kappa\tau}{\|W\|}, v\left(\frac{\kappa'\tau - \kappa\tau'}{\|W\|^2}\right), \frac{\tau^2}{\|W\|} \right) \quad (4.8)$$

olarak bulunur. (4.8) eşitliğinden $(\phi_{B_B})_s \times (\phi_{B_B})_v \neq 0$ olduğundan ϕ_{B_B} regle yüzeyinin singüler noktası yoktur ve ϕ_{B_B} silindirik olmayan bir yüzeydir. ϕ_{B_B} regle yüzeyinin dağılma parametresi

$$\begin{aligned} P_{B_B} &= \frac{\det(B', B_B, B'_B)}{\|B'_B\|^2} \\ &= \frac{\tau\left(-\frac{\kappa\tau'}{\|W\|^2} + \frac{\kappa'\tau}{\|W\|^2}\right)}{(\tau')^2 + (\kappa')^2} \end{aligned}$$

şeklindedir. ϕ_{B_B} regle yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$\begin{aligned} b_{B_B}(s) &= \gamma_B(s) - \frac{\langle \gamma'_B(s), B'_B(s) \rangle}{\langle B'_B(s), B'_B(s) \rangle} B_B(s) \\ &= B(s) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. ϕ_{B_B} binormal yüzeyinin Gauss eğriliği

$$\begin{aligned} K_{B_B}(s, v) &= -\frac{(\det(\gamma'_B, B_B, B'_B))^2}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{\tau\left(-\frac{\kappa\tau'}{\|W\|^2} + \frac{\kappa'\tau}{\|W\|^2}\right)}{(EG - F^2)^2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. ϕ_{B_B} regle yüzeyinin esas eğriliği

$$H_{B_B}(s, v) = \frac{\frac{\tau v}{\|W\|^2}(-\kappa'\tau + \tau'\kappa + \kappa''\tau - \kappa\tau'') - \frac{\tau^2}{\|W\|}(\kappa^2 + \tau^2) - \frac{v^2}{\|W\|^3}(\tau'\kappa - \kappa'\tau)^2}{2(EG - F^2)^{3/2}}$$

şeklindedir. ϕ_{B_B} regle yüzeyinin birim normali aşağıdaki şekildedir:

$$U_{B_B} = \frac{(\phi_{B_B})_s \times (\phi_{B_B})_v}{\|(\phi_{B_B})_s \times (\phi_{B_B})_v\|}.$$

ϕ_{B_B} regle yüzeyi için jeodezik eğrilik, normal eğrilik ve jeodezik burulmalar sırasıyla

$$k_g = \langle U_{BB} \times T_B, T_B' \rangle = 0,$$

$$k_n = \langle \gamma_B'', U_{BB} \rangle = -\frac{\tau^2}{\|W\|}(\kappa^2 + \tau^2) - v \frac{\tau'}{\|W\|^2}(\kappa' \tau - \kappa \tau'),$$

$$\tau_g = \langle T_B, U_{BB} \times U_{BB}' \rangle = \frac{\tau^2(\kappa \tau' - \kappa' \tau)}{\|W\|^2}$$

şeklindedir.

4.3.1. Sonuç

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi bir genel helis olsun. O halde, ϕ_{BB} regle yüzeyi açılabilir bir yüzeydir.

4.3.2. Sonuç

γ eğrisi ϕ_{BB} regle yüzeyinin jeodezik bir eğrisidir.

4.3.3. Sonuç

γ genel helistir gerek ve yeter şart γ_B eğrisi ϕ_{BB} regle yüzeyinin eğrilik çizgisidir.

4.3.4. Örnek

Birim hızlı bir genel helis aşağıdaki denklem ile verilsin:

$$\gamma(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} s^{3/2}, \frac{\sqrt{3}}{3} (1-s)^{3/2}, \frac{s}{2} \right).$$

O halde, γ_B eğrisi aşağıdaki şekildedir:

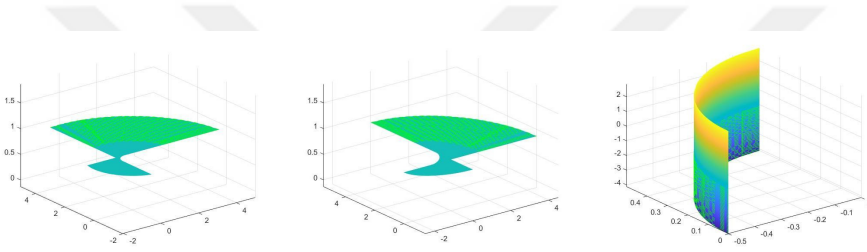
$$\gamma_B(s) = \left(-\frac{1}{2} s^{1/2}, \frac{1}{2} (1-s)^{1/2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

γ_B eğrisinin Frenet vektörleri hesaplandığında aşağıdaki şekilde bulunur:

$$T_B(s) = (-(1-s)^{1/2}, -s^{1/2}, 0), \quad N_B(s) = (s^{1/2}, -(1-s)^{1/2}, 0), \quad B_B(s) = (0, 0, 1).$$

Buradan hareketle, γ_B eğrisinin teğet, normal ve binormal yüzeyleri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
 \phi_{T_B}(s, v) &= \gamma_B(s) + vT_B(s) \\
 &= \left(-\frac{1}{2}s^{1/2}, \frac{1}{2}(1-s)^{1/2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + v\left(-(1-s)^{1/2}, -s^{1/2}, 0\right) \\
 \phi_{N_B}(s, v) &= \gamma_B(s) + vN_B(s) \\
 &= \left(-\frac{1}{2}s^{1/2}, \frac{1}{2}(1-s)^{1/2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + v\left(s^{1/2}, -(1-s)^{1/2}, 0\right) \\
 \phi_{B_B}(s, v) &= \gamma_B(s) + vB_B(s) \\
 &= \left(-\frac{1}{2}s^{1/2}, \frac{1}{2}(1-s)^{1/2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + v(0, 0, 1).
 \end{aligned}$$



Şekil 4.1. Soldan sağa sırasıyla ϕ_{T_B} , ϕ_{N_B} ve ϕ_{B_B} regle yüzeyleri

ϕ_{T_B} , ϕ_{N_B} ve ϕ_{B_B} regle yüzeylerinin dağılma parametresi

$$\begin{aligned}
 P_{T_B} &= \frac{\det(B', T_B, T_B')}{||T_B'||^2} = 0, \\
 P_{N_B} &= \frac{\det(B', N_B, N_B')}{||N_B'||^2} = 0, \\
 P_{B_B} &= \frac{\det(B', B_B, B_B')}{||B_B'||^2} = 0.
 \end{aligned}$$

şeklinde. $P_{T_B} = P_{N_B} = P_{B_B} = 0$ olduğundan ϕ_{T_B} , ϕ_{N_B} ve ϕ_{B_B} regle yüzeyleri açılabilir.

