

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇİFT BULANIK SAYI DİZİLERİNİN KABA
İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

MUHAMMED EMİN ÇAYAR

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Funda BABAARSLAN

TEMMUZ – 2023

YOZGAT

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ÇİFT BULANIK SAYI DİZİLERİNİN KABA
İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI**

MUHAMMED EMİN ÇAYAR

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Funda BABAARSLAN

TEMMUZ – 2023

YOZGAT



**YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ONAY FORMU**

T.C.

**YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111320001 numaralı öğrencisi Muhammed Emin ÇAYAR'ın hazırladığı “**Çift Bulanık Sayı Dizilerinin Kaba İstatistiksel Yakınsaklığı**” başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 06/07/2023 Perşembe günü saat 13:00'da yapılmış, tezin onayına oy birliği ile karar verilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üyesi Funda BABAARSLAN
(Danışman)

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Murat BABAARSLAN

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih vesayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

...../...../.....

Prof. Dr. Hasan Güner BERKANT

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğini beyan ederim.

Muhammed Emin

ÇAYAR

06/07/2023

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Yozgat Bozok Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dr. Öğr. Üyesi Funda BABAARSLAN yönetiminde hazırlanarak Yozgat Bozok Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur. Yüksek lisans eğitimim boyunca beni yönlendiren, çalışmamın her aşamasında ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Funda BABAARSLAN'a, hayatımın her alanında yanımda olan sevgili eşim Semanur ÇAYAR ve kızım Nisanur ÇAYAR'a saygılarımı ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Muhammed Emin

ÇAYAR

06/07/2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

ÇİFT BULANIK SAYI DİZİLERİNİN KABA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

MUHAMMED EMİN ÇAYAR

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ FUNDA BABAARSLAN

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, yakınsaklık teorisinin öneminden ve tarihsel gelişiminden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, bulanık sayı dizisi tanımı ve bu dizilerin bazı yakınsaklık çeşitlerine yer verilmiştir. Ayrıca, bu çalışmanın temelini oluşturan çift bulanık sayı dizisi tanımı ile birlikte bu dizilerin istatistiksel yakınsaklığı ve ideal yakınsaklığı kavramları için bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, çift bulanık sayı dizilerinin kaba istatistiksel yakınsaklığı ve kaba istatistiksel çift Cauchy dizisi tanımlanmıştır. Ayrıca, kaba istatistiksel limit kümesi oluşturularak bu kümenin bazı özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, çift bulanık sayı dizileri için kaba ideal yakınsaklık ve kaba ideal çift Cauchy kavramları tanımlanarak aralarındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca, çift bulanık sayı dizileri için kaba ideal limit kümesi ve özellikleri verilmiştir. Son olarak, bu dizilerin ideal yakınsaklığı ile kaba ideal yakınsaklığı arasındaki ilişki verilmiştir.

Beşinci bölümde bazı sonuçlar yer almaktadır.

2023, viii + 40 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Çift bulanık sayı dizisi, İstatistiksel yakınsaklık, Kaba istatistiksel yakınsaklık, Kaba ideal yakınsaklık.

ABSTRACT

MASTER THESIS

ROUGH STATISTICAL CONVERGENCE OF DOUBLE SEQUENCES OF FUZZY NUMBERS

MUHAMMED EMİN ÇAYAR

**YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
SCHOOL OF GRADUATES STUDIES**

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR: ASSİST. PROF. DR. FUNDA BABAARSLAN

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, the importance of convergence theory and its historical development are mentioned.

In the second chapter, the definition of sequences of fuzzy number and some types of convergence of these sequences are given.

In the third chapter, the concepts of rough statistical convergence of double sequences of fuzzy numbers and rough statistical double Cauchy sequence are defined. Also, by defining the rough statistical limit set, some properties of this set are examined.

In the fourth chapter, rough ideal convergence and rough ideal double Cauchy sequence of double sequences of fuzzy numbers are defined and the relationship between them is investigated. Also, rough ideal limit set and its properties are studied for double sequences of fuzzy numbers. Finally, the relationship between ideal convergence and rough ideal convergence of these sequences are given.

The fifth chapter contains some results.

2023, viii + 40 Page

Keywords: Double sequences of fuzzy numbers, Statistical convergence, Rough statistical convergence, Rough ideal convergence.

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI.....	ii
TEZ BEYANI.....	iii
ÖNSÖZ.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Bulanık Sayı Dizileri..	3
2.2. Çift Bulanık Sayı Dizileri.....	6
3. ÇİFT BULANIK SAYI DİZİLERİNİN KABA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI.....	10
3.1. Çift Bulanık Sayı Dizilerinin Kaba Yakınsaklığı.....	10
3.2. Çift Bulanık Sayı Dizilerinin Kaba İstatistiksel Yakınsaklığı.....	13
4. ÇİFT BULANIK SAYI DİZİLERİNİN KABA İDEAL YAKINSAKLIĞI	20
4.1. Çift Bulanık Sayı Dizilerinin Kaba İdeal Yakınsaklığı	20
5. SONUÇ.....	34
6. KAYNAKLAR.....	35

SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

Simgeler

Açıklamalar

$\mathbb{R}$

Reel sayılar kümesi

$L(\mathbb{R})$

Bulanık sayılar kümesi

(X_{η_s})

Çift bulanık sayı dizisi

$LIM^r X_{\eta_s}$

(X_{η_s}) dizisinin kaba limit kümesi

$St_2 - LIM^r X_{\eta_s}$

(X_{η_s}) dizisinin kaba istatistiksel limit kümesi

$I_2 - LIM^r X_{\eta_s}$

(X_{η_s}) dizisinin ideal yakınsaklığı

1. GİRİŞ

Sonlu boyutlu normlu uzaylarda kaba yakınsaklık kavramı ilk olarak Phu tarafından 2001 yılında aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve (x_η) , X uzayında bir dizisi olsun. $r \geq 0$ olmak üzere, eğer her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\eta \geq \eta_0(\varepsilon)$ olduğunda

$$\|x_\eta - x_*\| < r + \varepsilon$$

koşulunu sağlayacak bir $\eta_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_η) dizisi, x_* noktasına kaba yakınsaktır denir. $r = 0$ olduğunda klasik yakınsaklık elde edilir. Ancak $r > 0$ olduğu durumda kaba yakınsaklık önem kazanmaktadır. Örneğin, bir x_* noktasına yakınsak olduğu öngörülen bir (y_η) dizisinin terimlerinin hesaplanamadığı veya ölçülemediği durumda bu dizi yerine, işlemleri kolaylaştıracak terimleri bilinen, $\|x_\eta - y_\eta\| \leq r$ olacak şekilde bir (x_η) yaklaşım dizisinden yararlanılır. Bu dizi, klasik anlamda x_* noktasına yakınsak değildir ancak kaba yakınsaktır.

Bu koşulu sağlayan bir x_* noktası, (x_η) dizisinin bir r –limit noktası olarak adlandırılır. $r > 0$ olduğu durumda limit noktası tek olmayacağından Phu, r – limit kümesi olarak adlandırılan

$$LIM^r x_\eta = \{x_* \in X : x_\eta \xrightarrow{r} x_*\}$$

kümesini tanımlayarak bu kümenin geometrik ve topolojik özelliklerini araştırmıştır.

2008 yılında Aytar (Aytar, 2008), doğal yoğunluk kavramını kullanarak kaba yakınsaklık fikrini n – boyutlu reel uzayda kaba istatistiksel yakınsaklığa genelleştirir. Daha sonra, Pal vd. (Pal, Debraj ve Dutta, 2013) ideal kavramını kullanarak kaba yakınsaklığı ve kaba istatistiksel yakınsaklığı genişleten kaba ideal yakınsaklığı tanımlamışlardır.

Akçay ve Aytar (Akçay ve Aytar, 2015) vektör uzay özelliklerine sahip olmadığı için normlu uzay kategorisinde olmayan bulanık sayılar uzayındaki dizilerin kaba yakınsaklığını araştırmış, Debnath ve Rakshit (Debnath ve Rakshit, 2019) ise bu dizilerin kaba istatistiksel yakınsaklığı üzerine çalışmışlardır. Bulanık sayı dizileri için ideal yakınsaklık, ideal Cauchy dizisi, ideal sınırlılık gibi önemli kavramlar Nuray (Nuray,

2008) tarafından literatüre kazandırılmıştır. Aynı zamanda Kumar ve Kumar (Kumar ve Kumar, 2008) bu diziler için ideal yakınsaklığı çalışmıştır.

Çift diziler toplanabilme metodları başta olmak üzere farklı uygulama alanlarına sahip olduğundan birçok matematikçinin ilgisini çekmiştir. Örneğin, Dünder ve Çakan (Dünder ve Çakan, 2014) çift dizilerin kaba yakınsaklığı, Dünder (Dünder, 2016) çift dizilerin kaba ideal yakınsaklığı, Kişi ve Ünal (Kişi ve Ünal, 2021) sonlu boyutlu uzaylarda çift fark dizileri için kaba istatistiksel yakınsaklığı üzerine çalışmışlardır. Ayrıca, Savaş (Savaş, 1996) tarafından tanımlanan çift bulanık sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını Savaş ve Mursaleen (Savaş ve Mursaleen, 2004), kaba yakınsaklığını Babaarslan ve Tuncer (Babaarslan ve Tuncer, 2020), ideal yakınsaklığını Dünder ve Talo (Dünder ve Talo, 2013) incelemişlerdir.

Bu tez çalışmasında, ilk olarak çift bulanık sayı dizilerinin kaba istatistiksel yakınsaklığı ve kaba istatistiksel limit kümesi tanımlanmıştır. Ayrıca, bu kümenin geometrik ve topolojik özellikleri verilmiş, istatistiksel yakınsaklık ve kaba istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiden bahsedilmiştir. Dahası, bu diziler için ideal kavramı kullanılarak genelleştirilen kaba ideal yakınsaklık ve kaba ideal çift Cauchy dizisi tanımlanmıştır. Çift bulanık sayı dizilerinde kaba ideal yakınsaklık için önemli teoremler ispatlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bulanık sayı dizileri ve çift bulanık sayı dizileri için temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Bulanık Sayı Dizileri

Tanım 2.1.1. $X: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ şeklinde tanımlanan ve aşağıdaki şartları sağlayan fonksiyona bulanık sayı denir.

- ✓ X normaldir. Yani $X(x_0) = 1$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in \mathbb{R}$ vardır.
- ✓ X bulanık konvektir,
- ✓ X üst yarı süreklidir,
- ✓ $X^0 = \{x \in \mathbb{R}: X(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompaktır.

Bulanık sayıların kümesi $L(\mathbb{R})$ ile gösterilmek üzere, $X \in L(\mathbb{R})$ bulanık sayısının γ -kesim kümesi

$$X^\gamma = \{x \in L(\mathbb{R}): X(x) > \gamma\}$$

ile tanımlanır.

$\gamma \in [0,1]$ için $X^\gamma = [\underline{X}^\gamma, \overline{X}^\gamma]$, $Y^\gamma = [\underline{Y}^\gamma, \overline{Y}^\gamma]$ ve $k \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, X ve Y bulanık sayılarının toplama, çıkarma ve skalerle çarpma özellikleri aşağıdaki gibidir:

$$[X + Y]^\gamma = [\underline{X}^\gamma + \underline{Y}^\gamma, \overline{X}^\gamma + \overline{Y}^\gamma]$$

$$[X - Y]^\gamma = [\underline{X}^\gamma - \overline{Y}^\gamma, \overline{X}^\gamma - \underline{Y}^\gamma]$$

$$k \cdot X^\gamma = [k \cdot \underline{X}^\gamma, k \cdot \overline{X}^\gamma].$$

$L(\mathbb{R})$ üzerinde Hausdorff metriği olarak bilinen metrik,

$$d(X^\gamma, Y^\gamma) = \max\left(\left|\underline{X}^\gamma - \underline{Y}^\gamma\right|, \left|\overline{X}^\gamma - \overline{Y}^\gamma\right|\right)$$

olmak üzere

$$\bar{d}(L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R})) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{d}(X, Y) = \sup_{0 \leq \gamma \leq 1} d(X^\gamma, Y^\gamma)$$

şeklinde tanımlanır ve $(L(\mathbb{R}), \bar{d})$, tam metrik uzaydır (Puri ve Ralescu, 1983).

Tanım 2.1.2. Bulanık sayıların bir $X = (X_\eta)$ dizisi, doğal sayılar kümesinden $L(\mathbb{R})$ içine tanımlı bir X fonksiyonudur. Bu durumda her bir η pozitif tamsayısına bir $X(\eta)$ fuzzy sayısı karşılık gelir. Genel olarak $X(\eta)$ yerine X_η gösterimi kullanılır (Matloka, 1986).

Tanım 2.1.3. Her $\varepsilon > 0$ için $\eta > \eta_0$ olduğunda $\bar{d}(X_\eta, \tilde{X}) < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir η_0 sayısı varsa (X_η) bulanık sayı dizisi $\tilde{X}$ bulanık sayısına yakınsaktır denir ve $\lim_{\eta \rightarrow \infty} X_\eta = \tilde{X}$ veya $\eta \rightarrow \infty$ için $X_\eta \rightarrow \tilde{X}$ ile gösterilir (Matloka, 1986).

Tanım 2.1.4. $X = (X_\eta)$ bir bulanık sayı dizisi için $\{X_\eta : \eta \in \mathbb{N}\}$ kümesi sınırlı ise $X = (X_\eta)$ dizisi sınırlıdır denir (Matloka, 1986).

Tanım 2.1.5. Her $\varepsilon > 0$ için $\eta, s > N$ olduğunda $\bar{d}(X_\eta, X_s) < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir N tamsayısı mevcut ise $X = (X_\eta)$ bulanık sayı dizisine bir Cauchy dizisi denir (Matloka, 1986).

Tanım 2.1.6. $X = (X_\eta)$ bir bulanık sayı dizisinin A bulanık sayısına yakınsak bir alt dizisi varsa A sayısına bu dizisinin limit noktası denir. $X = (X_\eta)$ dizisinin tüm limit noktalarının kümesi L_X ile gösterilir (Aytar, 2004).

Tanım 2.1.7. M doğal sayıların bir alt kümesi ve $M_n = \{\mu \in M : \mu \leq n\}$ olsun. $|M_n|$, M_n kümesinin eleman sayısını göstermek üzere $\delta(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|M_n|}{n}$ limitine M kümesinin doğal yoğunluğu denir. Yoğunluk özelliklerinden, $M^c = \mathbb{N} \setminus M$ olmak üzere $\delta(M^c) = 1 - \delta(M)$ dir. Ayrıca, sonlu kümenin doğal yoğunluğu sıfırdır ve eğer $M_1 \subseteq M_2$ ise $\delta(M_1) \leq \delta(M_2)$ dir (Freedman ve Sember, 1981).

Örnek 2.1.1 $M = \{\mu \in \mathbb{N} : 1 < \mu < 6\}$ olsun. M kümesinin doğal yoğunluğu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{M\}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} = 0$$

dır.

Eğer $\delta(M) = 0$ ise M kümesine sıfır yoğunluklu küme denir.

Tanım 2.1.8. $X = (X_\eta)$ bulanık sayıların bir dizisi olsun. Eğer bu dizi sıfır yoğunluklu bir küme hariç diğer tüm η ler için bir P özelliğini sağlıyorsa $X = (X_\eta)$ dizisine hemen hemen her η için P özelliğini sağlıyor denir ve $h. h. \eta$ ile gösterilir (Nuray ve Savaş, 1995).

Tanım 2.1.9. $X = (X_\eta)$ bulanık sayı dizisi olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{\eta \leq n : \bar{d}(X_\eta, \tilde{X}) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $\tilde{X}$ bulanık sayısı varsa $X = (X_\eta)$ dizisi $\tilde{X}$ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim_{\eta \rightarrow \infty} X_\eta = \tilde{X}$ ile gösterilir (Nuray ve Savaş, 1995).

Tanım 2.1.10. $X \neq \emptyset$ ve X ' nin alt kümelerinin $I \subseteq 2^X$ sınıfı

$$\checkmark \quad \emptyset \in I$$

$$\checkmark \quad N, S \in I \text{ için } N \cup S \in I$$

$$\checkmark \quad N \in I \text{ ve } S \subseteq N \text{ için } S \in I$$

ise I 'ye X 'de bir ideal denir. Eğer $X \notin I$ ise I 'ye X de bir aşık ar olmayan ideal denir (Kuratowski, 1958).

Tanım 2.1.11. $X \neq \emptyset$ ve X' nin alt kümelerinin boştan farklı bir $F \subseteq 2^X$ sınıfı

- ✓ $\emptyset \notin F$
- ✓ $A, B \in F$ için $A \cap B \in F$
- ✓ $A \in F$ ve $A \subseteq B$ için $B \in F$

ise F ' ye X 'de bir filtre denir (Nagata, 1974).

Tanım 2.1.12. I , X de aşık ar olmayan ideal olmak üzere $\forall x \in X$ için $\{x\} \in I$ oluyorsa I ' ya X 'de uygun ideal denir (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 2.1.13. I , $\mathbb{N}'$ de aşık ar olmayan ideal olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$I(\varepsilon) = \{\eta \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_\eta, \tilde{X}) \geq \varepsilon\} \in I$$

sağlanıyorsa $X = (X_\eta)$ bulanık sayı dizisi $\tilde{X}$ bulanık sayısına ideal yakınsaktır (I –yakınsaktır) denir (Kumar ve Kumar, 2008).

2.2. Çift Bulanık Sayı Dizileri

Tanım 2.2.1. $X = (X_{\eta\varsigma})$ çift bulanık sayı dizisi, $X: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow L(\mathbb{R})$ ye tanımlı bir fonksiyondur. $(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ noktasındaki fonksiyonun değeri $X(\eta, \varsigma) = X_{\eta\varsigma}$ ile gösterilir ve çift dizinin (η, ς) . terimi olarak ifade edilir (Savaş, 1996).

Tanım 2.2.2. $X = (X_{\eta\varsigma})$ çift bulanık sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, $\eta, \varsigma \geq N$ iken $\bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa bu dizi Pringsheim anlamında yakınsaktır veya $\tilde{X}$ bulanık sayısına P –yakınsaktır denir, $P - \lim X = \tilde{X}$ şeklinde gösterilir.