ϕ_{T_B} , ϕ_{N_B} ve ϕ_{B_B} yüzeylerinin striksiyon çizgisi

$$\begin{aligned}
 b_{T_B}(s) &= \gamma_B(s) - \frac{\langle \gamma_B'(s), T_B'(s) \rangle}{\langle T_B'(s), T_B'(s) \rangle} T_B(s) \\
 &= B(s) \\
 &= \left(-\frac{1}{2}s^{1/2}, \frac{1}{2}(1-s)^{1/2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \\
 b_{N_B}(s) &= \gamma_B(s) - \frac{\langle \gamma_B'(s), N_B'(s) \rangle}{\langle N_B'(s), N_B'(s) \rangle} N_B(s)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{1}{2}s^{1/2}, \frac{1}{2}(1-s)^{1/2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}(s^{1/2}, -(1-s)^{1/2}, 0) \\
&= \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{B_B}(s) &= \gamma_B(s) - \frac{\langle \gamma'_B(s), B'_B(s) \rangle}{\langle B'_B(s), B'_B(s) \rangle} B_B(s) \\
&= B(s) \\
&= \left(-\frac{1}{2}s^{1/2}, \frac{1}{2}(1-s)^{1/2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. ϕ_{T_B} , ϕ_{N_B} ve ϕ_{B_B} yüzeylerinin Gauss eğrilikleri

$$\begin{aligned}
K_{T_B}(s, v) &= -\frac{(\det(\gamma'_B, T_B, T'_B))^2}{(EG - F^2)^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{N_B}(s, v) &= -\frac{(\det(\gamma'_B, N_B, N'_B))^2}{(EG - F^2)^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{B_B}(s, v) &= -\frac{(\det(\gamma'_B, B_B, B'_B))^2}{(EG - F^2)^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

olarak bulunur. ϕ_{T_B} , ϕ_{N_B} ve ϕ_{B_B} regle yüzeylerinin esas eğrilikleri

$$\begin{aligned}
H_{T_B}(s, v) &= \frac{-2 \langle \gamma'(s), T_B(s) \rangle \det(\gamma'(s), T_B(s), T'_B(s))}{2(EG - F^2)^{3/2}} \\
&\quad + \frac{\det(\gamma''(s) + vT''_B(s), \gamma'(s) + vT'_B(s), T_B(s))}{2(EG - F^2)^{3/2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{N_B}(s, v) &= \frac{-2 \langle \gamma'(s), N_B(s) \rangle \det(\gamma'(s), N_B(s), N'_B(s))}{2(EG - F^2)^{3/2}} \\
&\quad + \frac{\det(\gamma''(s) + vN''_B(s), \gamma'(s) + vN'_B(s), N_B(s))}{2(EG - F^2)^{3/2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{B_B}(s, v) &= \frac{-2 \langle \gamma'(s), B_B(s) \rangle \det(\gamma'(s), B_B(s), B'_B(s))}{2(EG - F^2)^{3/2}} \\
&\quad + \frac{\det(\gamma''(s) + vB''_B(s), \gamma'(s) + vB'_B(s), B_B(s))}{2(EG - F^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

$$= 0.$$

şeklindedir. $H_{T_B}(s, v) = H_{N_B}(s, v) = H_{B_B}(s, v) = 0$ olduğundan ϕ_{T_B} , ϕ_{N_B} ve ϕ_{B_B} regle yüzeyleri açılabilirler.



5. 3-BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA B-LİFT EĞRİLERİ

Bu kısımda, öncelikle B-Lift eğrisinin Frenet vektörleri 3-boyutlu Lorentz uzayında hesaplanacaktır. Ardından, Bertrand eğrisi ve involüt eğrisinin Frenet vektörleri, B-Lift eğrisinin Frenet vektörleri cinsinden incelenecektir.

5.1. $\mathbb{R}_1^3$ Uzayında B-Lift Eğrileri İçin Karakterizasyonlar

5.1.1. Tanım

$\gamma : I \rightarrow P$ birim hızlı bir eğri olsun. O halde, $\gamma_B : I \rightarrow TP$ eğrisi γ eğrisinin B-Lifti olarak adlandırılır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\gamma_B(s) = (\gamma(s), B(s)) = B(s)|_{\gamma(s)},$$

burada B , γ eğrisinin binormal vektörüdür.

5.1.2. Önerme

γ eğrisi timelike eğri olsun. O halde, γ_B timelike ya da spacelike binormalli spacelike eğridir.

i) Kabul edelim ki γ_B eğrisi timelike binormalli spacelike eğri olsun. γ_B eğrisinin Frenet vektörleri $\{T_B, N_B, B_B\}$ ve γ eğrisinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ arasında aşağıdaki eşitlikler vardır:

a) Eğer W spacelike vektör ise,

$$\begin{pmatrix} T_B \\ N_B \\ B_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\cosh\varphi & 0 & -\sinh\varphi \\ \sinh\varphi & 0 & -\cosh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

b) Eğer W timelike vektör ise,

$$\begin{pmatrix} T_B \\ N_B \\ B_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\sinh\varphi & 0 & -\cosh\varphi \\ \cosh\varphi & 0 & \sinh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

ii) Kabul edelim ki γ_B spacelike binormalli spacelike eğri olsun. γ_B eğrisinin Frenet vektörleri $\{T_B, N_B, B_B\}$ ve γ eğrisinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ arasında aşağıdaki eşitlikler vardır:

a) Eğer W spacelike vektör ise,

$$\begin{pmatrix} T_B \\ N_B \\ B_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \cosh\varphi & 0 & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & 0 & -\cosh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

b) Eğer W timelike vektör ise,

$$\begin{pmatrix} T_B \\ N_B \\ B_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \sinh\varphi & 0 & \cosh\varphi \\ \cosh\varphi & 0 & \sinh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