Bütün P –yakınsak çift bulanık sayı dizilerinin kümesi $c_2(F)$ ile gösterilir (Savaş, 1996).

Tanım 2.2.3. $X = (X_{\eta\varsigma})$ çift bulanık sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, $\eta \geq j \geq N$ ve $\varsigma \geq k \geq N$ olmak üzere $\bar{d}(X_{\eta\varsigma}, X_{jk}) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa $X = (X_{\eta\varsigma})$ dizisine çift Cauchy dizisi denir (Savaş, 1996).

Tanım 2.2.4. $M \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ iki boyutlu pozitif tam sayıların bir kümesi olsun ve $M(\eta, \varsigma), j \leq \eta$, ve $k \leq \varsigma$ olacak şekilde M kümesindeki (j, k) sayıları olsun. Bu takdirde M nin alt asimptotik yoğunluğu

$$\liminf_{\eta, \varsigma} \frac{M(\eta, \varsigma)}{\eta\varsigma} = \delta_2^*(M)$$

şeklinde tanımlanır.

$\left(\frac{M(\eta, \varsigma)}{\eta\varsigma}\right)$ dizisinin limitinin mevcut olması durumunda M kümesi çift doğal yoğunluğa sahiptir denir ve

$$\lim_{\eta, \varsigma} \frac{M(\eta, \varsigma)}{\eta\varsigma} = \delta_2(M)$$

dir (Savaş ve Mursaleen, 2004).

Tanım 2.2.5. $X = (X_{\eta\varsigma})$ çift bulanık sayı dizisi, her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n, m} \frac{1}{nm} |\{(\eta, \varsigma) : \eta \leq n \text{ ve } \varsigma \leq m : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $X = (X_{\eta\varsigma})$ dizisi $\tilde{X}$ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $St_2 - \lim X_{\eta\varsigma} = \tilde{X}$ olarak yazılır.

İstatistiksel yakınsak çift bulanık sayı dizilerinin kümesi St_2 ile gösterilir (Savaş ve Mursaleen, 2004).

Tanım 2.2.6. I_2 , $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde aşıkarak olmayan bir ideal olsun. Eğer $\forall \eta, \varsigma \in \mathbb{N}$ için $\{\eta, \varsigma\} \in I_2$ oluyorsa I_2 idealine uygun ideal, $\forall \eta, \varsigma \in \mathbb{N}$ için $\{\eta\} \times \mathbb{N}$ ve $\mathbb{N} \times \{\eta\} \in I_2$ oluyorsa I_2 idealine kuvvetli uygun ideal denir.

Kuvvetli uygun bir ideal uygun idealdir. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de

$$I_2^0 = \{N \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (\exists m(N) \in \mathbb{N})(\eta, \varsigma \geq m(N) \Rightarrow (\eta, \varsigma) \notin N)\}$$

ideali kuvvetli uygun idealdir (Dündar ve Talo, 2013).

Tanım 2.2.7. $I_2 \subset 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ kuvvetli uygun bir ideal olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$N(\varepsilon) := \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq \varepsilon\} \in I_2$$

ise $(X_{\eta\varsigma})$ çift bulanık sayı dizisi $\tilde{X}$ bulanık sayısına I_2 – yakınsaktır denir.

$I_2 - \lim_{\eta, \varsigma \rightarrow \infty} X_{\eta\varsigma} = \tilde{X}$ ile gösterilir (Dündar ve Talo, 2013).

Teorem 2.2.1. $I_2 \subset 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ kuvvetli uygun bir ideal olsun. $(X_{\eta\varsigma})$ dizisi $\tilde{X}$ sayısına I_2 –yakınsak ise $\tilde{X}$ tekdir (Dündar ve Talo, 2013).

Teorem 2.2.2. $I_2 \subset 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ kuvvetli uygun bir ideal olsun. $(X_{\eta\varsigma})$ çift bulanık sayı dizisi ve $\tilde{X}$ bulanık sayı olmak üzere

$$P - \lim_{\eta, \varsigma \rightarrow \infty} X_{\eta\varsigma} = \tilde{X} \text{ ise } I_2 - \lim_{\eta, \varsigma \rightarrow \infty} X_{\eta\varsigma} = \tilde{X}$$

dir (Dündar ve Talo, 2013).

Teorem 2.2.3. $I_2 \subset 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ kuvvetli uygun bir ideal olsun. $(X_{\eta\varsigma})$ ve $(Y_{\eta\varsigma})$ çift bulanık sayı dizileri ve $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ bulanık sayılar ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer,

$$I_2 - \lim_{\eta, \varsigma \rightarrow \infty} X_{\eta\varsigma} = \tilde{X} \text{ ve } I_2 - \lim_{\eta, \varsigma \rightarrow \infty} Y_{\eta\varsigma} = \tilde{Y}$$

ise

- i. $I_2 - \lim_{\eta, \varsigma \rightarrow \infty} cX_{\eta\varsigma} = c\tilde{X}$
- ii. $I_2 - \lim_{\eta, \varsigma \rightarrow \infty} (X_{\eta\varsigma} + Y_{\eta\varsigma}) = \tilde{X} + \tilde{Y}$

dir (Dündar ve Talo, 2013).

Teorem 2.2.4. $I_2 \subset 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ kuvvetli uygun bir ideal olmak üzere $(X_{\eta\varsigma})$ ve $(Y_{\eta\varsigma})$ dizileri

- i. $\forall(\eta, \varsigma) \in M \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}, M \in F(I_2)$ için $X_{\eta\varsigma} \leq Y_{\eta\varsigma}$,
- ii. $I_2 - \lim_{\eta, \varsigma \rightarrow \infty} X_{\eta\varsigma} = \tilde{X}$ ve $I_2 - \lim_{\eta, \varsigma \rightarrow \infty} Y_{\eta\varsigma} = \tilde{Y}$

şartlarını sağlayan çift bulanık sayı dizileri ise $\tilde{X} \leq \tilde{Y}$ dir (Dündar ve Talo, 2013).

3. ÇİFT BULANIK SAYI DİZİLERİNİN KABA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde, çift bulanık sayı dizilerinin kaba istatistiksel yakınsaklığı ve kaba istatistiksel limit kümesi tanımlanacak, ayrıca bu kümenin bazı özellikleri incelenecektir. Orijinal sonuçlara geçmeden önce tanım ve teoremlerde yararlanacağımız ön bilgilere yer verilmektedir.

Bu bölümden itibaren $X = (X_{\eta\varsigma})$ dizisi çift bulanık sayı dizisi olarak alınacaktır.

3.1. Çift Bulanık Sayı Dizilerinin Kaba Yakınsaklığı

Tanım 3.1.1. $(X_{\eta\varsigma})$ dizisi ve $\tilde{X}$ bulanık sayı olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için $\eta, \varsigma \geq i_\varepsilon$ olduğunda

$$\bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) < r + \varepsilon$$

olacak şekilde $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ varsa $(X_{\eta\varsigma})$ dizisi $\tilde{X}$ sayısına Pringsheim anlamında kaba yakınsaktır denir ve $X_{\eta\varsigma} \xrightarrow{r} \tilde{X}$ ile gösterilir.

Burada r kabalık derecesi olarak adlandırılır. Kaba yakınsaklık kavramı, $r = 0$ için çift bulanık sayı dizisinin Pringsheim anlamında yakınsaklığına indirgenir. $r > 0$ olması durumunda ise, $(X_{\eta\varsigma})$ dizisinin r –limit noktası tek değildir. Böylece r –limit kümesi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$LIM^r X_{\eta\varsigma} := \{\tilde{X} \in L(\mathbb{R}^n) : X_{\eta\varsigma} \xrightarrow{r} \tilde{X}\}. \text{ (Babaarslan ve Tuncer, 2020).}$$

Iraksak olan çift bulanık sayı dizisinin, belirli bir kabalık derecesi ile Pringsheim anlamında yakınsak olabileceği aşağıdaki örnek ile gösterilmiştir.

Örnek 3.1.1. $X = (X_{\eta\varsigma})$ dizisi

$$X_{\eta\varsigma}(x) = \begin{cases} \ell_1(x), & (\eta + \varsigma) \text{ tek ise} \\ \ell_2(x), & (\eta + \varsigma) \text{ çift ise} \end{cases}$$

olmak üzere, ℓ_1 ve ℓ_2 bulanık sayıları

$$\ell_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [0,2] \text{ ise} \\ \frac{-x+4}{2}, & x \in [2,4] \text{ ise} \\ 0, & \text{d. d.} \end{cases}$$

ve

$$\ell_2(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{2}, & x \in [5,7] \text{ ise} \\ \frac{-x+9}{2}, & x \in [7,9] \text{ ise} \\ 0, & \text{d. d.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Böylece, dizinin γ -seviyesi kümeleri

$$[\ell_1(x)]^\gamma = [2\gamma, 4 - 2\gamma]$$

ve

$$[\ell_2(x)]^\gamma = [2\gamma + 5, 9 - 2\gamma]$$

dir. $\acute{r}$ negatif olmayan reel sayı olmak üzere

$$LIM^r X_{\eta\varsigma} := \begin{cases} \emptyset, & r < \frac{5}{2} \text{ ise} \\ [\ell_2 - \acute{r}, \ell_1 + \acute{r}], & \text{d. d.} \end{cases}$$

dir (Babaarslan ve Tuncer, 2020).

Tanım 3.1.2. $X = (X_{\eta\varsigma})$ dizisi için eğer her $\varepsilon > 0$ için $k \geq n \geq i_\varepsilon$, $l \geq m \geq i_\varepsilon$ olduğunda

$$\bar{d}(X_{\eta\varsigma}, X_{kl}) < \rho + \varepsilon$$

olacak şekilde i_ε varsa bu diziye ρ –çift Cauchy veya ρ kabalık derecesine göre kaba çift Cauchy dizisi denir.

Kabul edelim ki $Y = (Y_{\eta\varsigma})$ dizisi $\tilde{X}$ sayısına yakınsak olsun. $(Y_{\eta\varsigma})$ dizisinin terimleri tam olarak belirlenemeyebilir. Böylece, $\Delta > 0$ yaklaşım hatalarının üst sınırını göstermek üzere tüm η, ς için

$$\bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y_{\eta\varsigma}) \leq \Delta$$

olacak şekilde terimleri bilinen bir $(X_{\eta\varsigma})$ yaklaşım dizisini ele alabiliriz. Bu dizi klasik yakınsak olmayabilir, ancak

$$\bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \leq \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y_{\eta\varsigma}) + \bar{d}(Y_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \leq \Delta + \varepsilon$$

olduğundan $r = \Delta$ için $(X_{\eta\varsigma})$ dizisi r –yakınsaktır.

Benzer şekilde, bir $Y = (Y_{\eta\varsigma})$ Cauchy dizisinin $\Delta > 0$ için $(X_{\eta\varsigma})$ yaklaşım dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\bar{d}(X_{\eta\varsigma}, X_{kl}) \leq \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y_{\eta\varsigma}) + \bar{d}(Y_{\eta\varsigma}, Y_{kl}) + \bar{d}(Y_{kl}, X_{kl}) \leq 2\Delta + \varepsilon$$

olduğundan $\rho = 2\Delta$ için $(X_{\eta\varsigma})$ bir ρ –Cauchy dizisidir (Babaarslan ve Tuncer, 2020).

3.2. Çift Bulanık Sayı Dizilerinin Kaba İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 3.2.1. Her $\varepsilon > 0$ için, $r \geq 0$ olmak üzere

$$\lim_{n,m} \frac{1}{nm} |\{(\eta, \varsigma): \eta \leq n \text{ ve } \varsigma \leq m: \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq r + \varepsilon\}| = 0$$

ise $X = (X_{\eta\varsigma})$ dizisi $\tilde{X}$ bulanık sayısına kaba istatistiksel yakınsaktır denir, $X_{\eta\varsigma} \xrightarrow{r-St_2} \tilde{X}$ ile gösterilir.

Burada r sayısına kaba istatistiksel yakınsaklık derecesi denir. Eğer, $r=0$ alınırsa Pringsheim anlamında istatistiksel yakınsaklık elde edilir.

Bir çift bulanık sayı dizisinin kaba yakınsaklık fikrine benzer olarak, $\tilde{X}$ bulanık sayısına istatistiksel yakınsak olan herhangi bir $(Y_{\eta\varsigma})$ dizisinin elemanları ile işlem yapmak zor ise bu dizinin her bir elemanı için $\bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y_{\eta\varsigma}) \leq r$ olacak şekilde üçgensel bulanık sayılardan oluşan bir $(X_{\eta\varsigma})$ yaklaşım dizisi elde edilebilir. Böylece $(Y_{\eta\varsigma})$ dizisinin yaklaşık değerleri kullanılarak işlemler kolaylıkla hesaplanır. Burada $(X_{\eta\varsigma})$ dizisi $\tilde{X}$ sayısına istatistiksel yakınsak değildir, fakat

$$\{(\eta, \varsigma): \eta \leq n \text{ ve } \varsigma \leq m: \bar{d}(Y_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq \varepsilon\} \supseteq \{(\eta, \varsigma): \eta \leq n \text{ ve } \varsigma \leq m: \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq r + \varepsilon\}$$

kapsamasından ve kabulümüzden $(X_{\eta\varsigma})$ dizisinin kaba istatistiksel yakınsak olduğu görülür.

Genel olarak, $r > 0$ olduğunda dizinin kaba istatistiksel limiti tek değildir. Böylece r –istatistiksel limit kümesi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$St_2 - LIM^r X_{\eta\varsigma} := \{\tilde{X} \in L(\mathbb{R}^n) : X_{\eta\varsigma} \xrightarrow{r-St_2} \tilde{X}\}.$$

Tanım 3.2.2. Her $\varepsilon > 0$ için, $k \geq \eta \geq i_\varepsilon$, $l \geq \varsigma \geq i_\varepsilon$ olduğunda

$$\lim_{\eta, \varsigma} \frac{1}{\eta\varsigma} |\{(\eta, \varsigma) : \eta \leq k \text{ ve } \varsigma \leq l : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, X_{kl}) \geq r + \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir i_ε varsa $(X_{\eta\varsigma})$ dizisine r – istatistiksel çift Cauchy dizisi denir.

Teorem 3.2.1. $(X_{\eta\varsigma})$ dizisinin r –istatistiksel limit kümesinin çapı $2r$ den büyük değildir.

İspat. Tersini kabul edelim. Yani, $\bar{d}(Y, V) > 2r$ olacak şekilde $Y, V \in St_2 - LIM^r X_{\eta\varsigma}$ vardır. $\varepsilon \in (0, \frac{\bar{d}(Y, V)}{2} - r)$ olarak alınsın. $Y, V \in St_2 - LIM^r X_{\eta\varsigma}$ olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$A_1(\varepsilon) := \{(\eta, \varsigma) : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y) \geq r + \varepsilon\}$$

ve

$$A_2(\varepsilon) := \{(\eta, \varsigma) : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, V) \geq r + \varepsilon\}$$

olmak üzere $\delta_2(A_1(\varepsilon)) = 0$ ve $\delta_2(A_2(\varepsilon)) = 0$ dir. Böylece her bir $(\eta, \varsigma) \in A_1^c(\varepsilon) \cap A_2^c(\varepsilon)$ için

$$\bar{d}(Y, V) \leq \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y) + \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, V) < 2(r + \varepsilon) < 2\left(r + \frac{\bar{d}(Y, V)}{2} - r\right) = \bar{d}(Y, V)$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.2. $St_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ kapalı bir kümedir.

İspat. Eğer $St_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma}) = \emptyset$ ise ispat açıktır. $St_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma}) \neq \emptyset$ olsun. Bu kümeden $\eta, \varsigma \rightarrow \infty$ iken $Y_{\eta\varsigma} \rightarrow \tilde{Y}$ sağlayacak şekilde keyfi bir $(Y_{\eta\varsigma})$ dizisi alınsın. $\tilde{Y} \in St_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ olduğu gösterilmelidir.

$\varepsilon > 0$ olsun. $Y_{\eta\varsigma} \rightarrow \tilde{Y}$ olduğundan, her $\eta > \eta_{\frac{\varepsilon}{2}}$ ve $\varsigma > \varsigma_{\frac{\varepsilon}{2}}$ için

$$\bar{d}(Y_{\eta\varsigma}, \tilde{Y}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $\eta_{\frac{\varepsilon}{2}}$ ve $\varsigma_{\frac{\varepsilon}{2}}$ vardır.

$\eta_0 > \eta_{\frac{\varepsilon}{2}}, \varsigma_0 > \varsigma_{\frac{\varepsilon}{2}}$ olacak şekilde $(\eta_0, \varsigma_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ seçildiğinde $\bar{d}(Y_{\eta_0\varsigma_0}, \tilde{Y}) < \frac{\varepsilon}{2}$ yazılır.

Diğer taraftan $(Y_{\eta\varsigma}) \subseteq St_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ olduğundan $Y_{\eta_0\varsigma_0} \subseteq St_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ olur. Buradan

$$\lim_{n,m} \frac{1}{nm} \left| \left\{ (\eta, \varsigma) : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y_{\eta_0\varsigma_0}) \geq r + \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| = 0$$

dir.

Keyfi bir $(p, q) \in \left\{ (\eta, \varsigma) : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y_{\eta_0\varsigma_0}) < r + \frac{\varepsilon}{2} \right\}$ seçtiğimizde $\bar{d}(X_{pq}, Y_{\eta_0\varsigma_0}) < r + \frac{\varepsilon}{2}$ elde edilir. $(p, q) \in \{(n, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{Y}) < r + \varepsilon\}$ olduğundan

$$\bar{d}(X_{pq}, \tilde{Y}) \leq \bar{d}(X_{pq}, Y_{\eta_0\varsigma_0}) + \bar{d}(Y_{\eta_0\varsigma_0}, \tilde{Y}) < r + \varepsilon$$

dir. Böylece,

$$\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{Y}) < r + \varepsilon\} \supseteq \left\{ (\eta, \varsigma) : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y_{\eta_0\varsigma_0}) < r + \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

kapsaması elde edilir.

$$\delta_2 \left(\left\{ (\eta, \varsigma) : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y_{\eta_0\varsigma_0}) < r + \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right) = 1$$

olduğundan

$$\delta_2 \left(\left\{ (\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{Y}) < r + \varepsilon \right\} \right) = 1$$

dir. Bu ise $\tilde{Y} \in St_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.3. Eğer $(X_{\eta\varsigma})$ dizisi $\tilde{X}$ sayısına istatistiksel yakınsak ise

$$St_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma}) = \overline{B_r}(\tilde{X}) := \{\mu \in L(\mathbb{R}^n) : \bar{d}(\mu, \tilde{X}) \leq r\}$$

dir.