5.1.3. Önerme

γ eğrisi spacelike binormalli spacelike eğri olsun. O halde, γ_B timelike bir eğridir. γ_B eğrisinin Frenet vektörleri $\{T_B, N_B, B_B\}$ ve γ eğrisinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ arasında aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$\begin{pmatrix} T_B \\ N_B \\ B_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & -\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

5.1.4. Önerme

γ timelike binormalli spacelike eğri olsun. O halde, γ_B timelike ya da spacelike binormalli spacelike eğridir.

i) γ_B timelike binormalı spacelike eğri olsun. γ_B eğrisinin Frenet vektörleri $\{T_B, N_B, B_B\}$ ve γ eğrisinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ arasında aşağıdaki eşitlikler vardır:

a) Eğer W Darboux vektörü spacelike vektör ise,

$$\begin{pmatrix} T_B \\ N_B \\ B_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\sinh\varphi & 0 & \cosh\varphi \\ \cosh\varphi & 0 & -\sinh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

b) Eğer W timelike vektör ise,

$$\begin{pmatrix} T_B \\ N_B \\ B_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\cosh\varphi & 0 & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & 0 & -\cosh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

ii) γ_B spacelike binormalı spacelike eğri olsun. γ_B eğrisinin Frenet vektörleri $\{T_B, N_B, B_B\}$ ve γ eğrisinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ arasında aşağıdaki eşitlikler vardır:

a) Eğer W Darboux vektörü spacelike vektör ise,

$$\begin{pmatrix} T_B \\ N_B \\ B_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \sinh\varphi & 0 & -\cosh\varphi \\ \cosh\varphi & 0 & -\sinh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

b) Eğer W timelike vektör ise,

$$\begin{pmatrix} T_B \\ N_B \\ B_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \cosh\varphi & 0 & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & 0 & -\cosh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

5.2. Bertrand Eğrileri ve B-Lift Eğrileri Arasındaki İlişkiler

5.2.1. Önerme

γ eğrisi spacelike binormalli spacelike eğri olsun. Bu durumda, γ_B eğrisi timelike eğri, $\tilde{\gamma}$ eğrisi de spacelike binormalli spacelike eğridir. O halde, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\tilde{T} = \cos(\theta - \varphi)N_B - \sin(\theta - \varphi)B_B,$$

$$\tilde{N} = T_B,$$

$$\tilde{B} = \sin(\theta + \varphi)N_B - \cos(\theta + \varphi)B_B.$$

5.2.2. Önerme

γ eğrisi timelike binormalli spacelike eğri olsun. O halde γ_B ve $\tilde{\gamma}$ timelike binormalli spacelike eğrilerdir. Bu durumda, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

a) Eğer W Darboux vektörü spacelike ise,

$$\tilde{T} = \sinh(\theta + \varphi)N_B + \cosh(\theta + \varphi)B_B,$$

$$\tilde{N} = T_B,$$

$$\tilde{B} = \cosh(\theta + \varphi)N_B + \sinh(\theta + \varphi)B_B.$$

b) Eğer W Darboux vektörü timelike ise,

$$\tilde{T} = -\cosh(\theta + \varphi)N_B - \sinh(\theta + \varphi)B_B,$$

$$\tilde{N} = T_B,$$

$$\tilde{B} = -\sinh(\theta + \varphi)N_B - \cosh(\theta + \varphi)B_B.$$

5.2.3. Önerme

γ eğrisi timelike binormalli spacelike eğri olsun. Bu durumda, γ_B timelike binormalli

spacelike eğri ve $\tilde{\gamma}$ eğrisi de spacelike binormalli spacelike eğridir. O halde, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

a) W Darboux vektörü spacelike olsun. O halde,

$$\tilde{T} = \sinh(\theta + \varphi)N_B - \cosh(\theta + \varphi)B_B,$$

$$\tilde{N} = T_B,$$

$$\tilde{B} = \cosh(\theta + \varphi)N_B - \sinh(\theta + \varphi)B_B.$$

b) W Darboux vektörü timelike olsun. O halde,

$$\tilde{T} = -\cosh(\theta + \varphi)N_B + \sinh(\theta + \varphi)B_B,$$

$$\tilde{N} = T_B,$$

$$\tilde{B} = -\sinh(\theta + \varphi)N_B + \cosh(\theta + \varphi)B_B.$$

5.2.4. Önerme

γ eğrisi timelike binormalli spacelike eğri olsun. O halde, γ_B eğrisi timelike binormalli spacelike eğri, $\tilde{\gamma}$ eğrisi de timelike eğridir. Bu durumda, aşağıdaki eşitlikler vardır:

a) Eğer W Darboux vektörü spacelike ise,

$$\tilde{T} = \cosh(\theta + \varphi)N_B + \sinh(\theta + \varphi)B_B,$$

$$\tilde{N} = T_B,$$

$$\tilde{B} = \sinh(\theta + \varphi)N_B + \cosh(\theta + \varphi)B_B.$$

b) Eğer W Darboux vektörü timelike ise,

$$\tilde{T} = -\sinh(\theta + \varphi)N_B - \cosh(\theta + \varphi)B_B,$$

$$\tilde{N} = T_B,$$

$$\tilde{B} = -\cosh(\theta + \varphi)N_B - \sinh(\theta + \varphi)B_B.$$

5.2.5. Önerme

γ eğrisi timelike binormalı spacelike bir eğri olsun. O halde, γ_B spacelike binormalı spacelike eğridir ve $\tilde{\gamma}$ timelike eğridir. Bu durumda, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

a) W Darboux vektörü spacelike olsun. O halde,

$$\tilde{T} = -\cosh(\theta + \varphi)N_B + \sinh(\theta + \varphi)B_B,$$

$$\tilde{N} = T_B,$$

$$\tilde{B} = -\sinh(\theta + \varphi)N_B + \cosh(\theta + \varphi)B_B.$$

b) W Darboux vektörü timelike olsun. O halde,

$$\tilde{T} = \sinh(\theta + \varphi)N_B - \cosh(\theta + \varphi)B_B,$$

$$\tilde{N} = T_B,$$

$$\tilde{B} = \cosh(\theta + \varphi)N_B - \sinh(\theta + \varphi)B_B.$$

5.2.6. Önerme

γ eğrisi timelike bir eğri olsun. O halde, γ_B timelike binormalı spacelike bir eğri ve $\tilde{\gamma}$ bir timelike eğridir. Bu durumda, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