İspat.

$A_1 := \{(\eta, \varsigma) : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y) \geq \varepsilon\}$ olsun. Kabulümüzden $\delta_2(A_1) = 0$ dir.

$Y \in \overline{B_r}(\tilde{X})$ olsun. $(\eta, \varsigma) \in A_1^c$ için

$$\bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y) \leq \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) + \bar{d}(\tilde{X}, Y) < \varepsilon + r$$

olduğundan $Y \in St_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ elde edilir.

$A_2 := \{(\eta, \varsigma) : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y) \geq r + \varepsilon\}$ olsun. Keyfi bir $Y \in St_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ alınsın.

Böylece $\delta_2(A_2) = 0$ dir. Ayrıca kabulümüzden $\delta_2(A_1) = 0$ dir.

Her $(\eta, \varsigma) \in A_1^c \cap A_2^c$ için

$$\bar{d}(Y, \tilde{X}) \leq \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y) + \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) < 2\varepsilon + r$$

olduğundan $Y \in \overline{B_r}(\tilde{X})$ dir.

Teorem 3.2.4. $Y = (Y_{\eta\varsigma})$ dizisi $\tilde{X}$ sayısına istatistiksel yakınsak olmak üzere, her $(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $\bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y_{\eta\varsigma}) \leq r$ ise $(X_{\eta\varsigma})$ dizisi $\tilde{X}$ sayısına r - istatistiksel yakınsaktır.

İspat. Kabulden, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\delta_2(\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(Y_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq \varepsilon\}) = 0$$

dir. Ayrıca, $(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $\bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y_{\eta\varsigma}) \leq r$ olduğundan

$$\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(Y_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq \varepsilon\} \supseteq \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq r + \varepsilon\}$$

kapsaması sağlanır. Böylece,

$$\delta_2(\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq r + \varepsilon\}) = 0$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.2.1. $\Gamma(X_{\eta\varsigma})$, $(X_{\eta\varsigma})$ dizisinin tüm istatistiksel yığılma noktalarının kümesini göstermek üzere, eğer $C \in \Gamma(X_{\eta\varsigma})$ ise her $\tilde{X} \in St_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ için $\bar{d}(\tilde{X}, C) \leq r$ dir.

İspat. $C \in \Gamma(X_{\eta\varsigma})$ ve $\bar{d}(\tilde{X}, C) > r$ olmak üzere $\tilde{X} \in St_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ ve

$\varepsilon := \frac{\bar{d}(\tilde{X}, C) - r}{3}$ olsun.

$$\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq r + \varepsilon\} \supseteq \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, C) < \varepsilon\}$$

kapsaması sağlanır. Ayrıca, $C \in \Gamma(X_{\eta\varsigma})$ olduğundan

$$\delta_2(\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, C) < \varepsilon\}) \neq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\delta_2(\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq r + \varepsilon\}) \neq 0$$

dir ve bu sonuç $\tilde{X} \in St_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ kabulü ile çelişir.

Teorem 3.2.5.

- i. Eğer $C \in \Gamma(X_{\eta\varsigma})$ ise $St_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma}) \subseteq \overline{B_r}(C)$ dir.
- ii. $St_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma}) = \bigcap_{C \in \Gamma(X_{\eta\varsigma})} \overline{B_r}(C) = \{\tilde{X} \in L(\mathbb{R}): \Gamma(X_{\eta\varsigma}) \subseteq \overline{B_r}(\tilde{X})\}$ dir.

İspat.

- i. $\tilde{X} \in St_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ ve $C \in \Gamma(X_{\eta\varsigma})$ olsun. Yardımcı Teorem 3.2.1. den $\bar{d}(\tilde{X}, C) \leq r$

dir. Aksi takdirde $\varepsilon := \frac{\bar{d}(\tilde{X}, C) - r}{3}$ için

$$\delta_2(\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq r + \varepsilon\}) \neq 0$$

elde edilir.

ii. (i) den $St_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma}) \subseteq \bigcap_{C \in \Gamma(X_{\eta\varsigma})} \overline{B_r}(C)$ olduğu açıktır.

$Y \in \bigcap_{C \in \Gamma(X_{\eta\varsigma})} \overline{B_r}(C)$ olsun. Kabulden, $\forall C \in \Gamma(X_{\eta\varsigma})$ için $\bar{d}(Y, C) \leq r$ elde edilir. Bu ise $\Gamma(X_{\eta\varsigma}) \subseteq \overline{B_r}(Y)$, yani

$$\bigcap_{C \in \Gamma(X_{\eta\varsigma})} \overline{B_r}(C) = \{\tilde{X} \in L(\mathbb{R}): \Gamma(X_{\eta\varsigma}) \subseteq \overline{B_r}(\tilde{X})\}$$

olduğunu gösterir.

Şimdi $Y \notin St_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ olsun. O halde

$$\delta_2(\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq r + \varepsilon\}) \neq 0$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır. Böylece $(X_{\eta\varsigma})$ dizisinin $\bar{d}(Y, C) \geq r + \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir C istatistiksel yığılma noktası vardır, yani

$$\Gamma(X_{\eta\varsigma}) \not\subseteq \overline{B_r}(Y) \text{ ve } Y \notin \{\tilde{X} \in L(\mathbb{R}): \Gamma(X_{\eta\varsigma}) \subseteq \overline{B_r}(\tilde{X})\}$$

dir. Böylece, $Y \in \{\tilde{X} \in L(\mathbb{R}): \Gamma(X_{\eta\varsigma}) \subseteq \overline{B_r}(\tilde{X})\}$ elde edilir. Sonuç olarak

$$\{\tilde{X} \in L(\mathbb{R}): \Gamma(X_{\eta\varsigma}) \subseteq \overline{B_r}(\tilde{X})\} \subseteq St_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma}) \text{ dir.}$$

4. ÇİFT BULANIK SAYI DİZİLERİNİN KABA İDEAL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde çift bulanık sayı dizileri için kaba ideal yakınsaklık kavramı tanımlanarak önemli sonuçlar elde edilecektir.

4.1. Çift Bulanık Sayı Dizilerinin Kaba İdeal Yakınsaklığı

Tanım 4.1.1. $I_2 \subset 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$,nin kuvvetli uygun bir ideali olsun. $r > 0$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) := \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq r + \varepsilon\} \in I_2$$

ise $X = (X_{\eta\varsigma})$ dizisi $\tilde{X}$ bulanık sayısına kaba $I_2 -$ yakınsaktır ($r - I_2 -$ yakınsak) denir ve $X_{\eta\varsigma} \xrightarrow{r-I_2} \tilde{X}$ ile gösterilir.

Kaba $I_2 -$ yakınsaklık kavramı, $r = 0$ için $I_2 -$ yakınsaklık kavramına indirgenir. $r > 0$ olması durumunda ise, $(X_{\eta\varsigma})$ dizisinin $r -$ limit noktası tek değildir. Böylece kaba $I_2 -$ limit kümesi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma}) = \left\{ \tilde{X} \in L(\mathbb{R}^n) : X_{\eta\varsigma} \xrightarrow{r-I_2} \tilde{X} \right\}.$$

Teorem 4.1.1. $X = (X_{\eta\varsigma})$ ve $Y = (Y_{\eta\varsigma})$ bulanık sayı dizileri olsun.

- i. $r - \lim_{\substack{\eta \rightarrow \infty \\ \varsigma \rightarrow \infty}} X_{\eta\varsigma} = \tilde{X}$ ise $r - I_2 - \lim_{\substack{\eta \rightarrow \infty \\ \varsigma \rightarrow \infty}} X_{\eta\varsigma} = \tilde{X}$ dir
- ii. Her hangi bir $c \in \mathbb{R}$ için $\frac{r}{|c|} - I_2 - \lim_{\substack{\eta \rightarrow \infty \\ \varsigma \rightarrow \infty}} X_{\eta\varsigma} = \tilde{X}$ ise $r - I_2 - \lim_{\substack{\eta \rightarrow \infty \\ \varsigma \rightarrow \infty}} c X_{\eta\varsigma} = c\tilde{X}$ dir
- iii. $r_1 - I_2 - \lim_{\substack{\eta \rightarrow \infty \\ \varsigma \rightarrow \infty}} X_{\eta\varsigma} = \tilde{X}$ ve $r_2 - I_2 - \lim_{\substack{\eta \rightarrow \infty \\ \varsigma \rightarrow \infty}} Y_{\eta\varsigma} = \tilde{Y}$ ise

$$r_1 + r_2 - I_2 - \lim_{\substack{\eta \rightarrow \infty \\ \varsigma \rightarrow \infty}} (X_{\eta\varsigma} + Y_{\eta\varsigma}) = \tilde{X} + \tilde{Y}$$

İspat.

i. $r - \lim_{\substack{\eta \rightarrow \infty \\ \varsigma \rightarrow \infty}} X_{\eta\varsigma} = \tilde{X}$ olsun. O halde, $r > 0$ ve her $\varepsilon > 0$ için $\eta > p, \varsigma > q$ iken

$\bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) < r + \varepsilon$ olacak şekilde bir (p, q) vardır. $\varepsilon > 0$ için $A(\varepsilon) = \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq r + \varepsilon\}$ olsun. I_2 uygun ideal olmak üzere, $A(\varepsilon)$ kümesinin sonlu bir küme olduğu ve I_2 'nin elemanı olduğu kolaylıkla görülür. Böylece $r - I_2 - \lim_{\substack{\eta \rightarrow \infty \\ \varsigma \rightarrow \infty}} X_{\eta\varsigma} = \tilde{X}$

dir.

ii. $\gamma \in [0, 1]$ ve $c \neq 0$ herhangi bir reel sayı olsun. $X_{\eta\varsigma}^\gamma, Y_0^\gamma$, sırasıyla $X_{\eta\varsigma}$ ve X_0 'ın γ -seviye kümeleri olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. $d(cX_{\eta\varsigma}^\gamma, cX_0^\gamma) = |c|d(X_{\eta\varsigma}^\gamma, X_0^\gamma)$ olduğundan $\bar{d}(cX_{\eta\varsigma}^\gamma, cX_0^\gamma) = |c|\bar{d}(X_{\eta\varsigma}^\gamma, X_0^\gamma)$ dir. Kabulden, $\frac{r}{|c|} - I - \lim_{\substack{\eta \rightarrow \infty \\ \varsigma \rightarrow \infty}} X_{\eta\varsigma} = X_0$ olduğuna göre,

$$A\left(\frac{r+\varepsilon}{|c|}\right) = \left\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, X_0) \geq \frac{r+\varepsilon}{|c|}\right\} \in I_2$$

dir.

$B(r + \varepsilon) = \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(cX_{\eta\varsigma}, cX_0) \geq r + \varepsilon\}$ olsun. Bazı $\varepsilon > 0$ için $B(r + \varepsilon)$ kümesinin $A(r + \varepsilon_1)$ kümesi tarafından içerildiğini ispatlamak yeterli olacaktır.

$(m, l) \in B(r + \varepsilon)$ olsun. O halde

$$r + \varepsilon \leq \bar{d}(cX_{\eta\varsigma}, cX_0) = |c|\bar{d}(X_{\eta\varsigma}, X_0)$$

dir. Bu ise

$$\bar{d}(X_{ml}, X_0) \geq \frac{r}{|c|} + \frac{\varepsilon}{|c|} = r + \varepsilon_1 \text{ (düzenle)}$$

dir ve dolayısıyla $(m, l) \in A(r + \varepsilon_1)$ anlamına gelir. $(X_{\eta\varsigma})$, $r - I_2$ -yakınsak olduğundan $A(r + \varepsilon_1) \in I_2$ dir ve $B(r + \varepsilon) \in I_2$ ispatlanır.

iii. $\gamma \in [0,1]$ için $X_{\eta\varsigma}^\gamma, Y_{\eta\varsigma}^\gamma, X_0^\gamma$ ve Y_0^γ sırasıyla $X_{\eta\varsigma}, Y_{\eta\varsigma}, X_0$ ve Y_0 'ın γ -seviye kesmeleri olsun. $d(X_{\eta\varsigma}^\gamma + Y_{\eta\varsigma}^\gamma, X_0^\gamma + Y_0^\gamma) \leq d(X_{\eta\varsigma}^\gamma, X_0^\gamma) + d(Y_{\eta\varsigma}^\gamma, Y_0^\gamma)$ olduğundan,

$$\bar{d}(X_{\eta\varsigma} + Y_{\eta\varsigma}, X_0 + Y_0) \leq \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, X_0) + \bar{d}(Y_{\eta\varsigma}, Y_0)$$

sağlanır.

$\varepsilon > 0$ olsun.

$$A(\frac{\varepsilon}{2}) = \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, X_0) \geq r_1 + \frac{\varepsilon}{2}\},$$

$$B(\frac{\varepsilon}{2}) = \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(Y_{\eta\varsigma}, Y_0) \geq r_2 + \frac{\varepsilon}{2}\}$$

ve

$$C(\varepsilon) = \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma} + Y_{\eta\varsigma}, X_0 + Y_0) \geq r_1 + r_2 + \varepsilon\}$$

kümeleri alınsın. $C(\varepsilon) \subset A(\frac{\varepsilon}{2}) \cup B(\frac{\varepsilon}{2})$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

$(m, l) \in C(\varepsilon)$ alınsın. O halde

$$\varepsilon \leq \bar{d}(X_{ml} + Y_{ml}, X_0 + Y_0) \leq \bar{d}(X_{ml}, X_0) + \bar{d}(Y_{ml}, Y_0)$$

dir. $\bar{d}(X_{ml}, X_0)$ ve $\bar{d}(Y_{ml}, Y_0)$ her ikisi birden kesinlikle $\frac{\varepsilon}{2}$ 'den küçük olamayacağından,

$\bar{d}(X_{ml}, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ veya $\bar{d}(Y_{ml}, Y_0) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ olmalıdır. Böylece, $(m, l) \in A(\frac{\varepsilon}{2}) \cup B(\frac{\varepsilon}{2})$ dir. Bu ise

$C(\varepsilon) \subset A(\frac{\varepsilon}{2}) \cup B(\frac{\varepsilon}{2})$ olduğunu gösterir.

$$r_1 - I_2 - \lim_{\substack{\eta \rightarrow \infty \\ \varsigma \rightarrow \infty}} X_{\eta\varsigma} = X_0$$

ve

$$r_2 - I_2 - \lim_{\substack{\eta \rightarrow \infty \\ \varsigma \rightarrow \infty}} Y_{\eta\varsigma} = Y_0$$

olduğundan, $A(\frac{\varepsilon}{2}) \cup B(\frac{\varepsilon}{2}) \in I_2$ dir. I_2 ideal tanımından $C(\varepsilon) \in I_2$ dir. Böylece (iii) ispatlanır.

Tanım 4.1.2. $r > 0$ olsun. $X = (X_{\eta\varsigma})$ dizisi, $\forall \varepsilon > 0$ için $p \geq \eta \geq i_\varepsilon$ ve $q \geq \varsigma \geq i_\varepsilon$ olduğunda

$$\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, X_{pq}) \geq r + \varepsilon\} \in I_2$$

olacak şekilde i_ε varsa $X = (X_{\eta\varsigma})$ dizisine kaba I_2 -çift Cauchy dizisi veya $r - I_2$ -çift Cauchy dizisi denir.

Teorem 4.1.2. $I_2 \subset 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ 'nin kuvvetli uygun bir ideal olsun. $X = (X_{\eta\varsigma})$ dizisi $r - I_2$ -yakınsak ise bu dizi $2r - I_2$ -çift Cauchy dizisidir.

İspat. $\varepsilon > 0$ olsun. $X_{\eta\varsigma} \xrightarrow{r-I_2} \tilde{X}$ olduğundan

$$A(r + \frac{\varepsilon}{2}) := \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq r + \frac{\varepsilon}{2}\} \in I_2$$

dir. Bu ise

$$A^C(r + \frac{\varepsilon}{2}) := \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) < r + \frac{\varepsilon}{2}\} \in F(I_2)$$

olduğunu gösterir. $A^C(\frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$ olduğundan $(p, q) \notin A(r + \frac{\varepsilon}{2})$ olacak şekilde $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ seçilsin. Böylece $\bar{d}(X_{pq}, \tilde{X}) < r + \frac{\varepsilon}{2}$ dir.

$$B(2r + \varepsilon) = \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, X_{pq}) \geq 2r + \varepsilon\}$$

olsun. $B(2r + \varepsilon) \subset A(r + \frac{\varepsilon}{2})$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. $(\eta, \varsigma) \in B(2r + \varepsilon)$ olsun. Bu takdirde

$$2r + \varepsilon < \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, X_{pq}) \leq \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) + \bar{d}(\tilde{X}, X_{pq}) < \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) + r + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bu ise $r + \frac{\varepsilon}{2} < \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X})$ anlamına gelir ve böylece $(\eta, \varsigma) \in A(r + \frac{\varepsilon}{2})$ dir.

$B(2r + \varepsilon) \subset A(r + \frac{\varepsilon}{2})$ ve $A(r + \frac{\varepsilon}{2}) \in I_2$ olduğundan $B(2r + \varepsilon) \in I_2$ dir yani $X = (X_{\eta\varsigma})$ dizisi $2r - I_2$ -çift Cauchy dizisidir.

Tanım 4.1.3. $X = (X_{\eta\varsigma})$ dizisinin I_2 -limit supremum ve I_2 -limit infimum kavramları

$$A_x = \{\psi \in L(\mathbb{R}) : \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : X_{\eta\varsigma} > \psi\} \notin I_2\}$$

$$B_x = \{\psi \in L(\mathbb{R}) : \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : X_{\eta\varsigma} < \psi\} \notin I_2\}$$

olmak üzere

$$I_2 - \liminf X_{\eta\varsigma} := \inf A_x$$

$$I_2 - \limsup X_{\eta\varsigma} := \sup B_x$$

şeklinde tanımlanır.