a) W Darboux vektörü spacelike olsun. O halde,

$$\tilde{T} = -\cosh(\theta - \varphi)N_B + \sinh(\theta - \varphi)B_B,$$

$$\tilde{N} = -T_B,$$

$$\tilde{B} = -\sinh(\theta - \varphi)N_B + \cosh(\theta - \varphi)B_B.$$

b) W Darboux vektörü timelike olsun. O halde,

$$\tilde{T} = -\sinh(\theta - \varphi)N_B + \cosh(\theta - \varphi)B_B,$$

$$\tilde{N} = -T_B,$$

$$\tilde{B} = -\cosh(\theta - \varphi)N_B + \sinh(\theta - \varphi)B_B.$$

5.2.7. Önerme

γ eğrisi timelike bir eğri olsun. O halde, γ_B eğrisi spacelike binormali spacelike eğri ve $\tilde{\gamma}$ timelike eğridir. Bu durumda, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

a) W Darboux vektörü spacelike olsun. O halde,

$$\tilde{T} = \cosh(\theta - \varphi)N_B + \sinh(\theta - \varphi)B_B,$$

$$\tilde{N} = -T_B,$$

$$\tilde{B} = \sinh(\theta - \varphi)N_B + \cosh(\theta - \varphi)B_B.$$

b) W Darboux vektörü timelike olsun. O halde,

$$\tilde{T} = \sinh(\theta - \varphi)N_B + \cosh(\theta - \varphi)B_B,$$

$$\tilde{N} = -T_B,$$

$$\tilde{B} = \cosh(\theta - \varphi)N_B + \sinh(\theta - \varphi)B_B.$$

5.2.8. Önerme

γ eğrisi timelike bir eğri olsun. O halde, γ_B eğrisi timelike binormali spacelike eğri ve $\tilde{\gamma}$ spacelike eğridir. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

a) W Darboux vektörü spacelike olsun. O halde,

$$\tilde{T} = -\sinh(\theta - \varphi)N_B + \cosh(\theta - \varphi)B_B,$$

$$\tilde{N} = -T_B,$$

$$\tilde{B} = -\cosh(\theta - \varphi)N_B + \sinh(\theta - \varphi)B_B.$$

b) W Darboux vektörü timelike olsun. O halde,

$$\tilde{T} = -\cosh(\theta - \varphi)N_B + \sinh(\theta - \varphi)B_B,$$

$$\tilde{N} = -T_B,$$

$$\tilde{B} = -\sinh(\theta - \varphi)N_B + \cosh(\theta - \varphi)B_B.$$

5.2.9. Önerme

γ eğrisi timelike bir eğri olsun. O halde, γ_B eğrisi spacelike binormalı spacelike bir eğri ve $\tilde{\gamma}$ spacelike bir eğridir. Bu durumda, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

a) W Darboux vektörü spacelike olsun. O halde,

$$\tilde{T} = \sinh(\theta - \varphi)N_B + \cosh(\theta - \varphi)B_B,$$

$$\tilde{N} = -T_B,$$

$$\tilde{B} = \cosh(\theta - \varphi)N_B + \sinh(\theta - \varphi)B_B.$$

b) W Darboux vektörü timelike olsun. O halde,

$$\tilde{T} = \cosh(\theta - \varphi)N_B + \sinh(\theta - \varphi)B_B,$$

$$\tilde{N} = -T_B,$$

$$\tilde{B} = \sinh(\theta - \varphi)N_B + \cosh(\theta - \varphi)B_B.$$

5.2.10. Sonuç

γ_B eğrisi γ eğrisinin B-Lifti, $\tilde{\gamma}$ da γ eğrisinin Bertrand çifti olsun. O halde, $\{T_B, \tilde{N}\}$ kümesi lineer bağımlıdır.

5.3. İnvölüt Eğrileri ve B-Lift Eğrileri Arasındaki İlişkiler

5.3.1. Sonuç

γ eğrisi timelike eğri olsun. O halde, γ^* eğrisi spacelike binormalli spacelike eğridir.

i) Eğer W Darboux vektörü spacelike ise,

$$T^* = -T_B,$$

$$N^* = N_B,$$

$$B^* = B_B.$$

ii) Eğer W Darboux vektörü timelike ise,

$$T^* = -T_B,$$

$$N^* = B_B,$$

$$B^* = N_B.$$

şeklindedir. Burada, $\{T_B, N_B, B_B\}, \gamma_B$ eğrisinin Frenet alanıdır.

5.3.2. Sonuç

γ eğrisi timelike eğri olsun. O halde, γ^* timelike binormalli spacelike eğridir.

i) Eğer W Darboux vektörü spacelike ise,

$$T^* = -T_B,$$

$$N^* = -B_B,$$

$$B^* = N_B.$$

ii) Eğer W Darboux vektörü timelike ise,

$$T^* = -T_B,$$

$$N^* = N_B,$$

$$B^* = -B_B,$$

şeklindedir. Burada $\{T_B, N_B, B_B\}$, γ_B eğrisinin Frenet alanıdır.

5.3.3. Sonuç

γ spacelike binormalli spacelike eğri olsun. O halde, γ^* timelike eğridir.

i) Eğer W Darboux vektörü spacelike ise,

$$T^* = -T_B,$$

$$N^* = -B_B,$$

$$B^* = N_B.$$

ii) Eğer W Darboux vektörü timelike ise,

$$T^* = -T_B,$$

$$N^* = N_B,$$

$$B^* = -B_B,$$

şeklindedir. Burada $\{T_B, N_B, B_B\}$, γ_B nin Frenet alanıdır.

5.3.4. Sonuç

γ eğrisi timelike binormalli spacelike eğri olsun. O halde, γ^* timelike eğridir. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$T^* = -T_B,$$

$$N^* = N_B,$$

$$B^* = -B_B,$$

burada $\{T_B, N_B, B_B\}$, γ_B eğrisinin Frenet alanıdır.

5.3.5. Sonuç

γ eğrisi spacelike binormali spacelike eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler vardır:

i) γ^* eğrisi spacelike binormali spacelike eğridir. Bu durumda,

$$T^* = T_B,$$

$$N^* = N_B,$$

$$B^* = B_B,$$

ii) γ^* eğrisi spacelike binormali timelike eğridir. Bu durumda,

$$T^* = T_B,$$

$$N^* = -N_B,$$

$$B^* = B_B,$$

burada $\{T_B, N_B, B_B\}$, γ_B eğrisinin Frenet alanıdır.