Yardımcı Teorem 4.1.1. $\tilde{X} \in I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ ise

$$\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(I_2 - \limsup X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) > r\} \in I_2$$

ve

$$\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(I_2 - \liminf X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) > r\} \in I_2$$

dir.

İspat. Aksine $\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(I_2 - \limsup X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) > r\} \notin I_2$ olsun. Bu takdirde

$$\tilde{\varepsilon} := \frac{\bar{d}(I_2 - \limsup X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) - r}{2}$$

olacak şekilde $\tilde{\varepsilon} > 0$ tanımlanabilir.

I_2 -limit supremum tanımından $K_1 \notin I_2$ olacak şekilde her bir $(\eta, \varsigma) \in K_1$ için

$$\bar{d}(I_2 - \limsup X_{\eta\varsigma}, X_{\eta\varsigma}) < \tilde{\varepsilon}$$

dir.

Diğer taraftan $\tilde{X} \in I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ olduğundan $K_2 \in I_2$ olacak şekilde her bir $(\eta, \varsigma) \in K_2$ için

$$\bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq r + \tilde{\varepsilon}$$

dir.

$K := K_1 \cap K_1^C$ olsun. O halde $K \notin I_2$ dir. Böylece her $(\eta, \varsigma) \in K$ için

$$\begin{aligned} \bar{d}(I_2 - \limsup X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) &\leq \bar{d}(I_2 - \limsup X_{\eta\varsigma}, X_{\eta\varsigma}) + \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) < r + 2\tilde{\varepsilon} \\ &= r + \bar{d}(I_2 - \limsup X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) - r = \bar{d}(I_2 - \limsup X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \end{aligned}$$

yazılabilir. Ancak

$$\bar{d}(I_2 - \limsup X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) < \bar{d}(I_2 - \limsup X_{\eta\varsigma}, \tilde{X})$$

elde edildiğinden bu bir çelişkidir.

Benzer şekilde

$$\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \bar{d}(I_2 - \liminf X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) > r\} \in I_2$$

olduğu gösterilebilir.

Teorem 4.1.3. $(X_{\eta\varsigma})$ dizisi için $I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma}) \neq \emptyset$ ise

$$I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma}) \subseteq [I_2 - \limsup X_{\eta\varsigma} - r, I_2 - \liminf X_{\eta\varsigma} + r]$$

dir.

İspat. $\varepsilon > 0$ ve $\tilde{X} \in I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ olsun. Bu takdirde

$$\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq r + \varepsilon\} \in I_2$$

dir. Yani $K_1 \in I_2$ olacak şekilde $(\eta, \varsigma) \in K_1$ için

$$\sup_{0 \leq \gamma \leq 1} \max \left\{ \left| \underline{X}_{\eta\varsigma}^\gamma - \tilde{\underline{X}}^\gamma \right|, \left| \overline{X}_{\eta\varsigma}^\gamma - \tilde{\overline{X}}^\gamma \right| \right\} < r + \varepsilon$$

veya

$$\sup_{0 \leq \gamma \leq 1} \max \left| \underline{X}_{\eta\varsigma}^\gamma - \tilde{\underline{X}}^\gamma \right| < r + \varepsilon \text{ ve } \sup_{0 \leq \gamma \leq 1} \max \left| \overline{X}_{\eta\varsigma}^\gamma - \tilde{\overline{X}}^\gamma \right| < r + \varepsilon$$

dir.

Böylece $K_1 \notin I_2$ olacak şekilde her bir $(\eta, \varsigma) \in K_1$ için

$$\tilde{X} - (r_1 + \varepsilon) < X_{\eta\varsigma} < \tilde{X} + (r_1 + \varepsilon)$$

dir.

Burada iki durum elde edilir.

İlk olarak

$$\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : X_{\eta\varsigma} < \tilde{X} + (r_1 + \varepsilon)\} \notin I_2$$

yani $\tilde{X} + (r_1 + \varepsilon) \in B_x$ ve Yardımcı Teorem 4.1.1. den

$$I_2 - \limsup X_{\eta\varsigma} := \sup B_x = \varphi \leq \tilde{X} + (r_1 + \varepsilon)$$

dir.

İkinci olarak

$$\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : X_{\eta\varsigma} > \tilde{X} - (r_1 + \varepsilon)\} \notin I_2,$$

yani $\tilde{X} - (r_1 + \varepsilon) \in A_x$ ve Yardımcı Teorem 4.1.1. den

$$I_2 - \liminf X_{\eta\varsigma} := \inf A_x = \varphi \geq \tilde{X} - (r_1 + \varepsilon_1)$$

dir. Böylece $\tilde{X} \in [I_2 - \limsup X_{\eta\varsigma} - r, I_2 - \liminf X_{\eta\varsigma} + r]$ olduğu ispatlanır.

Teorem 4.1.4. $X = (X_{\eta\varsigma})$ dizisinin r - I_2 -limit kümesinin çapı $2r$ den büyük değildir.

İspat. Tersini kabul edelim. Bu durumda $l = \bar{d}(Y, Z) > 2r$ koşulunu sağlayan $Y, Z \in I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ mevcuttur.

$\varepsilon \in (0, \frac{l}{2} - r)$ keyfi olsun. $Y, Z \in I_2 - LIM_{X_{\eta\varsigma}}^r$ olduğundan

$$A_1 := \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y) \geq r + \varepsilon$$

ve

$$A_2 := \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Z) \geq r + \varepsilon\}$$

olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $A_1 \in I_2$ ve $A_2 \in I_2$ dir. Böylece her bir $(\eta, \varsigma) \in A = A_1^c \cap A_2^c$ için

$$\bar{d}(Y, Z) \leq \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y) + \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Z) < 2(r + \varepsilon) < 2\left(r + \frac{l}{2} - r\right) = l = \bar{d}(Y, Z)$$

dir. Ancak bu bir çelişkidir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.5. $(X_{\eta\varsigma})$ dizisinin $r-I_2$ limit noktaları kümesi kapalıdır.

İspat. Eğer $I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma}) = \emptyset$ ise ispat açıktır. $I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma}) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. $\tilde{Y}$ bulanık sayısına yakınsak keyfi bir $(Y_{\eta\varsigma})$ dizisi alınsın. $\tilde{Y} \in I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ olduğu gösterilmelidir.

$\varepsilon > 0$ olsun. $Y_{\eta\varsigma} \rightarrow \tilde{Y}$ olduğundan, her $(\eta, \varsigma) > (\eta, \varsigma)_{\frac{\varepsilon}{2}}$ için

$$\bar{d}(Y_{\eta\varsigma}, \tilde{Y}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $(\eta, \varsigma)_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vardır. $(\eta_0, \varsigma_0) > (\eta, \varsigma)_{\frac{\varepsilon}{2}}$ sağlayan $(\eta_0, \varsigma_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ seçilsin. O halde $\bar{d}(Y_{\eta_0\varsigma_0}, \tilde{Y}) < \frac{\varepsilon}{2}$ yazılır.

Diğer taraftan $(Y_{\eta\varsigma}) \subseteq I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ olduğundan $(Y_{\eta_0\varsigma_0}) \subseteq I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ dir. Buradan

$$\left\{ (\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y_{\eta_0\varsigma_0}) \geq r + \frac{\varepsilon}{2} \right\} \in I_2$$

olur. Keyfi bir

$$(p, q) \in \left\{ (\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y_{\eta_0\varsigma_0}) < r + \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

seçildiğinde $\bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y_{\eta_0\varsigma_0}) < r + \frac{\varepsilon}{2}$ elde edilir ve

$$(p, q) \in \left\{ (\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{Y}) < r + \varepsilon \right\}$$

oldüğundan

$$\bar{d}(X_{pq}, \tilde{Y}) \leq \bar{d}(X_{pq}, Y_{\eta_0 \varsigma_0}) + \bar{d}(Y_{\eta_0 \varsigma_0}, \tilde{Y}) < r + \varepsilon$$

sağlanır. Buradan

$$\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{Y}) < r + \varepsilon\} \supseteq \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y_{\eta_0 \varsigma_0}) < r + \frac{\varepsilon}{2}\}$$

kapsaması elde edilir.

$$\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y_{\eta_0 \varsigma_0}) < r + \frac{\varepsilon}{2}\} \notin I_2$$

olduğundan

$$\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{Y}) < r + \varepsilon\} \notin I_2$$

olur. Bu ise $\tilde{Y} \in I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.6. $(X_{\eta\varsigma})$ dizisi $\tilde{X}$ bulanık sayısına I_2 - yakınsak olmak üzere her $(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $\bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y_{\eta\varsigma}) \leq r$ ise $(X_{\eta\varsigma})$ dizisi $\tilde{X}$ sayısına $r - I_2$ -yakınsaktır.

İspat. Kabulden, her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq \varepsilon\} \in I_2$$

dir. Ayrıca $(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $\bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y_{\eta\varsigma}) \leq r$ olduğundan

$$\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq r + \varepsilon\} \subseteq \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \bar{d}(Y_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq \varepsilon\}$$

kapsaması sağlanır. Böylece $A(\varepsilon) = \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq r + \varepsilon\} \in I_2$ elde edilir.