5.3.6. Sonuç

γ eğrisi timelike binormali spacelike eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

i) γ^* eğrisi timelike binormali spacelike eğri olsun. O halde,

$$T^* = T_B,$$

$$N^* = -N_B,$$

$$B^* = -B_B.$$

ii) γ^* eğrisi spacelike binormalı spacelike eğri olsun. O halde,

$$T^* = T_B,$$

$$N^* = N_B,$$

$$B^* = B_B,$$

burada $\{T_B, N_B, B_B\}$, γ_B eğrisinin Frenet alanıdır.



6. DUAL UZAYDA B-LİFT EĞRİLERİ

Bu kısımda, ilk olarak dual uzayda B-Lift eğrileri tanımlanmıştır. Sonrasında B-Lift eğrilerinin Frenet operatörleri elde edilip esas eğrinin slant helis ya da Darboux helis olma durumuna göre B-Lift eğrisinin karakterizasyonu incelenecektir.

6.1. $\mathbb{D}^3$ Uzayında B-Lift Eğrileri İçin Karakterizasyonlar

6.1.1. Tanım

Birim hızlı $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{D}^3$ eğrisi için $\tilde{\gamma}_B : I \rightarrow \mathbb{D}^3$ eğrisi $\mathbb{D}^3$ de $\tilde{\gamma}$ eğrisinin B-Lifti olarak adlandırılır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\tilde{\gamma}_B(s) = \gamma_B(s) + \varepsilon \gamma_B^*(s) \quad (6.1)$$

burada $\gamma_B = B$ ve $\gamma_B^* = B^*$ sırasıyla γ ve γ^* eğrilerinin binormal vektörleridir.

6.1.2. Teorem

$\tilde{\gamma}_B$ eğrisi birim dual $\tilde{\gamma}$ eğrisinin B-Lifti olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}_B \\ \tilde{N}_B \\ \tilde{B}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\cos \Phi & 0 & \sin \Phi \\ \sin \Phi & 0 & \cos \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{N} \\ \tilde{B} \end{pmatrix},$$

burada $\{\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}\}$ ve $\{\tilde{T}_B, \tilde{N}_B$ sırasıyla $\tilde{B}_B\}$, $\tilde{\gamma}$ ve $\tilde{\gamma}_B$ eğrilerinin Frenet vektörleridir. (Φ açısı $\tilde{B}$ ve $\tilde{W}$ arasındaki dual açıdır.)

İspat

$\tilde{\gamma}_B$ eğrisi $\tilde{\gamma}$ eğrisinin B-Lifti olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\gamma}_B &= \tilde{B}, \quad \gamma'_B = -\tilde{\tau}\tilde{N} \\
 \tilde{T}_B &= \frac{\gamma'_B}{\|\gamma'_B\|} = \frac{-\tilde{\tau}\tilde{N}}{-\tilde{\tau}} = -\tilde{N}, \\
 \tilde{\gamma}''_B &= -\tilde{\tau}'\tilde{N} - \tilde{\tau}(-\tilde{\kappa}\tilde{T} + \tilde{\tau}\tilde{B}), \\
 \tilde{\gamma}''_B &= \tilde{\kappa}\tilde{\tau}\tilde{T} - \tilde{\tau}'\tilde{N} - \tilde{\tau}^2\tilde{B}, \\
 \tilde{\gamma}'_B \times \tilde{\gamma}''_B &= \tilde{\tau}^3\tilde{T} + \tilde{\kappa}\tilde{\tau}^2\tilde{B}, \\
 \|\tilde{\gamma}'_B \times \tilde{\gamma}''_B\| &= \tilde{\tau}^2\sqrt{\tilde{\kappa}^2 + \tilde{\tau}^2}.
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

eşitlikleri vardır. $\tilde{B}_B(s) = \frac{\tilde{\gamma}'_B \times \tilde{\gamma}''_B}{\|\tilde{\gamma}'_B \times \tilde{\gamma}''_B\|}$ olduğundan

$$\tilde{B}_B(s) = \frac{\tilde{\tau}}{\|\tilde{W}\|}\tilde{T} + \frac{\tilde{\kappa}}{\|\tilde{W}\|}\tilde{B}. \tag{6.3}$$

elde edilir. (6.2) ve (6.3) eşitliklerinden

$$\tilde{N}_B(s) = \tilde{B}_B(s) \times \tilde{T}_B(s) = \frac{\tilde{\kappa}}{\|\tilde{W}\|}\tilde{T} - \frac{\tilde{\tau}}{\|\tilde{W}\|}\tilde{B}. \tag{6.4}$$

elde edilir. (6.2), (6.3) ve (6.4) eşitliklerinden ispat tamamlanır.

6.1.3. Önerme

$\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ açısı $\tilde{\gamma}$ nın dual Darboux vektörü $\tilde{W}$ ve dual binormal vektörü $\tilde{B}$ arasındaki dual açı olsun. Bu durumda $\tilde{\gamma}$ eğrisinin Frenet vektörlerinin reel ve dual kısımları arasında aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$\begin{aligned}
 t_B &= -n, \\
 n_B &= \cos\varphi t - \sin\varphi b, \\
 b_B &= \sin\varphi t + \cos\varphi b,
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} t_B^* &= -n^*, \\ n_B^* &= \cos\varphi t^* - \sin\varphi b^* + \varphi^*(-\sin\varphi t - \cos\varphi b), \\ b_B^* &= \sin\varphi t^* - \cos\varphi b^* + \varphi^*(\cos\varphi t - \sin\varphi b). \end{aligned}$$

burada $\tilde{T} = t + \varepsilon t^*$, $\tilde{N} = n + \varepsilon n^*$, $\tilde{B} = b + \varepsilon b^*$; $\tilde{T}_B = t_B + \varepsilon t_B^*$, $\tilde{N}_B = n_B + \varepsilon n_B^*$, $\tilde{B}_B = b_B + \varepsilon b_B^*$.

6.1.4. Teorem

$\tilde{\gamma}_B$ eğrisi $\tilde{\gamma}$ birim dual eğrisinin B-Lifti olsun. O halde, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\tilde{\kappa}_B = \frac{\sqrt{\tilde{\kappa}^2 + \tilde{\tau}^2}}{\tilde{\tau}}, \quad \tilde{\tau}_B = \frac{\tilde{\kappa}'\tilde{\tau} - \tilde{\kappa}\tilde{\tau}'}{\tilde{\tau}(\tilde{\kappa}^2 + \tilde{\tau}^2)},$$

burada $\tilde{\kappa}_B$ ve $\tilde{\tau}_B$ sırasıyla $\tilde{\gamma}_B$ nin eğrilik ve burulmasıdır.

İspat

(6.2) eşitliğinden biliyoruz ki

$$\|\tilde{\gamma}_B' \times \tilde{\gamma}_B''\| = \tilde{\tau}\sqrt{\tilde{\kappa}^2 + \tilde{\tau}^2}, \quad \|\tilde{\gamma}_B'\| = \tilde{\tau}. \quad (6.5)$$

şeklindedir. $\tilde{\kappa}_B = \frac{\|\tilde{\gamma}_B' \times \tilde{\gamma}_B''\|}{\|\tilde{\gamma}_B'\|^3}$ olduğundan aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\tilde{\kappa}_B(s) = \frac{\sqrt{\tilde{\kappa}^2 + \tilde{\tau}^2}}{\tilde{\tau}}. \quad (6.6)$$

$\tilde{\gamma}_B$ nin burulması

$$\tilde{\tau}_B = \frac{\langle \tilde{\gamma}_B' \times \tilde{\gamma}_B'', \tilde{\gamma}_B''' \rangle}{\|\tilde{\gamma}_B' \times \tilde{\gamma}_B''\|^2} \quad (6.7)$$

şeklindedir. (6.2) eşitliğinden biliyoruz ki

$$\tilde{\gamma}_B''' = (\tilde{\kappa}'\tilde{\tau} + 2\tilde{\kappa}\tilde{\tau}')\tilde{T} + (\tilde{\kappa}^2\tilde{\tau} - \tilde{\tau}'' + \tilde{\tau}^3)\tilde{N} - 3\tilde{\tau}\tilde{\tau}'\tilde{B} \quad (6.8)$$

dir. (6.2) ve (6.8) eşitliklerinden

$$\tilde{\tau}_B(s) = \frac{\tilde{\kappa}'\tilde{\tau} - \tilde{\kappa}\tilde{\tau}'}{\tilde{\tau}(\tilde{\kappa}^2 + \tilde{\tau}^2)}. \quad (6.9)$$

olarak elde edilir.

6.1.5. Teorem

$\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{D}^3$ eğrisi dual slant helistir gerek ve yeter şart $\tilde{\gamma}_B$ eğrisi dual genel helistir.

İspat

Kabul edelim ki $\tilde{\gamma}_B$ eğrisi dual genel helis olsun. 6.1.4 Teoreminden biliyoruz ki

$$\frac{\tilde{\tau}_B}{\tilde{\kappa}_B} = -\frac{\tilde{\kappa}^2}{(\tilde{\kappa}^2 + \tilde{\tau}^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\kappa}}\right)'(s) = -\sigma(s) = \text{sabit}. \quad (6.10)$$

şeklindedir. Burada κ ve τ , γ eğrisinin dual eğriliği ve dual burulmasıdır. $\sigma(s)=\text{sabit}$ olduğundan γ eğrisi dual genel helistir. Tersine, γ eğrisi dual slant helis olsun. 2.3.13 Önermesinden biliyoruz ki

$$\frac{\tilde{\kappa}^2}{(\tilde{\kappa}^2 + \tilde{\tau}^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\kappa}}\right)'(s) = \sigma(s) = \text{sabit},$$

şeklindedir. 6.1.4 Teoreminden

$$\frac{\tilde{\tau}_B}{\tilde{\kappa}_B} = -\sigma(s) = \text{sabit}.$$

şeklindedir. O halde, $\tilde{\gamma}_B$ eğrisi dual genel helistir.

6.1.6. Sonuç

$\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{D}^3$ eğrisi dual Darboux helistir gerek ve yeter şart $\tilde{\gamma}_B$ eğrisi dual genel helistir.





7. KUATERNİYONİK B-LİFT EĞRİLERİ

Bu bölümde, uzaysal kuaterniyonik b-lift eğrisini tanımlıyoruz ve ayrıca bu eğrilerin Frenet operatörlerini elde ediyoruz. Ayrıca uzaysal kuaterniyonik b-lift eğrisinin ana eğrisinin slant helis olup olmama durumunu inceliyoruz ve kuaterniyonik slant helisler ile kuaterniyonik genel helisler arasındaki ilişkileri keşfediyoruz.

7.1. Kuaterniyonik B-Lift Eğrileri İçin Karakterizasyonlar

7.1.1. Tanım

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı uzaysal kuaterniyonik bir eğri olsun. O halde, aşağıdaki şekilde tanımlanan $\gamma_b : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi γ eğrisinin b-lifti olarak adlandırılır:

$$\gamma_b(s) = (\gamma(s), b(s)) = b(s)|_{\gamma(s)} \quad (7.1)$$

burada b , γ eğrisinin binormal vektörüdür.

7.1.2. Teorem

γ_b eğrisi uzaysal kuaterniyonik γ eğrisinin b-lifti olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{aligned} t_b(s) &= -n(s), \\ n_b(s) &= \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} t(s) - \frac{\tau(s)}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} b(s), \\ b_b(s) &= \frac{\tau(s)}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} t(s) + \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} b(s) \end{aligned}$$

burada $\{t(s), n(s), b(s)\}$ ve $\{t_b(s), n_b(s), b_b(s)\}$ sırasıyla γ ve γ_b eğrilerinin Frenet vektörleridir. Ek olarak, κ eğrilik fonksiyonu, τ da burulma fonksiyonudur. (Burulma özel olarak sıfırdan büyük alınacaktır.)

İspat

γ_b eğrisi γ eğrisinin uzaysal kuaterniyonik b-lift eğrisi olsun. O halde,

$$\gamma_b = b, \quad \gamma'_b = -\tau n \quad (7.2)$$

$$t_b(s) = \frac{\gamma'_b}{\|\gamma'_b\|} = \frac{-\tau n}{|\tau|} = -n \quad (\tau > 0), \quad (7.3)$$

$$\gamma''_b = -\tau' n - \tau(-\kappa t + \tau b), \quad (7.4)$$

$$\gamma''_b = \kappa \tau t - \tau' n - \tau^2 b, \quad (7.5)$$

$$\gamma'_b \times \gamma''_b = \tau^3 t + \kappa \tau^2 b, \quad (7.6)$$

$$\|\gamma'_b \times \gamma''_b\| = \tau^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}. \quad (7.7)$$

eşitlikleri sağlanır. $b_b(s) = \frac{\gamma'_b \times \gamma''_b}{\|\gamma'_b \times \gamma''_b\|}$ eşitliği ve (7.2) eşitliğindeki ifadelerden

$$b_b(s) = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} t + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} b. \quad (7.8)$$

olarak bulunur. (7.2) ve (7.3) kullanılarak

$$n_b(s) = b_b(s) \times t_b(s) = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} t - \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} b. \quad (7.9)$$

eşitliği elde edilir. (7.2), (7.3) ve (7.4) eşitlikleriyle ispat tamamlanır.