Teorem 4.1.7. Eğer $X = (X_{\eta\varsigma})$ dizisi $\tilde{X}$ sayısına $I_2 -$ yakınsak ise $I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma}) = \overline{B_r}(\tilde{X}) := \{\mu \in L(\mathbb{R}): \bar{d}(\mu, \tilde{X}) \leq r\}$ dir.

İspat. $A_1(\varepsilon) := \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y) \geq \varepsilon\}$ olsun. Kabulden $A_1(\varepsilon) \in I_2$ dir.

$Y \in \overline{B_r}(\tilde{X})$ alınsın. $A_1^c(\varepsilon) = \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y) < \varepsilon\}$ olmak üzere her $(\eta, \varsigma) \in A_1^c(\varepsilon)$ için

$$\bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y) \leq \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) + \bar{d}(\tilde{X}, Y) < \varepsilon + r$$

olduğundan $Y \in I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ elde edilir.

$A_2(\varepsilon) := \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq r + \varepsilon\}$ olsun. Keyfi bir $Y \in I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ alınsın. Böylece $A_2(\varepsilon) \in I_2$ dir. Ayrıca $X = (X_{\eta\varsigma})$ dizisi $\tilde{X}$ sayısına $I_2 -$ yakınsak olduğundan $A_1(\varepsilon) \in I_2$ dir.

Her $(\eta, \varsigma) \in A_1^c \cap A_2^c$ için

$$\bar{d}(Y, \tilde{X}) \leq \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, Y) + \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) < 2\varepsilon + r$$

olduğundan $Y \in \overline{B_r}(\tilde{X})$ dir.

Yardımcı Teorem 4.1.2. $I_2(\Gamma(X))$ kümesi, $(X_{\eta\varsigma})$ dizisinin tüm ideal yığılma noktaları kümesini göstermek üzere, herhangi bir $C \in I_2(\Gamma(X))$ ve her $\tilde{X} \in I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ için $\bar{d}(\tilde{X}, C) \leq r$ dir.

İspat: $C \in I_2(\Gamma(X))$ ve $\bar{d}(\tilde{X}, C) > r$ olacak şekilde $\tilde{X} \in I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ olsun.

$$\varepsilon := \frac{\bar{d}(\tilde{X}, C) - r}{3} \text{ olmak üzere}$$

$$\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq r + \varepsilon\} \supseteq \{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, C) < \varepsilon\}$$

kapsaması vardır. $C \in I_2(\Gamma(X))$ olduğundan

$$\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, C) < \varepsilon\} \notin I_2$$

elde edilir. Böylece,

$$\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq r + \varepsilon\} \notin I_2$$

ele edilir. Bu ise $\tilde{X} \in I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ gerçeği ile çelişir.

Teorem 4.1.8.

- i. $C \in I_2(\Gamma(X))$ ise $I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma}) \subseteq \overline{B_r}(C)$ dir
- ii. $I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma}) = \bigcap_{C \in I_2(\Gamma(X))} \overline{B_r}(C) = \{\tilde{X} \in L(\mathbb{R}) : I_2(\Gamma(X)) \subseteq \overline{B_r}(X_*)\}$ dir.

İspat.

- i. $\tilde{X} \in I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ ve $C \in I_2(\Gamma(X))$ olsun. Yardımcı Teorem 4.1.2 den $\bar{d}(\tilde{X}, C) \leq r$ dir.

Aksi takdirde $\varepsilon = \frac{\bar{d}(\tilde{X}, C) - r}{3}$ için

$$\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq r + \varepsilon\} \notin I_2$$

elde edilir. Bu ise $\tilde{X} \in I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ olması ile çelişir.

ii. (i) den $I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma}) \subseteq \overline{B_r}(C)$ olduğu açıktır. Eğer $\overline{B_r}(C) \subseteq I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$

olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur.

$Y \in \bigcap_{C \in I_2(\Gamma(X))} \overline{B_r}(C)$ olsun. Bu takdirde her $C \in I_2(\Gamma(X))$ için $\bar{d}(Y, C) \leq r$ dir. Bu ise $I_2(\Gamma(X)) \subseteq \overline{B_r}(C)$ olduğunu yani,

$$\bigcap_{C \in I_2(\Gamma(X))} \overline{B_r}(C) = \{\tilde{X} \in L(\mathbb{R}) : I_2(\Gamma(X)) \subseteq \overline{B_r}(\tilde{X})\}$$

olduğunu gösterir.

Şimdi $Y \notin I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ olsun. Bu durumda

$$\{(\eta, \varsigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{d}(X_{\eta\varsigma}, \tilde{X}) \geq r + \varepsilon\} \notin I_2$$

olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. Bu ise $\bar{d}(Y, C) \geq r + \varepsilon$ olacak şekildeki C nin $(X_{\eta\varsigma})$ dizisinin bir I_2 -yığılma noktası olduğunu gösterir. Yani,

$$I_2(\Gamma(X)) \not\subseteq \overline{B_r}(\tilde{X}) \text{ ve } Y \notin \{\tilde{X} \in L(\mathbb{R}) : I_2(\Gamma(X)) \subseteq \overline{B_r}(\tilde{X})\}$$

dir. Böylece, $Y \in \{\tilde{X} \in L(\mathbb{R}) : I_2(\Gamma(X)) \subseteq \overline{B_r}(\tilde{X})\}$ dir ve sonuç olarak $\{\tilde{X} \in L(\mathbb{R}) : I_2(\Gamma(X)) \subseteq \overline{B_r}(\tilde{X})\} \subseteq I_2 - LIM^r(X_{\eta\varsigma})$ elde edilir.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, Babaarslan ve Tuncer (2020) tarafından tanımlanan çift bulanık sayı dizilerinin kaba yakınsaklığı kaba istatistiksel yakınsaklık kavramına genelleştirilmiştir. Ayrıca, bu çift diziler için kaba istatistiksel limit kümesi tanımlanarak bu kümenin bazı özellikleri incelenmiştir. Dahası, çift bulanık sayı dizilerinin kaba ideal yakınsaklığı ve kaba çift Cauchy dizisi tanımlanarak aralarındaki ilişki gösterilmiştir. Son olarak, kaba ideal limit kümesi tanımlanarak bu kümenin geometrik ve topolojik özelliği incelenmiştir.



6. KAYNAKLAR

- Akcay, F. G., Aytar, S. (2015). Rough convergence of a sequence of fuzzy numbers, *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications* 7(4), 17-23.
- Aytar, S. (2004). Statistical limit points of sequences of fuzzy numbers, *International Sciences* 165, 129-139.
- Aytar, S. (2008). Rough statistical convergence, *Numerical Functional Analysis and Optimization* 29, 291-303.
- Babaarslan, F., Tuncer, A. N. (2020). Rough convergence of double sequences of fuzzy numbers. *Journal of Applied Analysis and Computation*, 10(4), 1335-1342.
- Das, P., Kostyrko, P., Wilczyński, W., Malik, P. (2008). I and I*-convergence of double sequences. *Mathematica Slovaca*, 58(5), 605-620.
- Debnath, S., Rakshit, D. (2019). Rough statistical convergence of a sequence of fuzzy numbers, *Mathematica* 61, 33–39.
- Dündar, E. (2016). On rough I_2 -convergence of double sequences. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 37(4), 480-491.
- Dündar, E., Çakan, C. (2014). Rough convergence of double sequences. *Demonstratio Mathematica*, 47(3), 638-651.
- Dündar, E., Talo, O. (2013). I_2 -convergence of double sequences of fuzzy numbers. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 10(3), 37-50.
- Freedman, A., Sember, J. (1981). Densities and summability. *Pacific Journal of Mathematics* 95(2), 293-305.
- Kiş, O., Ünal, H. K. (2021). Rough statistical convergence of difference double sequences in normed linear spaces. *Honam Mathematical Journal* 43(1), 47-58.
- Kostyrko, P., Salát, T. ve Wilczyński W. (2000). I-convergence. *Real Analysis Exchange*, 26(2): 669-686.

- Kumar, V., & Kumar, K. (2008). On the ideal convergence of sequences of fuzzy numbers. *Information Sciences*, 178(24), 4670-4678.
- Kuratowski, C. (1958). *Topologie I*. PWN, Warszawa.
- Matloka, M. (1986). Sequences of fuzzy numbers, *Busefal* 28, 28-37.
- Nagata, J., (1974). *Modern general topology*. North-Holland Publ., Comp., Amsterdam-London.
- Nuray, F. (2008). I-convergence of sequences of fuzzy numbers. *new mathematics & Natural Computation*, 4(2).
- Nuray, F., Savaş, E. (1995). Statistical convergence of sequence of fuzzy numbers, *Math. Slovaca* 3(45), 269-273.
- Pal, S. K., Debraj, C. H., Dutta, S. (2013). Rough ideal convergence. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 42(6), 633-640.
- Phu, H. X. (2001). Rough convergence in normed linear spaces, *numer. Funct. Anal. and Optimiz* 22, 201-204.
- Puri, M. L., Ralescu, D. A., 1983. Differentials of fuzzy functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 91 (2): 552-558.
- Savaş, E., 1996. A note on double sequences of fuzzy numbers. *Turkish Journal of Mathematics*, 20: 175–178.
- Savaş, E., Mursaleen, M. , 2004. On statistically convergent double sequences of fuzzy numbers. *Information Sciences*, 162: 183–192.