7.1.3. Teorem

γ_b eğrisi uzaysal kuaterniyonik γ eğrisinin b-lifti olsun. O halde, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\kappa_b(s) = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\tau}, \quad \tau_b(s) = \frac{\kappa' \tau - \kappa \tau'}{\tau(\kappa^2 + \tau^2)},$$

burada κ_b ve τ_b sırasıyla γ_b eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır.

İspat

(7.2) eşitliğinden biliniyor ki,

$$\|\gamma'_b \times \gamma''_b\| = \tau \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}, \quad \|\gamma'_b\| = \tau \quad (7.10)$$

şeklindedir. $\kappa_b = \frac{\|\gamma'_b \times \gamma''_b\|}{\|\gamma'_b\|^3}$ olduğundan

$$\kappa_b(s) = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\tau} \quad (7.11)$$

eşitliği sağlanır. γ_b eğrisinin burulması

$$\tau_b = \frac{h(\gamma'_b \times \gamma''_b, \gamma'''_b)}{\|\gamma'_b \times \gamma''_b\|^2} \quad (7.12)$$

şeklindedir. (7.2) eşitliğinden

$$\gamma'''_b = (\kappa' \tau + 2\kappa \tau')t + (\kappa^2 \tau - \tau'' + \tau^3)n - 3\tau \tau' b \quad (7.13)$$

eşitliğine sahibiz. O halde, (7.2), (7.7) ve (7.8) eşitliklerinden

$$\tau_b(s) = \frac{\kappa' \tau - \kappa \tau'}{\tau(\kappa^2 + \tau^2)} \quad (7.14)$$

eşitliği de sağlanmış olur.

7.1.4. Teorem

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi kuaterniyonik slant helistir gerek ve yeter şart γ_b eğrisi kuaterniyonik genel helistir.

İspat

γ eğrisi slant helis olsun. O halde,

$$\sigma(s) = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s) = \text{sabit},$$

burada κ ve τ , γ eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır. 7.1.3 Teoreminden

$$\frac{\tau_b}{\kappa_b} = -\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s) = -\sigma(s) = \text{sabit} \quad (7.15)$$

elde edilir. O halde, γ_b eğrisi genel helistir. Tersine, γ_b eğrisi genel helis olsun. Bu durumda,

$$\frac{\tau_b}{\kappa_b} = -\sigma(s) = \text{sabit}$$

şeklindedir. $\sigma(s) = \text{sabit}$ olduğundan γ bir slant helistir.



8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, ilk olarak, 3-boyutlu Öklid uzayında verilen bir eğrinin her noktasındaki binormal vektörünün uç noktalarının birleştirilmesiyle oluşan B-Lift eğrisi tanımlanmıştır ve bu eğriyle ilgili karakterizasyonlar verilmiştir. Daha sonra, dayanak eğrisini B-Lift eğrisi olarak oluşturduğumuz, teğet, normal ve binormal yüzeylerinin geometrik değişmezleri ve tekillikleri incelenmiştir. Sonrasında, 3-boyutlu Lorentz uzayında B-Lift eğrileri tanımlanarak, Bertrand eğrisi ve involüt eğrisinin Frenet vektörleriyle, B-Lift eğrisinin Frenet vektörleri arasındaki eşitlikler elde edilmiştir. Çalışmanın devamında, dual uzayda B-Lift eğrileri tanımlanarak, esas eğrinin dual slant helis olması için gerek ve yeter şartın B-Lift eğrisinin genel helis olması şartı ispatlanmıştır. Son olarak da, uzaysal kuaterniyonik b-lift eğrileri tanımlanarak, bu eğri yardımıyla kuaterniyonik genel helisler ve kuaterniyonik slant helisler arasındaki ilişkiler ortaya konmuştur.

Tezde bulunan sonuçlar, helisler, slant helisler, özel eğriler ve regle yüzeylerle ilgilenen araştırmacılar için bir kaynak niteliğindedir. B-Lift eğrilerle yapılan temel tanım ve teoremler 3 boyutlu dual Lorentz uzayına da taşınabilir.



KAYNAKLAR

1. Thorpe, J. A. (1979) *Elementary Topics in Differential Geometry*. New York: Springer, 254.
2. Ergün, E. and Çalışkan, M. (2012). On natural lift of a curve, *Pure Mathematical Sciences*, 1, 81–85.
3. Ergün, E., Bilici, M. and Çalışkan, M. (2012). The Frenet vector fields and the curvatures of the natural lift curve, *The Bulletin of Soc. for Mathematical Services and Standards*, 2, 38–43.
4. Karaca, E. and Çalışkan, M. (2020). Ruled Surfaces and Tangent Bundle of Unit 2-Sphere of Natural Lift Curves, *Gazi University Journal of Science*, 33(3), 751–759.
5. O'Neill, B. (1966). *Elementary Differential Geometry*. New York: Academic Press, 98–123.
6. Izumiya, S. and Takeuchi, N. (2004). New special curves and developable surfaces, *Turk J. Math.*, 28, 153–163.
7. Kim, Y. H. and Yoon, D. W. (2004). Classification of ruled surfaces in Minkowski 3-Spaces, *Journal of Geometry and Physics*, 49 (1), 89–100.
8. Yıldız, Ö. G., Akyiğit, M. and Tosun, M. (2021). On the trajectory ruled surfaces of framed base curves in the Euclidean Space, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44 (9), 7463–7470.
9. Hathout, F., Bekar, M. and Yaylı, Y. (2017). Ruled Surfaces and tangent bundle of unit 2-sphere, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 14 (10), 1750145.
10. Şentürk, G. Y. and Yüce, S. (2017). Bertrand Offsets of Ruled Surfaces with Darboux Frame, *Results in Mathematics*, 72, 1151–1159.
11. Ergün, E., Çalışkan, M. (2012). Ruled Surface Pair Generated by a Curve and its Natural Lift in $\mathbb{R}^3$, *Pure Mathematical Sciences*, 1, 75-80.
12. Lancret, M. A. (1806). Mémoire sur les courbes à double courbure, *Mémoires présentés à l'Institut*, 1, 416–454.
13. Scofield, P. D. (1995). Curves of constant precession, *The American Mathematical Monthly*, 102, 531–537.
14. Barros, M. (1997). General helices and a theorem of Lancret, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125(5), 1503–1509.

15. Kula, L. and Yaylı, Y. (2005). On slant helix and its spherical indicatrix, *Applied Mathematics and Computation*, 169, 600–607.
16. Kula, L., Ekmekci, N., Yaylı, Y. and İlarslan, K. (2010). Characterizations of slant helices in Euclidean 3-space, *Turk J. Math.*, 34, 261–273.
17. Zıplar, E., Şenol, A. and Yaylı, Y. (2012). On Darboux Helices in Euclidean 3-Space, *Global Journals Inc.*, 12, 73–80.
18. Ekmekci, N., İlarslan, K. (2001). On Bertrand curves and their characterization, *Differential Geometry Dynamical Systems*, 3 (2), 17–24.
19. Millman, R. S. and Parker, G. D. (1977). *Elements of Differential Geometry*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
20. Hacısalihoğlu, H. H. (1983). *Differential Geometry*, Malatya: İnönü University, 1–78.
21. Çalışkan, M. and Bilici, M. (2012). Some Characterizations for the Pair of Involute-Evolute Curves in Euclidean Space E^3 , *Bulletin of Pure and Applied Sciences*, 21, 289–294.
22. Bilici, M. and Çalışkan, M. (2009). On the Involutives of the Spacelike Curve with a Timelike Binormal in Minkowski 3-Space, *International Mathematical Forum*, 31, 1497–1509.
23. Study, E. (1903). *Die Geometrie der Dynamen*. Leipzig: Verlag Teubner.
24. Şenyurt, S., Bilici, M. and Çalışkan, M. (2010). Some Characterizations for the Involute Curves in Dual Space, *Arxiv*, 1008, 5276.
25. Özkaldı, S., İlarslan, K. and Yaylı, Y. (2009). On Mannheim Partner Curve in Dual Space, *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta*, 17 (2), 131–142.
26. Güngör, M. A. and Tosun, M. (2010). A Study on Dual Mannheim Partner Curves, *International Mathematical Forum*, 47 (5), 2319–2330.
27. Hamilton, W. R. (1844). On quaternions or on a new system of imaginaries in algebra, *The London, Edinburgh, Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 25 , 489–495.
28. Bharathi, K. and Nagaraj, M. (1987). Quaternion valued function of a real variable Serret–Frenet formula, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 18 , 507–511.
29. Karadağ, M. and Sivridağ, A. I. (1997). Characterizations for the quaternionic inclined curves, *Erciyes University Journal of Science*, 13, 37–53.
30. Kocayiğit, H. and Pekacar, B. B. (2013). Characterizations of slant helices according to quaternionic frame, *Applied Mathematical Sciences*, 7, 3739–3748.

31. Şahiner, B. (2018). Quaternionic direction curves, *Kyungpook Mathematical Journal* , 58, 377–388.
32. Şenyurt, S., Cevahir, C. and Altun, Y. (2017). On spatial quaternionic involute curve a new view, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 27, 1815–1824.
33. Öztürk, G., Kişi, İ. and Büyükkütük, S. (2017). Constant ratio quaternionic curves in Euclidean spaces, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 27, 1659–1673.
34. Kahraman, F., Gök, İ. and Hacısalihoğlu, H. H. (2012). On the quaternionic B2 slant helices in the semi-Euclidean space E_2^4 , *Applied Mathematics and Computation*, 218, 6391–6400.
35. Şenyurt, S., Cevahir, C. and Altun, Y. (2020). On the Smarandache Curves of Spatial Quaternionic Involute Curve, *Proceedings of the National Academy of Sciences, India*, 90, 827–837.
36. Çöken, A. C. and Tuna, A. (2004). On the quaternionic inclined curves in the semi-Euclidean space E_2^4 , *Applied Mathematics and Computation*, 155, 373–389.
37. Giardino, S. (2021). A primer on the differential geometry of quaternionic curves, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44, 14428–14436.
38. Carmo, M. D. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. New Jersey:Prentice-Hall,Inc.
39. Izumiya, S. and Takeuchi, N. (2001). Singularities of ruled surfaces in $\mathbb{R}^3$, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 130 (1), 1-11.
40. Hacısalihoğlu, H. H. (1983). *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*. Ankara:Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları.
41. Ward J. P. (1997). *Quaternions and Cayley Numbers*, New York: Kluwer Academic Publishers.
42. O'Neill, B. (1983). *Semi Riemann Geometry*. New York: Academic Press, 42–187.
43. Önder, M. and Uğurlu, H. H. (2013). Frenet frames and invariants of timelike ruled surfaces, *Ain Shams Engineering Journal*, 4, 507.
44. Walrave, J. (1995). Curves and Surfaces in Minkowski Space, *Faculteit Wetenschappen - Faculteit Wetenschappen KU Leuven*, 1-31.
45. Ratcliffe, J. G. (1994). Foundations of Hyperbolic Manifolds, *Springer-Verlag Inc., New York*, 54-98.
46. Öztekin, H. B. and Bektaş, M. (2010). On Representation formulae for Bertrand curves in the Minkowski 3-space, *Scientia Magna*, 6 (11), 89–96.

47. Ergün, E. and Çalışkan, M. (2018). On the Natural Lift Curve and the Involute Curve, *Journal of Science and Arts*, 45, 869–890.
48. Veldkamp, G. R. (1976). On the use of dual numbers, vectors and matrices in instantaneous, spatial kinematics, *Mechanism and Machine Theory*, 2 (11), 141–156.
49. Sağlam, D., Özkan, S. and Özdamar, D. (2016). Slant helices in dual Lorentzian Space $\mathbb{D}_1^3$, *Natural Science and Discovery*, 2 (1), 3–10.
50. Şahiner, B. and Önder, M. (2016). Slant Helices, Darboux Helices and Similar Curves in Dual Space $\mathbb{D}^3$, *Mathematica Moravica*, 20 (1), 89–103.





Gazili olmak ayrıcalıktır